CATÁLOGO DE TAREAS QUE POTENCIAN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL

JULIETH ALEXANDRA GARAVITO CLAVIJO

WILDER FABIAN GÓMEZ MORA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2017

CÁTALOGO DE TAREAS QUE POTENCIAN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL

JULIETH ALEXANDRA GARAVITO CLAVIJO

WILDER FABIAN GÓMEZ MORA

Trabajo de grado para optar al título de

Licenciado en Matemáticas

Asesor

EDGAR ALBERTO GUACANEME

Doctor en Educación - Énfasis Educación Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2017

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales se ha requerido el trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos.

DEDICATORIA

A mi madre Lucy Mora y mi abuela Ana, por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien, por sus incontables sacrificios, pero más que nada, por su amor.

Wilder Gómez

A mis padres por su amor, que ha sido y será el motor de mi vida, por su apoyo incondicional y sus enseñanzas.

Julieth Garavito

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	CATÁLOGO DE TAREAS QUE POTENCIAN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL
Autor(es)	Garavito Clavijo, Julieth Alexandra; Gómez Mora, Wilder Fabián.
Director	Guacaneme Suarez, Edgar Alberto
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2017. 153 P.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	PENSAMIENTO VARIACIONAL, VARIACIÓN, CAMBIO.

2. Descripción

El estudio es generado a partir de algunas tareas que potencian el desarrollo del pensamiento variacional con el fin de suministrar información clara y puntual a profesores en formación o en ejercicio, tratando de resaltar que en las revistas especializadas en Educación Matemática en Español y en las memorias de eventos académicos en Educación Matemática, la comunidad académica ha presentado tareas que promueven el desarrollo del pensamiento variacional y que estas deberían constituir objeto de estudio por parte de los profesores.

El reporte describe los documentos consultados y análisis de cada una de las tareas allí reportada, tal análisis se realizó a partir de seis categorías: presentación, contexto, tipo de representación, tratamiento de las magnitudes y niveles de razonamiento; esta última categoría está sujeta al marco teórico propuesto por Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu (2003). Por último se realizó una página web que recopila los resultados obtenidos y que pretende ser herramienta para los docentes y maestros en formación.

3. Fuentes

Marco de referencia: Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Godino, J., Batanero, C., & Roa, R. (2002), Valero, P., & Skovsmose, O. (2012), Camargo, L., & Guzmán, A. A. (2005).

Revistas de Educación Matemática: Benítez-Mojica, D., & Bueno-Tokunaga, A. (2009), Camacho, M., & Santos, L. (2004), Fiallo-Leal, J. E., & Parada-Rico, S. E. (2014), Guacaneme, E., & Perry, P. (2000); Hernández, E., Galindo, O., & Santana, K. (2003), Maury-Mancilla, E., Palmezano, G., & Cárcamo, S. (2012), Nieto-Saldaña, N., Chavira-Jara, H., & Viramontes, J. de D. (2010), Osorio, J., Ayola, G., Castro, W., Hilduara-Velásquez, E., & Cisneros, J. (2015), Ramos-Márquez, L. I., & Jiménez-Rodríguez, J. R. (2014), Sepúlveda-López, A., Vargas-Alejo, V., &

Cristóbal-Escalante, C. (2013), Tirado-Muñoz, J. M. (1991), Villa-Ochoa, J. A. (2012 a, 2012 b). Vrancken, S., Engler, A., Giampieri, M., & Müller, D. (2015).

Encuentros: Gómez, J. R., Orozco, J. L., Benavidez, G., Navarro, N., & Guacaneme, E. (2012, 2013). Vrancken, S., Schmithalter, M., Englery, A., & Müller, D. (2014).

Políticas nacionales: Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998, 2006)

4. Contenidos

En los primeros capítulos se presenta el proceso de construcción del problema y el asunto de investigación, posteriormente, se expresan los referentes conceptuales del pensamiento variacional en educación matemática y una perspectiva bajo los niveles de covariación que permitieron el desarrollo del trabajo.

En el cuarto capítulo se presentan los documentos consultados y aprovechables para el análisis. Por último, los capítulos cinco, seis y siete presentan los análisis generados, un enlace a la página web, las conclusiones y descripción de posibles nuevas inquietudes investigativas.

5. Metodología

Nuestros intereses y propósitos no llevan a elegir una metodología basada en los cuestionamientos ¿En dónde buscar?, ¿Qué buscar? ¿Cómo buscar? (Revista SUMA, Revista Escenarios, Revista Números, Revista UNO, Revista EMA, Revista TED, Revista digital Matemáticas, educación e Internet, Revista Científica, Revista El Cálculo y su enseñanza) y en las memorias de eventos académicos en Educación Matemática (Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa, Memorias del Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Memorias del 4to Seminario Taller de Educación Matemática, Memorias del Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática) Y a medida que se resolvieron estas inquietudes surgieron unas nuevas como la manera en la cual filtramos y clasificamos la información que resulta de estas búsquedas (títulos afines, palabras clave, tipos de tareas, etc.). Posteriormente identificar cuáles de estos artículos encontrados realmente aportaba a nuestro objeto de estudio, para finalmente desarrollar un análisis de las situaciones expuestas en los artículos de educación matemática.

6. Conclusiones

A partir de la experiencia que tuvimos al realizar el trabajo de grado y las reflexiones que surgieron a partir de este, se consolidaron las siguientes conclusiones

1. Los maestros debemos incorporar en nuestra forma de ser y hacer las búsquedas especializadas, aunque están puedan tornarse dispendiosas debido al desconocimiento de dónde y cómo buscar, lo que permite estar en constante formación y obtener información de primera mano. A raíz de esto, consideramos pertinente proponer que se enfatice, en los diferentes espacios académicos, en la realización de ese tipo de búsquedas y

el uso de bases de datos para lograr tal fin. A pesar de lo ya mencionado, la Licenciatura también ofrece la electiva "Taller de Apoyo escritural y uso de recursos bibliográficos" la cual jugaría un papel importante para lograr tal propósito y además suplir los vacíos que se tienen a cerca de bases de datos como fuentes de información, pero para esto debe otorgársele mayor relevancia en el actual Plan de estudios.

2. La caracterización propuesta para los contextos de las tareas, nos lleva a reflexionar acerca de las propuestas que llevamos nuestros estudiantes en el aula, ya que puede ser que estemos planteando tareas ricas en escenario pero escasas en ámbito o que el escenario en que se plantea nos lleve a caer en el error de plantear tareas que no potencian el pensamiento matemático que en verdad se persigue.
3. Con respecto al análisis de las tareas podemos concluir que:
   - La mayoría de las situaciones están propuestas en escenarios semireales que incluyen geometría. Por su parte el ámbito que predomina es el Cálculo, específicamente la optimización y reconocimiento de la variación.
   - Si nos referimos a la mediación instrumental podemos decir que hay dos grandes grupos. Primero, las tareas que usan algún software, bien sea de geometría dinámica como geogebra o Cabri, u otros como Excel y Modellus, Segundo, los que usan materiales concretos o se reduce al uso de lápiz y papel. De lo anterior, es evidente que utilizar algún tipo de software ayuda a la comprensión de la variación y el cambio y por o tanto al desarrollo de los niveles de razonamiento covariacional.
   - En su gran mayoría se da un tratamiento cuantitativo numérico a las magnitudes y de hecho parece ser que es necesario realizarlo a partir del nivel 3. Sería interesante en trabajos posteriores desarrollar todas las tareas en términos cuantitativos no numéricos y ver qué resultados se pueden obtener de esa forma y si este es un tratamiento que privilegia el desarrollo del pensamiento covariacional.
   - Representar un objeto matemático es más de un sistema de representación ayuda a mejorar la comprensión del mismo, y, en general, las tareas analizadas siguen ese supuesto ya que incluyen dos o más tipos de representación.
   - No todas las tareas abordan todos los niveles de razonamiento variacional, en su mayoría solo abordan hasta el nivel 3, lo que indica que hace falta reforzar la idea de razón de cambio y razón de cambio instantánea, aun cuando las tareas sean presentadas en niveles de educación primaria o básica, ya que desde allí se pueden ir poniendo los cimientos para posteriormente reconocer y entender qué es el cambio en términos de razones de cambio.

Elaborado por:	Garavito Clavijo, Julieth Alexandra Gómez Mora, Wilder Fabián.
Revisado por:	Guacaneme Suarez, Edgar Alberto

Fecha de elaboración del Resumen:	31	10	2017

TABLA DE CONTENIDO

GRÁFICOS

TABLAS

1 INTRODUCCIÓN

Este documento contiene el trabajo de grado *"Catálogo de tareas que potencian el desarrollo del pensamiento variacional"*. El cual se presenta como monografía asociada al interés personal de los docentes en formación, en el marco de la Licenciatura en Matemáticas del departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Asume como objeto de estudio algunas tareas que potencian el desarrollo del pensamiento variacional con el fin de suministrar información clara y puntual a profesores en formación o en ejercicio tratando de resaltar que en las revistas especializadas en Educación Matemática en Español (Revista SUMA, Revista Escenarios, Revista Números, Revista UNO, Revista EMA, Revista TED, Revista digital Matemáticas, educación e Internet, Revista Científica, Revista El Cálculo y su enseñanza) y en las memorias de eventos académicos en Educación Matemática (Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa, Memorias del Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Memorias del 4to Seminario Taller de Educación Matemática, Memorias del Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática) la comunidad académica ha presentado tareas que promueven el desarrollo del pensamiento variacional y que estas deberían constituir objeto de estudio por parte de los profesores.

El estudio detallado de estas revistas permitió organizar su información mediante un resumen, la cantidad de tareas en torno a la variación que contiene el artículo y una red temática. Cabe anotar que en algunos de estos artículos el resumen fue adaptado para que dicha información sea clara precisa y oportuna; la cual será divulgada por medio de una página web que será una herramienta compartida con los docentes.

Por lo tanto, el documento presenta en primer lugar los aspectos generales que se tuvieron en cuenta a la hora de realizar el trabajo. Las causas por la cuales se dio inicio al estudio de esta monografía y por supuesto sus objetivos primordiales, las tareas encontradas en los artículos consultados y los criterios tenidos en cuenta para su análisis.

De la misma manera se mostrará la recopilación de las tareas encontradas mediante un catálogo, dando a conocer así el trabajo que se realizó, su organización, sendas descripciones y análisis.

Para finalizar, se realiza una reflexión del trabajo en sí y de las situaciones y aspectos a resaltar durante el desarrollo de este trabajo.

2 GENERALIDADES DEL ESTUDIO

2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo no ha sido una tarea tan sencilla, ya que, entre otros asuntos, se ha hecho especial énfasis en procesos algorítmicos y no en el Cálculo, de ahí la gran cantidad de documentos que reportan obstáculos y dificultades existentes. En palabras de Michelle Artigue (1995), numerosas investigaciones realizadas muestran, con convergencias sorprendentes, que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas.

Lo anterior conduce a pensar en dos asuntos importantes. Primero, ¿se deben buscar nuevas formas de enseñar el Cálculo, y más allá de eso sentar bases que hagan énfasis en el pensamiento variacional y no en lo algebraico como se ha hecho tradicionalmente? Segundo, ¿cómo podría definirse un curso de Cálculo incorporando los aspectos que se constituyen como su base, es decir la variación y el cambio? No es tarea sencilla dar solución este último interrogante, ya que esto implicaría hacer una nueva propuesta curricular. Sin embargo, atendiendo a los dos asuntos planteados, si se puede pensar en buscar una serie de herramientas que ayuden a los maestros a llevar nuevas propuestas al aula y potenciar en sus estudiantes el pensamiento variacional como una base fundamental para el estudio del Cálculo.

Ahora bien, tanto en el primer como en el segundo asunto, hay algo en común: se deben realizar búsquedas, y es aquí dónde nace nuestra principal preocupación. Es evidente, que existe un desconocimiento por parte de los maestros acerca de dónde y cómo se deben realizar búsquedas eficientes que arrojen resultados confiables, veraces, con calidad de contenido y lo más importante especializados en el tema que nos compete. A pesar de la existencia de bases de datos que permiten efectuar búsquedas más eficiente acerca de investigaciones, realizadas sobre un tema en particular, y publicadas en revistas científicas especializadas e indexadas, sigue existiendo una tendencia a utilizar motores de búsqueda generales (Yahoo, Altavista, Google y otros), los cuales resultan mucho más cómodos de utilizar a la hora de buscar información en el mar de documentos de Internet, debido a su gran cobertura de contenidos, no obstante la facilidad que brindan para nada se constituyen en una fuente de información en la que se pueda basar una investigación, y muchos menos las propuestas que se lleven al aula, ya que allí se está involucrando directamente la forma y a calidad con la que aprenden los estudiantes, en otras palabras se está involucrando su futuro.

2.2 JUSTIFICACIÓN

Este trabajo de grado tiene como fin cumplir con lo reglamentado para optar por el título de Licenciados en Matemáticas, además contribuir al proceso de enseñanza y aprendizaje de las mismas, usando las diferentes fuentes que se encuentran disponibles en la red y que muchas veces no son utilizadas como una estrategia a favor del conocimiento matemático.

Este proyecto se origina en el marco del espacio académico "Enseñanza y aprendizaje del Cálculo" del periodo 2015 – 1 orientado por el docente Edgar Alberto Guacaneme Suárez, donde se abordaron tareas específicas en torno a la variación, las cuales además de ayudar a la comprensión de diversos conceptos matemáticos estudiados con anterioridad en los diferentes cursos de Cálculo, permitieron contemplar otra posibilidad de enseñarlos promoviendo el aprendizaje de los conceptos y procesos fundamentales del Cálculo en la Educación Básica y Media.

Añadiendo a lo anterior, en nuestra experiencia como estudiantes y maestros en formación hemos percibido que la enseñanza del Cálculo usualmente se realiza a través de una secuencia de temas (números reales, intervalos, límites, derivadas) pero no parece haber una preocupación por hacer una introducción al Cálculo, sino por hacer un acercamiento de tipo algorítmico con un fuerte énfasis algebraico, pero poco conceptual.

Al parecer los docentes hacen poco en darse a la tarea de buscar diferentes tareas que le permitan desarrollar actitudes matemáticas en sus estudiantes y parten de cero para las planeaciones de sus clases.

Este trabajo asume entonces inspirar a los docentes en su autoformación, búsqueda y orientación de la actividad matemática.

2.3 OBJETIVOS

2.3.1 Objetivo General

Proporcionar una página Web donde se ubiquen y discutan tareas (o referencias a tareas) para promover el desarrollo del pensamiento variacional en la educación Básica y Media, que eventualmente pueda ser usado por profesores o maestros en formación para el diseño de sus tareas que favorezcan el aprendizaje de las Matemáticas.

2.3.2 Objetivos Específicos

- Brindar una herramienta a los profesores de Matemáticas para potenciar el pensamiento variacional en los estudiantes.
- Cualificar la conceptualización sobre el pensamiento variacional.
- Brindar un posible complemento de fuentes bibliográficas para el curso “Enseñanza y aprendizaje del Cálculo” en la Licenciatura en Matemáticas de la UPN.
- Analizar tareas que potencian el desarrollo del pensamiento variacional desde el marco conceptual de Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu (2003).

3 MARCO DE REFERENCIA

En este marco de referencia se abordarán varios aspectos que son de vital importancia para el cumplimiento del objetivo principal del desarrollo de este documento. En primera instancia se dará una mirada a qué es el pensamiento variacional desde la perspectiva de las Políticas Nacionales Curriculares (Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y Lineamientos curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) e historia. En un segundo momento se describirá cómo se realizará el análisis de las tareas encontradas en revistas de Educación Matemática y actas, referidas al mismo tema.

3.1 Pensamiento Variacional

3.1.1 Políticas Nacionales

Según los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) el estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas. El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación en la vida práctica.

Existen varias herramientas que pueden brindar elementos que contribuyen en la iniciación del estudio de la variación. El uso de tablas se constituye en un elemento para iniciar el estudio de la función, pues es un ejemplo concreto de función presentada numéricamente, que posteriormente se pueden usar para llevar a los estudiantes a la graficación de situaciones problema de tipo concreto. Por su parte la gráfica cartesiana tiene como fin abordar los aspectos de la dependencia entre variables, gestando la noción de función como dependencia y puede ser introducida tempranamente en el currículo por cuanto hacen posible el estudio dinámico (es decir haciendo uso de algún software) de la variación.

Sin duda, las funciones juegan un papel importante en el desarrollo del pensamiento variacional ya que su introducción prepara al estudiante para comprender la naturaleza arbitraria de los conjuntos en que se le define, así como a la relación establecida entre ellos. A la conceptualización de la función y los objetos asociados (dominio, rango...) le prosigue el estudio de los modelos elementales (lineal, afín, cuadrático, exponencial) priorizando en éstos el estudio de los patrones que los caracterizan (crecientes, decrecientes).

En concordancia con lo anterior, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) describen el pensamiento variacional como aquel que tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos; debe también atender al estudio de las actividades matemáticas propias de los procesos infinitos. Así mismo se resalta que este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas.

Por otra parte, se hace especial énfasis en cómo potenciar o desarrollar el pensamiento variacional en la escuela, desde la Educación Básica Primaria hasta la Media. Se menciona en un primer momento el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente, y el proceso de generalización que subyace a ellos.

En la Educación Básica Secundaria, el sistema de representación más directamente ligado con las variaciones es el sistema algebraico, pero estas también se expresan por medio de otros tipos de representaciones como las gestuales, las del lenguaje ordinario o técnico, las numéricas (tablas), las gráficas (diagramas) y las icónicas, que actúan como intermediarias en la construcción general de los procedimientos.

3.1.2 Historia

Es importante también hacer un breve recorrido histórico por el surgimiento del pensamiento variacional y algunos términos que subyacen a él. Para este propósito se tendrá en cuenta lo expuesto por Camargo y Guzmán (2005) en su libro *Elementos para una didáctica del pensamiento variacional*. De manera general, las autoras identifican cinco momentos de evolución de los conceptos de razón de cambio y pendiente: búsqueda de regularidades y medición, establecimiento de razones y proporciones, estudio de movimientos a través de gráficos, procedimientos heurísticos para estudios variacionales y nacimiento de dos ramas de la matemática: el cálculo diferencial y la geometría analítica. A continuación, se describe cada uno de esos momentos y se agrega un cuadro que los resume acertadamente y pone en evidencia los elementos más importantes de cada etapa.

a. Búsqueda de regularidades y medición: Las primeras evidencias de la importancia de entender el mundo cambiante se remontan a la época de los babilonios y los egipcios, quienes plasmaron en las tablillas babilónicas valores cambiantes y utilizaron patrones de medidas constantes para la construcción de las pirámides egipcias. En este último, el problema radicaba en mantener una pendiente uniforme en cada cara y la misma en las cuatro caras de la pirámide. Se solía utilizar la relación avance-vs-subida. Su interés era netamente práctico.

Aspectos	Razón de Cambio	Pendiente
Status matemático	Protomatemático: está presente en forma implícita en la búsqueda de regularidades de las medidas, para los trabajos de construcción. Los egipcios tenían un sentido práctico de variación.	Paramatemático: en la construcción de las pirámides se utilizaba una herramienta en forma de escuadra que permitía conservar constante la inclinación de las paredes de las pirámides.
Situaciones problemáticas	Construcciones arquitectónicas en las que se buscaba regularidad en las medidas. Construcción de tablillas de datos ligadas a la búsqueda de regularidades de los fenómenos naturales.	
Invariantes	Relación entre la subida y el avance, al medir la inclinación de una pared.	
Representaciones	Cuerdas con nudos amarradas en forma de triángulos rectángulos. Instrumentos como el seqt para mantener la relación entre subida y avance.	

b. Establecimiento de razones y proporciones: Son varios los autores que estudiaron las razones y las proporciones, entre los que se destacan los egipcios quienes manifestaron especial interés en convertir en objeto de estudio aquello que anteriormente se trabajaba de manera empírica. Así pues, fue Tales de Mileto, quien hacia los años 585 a.C. centró su atención en las proporciones, particularmente en establecer comparaciones entre medidas geométricas de segmentos; además desarrolló la teoría de la semejanza. En general, Tales buscaba un método indirecto para acceder a aquello que en la práctica. (Recalde et al, 1999 citado por Camargo & Guzmán, 2005).

   Posteriormente, Pitágoras, desde su perspectiva de teoría de las proporciones se concentró en demostrar “la armonía cósmica a través del establecimiento de razones numéricas entre cantidades discretas y la comparación de estas, para establecer proporciones”. Así mismo, fue importante el trabajo que realizó la escuela pitagórica al tratar de mostrar en qué casos cuatro números están en proporción ($a : b \, :: c : d$).

Por su parte Eudoxo (408 – 355 a.C.) reformula la teoría de las proporciones y la definición se presenta en el libro V de Euclides[1]. Además, se preocupó por aclarar que las magnitudes tienen que ser del mismo tipo, afirmación que dio lugar a la restricción que se conservaría hasta el surgimiento del cálculo de establecimiento de razones homogéneas.

Euclides (300 a.C.) en su libro Elementos, oficializa la separación entre la aritmética y la geometría, ya propuesta por otros autores. Euclides hace dos tratamientos diferentes para las proporcione, uno para los números y otro para las magnitudes. De este último, es importante resaltar que clasifica las magnitudes en conmensurables e inconmensurables.

Finalmente, Arquímedes (287 – 212 a.C.) nuevamente se preocupa por problemas prácticos como la determinación de áreas y volúmenes e hizo uso de la razón geométrica para hallar sus fórmulas; además utilizó la Matemática en la confección de máquinas para el trabajo científico y la guerra. Es importante destacar que Arquímedes realizó estudio acerca de los lugares geométricos de puntos, caracterizando la espiral y las líneas tangentes a ella, lo que posteriormente, junto con su discusión de la variabilidad de la dirección del movimiento, dio lugar al Cálculo.

Aspectos	Razón de Cambio	Pendiente
Status matemático	Protomatemático: implícita en el concepto de razón.	Paramatemático: como herramienta en la medición directa o indirecta para hallar la razón trigonométrica entre los catetos de diferentes triángulos rectángulos semejantes.
Situaciones problemáticas	Mediciones directas e indirectas. Caracterización de movimientos usando la tangente a las curvas (Arquímedes).	
Invariantes	Razones geométricas entre magnitudes homogéneas.	
Representaciones	Sincopadas, de la forma $a : b :: c : d$ Las razones numéricas de expresaban a través de razones entre segmentos, pues tanto los números, como las magnitudes se representaban por segmentos. (Boyer, 1986)	

[1] "Se dice qué magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando, tomados cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera y cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, entonces los primeros equimúltiplos ambos exceden, son iguales o menores que los segundos equimúltiplos, tomados en el orden correspondiente"

c. Estudio de movimientos a través de gráficos: Gracias a que los matemáticos del colegio de Merton se propusieron predecir, utilizando herramientas matemáticas, el valor de una magnitud física que está cambiando, como la fuerza que actúa sobre un móvil que se desplaza por un camino inclinado, se dio un vuelco en el pensamiento matemático en la época que se ha denominado Baja Edad Media. La relación entre la Matemática y la Física dio origen a una nueva ciencia: la cinemática que se constituyó en la base del Cálculo.

   A Jordano de Namore se le debe la primera formulación correcta de la ley del plano inclinado en la que usó la razón geométrica para explicar la constancia de la razón del cambio entre magnitudes. Esta inclinación se expresa a partir de la razón geométrica entre las medidas de los segmentos respectivos.

   Por otra parte, Nicolás Oresme (132? – 1382) introdujo las representaciones geométricas para explicar relaciones entre magnitudes variantes, para ello ideo la representación de la medida de las variables físicas por medio de segmentos y uso de figuras geométricas para describir la variación de una magnitud. Estudiaba la variación de fenómenos físicos uniformes y no uniformes y a su vez los clasificó los movimientos en uniformemente uniformes, uniformemente diformes o diformemente diformes. Por medio de sus dibujos, Oresme, logró explicar el teorema de la velocidad media para cuantificar la velocidad de un movimiento uniformemente acelerado. Cantoral (1990) considera que este es el primer eslabón de lo sería posteriormente la función analítica, pues es la primera vez que se busca cuantificar un cambio relativo.

   Posteriormente, Galileo Galilei describe el mundo físico en términos de cantidades medibles (*v.gr.*, tiempo, distancia, fuerza y masa). Además, utiliza las representaciones geométricas de Oresme para los estudios de velocidades introduciendo técnicas específicas con las cuales llega a la determinación del teorema de la velocidad media.

Aspectos	Razón de Cambio	Pendiente
Status matemático	Paramatemático: herramientas para dar explicaciones respecto a leyes de mecánica.	
Situaciones problemáticas	Estudios de mecánica: identificación de relaciones entre magnitudes físicas en donde se intentaba dibujar la variación de dichas magnitudes por medio de segmentos.	
Invariantes	Reconocimiento de la constancia de la razón de cambio en movimientos uniformemente acelerados.	
Representaciones	Segmentos para representar magnitudes variables. Gráficos geométricos en donde se hacía un estudio global. Sintácticas: razón de diferencias entre la medida de los segmentos que representan las magnitudes que varían.	

d. Procedimientos heurísticos para estudios variacionales: En los siglos XVI y XVII, época de desarrollo industrial, surgió la necesidad de crear métodos matemáticos para la resolución de problemas como el flujo de líquidos, ángulos de refracción, etc. Debido a la insuficiencia de los métodos conocidos hasta ahora, se generó un campo de investigación en matemáticas en donde surgieron las nociones de variación y función analítica.

Continuando con los estudios realizados por los matemáticos de la escuela de Merton, se abrió un campo de la investigación que intentaba encontrar métodos para caracterizar matemáticamente las curvas. Descartes y Fermat, hacen uso por primera vez de las ecuaciones para mostrar la dependencia entre dos magnitudes y la razón de cambio del incremento de la magnitud dependiente respecto del incremento de la magnitud independiente.

Entre 1629 y 1636, Fermat desarrolla el método de la adigualdad en el que se hace uso de la diferencia fundamental, y por medio del cual se determinaban máximos y mínimos de una curva. Tal método se basa principalmente en tomar en cuenta las características del comportamiento de las magnitudes representadas en una gráfica en valores muy cercanos, incrementando la magnitud independiente. Posteriormente, Fermat utiliza su método para encontrar como trazar la recta tangente a una parábola en un punto dado y, por medio de ello, caracterizar la curva. Descartes, por su parte, desarrolló el llamado método, de construcción geométrica, del círculo, para caracterizar líneas tangentes a curvas y describir, mediante ellas, movimientos estudiados.

En 1996 L'Hospital publicó un libro, en donde menciona la importancia de las gráficas para representar y caracterizar los cambios de dichas magnitudes, entre otras cosas, también señala la importancia de estudiar de manera simultánea la diferencia entre los valores correspondientes a la magnitud independiente para lograr conocer la variación de las demás variables involucradas, lo anterior da lugar a la razón de cambio entre los incrementos de las magnitudes.

Es importante resaltar que, en el tratamiento geométrico realizado por Fermat y Descartes, se hace uso de la razón de diferencias (o razón de cambio) entre magnitudes geométricas, utilizando, en todos los caso, razones de cambio homogéneas.

Aspectos	**Razón de Cambio**	**Pendiente**
Status matemático	Paramatemático: herramientas para resolver los problemas de tipo matemático como el cálculo de máximos y mínimos y la identificación de tangentes a curvas.	
Situaciones problemáticas	Cálculo de máximos y mínimos; búsqueda de la caracterización de las tangentes a curvas. Búsqueda de nuevas formas de trabajar en matemáticas, que se salían de los cánones establecidos.	
Invariantes	Razón de cambio "homogéneas" entre las diferencias fundamentales de los valores de la función en puntos próximos y los valores de la magnitud independiente correspondientes.	
Representaciones	Notación científica para expresión de la razón de dichas diferencias; representaciones gráficas de dichas diferencias.	

e. Nacimiento de dos ramas de la matemática: el cálculo y diferencial y la geometría analítica:

Aspectos	**Razón de Cambio**	**Pendiente**
Status matemático	Matemático: los conceptos de pendiente y razón de cambio se constituyen en objetos matemáticos centrales dentro de las ramas de la matemática del cálculo y la geometría analítica.	
Situaciones problemáticas	Todas aquellas en las cuales se requiere la determinación de una razón de cambio instantánea como la velocidad instantánea, la rata de crecimiento instantánea, etc.	La pendiente se trabaja en el estudio de las ecuaciones lineales, como invariante ue caracteriza la ecuación de la recta.
Invariantes	Razón de cambio instantáneo.	Medida de la inclinación de la recta.
Representaciones	Expresiones sintácticas de la forma y/x y geométricas como el triángulo diferencial. Uso de variables dependientes en términos de las independientes.	Las correspondencias al algebra y a la geometría analítica.

3.2 Análisis de las tareas

Como se indicó, el objetivo principal de este documento es analizar y clasificar tareas propuestas por diversos autores en el campo del pensamiento variacional. De lo anterior surge la necesidad de establecer criterios y definir conceptos o términos, que podrían generar confusión, que permitan llevar a cabo tanto el análisis como la clasificación mencionada.

En ese sentido, como resultado del análisis de una primera tarea nacen los siguientes criterios para analizar las demás:

1. Presentación: Se describe en que consiste la tarea a analizar, y si es necesario se harán precisiones adicionales a cerca de en qué condiciones fue propuesta, es decir, en que institución, a qué población está dirigida, etc. También, cuando se requiera, se mostrará una representación gráfica que ayude al lector a contextualizarse en la situación planteada.

2. Contexto: Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas entienden una situación como el conjunto de problemas, proyectos, investigaciones, construcciones, instrucciones y relatos que se elaboran basados en las matemáticas, en otras ciencias y en los contextos cotidianos y que en su tratamiento generan el aprendizaje de los estudiantes. De lo anterior se identifican tres tipos contextos en los que se propone una situación: matemático, otras ciencias y cotidianos. Por su parte, Skovsmose (2000) propone tipos de referencia y los clasifica como[2]: exclusivamente matemático, semirreales y situaciones de la vida real. Los contextos semirreales no refieren a una realidad que de hecho podemos observar sino una realidad construida, por ejemplo, por él autor de un libro de texto.

   Atendiendo a lo anterior, para la caracterización del contexto de cada tarea proponemos dos categorías: escenario y ámbito. Para entender de qué trata cada una se hará una analogía y posteriormente se describirán formalmente. El escenario en el que se desarrolla la obra de teatro de Romeo y Julieta son las calles de Verona (Italia) una ciudad con un aire religioso. Sin embargo, la obra no es precisamente sobre religión o sobre la ciudad de Verona, su tema principal es el amor prohibido, es decir el ámbito.

[2] Otro autor que caracteriza de forma más profunda el contexto de las tareas es João Pedro da Ponte en su artículo *"Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos"*.

Así pues, el escenario de una tarea estará ligado a los contextos propuestos en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas y una de las categorías propuestas por Skovmose, es decir: matemático, otras disciplinas, cotidianos y semirreales. En caso de ser matemático o de otras disciplinas, se especifica a cuál de las ramas de las matemáticas o disciplina hace referencia, respectivamente. Por su parte, el ámbito pretende dar cuenta y razón acerca de cuál es el asunto matemático por el que realmente indaga el problema. Por ejemplo, una situación propuesta en un escenario de Geometría puede indagar por un problema de Cálculo, como la optimización de áreas, que sería el ámbito de esa situación.

3. Mediación instrumental: Es usual que las tareas estén mediadas por algún tipo de instrumento con el fin de facilitar la compresión o solución de misma. Los instrumentos, comúnmente, utilizados son materiales concretos (e.g., dados, embudos, arena, lápiz, papel, etc.) o algún tipo de software (Geogebra, Excel, Cabrí, etc.).

4. Tratamiento de las magnitudes: Aquí se pretende determinar si se está tratando la magnitud, o magnitudes, involucradas en el problema de manera cuantitativa o cuantitativa no numérica.

   Para ello es menester definir qué es magnitud, cuáles son los tipos y cómo entendemos la medición de la misma. Comencemos con la definición de magnitud, habitualmente se suele reservar el nombre de magnitud para los atributos o rasgos que varían de manera cuantitativa y continua (longitud, peso, densidad, etc.), o también de manera discreta (p. e., "el número de personas"); las cantidades son los valores de dichas variables. (Godino, Batanero, & Roa, 2002). Tal definición no es muy diferente a la que se da desde la Física:

   > El atributo sujeto a medición de un fenómeno, cuerpo o sustancia que es susceptible de ser distinguido cualitativamente y determinado cuantitativamente mediante un número y una referencia.[3]

   Antes de continuar, es importante definir cantidad. Batanero et al (2002) lo definen el valor que toma la magnitud en un objeto particular o "cantidad es el aspecto por el que se diferencian entre sí las porciones de la misma cosa o los conjuntos de la misma clase de

[3] Norma NTC-ISO/IEC 17025, versión 2005

cosas, por el cual esas porciones o esos conjuntos se pueden medir o contar" (Diccionario de M. Moliner).

Surge ahora la pregunta de cómo medir una magnitud. Con respeto a esto, Batanero et al (2002) afirman que medir una cantidad consiste en determinar las veces que esa cantidad contiene a la cantidad (o cantidades) que se toman como referencia (unidades de medida). Lo anterior podría entenderse, de acuerdo al tratamiento de las magnitudes que pretendemos realizar, como un tratamiento cuantitativo, por cuanto se asocia un valor a la cantidad de la magnitud[4].

No sucede así, si se comparan dos cantidades de magnitudes que tengan una misma cualidad, sin asignarles una medida. Por ejemplo, si se tienen dos objetos con la misma cualidad (*v.g.* longitud, superficie, volumen, amplitud angular) es posible establecer una comparación entre ellos para reconocer cual tiene mayor o menor longitud, volumen, etc. Sin necesidad de asignar un número. A manera de conclusión, es la cualidad la que nos permite sumar y comparar (es decir establecer un orden) objetos que tiene la misma cualidad.

5. Tipo de representación: Duval sostiene que es necesario tener al menos dos registro de representación semiótica de un objeto matemático para tener acceso a él, lo que se traduce a más posibilidades de éxito en el aprendizaje del mismo o lograr lo que él denomina aprensión cultural. Es por eso que en matemáticas es común encontrar que un objeto puede ser representado de formas diferentes, bien sea geométricamente, algebraicamente, por medio de expresiones gestuales, lenguaje ordinario o técnico, por medio de tablas, las gráficas (diagramas) e icónicamente.

   A continuación, se describen tres tipos de representaciones que se identificaron, bien sea, en la propuesta de la tarea, o en su solución.

[4] Es importante distinguir los objetos particulares poseedores de un rasgo (un valor concreto), de la clase de objetos que tienen el mismo valor o cantidad de dicho rasgo, lo anterior se denomina cantidad de magnitud

i. Simbólica – gráfica: Por lo general la representación simbólica se asocia a la forma en la que escribimos una ecuación o función, aquí se entenderá de la misma forma haciendo la claridad que se admiten las expresiones algebraicas y trascendentes.
ii. Tabular: Se presentan los datos de las variables involucradas en la situación por medio de tablas.
iii. Estático – dinámico: Hace referencia al uso de gráficas para representar la relación entre las variables. Dichas graficas pueden ser dinámicas si se hace uso de un software, por lo general de geometría, como Geogebra o Cabrí, o estáticas si están plasmadas en el papel y no se puede variar ningún aspecto en ellas.

6. Niveles de razonamiento covariacional (Carlson et al., 2003): Los autores asumen el razonamiento covariacional como: las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra. A partir de tal definición Carlson y sus colaboradores proponen un marco conceptual que involucra un conjunto de cinco acciones mentales y cinco niveles, con los cuales se describe la manera en la cual los estudiantes razonan cuando se enfrentan a eventos dinámicos (Villa-Ochoa, 2012b).

En la Tabla 1 se proporciona una descripción de las cinco acciones mentales del razonamiento covariacional y de los comportamientos asociados.

Acción mental	**Descripción de la acción mental**	**Comportamientos**
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.

AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Tabla 1 Acciones mentales del marco conceptual para la covariación

Por su parte en la Tabla 2 contiene los cinco niveles distintos de desarrollo, el alcance de un nivel es acumulativo, ya que una persona que alcance el nivel 4, por ejemplo, debe sustentar las acciones mentales asociadas con ese nivel y a las acciones asociadas con todos los niveles que están por debajo.

Niveles	Descripción
Nivel 1 (N1). Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2). Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4). Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5). Razón instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o, al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Tabla 2 Marco conceptual para los niveles de la covariación.

