LA INVERSA GENERALIZADA Y ALGUNAS DE SUS IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

LA INVERSA GENERALIZADA Y ALGUNAS DE SUS IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

JEASON HUMBERTO RAMÍREZ URREGO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTA, D. C
2006

LA INVERSA GENERALIZADA Y ALGUNAS DE SUS IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

Por

JEASON HUMBERTO RAMÍREZ URREGO
Código 2001140054

Trabajo de grado para optar al titulo de
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Asesor
FRANCISCO CEPEDA CORONADO
DOCTOR EN ESTADÍSTICAS ECONÓMICAS
(MECI, Moscú, Rusia)
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS U.P.T.C.
MATEMÁTICO U.N

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTA, D. C
2006

Universidad Pedagógica Nacional
Bogota D.C. Colombia

NOTA DE ACEPTACIÓN

____

TRABAJO DE GRADO

____

la presente para certificar que el trabajo de grado de pregrado
presentado por

Jeason Humberto Ramírez Urrego

Ha sido terminada como requerimiento para el titulo de Licenciado en Matemáticas en la graduación julio 17 de 2006

Comité de trabajo de grado:

____
Asesor del trabajo de grado

____
Jurado.

____
Jurado.

____
Jurado.

A Dios, a mi madre, a mis hermanos Nataly y
Carlos, a mis mejores amigos Angélica,
Edgar, Fanny y Gustavo.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la universidad pedagógica por la formación recibida y por el asesor asignado, al profesor Francisco Cepeda por haber aceptado ser mi asesor, por su preocupación, por comportarse como un amigo, por sus consejos oportunos y por la dedicación y el empeño puesto en la realización de este trabajo de grado, a mis amigos Fanny Caicedo por haberme dado el primer empujón en esto, al profesor Edgar Lozano por sus consejos y por el apoyo prestado en el desarrollo del trabajo.

Finalmente doy gracias a mi madre ya que fue ella que hizo posible que este sueño comenzara..........

RAE
RESUMEN ANALITICO

LA INVERSA GENERALIZADA Y ALGUNAS DE SUS IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

1. DESCRIPCIÓN BIBLIOGRÀFICA

[1] **Campbell S. L and Meyer Jr**. 1979, Generalized Inverses or linear transformations, Editorial Dover.

[2] **Cepeda, J. F**, 1992, La inversa generalizada o g-inversa de una matriz cualquiera., IV Jornadas de matemáticas y Coloquio Regional de Santander- UIS., Bucaramanga.

[3] **Guacaneme, J**. 1987, la g-inversa y el análisis funcional, curso de profundización. Universidad Nacional de Colombia, Bogota.

[4] **Marmolejo, A,** 1985, Aspectos geométricos de la inversa generalizada. Tesis de Especialización. Universidad Nacional de Colombia, Palmira.

[5] **Pringle R. M. and Rayner A.A.,** 1975, Generalized Inverse Matrices whit applications to statistics., Griffin London.

[6] **Peña, M.**, 1992, Estadística, Modelos y Métodos 2-Modelos Lineales y Series Temporales, Alianza Editorial S. A., Madrid, (Pág. 494).

[7] **Rodríguez, N. Y Cepeda F. J**., 1991, Apuntes de clase, curso de especialización: convenio UN/UPTC- Duitama.

A. **TIPO DE DOCUMENTO**: El presente trabajo es un trabajo de grado para optar al titulo de Licenciado en Matemáticas.
B. **TIPO DE IMPRESIÓN** Impreso.

2. **TÍTULO**: LA INVERSA GENERALIZADA Y ALGUNAS DE SUS IMPLICACIONES DIDÁCTICAS.
3. **AUTOR**: RAMÍREZ URREGO, Jeason.
4. **PALABRAS CLAVES:**

1 ***MEJOR SOLUCIÓN APROXIMADA:*** *el vector X_0 se define como la mejor solución aproximada (BAS) del sistema de ecuaciones AX-b =* $e(x)$*, si y solo si:*

1. para todo $X \in E^n$*, se obtiene la relación* $(AX-b)^t(AX-b) \geq (AX_0-b)^t(AX_0-b)$ *; y*

2. *para aquel $X \neq X_0$ tal que* $(AX-b)^t(AX-b)=(AX_0-b)^t(AX_0-b)$ *se obtiene la relación* $X^tX > X_0^tX_0$ *.*

2. MATRIZ DEFINIDA NO NEGATIVAMENTE: A es una matriz definida no negativa y simétrica A = KK' donde K es de rango columna, entonces KK' es no singular, luego la inversa de Moore-Penrose de A es:

$$A^t = K(K^tAK)^{-1}K^t = K(K^tK)^{-2}K^t$$

3. Inversa de Moore*: Una matriz G de orden $n\times m$ es la inversa generalizada de A de orden $m\times n$, si AG =* P_A *, GA =* P_G *.*

4. Inversa de Penrose*: G es la inversa generalizada de A si*

i) *AGA = A*

ii) *GAG = G*

iii) $(AG)^t = AG$ *, es simétrica.*

iv) $(GA)^t = GA$ *, es simétrica.*

La definición así dada se conoce como la "**inversa de Moore–Penrose** "; estas cuatro condiciones son usualmente llamadas las condiciones de Penrose.

5.G-INVERSA REFLEXIVA: *Una matriz G particular de g-inversa de A que satisface la condición AGA = A y GAG = G es llamada una g-inversa reflexiva de A y se nota* $\overline{A}_r$*, las condiciones pueden ser equivalentes escritas como AGA = A y R(G) = R(A).*

6. G-INVERSA O INVERSA GENERALIZADA.*: Sea A una matriz de $m \times n$ de rango cualquiera. Una inversa generalizada (o g inversa) de A es una matriz $n\times m$ denotada por* $\overline{A}$ *tal que* ***X =*** $\overline{A}$ ***b*** *es una solución de la ecuación* ***A X = b****.*

7.INVERSA DE UNA MATRIZ: *Una matriz cuadrada que tiene inversa se llama invertible. Una matriz cuadrada que no es invertible se llama singular.*

8. SISTEMAS COMPATIBLES E INCOMPATIBLES: *un sistema de ecuaciones lineales* $A_{m\times n}X_{n\times 1} = b_{m\times 1}$ *es:*

- *Compatible si admite al menos una solución.*
- *Incompatible si no tiene solución.*

En caso de existir solución para el sistema, esto es:

- *Compatible determinado si la solución es única*
- *Compatible indeterminado cuando hay infinitas soluciones.*

9. SISTEMAS EQUIVALENTES: *Dos sistemas de ecuaciones lineales compatibles son equivalentes si y solo si tiene el mismo conjunto de soluciones.*

10. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: *Dado el sistema lineal*

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

, se dice que un vector $X^* \in K^n$ *es solución del mismo si y solo si se verifica las m ecuaciones es decir* $AX^* = b$.

5. DESCRIPCIÓN:

La finalidad del trabajo es dar elementos que permitan la utilización de la G inversa, así como su concepto, a partir de un estudio riguroso y detallado.
es de anotar la importancia de este tema puesto que amplia el estudio de los sistemas lineales.
Se presenta d la siguiente manera: en el capítulo uno, se hace un breve recorrido histórico de las diferentes culturas acerca de la evolución de la resolución de los sistemas lineales, el capítulo dos, presenta un estudio detallado de algunos elementos del álgebra lineal que son necesarios para el estudio de los sistemas lineales, el capítulo tres hace un estudio detallado de la G- inversa y sus propiedades y para finalizar el capítulo cuarto aborda algunas implicaciones didácticas de dicho tema.

6. METODOLOGÍA

El trabajo de grado esta basado en una serie de trabajos cuyos autores han optado a títulos importantes (maestría, doctorado, PHD, etc.) y quienes se han interesado en el estudio de la inversa de una matriz singular.

El estudio acerca de la inversa general o simplemente g-inversa ha florecido puesto que, apareció en la década de los años cincuenta, tras numerosos trabajos que han sido desarrollados tanto en sus aspectos teóricos como también en aplicaciones.

Sorprende saber que estos tópicos de álgebra lineal, relativamente nuevos nos muestra que dicha área no está totalmente acabada; por el contrario, todavía quedan temas abiertos para el logro de aportes de los inquietos y por ende su enseñanza. Además quedan contribuciones para la aclaración.

7. CONCLUSIONES:

- A modo de conclusión, se desarrolló una teoría basada en los sistemas lineales no cuadrados y se trabajó como se hace en álgebra lineal con sistemas cuadrados, se toman entonces elementos básicos de esta rama, los cuales han sido adecuados a nuestra necesidad de trabajo para obtener como resultado la construcción de la g-inversa.

- De igual forma la importancia del presente trabajo es hacer un aporte, una propuesta que amplíe el conocimiento del álgebra lineal, basados en el estudio de los sistemas lineales. Esta propuesta se hace con la intención de popularizar la inversa generalizada de una matriz, su uso y aplicación, así como su vigencia en otras ramas de la matemática como en la estadística, los métodos numéricos, programación lineal, etc. Pero quizá la intención más importante del por qué de este trabajo es, porque acerca del tema es muy poco lo que se encuentra escrito, asequible a los estudiantes de pregrado.