No obstante, surge la necesidad de incluir un Nivel 0 (N0) *Reconocimiento de las variables*[5], en el que se identifica que existe cambio y cuáles son las variables que

[5] Este nivel ya había sido incluido en el documento *¿Pensamiento variacional en los libros de texto?: una pregunta que nos permite aprender como docentes* (Gómez et al., 2013): "…antes que el estudiante pueda coordinar el cambio

están cambiando, esto debido a que si no se reconoce el cambio no sería posible identificar el cambio de una variable en términos de la otra. La importancia de la inclusión del nivel 0 se debe a que la mayoría de los cambios presentes en la situación no son evidentes y no se consideran en el desarrollo de la misma. Además, nos abre una puerta a trabajar con numerosas funciones ya que en los siguientes niveles se puede estudiar la posibilidad de relacionar variables diferentes a las propuestas por los autores.

Continuando, es pertinente hacer claridad en algunos términos que se utilizarán de manera recurrente y que podrían ser objeto de confusiones debido a que algunos de ellas tienen diversas concepciones.

En ese sentido, los primeros conceptos a precisar son cambio y variación. El cambio se entenderá como la simple diferencia de estados de una variable en sí misma, sin conexión con otras. Por otra parte, la variación matemática se entiende como la cuantificación del cambio en diversas clases de situaciones con magnitudes continuas y discretas (Cantoral & Farfán, 1998; Cantoral, Molina, & Sánchez, 2005). En particular se enfatiza que cambios en una(s) variable(s) producen cambios simultáneos en las otras y que para solucionar dichas situaciones se requiere identificar la forma de la relación y cuantificarla. Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) establecen que debe hacerse estudio de la variación en general para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra. En suma, el cambio pareciera estar asociado a una variable, es decir, el cambio es una transformación de una condición; pero no necesariamente en relación con otra en el tiempo, mientras que la variación parece estar asociada con la determinación del cambio de una variable en relación con otra, es decir, lo que llamaremos covariación.

Complementando lo anterior, a lo largo del análisis de las tareas se hablará del cambio presente en las variables involucradas y la relación entre dichos cambios, por lo que es importante saber cómo podemos compararlo. A continuación, se describen tres formas de hacerlo, sin desconocer que existen muchas posibilidades. Para tal fin, supondremos que existen dos variables x y y.

---

de una variable con respecto al cambio de la otra (N1), debe reconocer las magnitudes que varían; por lo tanto, vemos necesario incluir un Nivel 0 (N0) reconocimiento de las variables en el listado de niveles propuestos por Carlson et al., (2003).

a. Diferencia de diferencias

$$(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)$$

b. Cociente de diferencias

$$\frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)}$$

Este corresponde a la idea usual de pendiente.

c. Diferencia de cocientes

$$\frac{y_1}{y_2} - \frac{x_1}{y_1}$$

d. Cocientes de cocientes

$$\frac{\frac{y_1}{y_2}}{\frac{x_1}{x_2}}$$

4 PRESENTACIÓN DE DOCUMENTOS CONSULTADOS

En esta sección se presentan documentos consultados en los que se describen una o varias actividades que permiten potenciar el pensamiento variacional. Las revistas especializadas en Educación Matemática en español consultadas para tal fin fueron: Revista SUMA, Revista Escenarios, Revista Números, Revista UNO, Revista EMA, Revista TED, Revista digital Matemáticas, educación e Internet, Revista Científica, Revista El Cálculo y su enseñanza. Así mismo, las memorias de eventos académicos en Educación Matemática: Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa, Memorias del Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Memorias del 4to Seminario Taller de Educación Matemática, Memorias del Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

	Tabla de referencia bibliográfica
1	Benítez-Mojica, D., & Bueno-Tokunaga, A. (2009). Diagnóstico sobre el reconocimiento de la variación con estudiantes de primer semestre de matemáticas aplicadas. *El Cálculo y su enseñanza*, *1*, 13–31.
2	Camacho, M., & Santos, L. (2004). El estudio de fenónemos de variación haciendo uso de herramientas tecnológicas. *Uno Revista de Didáctica de las matemáticas*, (37), 105–122.
3	Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, *8*(2), 121–156.
4	Fiallo-Leal, J. E., & Parada-Rico, S. E. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de geogebra para el desarrollo del pensamiento varacional. *Revista Científica*, (20), 56–73.
5	Gómez, J. R., Orozco, J. L., Benavidez, G., Navarro, N., & Guacaneme, E. (2012). El pensamiento variacional : un asunto de juego y actividad matemática en la escuela. En *ECME* (pp. 914–921).
6	Gómez, J., Orozco, J., Benavidez, G., Navarro, N., & Guacaneme, E. (2013). ¿Pensamiento variacional en los libros de texto?: una pregunta que nos permite aprender como docentes. En G. Obando (Ed.), *Memoria 13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 472–478). Medellín, Colombia.
7	Guacaneme, E., & Perry, P. (2000). Propuesta curricular para la introducción a las funciones representadas por polinomios de grado dos.
8	Hernández, E., Galindo, O., & Santana, K. (2003). Una experiencia de diseño curricular en torno a la variación conjunta. *Revista EMA*, *8*(2), 237–255.
9	Maury-Mancilla, E., Palmezano, G., & Cárcamo, S. (2012). Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria. *Escenarios*, *10*(1), 7–16.
10	Nieto-Saldaña, N., Chavira-Jara, H., & Viramontes, J. de D. (2010). Desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional con el CABRI II PLUS®. *El Cálculo Y Su Enseñanza*, *2*.
11	Osorio, J., Ayola, G., Castro, W., Hilduara-Velásquez, E., & Cisneros, J. (2015). Análisis y adecuación de tareas asociadas al pensamiento variacional en libros de texto de 4 ° y 5 ° grado. *Revista Colombiana de Mtemática Educativa*, *1*(2), 5251.

12	Ramos-Márquez, L. I., & Jiménez-Rodríguez, J. R. (2014). Elementos teóricos para analizar el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante. *El Cálculo y su Enseñanza*, *5*, 107–124.
13	Sepúlveda-López, A., Vargas-Alejo, V., & Cristóbal-Escalante, C. (2013). Problemas geométricos de variación y el uso de software dinámico. *Números*, *82*, 65–87.
14	Tirado-Muñoz, J. M. (1991). ¿Cuánto tendría que medir la caja para contener x veces más galletas? *Revista SUMA*, *8*, 55–59.
15	Villa-Ochoa, J. A. (2012a). El estudio de la tasa de variación como una aproximación al concepto de derivada. En *4to Seminario Taller de Educación Matemática: La enseñanza del cálculo y los componentes de su investigación* (pp. 31–44). Universidad de Antioquia.
16	Villa-Ochoa, J. A. (2012b). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis*, (31), 9–25.
17	Vrancken, S., Schmithalter, M., Englery, A., & Müller, D. (2014). Las funciones y sus gráficas en el estudio de la variación y el cambio. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1299–1307).

Antes de continuar, es pertinente aclarar que el orden en el que se presentaron los documentos no es el mismo que se tomará en adelante; posteriormente serán organizados por revistas y, al interior de ellas, de manera cronológica, presentado primero el más antiguo y luego los más recientes. Así pues, para realizar la presentación de dichos documentos, primero se hará una clasificación por revista, luego cada documento tendrá su respectivo resumen, aclarando en este punto que en algunas ocasiones fue necesario complementar los resúmenes hechos por los autores. Este resumen, es una visión del contenido general expuesto en algunos renglones donde se destaca la tarea y el tema principal abordado. (Ver Anexo A)

5 ANÁLISIS DE TAREAS

En este capítulo se realizará el análisis de cada una de las tareas reportadas en los documentos consultados. Como se mencionó anteriormente se seguirá una "estructura" para realizar dicho análisis. Primero, se hará una presentación del problema propuesto. Segundo, se definirá en qué contexto está planteado. Tercero, se describirá cuál es la mediación instrumental utilizada para dar solución al problema. Cuarto, se hará alusión a los tipos de representaciones. Quinto, se narrará qué tratamiento se dio a las magnitudes y, finalmente, se hará un análisis de la tarea desde los niveles de razonamiento de variación propuestos por (Carlson et al., 2003).

En cada una de las etapas se harán comentarios, que de ninguna manera pretenden juzgar las propuestas hechas por sus respectivos autores, sino que buscan dar herramientas adicionales a los maestros para llevarlas al aula, teniendo en cuenta situaciones que podrían ser de vital importancia para lograr que se potencie el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes.

5.1 Revista Científica

5.1.1 Curso de precálculo apoyado en el uso de Geogebra para el desarrollo del pensamiento variacional

5.1.1.1 *Presentación*

Se propone la siguiente situación: *"Un granjero tiene una valla de alambre de longitud* 14 *hectómetros para cercar un terreno rectangular, destinado a la siembra de pasto para el ganado. Si el granjero desea obtener la mayor extensión de cultivo posible ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno? Explica y justifica tu respuesta."*

Es importante resaltar que en el documento esta situación es abordada en cinco diferentes fases: información y exploración libre, socialización de los resultados obtenidos en la fase anterior, exploración dirigida, explicitación y fase de orientación libre. Cada una de las fases tiene un objetivo específico y se desarrollan de manera secuencial. Así mismo, los autores proponen diferentes preguntas para abordar el problema y realizan una sección de comentarios para que el docente tenga en cuenta al momento de aplicar la tarea.

5.1.1.2 *Contexto*

La tarea está planteada en un escenario semirreal, que adopta conceptos u objetos propios de la geometría como son el rectángulo, el perímetro y el área, entre otros que se encuentran implícitos como la definición de ángulo recto. Así pues, se hace evidente que el enunciado de la situación está bajo un escenario geométrico pero direccionado hacia un ámbito del Cálculo en particular cuando su objetivo propende la optimización.

5.1.1.3 *Mediación Instrumental*

El uso de la tecnología como medio de representación dinámica para este problema, beneficia la comprobación y visualización de procesos que no son posibles de exponer con lápiz y papel. Se hace uso de la tecnología en todas las sesiones mediante el trabajo en computadores y con el apoyo de Geogebra.

En cuanto a las construcciones, estas son otorgadas a los estudiantes en las actividades 2 y 4 (correspondientes a las fases de socialización de los resultados obtenidos en la fase anterior y explicitación, respectivamente) aprovechando las potencialidades del software para que los estudiantes realicen las conexiones entre las diferentes representaciones de los conceptos involucrados en la solución del problema y obtengan la expresión algebraica de la función que representa la solución. De la misma forma propiciar en los estudiantes el uso de transferencia de medidas, área, tabla, rectas, traza, entre otras, que permitan la exploración.

No se sabe qué tanta ganancia o pérdida, para el pensamiento variacional, implique que el estudiante realice o no la construcción, debido a que esto depende de los objetivos de enseñanza y aprendizaje que tenga docente.

5.1.1.4 *Tipo de Representación*

La primera representación tiene lugar en la fase de información y exploración libre, para que el estudiante lo intente resolver de manera individual o en parejas, sin el uso del software. Por tal motivo es de suponerse que la primera será una representación estática bosquejada en lápiz y papel.

Acto seguido en la fase de exploración dirigida, se parte de la exploración de un archivo en Geogebra para que, a través de la exploración y de la orientación guiada por preguntas, el estudiante usando las diferentes herramientas del software, vaya encontrando respuestas al problema, plantee conjeturas y justifique matemáticamente los resultados visualizados en las diferentes representaciones que ofrece el software, a través de sus diferentes vistas (*v.gr.*, algebraica, hoja de cálculo, ventanas gráficas, cálculo simbólico).

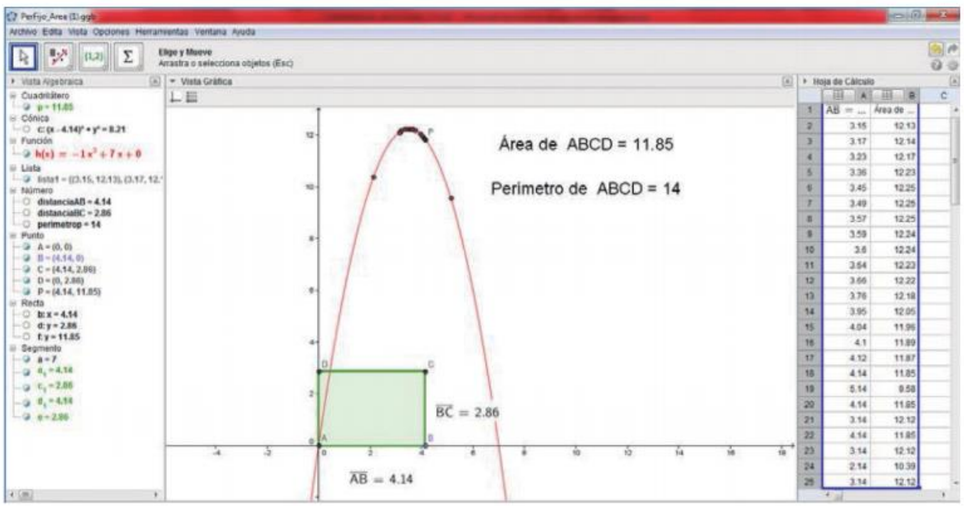


Gráfico 1 Diferentes representaciones de la solución del problema en Geogebra

5.1.1.5 *Tratamiento de las magnitudes*

Algo interesante ocurre cuando se habla de las magnitudes, porque si bien la situación puede abordarse desde un tratamiento cuantitativo no numérico y mantenerse en esos términos trabajando con la cantidad de la superficie, que no es precisamente la medida de la superficie. Hacer comparaciones en términos cuantitativos no numéricos puede no resultar tarea fácil, de allí surge la pregunta ¿cómo es posible capturar la superficie en un segmento? El Libro Primero de La Geometría de Descartes trata de los problemas que pueden resolverse sin emplear más que círculos y líneas rectas, en este libro Descartes dice:

> "Y así como la aritmética no comprende más que cuatro o cinco operaciones, que son la adición, la sustracción, la multiplicación, la división y la extracción de raíces, que pueden tomarse como una especie de división, así también no hay otra cosa que hacer en geometría, respecto a las líneas que se buscan, para prepararlas a ser conocidas, que agregarles o quitarles otras, o bien, teniendo una, que llamaré la unidad para relacionarla lo más posible con los números, y que ordinariamente puede

ser tomada a discreción, y teniendo luego otras dos, encontrar una cuarta que sea a una de esas dos, como la otra es a la unidad, que es lo mismo que la multiplicación (…)”

Así pues, a continuación, se describe como se realiza la multiplicación de dos segmentos, que en esencia captura la cantidad de superficie de un rectángulo por cuanto uno de los segmentos a multiplicar es la base del mismo y el otro es la altura.

Sea, por ejemplo, AB la unidad, y que deba multiplicarse BD por BC; no tengo más que unir los puntos A y C, luego trazar DE paralela a CA, y BE es el producto de esta multiplicación.

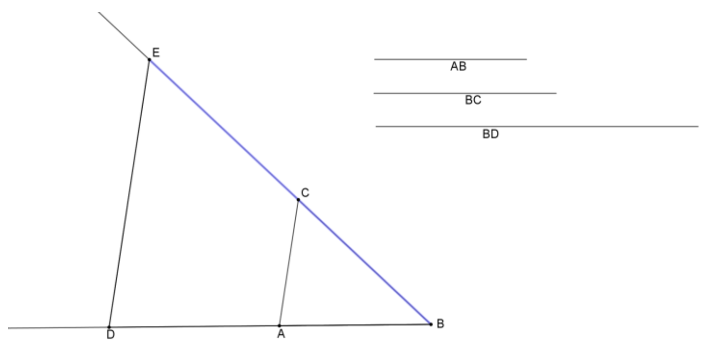


Gráfico 2 Método de Descartes para la multiplicación de segmentos

También se involucra un tratamiento cuantitativo numérico al generar las hojas de cálculo y las ventanas graficas el estudiante. Si apelamos a lo anterior, se puede decir que el desarrollo del pensamiento variacional podría favorecerse dependiendo del tratamiento y el objetivo que tenga el maestro y que se asigne al problema.

5.1.1.6 *Niveles de razonamiento*

Nivel 0. En el nivel cero, la tarea puede ponerse interesante si miramos las posibilidades que no se han desarrollado como, por ejemplo: las diagonales del rectángulo y ¿cómo varía? Entre otras que no son inmediatamente visibles como los triángulos que se pueden formar a partir de la traza de las diagonales y ¿cómo varía? Es importante también reconocer qué se mantiene constante, en este caso son los ángulos del rectángulo.

Nivel 1. El nivel de coordinación (N1) sustenta la acción mental de coordinar el cambio de longitud del segmento AB, con el cambio en la superficie del rectángulo (AM1). Es decir, identificar que mientras el segmento AB cambia, cambia también la cantidad de superficie. En este orden de ideas se identifica que los autores pretender trabajar la coordinación al realizar preguntas como:

- ¿Qué magnitudes varían en esta situación?, ¿cómo varían esas magnitudes?
- ¿Qué magnitudes permanecen constantes?
- ¿Qué sucede con una de las magnitudes a medida que varían las otras? justifica tu respuesta.
- ¿Existe alguna(s) variable(s) que dependan de otra(s)? justifica tu respuesta.

Al trabajar en este nivel (N1) los alumnos no necesariamente atiende a la dirección, la cantidad o la razón de cambio.

Nivel 2. El nivel de dirección (N2) sustenta tanto a AM1 como a la acción mental de coordinar la dirección del cambio de longitud del segmento AB mientras se considera el cambio de la cantidad de superficie del rectángulo (AM2). La dirección del cambio puede ser de aumento o de disminución.

La AM2 puede trabajarse en esta situación sustentando que a medida que se incrementa la cantidad de longitud del $\overline{AB}$, la superficie del rectángulo aumenta; también señalando que a medida que la cantidad de longitud disminuye, la cantidad de superficie del rectángulo disminuye. En este proceso el software beneficia el trabajo, teniendo en cuenta que se podrán ver las variaciones dinámicamente; los autores plantean preguntas que pueden ayudar a que se identifique la AM2 (e. g., abre la hoja de cálculo de Geogebra y dale animación automática al punto B ¿qué datos están registrados en la hoja de cálculo?, lleva nuevamente el punto B hasta el origen del plano cartesiano. Abre la vista algebraica y muestra el punto P, dale animación automática al punto B y observa la trayectoria de P. ¿Qué representa el punto P? ¿Qué representa el rastro de P?).

Nivel 3. El nivel de coordinación cuantitativa (N3) sustenta a AM1, AM2 y a la acción mental de coordinar la cantidad de cambio de la longitud de AB con la cantidad de cambio de superficie del rectángulo (AM3).

La AM3 puede trabajarse si los estudiantes notan que a medida que los valores aumentan de 0 a 7, los valores también disminuyen de 7 a 0 debido a la forma rectangular de la cerca. En dado caso que no suceda el docente debe intervenir y lograr profundizar esta coordinación. En otras palabras se reconoce que, hasta el punto máximo, de la función cuadrática que surge al relacionar las dos variables, mientras la longitud del segmento aumenta, la superficie del rectángulo también lo hace; a partir del punto máximo, mientras uno aumenta el otro disminuye.

Ahora bien esta acción mental se hace evidente en el artículo con algunas expresiones como: los estudiantes necesitan tomar conciencia del por qué no puede tomar valores menores que cero ni mayores que siete, si esto no pasa, el profesor debe plantear preguntas que le permitan identificar lo anterior descrito, preguntas cómo, ¿qué sucede si el valor de es $2\ Hm$?, ¿qué sucede si el valor de es 4 Hm?, ¿qué sucede si el valor de es $6\ Hm$?, ¿qué sucede si el valor de es mayor que $6\ Hm$?

Nivel 4. El nivel de razón promedio (N4) sustenta a AM1, AM2, AM3 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio promedio entre los cambios en la longitud del $\overline{AB}$ y la superficie del rectángulo.

La AM4 al parecer no es desarrollada en esta situación. Sin embargo, los autores manifiestan en el documento que: "el profesor puede aprovechar las herramientas del software para empezar a trabajar la noción de la derivada como razón de cambio y como pendiente de la recta tangente a la curva por el punto P. Puede solicitar a los estudiantes que introduzcan en la hoja de cálculo valores del lado desde 3.40 hasta 3.51, arrastrando el punto B con la tecla de mayúsculas (shift) sostenida y la tecla de la lecha hacia la derecha —de esta manera la variación es en décimas, centésimas o milésimas, según se quiera—." (Fiallo-Leal & Parada-Rico, 2014)

(E. g., De esta manera se tienen los valores del lado y del área cercanos al máximo en las columnas A y B, en la columna C se pide hallar la diferencia entre los valores de A ($\Delta A = A\,2 - A1$) y en la columna D la diferencia entre los valores de x ($\Delta x = x\,2 - x1$), en la columna E la razón. El profesor deberá orientar al estudiante para que analice los valores numéricos de cada una de las columnas y observe que, a medida que la diferencia Δx se aproxime a 0, la razón se acerca a 0 para valores cercanos por la izquierda y por la derecha a 3.5. Observará que las variaciones de A son muy cercanas y por eso ΔA tiende a 0. También observará que para valores a la izquierda de 3.5 la razón es positiva y a la derecha es negativa, lo que permitirá discutir ideas crecimiento y decrecimiento, así como de la derivada como pendiente de la recta tangente)

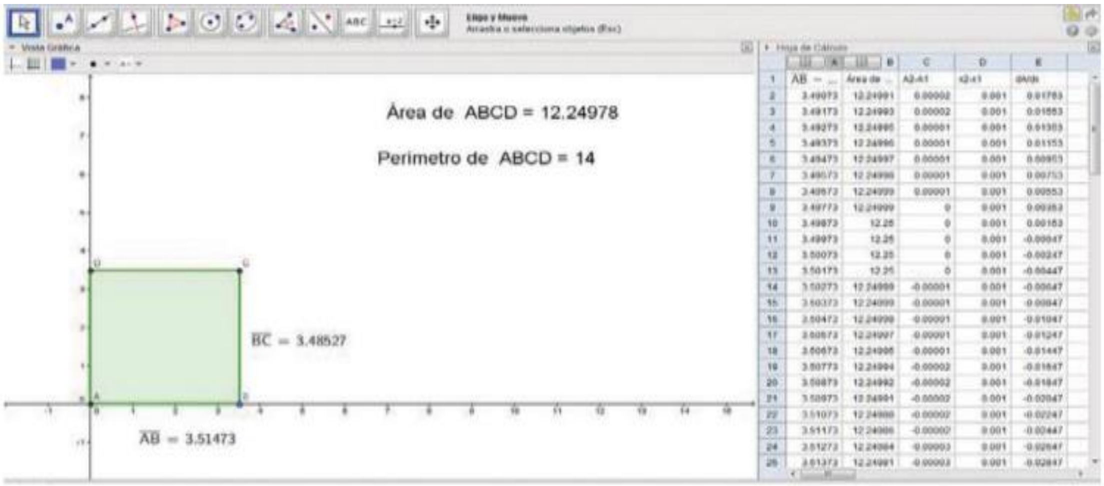


Gráfico 3 Visualización del comportamiento de la derivada como razón de cambio

De cualquier manera, para esta acción mental se promueve el uso de Geogebra Pero bien puede efectuarse un tratamiento cuantitativo no numérico con ΔA y Δx iguales magnitud

Nivel 5. El nivel de razón instantánea (N5) sustenta desde AM1 hasta AM4 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio instantánea de la longitud (con respecto a la superficie).

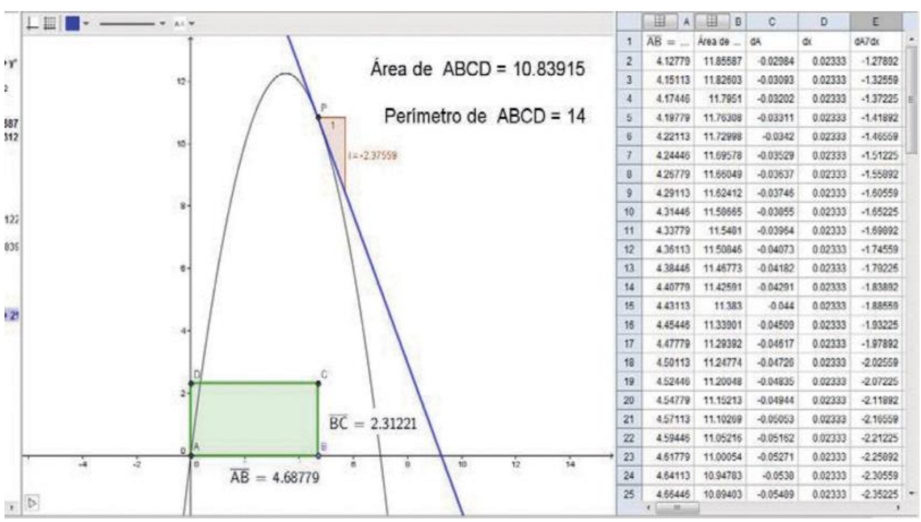


Gráfico 4 Visualización gráfica, numérica y algebraica de la pendiente de la recta tangente a la función g(x) en el punto P.

En este nivel se manipula y se hace uso del software, como se muestra en la figura anterior, y los datos sustentados en la acción mental anterior (e. g., Se podrán aprovechar los datos anteriores para realizar el análisis de la variación del lado x y de la razón $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ para que los estudiantes se den cuenta que en este caso las variaciones son proporcionales e igual a 2. Con la ayuda de la herramienta de regresión de dos variables con los datos de la columna A y E para que el estudiante vea la ecuación de la derivada $\frac{dA}{dx}$ es la recta $y = 7 - 2x$)

Cabe mencionar que se clasifica a un estudiante en el nivel de razón instantánea sólo si demuestra comprender que la razón instantánea resultó de considerar cantidades de longitud más y más pequeñas (construidas sobre el razonamiento exhibido en AM4).

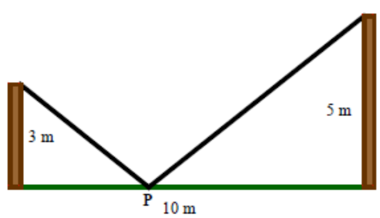
5.2 Revista el Cálculo y su enseñanza

5.2.1 Diagnóstico sobre el reconocimiento de la variación con estudiantes de primer semestre de matemáticas aplicadas (Benítez-Mojica & Bueno-Tokunaga, 2009)

5.2.1.1 *Presentación*

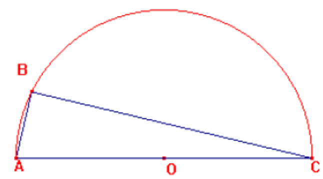
En este documento se presentan siete problemas que se aplicaron en un examen diagnóstico a 28 estudiantes sobre la identificación y la interpretación de la variación. A continuación se observan algunos:

1. (De los cables) La distancia entre dos postes que se emplean en las instalaciones telefónicas es de 10 metros, como se muestra en la figura:



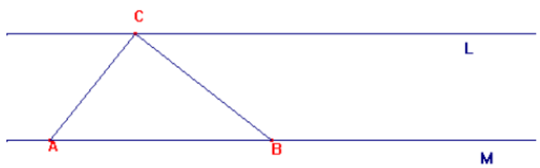
La longitud de los postes es de tres y de cinco metros. A manera de soporte, un cable que une la parte superior de ambos se sujetará a un punto P en tierra, localizado en el segmento que une los dos postes. ¿La longitud total del cable es variable? o, ¿la longitud total es constante?

2. (De la semicircunferencia) En una semicircunferencia con centro en O, se traza el diámetro AC. Se ubica un punto B sobre la semicircunferencia, como se muestra en la siguiente figura:



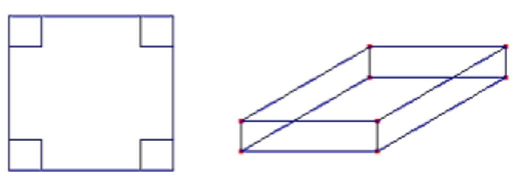
Si el punto B se mueve, qué ocurrirá: ¿La medida del ángulo ABC es variable? o, ¿la medida del ángulo ABC es constante?

3. (De las paralelas) En la siguiente figura, las rectas L y M son paralelas. Se ha dibujado el triángulo ABC.



Si el punto C se mueve sobre L, qué ocurre: ¿El área del triángulo ABC es variable? o ¿el área del triángulo ABC es constante?

4. (De la caja) Se desea construir una caja sin tapa con una pieza de lámina cuadrada de longitud *L*. Se cortan cuadrados idénticos en las esquinas. Se doblan los lados para formar las caras laterales de la caja. ¿El volumen de las cajas cambia? Sí, no, no sé.



5.2.1.2 *Contexto*

La mayoría de estos problemas se encuentran en un escenario geométrico-matemático o semirreal. No obstante, el fin de los problemas no tiene que ver con la geometría sino que más bien se utiliza este escenario para identificar en cuales de estas situaciones dinámicas existe variación y en cuáles no, es decir se presentan en un ámbito de variación.

5.2.1.3 *Mediación Instrumental*

La mayoría de las situaciones puede modelarse en un medio tecnológico y cada una de estas ser estudiada, de manera más amplia, por separado si así se desea, esto por supuesto implica crear otro tipo de preguntas para desarrollar más niveles de covariación. Por tal motivo hacemos la invitación a los docentes para que estas propuestas contribuyan al desarrollo del pensamiento variacional más allá de la identificación del cambio.

5.2.1.4 *Tipo de Representación*

Partiendo del objetivo de este examen*:* identificación y la interpretación de la variación, es evidente que las representaciones estáticas hacen parte fundamental para corroborar si existe cambio. A continuación se muestra una matriz donde se compilan los resultados del rendimiento general del grupo

Problema	Correctas	Incorrectas	No contestó	Aciertos
cables	2	26	0	7%
semicircunferencia	13	15	0	46%
paralelas	12	15	1	43%
carretera	16	12	0	57%
rectángulo	13	14	1	46%
caja	12	16	0	43%
anuncios	14	14	0	50%

Gráfico 5 Matriz de resultados

A partir de los resultados obtenidos y algunas observaciones hechas en el documento, se llega a la conclusión de que en algunos problemas la respuesta no es adecuada simplemente porque el estudiante no entiende el enunciado de la tarea, o tal vez porque la Gráfico no es suficiente y hace falta involucrar un medio tecnológico para identificar no solo la variación, sino qué varía con respecto a qué y qué se mantiene constante en cada uno de los problemas.

5.2.1.5 *Tratamiento de las magnitudes*

Las magnitudes en los problemas pueden tener un tratamiento cuantitativo no numérico y cuantitativo numérico según se desee. En este caso para el problema 1 se puede trabajar con la condición de la magnitud (longitud) sin importar la medida numérica sino la cantidad de longitud que se expresan en los segmentos se muestra una imagen para ejemplificar este asunto.

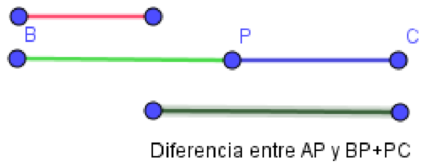
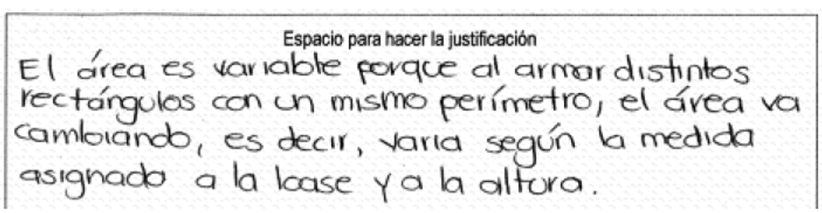


Gráfico 6 Ejemplo tratamiento cuantitativo no numérico

5.2.1.6 *Niveles de razonamiento*

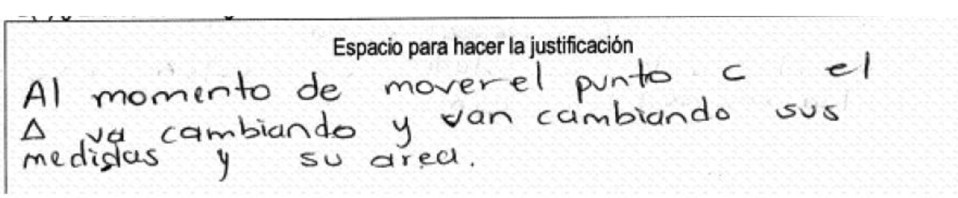
Nivel 0. Para cada uno de los problemas siempre están presentes las siguientes preguntas: ¿La longitud, medida, área, etc., es variable? y ¿la longitud, medida, área, etc., es constante? Estas preguntan apuntan a que los estudiantes identifiquen en qué situaciones existe variación. Además, basados en la matriz de resultados anteriormente enunciada, se identifica que la mayoría de estudiantes reconoce que hay algo que varía. Por lo tanto estos problemas en su totalidad trabajan este nivel de covariación de Carlson.

Nivel 1. La acción mental de coordinar cambios en una variable con respecto a la otra (AM1) se identifica en algunas de las respuestas de los estudiantes:


Espacio para hacer la justificación

El área es variable porque al armar distintos rectángulos con un mismo perímetro, el área va cambiando, es decir, varia según la medida asignada a la base y a la altura.

Gráfico 7 Respuesta de un estudiante


Espacio para hacer la justificación

Al momento de mover el punto c el Δ va cambiando y van cambiando sus medidas y su area.

Gráfico 8 Respuesta de un estudiante

Teniendo en cuenta que el objetivo de la propuesta es identificar la variación en diferentes situaciones problema los niveles de razonamiento de Carlson llegan hasta este punto. Debido a que no hay preguntas ni respuestas en el documento que se acerquen a los siguientes niveles de covariación.

5.2.2 Desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional con el CABRI II PLUS® (Nieto-Saldaña, Chavira-Jara, & Viramontes, 2010)

5.2.2.1 *Presentación*

Se propone la siguiente situación: un rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo configurado en el software CABRI II Plus con el propósito de introducir y estudiar la idea de función donde se privilegia a conceptos inherentes como variables dependientes e independientes, dominio, rango, mínimo, máximo, entre otros.

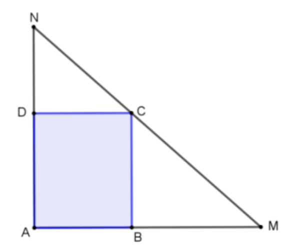


Gráfico 9 Representación estática del problema

5.2.2.2 *Contexto*

La tarea está planteada en un escenario matemático, que adopta conceptos u objetos propios de la geometría como son el rectángulo, triángulo, la cantidad de superficie, entre otros que se encuentran implícitos (*v.gr.*, definición de ángulo recto y estar inscrito). Sin embargo, su propósito es el estudio de una función basado en la variación de ciertos objetos a medida que se desplaza el punto B sobre la construcción. A partir de lo anterior, se hace evidente que el enunciado de la situación está bajo un escenario geométrico pero direccionado hacia un ámbito del Cálculo.

5.2.2.3 *Mediación Instrumental*

El uso de la tecnología como medio de representación dinámica para esta tarea, beneficia la comprobación y visualización de procesos que no son fáciles de presentar con lápiz y papel. Se hace usanza de la tecnología en todas las sesiones mediante el trabajo en computadores y con el apoyo de CABRI.

En cuanto a las construcciones, estas son otorgadas a los estudiantes aprovechando las potencialidades del software para que realicen las conexiones entre las diferentes representaciones de los conceptos involucrados en la tarea y obtengan la expresión algebraica de la función que representa la solución. De la misma forma propiciar en los estudiantes el uso de transferencia de medidas, área, tabla, rectas, traza, entre otras, que permitan la exploración. Sin embargo los autores manifiestan que las actividades con las que se debe acompañar deben ser cuidadosamente diseñadas de tal manera que las reflexiones y preguntas provoquen reflexiones que produzcan tratamientos y conversiones entre las diferentes representaciones del objeto de conocimiento.

No se sabe qué tanta ganancia o pérdida, para el pensamiento variacional, implique que el estudiante realice o no la construcción, debido a que esto depende de los objetivos de enseñanza y aprendizaje que tenga docente.

5.2.2.4 *Tipo de Representación*

La primera representación tiene lugar en la exploración en el momento en el cual el estudiante observa la situación en la pantalla del software y encuentra una representación estática posteriormente al deslizar el punto B sobre la base del triángulo se origina una representación de una gráfica que modela la función superficie del rectángulo a medida que el punto B se mueve.

Acto seguido por medio de una de exploración dirigida, y con ayuda del software los estudiantes pueden capturar la función por medio de su expresión algebraica usando las diferentes herramientas del software y con esto plantear conjeturas y justificar matemáticamente los resultados visualizados.

La representación tabular aparentemente no es trabajada en la situación pero sería seductor implementarla para corroborar acaecimientos que surjan de la función

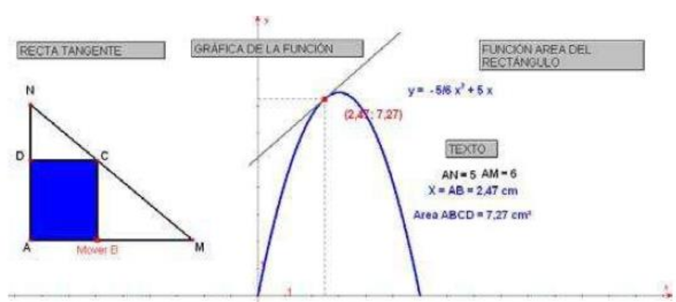


Gráfico 10 Diferentes representaciones de la solución del problema en CABRI II Plus

5.2.2.5 *Tratamiento de las magnitudes*

Algo interesante ocurre cuando se habla de las magnitudes, porque si bien la situación puede abordarse desde un tratamiento cuantitativo no numérico y mantenerse en esos términos trabajando con la cantidad de la superficie, que no es precisamente la medida de la superficie; también se involucra un tratamiento cuantitativo numérico al generar la expresión algebraica y las ventanas gráficas.

Si apelamos a lo anterior, se puede decir que el desarrollo del pensamiento variacional podría favorecerse dependiendo del tratamiento y el objetivo que tenga el maestro y que se asigne al problema.

5.2.2.6 *Niveles de razonamiento*

Nivel 0. Al arrastrar el punto B se observan variaciones en los diferentes objetos geométricos tales como la superficie del rectángulo inscrito, la altura del rectángulo y la diagonal del mismo; incluso algunos que no se perciben de inmediato pero que están presentes como los triángulos rectángulos pequeños que se forman al inscribir el rectángulo, sus alturas, entre otros. Por otra parte hay unas condiciones de la construcción que son invariantes como los ángulos rectos tanto del triángulo como del rectángulo.

En este caso debido a la construcción la variación de la superficie del rectángulo es clara.

Nivel 1. El nivel de coordinación (N1) sustenta la acción mental de coordinar el cambio de longitud del segmento AB, con el cambio en la superficie del rectángulo (AM1). Es decir, como el segmento AB cambia, determina que la cantidad superficie cambie y esto se denomina como coordinación entre dos variables. En este orden de ideas los docentes interesados pueden trabajar la coordinación al realizar preguntas como:

- ¿Qué magnitudes varían en esta situación?, ¿cómo varían esas magnitudes?
- ¿Qué magnitudes permanecen constantes?
- ¿Qué sucede con una de las magnitudes a medida que varían las otras? justifica tu respuesta.
- ¿Existe alguna(s) variable(s) que dependan de otra(s)? justifica tu respuesta.

Al trabajar en este nivel (N1) los alumnos no necesariamente atiende a la dirección, la cantidad o la razón de cambio.

Nivel 2. El nivel de dirección (N2) sustenta tanto a AM1 como a la acción mental de coordinar la dirección del cambio de longitud del segmento AB mientras se considera el cambio de la cantidad de superficie del rectángulo (AM2). La dirección del cambio puede ser de aumento o de disminución.

La AM2 puede trabajarse en esta situación sustentando que a medida que se incrementa la cantidad de longitud del $\overline{AB}$, la superficie del rectángulo aumenta; también señalando que a medida que la cantidad de longitud disminuye, la cantidad de superficie del rectángulo disminuye. En este proceso el software beneficia el trabajo, teniendo en cuenta que se podrán ver las variaciones dinámicamente, los docentes pueden realizar interacciones con el software y ayudar a que se identifique la AM2 generando animación automática al punto B y realizando una tabulación que le permita a los estudiantes observar ¿Qué datos están registrados en la hoja de cálculo?, Llevar el punto B hasta el origen del plano cartesiano; darle animación automática al punto B y observar la trayectoria del punto sobre la curva que se origina . ¿Qué representa el punto? ¿Qué representa el rastro de ese punto?

Nivel 3. El nivel de coordinación cuantitativa (N3) sustenta a AM1, AM2 y a la acción mental de coordinar la cantidad de cambio de la longitud de AB con la cantidad de cambio de superficie del rectángulo (AM3).

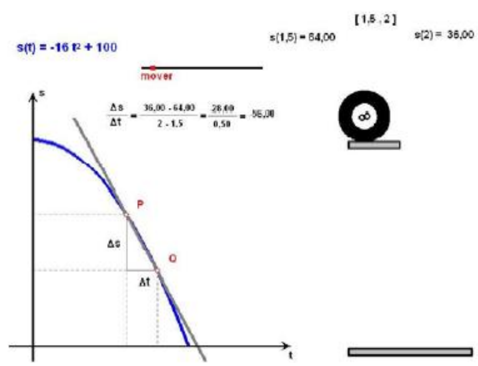
La AM3 puede trabajarse si los estudiantes notan que a medida que los valores de longitud de AB aumentan, los valores del rectángulo pueden aumentar o disminuir. En dado caso que no suceda el docente debe intervenir y lograr profundizar esta coordinación. En otras palabras Se reconoce que, hasta el punto máximo, de la función cuadrática que surge al relacionar las dos variables, mientras la longitud del segmento aumenta, la superficie del rectángulo también lo hace. Pero, a partir del punto máximo, mientras uno aumenta el otro disminuye.

Ahora bien para afrontar esta acción mental los estudiantes necesitan tomar conciencia del por qué no puede tomar valores menores que cero ni mayores que la longitud del segmento AM, si esto no pasa, el profesor debe plantear preguntas que le permitan identificar lo anterior descrito, preguntas cómo, ¿qué sucede si el valor de AB es 2 cm?, ¿qué sucede si el valor de AB es 4 cm?, ¿qué sucede si el valor es 6 cm?, ¿qué sucede si el valor de AB es mayor que la longitud de AM?

Nivel 4. El nivel de razón promedio (N4) sustenta a AM1, AM2, AM3 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio promedio entre los cambios en la longitud del $\overline{AB}$ y la superficie del rectángulo.

Nivel 5. El nivel de razón instantánea (N5) sustenta desde AM1 hasta AM4 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio instantánea de la longitud (con respecto a la superficie).

Tanto el nivel 5, como el nivel 4, no son abordados con la misma situación que los niveles anteriores, por lo tanto no se desarrollan con tal situación las acciones mentales 4 y 5. Sin embargo, los autores plantean una actividad para relacionar problemas de movimiento con la derivada. En la actividad complementaría, se muestra un objeto en caída libre (una bola de billar) y en donde la variación al arrastrar el punto mover, así mismo si se hace doble click en el intervalo del tiempo mostrado en la parte superior derecha se logran variaciones de este disminuyendo o aumentando los valores de Δt. (Nieto-Saldaña, Chavira-Jara, & Viramontes, 2010)



5.2.3 Elementos teóricos para analizar el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante (Ramos-Márquez & Jiménez-Rodríguez, 2014)

5.2.3.1 *Presentación*

Se plantean a los estudiantes dos actividades: llenado/vaciado de recipientes y movimiento, que incluyen, además, de las representaciones tabular, gráfica, analítica y verbal, una quinta modalidad: la representación digital.

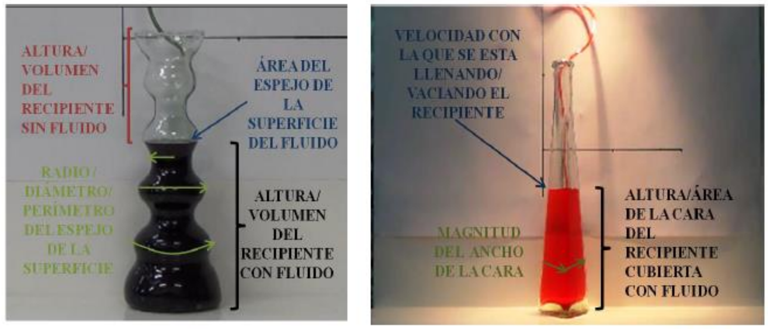


Gráfico 11 Imagen de video con ejemplos de las magnitudes que se pueden percibir durante el fenómeno de llenado o vaciado del recipiente.

5.2.3.2 *Contexto*

Las actividades se pueden categorizar en un escenario semirreal ya que no es una realidad propiamente dicha, sino construida por los autores con un propósito específico, en este caso identificar acciones mentales constitutivas del razonamiento covariacional, esto nos permite decir que el ámbito es el estudio de la variación.

5.2.3.3 *Mediación Instrumental*

La mediación instrumental, está ligada a la representación digital consiste en el último fotograma de un video digital de cada fenómeno, en el que se ha hecho un trabajo de edición denominado punteo, que consiste en insertar marcas en ciertos lugares del fotograma (nivel de agua en el recipiente, borde del recipiente al nivel del agua, posición del objeto que se mueve) a intervalos regulares de tiempo. (Ramos-Márquez & Jiménez-Rodríguez, 2014)

5.2.3.4 *Tipo de Representación*

En las tareas hay gran variedad de representaciones (tabular, gráfica, analítica, verbal, digital) que surgen a partir del fotograma. Es interesante ver como los autores analizan de qué forma se ve reflejada cada una de las acciones mentales en los diferentes tipos de representación. Por ejemplo:

> En la gráfica: Los comportamientos que muestren la coordinación entre las variables será el establecimiento de los ejes coordenados (por lo general x,), señalando que si se da un cambio en la coordenada x también se presentará un cambio en el valor de la coordenada y. Es importante el señalamiento de cuál de las coordenadas es vista como variable independiente.

Tal detalle al hacer la descripción de las acciones mentales, puede convertirse en una guía para otros maestros que pretendan reconocer en qué nivel de desarrollo del pensamiento variacional se encuentran sus estudiantes a través de las diversas representaciones que realicen.

5.2.3.5 *Tratamiento de las magnitudes*

El uso de las mediciones en el vaciado y llenado de recipientes bien puede trabajarse con la cantidad de magnitud y no con la medida de la misma. Pero hasta cierto punto, teniendo en cuenta que las representaciones gráficas y tabulares implican necesariamente un tratamiento cuantificable.

5.2.3.6 *Niveles de razonamiento*

Nivel 0. Este nivel se puede identificar en la actividad “la percepción de magnitudes variables en un video digital”, en donde se pide a los estudiantes enlistar todas las magnitudes variables que detecten o perciban, durante el llenado/vaciado del recipiente cónico.

> El estudiante podrá identificar magnitudes variables como altura, volumen, áreas, radio, diámetro, largo, según la forma del recipiente. En el caso del péndulo, de igual manera puede darse la identificación de las magnitudes que cambian, como son las distancias recorridas por el péndulo en las distintas direcciones, horizontal, vertical o la distancia recorrida sobre el arco que va formando la trayectoria del mismo, incluyendo en todos estos casos la identificación de ejes de referencia para la medición de estas magnitudes. (Ramos-Márquez & Jiménez-Rodríguez, 2014)

Nivel 1. El nivel de coordinación (N1) sustenta la acción mental de coordinar el cambio de una variable en la medida que varía otra (AM1). En el documento no se especifica con cuales de las variables presente se trabaja, es decir no se hace específico si se trabaja con las relaciones volumen-tiempo, área-radio, o cualquier otra relación que pueda surgir a partir de la identificación de qué varia.

> Para concretar la presencia de la AM1 se tendrán que manifestar además, comportamientos que muestren de qué forma se relacionan estas magnitudes encontradas; ejemplos de estas relaciones pudieran ser: altura-tiempo, volumen-altura, volumen-tiempo, área-radio, área-tiempo, distancia-tiempo. Se deberá

> especificar en cada caso cuál de las magnitudes se tratará como variable independiente, y por qué. (Ramos-Márquez & Jiménez-Rodríguez, 2014)

Nivel 2. El nivel de dirección (N2) sustenta tanto a AM1 como a la acción mental de coordinar la dirección del cambio de una de las variables mientras se considera el cambio en la otra (AM2). La dirección del cambio puede ser de aumento o de disminución. Por ejemplo, en el caso del péndulo asumiendo las variables tiempo y distancia, se puede decir que: conforme transcurre el tiempo, cambia la distancia (horizontal o vertical) con respecto al eje establecido como referencia, comportándose ésta en algunos momentos de manera creciente, y en otros, de manera decreciente. (Ramos-Márquez & Jiménez-Rodríguez, 2014) Tal identificación surge del video.

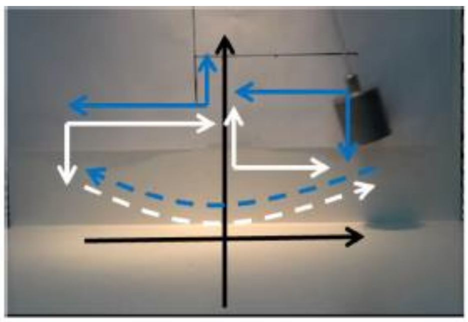


Gráfico 12 Sentido del cambio. Las flechas discontinuas indican el sentido en el que se mueve el péndulo, las líneas continuas indican el comportamiento variacional de la distancia (horizontal o vertical).

Ahora, si nos basamos en la representación tabular, para el mismo caso del péndulo, los autores plantean que:

> Uno de los comportamientos a observar en esta segunda acción mental consiste en la identificación del hecho de que, conforme se avanza hacia abajo en los renglones de la tabla, los valores de la primer columna siempre aumentan, mientras que los de la segunda columna tienen un comportamiento ya sea creciente (altura respecto al tiempo en el llenado de recipiente) o decreciente (volumen respecto a la altura en el vaciado de recipiente) según sea el fenómeno observado, pudiendo ser (como en el caso del péndulo) que se identifique en una parte decrecimiento y en otra crecimiento.(Ramos-Márquez & Jiménez-Rodríguez, 2014)

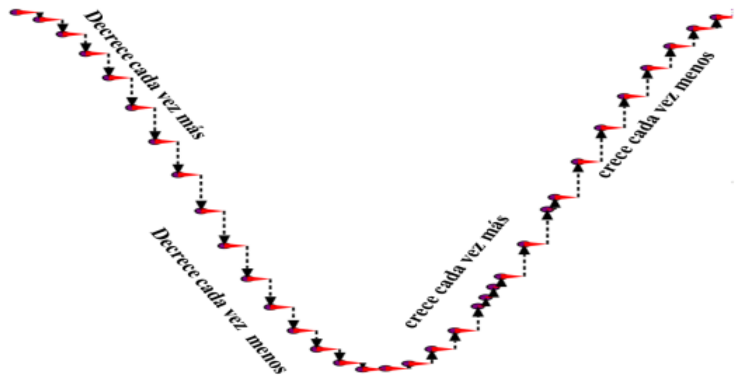
Es significativo destacar que gracias a que los autores hacen el análisis de cómo se podrían identificar, en los diferentes tipos de representación, las acciones mentales que permiten clasificar a un estudiante en uno de los niveles de razonamiento covariacional, se logra palpar la importancia de realizar al menos dos registro de representación semiótica de un objeto matemático para tener acceso a él, en este caso la variación.

Por otra parte, en las actividades podría identificarse, al menos de manera inicial, este nivel de razonamiento a través de la ejecución de la siguiente instrucción: "En la imagen de abajo, indica las diferentes dimensiones del recipiente que resultará necesario conocer, y en consecuencia medir, a fin de calcular, con base en ellas, el valor de algunas de las magnitudes variables que intervienen en el proceso de llenado o vaciado de dicho recipiente (…)". Hacer las mediciones que allí se indican sería una forma de abordar este nivel desde lo cuantitativo numérico.

Antes de seguir adelante, se resalta que a pesar de que los autores hacen las apreciaciones de qué se esperaría que hicieran los estudiantes para identificar las acciones mentales, en las actividades presentadas no es claro cómo esperan que los estudiantes las identifiquen, por lo que para los siguientes niveles solo se hará alusión a los planteamientos de los autores y no a una parte, en concreto, de la actividad.

Nivel 3. El nivel de coordinación cuantitativa (N3) sustenta a AM1, AM2 y a la acción mental de coordinar la cantidad de cambio de una variable con la cantidad de cambio de la otra (AM3). Aludiendo a la representación gráfica, se esperaría que los estudiantes:

> Interpreten los valores de Δx como un conjunto de segmentos horizontales, uno por cada punto de la gráfica, excepto el último, e interpretar los valores de Δy como un conjunto de segmentos verticales, también uno por cada punto de la gráfica, excepto el primero. También se espera que asocie la dirección hacia arriba de estos segmentos verticales con el crecimiento, y la dirección hacia abajo, con el decrecimiento. Igualmente se espera que asocie el tamaño de estos segmentos con el comportamiento variacional acelerado (cada vez más grandes) o desacelerado (cada vez más pequeños). (Ramos-Márquez & Jiménez-Rodríguez, 2014)



Nivel 4. El nivel de razón promedio (N4) sustenta a AM1, AM2, AM3 y a la acción mental de coordinar cambios uniformes de la variable independiente con los cambios de la variable dependiente.

> En la gráfica, el estudiante deberá ser capaz de formar rectas secantes entre los puntos contiguos de la gráfica, reforzando esta acción al verbalizar sobre la relación entre cada una de ellas con su pendiente como la razón de cambio. También se espera que inicie con la identificación de puntos importantes de la gráfica, como son los puntos extremos, de inflexión o concavidades y su relación con el comportamiento de las pendientes. (Ramos-Márquez & Jiménez-Rodríguez, 2014)

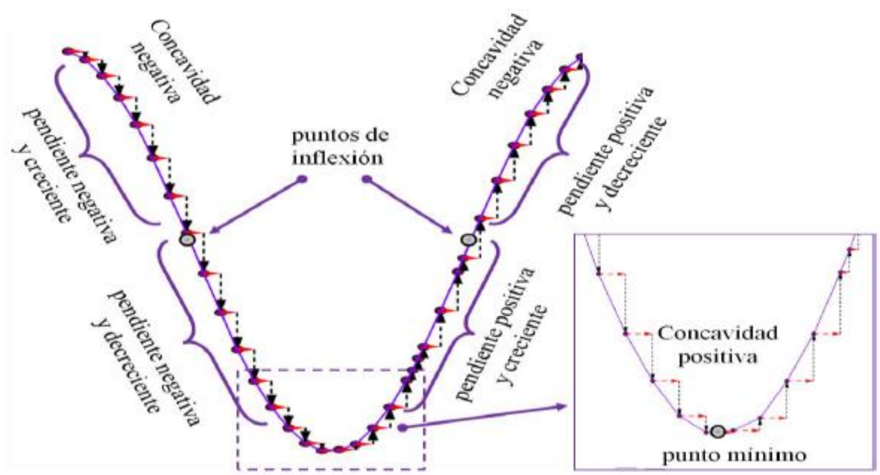


Gráfico 13 Representación grafica de los cambios promedio, identificación de concavidades y puntos notables.

Nivel 5. El nivel de razón instantánea (N5) sustenta desde AM1 hasta AM4 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio instantánea de una variable con respecto a la otra.

> El trabajo en tablas puede aproximarnos a una razón de cambio instantánea, cuando surge en el estudiante la inquietud de ver lo que sucede si se trabaja con intervalos más pequeños cada vez, sin embargo no se podrá trabajar con intervalos más pequeños ya que no tendríamos de donde obtener información, y se tendrá que pasar a algún otro registro para continuar el análisis. El comportamiento importante será entonces que el estudiante realice ese paso hacia otro registro y continúe con el objetivo de llegar a la razón de cambio instantánea. (Ramos-Márquez & Jiménez-Rodríguez, 2014)

5.3 Revista EMA

5.3.1 Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio

5.3.1.1 *Presentación*

Imagine esta botella llenándose de agua. Haga un bosquejo de la gráfica de la altura como una función de la cantidad de agua que hay en la botella.

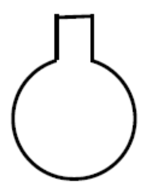


Gráfico 14 Representación estática del problema

5.3.1.2 *Contexto*

Debido a que esta tarea invita a los estudiantes a construir una representación gráfica de una situación dinámica en específico (agua vertiéndose en un recipiente hasta llenarlo), para la cual la razones de la variable cantidad de agua y altura cambian constantemente. La tarea se clasifica en un contexto o escenario real.

Es substancial señalar que esta situación pone en juego las habilidades del razonamiento covariacional de los estudiantes para describir y generar información por medio de la gráfica de una función y en este sentido un primer acercamiento a la noción de cambio se da cuando el estudiante designa las variables dependiente e independiente porque de inmediato está asociando que cuando una variable cambia la otra también.

5.3.1.3 *Mediación Instrumental*

El trabajo se desarrolló con la intención de que los estudiantes abordaran la situación sin la ayuda de complementos electrónicos (calculadoras o medios gráficos), por lo cual las respuestas estaban mediadas por los conocimientos previos y habilidades de representación gráfica de los estudiantes.

No obstante se puede realizar un acercamiento a la tecnología mediante un software intentando capturar la covariación de la cantidad de agua a medida que se llena la botella, y extraer información a partir de la gráfica obtenida, pero, entra en consideración la forma de la botella y la intencionalidad de esta, debido a que la forma de la botella influye directamente la representación de la gráfica.

5.3.1.4 *Tipo de Representación*

Teniendo en cuenta que la situación solicita bosquejar una gráfica a partir de suponer un recipiente llenándose de agua surgen las siguientes representaciones:

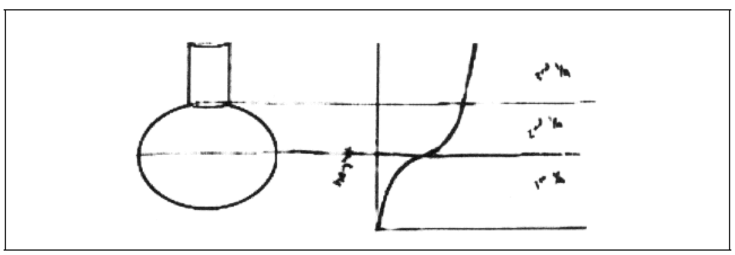


Gráfico 15 Respuesta escrita de la Estudiante A. Imagen extraída del documento.

Es imperativo considerar que cuando el estudiante aborda el problema de realizar la gráfica entran en consideración aspectos importantes como ¿la altura y el volumen son magnitudes diferentes?, ¿Cómo se pueden comparar estas dos magnitudes y expresarlas como variables una de la otra?, ¿Cuál depende de la otra?, ¿Qué tipo de función genera- lineal, cuadrática, cubica?

Por otra parte, pero igual de importante da inicio si al considerar la forma del recipiente existen algunos puntos de crecimiento o decrecimiento y si el modelo planteado asegura que cada punto de la gráfica representa la relación de la cantidad de agua y la elevación de agua en el envase. En consecuencia a lo anterior los docentes interesados en aplicar este problema pueden generar preguntas para establecer la idea de dominio y recorrido de una función y darle el significado a la gráfica como aquello que representa todas las posibles relaciones de altura como una función de la cantidad de agua que hay en la botella.

5.3.1.5 *Tratamiento de las magnitudes*

La situación es atrayente en cuanto el tratamiento de las magnitudes se puede hacer sin la necesidad de involucrar la medida de ellas y así se puede realizar un trabajo cuantitativo no numérico. Sin embargo si se desea trabajar en el nivel cuatro y cinco de Carlson los números comenzaran a tener una importancia esencial cuando hablamos de razón promedio y de razón instantánea.

5.3.1.6 *Niveles de razonamiento*

Nivel 0. Teniendo en cuenta que el volumen del recipiente es invariante es evidente que lo que cambia es la altura a medida que se adiciona el líquido. En este sentido el reconocimiento de la variación parece no ser de dificultad para los estudiantes.

Nivel 1.

> El *nivel de coordinación* (N1) sustenta la acción mental de coordinar la altura con los cambios en el volumen (AM1). Se ha identificado AM1 al observar a los estudiantes designar a los ejes y al escucharlos expresar que son conscientes de que a medida que una variable cambia, la otra variable cambia (e.g., cuando el volumen cambia, la altura cambia). Estos estudiantes no necesariamente atienden a la dirección, la cantidad o la razón de cambio.

Nivel 2.

> El *nivel de dirección* (N2) sustenta tanto a AM1 como a la acción mental de coordinar la dirección (aumento) del cambio de la altura mientras se consideran cambios en el volumen (AM2). Se ha identificado AM2 al observar a los estudiantes construir una línea recta creciente o verbalizar que a medida que se aumenta la cantidad de agua, la altura del agua en la botella aumenta.

Nivel 3.

> El *nivel de coordinación cuantitativa* (N3) sustenta a AM1, AM2 y a la acción mental de coordinar la cantidad de cambio de la altura con la cantidad de cambio del volumen mientras se imaginan cambios en el volumen (AM3).
>
> Se ha identificado AM3 al observar a los estudiantes poner marcas en la botella (con cada incremento cada vez más pequeño hasta alcanzar la mitad y cada vez más

grandes desde la mitad hasta el cuello de la botella). También se ha identificado AM3 al observar a los estudiantes localizar puntos en la gráfica o al escucharles comentarios que expresan su consciencia sobre cómo cambia la altura mientras consideran incrementos en la cantidad de agua.

Nivel 4.

El *nivel de razón promedio* (N4) sustenta a AM1, AM2, AM3 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio promedio de la altura con respecto al volumen para cantidades iguales del volumen (AM4). Se ha identificado AM4 en estudiantes al observarlos construir segmentos de recta contiguos en la gráfica, para cada uno de los cuales se ajusta la pendiente con el fin de indicar la razón (relativa) para la cantidad especificada de agua; o al escucharles comentarios que expresan su consciencia sobre la razón de cambio de la altura con respecto al volumen mientras consideran cantidades iguales de agua. (Nótese que inicialmente se observó a algunos estudiantes construyendo segmentos rectilíneos no contiguos, lo mismo que intercambiando los papeles de las variables independiente (volumen) y dependiente (altura) varias veces cuando se discutió el pensamiento que pusieron en juego para construir la gráfica para esta tarea.)

Nivel 5.

El *nivel de razón instantánea* (N5) sustenta desde AM1 hasta AM4 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio instantánea de la altura (con respecto al volumen) con cambios en el volumen (AM5). Se ha identificado AM5 en los estudiantes al observarlos construir una curva suave que es cóncava hacia abajo, luego cóncava hacia arriba, luego lineal; y al escucharles comentarios que sugieren una comprensión de que la curva suave resultó de considerar la naturaleza cambiante de la razón mientras imaginaban el cambio continuo en el agua. Cabe mencionar que se clasifica a un estudiante en el nivel de razón instantánea sólo si demuestra comprender que la razón instantánea resultó de considerar cantidades de agua más y más pequeñas (construidas sobre el razonamiento exhibido en AM4). La imagen que sustenta el razonamiento N5 debería también sustentar comportamientos que demuestren una comprensión de *por qué* un punto de inflexión indica el punto exacto en el que la razón de cambio de la altura (con respecto al volumen) pasó de ser decreciente a creciente, o al contrario. El comportamiento observado en algunos

> estudiantes daba la apariencia de que estaban comprometidos en AM5 (e.g., construcción de una curva suave). Sin embargo, cuando se les pidió proporcionar una justificación para la construcción hecha, ellos indicaron estar basados en hechos memorizados. Clasificamos sus comportamientos como *pseudo-analíticos* y la acción mental que sustentó este comportamiento fue clasificada como *pseudo-analítica* AM5 (Vinner, 1997).

5.3.2 Una experiencia de diseño curricular en torno a la variación conjunta

5.3.2.1 *Presentación*

El documento muestra un conjunto de cuatro talleres conformado por situaciones problemas que los estudiantes deben resolver inicialmente de manera hipotética y luego de manera empírica a través de un experimento que ellos mismos deberán diseñar. Luego se les presenta un experimento que deberán desarrollar en caso de considerarlo diferente al que habían diseñado y ejecutado. Finalmente, deberían contrastar los resultados de las aproximaciones hipotéticas y experimentales y presentar una respuesta a las situaciones problemas.

El enunciado del primer taller describe de manera general los implementos que se utilizarán para el desarrollo del conjunto de talleres:

> Para el desarrollo del taller deben conformar grupos de cuatro estudiantes. Cada grupo dispone de: un soporte con cinco orificios redondos con los números 1, 2, 3, 4 y 5; cinco embudos cónicos con orificios de salida de diferente tamaño; cinco vasos desechables iguales en forma y tamaño; un reloj o cronómetro; y, una bolsa de arena. (Hernández et al., 2003)

5.3.2.2 *Contexto*

El conjunto de talleres presentados están enmarcados en un escenario semirreal, ya que se construyó una realidad diferente en la que por medio del material concreto (embudos y la arena) los estudiantes pudieran estudiar una situación matemática en particular: relaciones en las que hay variación conjunta de variables o magnitudes relacionadas. Esto último, nos lleva a pensar que el ámbito, en el que fueron diseñados los talleres, es el pensamiento variacional, en específico, el estudio de la variación.

5.3.2.3 *Mediación Instrumental*

Los talleres están mediados por el uso de materiales concretos, diseñados con características especiales por los docentes. En primer lugar, se construyen modelos de conos que se utilizarían como como embudos en la experiencia; esto se hizo a partir de semicircunferencias iguales, en acetato, a las que se les recortaban sendas semicircunferencias concéntricas de diferente diámetro. No se trabajó con conos de cartón —como los que vienen con hilo o lana— ya que no sería fácil establecer los tamaños de los orificios requeridos. En segundo lugar, se escogió trabajar con sólidos granulados como arena o azúcar, y no con líquidos por el poco tiempo que emplearían para traspasar los embudos y la dificultad para medirlo.(Hernández et al., 2003)

5.3.2.4 *Tipo de Representación*

En general, en los talleres se pide a los estudiantes que registren la información obtenida de manera escrita. Por su parte, en el taller 2, se hace explicito el uso del registro de información por medio una tabla, en la que se relaciona el número del embudo con el tiempo que se tarda en desocuparse completamente, después de vaciar arena en ellos.

Ahora bien, se considera importante que los estudiantes realizaran gráficas que relacionaran las mismas variables involucradas en las tablas o incluso cambiando la variable “numero del embudo” por diámetro de su boquilla, de esta manera los estudiantes podrían identificar el cambio conjunto de las variables a partir de diferentes tipos de representación. Así mismo, la gráfica se podría utilizar para reconocer, de manera intuitiva, una línea de tendencia en los datos registrados.

Embudo número	Tiempo
1	
2	
3	
4	
5	

Tabla 3 Relación entre número del embudo y el tiempo que tarda en vaciarse

5.3.2.5 *Tratamiento de las magnitudes*

Si bien es cierto se pide a los estudiantes registrar el tiempo que tarda en vaciarse cada uno de los embudos, también es cierto que se espera que las respuestas se dan en términos de “entre más grande el orificio menos tiempo”, es decir que no es relevante cuanto miden los orificios sino identificar cual es más grande o más pequeño, para así organizarlos, lo que se puede hacer sin necesidad de recurrir a tomar medidas, sino mediante comparación. No obstante, incluir las medidas de los orificios podría abrir las puertas para reconocer algunas nociones básicas de la derivada a partir del cambio y la variación.

5.3.2.6 *Niveles de razonamiento*

Nivel 0. A partir de la experimentación, en los talleres 1 y 2, los estudiantes deberían reconocer que las variables que cambian son el tiempo de vaciado de los embudos, y el tamaño del orifico de salida. El reconocimiento de esta última variable, puede ser distinta dependiendo el grado en el que sea aplicada la serie de talleres, por ejemplo, si es aplicada de primaria puede que los estudiantes solo reconozcan que uno es más grande que otro, pero si es aplicado en grados superiores, los estudiantes podrían referirse a los diámetros de las boquillas.

Por otro lado, en los talleres 3 y 4, se espera que reconozcan que las variables que cambian son el tiempo de vaciado con respecto a la cantidad de arena.

Nivel 1. Para los talleres 1 y 2, el nivel de coordinación (N1) sustenta la acción mental de coordinar el cambio en el tiempo de vaciado de los embudos a medida que varía el tamaño del orificio de salida. (AM1). Esta acción mental se ve reflejada en el taller 1, numeral 2:

> Ahora René quiere saber si el tiempo que tarda en pasar un vaso de arena a través del embudo es el mismo para los cinco embudos. ¿Qué le dirían a René con respecto a su inquietud?

Esta instrucción se da después de pedir a los estudiantes que organicen los embudos de acuerdo al tamaño del orificio de salida.

Por su parte, Para los talleres 3 y 4, el nivel de coordinación (N1) sustenta la acción mental de coordinar el cambio en el tiempo de vaciado de los embudos a medida que varía cantidad de arena vaciada en ellos. (AM1). Lo anterior, se puede ver reflejado en los numerales del 1 al 3, del taller tres:

1. René afirma que: “Siempre y en todos los embudos sucede que entre menos cantidad de arena pasa por el embudo más tiempo tarda en hacerlo”. Escriban su opinión con respecto a la afirmación de René.

2. Como ustedes se habrán podido dar cuenta, René es un poco terco y como Santo Tomás, “hasta no ver no creer”. Ingenien y escriban los pasos de un experimento que harían utilizando el material y los instrumentos de los que disponen para demostrarle a René que su opinión dada en el numeral anterior es cierta.
3. Realicen el experimento y contrasten la validez de su opinión expresada en el numeral 1. No olviden registrar por escrito la manera como realizaron el experimento y los datos obtenidos.

Nivel 2. El nivel de dirección (N2) sustenta tanto a AM1 como a la acción mental de coordinar la dirección de cambio del tiempo de vaciado del embudo a medida que varía el tamaño del orificio. (AM2). Nuevamente, a partir de la experimentación y basados en el registro de información los estudiantes deberán reconocer, para el caso de los talleres 1 y 2, que a medida que aumenta el tamaño del orificio de salida, el tiempo de vaciado es menor. Para los talleres 1 y 3, deberán reconocer que a medida que aumenta la cantidad de arena, aumenta el tiempo de vaciado.

Este nivel podría aprovecharse poniéndose en términos de la proporcionalidad directa e inversa entre magnitudes, es decir, introduciendo este concepto a partir de los resultados obtenidos por los estudiantes.

Nivel 3. El nivel de coordinación cuantitativa (N3) sustenta a AM1, AM2 y a la acción mental de coordinar la cantidad de cambio del tamaño del orificio de salida con la cantidad de cambio en el tiempo de vaciado (AM3), esto para los talleres 1 y 2.

Como se mencionó antes, los talleres se desarrollan en términos cuantitativos no numéricos, sin embargo, para abordar el nivel 3 sería necesario incluir el tratamiento numérico, asignando valores al tamaño de orificios de salida, es decir, midiendo su diámetro. Podría no hacerse tal asignación, pero se complejizaría el registro de la información, ya que los estudiantes podrían decir el embudo dos es tanto más grande que el 1, acompañado la expresión oral con gestos (con las manos) pero no sería posible saber a cuanto equivale ese “tanto más grande”.

Para los talleres 3 y 4, el nivel de coordinación cuantitativa (N3) sustenta a AM1, AM2 y a la acción mental de coordinar la cantidad de cambio de la cantidad de arena con la cantidad de cambio en el tiempo de vaciado (AM3). Se extiende para estos talleres, el análisis hecho para los dos anteriores.

Nivel 4. El nivel de razón promedio (N4) sustenta a AM1, AM2, AM3 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio promedio entre los cambios en los tamaños de los orificios y los cambios en el tiempo de vaciado.

Teniendo en cuenta que en el artículo no se reportan los resultados específicos obtenidos, en términos de tiempo de vaciado o diámetro de los orificios de salida, y además que los talleres están planteados en términos cuantitativos no numéricos, no hay claridad acerca de cómo abordar este nivel y por lo tanto tampoco cómo se podría abordar el nivel 5, no obstante se dejará enunciado.

Nivel 5. El nivel de razón instantánea (N5) sustenta desde AM1 hasta AM4 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio instantánea del tiempo empleado para vaciar cada embudo (con respecto al tamaño del orificio de salida).

5.4 Revista Escenarios

5.4.1 Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria (Maury-Mancilla, Palmezano, & Cárcamo, 2012)

5.4.1.1 *Presentación*

La tarea concierne al tema de magnitudes directamente proporcionales que corresponden a la unidad Nº 7 del programa de Matemática de 5º grado. Su objetivo general se proyecta a describir las variaciones que experimentan las magnitudes involucradas en una situación problema y representarlas en una tabla de datos y en un plano cartesiano. Asimismo resolver problemas que involucren variaciones directamente proporcionales.

Una semana antes de iniciar esta clase, el docente les pide a los estudiantes que consulten en la tienda escolar el número de gaseosas vendidas durante cada día de la semana y consignen los datos obtenidos en una tabla como la siguiente:

Día de la semana	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
N° de gaseosas vendidas					

Tabla 4 Relación entre los días de la semana y el número de gaseosas vendidas

A partir de los datos obtenidos en la tabla lo lleven a una gráfica de barras, colocando en la línea horizontal los días de la semana y en la vertical el número de gaseosas vendidas.