- *Una inversa de cualquier tipo puede se definible de la siguiente manera: Sea A una matriz de* $m \times n$ *de rango cualquiera. Una inversa generalizada (o g inversa) de A es una matriz* $n \times m$ *denotada por* $\overline{A}$ *tal que* $\boldsymbol{X} = \overline{A}\,\boldsymbol{b}$ *es una solución de la ecuación* $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}$.

JRU
PROFESOR JURADO: HUGO CHÁVEZ - 15 MAYO 2006.
PROFESOR ASESOR: FRANCISCO CEPEDA CORONADO.

TABLA DE CONTENIDOS

	Pág
OBJETIVOS	3
JUSTIFICACIÓN..	4
INTRODUCCIÓN	5
ESTADO DEL ARTE..	7

CAPITULOS:

1. **CAPITULO PRIMERO: NOTAS HISTÓRICAS DE LOS SISTEMAS**	9
LINEALES...	9
1.1 INTRODUCCIÓN..	12
1.2 LÍNEA DEL TIEMPO DE LOS SISTEMAS LINEALES..................................	12
1.2.1 BABILONIOS Y EGIPCIOS..	13
1.2.2 GRECIA..	16
1.2.3 CHINA E INDIA..	19
1.2.4 LOS ÁRABES...	20
1.2.5 LA EDAD MEDIA...	21
1.2.6 RENACIMIENTO..	24
1.2.7 SIGLO XVII..	26
1.2.8 SIGLO XVIII...	29
1.2.9 SIGLO XIX...	
1.2.10SIGLO XX..	
	32
2. **CAPITULO SEGUNDO: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES**	
2.1.1 EXISTENCIA DE SOLUCIÓN...	33
2.1.2 INTRODUCCIÓN...	33
2.1.3 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (EXISTENCIA)................	33
2.2 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES....................	34
2.3 SOLUCIÓN DE SISTEMAS EQUIVALENTES..	39
2.3.1. SISTEMA EQUIVALENTE A UN SISTEMA DETERMINADO..........	41
2.3.2. SISTEMA EQUIVALENTE A UN SISTEMA COMPATIBLE	41
DETERMINADO CON MATRIZ DE COEFICIENTES NO	
CUADRADA..	42
2.4 MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS...	43
2.4.1. REGLA DE CRAMER..	45
2.4.2. MÉTODO DE GAUSS-JORDAN..	45
2.5 INVERSAS DE MATRICES CUADRADAS...	46
2.6 INVERSAS DE MATRICES ELEMENTALES..	47
2.7 ALGORITMO PARA CALCULAR A^{-1}...	48

3. **CAPITULO TERCERO: INVERSA DE UN MATRIZ NO CUADRADA (G INVERSA O INVERSA GENERALIZADA)**.. 51
3.1. GENERALIDADES... 51
3.2. INVERSA GENERALIZADA DE UNA MATRIZ... 52
3.3. INVERSA DE MOORE-PENROSE.. 59
3.4 ALGORITMO PARA CALCULAR LA G-INVERSA.. 68
3.5 ARBITRARIEDADES DE UN G-INVERSA... 79
3.6 MATRICES SIMÉTRICAS.. 80
3.6.1. forma diagonal.. 80
3.6.2. Matrices definidas negativamente 81
3.7 MEJOR SOLUCIÓN APROXIMADA... 83

4.CAPITULO CUARTO: PROPUESTA PARA INICIAR ELEMENTOS PROPIOS DE UNA INVERSA GENERALIZADA 86
4.1. INTRODUCCIÓN.. 86
4.2. FUNDAMENTACION CONCEPTUAL... 86
4.3. JUSTIFICACIÓN DE LA PROPUESTA 90
4.4 ELECCIÓN Y SECUENCIACIÓN DE CONTENIDOS..................................... 92
4.5. LA ACTIVIDAD 93
4.6. DIFICULTADES 93
4.7. EVALUACIÓN 93
4.8. TALLER PROPUESTO 94

BIBLIOGRAFÍA 96

OBJETIVOS

GENERALES:

1. Dar a conocer la g-inversa de una matriz cualquiera, aplicabilidad en la solución de sistemas de ecuaciones lineales no cuadrados o de rango no completo y algunas implicaciones didácticas.

2. Dar a conocer la g-inversa de una matriz cualquiera y su aplicabilidad en sistemas de ecuaciones lineales cuya solución sea compatible indeterminada.

ESPECÍFICOS:

1. Dar la definición de inversa de una matriz no cuadrada (g-inversa).

2. Deducir las propiedades de la g-inversa, a partir de las propiedades de la inversa común y de la definición de Moore-Penrose.

3. Permitir un acercamiento a los diferentes maneras de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales cuya solución sea compatible determinada.

4. Dar una solución aproximada a los sistemas cuya solución sea compatible indeterminada.

5. Mostrar algunas implicaciones didácticas que tiene la g-inversa.

JUSTIFICACIÓN

El estudio de los sistemas de ecuaciones lineales en la educación básica y en la media solo se presentan aquellos donde el sistema sea cuadrado o de rango completo y su solución se realiza mediante métodos elementales tales como igualación, sustitución y eliminación.

Por otra parte, las universidades dentro de sus contenidos en el área de Álgebra Lineal aunque con herramientas mas avanzadas (matrices, determinantes, vectores, etc...) no involucran el estudio de los sistemas lineales no cuadrados o que tengan rango no completo; por ello se hace una propuesta de trabajo dirigida o que atienda a este tipo de sistemas y más aun a la ampliación de la enseñanza de los mismos.

Dada la importancia a lo anterior y atendiendo a este cuestionamiento, el trabajo realizado es el estudio de una inversa “especial” que denominaremos inversa generalizada de una matriz cualquiera, es decir, de cualquier tipo de orden o rango, y con este tipo de estudio nos encargaremos de ampliar el conocimiento con la resolución de los sistemas lineales.

De igual forma la importancia del presente trabajo es hacer un aporte, una propuesta que amplíe el conocimiento del álgebra lineal, basados en el estudio de los sistemas lineales. Esta propuesta se hace con la intención de popularizar la inversa generalizada de una matriz, su uso y aplicación, así como su vigencia en otras ramas de la matemática como en la estadística, los métodos numéricos, programación lineal, etc. Pero quizá la intención más importante del por qué de este trabajo es, porque acerca del tema es muy poco lo que se encuentra escrito, asequible a los estudiantes de pregrado.

INTRODUCCIÓN

Nuestra consideración de la inversa de una matriz A (singular o no singular) surgió del problema de resolver un sistema de ecuaciones lineales AX = b para un vector columna X de n incógnitas, donde dicho sistema no necesariamente debe ser cuadrado o de orden $n\times n$.

El trabajo de hallar la inversa de una matriz A^{-1} (singular o no singular) consiste esencialmente en utilizar métodos descritos en el álgebra lineal que retomaremos aquí y lo adecuado de la utilización de cada uno de ellos para hallar la solución de la ecuación AX =b.

Recordemos que la noción de inversa de una matriz apareció por primera vez en 1855 en un estudio escrito por Arthur Cayley y se amplio en un articulo publicado tres años mas tarde titulado “una memoria sobre la teoría de matrices” en este trabajo, Cayley describe las propiedades básicas de las matrices, puntualizando que la mayoría se derivan del trabajo con conjuntos de sistemas lineales. En particular, la inversa procede de la idea de resolver un sistema

$$X= ax+by+cz$$
$$Y=a'x+b'y+c'z$$
$$Z=a''x+b''y+c''z$$

para x, y, z, en función de X, Y, Z. Cayley da una construcción explicita para la inversa en función de los determinantes de la matriz original y de los menores complementarios.

Mas adelante nace el concepto de **inversa generalizada** de una matriz A_{mxn} debida originalmente a E. H. Moore (1920), quien desarrollo el concepto en el contexto de las transformaciones lineales de espacios vectoriales n-dimensiónales en espacios vectoriales m-dimensiónales, sobre un campo complejo con la norma euclidiana usual.

El uso de matrices inversas Generalizadas aparece constantemente en aplicaciones estadísticas; sin embargo, su tratamiento se reduce a los lugares en donde son utilizadas resaltando “únicamente” aquellas propiedades que son necesarias para cada ejemplo concreto. Así, unas veces su aplicación responde a fines meramente pedagógicos, mientras que en otras su interés responde a facilitar los cálculos y la comprensión.

Como ejemplo de todo ello pueden citarse:

1. Método de los mínimos cuadrados y Estimación Insesgada.
2. Estimación recursiva y Mínimos cuadrados secuenciales.
3. Distribución normal Multivariante y problemas predictivos asociados.
4. Problemas relativos al análisis de la Varianza.
5. Análisis del modelo de regresión generalizada en métodos econométricos.

De acuerdo con lo anterior definimos la g-inversa de la siguiente manera: Sea A una matriz de $m \times n$ de rango cualquiera. Una inversa generalizada (o g inversa) de A es una matriz $n \times m$ denotada por $\overline{A}$ tal que **X =** $\overline{A}$ **b** es una solución de la ecuación **A X = b**.

Para comprender mejor el concepto de g-inversa el presente trabajo se estructura de la siguiente manera: en el capitulo primero se hace un recorrido histórico por las diferentes culturas acerca de la evolución de la resolución de los sistemas lineales, enfocando por cada uno de ellos sus dificultades, lo cual es una presentación del problema desde un punto de vista elemental; es decir, se trata de recordar que las civilizaciones solamente trabajaban con sistemas rango completo.