5.4.1.2 *Contexto*

La tarea se presenta en un tipo de escenario real debido a que intervienen quehaceres propios de la vida cotidiana (*v.gr.*, consulten en la tienda escolar el número de gaseosas vendidas durante cada día de la semana y consignen los datos obtenidos en una tabla).

Es evidente que el enunciado de la situación está bajo un contexto de la vida real pero encauzada hacia un ámbito del Cálculo, en particular describir las variaciones que experimentan las magnitudes involucradas en una situación problema y representarlas en una tabla de datos.

5.4.1.3 *Mediación Instrumental*

Es importante reiterar que la tarea esta propuesta para grado 5° de primaria. Así pues suponemos que la situación se empieza con lápiz y papel; mas no implica que no se pueda trabajar con tecnología ya sea en este grado o para grados superiores, modelando en un software lo que se plantea en una hoja de cálculo de Excel, R o algún otro software. Si se hace uso de Excel, se podría comparar incrementos del dinero y la cantidad de gaseosas vendidas en un mes y compararlos con los de otro; con esto se lograría que que la tarea subiera de nivel y pueda ser presentada a grados superiores utilizando las herramientas y realizando diferentes representaciones que pueden llegar a surgir.

5.4.1.4 *Tipo de Representación*

La representación tabular, mostrada anteriormente, y las consignas $1, 5, 9, 10, 11$ procuran aproximar al estudiante en la búsqueda de relaciones y perciba la variación en la cantidad de dinero ingresado a la tienda escolar a medida que varía la cantidad de gaseosas vendidas en los diferentes días de la semana.

Atendiendo a las recomendaciones de quienes proponen la tarea es posible efectuar un gráfico de barras como una herramienta (v. gr., Estas formas de organizar la información ponen en evidencia los aspectos que se desean mostrar y resaltan las comparaciones que quieren hacerse notar. Además permite manejar mejor la información y facilita resolver las operaciones).

5.4.1.5 *Tratamiento de las magnitudes*

Partiendo de que la tarea se presenta en un contexto real donde los posibles valores no son continuos, esta situación necesariamente debe abordarse en términos cuantitativos numéricos.

5.4.1.6 *Niveles de razonamiento*

Nivel 0. Antes que el estudiante pueda coordinar el cambio de una variable con respecto al cambio de la otra *(N1)*, debe reconocer las magnitudes que varían, en este caso el estudiante debe percibir la variación en la cantidad de dinero ingresado a la tienda escolar a medida que varía la cantidad de gaseosas vendidas en los diferentes días de la semana.

En este orden de ideas se identifica que los autores pretender trabajar este reconocimiento al realizar preguntas como ¿qué magnitudes se están relacionando en este problema? y ¿qué magnitudes se están relacionando en las dos preguntas anteriores?

Cabe anotar que el tiempo está presente en cualquier evento en el cual interactúen dos magnitudes. En esta situación es más notorio debido al contexto (v. g., Días de la semana) y en relación a esto es posible estudiar la variación en la cantidad de dinero ingresado a la tienda escolar a medida que varía el tiempo transcurrido o bien, la variación de la cantidad de gaseosas vendidas al transcurrir cierto periodo de tiempo.

Nivel 1. El nivel de coordinación (N1) sustenta la acción mental de coordinar el cambio en la cantidad de dinero ingresado a la tienda escolar a medida que varía la cantidad de gaseosas vendidas en los diferentes días de la semana. (AM1). Es decir, como la cantidad de dinero cambia transcurrido cierto tiempo, determina que la cantidad de gaseosas vendidas también lo haga y esto se denomina como coordinación entre dos variables.

Se identifica que los autores pretender trabajar la coordinación al realizar preguntas como ¿qué día se vendió más gaseosa?, ¿en qué días se vendieron la misma cantidad de gaseosas? y, ¿cuántas gaseosas se vendieron durante la semana?

Al trabajar en este nivel (N1) los alumnos no necesariamente atienden a la dirección, la cantidad o la razón de cambio.

Nivel 2. El nivel de dirección (N2) sustenta tanto a AM1 como a la acción mental de coordinar la dirección de cambio del dinero ingresado a la tienda escolar a medida que varía la cantidad de gaseosas vendidas en los diferentes días de la semana. (AM2). La dirección del cambio puede ser de aumento o de disminución.

La AM2 puede trabajarse en esta situación sustentando que a medida que se incrementa el monto de dinero, el número de gaseosas vendidas aumenta; también señalando que a medida que la cantidad de dinero disminuye, la cantidad de gaseosas vendidas también disminuye.

Se identifica que los autores pretender trabajar la dirección al realizar preguntas como: entre más gaseosas venda, ¿más dinero o menos dinero ingresará a la tienda?, entre menos gaseosa venda, ¿más dinero o menos dinero ingresará a la tienda?

Nivel 3. El nivel de coordinación cuantitativa (N3) sustenta a AM1, AM2 y a la acción mental de coordinar la cantidad de cambio en la suma de dinero ingresado a la tienda escolar, con la cantidad de gaseosas vendidas en los diferentes días de la semana. (AM3).

Las representaciones y preguntas propuestas para las situación (v. g., ¿Cuántas más con respecto al día en que se vendió menos gaseosas?, ¿Cuántas gaseosas más se vendió el miércoles con respecto al martes?, ¿De cuánto fue la variación en ventas de gaseosas entre el jueves y el viernes?, Si cada gaseosa cuesta $1.000, ¿De cuánto fue el ingreso en la tienda escolar durante cada día de la semana?, ¿Cuánto dinero ingresó a la tienda durante la semana?) Aluden fundamentalmente al *Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa*. En efecto, el estudiante debe lograr *ver* la variación entre una y otra pero no basta que observe que la cantidad de dinero aumenta, sino que debe cuantificar cada uno de los cambios.

Nivel 4. El nivel de razón promedio (N4) sustenta a AM1, AM2, AM3 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio promedio entre los cambios en la cantidad de dinero que ingresa a la tienda escolar y el número gaseosas vendidas en determinado tiempo.

Debido a que la tarea se presenta a grados de primaria suponemos que los objetivos propuestos llegan hasta el (N3) no obstante los docentes pueden realizar propuestas para trabajar los niveles faltantes.

Nivel 5. El nivel de razón instantánea (N5) sustenta desde AM1 hasta AM4 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio instantánea de la cantidad de dinero que ingreso a la tienda escolar en el trascurso de la semana (con respecto a la cantidad de gaseosas vendidas).

5.5 Revista Números

5.5.1 Problemas geométricos de variación y el uso de software dinámico (Tarea 1)

5.5.1.1 *Presentación*

Se presenta un problema típico de optimización que aparece, en varios libros de texto de Cálculo, en el que hay una relación de dependencia entre las variables involucradas. El problema es el siguiente:

Una compañía de líneas de transmisión eléctrica desea sujetar dos postes, de diferente altura, con un cable de acero que va de la parte superior de cada uno de ellos a un punto en el piso que está en la recta determinada por sus bases. La altura del poste AB es b y la altura del poste DC es c. ¿Cuál es el punto de sujeción en el piso, entre A y D, con el que se utiliza la menor cantidad de cable de acero?

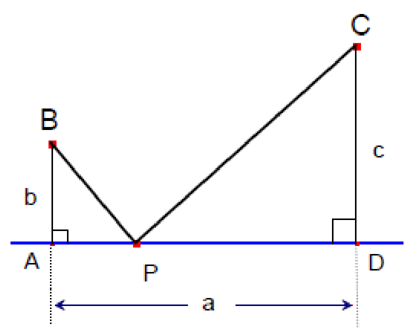


Gráfico 16 Representación de la situación

5.5.1.2 *Contexto*

La tarea está planteada en un escenario semirreal y parece ser geométrico debido a que intervienen objetos propios de la Geometría (como segmentos, triángulo rectángulo, etc.), e implica la necesidad de hacer una construcción. Sin embargo, el problema enunciado no es geométrico, en cuanto no es de Geometría, sino más bien del Cálculo, puntualmente un problema de optimización de longitudes. En resumen, el problema tiene un contexto geométrico, pero pertenece a un ámbito de la optimización.

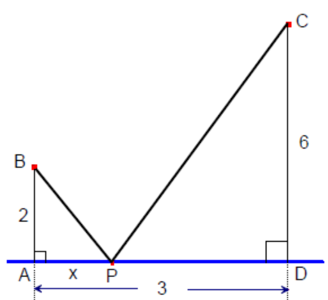
5.5.1.3 *Mediación instrumental*

En este caso se hace uso del software de Geometría dinámica Cabrí en dos momentos. En el primero, para representar la situación de manera estática, que al desplazar los puntos se convierte en dinámica y permite a los estudiantes reconocer la variación. En un segundo momento, se utiliza como medio para hacer un acercamiento geométrico a la solución del problema y usar, a partir de la construcción hecha, propiedades como la simetría y del Teorema de la desigualdad del triángulo.

Es importante resaltar que no se da la construcción a los estudiantes, lo que implica que, de manera previa, al uso del software se haga la correspondiente explicación de cómo es el funcionamiento del mismo y así solucionar el problema. Las principales herramientas del software para realizar la construcción son: recta, punto, punto en objeto y punto de intersección.

5.5.1.4 *Tipo de representación*

Inicialmente se sugiere que los estudiantes hagan representaciones con lápiz y papel, es decir representaciones graficas estáticas del problema, con las que se pretende hacer un primer acercamiento al mismo. Manteniendo esta representación, se incluye la representación tabular, pidiendo que midan los segmentos para determinar para que posición tentativa de P en la que la longitud es mínima. Posteriormente, se hace un trabajo similar al anterior haciendo uso del software Cabrí.



AP	BP + PC
0,18	8,64
0,50	8,56
0,66	8,55
1,00	8,56
1,26	8,61
1,50	8,68
2,00	8,91
2,50	9,22

Gráfico 17 Representación estática de la situación y valores que toman las variables involucradas

Con respecto a lo anterior, sería menos dispendioso para los estudiantes y a su vez más productivo en términos de reconocer la variación y realizar conjeturas, que desde el principio se utilizara el software de geométrica dinámica, ya que este no solo permite desplazar el punto P, por la recta determinada por los puntos A y B, sino que permite reconocer más rápidamente que la longitud mínima de la cuerda estaría en algún punto entre A y B, y no en puntos al lado de estos. Además de trabajar en términos de lo continuo" y no de lo discreto, como si se hace al representar el problema con lápiz y papel. Así mismo, Cabrí permite generar tablas de manera automática, luego los estudiantes no gastarían tiempo midiendo segmentos, sino reconociendo patrones o propiedades importantes que aporten a la solución del problema.

Adicionalmente, se sugiere una solución haciendo uso del cálculo diferencial, en la que, apoyados en una construcción geométrica, dos triángulos rectángulos que comparten como uno de sus vértices el punto P, a partir de la cual se debe proponer una función que modele un fenómeno, calcular derivadas sucesivas de una función, racionalizar y resolver ecuaciones cuadráticas y lineales, evaluar funciones; además, se debe conocer el criterio de la primera y segunda derivada para una función. Este tipo de solución implica el uso de la representación algebraica, que podría facilitarse haciendo uso de algún software como Derive, o Wólfram que permiten racionalizar y resolver ecuaciones cuadráticas, lo que nuevamente permitiría centrar la atención hallar la derivada y los puntos críticos de la función $d(x)$ que relacione la distancia entre BP y PC, además de en la variación y no en cálculos que pueden ser complicados para los estudiantes, sin que esto implique que no deban conocerlos.

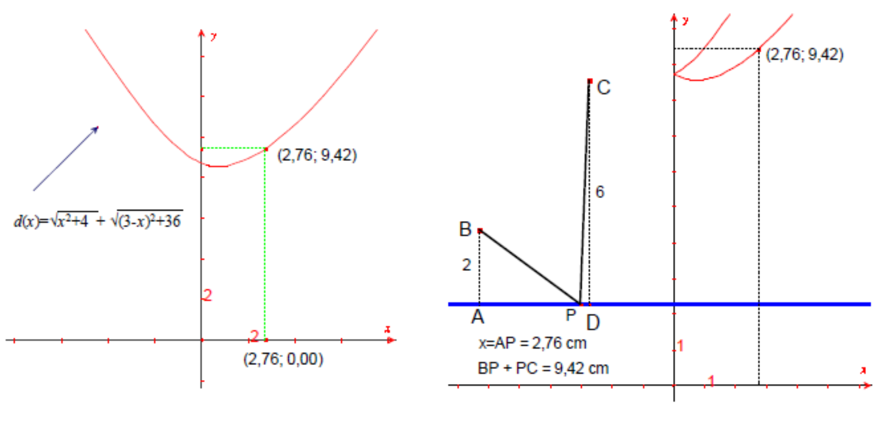


Gráfico 18 Gráficas d(x) obtenidas por distintos medios

5.5.1.5 *Tratamiento de las magnitudes*

Como ya se manifestó, la solución de este problema se hace desde varios enfoques, lo que implica que el tratamiento de las magnitudes sea diferente en cada uno de ellos. Un primer acercamiento es el numérico, en el cual los estudiantes construyen, con lápiz y papel, segmentos con longitudes específicas, además de ir registrando en una tabla la variación de $BP + PC$ al mover el punto P. Luego es inminente el tratamiento cuantitativo numérico que se está dando a las magnitudes.

Posteriormente, se trata de visualizar el problema con *Cabrí géomètre*, en donde el tratamiento que se le da a las magnitudes no es muy diferente al descrito anteriormente, ya que se realiza la construcción de los segmentos, pero inmediatamente se toman las medidas de estos para verificar en qué posición de P sobre la recta la distancia $BP + PC$ es mínima.

Ahora, para la solución usando herramientas de Cálculo diferencial, en un principio se representa el problema en un sistema coordenado, haciendo énfasis en que los dos triángulos determinados son rectángulos, lo que permite por medio de la hipotenusa hallar las distancias BP y PC para luego proponer una función que determine la distancia $BP + PC$.

$$d(x) = \sqrt{x^2 + b^2} + \sqrt{(a - x^2) + c^2}$$

A partir de este punto se hace especial énfasis en lo algebraico, ya que la principal preocupación es resolver ecuaciones y racionalizar. Luego, se aplica el criterio de la primera derivada (para observar intervalos de crecimiento de la función) y el criterio de la segunda derivada para saber si d(x) tiene mínimo o , con lo que se pretende hallar valores específicos para a, b y c. Lo anterior nos lleva a concluir que, si bien no se está haciendo un tratamiento máximo directamente numérico, el fin último, de todos los procedimientos realizados es encontrar 3 números en donde $\frac{ab}{a+c}$ sea mínimo. Por lo tanto, nuevamente se está asociado n carácter cuantitativo a las magnitudes. Vale la pena preguntarse, que tan conveniente sería trabajar, desde los acercamientos hasta ahora descritos, en términos cuantitativos no numéricos.

5.5.1.6 *Niveles de razonamiento*

Nivel 0. En el nivel cero, se reconoce qué es lo que está cambiando. En este caso son distancias: $BP + PC$ y AP. La segunda distancia podría ser PB y se obtendrían los mismos resultados, pensando en términos de la función que se generaría después. Es importante resaltar que el cambio de la longitud AP está directamente relacionado con la construcción hecha en el software y el cambio que puede tener la posición de un punto allí.

Nivel 1. El nivel de coordinación (N1) sustenta la acción mental de coordinar el cambio de longitud del segmento AP, con el cambio en la longitud de los segmentos $BP + PC$ (AM1). Es decir, como el segmento AP cambia, determina que la cantidad longitud de los otros dos segmentos cambie y esto se denomina como coordinación entre dos variables.

Se ha identificado AM1 cuando se propone que el maestro haga preguntas orientadoras como ¿cuál sería la longitud del cable? ¿Esta longitud es la misma independientemente de dónde se ubique el punto P? ¿Conviene tomar el punto medio de AD? ¿Existe un punto donde la longitud del cable es mínima, dónde es máxima? Para este nivel, el software se convierte en una herramienta potente, ya que permite evidenciar, casi que de manera inmediata que al cambiar la posición del punto P, varían las longitudes de los segmentos BP y PC.

En este nivel no necesariamente se atiende a la dirección, la cantidad o la razón de cambio.

Nivel 2. El nivel de dirección (N2) sustenta tanto a AM1 como a la acción mental de coordinar la dirección del cambio de longitud del segmento AP mientras se considera el cambio de la cantidad de longitud de $BP + PC$ (AM2). La dirección del cambio puede ser de aumento o de disminución.

Se ha identificado AM2 cuando se expone que a medida que se incrementa la cantidad de longitud de AP, la longitud $BP + PC$ aumenta hasta cierto punto y luego disminuye, o viceversa dependiendo la posición inicial de P. Hacer ese reconocimiento podría facilitarse con la gráfica del lugar geométrico que determina el punto P al deslizarlo en el segmento AD. Asi mismo, haciendo preguntas a los estudiantes como ¿Qué significado tiene el punto P? ¿qué significado tiene el rastro de este?

Nivel 3. El nivel de coordinación cuantitativa (N3) sustenta a AM1, AM2 y a la acción mental de coordinar la cantidad de cambio de la longitud de PA con la cantidad de cambio de longitud de $BP + PC$ (AM3). Para facilitar la comprensión de este nivel se tomarán cambios constantes en la distancia AP, lo que reduce el análisis del cambio de $BP + PC$, para esto se darán valores específicos a cada una de las distancias involucradas. $AB = 2, CD = 6$ y $AD = 3$.

AP	**BP+CP**	**Diferencias BC+CP**	$\boldsymbol{m = \frac{\Delta(BC + CP)}{\Delta(AP)}}$
0	8.7	-0.077051	-0.38525333
0.2	8.6	-0.052432	-0.26216186
0.4	8.6	-0.028462	-0.14230912
0.6	8.6	-0.005575	-0.02787512
0.8	8.5	0.015939	0.07969626
1	8.6	0.035941	0.17970683

1.2	8.6	0.054416	0.27208169
1.4	8.7	0.071437	0.35718707
1.6	8.7	0.087130	0.43564905
1.8	8.8	0.101641	0.50820715
2	8.9	0.115122	0.57561237
2.2	9.0	0.127713	0.63856557
2.4	9.2	0.139537	0.69768601
2.6	9.3	0.150700	0.75350035
2.8	9.4	0.161289	
3	9.6		

Tabla 5 Representación tabular del cambio

A partir de la tabla (columnas AP y diferencias de BP+CP), podemos concluir que:

- Cuando AP toma valores entre 0 y 0.6: cambios iguales de la distancia AP se relacionan con cambios negativos cada vez menores (en valor absoluto) en x, (decrece cada vez menos).
- Cuando AP toma valores entre 0.8 y 3: cambios iguales de la distancia AP se relacionan con cambios positivos cada vez mayores en x, (crece cada vez más)**.**

Nivel 4. El nivel de razón promedio (N4) sustenta a AM1, AM2, AM3 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio promedio entre los cambios en la longitud del $\overline{AP}$ y la longitud de $BP + PC$.

Nuevamente, a partir de la gráfica, pero ahora centrándonos en la última columna, los estudiantes deberían reconocer que:

- cuando AP toma valores entre 0 y 0.6, hay un decrecimiento desacelerado
- Cuando AP toma valores entre 0.8 y 3: hay un crecimiento acelerado.

Si la representación se hiciera de manera gráfica, el estudiante deberá ser capaz de formar rectas secantes entre los puntos contiguos de la gráfica, reforzando esta acción al verbalizar sobre la relación entre cada una de ellas con su pendiente como la razón de cambio. También se espera que inicie con la identificación de puntos importantes de la gráfica, como son los puntos extremos, de inflexión o concavidades y su relación con el comportamiento de las pendientes. (Ramos-Márquez & Jiménez-Rodríguez, 2014)

Nivel 5. El nivel de razón instantánea (N5) sustenta desde AM1 hasta AM4 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio instantánea de la longitud de AP (con respecto a la longitud de $BP + PC$). Para este nivel se toman intervalos más pequeños en las diferencias de AP, es decir realizar el paso al límite, este se puede hacer usando algún software que facilite los cálculos y con una representación en dinámica que facilite la construcción de rectas tangentes en varios puntos de la gráfica.

5.5.2 Problemas geométricos de variación y el uso de software dinámico (Tarea 2)

5.5.2.1 *Presentación*

En la situación se procura que dado el cuadrado $ABCD$ se construya un cuadrado $EFGH$ inscrito en él. También, pide que se tengan en cuenta las siguientes indicaciones: ¿Dónde ubicarías los vértices de este nuevo cuadrado $EFGH$? ¿Qué propiedades tiene un cuadrado? ¿Cómo convencerías alguien de que tu construcción corresponde a un cuadrado, qué argumentos matemáticos le darías? Además, se sugieren las siguientes preguntas para abordar la tarea:

- ¿A qué distancia de los vértices del cuadrado $ABCD$ ubicaste los vértices del cuadrado $EFGH$?
- ¿Hay más cuadrados que puedan inscribirse dentro del cuadrado $ABCD$? Construye otro ¿Cuántos cuadrados más pueden inscribirse al cuadrado $ABCD$? Argumenta tu respuesta y construye otros.
- ¿Qué relación hay entre los nuevos cuadrados construidos y el cuadrado inicial $ABCD$, en cuanto a la ubicación de sus vértices? ¿Qué relación hay entre los nuevos cuadrados y el cuadrado inicial $ABCD$ en cuanto a la longitud de sus lados? ¿Qué relación hay entre los nuevos cuadrados y el cuadrado inicial $ABCD$ en cuanto a su área?
- ¿Varía el área de los diferentes cuadrados inscritos o es constante? Si varía ¿cómo varía? ¿Hay un cuadrado inscrito cuya área sea mínima? ¿Cuál es el cuadrado inscrito de área mínima? Constrúyelo.

Esta situación se aborda desde diferentes perspectivas: numérica, algebraica y geométrica. Un aspecto que se desea remarcar es la necesidad que existe por propiciar que los estudiantes argumenten sus propios procedimientos.

5.5.2.2 *Contexto*

La tarea se presenta en un escenario netamente matemático, que parece ser geométrico debido a que intervienen objetos propios de la Geometría (como Cuadrado, Vértice, Lado etc.) y relaciones entre estos objetos (v.gr., estar inscrito), e implica la necesidad de hacer una construcción.

Es claro que el enunciado del problema es geométrico, además, puede evidenciarse en las primeras preguntas que su objetivo principal es realizar la construcción de un cuadrado inscrito en otro. Pero al observar la pregunta $\boldsymbol{d}$) la tarea pasa de un ámbito geométrico a un ámbito de optimización de área.

5.5.2.3 *Mediación instrumental*

En este caso se hace uso de Cabrí o Geogebra (ambos softwares de Geometría dinámica) en dos momentos. En el primero, para representar la situación de manera estática (Construcción de un cuadrado inscrito en otro). En un segundo momento, se utiliza como medio para hacer un acercamiento geométrico a la solución del problema. Realizando construcciones sucesivas de cuadriláteros inscritos en un cuadrado.

Este acercamiento geométrico, en el cual se realiza la construcción, es guiado por el docente, que tiene en cuenta ciertas pautas que son explicitas en el documento.

Las principales herramientas del software que se utilizan para la construcción que promueve el articulo son Polígono, Punto medio y Segmento.

5.5.2.4 *Tipo de representación*

Inicialmente se sugiere que los estudiantes hagan representaciones con lápiz y papel, es decir representaciones graficas estáticas del problema, con las que se pretende hacer un primer acercamiento al mismo.

En el documento aparece un único registro de construcción geométrica con ayuda de los trazos hechos en Geogebra que se presenta a continuación:

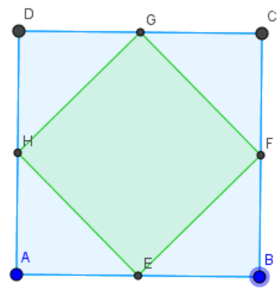


Gráfico 19 Cuadrado EFGH inscrito en el cuadrado ABCD

Con la construcción anterior se trabaja para seguir elaborando cuadriláteros inscritos en el cuadrado $ABCD$ estableciendo los puntos medios de los segmentos no consecutivos y utilizando la herramienta “polígono” de Geogebra. Como se muestra a continuación:

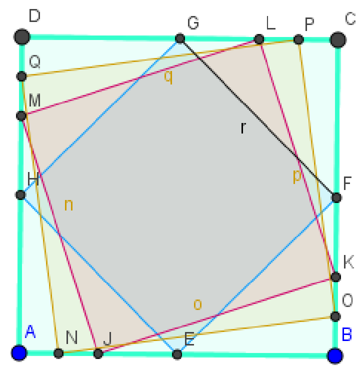


Gráfico 20 Diferentes cuadrados inscritos en el cuadrado ABCD

Como conclusión se debe observar que se pueden inscribir una cantidad infinita de cuadrados $\boldsymbol{MLKJ}$ al cuadrado $\boldsymbol{ABCD}$ y contesta las preguntas de los incisos $\boldsymbol{b}$ **,** $\boldsymbol{c}$**.** Lo escrito anteriormente se puede encontrar en el documento con detalle donde se realiza una demostración geométrica guiada bajo una secuencia.

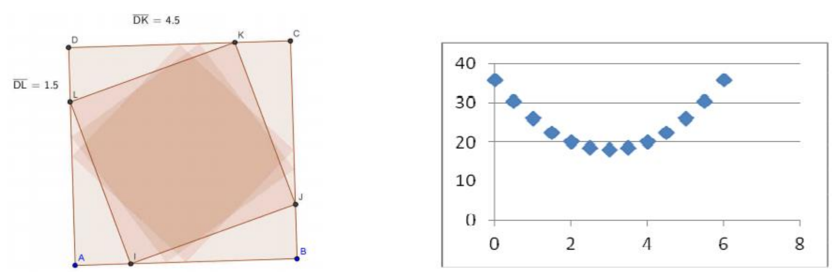
Se expone además una representación tabular que muestra la longitud de los lados de varios cuadrados inscritos en función de la ubicación de sus vértices, así como el área correspondiente.

DK	DL	LADO	AREA
6	0	6	36
5.5	0.5	5.523	30.5
5	1	5.099	26
4.5	1.5	4.743	22.5
4	2	4.472	20
3.5	2.5	4.301	18.5
3	3	4.243	18
2.5	3.5	4.301	18.5
2	4	4.472	20
1.5	4.5	4.743	22.5
1	5	5.099	26
0.5	5.5	5.523	30.5
0	6	6	36

Gráfico 21 Representación tabular

En el documento explicitan que se podría promover algo interesante con o sin tecnología y se refiere a la graficación de los datos de las columnas de la tabla correspondientes al segmento DK y al área del cuadrado inscrito. Es decir, a medida que el segmento DK aumenta o disminuye su longitud, así mismo cambia el área del cuadrado inscrito.

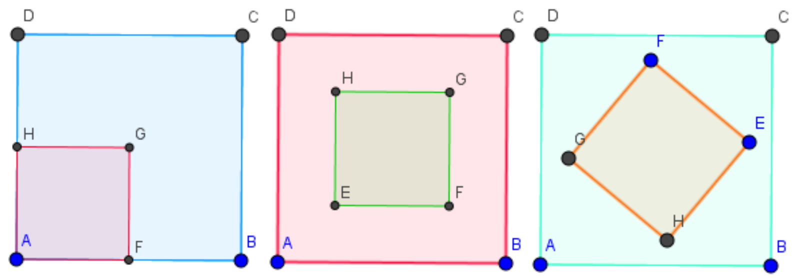
Se muestra este resultado Bosquejado por los estudiantes.



a) b)

Gráfico 22 Cuadrados inscritos al cuadrado ABCD. Gráfica de los datos de las columnas de la tabla correspondientes a (DK)¯ y al área de cuadrado inscrito.

Esta situación podría abrir nuevas tareas y ponerse interesante si optamos por salirnos un poco de la definición de estar inscrito y consideramos las siguientes posibilidades:



5.5.2.5 *Tratamiento de las magnitudes*

El plan de solución después de responder a las preguntas de los incisos b y c se hace a partir de herramientas manuales (Regla graduada), para los casos en los cuales se realizó la representación estática en lápiz y papel. Mientras que los que hicieron uso de herramientas tecnológicas, podían optar por las diferentes opciones que brindaba el Geogebra para calcular la medida de los lados. Esto hace evidente que se realizó un trabajo cuantitativo numérico. Pero que no necesariamente tiene que ser de esta manera.

Se hace un acercamiento a la solución usando herramientas del cálculo diferencial y estableciendo coordenadas a los vértices de los cuadrados como se muestra a continuación.

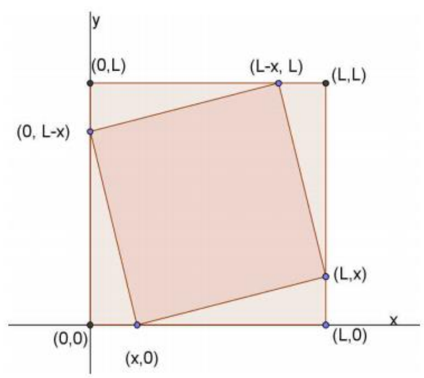


Gráfico 23 Cuadrado inscrito en el cuadro cuyas coordenadas son (0,0), (L, 0), (L, L), (0, L)

Manteniendo de esta forma el trabajo cuantitativo numérico y promoviendo el manejo algebraico.

Por otra parte, se hace una solución geométrica donde se realiza una construcción auxiliar de las diagonales y logran demostrar que existe un cuadrado de área mínima inscrito en otro.

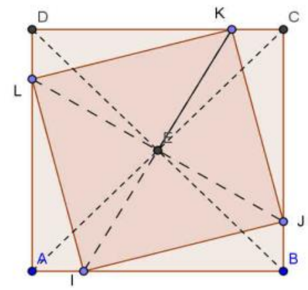


Gráfico 24 Cuadrado IJKL inscrito en el cuadrado ABCD. Se han trazado las diagonales $\overline{KI}, \overline{LJ}, \overline{AC}, \overline{BD}$

Los procesos mencionados se pueden encontrar en detalle en el documento.

5.5.2.6 *Niveles de razonamiento de Carlson*

Nivel 0. En el nivel cero, se reconoce qué es lo que está cambiando. En este caso la cantidad de superficie del rectángulo inscrito cuando el punto K se mueve sobre el segmento DC es inmediata y salta a la vista, pero podría trabajarse con otras partes de la situación que no son tan evidentes como el área determinada por los triángulos rectángulos de las esquinas, con las diagonales, con las bisectrices, entre otras que pueden surgir y se pueden estudiar.

Nivel 1. El nivel de coordinación (N1) sustenta la acción mental de coordinar el cambio de longitud del segmento DK, con el cambio en la superficie del cuadrado inscrito (AM1). Es decir, como el segmento DK cambia, determina que la cantidad superficie del cuadrado inscrito cambie y esto se denomina como coordinación entre dos variables.

Se ha identificado AM1 cuando se propone que se realicen varios trazos de cuadrados inscritos para distintas posiciones de los puntos K, L (vértices del cuadrado inscrito) y buscar los valores más pequeños del área de este cuadrado.

Nivel 2. El nivel de dirección (N2) sustenta tanto a AM1 como a la acción mental de coordinar la dirección del cambio de longitud del segmento DK mientras se considera el cambio de la cantidad de superficie en el cuadrado inscrito (AM2). La dirección del cambio puede ser de aumento o de disminución.

Se ha identificado AM2 cuando se expone en la representación tabular que a medida que se incrementa la cantidad de longitud del segmento DK, la superficie del cuadrado aumenta. Pero a partir del punto máximo la cantidad de superficie disminuye

Nivel 3. El nivel de coordinación cuantitativa (N3) sustenta a AM1, AM2 y a la acción mental de coordinar la cantidad de cambio de la longitud del segmento DK con la cantidad de cambio de superficie del cuadrado inscrito (AM3). Sin embargo, no se evidencia con claridad el tratamiento para este nivel en el documento

Nivel 4. El nivel de razón promedio (N4) sustenta a AM1, AM2, AM3 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio promedio entre los cambios en la longitud del $\overline{DK}$ y la superficie del cuadrado inscrito.

Se hace un acercamiento numérico que logra determinar el área de cualquier cuadrado que pueda obtenerse bajo una fórmula con la cual hallan el cuadrado de área mínima. Sin embargo, se saltan el paso al límite el cual no es evidente en la solución

Nivel 5. El nivel de razón instantánea (N5) sustenta desde AM1 hasta AM4 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio instantánea de la longitud de DK (con respecto a la superficie del cuadrado inscrito).

Se evidencia el tratamiento de este nivel cuando se manifiesta (e. gr., los estudiantes deberían poder derivar la función $l^2 = (L - x)^2 + x^2$ y encontrar que $x = \frac{L}{2}$ es el punto crítico. A partir, de este valor, podrían usar el criterio de la segunda derivada y encontrar que $l''(L/2) > 0$ y por lo tanto el cuadrado de área mínima es aquel cuyos vértices son $\left(\frac{L}{2}, 0\right), \left(L, \frac{L}{2}\right), \left(\frac{L}{2}, L\right), \left(0, \frac{L}{2}\right))$

5.6 Revista SUMA

5.6.1 ¿Cuánto tendría que medir la caja para contener x veces más galletas?

5.6.1.1 *Presentación*

Queremos empaquetar cajitas de cerillas (fig.1), en cajas de cartón (fig.2), ¿podemos hacerlo colocando las cajitas de cerillas en cualquier posición?

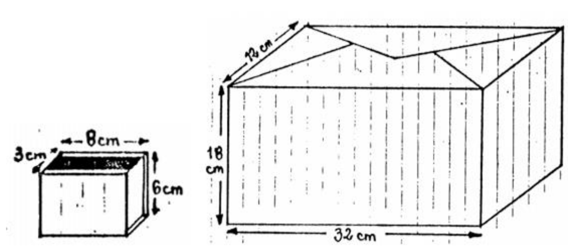


Gráfico 25 Representación estática de la situación

5.6.1.2 *Contexto*

La tarea está planteada en un escenario real además es una tarea diseñada para cumplir con unos objetivos específicos dentro del aprendizaje de las matemáticas (v. gr, volúmenes de prismas cilindros y otros cuerpos). Por otra parte, es evidente que el enunciado de la situación está bajo un escenario geométrico pero direccionado hacia un ámbito del Cálculo, en particular a la optimización. Lo anterior tal vez no es explicito, por tal motivo ejemplificamos a continuación teniendo en cuenta los resultados obtenidos:

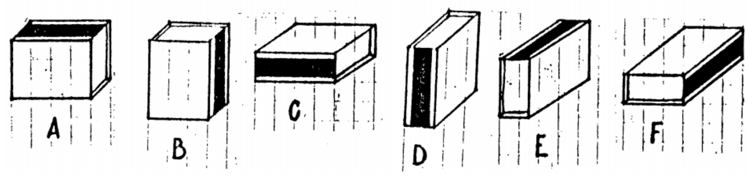


Gráfico 26 Posibilidades en la posición de las cajitas; Tomada del documento

Las cajitas de cerillos pueden colocarse en seis posiciones diferentes pero solamente dos posiciones aseguran utilizar por completo las dimensiones de la caja:

- En la posición A caben: 4 a lo largo, 4 a lo ancho y 3 a lo largo.
- En la posición C caben: 4 a lo largo 2 a lo ancho y 6 a lo alto.

Pensando en lo anterior es de suponerse que el asunto a tratar en esta tarea pretende responder ¿cuáles deberían ser las dimensiones de la caja para albergar una cantidad cualquiera de cajitas de cerillos? Es importante tener en cuenta que las posiciones en las cuales se pueden ubicar las cajitas de cerillos son seis, pero esto no implica que sean siempre la posición A y C las que llenen las dimensiones de la caja; debido a que esto dependerá de las variantes que se den a las medidas de largo, alto y ancho.

5.6.1.3 *Mediación Instrumental*

En esta tarea se podría hacer el uso de pequeños trozos de madera iguales en cm^3 debido a que las condiciones iniciales del problema pueden variar, es decir, las dimensiones de la caja no son estrictas; por lo tanto, está en manos del docente implementar materiales didácticos útiles y variables como las regletas Cuisenaire, las regletas de Mª Antonia Canals, Material base 10, Policubos entre otros[6], o bien podría utilizar material reciclable y optar por conseguir las cajitas de cerillos de igual dimensión y trabajar con ellas.

5.6.1.4 *Tipo de Representación*

La primera representación es de tipo figural, en la cual se bosqueja una caja y al mismo tiempo una pequeña cajita de cerillos como las vistas en los apartados anteriores de este análisis. Así mismo el autor sugiere realizar cambios en las dimensiones de la caja original bosquejando otra con dimensiones distintas de esta manera.

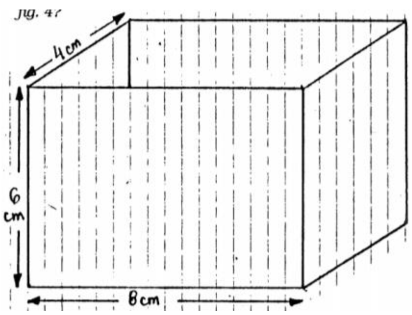


Gráfico 27 Caja con nuevas dimensiones; imagen extraída del documento

El autor exhibe diferentes tablas en las cuales se realizó un proceso para duplicar, triplicar, y así sucesivamente, una o varias dimensiones de la caja. He aquí algunas de estas representaciones tabulares:

¿Cuántos cm³ podría contener la caja si duplicamos, triplicamos, ... una de sus dimensiones?.

LARGO	ANCHO	ALTO	Nº DE cm³ QUE PUEDEN CONTENER
x 2	=	=	x 2
=	x 2	=	x 2
=	=	x 2	x 2
x 3	=	=	x 3
...	...	...	...

Gráfico 28 Al duplicar el largo se obtiene una caja con una capacidad del doble de la caja inicial

[6] Las descripciones de los materiales que se podrían utilizar para esta tarea se pueden encontrar en https://aprendiendomatematicas.com/mis-10-materiales-imprescindibles-en-primaria/

¿Qué ocurrirá si duplicamos, triplicamos, ... las tres dimensiones de la caja?.

Tabla resumen de los cálculos realizados:

LARGO	ANCHO	ALTO	Nº DE cm^3 QUE PUEDE CONTENER
x 2	x 2	x 2	x 8
x 2	x 2	x 3	x 12
x 2	x 3	x 3	x 18
x 3	x 3	x 3	x 27
...	...	...	...

Gráfico 29El número de cm^3 que puede contener se multiplica por el producto que de lo que han aumentado las tres dimensiones

5.6.1.5 *Tratamiento de las magnitudes*

Para esta tarea el tratamiento de las magnitudes es cuantitativo numérico debido a que se vuelve importante el hecho de realizar cálculos con medidas de las cajas; tanto la de almacenamiento como las de cerillos.

5.6.1.6 *Niveles de razonamiento*

Nivel 0. En el nivel cero, se reconoce qué es lo que está cambiando como la tarea anterior apunta a llenar una caja a partir de otras más pequeñas el asunto a tratar es la identificación de variables; en este caso ¿cómo cambia la capacidad de la caja a medida que se agregan pequeñas cajitas de cerillos en ella?

Nivel 1. El nivel de coordinación (N1) sustenta la acción mental de coordinar el cambio de capacidad de la caja, con el cambio en la capacidad restante de la caja (AM1). Es decir, como la capacidad de la caja cambia a medida que se agregan cajitas de cerillos, determina que la cantidad capacidad restante de la caja cambie y esto se denomina como coordinación entre dos variables.

Nivel 2. El nivel de dirección (N2) sustenta tanto a AM1 como a la acción mental de coordinar la dirección del cambio de la capacidad de la caja que se va llenando con cajitas de cerillos mientras se considera el cambio de la capacidad restante de la caja (AM2). La dirección del cambio puede ser de aumento o de disminución.

Se ha identificado AM2 cuando se expone en la representación tabular que a medida que se incrementa la cantidad de cajitas de cerillos, la capacidad de la caja disminuye pero que este cambio es reciproco es decir que puede aumentar o disminuir. (e. g., número de cm^3 que puede contener se multiplica por el producto que de lo que han aumentado las tres dimensiones)

Los siguientes niveles al parecer no trabajados sin embargo se dejan planteados par que los maestros interesados formulen preguntas para trabajar la razón promedio e instantánea con actividades acordes al pensamiento variacional.

Nivel 3. El nivel de coordinación cuantitativa (N3) sustenta a AM1, AM2 y a la acción mental de coordinar la cantidad de cambio de la capacidad de la caja a medida que se agregan cajitas de cerillos con la cantidad de cambio de la capacidad restante de la caja (AM3).

Nivel 4. El nivel de razón promedio (N4) sustenta a AM1, AM2, AM3 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio promedio entre los cambios en la cantidad de cambio de la capacidad de la caja a medida que se agregan cajitas de cerillos y la cantidad de cambio de la capacidad restante de la caja (AM4)

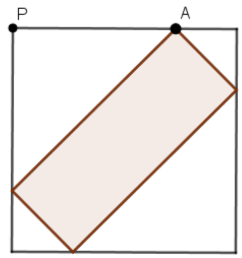
Nivel 5. El nivel de razón instantánea (N5) sustenta desde AM1 hasta AM4 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio instantánea de la capacidad de la caja a medida que se adicionan cajitas de cerillos (con respecto a la capacidad restante de la caja).

5.7 Revista TED

5.7.1 Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas

5.7.1.1 *Presentación*

La tarea presentada por Jhony Villa en el documento, en esencia, consiste en reconocer y describir la variación del área de un rectángulo inscrito en un cuadrado a medida que se mueve uno de sus vértices (el punto A) sobre uno de los lados del cuadrado, como se muestra en la imagen:



Para ello se proponen tres fases. Primero, reconocimiento y descripción de la variación (*qué cambia*), establecimiento de relaciones de dependencia entre las cantidades y aproximación a *cómo cambia* aquello que cambia. Segundo, uso del software Cabrí y sus herramientas para abordar con mayor profundidad las preguntas *cómo* y *cuánto cambia* y a partir de esto conjeturar algunas relaciones entre las magnitudes que cambian. Tercero, construcción de una gráfica que modele el cambio.

5.7.1.2 *Contexto*

El escenario en el que se presenta la tarea es netamente matemático, que parece ser geométrico debido a que intervienen objetos propios de la Geometría (como rectángulo, cuadrado, etc.) y relaciones entre estos objetos (*v.gr.*, estar inscrito), e implica la necesidad de hacer una construcción. Sin embargo, el problema enunciado no es geométrico, en cuanto no es de Geometría, sino más bien del pensamiento variacional en cuanto pretende identificar el cambio ¿cuánto? y ¿cómo varia? Un asunto fundamental es que la situación no procura ser modelo de nada.

5.7.1.3 *Mediación instrumental*

Se resalta el uso del software de geometría dinámica como medio no solo para representar la situación, sino para reconocer la variación presente en la misma.

Hay que tener en cuenta que no hay una construcción previa, es decir, que el estudiante no realiza ninguna manipulación al software para generar la situación y al parecer es dada. No obstante, se hace uso de herramientas de Cabrí como: transferencia de medidas, área, tabla, rectas, traza, entre otras, que permiten la exploración.

No se sabe qué tanta ganancia o pérdida, para el pensamiento variacional, implique que el estudiante realice o no la construcción, debido a que esto depende de los objetivos de enseñanza y aprendizaje que tenga docente.

5.7.1.4 *Tipo de representación*

Teniendo en cuenta que la construcción es otorgada al estudiante, las representaciones se manifiestan en dos momentos. El primero es una representación estática de la situación donde se muestra un rectángulo inscrito en un cuadrado. El segundo momento, surge cuando el estudiante interactúa con esta representación y mueve el punto A sobre el lado del cuadrado, dándole una connotación cinemática a la representación a partir de la cual se generan dos tipos de representaciones gráfica y tabular.

Para la construcción de la gráfica que modelará el comportamiento de la superficie del rectángulo en relación con la longitud del segmento PA, se ubica en el eje x el segmento OR, que es la medida de PA y en el eje y el segmento RS que representa el área. La gráfica se construye con la traza del punto S conforme se mueve el punto A del cuadrado. Por otra parte, la tabla se genera utilizando una herramienta que brinda el software y relaciona las mismas variables que la gráfica.

Algo que al parecer no interesa en esta tarea pero que cabe a considerar es la expresión algebraica que captura la Covariación del área del rectángulo cuando el punto A se mueve sobre el lado del cuadrado.

5.7.1.5 *Tratamiento de las magnitudes*

Las herramientas del software mencionadas anteriormente, más específicamente generar la tabla, en la que se relaciona la longitud del segmento PA y la cantidad de superficie del rectángulo, le da un tratamiento cuantitativo numérico a la situación. Con respecto a lo anterior, es necesario advertir que los valores registrados en la tabla son aproximados, en virtud del nivel de precisión aritmética del software.

Si bien es cierto que se da un tratamiento cuantitativo numérico a la situación este podría ser cuantitativo no numérico si trabajamos con la cantidad de la longitud, que no es precisamente la medida de la longitud, y reconocemos que podría mantenerse en esos términos usando el método de Descartes para capturar la cantidad de superficie en un segmento, es decir, trabajarse en términos geométricos y quedarse en esas condiciones hasta el final, y de esta forma potenciar el desarrollo del pensamiento variacional. Esta manera de multiplicar es muy potente debido a que captura la superficie en un segmento, sin utilizar medidas, con la cantidad de la longitud que no es precisamente la medida de la longitud y reconocemos que podría mantenerse en esos términos, sin embargo, se da un salto a lo cuantitativo numérico a través de la herramienta del software cuando se trabajan con los valores numéricos.

5.7.1.6 *Niveles de razonamiento de Carlson*

Nivel 0. En el nivel cero, esta tarea podría ponerse interesante si miramos las posibilidades que no se han desarrollado como, por ejemplo: el perímetro del rectángulo inscrito y ¿cómo varía? La superficie de cualquier triángulo y ¿cómo varía?, sus alturas, mediatrices, bisectrices y demás posibilidades que puedan surgir y su variación en relación al segmento PA cuando A se mueve.

Es importante también reconocer qué se mantiene constante, en este caso la superficie, perímetro y ángulos del cuadrado, así como los ángulos del rectángulo, los triángulos siempre serán rectángulos – isósceles.

Nivel 1. El nivel de coordinación (N1) sustenta la acción mental de coordinar el cambio de longitud del segmento PA, con el cambio en la superficie del rectángulo (AM1). Es decir, como el segmento PA cambia, determina que la cantidad superficie cambie y esto se denomina como coordinación entre dos variables. Se ha identificado AM1 al observar que en la solución de la situación el estudiante expresa a conciencia que a medida que una variable cambia, la otra variable cambia (e. g., Pues, pues si aumenta uno de los lados, pues se va volviendo más, uhhh..., pues, más cuadrado, por así decirlo). Este estudiante no necesariamente atiende a la dirección, la cantidad o la razón de cambio.

Nivel 2. El nivel de dirección (N2) sustenta tanto a AM1 como a la acción mental de coordinar la dirección del cambio de longitud del segmento PA mientras se considera el cambio de la cantidad de superficie (AM2). La dirección del cambio puede ser de aumento o de disminución.

Se ha identificado AM2 cuando se expone que a medida que se incrementa la cantidad de longitud de PA, la superficie del rectángulo aumenta o disminuye; también cuando se señala que a medida que la cantidad de longitud disminuye, la cantidad de superficie del rectángulo disminuye o aumenta (e, g., el estudiante pudo determinar que cuando la longitud del lado PA se anula o iguala al lado del cuadrado, el rectángulo se convierte en un segmento y por tanto su área se anula.), (e. g., Mientras el punto A esté más cercano a cualquiera de los extremos, pongámoslo el lado superior, en el caso que se acerque al principio va a disminuir, por ende, si disminuye uno de los lados, el área merma [disminuye]).

Nivel 3. El nivel de coordinación cuantitativa (N3) sustenta a AM1, AM2 y a la acción mental de coordinar la cantidad de cambio de la longitud de PA con la cantidad de cambio de superficie (AM3). Se reconoce que, hasta el punto máximo, de la función cuadrática que surge al relacionar las dos variables, mientras la longitud del segmento aumenta, la superficie del rectángulo también lo hace; a partir del punto máximo, mientras uno aumenta el otro disminuye.

La coordinación cuantitativa en este caso debe entenderse como cuantitativa numérica a pesar de que pueda trabajarse en términos cuantitativos no numéricos. Donde se pretende hallar una relación entre las diferencias de las alturas que representan la cantidad de superficie, aunque también podrían relacionarse en términos del cociente.

Nivel 4. El nivel de razón promedio (N4) sustenta a AM1, AM2, AM3 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio promedio entre los cambios en la longitud del $\overline{PA}$ y la superficie del rectángulo. Dado que la situación fue resuelta por un estudiante en particular se puede decir que hubo un acercamiento a la razón de cambio promedio por cuanto Se observa que existe una interpretación cualitativa de la concavidad de las gráficas asociada al cambio de la razón de cambio promedio.

Nivel 5. El nivel de razón instantánea (N5) sustenta desde AM1 hasta AM4 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio instantánea de la longitud (con respecto a la superficie).

En este nivel se manipula y se hace uso de la calculadora que determina la derivada de la función, los puntos donde se anula y la expresión de la segunda derivada de la función. No se logra identificar la AM5 debido a que no se evidencian comentarios que sugieren una comprensión de considerar la naturaleza cambiante de la razón mientras imaginaban el cambio continuo en la longitud.

Cabe mencionar que se clasifica a un estudiante en el nivel de razón instantánea sólo si demuestra comprender que la razón instantánea resultó de considerar cantidades de longitud más y más pequeñas (construidas sobre el razonamiento exhibido en AM4).

5.8 Revista UNO

5.8.1 El estudio de fenómenos de variación haciendo uso de herramientas tecnológicas (Camacho & Santos, 2004)

5.8.1.1 *Presentación*

La tarea propuesta procura hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo isósceles cuya base (lado desigual) es a y la altura correspondiente h suponiendo que un lado del rectángulo está sobre la base del triángulo.

A lo largo del documento se presentan dos formas de abordar la solución de la tarea, a saber: acercamiento geométrico – dinámico[7] y acercamiento algebraico.

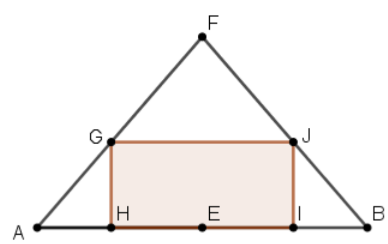


Gráfico 30 Representación estática de la situación: Rectángulo inscrito en triángulo isósceles

5.8.1.2 *Contexto*

La tarea se presenta en un escenario netamente matemático, que parece ser geométrico debido a que intervienen objetos propios de la Geometría como triángulo, rectángulo, etc., y relaciones entre estos objetos (*v.gr.*, estar inscrito), e implica la necesidad de hacer una construcción. Sin embargo, el problema enunciado no es geométrico, en cuanto no es de Geometría, sino más bien del Cálculo, puntualmente un problema de optimización de áreas. En resumen, el problema está en un escenario geométrico, pero pertenece a un ámbito de la optimización.

5.8.1.3 *Mediación instrumental*

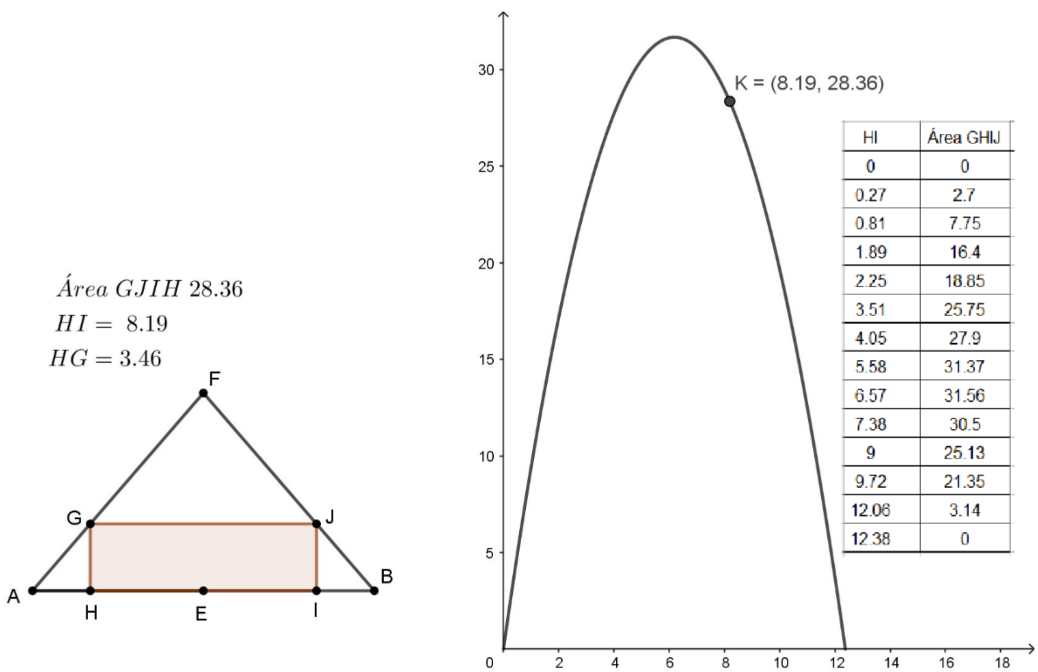
Se resalta el uso del software de geometría dinámica como medio no solo para representar la situación, sino para reconocer la variación presente en la misma.

[7] Es usual identificar al software Cabri o Geogebra como software de geometría dinámica; sin embargo, consideramos que esta es una inadecuada forma de adjetivarlos pues la palabra “dinámica” en Física no refiere precisamente a movimiento, como sí la palabra “cinemática”.

En este caso, se encuentra una guía junto con un análisis para realizar la construcción de la situación. Además, esta mediación instrumental le permite generar la solución del problema utilizando herramientas del software como: hallar el lugar geométrico, generar una tabla, entre otras.

5.8.1.4 *Tipo de Representación*

En esta tarea se evidencian tres tipos de representaciones. La primera, es la presentación estática de la situación, es decir el rectángulo inscrito en el triángulo isósceles. La segunda, es la gráfica que modela el comportamiento de la superficie del rectángulo en relación con la longitud de su base. Por último, la representación tabular que relaciona la longitud de la base, la altura del rectángulo, y la superficie del mismo.



HI	Área GHIJ
0	0
0.27	2.7
0.81	7.75
1.89	16.4
2.25	18.85
3.51	25.75
4.05	27.9
5.58	31.37
6.57	31.56
7.38	30.5
9	25.13
9.72	21.35
12.06	3.14
12.38	0

Gráfico 31 Diferentes tipos de representaciones de la situación descrita

Es pertinente aclarar que la gráfica generada siguiendo las indicaciones del documento solamente representa el cambio, entre la superficie del rectángulo y la longitud del lado GH, cuando H se mueve entre el vértice A y el punto medio de la base del triángulo. Lo anterior sucede debido a que, en la construcción expuesta, el punto G pertenece a un lado y su movimiento se limita únicamente al mismo. Por tal motivo no se puede generar el lugar geométrico total que modela este cambio sino la mitad.

En concordancia con lo expresado se intentó realizar una construcción mediada por el software Geogebra, donde el punto G tuviera movimiento a lo largo de todo el polígono, utilizando varias opciones, pero lastimosamente no fue posible encontrar una solución a este problema.

5.8.1.5 *Tratamiento de las magnitudes*

Las herramientas del software mencionadas anteriormente, más específicamente generar la tabla, en la que se relaciona la longitud de la base del rectángulo y su área, le da un tratamiento cuantitativo numérico a la situación. Con respecto a lo anterior, es necesario advertir que los valores registrados en la tabla son aproximados, en virtud del nivel de precisión aritmética del software.

Si bien es cierto que se da un tratamiento cuantitativo numérico a la situación este podría ser cuantitativo no numérico si trabajamos con la cantidad de la longitud, que no es precisamente la medida de la longitud, y reconocemos que podría mantenerse en esos términos usando el método de Descartes mencionado en el marco, es decir trabajarse en términos geométricos y quedarse en esas condiciones hasta el final.

También, es importante resaltar que el manejo algebraico que se le da al problema es muy eficiente, pero se pierde el tratamiento del pensamiento variacional, en cuanto se centra la atención en la variación numérica y no en aspectos esenciales como: ¿qué cambia? ¿Con respecto a qué está cambiando? ¿Cuánto cambia?

5.8.1.6 *Niveles de razonamiento de Carlson*

Nivel 0. La percepción del cambio está dependiendo del cambio en la posición del punto H que pertenece a la base del rectángulo. A partir de esto, la magnitud de la cual es más evidente percibir dicho cambio es la superficie del rectángulo. No obstante, hay otras cuyo cambio no salta a la vista, pero que también está ocurriendo, por ejemplo, la altura, cantidad de superficie y diagonales del rectángulo, la cantidad de superficie de los triángulos que se determinan, las alturas de cualquiera de ellos, entre otras.

Nivel 1. El nivel de coordinación (N1) sustenta la acción mental de coordinar[8] el cambio de longitud de la base del rectángulo, con el cambio en la superficie (AM1). Se ha identificado AM1 al observar que en la solución de la situación se designan los ejes y se expresa que hay conocimiento de que a medida que una variable cambia, la otra variable cambia (e. g., cuando la longitud de lado del rectángulo RU cambia, la superficie del rectángulo cambia). Lo anterior, no necesariamente indica que se atiende a la dirección, la cantidad o la razón de cambio.

Es importante, resaltar que no es posible construir una función (esto pensando en los siguientes niveles) que relacione el cambio de una magnitud y el cambio de la posición de un punto, por lo tanto, se debe reconocer cuál magnitud es la que está "detrás" del cambio en la posición del punto. Dicha magnitud, aunque su percepción no sea inmediata, es la longitud de la base del rectángulo.

Nuevamente al pensar en la construcción de una función, se puede preguntar ¿qué determina la escogencia de las variables? En ese sentido, es la posición del punto la que varía y en consecuencia varía cualquiera de las magnitudes ya descritas. Ahora, para armar la función seleccionamos dos magnitudes: la primera: la que está asociada al cambio de la posición del punto, es decir, la longitud de la base del rectángulo. Y la segunda: una de las magnitudes que están variando, en este caso se escogió la superficie del rectángulo, de cierta forma porque que así lo condiciona el problema.

Es importante resaltar, que, si bien es cierto que podría escogerse cualquier par de variables para armar la función, también es cierto que, en términos del análisis, es preferible que una de las variables escogidas sea monótona y no que, por ejemplo, crezca y decrezca. Por ejemplo, podría escogerse, como variable independiente, la altura del lado del rectángulo y no la base como acá se propuso.

Nivel 2. El nivel de dirección (N2) sustenta tanto a AM1 como a la acción mental de coordinar la dirección del cambio de longitud de la base del rectángulo mientras se considera el cambio de la cantidad de superficie (AM2). La dirección del cambio puede ser de aumento o de disminución.

Se ha identificado AM2 cuando se expone que a medida que se incrementa la cantidad de longitud de la base del rectángulo, la superficie del mismo aumenta o disminuye; también cuando

[8] Cambio de una variable implica el cambio en otra variable. Hay dependencia en el cambio.

se señala que a medida que la cantidad de longitud disminuye, la cantidad de superficie del rectángulo disminuye o aumenta.

Nivel 3. El nivel de coordinación cuantitativa (N3) sustenta a AM1, AM2 y a la acción mental de coordinar la cantidad de cambio de la longitud de la base del rectángulo con la cantidad de cambio la superficie (AM3).

Se ha identificado AM3 en situaciones como (e. g., cuando la longitud del lado del rectángulo RU es la mitad[9] de la longitud del segmento dado AB y el otro lado RS es la mitad de la longitud de la altura se cumplirá que el área del rectángulo será 6.05)

Sería interesante pensar, además, en cuestiones como: si hablamos de la compensación que existe entre la base y la altura del rectángulo al mover el punto m sobre la base del triángulo ¿la cantidad en la que aumenta la altura, la pierde la base?

Nivel 4. El nivel de razón promedio (N4) sustenta a AM1, AM2, AM3 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio promedio, entendida como las diferencias entre los Δy y Δx, es decir la diferencia entre las cantidades de longitud y las cantidades de superficie: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (AM4). Es importante resaltar que se toman diferencias iguales para los Δx, por cuanto esto facilita la comparación, reduciéndola a comparar las diferencias en y:

No es posible determinar si la AM4 se trabaja en esta situación. Pero es una invitación para trabajar con Δx y Δy iguales y realizar un acercamiento a la derivada.

Nivel 5. El nivel de razón instantánea (N5) sustenta desde AM1 hasta AM4 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio instantánea de la longitud (con respecto a la superficie). Teniendo en cuenta que la razón de cambio instantánea hace referencia al paso al límite, es importante destacar que en el problema se hace uso de la calculadora para determinar la derivada de la función, los puntos donde se anula y la expresión de la segunda derivada de la función. Por lo tanto, nada garantiza que se esté considerando la naturaleza cambiante de la razón mientras imaginaban el cambio continuo en la longitud, luego la presencia de la AM5 no es evidente.

[9] Relación cuantitativa multiplicativa

Cabe mencionar que se dice que se alcanzó el nivel de comprensión 5 sólo si se demuestra que hay compresión de que la razón instantánea resulta de considerar cantidades de longitud más y más pequeñas (construidas sobre el razonamiento exhibido en AM4).

Atendiendo a las descripciones hechas, este mismo contexto podría usarse para definir diversas funciones que relacionen distintas variables que están covariando. No obstante, en este artículo lo usan únicamente para una función y para un caso de optimización. Lo anterior, muestra que la tarea puede ser enriquecida para potenciar el pensamiento variacional y no solo la optimización.

5.9 Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

5.9.1 Las funciones y sus gráficas en el estudio de la variación y el cambio (Tarea 1)

5.9.1.1 *Presentación*

Se presentan representaciones pictóricas-estáticas de tres situaciones de cambio. A partir de su interpretación, los alumnos deben responder a una serie de preguntas que involucran tareas diferentes.

Actividad

1. Observe las situaciones que se presentan en las siguientes ilustraciones. Luego conteste para cada una lo que se solicita.
   a. ¿Qué es lo que cambia en cada una de las situaciones?
   b. Exprese qué cambia y con respecto a qué cambia

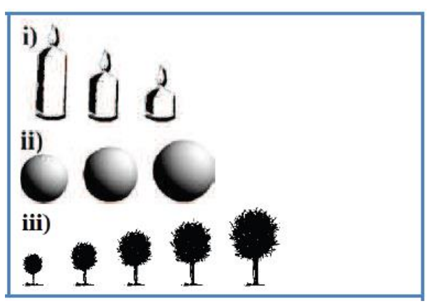


Gráfico 32 Representación estática de la situación.

La idea está basada en las actividades presentadas por Sosa y Aparicio en el taller "Estudio de funciones mediante actividades de modelación en ciencias" dictado en el marco de la Vigésimo tercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 23, 2009).

5.9.1.2 *Contexto*

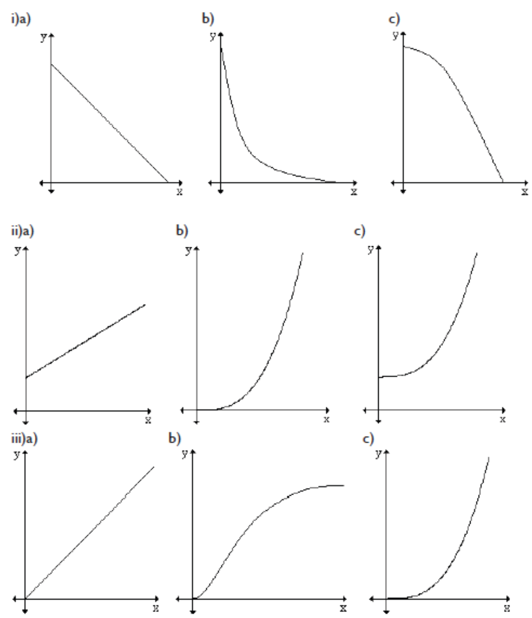
Las situaciones propuestas aluden a representaciones pictóricas y en ese sentido se considera que están asociadas a un escenario semireal (tiempo en el que se desgasta una vela, cambio del volumen de una esfera y cambio en el tamaño del árbol al pasar el tiempo). Esta tarea consiste en identificar las variables involucradas. Requiere la interpretación del fenómeno y lo que se puede representar en cada uno de ellos.

5.9.1.3 *Mediación instrumental*

No se pauta el uso de tecnología para esta tarea, en ese caso la mediación instrumental esta sujetada a las aproximaciones que se puedan dar en el aula con el trabajo docente y estudiantil.

5.9.1.4 *Tipo de representación*

Se identifican dos tipos de representaciones pictórica y gráfica. A partir de las representaciones pictóricas de las tres situaciones, se propone a los estudiantes analizar si alguna o algunas de las siguientes representaciones pueden corresponder al modelo presentado.



Consideramos que debe haber un paréntesis para destacar que en la representación no se establece que representa x e y en ese sentido y de acuerdo a los autores el análisis está ligado a cómo cambian las magnitudes involucradas, lo que lleva a centrar la atención en su crecimiento o decrecimiento, en la determinación si el crecimiento es o no lineal, y darse cuenta del significado de la relación entre las dos variables y, en particular, su patrón de variación conjunta.(Vrancken et al., 2014)

5.9.1.5 *Tratamiento de las magnitudes*

Debido al carácter representativo de la situación el tratamiento de las magnitudes es netamente cuantitativo no numérico, es decir, la medida no juega un papel significativo y demuestra que se puede hacer un estudio de covariación sin la necesidad de hacer uso de medidas.

5.9.1.6 *Niveles de Razonamiento de Carlson*

Nivel 0. Para cada una de las situaciones siempre están presentes dos interrogantes, ¿qué es lo que cambia en cada una de las situaciones?, y, exprese qué cambia y con respecto a qué cambia

Estas preguntan apuntan a que los estudiantes identifiquen en que situaciones existe variación. Se identifica que la mayoría de estudiantes reconoce que hay algo que varía (e. g., En el inciso a), una buena cantidad de grupos (19) respondió de manera general para las tres figuras, que lo que cambia es el tamaño. Como respuestas más específicas aparecieron, para la primera figura, cambia la altura de la vela (11 grupos), para la segunda figura, cambia el volumen (10 grupos) y cambia el diámetro de la esfera (seis grupos), mientras que para la última imagen, seis grupos escribieron que cambia la altura de los árboles.)

Nivel 1. La acción mental de coordinar cambios en una variable con respecto a la otra (AM1) se identifica en algunas de las respuestas de los estudiantes. (e. g., Con respecto al inciso b), 23 grupos respondieron en los tres incisos que lo que cambia, lo hace con respecto al tiempo, mientras que otros diez grupos señalaron que cambia respecto del tiempo al menos para una de las figuras).

Teniendo en cuenta que el objetivo de la propuesta es identificar la variación en diferentes situaciones problema los niveles de razonamiento de Carlson llegan hasta este punto. Debido a que no hay preguntas ni respuestas en el documento que se acerquen a los siguientes niveles de covariación.

5.9.2 Las funciones y sus gráficas en el estudio de la variación y el cambio (Tarea 2)

5.9.2.1 *Presentación*

Realice una gráfica que le permita comunicar a sus compañeros el movimiento detallado a continuación: Una persona se ubica a un metro de un punto de referencia r y camina a paso constante durante cinco segundos alejándose de r cuatro metros. a) ¿Cuáles son las variables que intervienen en la situación? b) ¿Cómo es el comportamiento de la gráfica cuando la persona se aleja a paso constante del punto de referencia? c) Suponiendo que t representa el tiempo transcurrido y s la posición en determinado instante, el modelo algebraico para la situación presentada es $s(t) = \frac{1}{2}t + 1$. ¿Corresponde a la gráfica realizada? d) Analice el comportamiento de la función del inciso c) completando la siguiente tabla y respondiendo las preguntas:

Intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$	$t_2 - t_1$	$s_2 - s_1$	$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$
$0 \leq t \leq 1$			
$1 \leq t \leq 2$			
$2 \leq t \leq 3$			
$3 \leq t \leq 4$			
$4 \leq t \leq 5$			

Determine las unidades en que se expresan los valores de cada columna. ¿Qué representan en términos del problema los valores $t_2 - t_1$ y $s_2 - s_1$? ¿Y los valores de la última columna? ¿Cuál es la interpretación geométrica de cada uno de esos valores? (Ayúdese marcando las distintas medidas en la representación gráfica, por lo menos para uno de los intervalos).

5.9.2.2 *Contexto*

Se presenta una situación muy de carácter semireal aparentemente sencilla que corresponde a un movimiento con velocidad constante donde intervienen las variables tiempo y distancia. Al mismo tiempo su objetivo es observar los fenómenos de covariación entre el cambio de la distancia con respecto al cambio del tiempo $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ o en otras palabras, la variación de la distancia con respecto a la variación del tiempo.

5.9.2.3 *Mediación instrumental*

No se expone el uso de algún medio tecnológico que ayude en la solución de la tarea. No obstante sería atractivo realizar una construcción en un software como Cabri o Geogebra partiendo del modelo algebraico que otorga la situación (ver Gráfico 21). De igual forma es una manera para que los estudiantes hagan un reconocimiento de la variación de la distancia a un paso invariable con respecto a la variación del tiempo.

5.9.2.4 *Tipo de representación*

No se muestran resultados en los cuales se identifique algún tipo de representación más allá del modelo algebraico y la tabla que relaciona las diferencias o cambios $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ de la distancia con respecto al tiempo. Sin embargo la tarea involucra aspectos importantes de covariación y sería un refuerzo modelar una gráfica y estudiar las diversas relaciones que se presentan.

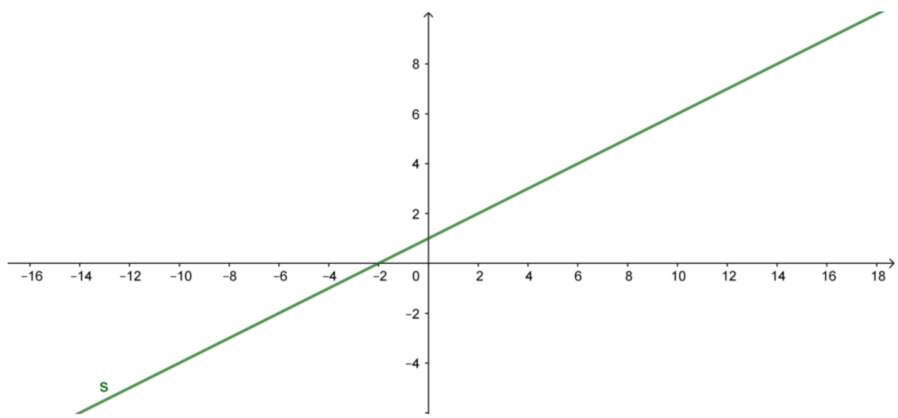


Gráfico 33 Representación gráfica posible

5.9.2.5 *Tratamiento de las magnitudes*

Se completa la actividad con un análisis cuantitativo a partir de la expresión algebraica de la función que modela el movimiento, lo que pretende caracterizar la variación en un modelo lineal.

5.9.2.6 *Niveles de Razonamiento de Carlson*

Nivel 0. La percepción del cambio está dependiendo del cambio en la posición de la persona. A partir de esto, la magnitud de la cual es más evidente percibir dicho cambio es la longitud recorrida. No obstante, se quiere ver la relación entre dos magnitudes diferentes: longitud y tiempo.

La situación es atrayente porque permite estudiar las otras relaciones $\frac{\Delta s}{\Delta v}$ distancia con respecto a velocidad, y $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ velocidad con respecto al tiempo. Ofreciendo de esta manera una invitación a los docentes interesados en trabajarlas por medio de un lenguaje covariacional. Además, se evidencia la intensión de trabajar este nivel a partir de la pregunta ¿Cuáles son las variables que intervienen en la situación?

Nivel 1. El nivel de coordinación (N1) sustenta la acción mental de coordinar el cambio del espacio recorrido por la persona, con el cambio en el tiempo empleado para hacer ese desplazamiento (AM1).

Nivel 2. El nivel de dirección (N2) sustenta tanto a AM1 como a la acción mental de coordinar la dirección del cambio de la longitud recorrida por la persona mientras se considera el cambio de la cantidad de tiempo (AM2). La dirección del cambio en este caso es de aumento

Se ha identificado AM2 cuando se expone que a medida que se incrementa la cantidad de longitud recorrida, el tiempo aumenta. (e. g., En la respuesta a cómo es el comportamiento de la gráfica, 21 grupos contestaron que es creciente, y los demás trataron de explicar cómo es ese crecimiento: *"crece de manera constante"*, *"crece proporcionalmente"*, *"aumenta constantemente"* o *"representa un movimiento rectilíneo uniforme"*.)

A continuación se deja planteada la forma en la cual se deberían trabajar los siguientes niveles 3 y 5 de covariación debido a que en el documento no se evidencia ninguna consigna que pretenda trabajarlos, además, es una invitación a los docentes interesados en la tarea para realizar actividades acordes a esta situación que permitan acceder al estudio de estos niveles.