En el capitulo segundo, se hace un estudio detallado de los elementos del álgebra lineal y cómo se aborda el problema de la resolución de la ecuación AX=b, mediante métodos un poco mas avanzados, pero dejando de lado los sistemas de ecuaciones lineales rango completo, así, dejando al descubierto preguntas como: ¿cómo se resuelven sistemas de ecuaciones lineales no cuadradas?, ¿qué pasa con la solución de sistemas compatibles indeterminados?, preguntas que se trataran de resolver en capitulo tres, donde se aborda de una manera completa cómo se soluciona los sistemas de ecuaciones no cuadradas que conllevan al estudio detallado de la g-inversa.

En el capitulo cuatro se dará paso a algunas de las implicaciones didácticas que pueden resultar del estudio anterior.

A modo de conclusión, se desarrolló una teoría basada en los sistemas lineales no cuadrados y se trabajó como se hace en álgebra lineal con sistemas cuadrados, se toman entonces elementos básicos de esta rama, los cuales han sido adecuados a nuestra necesidad de trabajo para obtener como resultado la construcción de la g-inversa.

ESTADO DEL ARTE

El trabajo de grado esta basado en una serie de trabajos cuyos autores han optado a títulos importantes (maestría, doctorado, PHD, etc.) y quienes se han interesado en el estudio de la inversa de una matriz singular.

El estudio acerca de la inversa general o simplemente g-inversa ha florecido puesto que, apareció en la década de los años cincuenta, tras numerosos trabajos que han sido desarrollados tanto en sus aspectos teóricos como también en aplicaciones.

Textos clásicos como Yates y Hales (1939), ya la mencionaba sin darle una gran importancia. En 1955 cuando extendiendo resultados en las distribuciones e independencia de las formas cuadráticas en variables normales al caso cuando las variables de la matriz la transforman a una singular, encuentran un punto de estudio base, para el desarrollo de sus teorías.

Esta consecuencia hace que nazca el interés por parte de Rayner y Livingtoné, quienes en 1965, dándose cuenta que este concepto puede ser relevante y recordando el estudio hecho por Penrose (1955) demuestran el beneficio que se dará en largo tiempo.

Después, mientras en la universidad de Carolina del Norte en 1962-1963 los profesores R. C. Bose y H. J. Lucas crearon las notas que llamaron “una inversa condicionada” y a partir de ello un sin numero de trabajos que fueron discutidos y luego complementados por C. S Rohde, quien produce una tesis de inversas generalizadas. Al mismo tiempo Rao (1962) enlazo una inversa generalizada de una matriz con la distribución de una forma cuadrática en variables normales singulares, obteniendo propiedades importantes.

Se han desarrollado simposios y encuentros los cuales son enfocados a tópicos de matemáticas y estadística, estos eventos se han realizado en Texas (1968), e involucran algunas aplicaciones de la g-inversa.

Aun cuando parece que un tema conlleva al otro, por cuanto las contribuciones realizadas o logradas, han tenido como meta resolver aspectos prácticos como el auge de las optimizaciones informáticas; y la aproximación a soluciones de aspectos de vital importancia donde aparentemente el matemático ha jugado un rol significativo utilizando su creatividad en soluciones al menos teóricas, incluso sus notaciones son tan diversas según los textos que hemos encontrado, los cuales nos han servido como base o referencia.

Aunque se ha acrecentado el interés de las aplicaciones de la inversa generalizada a la estadística y las matemáticas, son pocos los trabajos hechos en cuanto en este tema por parte del pregrado.

Otros autores utilizados como referencia en este trabajo son: Ben-Israel, A.A., J, Drazing, Penrose, etc. Y autores Colombianos como Marmolejo, A. con su trabajo titulado aspectos geométricos de la g-inversa, Guacaneme, con la inversa generalizada y el análisis funcional y Cepeda, J. F, con La inversa generalizada o g-inversa de una matriz cualquiera., que son textos de especialización.

Sorprende saber que estos tópicos de álgebra lineal, relativamente nuevos nos muestra que dicha área no está totalmente acabada; por el contrario, todavía quedan temas abiertos para el logro de aportes de los inquietos y por ende su enseñanza. Además quedan contribuciones para la aclaración.

CAPITULO 1
NOTAS HISTORICAS ACERCA DE LOS SISTEMAS LINEALES

1.1 INTRODUCCIÓN:

¿Cuáles han sido los pasos a lo largo de la historia de las matemáticas que nos han conducido a los métodos de resolución de ecuaciones que hoy utilizamos, basados en la teoría de matrices y determinantes?¿Qué descubrimientos previos fueron necesarios y en que contexto se dieron?¿Cuáles fueron las motivaciones de los matemáticos, en las distintas épocas, para el estudio de los mismos?.

Si investigamos un poco acerca de estas cuestiones nos encontramos con que los orígenes del álgebra lineal son a la vez mas antiguos y muy recientes: durante la antigüedad las matemáticas centraron todos los esfuerzos en encontrar métodos para resolver ecuaciones de diferente grado, pero habrá que esperar hasta el siglo XIX para que se desarrollen métodos específicos del álgebra lineal.

breve recorrido histórico:
En las civilizaciones babilónica y egipcia ya se planteaban y se resolvían sistemas de ecuaciones de primer grado. El álgebra antigua proporciono una herramienta muy útil para resolver problemas prácticos que se planteaban en la vida cotidiana. Un ejemplo, lo encontramos en el problema 63 del papiro de Ahmes:

"*Instrucciones para dividir 700 hogazas de pan entre cuatro personas: 2/3 para la primera, ½ para la segunda, 1/3 para la tercera y ¼ para la cuarta*".

En nuestra notación seria resolver la ecuación $\frac{2x}{3}+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=700$. La solución dada por Ahmes es la siguiente:

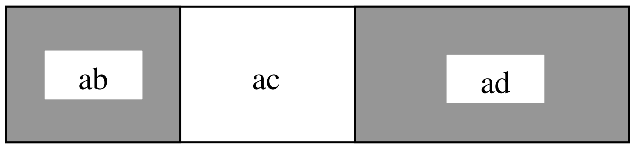
"*Suma 2/3, ½, 1/3, ¼; esto da 1 ½ ¼. Divide 1 por 1 ½ ¼; esto da ½ 1/14. ahora calcula el ½ 1/14 de 700; esto da 400 .*"

su notación se corresponde con la de los números mixtos: *1 ½ ¼;* esto da *½ 1/14* equivale a $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, etc.

Los griegos fueron los primeros en establecer que las proposiciones de la matemática deberán tener valor universal. Los problemas se formulaban en lenguaje “retórico” y se resolvían en términos de longitudes y áreas.
Así, con su “Álgebra geométrica”, resolvían correctamente ecuaciones de segundo grado y llegaron a demostrar importantes resultados algebraicos, como por ejemplo:

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad$$

que se desprende de la figura:



Los Elementos de Euclides es una obra fundamental , donde se recopilan todo el saber matemático conocido hasta entonces y en donde se da por primera vez una estructura deductiva de las matemáticas.

Hacia el final de la civilización griega, Diofanto de Alejandría da un gran paso en cuanto al lenguaje algebraico. Crea el “álgebra sincopada”, dando por primera vez un símbolo literal para representar una incógnita en una ecuación.

Pero aun tuvieron que pasar muchos siglos hasta la creación del “álgebra simbólica” que, junto con el sistema de numeración indo-arábigo, facilito enormemente los cálculos. Esto ocurría durante el renacimiento y fue obra de los algebristas italianos, sobre todo de Viéta, Cardano y Tartaglia.

En el siglo XVII Descartes y Fermat, con la introducción de los Sistemas de coordenadas, empiezan a utilizar el álgebra para resolver problemas geométricos, poniendo de manifiesto la doble conexión entre las dos ramas, Álgebra y Geometría.

Leibniz, hacia 1693, utiliza un conjunto sistemático de índices para los coeficientes de un sistema de ecuaciones, dando su solución en función de ellos. Así para escribir

$$\begin{aligned} a_1+b_1x+c_1y&=0\\ a_2+b_2x+c_2y&=0\\ a_3+b_3x+c_3y&=0 \end{aligned}$$

escribía

$$\begin{aligned}1_0 + 1_1 x + 1_2 y &= 0\\ 2_0 + 2_1 x + 2_2 y &= 0\\ 3_0 + 3_1 x + 3_2 y &= 0\end{aligned}$$

casi medio siglo después, la solución de sistemas lineales de 2, 3, 4 incógnitas por determinantes, fue descubierta "de nuevo" por Mac-laurin.

Y es a propósito del problema lineal que consiste en determinar una curva plana pasando por ciertos puntos dados, cuando Cramer y Benzout formulan la teoría de los determinantes.

Durante el siglo XVIII y comienzos del XIX, fruto de la eficiencia de los nuevos resultados se descuidan los aspectos formales. El proceso de fundamentacion no se comenzara hasta finales del siglo XIX o comienzos del XX.

La mayor parte de las nociones algebraicas de principios del siglo XIX se van organizando alrededor de tres corrientes de ideas que se desarrollan paralelas y sin influencias reciprocas importantes hasta los últimos años del siglo.

De una de ellas, en torno a 1840, se deriva el desarrollo progresivo del álgebra lineal y multilineal en sentido moderno.

Hacia 1850, Cayley en Inglaterra y Pierce en E.E.U.U. llegaron a construir el conjunto de las matrices con sus operaciones como un "álgebra".

Aunque hoy en día la idea de matriz precede a la de determinante, históricamente no fue así sino al contrario. El mismo Cayley admite haber utilizado la idea de matriz a partir de la de determinante, como una forma útil y manejable de expresar los sistemas.

Pero realmente, hasta comienzos del siglo XIX no se dio desarrollo continuo e importante en la teoría de determinantes, y esto se debió sobre todo a los trabajos de Gauss, considerado muchas veces como el punto de transición entre la época cartesiana y la moderna, ya que participa del virtuosísimo de la primera y de las geniales intuiciones del siglo XX.

El álgebra lineal continuo su desarrollo durante el presente siglo mediante sus aplicaciones a diferentes campos, impulsadas por la posibilidad de automatización de los cálculos por medio de máquinas. Entre ellas destaca la programación lineal.

1.2 LINEA DEL TIEMPO DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

1.2.1BABILONIOS Y EGIPCIOS

Para solucionar los problemas de origen práctico que se les planteaban, los **babilonios** frecuentemente tenían que resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, ecuaciones cuadráticas, cúbicas e incluso bicuadradas. Enunciaban y resolvían los problemas algebraicos sin utilizar la notación simbólica que hoy conocemos, aunque a menudo aparecen términos geométricos para designar a las incógnitas, como longitud(us), anchura (sag), área (a$\tilde{s}$a), etc.

Un ejemplo puede ser:"conocer la longitud del lado de un cuadrado cuya área menos el lado sea igual a 870".

En nuestro lenguaje, seria resolver la ecuación $x^2 - x = 870$. Con símbolos estilizados (escritura cuneiforme), representaban los números en base 10 y base 60. para resolver el problema anterior procedían de la siguiente forma: se toma la mitad de 1 que es 0; 15 (en base 60). Se suma este resultado a 14, 30 (es decir, 870 en base 60) y da 14,30; 15 que es el cuadrado de 29;30; finalmente se suma 0;30 + 29;30 = 30 que es lado del cuadrado pedido.(según la convención propuesta por Neugebauer, el ";" representa la coma decimal y la "," una serie numéricamente igual a 1/60 o 60). Es decir, para resolver una ecuación de la forma $x^2 - bx = c$, calculaban b/2, luego $(b/2)^2$ y finalmente

$$\sqrt{\left(b/2\right)^2 + c} + b/2$$

que es en realidad la actual fórmula de resolución de ecuaciones cuadráticas o de segundo grado.

Como no conocían los números negativos, cuya aceptación como tales fue muy posterior, tampoco consideraban las posibles raíces negativas de las ecuaciones de segundo grado. No obstante, no se preocupaban por justificar y demostrar las reglas utilizadas, solo se interesaban por disponer de métodos prácticos para resolver problemas concretos: el problema de que los métodos funcionaran es decir, resolvieran el problema, bastaba justificar su utilización. Llegaron a plantear sistemas de diez ecuaciones con diez incógnitas en problemas de astronomía que resolvían combinando ecuaciones.

Por su parte, el álgebra **egipcia** se centro casi exclusivamente en la resolución de ecuaciones lineales y su desarrollo fue notablemente inferior a la de los babilonios. La mayoría de los problemas que se conservan en los papiros de Rhind y de Moscú están relacionados con cuestiones cotidianas.

La solución a las ecuaciones lineales viene dada por la aplicación del método "regula falsi" o de la falsa proposición: se da un primer valor a la incógnita y se comprueba si es correcto; si no lo es, mediante proporciones se busca la respuesta correcta. En cuanto al simbolismo, utilizaban $\Lambda\_$ para la suma, $\_\Lambda$ para la resta, □ para la raíz cuadrada y a la incógnita la llamaban "aha" o montón. Manipulaban bien las progresiones aritméticas y geométricas, trabajaban con solvencia con las propiedades conmutativa y distributiva así como las fracciones.

En el papiro de Rhind, copiado por el escriba Ahmes en 1650 a. C., que parece que proviene de otro documento del Imperio Medio (2000-1800 a.C.), el llamado "problema 24" dice: "aha el total y séptima parte hacen 19", en nuestra terminología seria resolver la ecuación $x + {}^{x}\!/_{7} = 19$.

Utilizando el método regula falsi, Ahmes considera como primer valor de la incógnita el 7, y obtiene como valor de la ecuación el 8, que no es correcto. Entonces, como la proporción entre 8 y 19 ha de ser igual que entre 7 y la solución (la validez de esto esta asegurada por la linealidad de la expresión), y como 8(2 + ¼ + 1/8)=19 (en realidad expresan 3/8 = ¼ + 1/8), habrá que multiplicar 7(2 + ¼ + 1/8)=16 + ½ +1/8 para saber el valor de aha.

1.2.2 GRECIA.

Fueron los griegos los que llevaron las matemáticas a su mayor esplendor. A partir de las interesantes aportaciones de las civilizaciones anteriores, los griegos construyeron una cultura original que es la base de nuestra moderna cultura occidental las civilizaciones anteriores a la griega consideraban la naturaleza como algo caótico y misterioso. Con los griegos aparece una nueva actitud frente a la naturaleza. Se considera su estudio desde un punto de vista racional y critico, y ven en ella algo ordenado que funciona según un plan, centrado su interés en descubrirlo.

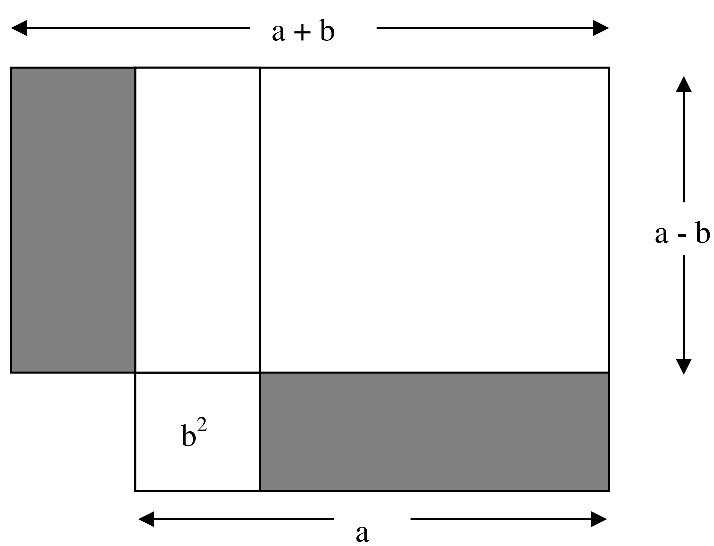
Su gran contribución a la matemática fue construirla como un auténtico saber deductivo, una disciplina organizada con una estructura lógico-formal que permitía deducir proposiciones verdaderas a partir de otras evidentes por si mismas o anteriormente construidas.

En cuanto al desarrollo de las matemáticas en la civilización griega, se pueden distinguir dos períodos: el clásico (600 a.C-300 a. C) y el alejandrino o helenismo (300a.C–600 d.C).

Durante el primer período, el pensamiento matemático griego estaba completamente alejado de las necesidades prácticas. Los procesos de abstracción y las demostraciones por deducción que utilizaban en sus razonamientos fueron fundamentales, siendo Pitágoras (discípulo de Tales) y su escuela (siglo VI a. C.) los primeros en dar este enfoque.

Los pitagóricos utilizaban el artificio de las aplicaciones geométricas en sus demostraciones, es decir, transformar las figuras geométricas en otras distintas de la misma superficie. Este planteamiento dio lugar a lo que actualmente se conoce con el nombre de “álgebra geométrica”. Con estos métodos resolvían ecuaciones de segundo grado y demostraban propiedades e identidades algebraicas de forma sencilla.

Por ejemplo, la identidad $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ se desprende de la siguiente figura:



En el período alejandrino se acercaron mas a la realidad, tratando de resolver problemas prácticos y técnicos, haciendo de esta forma una “ciencia” mas cuantitativa y proporcionando con ello el desarrollo de la aritmética y el álgebra.

Es entonces cuando aparecen Euclides y sus “Elementos”, cuyo contenido es una recopilación del saber matemático hasta ese momento. La exposición y desarrollo se hace partiendo de sus mismas bases, de forma que cada verdad se deriva de otra anterior.

El hecho de que careciesen de un lenguaje simbólico adecuado para el álgebra supuso un obstáculo en el desarrollo de sus matemáticas. Si consideramos el álgebra como el cálculo con números genéricos, su evolución en el período griego podemos dividir en dos fases.

La primera, el álgebra de las palabras o álgebra retórica, muy utilizada por los griegos buscaba expresarse a través del lenguaje común para resolver cualquier tipo de problema. Ayudándose con las construcciones geométricas llegaron a obtener las soluciones irracionales de las ecuaciones bajo forma de segmentos bien definidos, aunque era imposible resolver ecuaciones de grado superior a dos.