Nivel 3. El nivel de coordinación cuantitativa (N3) sustenta a AM1, AM2 y a la acción mental de coordinar la cantidad de cambio de la longitud recorrida por la persona con la cantidad de cambio en el tiempo (AM3). No se evidencian respuestas que se puedan apropiar a este nivel.

Nivel 4. El nivel de razón promedio (N4) sustenta a AM1, AM2, AM3 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio promedio, entendida como las diferencias entre los Δs y Δt, es decir la diferencia entre las cantidades de longitud y las cantidades de tiempo: $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ (AM4).

Se ha identificado AM4 con las distintas preguntas que acompañan la tabla del inciso d) se fomenta la relación entre la noción de pendiente y la razón de cambio.

Nivel 5. El nivel de razón instantánea (N5) sustenta desde AM1 hasta AM4 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio instantánea de la longitud recorrida por la persona (con respecto al tiempo empleado para hacer ese desplazamiento).

Cabe mencionar que se dice que se alcanzó el nivel de comprensión 5 sólo si se demuestra que hay compresión de que la razón instantánea resulta de considerar cantidades de longitud más y más pequeñas (construidas sobre el razonamiento exhibido en AM4). Así que la invitación está abierta para que los maestros enriquezcan el pensamiento variacional aprovechando esta situación y abordando niveles como el 4 y 5.

5.10 Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

5.10.1 Análisis y adecuación de tareas asociadas al pensamiento variacional en libros de texto de 4° y 5° grado

5.10.1.1 *Presentación*

Se expone una tarea situada en un libro de 4° de primaria:

> "Lee y completa la tabla. Luego responde: Las técnicas modernas de crianza de gallinas han elevado la producción de huevos por año. Así, una gallina puede llegar a poner cerca de 300 huevos en un año. Además se estima que una persona puede llegar a consumir 170 huevos al año. Suponiendo que cada gallina pone 300 huevos en un año, ¿cuántas gallinas se necesitan como mínimo para cubrir las necesidades de una familia de 6 personas?"

Número de personas	Cantidad de huevos

Número de gallinas	Cantidad de huevos

No obstante los autores son explícitos en decir:

> "Se aprecia que se deja de lado el análisis variacional que se puede generar a través de los datos de las tablas. Se aprecia que el desarrollo del pensamiento variacional, podría depender de las preguntas que se formulen.

> La tarea también debería promover el reconocimiento de patrones y regularidades, la identificación de la variación en la información presentada y además el hallazgo de las relaciones de dependencia entre las variables. La tarea propuesta en la Imagen 1 parece reducirse a la solución de una situación de proporcionalidad directa, que si bien se ubica en el pensamiento numérico bien que podría ampliarse y generar mayor actividad matemática que involucre al pensamiento variacional." (Osorio et al., 2015)

Por los motivos expuestos, los autores realizan una modificación que da como resultado una nueva tarea. En la Gráfica 1 se muestra el número de personas y la cantidad de huevos que consumen anualmente.

Gráfico 34 Número de personas y la cantidad de huevos que consumen al año.

Si una gallina pone un promedio de 300 huevos al año:

a. Complete la gráfica con los datos que faltan.
b. ¿Cuántos huevos al año consume una familia conformada por 10 personas?
c. ¿Cómo encontrarías la cantidad de huevos que consumen al año, un grupo de 30 personas?
d. Si se tienen 2040 huevos, ¿a cuántas personas se pueden alimentar al año con esa cantidad de huevos?, ¿cuántas gallinas como mínimo se requieren para obtener esa cantidad de huevos?
e. En la tabla se registra el número de huevos que consumen, anualmente, 3 personas, completa la tabla con los datos que faltan

N° huevos		170		510	
Tiempo	2° mes		5° mes	1 año	2 años

Imagen tomada del documento

5.10.1.2 *Contexto*

La tarea esta propuesta en un escenario semirreal y es, principalmente, del ámbito del pensamiento variacional, puesto que fue modificada con dicha intencionalidad e involucrar el reconocimiento, la percepción, la identificación y caracterización de la variación y en cambio. Es válido resaltar, que también, tal y como lo plantean los autores, se da lugar al estudio de regularidades y patrones como herramienta para desarrollar tal pensamiento.

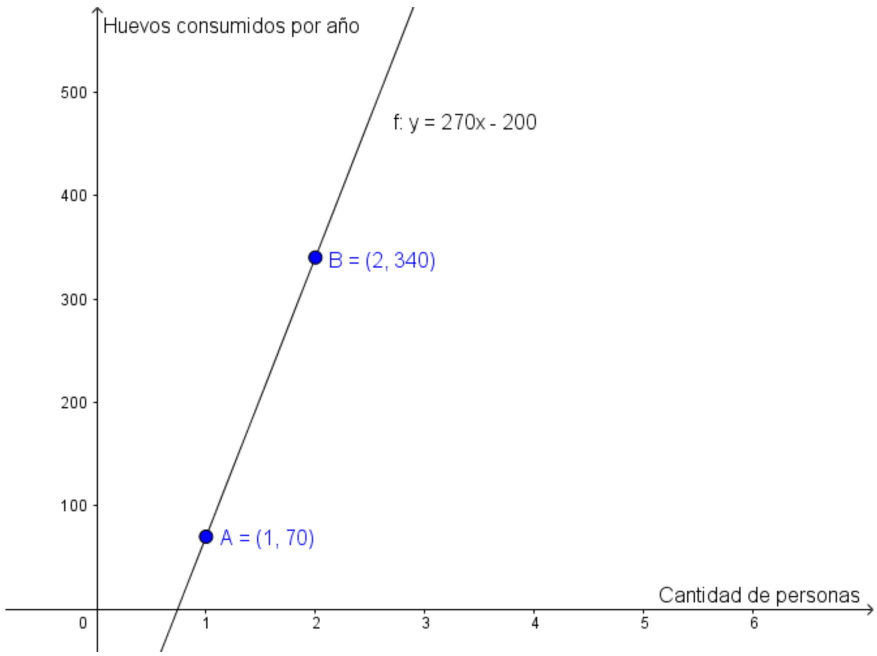
5.10.1.3 *Mediación Instrumental*

Es importante reiterar que la tarea se adecuo para estudiantes de 4° de primaria. Así pues suponemos que la situación se empieza con lápiz y papel; mas no implica que no se pueda trabajar con tecnología ya sea en este grado o para grados superiores, modelando en un software lo que se plantea en una hoja de cálculo de Excel, R o algún otro software.

5.10.1.4 *Tipo de Representación*

En el documento, se hace alusión a dos tipos de representaciones: tabular y grafico de barras. Estas dos representaciones junto con algunas de las consignas (preguntas) procuran aproximar al estudiante en la búsqueda de relaciones de cambio del número de personas y la cantidad de huevos que se consumen en determinado tiempo.

Esta tarea puede subir de nivel y así mismo ser dirigida a estudiantes de grados más avanzados si, se abordarán preguntas como: *Con ayuda del software Geogebra, ¿qué estrategia utilizarías para encontrar la cantidad de huevos que consumen al año, un grupo de 30 personas?* Los estudiantes podrían valerse de los datos que les da el problema, bien sea en la gráfica de barras o en la tabla. Por ejemplo, pueden saber la cantidad de huevos consumidos en un año por 1 o 2 dos personas, y representar dicha información como dos puntos: $A\ (1\ ,170)$ y $B\ (2\ ,340)$, para luego transcribir estos valores en la barra de entrada del software y a partir de ellos crear una recta. Inmediatamente, el software indica cuál es la expresión algebraica que se puede utilizar para determinar $\boldsymbol{y}$ cantidad de huevos dependiendo de x número de personas.



Si los docentes optan por añadir esta mediación instrumental se alcanzan dos representaciones nuevas que refuerzan en gran medida el reconocimiento de la variación. Otro camino útil y que se puede aprovechar es el manejo algebraico haciendo uso de ecuaciones conocidas para calcular la pendiente y la ecuación de la recta que modela la situación.

5.10.1.5 *Tratamiento de las magnitudes*

Partiendo de que la tarea se presenta en un contexto semirreal donde los posibles valores no son continuos, esta situación necesariamente debe abordarse en términos cuantitativos numéricos, lo que facilita la construcción de tablas y graficas que permiten que los estudiantes reconozcan el cambio presente en la situación.

5.10.1.6 *Niveles de razonamiento*

Nivel 0. Antes que el estudiante pueda coordinar el cambio de una variable con respecto al cambio de la otra (N1), debe reconocer las magnitudes que varían en este caso debe identificar que la cantidad de huevos consumidos depende del número de personas que consumen huevos, es decir, que estas dos variables son las que varían en el tiempo.

Nivel 1. El nivel de coordinación (N1) sustenta la acción mental de coordinar el cambio en la cantidad de personas, con el cambio en el número de huevos (AM1). Es decir, como la cantidad de personas cambia, determina que la cantidad de huevos varié y esto se denomina como coordinación entre dos variables. En este orden de ideas se identifica que los autores pretender trabajar la coordinación al realizar preguntas como:

Si una gallina pone un promedio de 300 huevos al año: complete la gráfica con los datos que faltan y ¿cuántos huevos al año consume una familia conformada por 10 personas? Al trabajar en este nivel (N1) los alumnos no necesariamente atiende a la dirección, la cantidad o la razón de cambio.

Nivel 2. El nivel de dirección (N2) sustenta tanto a AM1 como a la acción mental de coordinar la dirección del cambio del número de personas mientras se considera el cambio de la cantidad de huevos (AM2). La dirección del cambio puede ser de aumento o de disminución.

La AM2 puede trabajarse en esta situación sustentando que a medida que se incrementa la cantidad personas, el número de huevos consumidos aumenta; también señalando que a medida que la cantidad de personas disminuye, la cantidad de huevos consumidos también disminuye.

Nivel 3. El nivel de coordinación cuantitativa (N3) sustenta a AM1, AM2 y a la acción mental de coordinar la cantidad de cambio del número de personas con la cantidad de cambio del número de huevos consumidos (AM3).

Las representaciones y preguntas propuestas para las situación (v. g., ¿Cómo encontrarías la cantidad de huevos que consumen al año, un grupo de 30 personas? Si se tienen 2040 huevos, ¿a cuántas personas se pueden alimentar al año con esa cantidad de huevos?, ¿cuántas gallinas como mínimo se requieren para obtener esa cantidad de huevos? En la tabla se registra el número de huevos que consumen, anualmente, 3 personas, completa la tabla con los datos que faltan) aluden fundamentalmente al *Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa*. En efecto, el estudiante debe lograr *ver* la variación entre una y otra pero no basta que observe que la cantidad de huevos aumenta, sino que debe cuantificar cada uno de los cambios.

Teniendo en cuenta que la tarea está planteada para estudiantes de primaria los niveles que procuran trabajar la razón promedio e instantánea no son abordados pero se deja a continuación las acciones mentales a tener en cuenta para trabajarlos.

Nivel 4. El nivel de razón promedio (N4) sustenta a AM1, AM2, AM3 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio promedio entre los cambios en la cantidad de personas y el número de huevos consumidos en determinado tiempo.

Nivel 5. El nivel de razón instantánea (N5) sustenta desde AM1 hasta AM4 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio instantánea de la cantidad de personas (con respecto a la cantidad de huevos).

5.10.2 ¿Pensamiento variacional en los libros de texto?: Una pregunta que nos permite aprender como docentes

5.10.2.1 *Presentación*

Los autores han retomado una de las tareas reportadas en la Cartilla para grado quinto (Vera, Rodríguez & Ríos, 2012, p. 49):

> En esta se trabaja con los números triangulares. Inicialmente se presenta el dibujo de la figura 1 y se pide que el estudiante "estudie las disposiciones de puntos" y se hacen consideraciones y preguntas acerca de la manera de construir más números triangulares. Posteriormente se presenta la información de la figura 2 y se invita al estudiante a que diseñe y use un método para encontrar números. (Gómez et al., 2013)

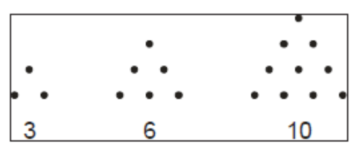


Figura 1

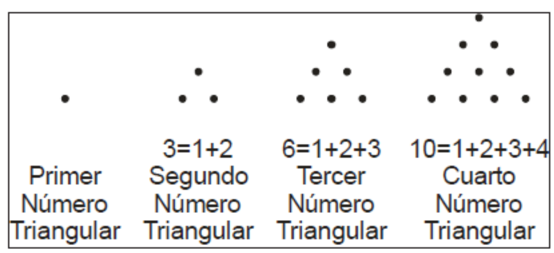


Figura 2

5.10.2.2 *Contexto*

La tarea está planteada en un escenario matemático que pertenece al ámbito de la aritmética y hace especial énfasis en el reconocimiento de patrones tanto figúrales como numéricos.

5.10.2.3 *Mediación instrumental*

En la tarea no se hace uso de instrumentos más allá de lápiz y papel para representar el patrón geométrico, esta simple representación ayuda a los estudiantes a reconocer de qué forma varia este patrón, sin embargo se podría potenciar tal reconocimiento haciendo uso de un software de geometría dinámica como Geogebra que nos permite visualizar, de manera más rápida y sencilla, la representación geométrica de números triangulares un posición *n-esima*. En la página web de Geogebra podemos encontrar tal recurso e incluso modificarlo de acuerdo a nuestras necesidades.

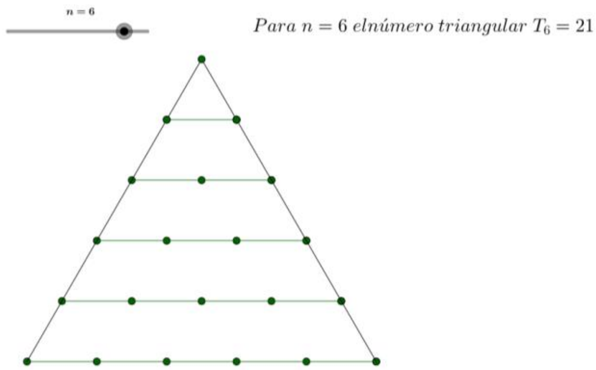


Gráfico 35 Representación números triangulares

5.10.2.4 *Tipo de representación*

En lo propuesto por los autores únicamente se incluye el “dibujo” como medio de representación, es decir la distribución de los puntos para representar un numero triangular. Adicionalmente se incluyen descripciones verbales y numericas. En la figura 1, se escribe el número de puntos, en la figura 2 además de expresar el número de puntos como una suma, se incluye la posición ordinal del número triangular, es decir, “primer número triangular, segundo …”. Esas expresiones verbales y numéricas pueden aprovecharse para construir una tabla y una gráfica que permita evidenciar si el comportamiento de los números triangulares se asemeja a alguna función.

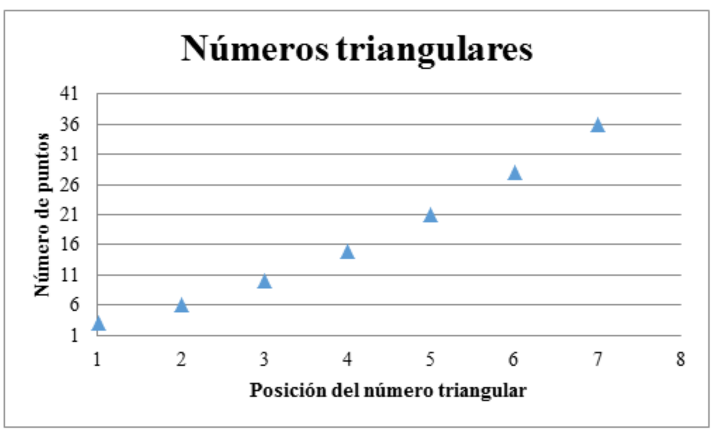


Gráfico 36 Posible representación gráfica de la situación

Posición número triangular	Número de puntos	Términos de la suma
Primero	3	1+2
Segundo	6	1+2+3
Tercero	10	1+2+3+4
Cuarto	15	1+2+3+4+5
Quinto	21	1+2+3+4+5+6
Sexto	28	1+2+3+4+5+6+7
Séptimo	45	1+2+3+4+5+6+7+8

Gráfico 37 Posible representación tabular de la situación

5.10.2.5 *Tratamiento de las magnitudes*

El uso de números cardinales y ordinales es evidente en la representación utilizada en la tarea, por lo tanto el tratamiento de las magnitudes es numérico, incluso si no se asociará un número a cada dibujo de la disposición de los puntos, ya que está implícito el proceso de contar.

5.10.2.6 *Niveles de Razonamiento*

Los autores del documento hacen una descripción acertada y detallada de cada uno de los niveles, por lo que se tomará textualmente y se agregarán algunas consideraciones cuando sea necesario.

Nivel 0.

> Si bien es suficientemente claro que a través de esta se está procurando el reconocimiento de un patrón de cambio, no es tan diáfana la existencia de dos magnitudes que varían de manera coordinada. De hecho, desde nuestra perspectiva, en la figura 1 una de las "magnitudes" está implícita y la otra se explicita a través de dos registros de representación diferentes (figural y numérico); por su parte en la figura 2 la misma "magnitud" se explicita a través de la verbalización de los ordinales (i. e., primero, segundo, tercer, cuarto).

Nivel 1. El nivel de coordinación (N1) sustenta la acción mental de coordinar el cambio en la cantidad de puntos, con el cambio en la posición del número triangular (AM1).

Nivel 2. El nivel de dirección (N2) sustenta tanto a AM1 como a la acción mental de coordinar la dirección del cambio de la cantidad de puntos mientras se considera el cambio de la posición del número triangular (AM2). Es sencillo evidenciar que el cambio siempre es de aumento y tal dirección se puede reconocer más fácilmente si se hace uso de otros tipos de representaciones como los sugeridos anteriormente (tabular y gráfico).

Nivel 3.

> Las consignas y preguntas propuestas para las situaciones expresadas en las figuras 1 y 2 aluden fundamentalmente al Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa. En efecto, el estudiante debe lograr ver la variación entre una y otra figura de la secuencia, pero no basta que observe que la cantidad de puntos aumenta, sino que debe cuantificar cada uno de los cambios. En la figura 1 este reconocimiento se puede hacer en el registro figural o en el registro numérico y connota operaciones matemáticas distintas: conteo en el primer caso y resta en el segundo. Para la figura 2 este reconocimiento se puede hacer, adicionalmente, a través de la comparación de las expresiones que presentan las sumas de los números. En ambos casos (figuras 1 y 2) no se exige explícitamente la cuantificación de la magnitud que se refiere al número de orden de cada uno de las disposiciones. Lo anterior nos permite suponer que la coordinación cuantitativa pasa por la cuantificación de los cambios de cada una de las variables involucradas, aunque ocasionalmente uno de ellos quede suficientemente oculto (quizá debido a su aparente banalidad). Asimismo, nos permite sospechar que la cuantificación del cambio o variación de una de las variables depende del tipo de registro en el que se presente la información de los valores a comparar.

Adhiriéndonos a los planteamientos hechos por los autores, si consideramos la representación tabular, aludiendo a la figura 2, se podría reconocer la cantidad de cambio en los términos de la suma proponiendo a los estudiantes preguntas como: ¿Cuál términos de la suma se mantienen constantes? ¿Cuáles cambian? Esto con el fin de que reconozcan que el cambio entre dos números triangulares consecutivos es igual a un número natural especifico. Veamos, si nos piden hallar la cantidad de cambio entre el número triangular 7 y el número triangular 6

Posición número triangular	Número de puntos	Términos de la suma
⋮	⋮	⋮
Sexto	28	1+2+3+4+5+6+7
Séptimo	36	1+2+3+4+5+6+7+8

Los términos que se mantienen constantes son $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ y el termino que cambia es el 8, es decir el cambio sería igual a 8. Pero, ¿cómo saber cuáles términos de la suma conforman un número triangular "muy grande"? Esto se puede hacer estableciendo una correspondencia entre el número cardinal y los números ordinales. Al ordinal "veinticincoavo" le corresponde el cardinal 25, a quien llamaremos *n*. Los términos de la suma serán todos los números naturales menores o iguales $n + 1$. Es decir que los términos de la suma serán: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 23 + 24 + 25 + 26$. Ahora si queremos conocer la cantidad de cambio entre el termino veinticincoavo y veintiseisavo, solo bastaría saber que el término que varía entre ellos dos es el 27, luego la cantidad de cambio es 27.

Nivel 4.

> La Actividad N.° 29 podría complementarse para abordar el Nivel 4 (N4) Razón promedio y asumirse como caso particular de una situación para el Nivel (N5) Razón instantánea. En efecto, creemos que si se enfatizara en la relación que existe entre el número asociado al dibujo de la secuencia (i. e. a la variable que hemos señalado aparece implícita o que solo se explicita verbalmente) y el número triangular respectivo, podría disponerse de una relación funcional explícita (inicialmente de ⏋ en ⏋ y posteriormente de | en |), no lineal ni afín, en la cual se exploren condiciones sobre la razón de cambio promedio (para la función de variable natural) e incluso se aborde, en los grados de la Educación Media, el estudio de la razón instantánea (para la nueva función de variable real).

5.10.3 El pensamiento variacional: un asunto de juego y actividad matemática en la escuela (Tarea 1)

5.10.3.1 *Presentación*

El juego de la Casa de Cambio (Vera, Rodríguez y Ríos, 2012, pp. 1-5) consiste en hacer cambios de fichas de un color por otras de otro color, según una equivalencia que se fija apropiadamente. A continuación, se describe la forma de juego:

> El juego de la casa de cambio consiste en hacer cambios de fichas de un color por otras de otro según la equivalencia que se fija. Cada jugador empieza con cierta cantidad de fichas blancas. Mediante el lanzamiento de un par de dados por parte de los jugadores, en su respectivo turno van ganando fichas blancas. A medida que acumulan fichas de este color, y según se lo permita la suerte al lanzar un par de dados, las cambian por rosadas, cuando acumulan suficientes rosadas las cambia por azules, y finalmente, cuando acumulan suficientes azules las cambian por amarillas. De modo que, la equivalencia para hacer los cambios es la misma de un color a otro y queda establecida por base numérica en la que se realiza el juego. Esta base es obtenida por una tarjeta que se extrae de un montón, cada jugador termina cuando ha logrado hacer la totalidad de cambios posibles (de blancas a rosada, de rosadas a azules y de azules a amarillas), el primero en completar los cambios es el ganador. (Arredondo & Quiseno, 2010)

5.10.3.2 *Contexto*

La tarea está planteada en un contexto semirreal por cuanto es un juego diseñado para cumplir con unos objetivos específicos dentro del aprendizaje de las matemáticas. Por otra parte, el ámbito en el cual está planteada la tarea es de la aritmética, ya que en el documento se manifiesta que se prevé que el juego permita construir un sistema de cambios análogos a las situaciones problema de conversión de unidades, multiplicación compuesta, potenciación, proporcionalidad.

Así mismo esta situación no pretende ser camisa de fuerza, por lo que los profesores tienen la posibilidad de hacer algunas modificaciones del contexto y proponer situaciones como las siguientes:

- Una fábrica de gomas empaca su producto en base 6, así: 6 gomas en un paquete, 6 paquetes llenos en una bolsa y 6 bolsas en una caja. ¿Cuántas gomas hay en 2 cajas y 3 paquetes?

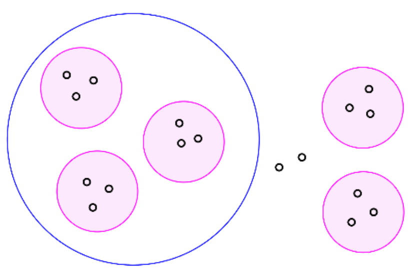
- Una fábrica de galletas empaca su producto de la siguiente manera: 4 galletas en un paquete, 12 paquetes en una bolsa, 24 bolsas en una caja ¿Cuántas galletas hay en 2 cajas?

5.10.3.3 *Mediación Instrumental*

En esta tarea se hace uso de implementos como dados y fichas y en este caso se convertirían en la mediación instrumental. Buscando hacer explícito el uso de una mediación instrumental, además del uso de implementos como dados y fichas que atestigüe la comprobación y visualización de procesos realizados por los estudiantes, sería importante que los estudiantes registraran datos (e.g., número de lanzamientos, numero obtenido en el dado, cantidad de fichas blancas, etc.) bien sea en papel o en una hoja de cálculo de un software. Es importante resaltar que para los objetivos que busca la tarea no son necesarios ni los dados, ni las fichas ya que esto se podría hacer mediante la simulación en algún software o con otros elementos teniendo en cuenta que el docente puede hacer cambios en el contexto.

5.10.3.4 *Tipo de Representación*

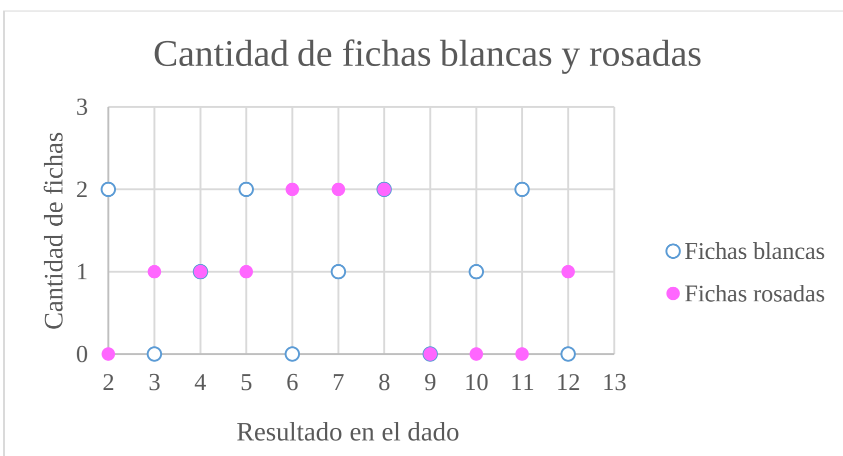
Los autores manifiestan en una de las consignas lo siguiente: "Resolver la situación colocándose en el lugar del estudiante e identifique qué estrategias utilizaría. Realice una representación de la situación." Atendiendo a esto los estudiantes podrían recurrir, de manera intuitiva, a realizar un "dibujo" como el siguiente:



Con este identificarían que formarían 5 grupos de 3, es decir tendrían 5 fichas rosadas; 3 de ellas las podrían cambiar por una azul, y sobrarían 2 blancas. Adicionalmente, el maestro podría sugerir a los estudiantes construir una tabla, en la que se relacione el número obtenido en el dado con la cantidad de fichas blancas, rosadas, azules y amarillas que tendría en cada caso.

Resultado en el dado	Fichas blancas	Fichas rosadas	Fichas azules	Fichas amarillas
2	2	0	0	0
3	0	1	0	0
4	1	1	0	0
5	2	1	0	0
6	0	2	0	0
7	1	2	0	0
8	2	2	0	0
9	0	0	1	0
10	1	0	1	0
11	2	0	1	0
12	0	1	1	0

A partir de la tabla, e intentando establecer una relación entre las fichas blancas y las rosadas, podrían realizarse preguntas como: ¿qué pasa con la cantidad de fichas blancas a medida que aumenta el resultado obtenido en el dado? ¿Y con las rosadas? ¿Y las azules? ¿Por qué la cantidad de fichas amarillas es siempre cero? Ahora, se podría realizar una gráfica, como la que se muestra a continuación, que relacione el resultado en el dado con la cantidad de fichas blancas y fichas rosadas.



Nuevamente sería pertinente preguntar ¿qué pasa con la cantidad de fichas blancas a medida que aumenta el resultado obtenido en el dado? ¿Se mantiene siempre ese comportamiento? ¿Por qué? ¿En qué momentos la cantidad de fichas blancas y rosadas es igual? ¿Por qué?

Además, la gráfica podría convertirse en una herramienta para que los estudiantes reconozcan dos funciones discretas y elementos importantes de ellas como el dominio y el rango. Por ejemplo, el dominio está restringido por los materiales utilizados, en este caso los dados de 6 caras, y los resultados estarían en el intervalo donde el mínimo valor es 2 y el máximo es 12. Por su parte, el rango está determinado por las condiciones del problema, es decir la base en la que se esté jugando. Así mismo, que son funciones discretas y escalonadas que solo pueden tomar tres valores.

Es importante aclarar que hasta ahora se está haciendo una propuesta que no se corresponde con una instrucción, del juego, que indica que las fichas se deben acumular. Sin embargo, consideramos que al hacerlo de esta forma los estudiantes identifican aspectos de la variación más fácilmente. Ahora bien, apegándonos a las reglas del juego, el docente podría pedir a los estudiantes que construyan una tabla como la siguiente, de tal forma que encuentren una relación entre la cantidad de fichas acumuladas y la cantidad de fichas blancas.

Resultado en el dado	**Fichas acumuladas**	**Fichas blancas**
10	10	1
5	15	0
2	17	2
12	29	2
6	35	2
1	36	0
9	45	0
11	56	2
5	61	1
6	67	1
8	75	0
4	79	1
11	90	0
7	97	1
4	101	2
10	111	0
5	116	2
8	124	1

¿Qué tienen en común los resultados de las fichas acumuladas cuando la cantidad de fichas blancas es cero? ¿Se puede encontrar una relación similar cuándo la cantidad de fichas blancas es 1 o 2? Si agrupáramos los resultados de las fichas acumuladas cuando la cantidad de blancas es cero tendríamos estos valores: 15, 36, 45, 75, 90, 111, que se pueden escribir de la forma $3k$. Es decir, de fondo estaríamos hablando de la idea de divisores. Los números restantes serian de la forma $3k+1$ y $3k+2$, dependiendo de si la cantidad de fichas blancas es 1 o 2, respectivamente.

Así las cosas, surgen dos tipos de representaciones: tabular y gráfica. Sin embargo, como se ha resaltado, los tipos de representaciones que se puedan obtener y las preguntas que haga a partir de ellos dependen de los objetivos del docente y los caminos que plantee para cumplirlos.

5.10.3.5 *Tratamiento de las magnitudes*

La tarea es propicia solamente en términos cuantitativos numéricos y consideramos, a modo personal, que los estudiantes pueden llegar a obtener una mayor comprensión de los sistemas posicionales de numeración, más no se ajusta a los planteamientos para el desarrollo del pensamiento variacional.

5.10.3.6 *Niveles de razonamiento*

Desde lo planteado en el documento no son explícitos los niveles de razonamiento de Carlson dado que busca que sean precisamente los docentes quienes planteen una tarea que potencie el pensamiento variacional. A partir de la tarea propuesta se pueden reconocer algunos de los niveles de razonamiento.

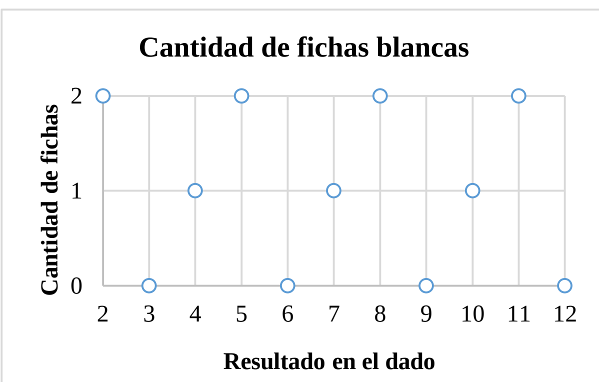
Nivel 0. En esta tarea, cambia la cantidad de fichas de cada color a medida que avanza el juego. Es importante resaltar que los cambios en las variables siempre estarán sujetas al número obtenido en el dado. Si nos adherimos nuestra propuesta, cambiaría la cantidad de fichas blancas y rosadas.

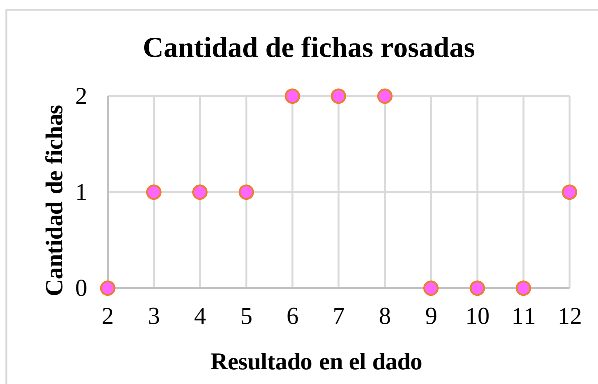
Nivel 1. Como ya se mencionó los cambios en la cantidad de las fichas dependerán de la cantidad obtenida en el dado, sin embargo estos cambios están restringidos por los materiales utilizados y las condiciones mismas del problema. Si utilizamos dados convencionales de 6 caras, los resultados estarían en el intervalo del 2 al 12. Así mismo, la cantidad de fichas estará ligada a la base escogida, si por ejemplo la base fuera 3, la cantidad de fichas variaría en el intervalo del 0 al 2.

Nivel 2. Ahora se vuelve un poco más complejo reconocer la dirección del cambio ya que este no aumenta o disminuye constantemente. Para el caso de las fichas blancas estas, con respecto al número obtenido en el dado, aumentan linealmente desde el primer múltiplo de 3 hasta el siguiente múltiplo menos uno, ahí nuevamente vuelven a disminuir y se repite este comportamiento hasta que el resultado en el dado sea 12. Si lo pensáramos gráficamente, su comportamiento sería similar a una "M".

En el caso de las fichas rosadas, se mantienen constantes desde el primer múltiplo de 3 hasta el siguiente múltiplo menos uno, luego nuevamente vuelve a ser constante pero la constante ya no es la misma. Por ejemplo, cuando el resultado en el dado esta entre 3 y 5 la constante a la que se asocian es 1, cuando el resultado está entre 6 y 8 la constante es 2. Su comportamiento grafico se puede relacionar con una escalera.

Nivel 3. Asumiendo que al lanzar los dados obtenemos los resultados de manera ordenada, el cambio es de una unidad. Para la cantidad de fichas, el mínimo cambio que se puede presentar es cero y el máximo es 2 (debido a que la base escogida fue base 3).





Analizaremos la gráficas por intervalos para reconocer cuánto es el cambio que se presenta.

Intervalo	Gráfica fichas blancas	Grafica fichas rosadas
(2,3)	Disminución de 2 fichas. 2 fichas en total.	Aumentó una ficha. 0 fichas en total.
(3,5)	Por cada aumento de 1 en el resultado en el dado aumenta en 1 la cantidad de fichas. 2 fichas en total.	Por cada aumento de 1 en el resultado en el dado se mantiene constante la cantidad de fichas. 1 ficha en total.

(5,6)	Disminución de 2 fichas. 0 fichas en total.	Aumenta 1 fichas.
(6,9)	Por cada aumento de 1 en el resultado en el dado aumenta en 1 la cantidad de fichas. 2 fichas en total.	Por cada aumento de 1 en el resultado en el dado se mantiene constante la cantidad de fichas. 2 fichas en total.
(8,9)	Disminución de 2 fichas. 0 fichas en total.	Disminuye 2 fichas.
(9,11)	Por cada aumento de 1 en el resultado en el dado aumenta en 1 la cantidad de fichas. 2 fichas en total.	Por cada aumento de 1 en el resultado en el dado se mantiene constante la cantidad de fichas. 0 fichas en total.
(11,12)	Disminución de 2 fichas. 0 fichas en total.	Aumenta una ficha

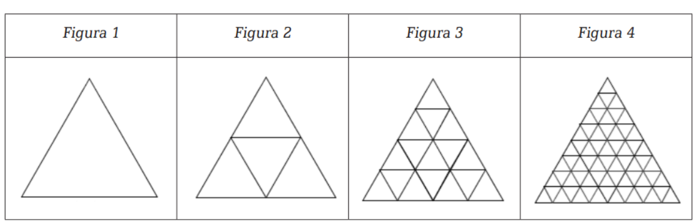
De lo anterior, se puede concluir que los puntos donde se generan los cambios son los múltiplos de 3, que en este caso es la base. Así mismo, en los intervalos en los que aumentan linealmente la cantidad de fichas blancas, las rosadas se mantienen constantes.

Por otra parte, los niveles 4 y 5 no se abordan en la tarea debido a la complejidad de la misma.