En una segunda, llamada “álgebra sincopada”, se sustituían con abreviaturas una serie de operaciones, magnitudes y conceptos de uso frecuente, pero manteniendo la estructura verbal de la frase. El gran innovador fue Diofanto de Alejandría, que lo utilizo en el estudio y la resolución de ecuaciones. Asigna una letra para la magnitud desconocida, la sigma σ de final de palabra, ya que las demás letras se utilizaban para números concretos. Las sucesivas potencias de la incógnita las expresa con las iniciales de las palabras que indican dichas potencias, añadiéndole como exponente la γ igual a todas.

$$x^2 \ es \ \Delta^\gamma$$
$$x^3 \text{ es } \mathrm{K}^\gamma$$

la suma la representa poniendo los términos uno a continuación del otro, y la resta por ƛ. Agrupa los términos uno a continuación del otro y los coeficientes, que siempre son números concretos, los escribe después de la potencia de la incógnita. Así por ejemplo:

$$K^{\gamma}\overline{\alpha}\sigma\overline{\eta}\text{ƛ}\Delta^{\gamma}\overline{\varepsilon}\overset{\circ}{M}\overline{\alpha} \text{ significa } x^3+8x-5x^2-1$$

los griegos clásicos no consideraban productos de mas de tres factores, por carecer de sentido geométrico. Diofanto lo considero en una base puramente aritmética donde si tienen pleno sentido. Su álgebra sincopada supone pues un gran avance hacia la consecución del lenguaje algebraico tal y como lo conocemos hoy en día.

La actividad matemática de los antiguos griegos era conceptual y lógica. Se pensaba y se hablaba algebraicamente pero, hasta Diofanto, no se escribía el álgebra o se hacia en forma literaria. La nueva notación, además de permitir una escritura mas simple de las matemáticas, constituye un conjunto de símbolos de conexión y ordenes operativas con vida propia. Se unen para formar un algoritmo y funcionan según unas reglas muy sencillas. Aunque Diofanto no había creado un verdadero algoritmo, si habría iniciado el camino hacia una verdadera escritura algebraica.

En cuanto al contenido de sus trabajos, Diofanto trataba cada problema aisladamente, sin pensar en reglas generales que permitieran resolver otras cuestiones semejantes. Aun así, formuló una regla general para la resolución de ecuaciones. Solo considera las soluciones positivas y racionales. No acepta, como casi todos los griegos, las magnitudes irracionales como números, lo que forzó la distinción entre numero y magnitudes y, en consecuencia, el álgebra y la geometría fueron estudiadas de forma completamente independiente.

La característica mas interesante de los trabajos de Diofanto es su forma de resolver ecuaciones indeterminadas: si las raíces son irracionales, prueba que modificando la ecuación se puede obtener otra con raíces racionales; reduce distintos tipos de ecuaciones a otras de manejo mas sencillo, eligiendo adecuadamente la incógnita.

Por ejemplo para calcular dos números tales que la suma de cualquiera de ellos con el cuadrado del otro de un cuadrado perfecto.

Diofanto considera dichos números como x y 2x + 1 , porque $x^2+(2x+1)=(x+1)^2$. Además $x+(2x+1)^2$ ha de ser también un cuadrado perfecto, en este caso elige $(2x - 2)^2$ por ser la expresión mas sencilla que garantiza soluciones racionales y positivas, de forma que: $x+(2x+1)^2=(2x-2)^2$ entonces, x = $\frac{3}{13}$ y 2x +1 = $\frac{19}{13}$ y en lugar de operar con dos incógnitas, y por consiguiente con dos ecuaciones, le va imponiendo a la incógnita soluciones sucesivas de forma que solo trabaja con una.

En resumen, en la época de Alejandría no existía ninguna base axiomática sobre la que se pueda construir un conocimiento algebraico deductivo. Las demostraciones deductivas y ordenadas de Euclides y Apolonio no se consideraban en este ámbito, los problemas eran inductivamente y se buscaban soluciones concretas a los mismos. Esto supuso una barrera para la evolución del álgebra, pues había aparecido como una parte independiente dentro de las matemáticas, pero sin una estructura lógica que la sustentara. El rigor deductivo se refería solamente a la geometría ya si se mantuvo hasta los siglos XVII y XVIII cuando el álgebra y el calculo ya se habían extendido.

1.2.3 CHINA E INDIA

En **China** se utilizaron en principio dos sistemas de notación, uno multiplicativo por grupos y otro posicional (este ultimo fue la base de nuestro actual sistema de numeración). El primero permitió utilizar desde muy antiguo el ábaco como instrumento de calculo rápido.

Respecto al álgebra, en uno de los documentos mas antiguos que se conocen, “El arte matemático en nueve secciones” (Zhui Suan Shu, siglo III a.C), ya utilizaban la regla de la falsa posición, los cuadrados mágicos como ordenaciones singulares de números, y además se encuentra un esbozo del método matricial para la resolución de sistemas de ecuaciones.

Por ejemplo, dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{array}\right\}$$

escriben la matriz de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}$$

y mediante operaciones sobre columnas, se obtienen:

$$\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \qquad \begin{aligned} 36z &= 99 \\ 5y + z &= 24 \\ 3x + 2y + z &= 39 \end{aligned}$$

de fácil solución.

Aunque en general no se aceptaban los números negativos como posibles soluciones de ecuaciones, en algunos problemas se recurre a ellos, llamando al número positivo "cheng" y al negativo "fu" e indicados con rojo y negro respectivamente en el ábaco. También resuelven ecuaciones cuadráticas e indeterminadas. En este período las matemáticas chinas se parecen mucho a las egipcia y babilónica, en el sentido de mas que tratados sistemáticos lo que hacen son colecciones de problemas concretos.

Hacia el siglo XII un matemático chino llamado Chu Shih-Chieh escribe dos obras de gran importancia para el álgebra, en donde se ocupa de la resolución de los sistemas de ecuaciones y de ecuaciones individuales elevadas hasta la decimocuarta potencia. El método, llamado por el "fan fa", es equivalente al método Horner, que consiste en *resolver ecuaciones por aproximación:* haciendo transformaciones sucesivas de la ecuación se obtienen aproximaciones, a menudo decimales, de las raíces.

Por ejemplo, para resolver la ecuación $x^2 + 252x - 5290 = 0$ *obtiene, por aproximación x = 19; es decir, tiene una raíz entre 19 y 20, entonces hace la transformación y = x-19 y obtiene una nueva ecuación* $y^2 + 290y - 143 = 0$*, de donde y (y + 290)=143, es decir y = 143/(y + 290), con una raíz entre 0 y 1; estimando para el denominador y = 1, que garantiza una nueva aproximación por defecto, el valor aproximado de la raíz es y = 143/(y + 290). Por lo tanto, el valor buscado de x es 19 + 143/291.*

Con respecto a la matemática en **India,** es de resaltar la gran influencia que ejercieron los griegos sobre ella. A pesar de ello, como los matemáticos hindúes utilizaban el álgebra para resolver problemas habituales del comercio, los descubrimiento en este campo se deben mas a azares en su práctica que a un planteamiento profundo de las matemáticas.

A partir del siglo III a.C aparecen en la india los símbolos para los números del 1 al 9, pero ninguno para el cero. Mas adelante (hacia el año 600) realizan la mayor aportación a la historia de las matemáticas con la notación posicional en base diez, y el cero fue ya considerado como un número a todos los efectos. Con el perfeccionamiento del sistema posicional llegaron a abordar de una forma mas clara y sencilla que otros pueblos las opresiones aritméticas. Además introdujeron los números negativos para indicar las deudas, aunque no los aceptaban incondicionalmente ya que no podían considerarse como soluciones para determinados problemas. También comenzaron a utilizar los irracionales y a operar con ellos métodos correctos, puesto que no daban importancia a las cuestiones filosóficas que tanto pesaron en la matemática griega.

En cuanto al lenguaje algebraico, utilizaban símbolos para describir las operaciones, y para las incógnitas tenían palabras que deducían colores: la primera se llamaba la incógnita las restantes negro, azul, amarillo, etc. Este lenguaje, con el que escribían los problemas y sus soluciones, nos permite clasificar su álgebra como cuasi simbólica.

En el siglo VI aparecen, en la obra de Arybhata, las formulas de la suma de progresiones aritméticas, de la resolución de ecuaciones de segundo grado y de ecuaciones lineales indeterminadas con dos incógnitas, y se observa como a menudo utilizaba las fracciones continuas.

Aproximadamente en el siglo VII vivió en la india el matemático Brahmagupta, cuyas aportaciones al álgebra fueron mas importantes que a otras ramas de la matemática. Sabia que las ecuaciones cuadráticas tiene dos raíces y consideraba como tales las negativas y las irracionales. En la resolución de ecuaciones indeterminadas surgidas de problemas de astronomía consideraba todas las soluciones enteras. Fue el quien dió una solución general a la ecuación diofantica lineal (aquellas en las que solo buscan soluciones enteras, si bien Diofanto consideraba las racionales) $ax + by = c$, con a, b, c enteros: para que tenga soluciones enteras, el máximo común divisor de a y b ha de dividir a c; entonces, las soluciones de la ecuación viene dadas por $x = p + mb$, $y = q - ma$ donde m es un entero arbitrario y p y q una solución particular. De esta misma forma escribimos hoy el conjunto de soluciones de un sistemas indeterminado.