5.10.4 El pensamiento variacional: un asunto de juego y actividad matemática en la escuela (Tarea 2)

5.10.4.1 *Presentación*

Progresión geométrica. (Orozco, 2010). Esta tarea busca descubrir patrones de variación y regularidad, así como abordar el concepto de progresión geométrica. Para ello se propone al estudiante observar la sucesión de triángulos mostrados en la secuencia de figuras y posteriormente completar la tabla, teniendo en cuenta que el área de la figura 1 es de una unidad cuadrada



Números de veces que se trazan puntos medios.	0	1	2	3	4	5	…	n
Total de puntos medios trazados sobre cada lado del triángulo.	0	1	3	7	15	31	…	
Números triángulos equiláteros de menor área en cada figura.	1	4	16					
Área del triángulo equilátero más pequeño de cada figura.	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$					
Perímetro del triángulo equilátero más pequeño de cada figura, tomando x, como la longitud del lado del triángulo de la figura 1.	$3x$	$\frac{3x}{2}$	$\frac{3x}{4}$					

La tarea se complementa con la formulación a los estudiantes de las siguientes preguntas:

a. ¿Qué tipo de progresión forma el número de triángulos pequeños, que se forman en cada figura?
b. ¿Qué tipo de progresión forman las magnitudes del área de los triángulos pequeños, que se forman en cada figura?
c. ¿Qué tipo de progresión forman las longitudes del perímetro de los triángulos pequeños que se forman en cada figura?
d. En cada caso anterior, ¿cuál es la razón de cada una de las progresiones?
e. Si n, representa el número de veces que se realiza el proceso de trazar puntos medios, iniciado en cero, cuáles son las expresiones que permiten calcular: ¿el número de triángulos, el área y el perímetro del triángulo pequeño que se forma?

5.10.4.2 *Contexto*

La tarea está planteada en un escenario netamente matemático y en un ámbito del álgebra por cuanto salta a la vista que se debe hacer reconocimiento de patrones (geométricos) y, posteriormente, proceso de generalización que dan lugar a patrones numéricos. En este sentido a la hora de implementar la tarea en un grupo de estudiantes dos aspectos fundamentales a tener en cuenta son el cambio y la variación que permiten establecer relaciones y regularidades en ámbitos geométricos y numéricos para lograr un acercamiento a la generalización.

5.10.4.3 *Mediación Instrumental*

La mediación instrumental está ligada al método que el estudiante escoja para representar los patrones geométricos y numéricos, ya que este proceso puede ser registrado tanto en una hoja de papel, como en un software. En ese sentido, si aprovechamos un software como Cabrí o

Geogebra para mostrar la secuencia de las figuras $1,2,3,4,\ldots,n$ los estudiantes pueden comprobar más casos y de una manera rápida que si el proceso es registrado en una hoja de papel.

Por otra parte, no es posible tener certeza de cuanto se gane o se pierda al involucrar el uso de la tecnología pero consideramos que, es una opción viable que permite al estudiante realizar cálculos numéricos más rápido y de esta manera concentrar la atención en el reconocimiento del patrón numérico y por lo tanto lograr un proceso de generalización algebraica.

5.10.4.4 *Tipo de Representación*

Las representaciones mostradas en la presentación de la tarea, corresponden a la representación figural y tabular del problema. Por otra parte se pueden incluir representaciones de tipo algebraico que son de esperarse basados en que la pregunta e) invita a representar el término general de ¿cuáles son las expresiones que permiten calcular: el número de triángulos, el área y el perímetro del triángulo pequeño que se forma?

5.10.4.5 *Tratamiento de las magnitudes*

En la situación el tratamiento de las magnitudes es cuantitativo numérico ya que si bien las representaciones de las figuras son triángulos equiláteros, también es cierto que se deben representar los datos obtenidos con una secuencia numérica y trabajar con ella. Es decir, si pensamos en realizar el trazo a lápiz y papel de la figura 36 sería muy complicado, incluso para el software llega un punto en el que la representación gráfica no es lo suficientemente clara, por eso sería imperativo el trabajo numérico desde cierta figura.

5.10.4.6 *Niveles de razonamiento*

En el documento no se evidencia más que la presentación de la tarea y algunas consignas que la complementan, por tal motivo el análisis de Carlson quedaría limitado hasta el nivel 0. No obstante, hacemos un acercamiento a lo que podrían ser los otros niveles.

Nivel 0. Se reconoce, en primera instancia, que están cambiado tres variables, como la cantidad de triángulos pequeños y sus áreas y cantidad de puntos medios. El reconocimiento anterior puede estar ligado que son las que se relacionan en la tabla. Así mismo, está variando la “posición” de la figura (Entiéndase posición como figura 1, figura 2,…), es posible que los estudiantes no reconozcan este hecho con facilidad.

Si vemos con más detenimiento encontramos que hay más factores que están cambiando como la superficie y las longitudes del perímetro de los triángulos pequeños que se forman en cada figura, entre otras que no son inmediatamente visibles como las alturas de triángulos. Es importante también reconocer qué se mantiene constante, en este caso los ángulos de los triángulos y por supuesto que el área de la figura 1 es de una unidad cuadrada.

Nivel 1. La acción mental de coordinar cambios en una variable con respecto a la otra (AM1), se puede reconocer en primera instancia si se relaciona la "posición" de la figura con la cantidad de triángulos pequeños. Si intentamos poner dicha relación en una expresión obtendríamos 4^{n-1}, en donde n es la posición de la figura. De la misma forma se podrían establecer relaciones entre la posición y las otras variables y sería aún más interesante poder encontrar relaciones entre variables como cantidad de puntos medios y cantidad de triángulos pequeños.

Nivel 2. Continuando con el ejemplo principal (posición vs. Cantidad de triángulos) el nivel de dirección (N2) sustenta tanto a AM1 como a la acción mental de coordinar la dirección del cambio cantidad de triángulos mientras se considera el cambio en la posición de la figura (AM2). La dirección del cambio puede ser de aumento o de disminución.

Se puede identificar AM2 cuando si se expone que a medida que se incrementa la posición de la figura, aumenta la cantidad de triángulos. Un razonamiento similar a este puede realizar si se consideran otras dos variables que covaríen.

Nivel 3. El nivel de coordinación cuantitativa (N3) sustenta a AM1, AM2 y a la acción mental de coordinar la cantidad de cambio de en la posición de la figura con la cantidad de cambio de triángulos pequeños (AM3). Es fácil notar que el cambio en la posición es de uno en todos los casos; puede no ser tan fácil notar que el aumento en la cantidad de triángulos es $3(4k)$, siendo k un número natural, incluido el cero.

Nivel 4. El nivel de razón promedio (N4) sustenta a AM1, AM2, AM3 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio promedio entre los cambios en la posición de la figura y la cantidad de triángulos pequeños. Desde el nivel anterior habíamos identificado cuanto era el cambio de cada una de las variables, ahora si lo ponemos en razón promedio tendríamos:

$$\frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1}$$

En donde f representa la posición de la figura y t la cantidad de triángulos pequeños. Por ejemplo, si comparamos la figura 1 y la figura 2, con la cantidad de triángulos que estas tienen respectivamente, obtenemos:

$$\frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}$$

Si continuamos obtendríamos una serie como la siguiente:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{48}, \frac{1}{192} \cdots \frac{1}{12k}$$

Nivel 5. El nivel de razón instantánea (N5) sustenta desde AM1 hasta AM4 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio instantánea de la cantidad de triángulos (con respecto a la posición de las figuras).

5.11 4to Seminario Taller de Educación Matemática

5.11.1 El estudio de la tasa de variación como una aproximación al concepto de derivada (Villa-Ochoa, 2012a)

5.11.1.1 *Presentación*

El objetivo del documento es estudiar algunas situaciones que involucraron fenómenos de covariación entre algunas cantidades; tales situaciones les exigía observar la función matemática abordada en el contexto, pero también la manera en cómo se describía la tasa de variación y el cambio de esta misma (Villa-Ochoa, 2012a)

Una de estas situaciones está presente en otro documento y posee un análisis perteneciente por tal motivo se analiza a continuación solo la situación 2. *La velocidad y la aceleración:* Las actividades diseñadas para esta situación estuvieron basadas en la simulación de movimiento uniforme y acelerado a través del software Modellus versión 4.01. En la situación usé las opciones gráfico, tabla y modelo, para establecer relaciones entre la simulación del movimiento y las representaciones matemáticas de la misma. Otras gráficas se construyeron en el desarrollo la situación para validar las inferencias de las estudiantes con respecto a la aceleración. En la figura 2, se muestra el ambiente de la simulación.

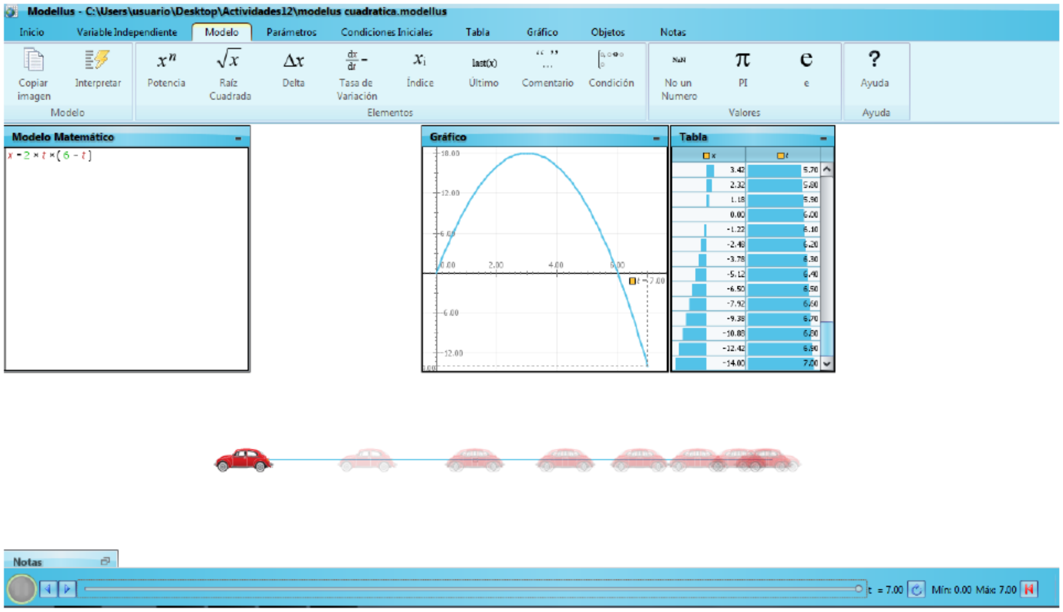


Figura 1 Simulación de un movimiento con el software *Modellus*

Ahora bien, para contextualizar al lector en este documento se diseñó esta situación que fue destinada a cuatro alumnas de un curso de pre cálculo en ingeniería. Donde un investigador formulaba preguntas ayudado de un medio tecnológico para validar las inferencias de las estudiantes respecto de la velocidad y la aceleración.

5.11.1.2 *Contexto*

La situación está planteada en un escenario semirreal donde intervienen conocimientos previos de física como el movimiento rectilíneo uniforme y conceptos de tiempo, distancia y velocidad. Sin embargo la situación tiene como objetivo observar los fenómenos de covariación entre el cambio de la distancia con respecto al cambio del tiempo $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ o en otras palabras, la variación de la distancia con respecto a la variación del tiempo.

5.11.1.3 *Mediación instrumental*

La simulación del movimiento mediante el software ofrece en este caso no solo el modelo del desplazamiento del vehículo sino una manera para que los estudiantes hagan un reconocimiento de la variación de la distancia en una marcha no constante con respecto a la variación del tiempo. Que es la manera más inmediata en la que se pueden relacionar estas magnitudes pero bien se puede trabajar con las demás relaciones $\frac{\Delta x}{\Delta v}$ distancia con respecto a velocidad o $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ velocidad con respecto al tiempo.

En este aspecto, la simulación es otorgada a los estudiantes pero bien puede generarse si se conocen las herramientas del software además el software Modellus, se mostró como un elemento fundamental para la que las estudiantes consiguieran aceptar la existencia de dicho límite (vg., las estudiantes reconocieron la noción de límite como una tendencia). Para iniciar en el reconocimiento de la tasa variación instantánea(Villa-Ochoa, 2012a).

5.11.1.4 *Tipo de representación*

En esta tarea se evidencian tres tipos de representaciones. La primera, es la presentación estática de la situación, es decir el vehículo en desplazamiento lineal. La segunda, es la gráfica que modela el comportamiento de la variación de la distancia con respecto a la variación del tiempo. Cabe aclarar aquí que el fin de esta representación es dirigir al estudiante a que identifique que un punto sobre la curva está capturando la covariación de las magnitudes distancia y tiempo. Por último, la representación tabular que relaciona la distancia, la velocidad y el tiempo. Es válido agregar que en esta experiencia con el software, fue determinante para que las estudiantes, en particular Marcela y Cristina, pudieran visualizar nuevamente la tendencia de la velocidad en el tiempo: 2 segundos.(Villa-Ochoa, 2012a)

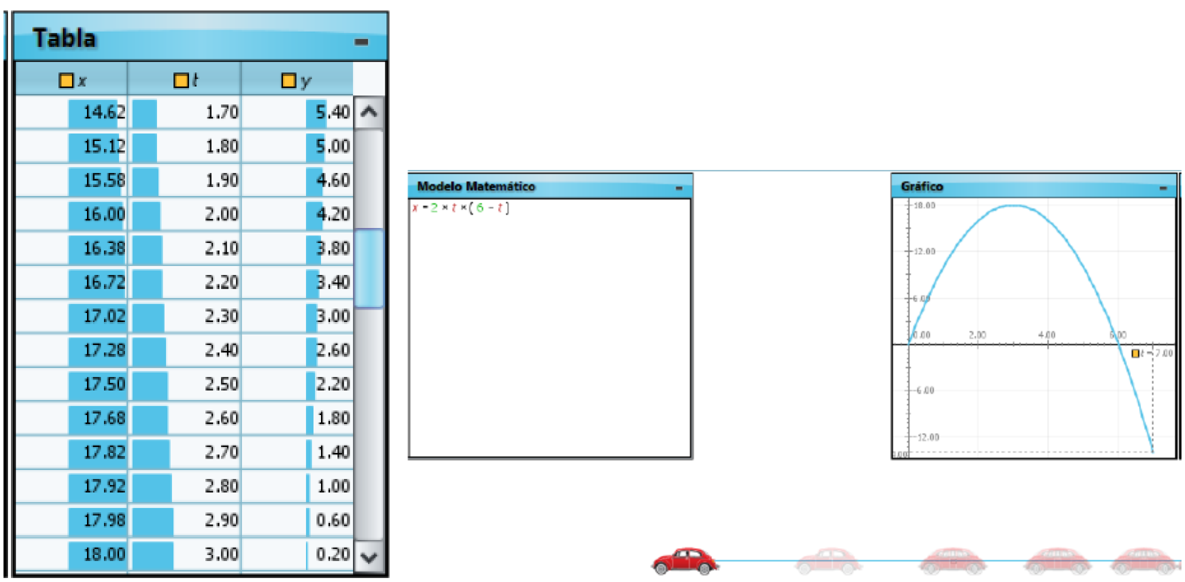


Gráfico 38 Tabla de la tasa de variación en el software Modellus

5.11.1.5 *Tratamiento de las magnitudes*

Las herramientas del software mencionadas anteriormente, más específicamente generar la tabla, en la que se relaciona la distancia o recorrido del vehículo y el tiempo, le da un tratamiento cuantitativo numérico a la situación. Además, es necesario advertir que los valores registrados en la tabla son aproximados, en virtud del nivel de precisión aritmética del software.

También, es importante resaltar que el manejo algebraico que se le da al problema es muy eficiente, en cuanto se centra la atención en la variación numérica y las preguntas orientadoras del investigador fortifican aspectos esenciales como: ¿qué cambia? ¿Con respecto a qué está cambiando? ¿Cuánto cambia?

5.11.1.6 *Niveles de razonamiento*

Nivel 0. La percepción del cambio está dependiendo del cambio en la posición del vehículo que pertenece a la base en la simulación de la situación. A partir de esto, la magnitud de la cual es más evidente percibir dicho cambio es la longitud recorrida. No obstante, se quiere ver la relación entre dos magnitudes diferentes: longitud y tiempo para reconocer que una variación no solo tiene un comportamiento lineal. Además, hay otra cuyo cambio no salta a la vista de inmediato, pero que siempre está ocurriendo es el tiempo.

La situación es atrayente porque permite estudiar las otras relaciones $\frac{\Delta x}{\Delta v}$ distancia con respecto a velocidad, y $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ velocidad con respecto al tiempo. Ofreciendo de esta manera una invitación a los docentes interesados en trabajarlas por medio de un lenguaje covariacional.

Nivel 1. El nivel de coordinación (N1) sustenta la acción mental de coordinar el cambio del espacio recorrido por el vehículo, con el cambio en el tiempo empleado para hacer ese recorrido (AM1). Se ha identificado AM1 al observar que en la solución de la situación se designan los ejes y se expresa que hay conocimiento de que a medida que una variable cambia, la otra variable cambia (e. g., Marcela responde: "la relación entre la velocidad y el tiempo"; Alexandra complementa diciendo "la variación de la distancia con respecto a la variación del tiempo"). Lo anterior, no necesariamente indica que se atiende a la dirección, la cantidad o la razón de cambio.

Nuevamente al pensar en la construcción de una función que modele la relación entre dos magnitudes, se puede preguntar ¿qué determina la escogencia de las variables? En ese sentido, es la posición del vehículo la que varía y en consecuencia varía cualquiera de las magnitudes ya descritas. Ahora, para armar la función seleccionamos dos magnitudes: la primera: la que está asociada al cambio de la posición del vehículo, es decir, la longitud recorrida. Y la segunda: una de las magnitudes que están variando, en este caso se escogió el tiempo, de cierta forma porque que así lo condiciona el documento.

Es importante resaltar, que, si bien es cierto que podría escogerse cualquier par de variables para armar la función, también es cierto que, en términos del análisis, es preferible que una de las variables escogidas sea monótona y no que, por ejemplo, crezca y decrezca.

Nivel 2. El nivel de dirección (N2) sustenta tanto a AM1 como a la acción mental de coordinar la dirección del cambio de la longitud recorrida por el vehículo mientras se considera el cambio de la cantidad de tiempo (AM2). La dirección del cambio puede ser de aumento o de disminución.

Se ha identificado AM2 cuando se expone que a medida que se incrementa la cantidad de longitud recorrida, el tiempo aumenta o disminuye; también cuando se señala que a medida que la cantidad de longitud recorrida disminuye, la cantidad de tiempo disminuye o aumenta.

Nivel 3. El nivel de coordinación cuantitativa (N3) sustenta a AM1, AM2 y a la acción mental de coordinar la cantidad de cambio de la longitud recorrida por el vehículo con la cantidad de cambio en el tiempo (AM3).

Se ha identificado AM3 en situaciones como (e. g., “cuando el tiempo se acerca a dos, la velocidad se acerca a cuatro”; “Cuando se acerca a dos, es cuatro; ya en otro punto sería otro valor”; las estudiantes verbalizaron: “mientras más me acerco a dos, la velocidad está más cerca de cuatro”).

Nivel 4. El nivel de razón promedio (N4) sustenta a AM1, AM2, AM3 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio promedio, entendida como las diferencias entre los Δx y Δt, es decir la diferencia entre las cantidades de longitud y las cantidades de tiempo: $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ (AM4). Es importante resaltar que se toman diferencias iguales para los Δt, por cuanto esto facilita la comparación, reduciéndola a comparar las diferencias en x

Nivel 5. El nivel de razón instantánea (N5) sustenta desde AM1 hasta AM4 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio instantánea de la longitud recorrida por el vehículo (con respecto al tiempo empleado para hacer ese recorrido). Teniendo en cuenta que la razón de cambio instantánea hace referencia al paso al límite, es importante destacar que en el problema se hace un intento por pasar al límite pero no se evidencia un trabajo más allá de la ayuda tecnológica. Por lo tanto, nada garantiza que se esté considerando la naturaleza cambiante de la razón mientras imaginaban el cambio continuo en la longitud, luego la presencia de la AM5 no es evidente.

Cabe mencionar que se dice que se alcanzó el nivel de comprensión 5 sólo si se demuestra que hay compresión de que la razón instantánea resulta de considerar cantidades de longitud más y más pequeñas (construidas sobre el razonamiento exhibido en AM4). Así que la invitación está abierta para que los maestros enriquezcan el pensamiento variacional aprovechando esta situación y abordando niveles como el 4 y 5.

5.12 Otros

5.12.1 Propuesta curricular para la introducción a las funciones representadas por polinomios de grado dos (Guacaneme & Perry, 2000)

5.12.1.1 *Presentación*

> Se trata de una propuesta curricular para introducir elementos básicos del tópico *funciones representadas por polinomios de grados dos*. Está compuesta por seis talleres, los cuales hacen referencia a un contexto específico: una caja sin tapa, construida a partir de una hoja de papel de 24 cm. de largo por 20 cm. de ancho, a la que se recortan en las esquinas cuadrados congruentes cuyo lado mide x. (Guacaneme & Perry, 2000b)

Brevemente se describirá cual es la intencionalidad de cada uno de los talleres y algunos aspectos relevantes de los mismos.

- Taller 1: Busca que los estudiantes tengan un acercamiento a lo que significa la dependencia entre variables y que esa dependencia se puede representar simbólicamente. Así mismo, que identifiquen que hay muchas posibilidades de caja dependiendo de la medida de los lados de los cuadrados que se recorten.
- Taller 2: Pretende que los estudiantes puedan identificar la existencia del dominio y rango para cada una de las funciones implicadas, y además las características de tales conjuntos. Dichas nociones se abordan, de manera especial, cuando se habla acerca de construir cajas

muy altas o muy bajitas. De manera implícita, aparece además la idea de optimización ya que los estudiantes deben experimentar y comprobar en qué casos y bajo qué condiciones del largo, el ancho o el papel desperdiciado se puede hacer una construcción efectiva de una caja.

- Taller 3: Incluye nuevas funciones como área de la base y capacidad de la caja, es decir funciones de segundo y tercer grado, además hace énfasis en reconocer elementos de la función y su significado.
- Taller 4: Incluye la representación gráfica y se intenta dar respuesta a interrogantes como: ¿qué significa la gráfica?, ¿Qué significa un punto sobre ella y fuera de ella?
- Taller 5: Un elemento importante en el trabajo con las funciones es la idea de *variación*. Su importancia radica, entre otras, en la clasificación de las funciones que genera, ya que dependiendo del tipo de variación es posible configurar particiones del conjunto de las funciones de variable real (*v.g.*, constante, proporcional o lineal, afín, cuadrática, cúbica, exponencial, logarítmica, etc.). Así, identificar el tipo de variación que comporta la función permite caracterizarla, distinguirla, y —en consecuencia— clasificarla. (Guacaneme & Perry, 2000b)
- Taller 6: Evalúa los aprendizajes logrados con la aplicación de los talleres previos.

Además de esto es importante precisar que para los talleres segundo, quinto y sexto hay dos versiones (A y B) que difieren entre sí solamente en la función sobre la cual se centra el trabajo, es decir, en una versión del taller pueden trabajar con el largo y ancho de la caja y en la otra versión con el alto y el área de la base de la caja.

5.12.1.2 *Contexto*

El contexto en el cual se presenta la situación es real en el que intervienen objetos propios de la geometría como longitud (largo ancho, alto), superficie (área) capacidad, entre otras. Pero el problema no es geométrico y tampoco apunta a la optimización aunque se evidencien preguntas como ¿cuál es la caja más alta que se puede formar? Por tanto en los talleres se quiere hacer notar que existen demasiadas funciones con las cuales se puede trabajar, como la altura, el largo, el ancho, el área del papel usado y el área del papel desperdiciado y para cada una de esas opciones mostrar a los estudiantes que hay cuantiosas posibilidades de caja.

5.12.1.3 *Mediación Instrumental*

Al inicio la situación propuesta esta mediada bajo el material con el que se cuenta (tijeras y una hoja de papel tamaño carta) con los cuales se hace un primer acercamiento a las posibilidades de cajas.

A medida que los talleres avanzan y en particular en el taller 5 que apunta a la idea de covariación es conveniente trabajar con la calculadora u otro medio tecnológico que facilite cálculos para identificar los cambios en los Δx y los cambios en los Δy

Por otra parte se puede hacer uso de Geogebra u otro medio para modelar las funciones que se pueden construir, dado que sería una herramienta útil para comparar las diferencias entre esas representaciones y así mismo las diferencias entre las funciones. Además cuando se aborde la representación gráfica de la función, donde se hacen preguntas sobre el significado de la gráfica de la función, es importante entender el significado de un punto sobre la curva y qué significa un punto fuera de la curva y con esto procurar que los estudiantes logren comprender dos aspectos importantes el primero que para cada caja hay un punto y el segundo que ese punto recoge la relación entre dos variables cualesquiera por ejemplo entre el largo y el ancho, o la altura y la superficie, o el área de la base y la capacidad, para lo cual el software puede ser de mucha utilidad.

5.12.1.4 *Tipo de Representación*

El documento trabaja inicialmente con una representación concreta, pero hay que aclarar que existe una representación en un mundo abstracto, donde es posible construir cajas que en la vida real no, hecho que se debe tener en cuenta durante el desarrollo, y, por lo tanto el docente deberá aclararlo si surge la duda entre los estudiantes o propiciar el espacio, por medio de preguntas, para que así se dé.

Así mismo se abordan representaciones algebraicas, tabulares y se modelan funciones que comparan siempre dos variables cualesquiera y anteriormente nombradas que surgen gracias a la caja.

5.12.1.5 *Tratamiento de las magnitudes*

El tratamiento que se da a las magnitudes en esta situación es cuantitativo numérico debido a que desde el comienzo se tiene en cuenta la medida para la construcción de la caja además es necesario poder efectuar comparaciones entre las diferencias de los Δx y los Δy que surgen en las diferentes funciones que relacionan dos variables de la caja, en especial en el desarrollo del taller 5.

En otros análisis, hemos resaltado que cuando se hace énfasis en el tratamiento cuantitativo numérico de las magnitudes se pierde en términos de la identificación de la covariación, no obstante, en este caso tratar numéricamente las diversas situaciones propuestas se convierte en un instrumento para que los estudiantes reconozcan la variación.

5.12.1.6 *Niveles de razonamiento*

Nivel 0. Identificar las variables que cambian en esta secuencia de talleres, puede no ser tarea difícil ya que las instrucciones dadas parecen ser suficientes para que los estudiantes reconozcan qué cambia, ejemplo de ello es la pregunta 1 del trabajo en grupos (Taller 1): “En la siguiente tabla registren los datos correspondiente a la caja de cada uno de los cuatro integrantes del grupo”

Nombre del estudiante	altura de la caja	largo de la caja	ancho de la caja	área del papel desperdiciado	área del papel de la caja

Figura 2 Datos correspondientes a cada caja. Tomada del documento

Completar esta tabla les permitirá a los estudiantes reconocer que no todas las alturas, largos, anchos y áreas de papel, son las mismas. También podrían considerarse otras variables como perímetros, área de cada rectángulo que determina cada uno de los lados de la caja, etc.

Nivel 1. La acción mental de coordinar cambios en una variable con respecto a la otra (AM1) puede evidenciarse en un primer momento en las preguntas 4, 5, 6 y 7 del taller 1, en las que se pide a los estudiantes escribir expresiones simbólicas que les permita calcular el valor de una variable en términos de otra. Veamos:

- Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construidas y l representa la medida del largo de la caja, escriban una expresión simbólica que les permita calcular l a partir de x.

- Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construidas y a representa la medida del ancho de la caja, escriban una expresión simbólica que les permita calcular a a partir de x .
- Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construidas y d representa el área del papel desperdiciado, escriban una expresión simbólica que les permita calcular a $d$partir de x.
- Si x representa la medida del lado de cualquier cuadrado recortado en cualquiera de las cajas construidas y u representa el área del papel que tiene la caja, escriban una expresión simbólica que les permita calcular a u partir de x .

Puede que responder estas preguntas no implique necesariamente que los estudiantes reconozcan que cuando cambia una variable cambia la otra, en otras palabras la AM1, pero si se constituye como una base para lograr tal reconocimiento, que se hará más evidente en el desarrollo de los otros talleres.

Nivel 2. El nivel de dirección (N2) sustenta tanto a AM1 como a la acción mental de coordinar la dirección del cambio de una magnitud (largo, ancho o área de la caja, área de papel desperdiciado) mientras se considera el cambio en la medida del lado de cualquier cuadrado recortado (AM2).

Teniendo en cuenta que el taller se basa en 2 funciones diferentes, se hará alusión a cada una de ellas, ya que además de permitir identificar el N2, permite reconocer elementos que permiten un acercamiento a la noción de derivada de funciones (de primer y segundo grado) que describiremos más adelante. Así pues, en las preguntas 2, 7 y del quinto taller (acerca de la función largo de la caja y área del papel de la caja, respectivamente) se da a los estudiantes la siguiente instrucción:

> Cada uno de los integrantes del grupo va a examinar cómo varían los valores de $f_1(x)$ (o $f_4(x)$) cuando la variable x varía con incrementos de un valor específico. Para ello, cada miembro del grupo debe completar la segunda fila de una de las cuatro tablas que aparecen a continuación (usando calculadora) y luego, con base en la información de su tabla, debe responder las preguntas 3(8) a 6(9).

Al completar la tabla, los resultados obtenidos, para la función largo de la caja, permitirían a los estudiantes decir que a medida que hay cambios en x, también hay cambios en $f_1(x)$ y estos van disminuyendo linealmente.

a.

diferencia en x									
(x)	0.2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2
$f_1(x)$	23,6	21,6	19,6	17,6	15,6	13,6	11,6	9,6	7,6
diferencia en $f_1(x)$									

Para la función área del papel de la caja, los estudiantes pueden identificar que a medida que aumenta x, también lo hace $f_4(x)$, pero ya no de manera lineal como lo hacia $f_1(x)$, en este caso, aumenta hasta que $x = 4{,}2$ y luego empieza a disminuir.

e.

diferencia en x									
x	0.2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2
$f_4(x)$	479,84	474,24	460,64	439,04	409,44	371,84	326,24	272,64	211,04
diferencia en $f_4(x)$									

Comparando los resultados de las dos funciones, podemos hacer una primera caracterización, para la función largo de la caja, los valores de $f(x)$ siempre aumentan, mientras que para la función área del papel de la caja, los valores de $f(x)$ aumentan hasta cierto punto y luego disminuyen. Claramente, esto se debe a que la primera función es lineal, mientras que la segunda es cuadrática, pero esto es algo que los estudiantes no saben y para los fines del taller aún no cobra importancia.

Nivel 3. El nivel de coordinación cuantitativa (N3) sustenta a AM1, AM2 y a la acción mental de coordinar la cantidad de cambio de una de las magnitudes (largo, ancho o área de la caja, área de papel desperdiciado) con la cantidad de cambio en la medida del lado de cualquier cuadrado recortado (AM3). Las preguntas 3 (8) y 4 (9) del taller 5 permiten dar cuenta de qué tanto están cambiando $f_1(x)$ y $f_4(x)$, con respecto al cambio en x.

- En la tabla, los valores dados a x están ordenados ascendentemente. Determine si la siguiente aseveración es verdadera o falsa: entre dos valores consecutivos cualesquiera de x (considerando primero el que está a la derecha) hay una diferencia constante (los valores de las diferencias son iguales). En la primera fila de óvalos registre los valores de las diferencias.
- Para cada par de valores consecutivos de $f_1(x)$ registrados en su tabla, determine la diferencia (lo mismo que para los valores de x, considere primero el que está a la derecha); si lo considera necesario utilice la calculadora. En la segunda fila de óvalos, escriba el valor de la diferencia obtenida. ¿Es cierto que los valores de las diferencias son el mismo?

Los resultados en la tabla serían los siguientes, para la función "largo" de la caja.

a.

diferencia en x	1	1	1	1	1	1	1	1

(x)	0.2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2
$f_1(x)$	23,6	21,6	19,6	17,6	15,6	13,6	11,6	9,6	7,6

diferencia en $f_1(x)$	2	2	2	2	2	2	2	2

A partir de estos resultados se puede identificar que tanto las diferencias en x como en $f_1(x)$ son constantes, aunque diferentes entre ellos. Por su parte para la función área del papel de la caja, se identifica que para cambios constantes en x, no hay cambios constantes en $f_4(x)$, sino que el valor de los cambios va aumentando.

e.

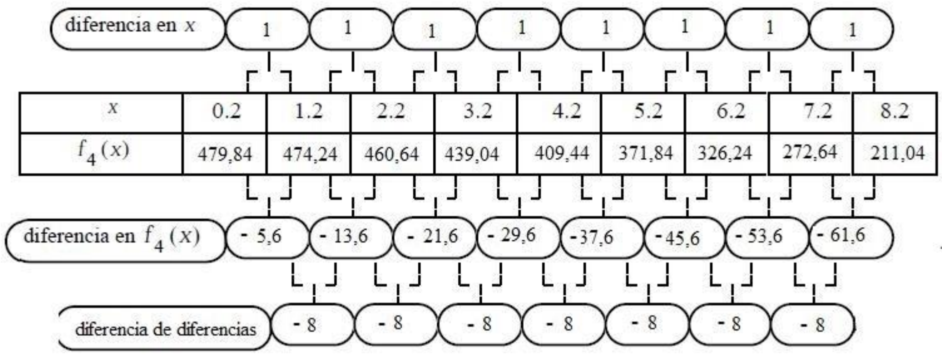
diferencia en x	1	1	1	1	1	1	1	1

x	0.2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2	7.2	8.2
$f_4(x)$	479,84	474,24	460,64	439,04	409,44	371,84	326,24	272,64	211,04

diferencia en $f_4(x)$	- 5,6	- 13,6	- 21,6	- 29,6	-37,6	-45,6	- 53,6	- 61,6

Para este nivel es necesario cuantificar el cambio, y hasta ahora de la función área, solo sabemos que disminuye, es decir que para cambios iguales de x se relacionan con cambios negativos cada vez mayores (en valor absoluto) en $f(x)$, (decrece cada vez más), para saber cuánto es lo que decrece, podemos encontrar las diferencias de las diferencias de $f_4(x)$ y de esta manera saber que con cambios constantes en x la función decrece -8.

e.



Nivel 4. El nivel de razón promedio (N4) sustenta a AM1, AM2, AM3 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio promedio, entendida como las diferencias entre los Δy y Δx, es decir la diferencia entre las cantidades de longitud y área, según el caso y las cantidades de longitud (del cuadrado recortado): $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (AM4).

A lo largo del taller, se han tomado constantes los cambios de los valores en x, para el caso que tomamos, el cambio siempre fue de 1. Sin embargo, los cambios de y variaron según la función. Para la función largo de la caja los cambios en y fueron constantes, no así, fueron los cambios para la función área del papel de la caja, para este caso los cambios aumentaron de manera lineal, lograr ver cambios constantes en y para esta función implicó calcular diferencias de las diferencias. Las preguntas del taller que indagan a cerca de estos aspectos van de la 10 a la 19 y tienen la particularidad de incluir la representación gráfica, que hasta ahora no se había hecho presente a lo largo de los talleres.

6 PÁGINA WEB

La página Web es uno de los productos esperados que surge a partir de la realización del Trabajo de Grado, la cual busca ser una herramienta para los docentes y maestros en formación, mostrando de manera organizada tareas que potencian el desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes. El sitio web que se creó está disponible con el link https://matematica17.wixsite.com/variacional en el cual se encuentra:

- Presentación de la página principal

  En el encabezado se encuentra en nombre de la página web "Catálogo de tareas que potencian el desarrollo del pensamiento variacional", acompañado de una barra lateral que incluye el enlace a la página de inicio, el catálogo y tabla.

- Cuerpo de la página principal

  En la página principal se hace una descripción del sitio web, de dónde surge e información para contactarse con los autores. Así mismo, se hace la descripción de la caracterización del contexto, que es una construcción propia y que surgió del análisis de las tareas.

- Presentación catálogo

  Se muestran los títulos de los documentos, en los que se encuentran las tareas analizadas, enumerados del 1 al 19.

CATÁLOGO

01

Curso de precálculo apoyado en el uso de Geogebra para el desarrollo del pensamiento variacional Fiallo-Leal & Parada-Rico

Seguir leyendo >>

02

Diagnóstico sobre el reconocimiento de la variación con estudiantes de primer semestre de matemáticas aplicadas (Benítez-Mojica & Bueno-Tokunaga, 2009)

Seguir leyendo >>

03

Desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional con el CABRI II PLUS® (Nieto-Saldaña, Chavira-Jara, & Viramontes, 2010)

Seguir leyendo >>

04

Elementos teóricos para analizar el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante (Ramos-Márquez & Jiménez-Rodríguez, 2014)

Seguir leyendo >>

05

Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2003)

Seguir leyendo >>

- Presentación de la tabla analítica

  En la tabla se muestra de manera resumida la caracterización de cada una de las tareas analizadas, es decir: contexto, mediación instrumental, tipo de representación y niveles del razonamiento variacional que aborda. Esta a su vez, se convierte en una herramienta que permite filtrar la búsqueda de tareas con características puntuales, ya que si alguna tarea cumple con el criterio de búsqueda del docente, puede hacer clic en el nombre del artículo, lo cual lo re direccionará al análisis completo de la tarea.