1.2.4 LOS ARABES:

Eran un pueblo sensible y culto, con marcadas facultades matemáticas y lógicas que, tras finalizar sus conquistas, les llevaron a recoger la herencia cultural de la antigua Grecia, Persia y Babilonia, y posteriormente la hindú, y a estudiarla, haciendo las primeras traducciones de los autores griegos. Con su intuición y su sentido de la magia llegaron al arte del cálculo mas elevado, *el algoritmo* y al álgebra con toda su simbología.

Su primera aportación importante a la historia de las matemáticas se produce en el 1800 con la obra de Mohammed ibn Musa llamado Al-Khowarizmi debido a su región de origen de donde proviene el término algoritmo. Escribió, entre otras cosas, “Al-jabrwa’l muqabalah”, de cuyo titulo proviene la palabra álgebra, su contenido matemático es básico, con las operaciones aritméticas elementales formuladas en un sistema de escritura de los números conforme a ciertos valores de posición. Recoge el sistema decimal posicional indio, que permite escribir cualquier número, grande o pequeño, de forma inequívoca y fácilmente comprensible, con diez signos. este sistema de numeración se convertirá en un instrumento de gran avance para las matemáticas en general y el cálculo en particular que llegaría hasta las actuales calculadoras, donde el algoritmo se efectúa a través de un automatismo total.

En cuanto al lenguaje algebraico, la obra de Al-Khowarizmi representa un paso atrás respecto al álgebra sincopada de Diofanto puesto que vuelve al álgebra retórica en el planteamiento y resolución de los problemas. Llamaba “chai” (cosa), m$\bar{a}$l y k$\bar{a}$b a la primera, segunda y terceras potencias de la incógnita respectivamente. Posteriormente, unos autores expresaban las potencias superiores según el principio multiplicativo.

Al-Khowarizmi resuelve la ecuación cuadrática mixta $x^2+21=10x$ con el actual método de resolución, $10/2 \pm \sqrt{(10/2)^2-21}$ pero no considera las posibles soluciones negativas, y da por imposible la solución imaginaria. Aunque calcula las soluciones algebraicamente, trata de demostrarlo con métodos geométricos, influenciado claramente por el álgebra geométrica de los griegos.

Al igual que los hindúes, los árabes operan fácilmente con los números irracionales. Resolvieron también algunas ecuaciones indeterminadas de segundo y tercer grado, así como estudiaron la ecuación $x^3+y^3=z^3$ sin llegar a resolverla. Omar Khayyam (1050-1122 aproximadamente) aborda la resolución de las ecuaciones de tercer grado a partir de complicados artilugios que implican la utilización de dos tipos diferentes de cónicas. Consideraba que el álgebra no ha de ser concebida como un truco para tener la soluciones de las incógnitas, sino que corresponden a hechos geométricos. De esta forma intuye la *relación entre álgebra y geometría,* que será formulada posteriormente por Descartes y Fermat. Además, esta visión de la geometría mediante el álgebra posibilitará el gran avance de la trigonometría en las matemáticas árabes.

Los árabes cultivaron las matemáticas sobre todo para poder utilizar sus resultados en otras ciencias (astronomía, astrología, etc) no por su valor intrínseco su objetivo era llegar a dominar la naturaleza, no a comprenderla, como en el caso de los griegos.

1.2.5 LA EDAD MEDIA :

Las aportaciones de los árabes y de los hindúes produjeron cambios en el carácter de las matemáticas que fueron determinadas para su posterior desarrollo. La notación posicional, la notación de números negativos y la utilización de los irracionales, además de mejorar notablemente la aritmética, facilitaron un mayor desarrollo del álgebra.
Los hindúes, sobre todo, daban a sus trabajos con ecuaciones unas bases mas aritméticas que geométricas, como lo habían hecho los egipcios y babilonios, dejamos de lado la tradición geométrica griega. Por lo tanto, sus trabajos recondujeron el álgebra a sus propios orígenes y las hicieron avanzar en ese camino.

El estudio de las “ciencias” en estas civilizaciones están orientados a sus aplicaciones prácticas, a igual que en la greco-alejandrina del final del mundo griego, por lo tanto era lógico que se inclinaran más por el desarrollo de la aritmética y del álgebra ya que la geometría establecida por los griegos era de carácter deductivo y cualitativo.

Nos encontramos entonces con dos conceptos de matemáticas independientes. Por un lado, el conocimiento lógico y deductivo que constituía la geometría, y por otro el conocimiento empírico o heurístico, orientado hacia la práctica, que constituía la aritmética y el álgebra. Esta desconexión entre saber explicativo propio de los filósofos y el saber descriptivo-predictivo propio de los navegantes, astrólogos y confeccionadores de calendarios, es una de las características del conocimiento clásico y medieval, en contraposición con la ciencias modernas donde no se produce esta separación.

En la alta edad media (400-1100) la iglesia dominaba en Europa, la Teología es la cuna de todo el conocimiento. La curiosidad por la naturaleza, por los fenómenos y problemas del mundo físico eran consideradas frívola y si valor. De esta forma se produce un estancamiento en la evolución de las matemáticas, ya que para que tal desarrollo se produzca, la atmósfera más adecuada es una *combinación de intereses del mudo físico y el estudio de la ideas que ellos generan.*

Con el incremento del comercio con oriente y las Cruzadas se empieza a conocer la cultura griega. Desde las primeras universidades los intelectuales europeos, admirados por las ideas trasmitidas en las obras griegas que además de traducir reinterpretaban con gran iniciativa creadora, fueron progresivamente tomando una postura racionalista hacia la naturaleza, y empezaron a ver la necesidad de las matemáticas para el estudio de las misma.

Habían empezado a afirmar la supremacía de la razón humana en su visión del mundo, así como *la importancia de la observación y de la experimentación,* Roger Bacon fue uno de los pensadores mas influyentes en esta nueva visión sobre el conocimiento. Para él, las matemáticas era la base de toda ciencia y ofrecían la verdad sobre la naturaleza. Reconoce la importancia de la experimentación como método de investigación, además de una comprobación valida de los resultados obtenidos por cualquier otro método.

A principios del siglo XIII Leonardo de Pisa, llamado también Fibonacci escribía su “Liber Abasi” tomando como referencia la obra de Al-Khowarizmi. Con él extendió el uso de la numeración árabe, solo conocida hasta entonces en los monasterios, así como los métodos de cálculos hindúes con enteros y fracciones, raíces cuadradas y cúbicas. Resolvió ecuaciones determinadas e indeterminadas de primer y segundo grado. Su notación es retórica, utilizaba las palabras “res” y “radix” para la incógnita, “cenus” y “cubus” para su cuadrado y cubo respectivamente, las potencias superiores con el principio aditivo.

En el siglo XIV Nicolás de Oresme, en su libro “tratado sobre las dimensiones de las formas” plantea como tales dimensiones las primeras coordenadas generales, siendo un claro precursor de Descartes, en este tratado se encuentran ya verdaderas intuiciones de lo que posteriormente, tras varios siglos de estancamiento, se convertiría en el *concepto de función,* así como de se representación gráfica, que será un instrumento fundamental en toda la evolución matemática. En su obra también aparece la insinuación sobre exponentes fraccionarios.

1.2.6 RENACIMIENTO

Con la invención de la imprenta en el siglo XV comienza la difusión masiva de las ideas científicas y filosóficas. Durante este siglo y el siguiente los intelectuales dan un nuevo enfoque a su actividad. La naturaleza es racional, simple y ordenada, y actúa según unas leyes inmutables. Buscaban nuevas bases las van a obtener con las matemáticas.

La actividad polifacética de los artistas, artesanos e ingenieros obligó a una mayor conexión entre ciencia y técnica, para poder resolver los problemas que se les presentaban. Entre los científicos se produjo un aumento gradual de la observación y experimentación sistemáticas, usando la teoría para dirigir sus experimentos.

En cuanto a las matemáticas, este ímpetu en el desarrollo científico preparo el camino para el nacimiento de las matemáticas moderna. Las matemáticas se separan de la filosofía para unirse a las ciencias físicas y evolucionaran a partir de los problema que éstas le plantean.

El renacimiento se caracterizó especialmente por el desarrollo de álgebra, como una continuación de la tradición medieval. En la obra de Chuquet "Le triparty en la sciencedes hombres" (1484), se encuentran las bases del futuro lenguaje matemático. Establece ya una notación y unas reglas operacionales con símbolos que permitirán un tratamiento puramente algebraico de las ecuaciones y sistemas. Además, utiliza por primera vez los números naturales para designar las potencias de la incógnita. Así por ejemplo, escribe:

6^1 con 10^1 hacen 16^1, que en nuestra notación sería $6x+10x=16x$
8^2 con 12^2 hacen 20^2, que en nuestra notación sería $8x^2+12^2=20x^2$
10^1 con m 16^1 hacen m 6^1,que en nuestra notación seria $10x-16x=-6x$

Aunque no fue suficientemente valorado en su momento, por primera vez se da un modelo de lenguaje algebraico capaz de funcionar por sí solo. Para sus contemporáneos, el desarrollo del álgebra seguían basándose en la aritmética. Se aceptaba el cero y los números irracionales se utilizaban con la libertad, aunque no estaba claro si tales expresiones eran realmente expresiones eran realmente números.

Respecto a los números negativos, algunos los consideraban como coeficientes de ecuaciones pero no como raíces de las mismas. Girad les daba el mismo tratamiento que a los positivos y los consideraba como raíces de las ecuaciones de segundo grado. Cardano los admitía como raíces de ecuaciones, pero para él eran soluciones imposibles.

Los números complejos son utilizados para obtener raíces reales de ecuaciones de tercer grado, y aunque en este periodo no se llega a su auténtica comprensión, Bombelli ya formula las cuatro operaciones elementales con ellos en el libro I de su "Álgebra", y los llamará "más de menos" (piu di meno) y "menos de menos" (meno di meno).

Los métodos de cálculo con números reales se fueron mejorando y extendiendo. El uso de las fracciones continuas, ya utilizadas por los hindúes para resolver las ecuaciones lineales indeterminadas, se generaliza. Así, Bombelli las utiliza para aproximar raíces cuadradas, por ejemplo.

Surgen escuelas de matemáticos en distintos países europeos, sobre todo en Italia, Francia, Alemania e Inglaterra, y en sus trabajos empiezan a aparecer los signos actuales: + , -, x , < , >, ( ) , $\sqrt{\ }$, y también el signo =, (debido a Recorde que decía: "nada hay tan igual como las líneas paralelas"). Pero fue Vieta, directamente inspirado en la obra de Diofanto, el primero en introducir las letras sistemáticamente como *coeficientes generales* en expresiones algebráicas (aunque sólo para números positivos). Utilizaba las vocales para representar magnitudes no conocidas y las consonantes para las conocidas. *De esta forma se plantea por primera vez la diferencia entre el concepto de parámetro y la idea de incógnita.* A pesar de todo, su álgebra sigue siendo básicamente sincopada más que simbólica, ya que todavía utiliza muchas palabras y abreviaturas. Por ejemplo, escribía "A cubus" para A^3 (aunque Harriot ya lo indicaba como AAA*).* Stevin fue el primero en poner los exponentes con números encerrados en círculos, extendiéndolo a los exponentes fraccionarios que indicaban raíces.

Vieta separó claramente la aritmética, que trata de números, del álgebra, a la que consideró como un *método para el estudio de tipos y de formas de ecuaciones generales.* Fue el primero en escribir, como fórmulas, expresiones matemáticas enteras, uniéndolas mediante símbolos operacionales. Trató de establecer las identidades algebráicas ocultas en las formas geométricas de los griegos, completó el cuadrado de una expresión cuadrática general y expresó identidades del tipo $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$. Posteriormente, fue Hudde quien empleó también letras para los números negativos.

El "Ars Magna" de Cardano se puede considerar como el primer tratado sistemático sobre la teoría de ecuaciones en la historia. Es la obra que separa claramente el álgebra práctica, vinculada a las operaciones mercantiles, de la especulación algebraica abstracta.

En el siglo XVI Ferro resolvió ecuaciones del tipo $x^3+mx=n$ *,* aunque tardó en dar a conocer su método. Más adelante, Tartaglia y Cardano mantuvieron durante algún tiempo una viva polémica acerca de cuál fue el primero en dar solución a dichas ecuaciones.

Más tarde Cardano probaría geométricamente que las soluciones calculadas eran correctas y generalizaría el método.

Todos estos resultados constituyeron un gran estímulo para la investigación algebraica. Al intentar generalizados para ecuaciones polinómicas de grado superior a cuatro se llegaba a conclusiones intermedias muy interesantes.

1.2.7 SIGLO XVII

A partir de aquí el estudio de las ecuaciones se centró por un lado en la resolución de las de grado mayor que cuatro y por otro, en el estudio del número de soluciones positivas, negativas y complejas, así como en el estudio de las relaciones entre las raíces y los coeficientes de una ecuación.

Descartes enunció un importante resultado, conocido como "teorema del factor*":f(x)* es divisible por *x-a,* con *a* positivo, si y sólo si *a* es raíz de *f(x)* = 0, y por *x* + *a* si y sólo si a es una raíz falsa (negativa). De esta forma estableció el método usado hoy en día para hallar las raíces racionales de una ecuación polinómica: se va reduciendo el grado de la ecuación y se trabaja con ecuaciones de grado cada vez menor. Se enuncia por primera vez que el grado de una ecuación polinómica determina su número de raíces.

Descartes introduce también el criterio de los coeficientes indeterminados para descomponer un polinomio en factores lineales; por ejemplo:

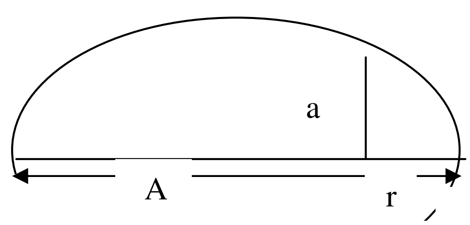
$$x^2-1=(x+b)(x+d), \text{ es decir } x^2-1=x^2+(b+d)x+bd$$

igualando coeficientes obtenemos $b + d = 0$ y $bd = -1$, de donde se deducen fácilmente los valores de *b* y *d.*

Durante el siglo XVI y parte del XVII los matemáticos *buscaban el significado geométrico equivalente de cada desarrollo algebraico* para justificado. Sin embargo Vieta y Descartes empezaron a *utilizar el álgebra para resolver problemas de construcciones geométricas,* y de esta forma la relación entre ambas se invirtió.

En el "Isagoge" de Vieta aparece el ejemplo: dadas el área de un rectángulo y la razón de sus lados, hallar los lados.

Si *A* es el área, a el lado mayor y $r = a/b$ la razón del lado mayor al menor, entonces el lado menor es $b = a/r$, $A = a.b = a^2/r$ entonces $A.r = a^2$ y así construye a con regla y compás a partir de *A* y *r.*



Este fue el punto de partida de los trabajos de Descartes sobre geometría analítica, cuyo interés en teoría de ecuaciones es el de utilizarlas para la resolución de problemas geométricos.

Ve en el álgebra un poderoso *método de guía del razonamiento con cantidades desconocidas y abstractas,* que ha de preceder a las demás ramas de las matemáticas. Buscó un álgebra independiente y sistemática, sin un significado concreto, como una técnica de cálculo. Es decir, el álgebra sería una ciencia de las magnitudes muy general que se podría aplicar a las otras ciencias, en particular a la geometría. Su álgebra simbólica es prácticamente la que se utiliza actualmente. Ya utilizaba las primeras letras del alfabeto para los parámetros constantes y las últimas para las incógnitas o variables.

Con Descartes pierde consistencia el concepto de dimensión, presente en toda el álgebra geométrica de los griegos y que había supuesto una barrera para el desarrollo del álgebra puesto que impedía considerar potencias mayores que tres. Para él todas las potencias de la incógnita se representan como longitudes (obsérvese como en el anterior ejemplo de Vieta se manejaba ya esta idea).

La consecuencia de todo esto fue el establecer el álgebra como una rama de las matemáticas independiente de la geometría. De hecho, Wallis en su "Álgebra" (1685) dedujo algebraicamente todos los resultados del Libro V de Euclides.

El desarrollo de estas ideas conduciría a uno de los mayores descubrimientos de esta época, la geometría analítica de Descartes y Fermat, cuya idea central es la de asociar ecuaciones algebraicas a curvas y superficies.

Fermat, aparte de sus contribuciones a la teoría de números, enuncia un principio general con el propósito de hacer un estudio de los lugares geométricos: "siempre que en una ecuación “se hallen dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico cuyo extremo describe una línea recta o curva", llegando a afirmar que toda ecuación de grado uno tiene como lugar geométrico una recta y las de grado dos tienen cónicas como lugares geométricos.

Aunque la palabra coordenadas no se utiliza hasta que lo hace Leibniz, Descartes fue el primero en usar lo que llamaba "líneas fundamentales". Fijó arbitrariamente el origen de coordenadas sobre dos rectas que formaban un cierto ángulo, y a tales ejes refiere cualquier figura a *analizar sólo por puntos.*

La geometría analítica resultó ser una herramienta de doble uso para las matemáticas. Por una parte, los conceptos geométricos podían formularse algebraicamente. Por otra, interpretando geométricamente resultados algebraicos podían intuirse nuevas conclusiones.

A partir de la creación de la geometría analítica se empieza a desarrollar el cálculo infinitesimal como una extensión del álgebra, y de él surgirían nuevas e importantes ramas de las matemáticas.

A lo largo del siglo XVII la relación de las matemáticas con las demás ciencias se transformó notablemente. La actividad matemática, inspirada directamente por la ciencia, se convirtió en dominante. Esto se debía sobre todo a la dirección que había dado Galileo al estudio de las ciencias hacia la utilización de axiomas cuantitativos, de deducciones matemáticas. Recomendaba a los investigadores *buscar la descripción matemática de los fenómenos más que su explicación causal.*

De esta forma, a medida que la ciencia iba basándose cada vez más en las matemáticas para exponer sus conclusiones, y las matemáticas iban basándose cada vez más en los resultados científicos para justificar sus propios procedimientos, se produjo una fusión entre las matemáticas y las otras áreas que proporcionó nuevos y profundos problemas a los investigadores.