Crea tu sitio con WIX

Tareas catálogo : Hoja1

Titulo del artículo	Contexto		Mediación Instrumental	Tipo de representación							Niveles de razonamiento covariacional que aborda					
	Escenario	Ámbito	Cuál	Estatica-Pictórica	Dinámica	Tabular	Gráfica	Digital	Simbolico	Otros	N0	N1	N2	N3	N4	N5
Curso de precálculo apoyado en el uso de Geogebra para el desarrollo del pensamiento variacional	Semirreal-Geometrico	Cálculo	Geogebra	x		x	x		x		x	x	x	x	x	x
Diagnóstico sobre el reconocimiento de la variación con estudiantes de primer semestre de matemáticas aplicadas	Semirreal o matematicos-geometricos	Variación	Papel	x							x	x				
Desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional con el Cabrí II PLUS®	MatemáticoGeométrico	Variación	Cabrí	x			x		x		x	x	x	x	x	x
Elementos teóricos para analizar el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante	Semirreal	Variación	fotograma de un video digital			x	x	x	x	Verbal	x	x	x	x		
Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio	Real	Variación	Papel	x			x				x	x	x	x	x	x
Una experiencia de diseño curricular en torno a la variación conjunta	Semirreal	Variación	Lápiz y papel			x				Escrita	x	x	x	x		
Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria	Vida real	Cálculo	Lápiz y papel			x	x			Escrita	x	x	x	x		

Este sitio fue creado con WIX.com. Es fácil y gratis. Crea tu página web ›

7 REFLEXIONES Y CONCLUSIONES

El pensamiento variacional es, tal vez, uno de los aspectos de la Matemática que no se logra abordar con la profundidad que se quisiera dentro del currículo de Matemáticas en cualquiera de los grados de escolaridad. Es probable que una de las causas sea que los maestros no tienen las herramientas necesarias a su alcance para potenciar el pensamiento variacional en el aula y más allá de esto hay un desconocimiento de a dónde deben dirigirse para encontrar información que aporte a la planeación y ejecución de sus clases. Tal desconocimiento fue palpable al momento de buscar artículos en los que se incluyeran las tareas que en este trabajo fueron analizadas, surgían preguntas como: ¿dónde buscar?, ¿qué revistas hay especializadas en Matemáticas?, ¿las memorias de los eventos pueden ser fuente de consulta?, ¿cómo buscar? A raíz de estas preguntas nos vimos en la necesidad de buscar revistas de Educación Matemática y nos encontramos con la sorpresa de que no hay una ni dos, sino muchas, de las cuales muy pocos maestros hacemos uso.

A continuación listamos solo algunas de las revistas que pueden ser fuente de consulta, no solo refiriéndonos al pensamiento variacional, sino a las Matemáticas escolares en general: *Revista UNO, Revista Suma, Revista Números, Revista Epsilon, Revista Científica, Revista Digital: Matemáticas, educación e Internet, Revista el Cálculo y su Enseñanza, Revista EMA, Revista Escenarios, Revista TED, Zetetike, Educação Matemática Pesquisa, Revista Bolema, Revista Educación Matemática Debate.* Así mismo, hay memorias de numerosos eventos de Educación Matemática como por ejemplo: *Encuentro Colombiano de Educación Matemática, Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.*

Es importante destacar que hacer una búsqueda puede tornarse una tarea complicada ya que en muchos casos las revistas solo tienen versión física, otras tienen versiones *on line*, pero solo algunas son gratuitas y no requieren de suscripción. No obstante, consideramos que realizar la suscripción a las revistas es una buena opción para recibir, en el correo electrónico, información sobre nuevas publicaciones que pueden ser de nuestro interés. Por lo general las páginas de las revistas tienen motores de búsqueda que ayudan a filtrar la información que se está buscando, en caso de no ser así se debe realizar la búsqueda volumen por volumen. Algo similar pasa con las memorias de eventos, sumándole que estas no se encuentran recopiladas en bases de datos, como si lo están muchas de las revistas, es necesario descargar las memorias y hacer un filtro rápido a partir de los títulos de las ponencias para luego pasar a verificar si el título está acorde con el contenido y si efectivamente es útil para el fin de nuestra consulta. Sin embargo, hay bases de datos (Dialnet, Scielo, Google Académico, Academic Search Complete (EbscoHost)) que facilitan el proceso de búsqueda, ya que son colecciones de documentos académicos y científicos, en formato electrónico, que pueden consultarse en línea.

A partir de esta reflexión que hacemos, de la experiencia que tuvimos, consideramos que los futuros maestros deben ser profesionales y por tanto diferentes a la mayoría, lo que implica incorporar a su manera de ser y hacer las búsquedas especializadas, y no solo en fuentes primarias como Google, lo que permite estar en constante formación y obtener información de primera mano. Así mismo, nos permitimos concluir que hay un evidente desconocimiento de las fuentes para efectuar búsquedas especializadas e incluso nosotros, que estamos próximos a ser egresados, hasta antes de realizar el trabajo de grado, no teníamos claridad a cerca de estas fuentes de información. Tal desconocimiento puede estar ligado a varios factores, sin embargo centraremos la atención en el papel que allí tiene la Licenciatura. En la mayoría de los espacios académicos, los maestros brindan a los estudiantes los documentos que deben leer para lograr el propósito del curso, hecho que impide que la realización de búsquedas especializadas tenga un papel preponderante en nuestra formación. Lo anterior conduce a que, en los maestros en formación, no surja la necesidad de preguntarse ¿dónde debo buscar? Y por ende desconozcan las bases de datos, que incluso la Universidad pone a nuestro alcance, como fuente de información. A raíz de esto, consideramos pertinente proponer que se enfatice, en los diferentes espacios académicos, en la realización de ese tipo de búsquedas y el uso de bases de datos para lograr tal fin. A pesar de lo ya mencionado, la Licenciatura también ofrece la electiva “Taller de Apoyo escritural y uso de recursos bibliográficos” la cual jugaría un papel importante para lograr tal propósito y además suplir los vacíos que se tienen a cerca de bases de datos como fuentes de información, pero para esto debe otorgársele mayor relevancia en el actual Plan de estudios.

Otro asunto que logró despertar nuestra inquietud es la forma de significar el contexto en el que se presenta una tarea. Cotidianamente, hablar del contexto de una situación nos lleva a pensar en quienes están involucrados, cuáles son los antecedentes, dónde ocurrió, etc., son muchos factores los que se deben considerar para hablar del contexto de una situación. Ahora, hablar del contexto de una tarea puede resultar ser igual, o más complejo dado la diversidad de elementos que influyen en ella. Un primer referente para hacer esta descripción fueron los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas en donde se habla de tres tipos de contextos: matemático, de otras ciencias y cotidiano, sin embargo al enfrentarnos a la necesidad de categorizar una tarea dentro de estas 3 categorías, nos dimos cuenta que eran una forma muy global de describir el contexto. Veamos la siguiente tarea para ejemplificar la insuficiencia que evidenciamos en esta caracterización: hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo isósceles cuya base (lado desigual) es a y la altura correspondiente h suponiendo que un lado del rectángulo está sobre la base del triángulo (Camacho & Santos, 2004)

Desde la perspectiva de los Lineamientos Curriculares en Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 1998, 2006), se podría clasificar esta tarea en un contexto de más matemáticas, pero más allá de eso no nos permite decir nada acerca de cuál es su propósito, a cuál rama de las matemáticas pertenece, si es que es solo una porque es posible que sean varias las que estén involucradas. Los cuestionamientos anteriores nos llevaron a consultar otros autores, como Skovmose gracias al cual se pudo incluir una nueva categoría: contextos semirreales. Sin embargo, aún no era suficiente para hacer una caracterización más específica del contexto, de la tarea. Tomando el mismo ejemplo, nos dimos cuenta que en primera medida podría pensarse que es una tarea que alude a la geometría, y en cierto sentido lo es, porque incluye figuras geométricas y relaciones entre ellas, áreas, medidas de lados, pero ¿cuál es el asunto por el que verdaderamente indaga el problema? La expresión “área máxima” inmediatamente nos lleva a pensar en optimización, que es, en efecto, el asunto real de indagación. En resumen, nos estábamos enfrentando a dos categorías generales para caracterizar el contexto: la forma en que se presenta y el asunto por el que realmente indaga, a estos los llamamos escenario y ámbito respectivamente.

Tal caracterización nos lleva a reflexionar acerca de las tareas que proponemos a nuestros estudiantes en el aula, ya que puede ser que estemos planteando tareas ricas en escenario pero escasas en ámbito o que el escenario en que se plantea nos lleve a caer en el error de plantear tareas que no potencian el pensamiento matemático que en verdad se persigue.

Un tercer asunto que es de vital importancia, son los resultados que se generaron a partir de las tareas analizadas. Las 19 tareas reportadas como resultado de la búsqueda de documentos relacionados con el pensamiento variacional fueron analizadas desde cinco categorías diferentes: contexto, tipos de representación, mediación instrumental, tratamiento de las magnitudes y niveles de razonamiento covariacional. A partir de esas categorías pudimos concluir que:

1. La mayoría de las situaciones están propuestas en escenarios semireales que incluyen geometría. Por su parte el ámbito que predomina es el Cálculo, específicamente la optimización y reconocimiento de la variación.
2. Si nos referimos a la mediación instrumental podemos decir que hay dos grandes grupos. Primero, las tareas que usan algún software, bien sea de geometría dinámica como geogebra o Cabri, u otros como Excel y Modellus, Segundo, los que usan materiales concretos o se reduce al uso de lápiz y papel. De lo anterior, es evidente que utilizar algún tipo de software ayuda a la comprensión de la variación y el cambio y por o tanto al desarrollo de los niveles de razonamiento covariacional.
3. En su gran mayoría se da un tratamiento cuantitativo numérico a las magnitudes y de hecho parece ser que es necesario realizarlo a partir del nivel 3. Sería interesante en trabajos posteriores desarrollar todas las tareas en términos cuantitativos no numéricos y ver qué resultados se pueden obtener de esa forma y si este es un tratamiento que privilegia el desarrollo del pensamiento covariacional.
4. Representar un objeto matemático es más de un sistema de representación ayuda a mejorar la comprensión del mismo, y, en general, las tareas analizadas siguen ese supuesto ya que incluyen dos o más tipos de representación.
5. No todas las tareas abordan todos los niveles de razonamiento variacional, en su mayoría solo abordan hasta el nivel 3, lo que indica que hace falta reforzar la idea de razón de cambio y razón de cambio instantánea, aun cuando las tareas sean presentadas en niveles de educación primaria o básica, ya que desde allí se pueden ir poniendo los cimientos para posteriormente reconocer y entender qué es el cambio en términos de razones de cambio.

Con respecto a la última conclusión, se presenta a continuación una tabla en el que se relaciona, el artículo, y la revista en que se encuentra, con las tareas que allí se presentan y los niveles de razonamiento covariacional que potencian.

Revista	Título del artículo	Niveles de razonamiento covariacional que aborda					
		N0	N1	N2	N3	N4	N5
Revista Científica	Curso de precálculo apoyado en el uso de Geogebra para el desarrollo del pensamiento variacional	x	x	x	x	x	
Revista El Cálculo y su enseñanza	Desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional con el CABRI II PLUS®	x	x	x	x	x	x
Revista EMA	Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio.	x	x	x	x	x	x
Revista Números	Problemas geométricos de variación y el uso de software dinámico (Tarea 1)	x	x	x	x	x	x
Revista TED	Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas	x	x	x	x	x	x
4to Seminario Taller de Educación Matemática	El estudio de la tasa de variación como una aproximación al concepto de derivada	x	x	x	x	x	x
Revista UNO	El estudio de fenómenos de variación haciendo uso de herramientas tecnológicas	x	x	x	x	x	x
Otros	Propuesta curricular para la introducción a las funciones representadas por polinomios de grado dos	x	x	x	x	x	x
Acta Latinoamericana de Matemática Educativa	Las funciones y sus gráficas en el estudio de la variación y el cambio	x	x	x		x	x
Revista El Cálculo y su enseñanza	Elementos teóricos para analizar el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante	x	x	x	x		
Revista EMA	Una experiencia de diseño curricular en torno a la variación conjunta	x	x	x	x		

Revista Escenarios	Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria	x	x	x	x		
Encuentro Colombiano de Matemática Educativa	El pensamiento variacional: un asunto de juego y actividad matemática en la escuela	x	x	x	x		
Encuentro Colombiano de Matemática Educativa	¿Pensamiento variacional en los libros de texto?: una pregunta que nos permite aprender como docentes	x	x	x	x		
Encuentro Colombiano de Matemática Educativa	Análisis y adecuación de tareas asociadas al pensamiento variacional en libros de texto de 4° y 5° grado	x	x	x	x		
Revista Números	Problemas geométricos de variación y el uso de software dinámico (Tarea 2)	x	x	x			
Revista SUMA	¿Cuánto tendría que medir la caja para contener X veces más galletas?	x	x	x			
Encuentro Colombiano de Matemática Educativa	El pensamiento variacional: un asunto de juego y actividad matemática en la escuela.	x	x	x			
Acta Latinoamericana de Matemática Educativa	Las funciones y sus gráficas en el estudio de la variación y el cambio.	x	x				
Revista El Cálculo y su enseñanza	Diagnóstico sobre el reconocimiento de la variación con estudiantes de primer semestre de matemáticas aplicadas.	x	x				

Finalmente, El trabajo nos deja un deseo investigativo y el paso a seguir en un futuro para la creación de un catálogo de tareas para cada tipo de pensamiento (Espacial, Aleatorio, Métrico, Numérico), lo cual implica por supuesto un marco de referencia apto para cada uno y búsquedas especializadas que aportarían significativamente a aquellos interesados en su formación profesional y a maestros comprometidos con la enseñanza de las matemáticas.

8 BIBLIOGRAFÍA

Arredondo, J. F., & Quiseno, M. Z. (2010). El juego de la casa de cambio como una estrategia didáctica en la construcción de un sistema de numeración posicional. Proyecto juega y construye la matemática. In *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 439–446). Armenia. Retrieved from http://funes.uniandes.edu.co/1173/

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In P. Goméz (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97–140).

Benítez-Mojica, D., & Bueno-Tokunaga, A. (2009). Diagnóstico sobre el reconocimiento de la variación con estudiantes de primer semestre de matemáticas aplicadas. *El Cálculo Y Su Enseñanza*, *1*, 13–31. Retrieved from http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/B87dW11g6g.pdf

Camacho, M., & Santos, L. (2004). El estudio de fenónemos de variación haciendo uso de herramientas tecnológicas. *Uno Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, (37), 105–122.

Camargo, L., & Guzmán, A. A. (2005). *Elementos para una didáctica del pensamiento variacional. Relaciones entre la pendiente y la razón* (Cooperativ). Bogotá.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, *8*(2), 121–156.

Fiallo-Leal, J. E., & Parada-Rico, S. E. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de geogebra para el desarrollo del pensamiento varacional. *Revista Científica*, (20), 56–73. Retrieved from http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=a9h&AN=100271851&lang=es&site=ehost-live

Godino, J., Batanero, C., & Roa, R. (2002). Manual para el estudiante. In *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros* (pp. 607–692). Granada. Retrieved from http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Gómez, J. R., Orozco, J. L., Benavidez, G., Navarro, N., & Guacaneme, E. (2012). El pensamiento variacional : un asunto de juego y actividad matemática en la escuela. In *ECME* (pp. 914–921).

Gómez, J. R., Orozco, J. L., Benavidez, G., Navarro, N., & Guacaneme, E. (2013). ¿Pensamiento variacional en los libros de texto?: una pregunta que nos permite aprender como docentes. In G. Obando (Ed.), *Memoria 13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 472–478). Medellín, Colombia. Retrieved from https://es.scribd.com/doc/220306458/Matematica-Educativa-13-Encuentro-Colombiano-Ecme

Guacaneme, E., & Perry, P. (2000a). Propuesta curricular para la introducción a las funciones representadas por polinomios de grado dos.

Guacaneme, E., & Perry, P. (2000b). Propuesta curricular para la introducción a las funciones representadas por polinomios de grado dos. Bogotá: Una empresa docente.

Hernández, E., Galindo, O., & Santana, K. (2003). Una experiencia de diseño curricular en torno a la variación conjunta. *Revista EMA*, *8*(2), 237–255. Retrieved from http://funes.uniandes.edu.co/1525/1/103_Hernández2003Una_RevEMA.pdf

Maury-Mancilla, E., Palmezano, G., & Cárcamo, S. (2012). Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria. *Escenarios*, *10*(1), 7–16.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*.

Nieto-Saldaña, N., Chavira-Jara, H., & Viramontes, J. de D. (2010). Desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional con el CABRI II PLUS®. *El Cálculo Y Su Enseñanza, 2*.

Osorio, J., Ayola, G., Castro, W., Hilduara-Velásquez, E., & Cisneros, J. (2015). Análisis y adecuación de tareas asociadas al pensamiento variacional en libros de texto de 4 ° y 5 ° grado. *Revista Colombiana de Mtemática Educativa*, *1*(2), 5251.

Ramos-Márquez, L. I., & Jiménez-Rodríguez, J. R. (2014). Elementos teóricos para analizar el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante. *El Cálculo Y Su Enseñanza*, *5*, 107–124.

Sepúlveda-López, A., Vargas-Alejo, V., & Cristóbal-Escalante, C. (2013). Problemas geométricos de variación y el uso de software dinámico. *Números*, *82*, 65–87. Retrieved from http://www.sinewton.org/numeros/numeros/82/Articulos_05.pdf

Tirado-Muñoz, J. M. (1991). ¿Cuánto tendría que medir la caja para contener x veces más galletas? *Revista SUMA*, *8*, 55–59.

Villa-Ochoa, J. A. (2012a). El estudio de la tasa de variación como una aproximación al concepto de derivada. In *4to Seminario Taller de Educación Matemática: La enseñanza del cálculo y los componentes de su investigación* (pp. 31–44). Universidad de Antioquia. Retrieved from http://funes.uniandes.edu.co/2090/1/villa-ochoa_UIS2012.pdf

Villa-Ochoa, J. A. (2012b). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme Y Didaxis*, (31), 9–25. Retrieved from http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n31/n31a02.pdf

Vrancken, S., Schmithalter, M., Englery, A., & Müller, D. (2014). Las funciones y sus gráficas en el estudio de la variación y el cambio. In *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1299–1307). Retrieved from http://www.clame.org.mx/documentos/alme27.pdf

ANEXOS

ANEXO A. Resumen de documentos consultados.

- **Revista Científica**
  - **Curso de precálculo apoyado en el uso de Geogebra para el desarrollo del pensamiento variacional (Fiallo-Leal & Parada-Rico, 2014)**

> En este artículo se presentan los resultados iniciales del diseño, experimentación y evaluación de un curso de precálculo, planteado como una alternativa preventiva para afrontar la problemática actual de deserción y repitencia en los cursos de Cálculo Diferencial en la Universidad Industrial de Santander. El propósito principal de dicho curso es aportar herramientas para desarrollar en estudiantes de primer nivel universitario su "pensamiento variacional", con el fin de favorecer en ellos un nivel matemático pertinente a las exigencias del curso de Cálculo Diferencial. El trabajo en el aula está orientado al trabajo activo de los estudiantes en un proceso de resolución de problemas, en el que se involucre el razonamiento, la comunicación, la representación, las conexiones y la tecnología como claves para la producción de aprendizajes significativos, alrededor de las dos.

Para logarlo se propone una situación de optimización que se aborda en cinco diferentes fases: información y exploración libre, socialización de los resultados obtenidos en la fase anterior, exploración dirigida, explicitación y fase de orientación libre.

- **Revista El Cálculo y su enseñanza**
  - **Diagnóstico sobre el reconocimiento de la variación con estudiantes de primer semestre de matemáticas aplicadas (Benítez-Mojica & Bueno-Tokunaga, 2009)**

> En el presente estudio se utilizan un conjunto de problemas como plataforma para diagnosticar las características que tiene el razonamiento de los estudiantes de matemáticas en la identificación de la variación. Las actividades de aprendizaje utilizadas en la investigación están redactadas en contextos reales, hipotéticos y

> formales. En todas ellas, los estudiantes debían discutir si en ese contexto existe o no variación y justificar la respuesta.

Partiendo de lo anterior, en las siete situaciones presentadas se hace especial énfasis en identificar los niveles de reconocimiento (N0) y coordinación (N1) de Carlson (2003).

- **Desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional con el CABRI II PLUS® (Nieto-Saldaña, Chavira-Jara, & Viramontes, 2010)**

> Una de las conclusiones más generalizadas que han sido producto de varias investigaciones en Matemática Educativa es la necesidad de desarrollar un tipo de pensamiento que ayude a interpretar, analizar y resolver problemas que involucren la variación, al que denominaremos pensamiento y lenguaje variacional. Para su desarrollo se han diseñado algunos archivos en CABRI II PLUS® de tal forma que acompañados por actividades de aprendizaje que privilegien las diferentes representaciones semióticas de los objetos del cálculo, logren que los estudiantes transiten por los diferentes niveles del pensamiento variacional. Se observó que existe resistencia por parte de los estudiantes al uso de recursos tecnológicos, sin embargo al paso del tiempo aceptan la mediación y se logra observar la adquisición de significados asociados a los conceptos centrales del cálculo.

Se modelan dos situaciones, enfocadas en realizar el estudio de funciones. Con la primera se potencian los cuatro primeros nivel de razonamiento, además, los estudiantes pueden hacer la construcción de la misma en el software. La segunda situación, se acerca a los últimos dos niveles ya que se busca que los estudiantes cuantifiquen la variación en intervalos de tiempo que se hacen más pequeños para lograr cuantificar la variación instantánea o puntual.

- **Elementos teóricos para analizar el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante (Ramos-Márquez & Jiménez-Rodríguez, 2014)**

> Se presenta en este trabajo un avance de una investigación sobre el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de ingeniería durante su primer curso de cálculo, mediante la integración de diferentes herramientas digitales. En particular, se muestra un esfuerzo de adaptación del marco teórico presentado por Carlson y cols. (2002) y por Thompson (1994), denominado Razonamiento Covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos, con el fin de que sea congruente con la visión con la que desarrollamos esta investigación; se describen y ejemplifican las cinco

grandes acciones mentales constitutivas del razonamiento covariacional, a partir del estudio de actividades de vaciado y llenado de recipientes, así como de movimiento, en las que además de las representaciones tabular, gráfica, analítica y verbal, se incluye una quinta modalidad: la representación digital.

- **Revista EMA**
  - **Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2003)**

Se desarrolla la noción de razonamiento covariacional y se propone un marco conceptual para describir las acciones mentales involucradas al aplicar razonamiento covariacional cuando se interpretan y representan funciones asociadas a eventos dinámicos. Se reporta la habilidad para razonar sobre cantidades covariantes en situaciones dinámicas, de estudiantes de alto desempeño en un curso de cálculo. El estudio reveló que ellos eran capaces de construir imágenes de la variable dependiente de una función que cambia simultáneamente con el cambio imaginado de la variable independiente, y en algunas ocasiones eran capaces de construir imágenes de la razón de cambio para intervalos contiguos del dominio de una función. Sin embargo, al parecer, tuvieron dificultad para formar imágenes de una razón cambiante de manera continua y no pudieron representar con exactitud o interpretar los puntos de inflexión ni la razón creciente y decreciente para funciones asociadas a situaciones dinámicas. Estos hallazgos sugieren que el currículo y la instrucción deberían aumentar el énfasis en el cambio que debe darse en los alumnos de una imagen coordinada de dos variables que cambian simultáneamente a una imagen coordinada de razón de cambio instantánea con cambios continuos en la variable independiente para funciones asociadas a situaciones dinámicas.

  - **Una experiencia de diseño curricular en torno a la variación conjunta (Hernández, Galindo, & Santana, 2003)**

Se presentan aspectos de una experiencia de diseño curricular, vivida en el marco de un programa de desarrollo profesional. Esta experiencia implicó diseñar, implementar y analizar un conjunto de talleres que pretendían involucrar a los estudiantes en el reconocimiento y estudio de un fenómeno de variación conjunta que sirve de referencia a otro un poco más abstracto. A través del artículo el lector podrá reconocer el camino transitado, las rutas no abordadas, los diferentes obstáculos que

> tuvimos que superar y las decisiones que tomamos, al enfrentar dichas tareas, por demás poco usuales en nuestra labor docente.

El conjunto de cuatro talleres está conformado por situaciones problemas que los estudiantes deben resolver inicialmente de manera hipotética y luego de manera empírica a través de un experimento que ellos mismos deberán diseñar. Finalmente, deberían contrastar los resultados de las aproximaciones hipotéticas y experimentales y presentar una respuesta a las situaciones problemas.

- **Revista Escenarios**
  - **Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria (Maury-Mancilla, Palmezano, & Cárcamo, 2012)**

> Este artículo, surge del trabajo investigativo, acerca de la necesidad de aportar una metodología a los docentes en Educación Básica Primaria, en principio, para la Institución Educativa Distrital Comunitaria IEDC Octavio Paz, que les propicie favorecer el desarrollo del pensamiento variacional a los estudiantes la misma: se enmarca en un sistema de tareas, que fortalece el trabajo independiente de los estudiantes en su proceso de aprendizaje. El paradigma es empírico analítico; realizándose una indagación de primera fuente, acerca de los conocimientos que los docentes tienen sobre los Lineamientos curriculares, las estrategias que emplean para abordar los diferentes tipos de pensamientos, en especial el variacional, y enfocado en el sistema de tareas. Se trabajó con 31 docentes y 48 estudiantes de la asignatura de matemática de los dos cursos del 5to. grado, de matemáticas de la institución mencionada, en el Distrito de Barranquilla, donde el grupo control y el experimental fueron escogidos al azar, para escoger a cuál se le aplicaría el tratamiento novedoso, constituyéndose en un diseño cuasi experimental.
>
> El tratamiento consistió en las tareas elaboradas para el desarrollo del pensamiento variacional, las cuales iban incrementándose en complejidad, y mediadas, por las fases de orientación, ejecución y control. Dando como resultado comparativo, el mejoramiento del desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas que impliquen variación y cambio, referidos a deducciones de patrones de variación, interpretación de la variación a través de gráficas, identificación de las variables, cálculo de la magnitud desconocida, y la elaboración de modelos.

- **Revista Números**
  - **Problemas geométricos de variación y el uso de software dinámico (Sepúlveda-López, Vargas-Alejo, & Cristóbal-Escalante, 2013)**

En este artículo se presentan dos problemas geométricos que involucran la noción de variación, analizados desde la perspectiva de la resolución de problemas y la incorporación del software dinámico como un medio que puede potenciar el aprendizaje de los estudiantes. Los objetivos, al presentar un análisis desde diferentes procedimientos de solución a estos problemas, son: exhibir distintos acercamientos a situaciones, los cuales puede ir desarrollando el estudiante y el grupo al abordarlas, proporcionar al profesor elementos que le permitan proponer trayectorias hipotéticas del aprendizaje vinculadas con los conceptos y habilidades matemáticas que se requieren para abordar el problema y para comprenderlo, así como proveer de elementos al docente para identificar los momentos en los cuales puede intervenir en el proceso de solución para encauzar o enfatizar conceptos o habilidades matemáticas.

- **Revista SUMA**
  - **¿Cuánto tendría que medir la caja para contener x veces más galletas? (Tirado-Muñoz, 1991)**

Todos los que nos dedicamos a la escuela, podríamos elaborar un nutrido catálogo de ejemplos, que mostrarían cómo nuestros alumnos y alumnas, son capaces de adquirir determinados conceptos y aplicarlos a la resolución de problemas de cierto tipo; mientras que, paralelamente, tienen serias dificultades para resolver otras situaciones estrechamente relacionadas con los conceptos que, en teoría, dominan.

Este trabajo no se centra en las causas de tan extraña y contradictoria convivencia (amplia bibliógrafa existe al respecto), más bien es un modesto intento de dar respuesta a una necesidad aquí y ahora.

Durante el curso 89-90 trabajo con dos grupos de 89 y en el primer trimestre (en la línea de lo descrito arriba), compruebo que, conociendo las fórmulas para calcular volúmenes de prismas, cilindros y otros cuerpos tienen grandes dificultades para determinar que se podría hacer para conseguir que una caja de galletas pudiera contener una cantidad doble, triple, cuádruple,… de producto. Con el propósito de desmenuzar las variables de las que depende el volumen, en concreto de

> paralelepípedos y cilindros (formas de envase muy corrientes en el mercado), planteo en clase las cuestiones que se detallan en el trabajo que presento.
> No trascribo los razonamientos intermedios en favor de una mayor brevedad, limitándome a recoger las conclusiones a las que fuimos llegando que, en muchos casos, dieron pie a nuevas vías de investigación.

El fin último de la tarea no es la optimización, sino más bien reconocer magnitudes geométricas como el volumen y la capacidad y cómo diferenciarlas.

- **Revista TED**
  - **Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas (Villa-Ochoa, 2012b)**

> En este artículo se usa el marco conceptual de Carlson et al. (2003) para discutir los resultados de un estudio de caso, el cual describe la forma como un estudiante razona covariacionalmente al enfrentarse a situaciones de variación asociadas a funciones cuadráticas. El estudio se ideó para desarrollar una línea convergente de indagación (Yin, 2009), la cual se centró en las descripciones que el estudiante realizaba a medida que abordaba las situaciones diseñadas para el estudio; dichas descripciones fueron trianguladas con las producciones escritas y los elementos teóricos. Desde las acciones que el estudiante evidenció, se pudo observar que el proceso de razonamiento covariacional no es un proceso lineal pero sí recursivo. Así mismo, este estudio de caso pone en evidencia el hecho de que existen estudiantes que pueden aproximarse a una interpretación variacional de las concavidades de una gráfica, sin que ello exija un estudio previo del cálculo diferencial. Del estudio se desprenden algunas implicaciones tanto para el marco conceptual abordado en este estudio como para el diseño de situaciones orientadas al aula de clase.

- **Revista UNO**
  - **El estudio de fenómenos de variación haciendo uso de herramientas tecnológicas (Camacho & Santos, 2004)**

> El reconocimiento explícito de la importancia de utilizar la tecnología en los procesos de aprendizaje de las matemáticas induce a analizar las características de las tareas o problemas que se deben diseñar e implementar durante el desarrollo de la instrucción. En este artículo mostramos como, con la utilización de algunas

herramientas tecnológicas, algunos problemas clásicos que aparecen en los cursos tradicionales pueden transformarse en actividades de aprendizaje que permitan a los estudiantes realizar representaciones y procesos de solución donde se evidencian aspectos propios del quehacer matemático. En particular, se presenta el proceso de solución de un ejemplo donde se destacan las representaciones dinámicas del problema que se generan con el empleo del software, el tipo de preguntas y las posibles exploraciones que aparecen durante los caminos de solución. También se resalta la complementariedad de los acercamientos basados en el empleo de la tecnología con aquellos que solamente utilizan lápiz y papel.

- **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**
  - **Las funciones y sus gráficas en el estudio de la variación y el cambio (Vrancken, Schmithalter, Englery, & Müller, 2014)**

En este artículo presentamos los resultados de una experiencia realizada en el marco de un proyecto de investigación cuyo objetivo general es favorecer el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en estudiantes de primer año de la universidad. Diseñamos y pusimos en práctica una secuencia de actividades que permite, a partir de la construcción y/o interpretación de las gráficas de funciones, dar una descripción cualitativa y cuantitativa de las variaciones y cambios involucrados, favoreciendo la visualización y la utilización de distintas representaciones. Su resolución permitió que los estudiantes generaran ideas variacionales valiosas para una construcción significativa del concepto de función.

- **Encuentro Colombiano de Matemática Educativa**
  - **Análisis y adecuación de tareas asociadas al pensamiento variacional en libros de texto de 4° y 5° grado (Osorio, Ayola, Castro, Hilduara-Velásquez, & Cisneros, 2015)**

La comunicación reporta parte de una investigación que se lleva a cabo en el marco de la Práctica Pedagógica de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, la cual está incorporada en la modalidad de Práctica investigativa e inscrita en el grupo de investigación, Matemáticas Educación y Sociedad (MES). La investigación es de tipo cualitativo con enfoque de estudio de caso, cuyo propósito es analizar y adecuar las tareas matemáticas asociadas al pensamiento variacional que proponen algunos libros de texto. Se retoma la fundamentación teórica referida al pensamiento variacional, el razonamiento algebraico y el pensamiento algebraico. Se analiza y se proponen cambios en una tarea escolar asociada al pensamiento variacional.

- **¿Pensamiento variacional en los libros de texto?: Una pregunta que nos permite aprender como docentes (Gómez, Orozco, Benavidez, Navarro, & Guacaneme, 2013)**

  A través del estudio de tareas propuestas en libros de texto que usamos cotidianamente en el proyecto de formación "Juega y construye la Matemática", hemos reconstruido aspectos de nuestro conocimiento didáctico del contenido matemático relacionado con el pensamiento variacional e identificado, elementos asociados al desarrollo del razonamiento covariacional, no necesariamente presentes de manera explícita en las teorías que lo abordan. Esta comunicación expresa algunos de estos aspectos y elementos, como una invitación a los profesores de matemáticas, colegas nuestros, a configurar equipos de estudio y avanzar en su desarrollo profesional.

- **El pensamiento variacional: un asunto de juego y actividad matemática en la escuela (Gómez, Orozco, Benavidez, Navarro, & Guacaneme, 2012)**

  En este taller se analizan dos tareas (Tasa de cambio y Progresión geométrica) planteadas en sendas cartillas del proyecto "Juega y Construye la Matemática", para la Educación Básica Primaria y Secundaria. Con este se pretende evidenciar que el pensamiento variacional es transversal al currículo y no siempre aparece de manera explícita en la actividad matemática del aula de clase.

- **4to Seminario Taller de Educación Matemática**
  - **El estudio de la tasa de variación como una aproximación al concepto de derivada (Villa-Ochoa, 2012a)**

    En este artículo describo un estudio de casos en el cual un conjunto de cuatro estudiantes se aproximó al concepto de derivada a partir de la comprensión de la tasa de variación. Particularmente presento algunos episodios en los cuales a través del uso del software dinámico Geogebra y Modellus las estudiantes observaron la tasa de variación media y produjeron algunas ideas asociadas a la derivada como una tasa de instantánea. Los resultados de esta investigación resaltan la importancia del estudio de la derivada a través de contextos en los cuales observen la necesidad de correlacionar variables y la manera como ellas covarían. Finalmente presento una valoración sobre la pertinencia de abordar dicho estudio a través de la interacción de diferentes contextos y medios, y exhibo algunas reflexiones relativas algunos aspectos que intervienen en comprensión de la derivada desde una aproximación variacional.

- **Otros**
  - **Propuesta curricular para la introducción a las funciones representadas por polinomios de grado dos (Guacaneme & Perry, 2000)**

> Esta publicación —que es en realidad la primera versión de un documento de trabajo—está compuesta de dos partes. En la primera, se presentan los enunciados de los seis talleres y en la segunda parte, para cada uno de ellos (excepto para el último) se exponen consideraciones que pueden ser de utilidad para el estudio crítico y la comprensión de la propuesta. En dichas consideraciones hacemos referencia a la intencionalidad del taller en lo que concierne a la comprensión de los estudiantes; también incluimos consideraciones metodológicas para el desarrollo curricular y comentarios con respecto a algunas de las preguntas formuladas y a algunas posibles respuestas. Vemos imprescindible el estudio de tales consideraciones antes de la posible implementación de la propuesta.

A medida que se estudiaban las tareas propuestas en los artículos de Educación Matemática, se pudo identificar la necesidad de implementar en el aula de clase estrategias para intentar solventar serias dificultades estrechamente relacionadas con el pensamiento variacional que se exteriorizan en los estudiantes.

En esa medida los estudiosos de la corriente dan principio a propuestas para favorecer el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, con el fin de aprender sobre las características que tiene el razonamiento de los estudiantes de matemáticas en la identificación de la variación. Estas propuestas están basadas en la habilidad para razonar sobre cantidades covariantes en situaciones dinámicas, que en su gran mayoría pueden modelarse en herramientas tecnológicas como CABRI, Geogebra, Modellus, Excel, entre otras, debido a que, en su mayoría, están presentadas en un escenario geométrico que les brinda a los estudiantes la posibilidad de experimentar, visualizar y conjeturar aspectos en torno al pensamiento variacional.

Además, involucran el razonamiento, la comunicación, la representación e interpretación de la variación a través de gráficas, identificación de las variables y la elaboración de modelos. Algo adicional para tener en cuenta sobre estas situaciones es que por lo general están asociadas al estudio de funciones cuadráticas, más no implica que no se puedan hacer estudios con otro tipo de funciones.