La creación de sociedades científicas o academias por toda Europa y la fundación de revistas para la divulgación de los conocimientos supuso un gran estímulo a la comunicación entre los científicos, ya que les permitía dar a conocer sus trabajos y estar al día en los descubrimientos que se iban produciendo.

1.2.8 SIGLO XVIII

Los grandes descubrimientos en el campo del análisis infinitesimal, proporcionados por la recién fundada geometría analítica, hacen que el álgebra ocupe en este siglo un papel subordinado frente al análisis.

Inspirados directamente por los trabajos de Galileo y Newton en física y astronomía, los matemáticos de este siglo tratan tanto los problemas de la ciencia como los tecnológicos, al mismo tiempo que su interés y curiosidad intelectual los conduce a nuevos descubrimientos.

La difusión y aplicación de los nuevos descubrimientos es una de las tareas más importantes que asumen los científicos de este siglo. De esta forma, proliferan manuales y tratados didácticos de las distintas ramas de las matemáticas.

Aunque ya se conocían todos los tipos de números reales y los complejos, la mayor parte de los matemáticos del siglo XVIII eran reacios a aceptar los negativos y los complejos. Respecto a los complejos, los intentos de representarlos durante este siglo, aunque correctos, no fueron muy útiles, siendo unas veces utilizados y otras evitados (son de destacar los trabajos de Wallis en su "Álgebra" (1685) donde muestra como representar las raíces reales y complejas de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ $ax^2+bx+c=0$).

Sólo con Gauss, después de demostrar su teorema fundamental del álgebra en 1799 , se le dio una interpretación geométrica clara, considerando las partes real e imaginaria pura de un número complejo *a + bi* como las dos coordenadas rectangulares de un punto en el plano. Puesto que el uso de los sistemas numéricos resultaba útil tanto en matemáticas como en otras ciencias, quedaba justificada así su existencia.

En cuanto a la teoría de ecuaciones, el tema central seguía siendo la solución de ecuaciones polinómicas de cualquier grado. Sin embargo existía otro enfoque que conduciría a la misma cuestión: para resolver integrales se utilizaba el método de descomposición en fracciones simples, lo que requería descomponer polinomios con coeficientes reales en factores lineales o cuadráticos. El problema era entonces probar que un polinomio tenía al menos una raíz real o compleja, enunciando en que se conoce como teorema fundamental del álgebra, que *ya se intuía y utilizaba parcialmente* en el siglo anterior.

Respecto a los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones, hemos de remontarnos a 1693, cuando Leibniz relata en unas cartas dirigidas a L'Hopital como utiliza un conjunto sistemático de índices para los coeficientes de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lcl} 10++11x+12y=0 & & 1_0+1_{1x}+1_2y \;=0 \\ 20+21x+22y=0 & \text{o bien} & 2_0+2_1+2_2y \;=0 \\ 30+31x+32y=0 & & 3_0+3_1x+3_2y=0 \end{array}$$

que actualmente sería

$$a_1 + b_1x + c_1y = 0$$
$$a_2 + b_2x + c_2y = 0$$
$$a_3 + b_3x + c_3y = 0$$

Al eliminar las incógnitas obtuvo una relación entre los coeficientes. Si el sistema es compatible, entonces

$$1_0 2_1 3_2 + 1_1 2_2 3_0 + 1_2 2_0 3_1 = 1_2 2_1 3_0 + 1_1 2_0 3_2 + 1_0 2_2 3_1$$

lo que con nuestra terminología sería

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Sus contribuciones en materia de notación demuestran la gran importancia que tenía para él la elección de un lenguaje adecuado a cada situación. Para Leibniz, *el tener un simbolismo adecuado ayuda a facilitar los propios procesos de pensamiento,* además de poder comunicados mejor. En su obra "Characteristica generalis" intenta la creación de un lenguaje científico universal, con sus cálculos de símbolos correspondiente, de forma que pudiera aplicarse a todas las Ciencias.

Sin embargo, debido tal vez a su excesivo interés por el análisis infinitesimal Leibniz abandonó pronto estas contribuciones al álgebra, de tal forma que casi medio siglo después la solución de sistemas lineales de 2, 3 y 4 incógnitas por el método de determinantes fue redescubierta por Maclaurin (en 1729). Su regla es la que usamos hoy en día y fue Cramer quien la publicó en 1750, intentando dar respuesta al problema de determinar la ecuación de una cónica pasando por cinco puntos dados. El determinante del sistema que resultaba era suma de productos con un solo elemento de cada fila y columna, afectados por el signo + si el número de cambios de los elementos a partir de un orden dado era par, y por - en caso contrario.

Aunque la obra de Maclaurin tuvo mucha popularidad, parece que se atendió más a las publicaciones de Cramer sobre resolución de sistemas de ecuaciones lineales, debido seguramente a la notación empleada por éste, en la que los coeficientes literales tenían superíndices, lo que facilitaba la determinación de los signos de los productos. Además, en esta época empezaba el distanciamiento de los matemáticos ingleses de sus colegas del continente, provocado por la disputa acerca de la invención del cálculo infinitesimal entre Newton y Leibniz.

En 1764 Bezout, en su libro "Curso de matemáticas" considerado como una de las obras más difundidas como libro de texto, sistematizó el proceso de determinar los signos de los términos de un determinante. Demostró también que dadas *n* ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas la anulación del determinante de las incógnitas (el resultante) es una condición para que existan soluciones distintas de la trivial.

Vandermonde fue el primero, en 1772, en dar un desarrollo coherente de la teoría de determinantes, independiente de su uso para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, y creó una regla para su cálculo usando menores.

Es interesante destacar como Bezout describe el método de la eliminación algebraica (Newton y Euler también investigaron el método) cuando busca una condición necesaria para que dos ecuaciones polinómicas de grado n tengan una solución común. Dadas dos ecuaciones de grado n

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_0 = 0$$

$$g(x) = b_n x^n + ... + b_0 = 0$$

se multiplica f por b_n y g por a_n. Y se restan. A continuación, se multiplica f por $b_n x + b_{n-1}$ y g por $a_n x + a_{n-1}$ y se restan. Después, f por $b_n x^2 + b_{n-1} x + b_{n-2}$ y g por $a_n x^2 + a_{n-1} x + a_{n-2}$, y repitiendo el proceso se obtienen *n* ecuaciones de grado *n-* cada una, que pueden considerarse como un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas de incógnitas x^{n-1}, x^{n-2}, ..., 1, cuyo resultante es el determinante de los coeficientes de las incógnitas, y nos permiten deducir las condiciones de resolubilidad de las ecuaciones originales. También generalizó el método para ecuaciones de distinto grado.

1.2.9 SIGLO XIX

Durante el siglo XVIII y comienzos del XIX se producen una gran cantidad de ideas y conceptos nuevos que originan importantes descubrimientos en las distintas áreas científicas. Los matemáticos obtienen numerosos resultados cuya validez se sustentaba básicamente en la *intuición* y sobre todo en la *eficacia de sus aplicaciones,* descuidando en gran medida su formalización.

Con Cauchy se manifiestan ya la preocupación y el gusto por el rigor en las demostraciones. A él se debe el actual tratamiento de la teoría de los determinantes. Su desarrollo es el siguiente: forma el producto de n números $a_1, a_2, ..., a_n$ por todas las diferencias posibles entre dos de ellos, es decir:

$$a_1.a_2...a_n.(a_2-a_1)...(a_n-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)...(a_n-a_2)...(a_n-a_{n-1})$$

Define el determinante correspondiente como la expresión que se obtiene al cambiar el exponente por un segundo subíndice, *(*a_r^s se convierte en a_{rs}*)* en el resultado anterior, obteniendo una expresión que escribiríamos de la siguiente manera: S ($\pm a_{1.1}a_{2.2}a_{3.3}...a_{n.n}$), y ordena los n^2 términos $a_{r.s}$ en un cuadrado:

$$\begin{array}{lllll} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \cdots & a_{1n}, \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \cdots & a_{2n}, \\ \cdots & & & & \\ a_{n1}, & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

que denomina "sistema simétrico de orden *n".* Conviene observar que hasta este momento la descripción de los determinantes es compleja en términos de índices y Cauchy la simplifica dando una definición general con el artificio descrito. Comentamos el caso $n = 3$: desarrollando la expresión

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot (a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_1) \cdot (a_3 - a_2)$$

se obtiene:

$$a_1^1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^3 - a_1^1 \cdot a_2^3 \cdot a_3^2 - a_1^2 \cdot a_2^1 \cdot a_3^3 + a_1^2 \cdot a_2^3 \cdot a_2^1 + a_1^3 \cdot a_2^1 \cdot a_3^2 - a_1^3 \cdot a_2^2 \cdot a_3^1$$

que considerando el exponente como un segundo subíndice, resulta la expresión conocida.

A principios del siglo XIX, concretamente en 1812, los jóvenes matemáticos ingleses Peacock, Herchel y Babbage, deseosos de aprovechar los importantes resultados que se habían producido en el continente, fundan en Cambridge la Analytical Society. Se comienza entonces a romper el aislamiento de un siglo de los ingleses, y surgen importantes algebristas que desarrollarán lo que será el álgebra moderna. Su intención era reformar el álgebra para intentar justificar las operaciones algebraicas efectuadas con expresiones simbólicas o literales, y elaborar una especie de estructura lógica capaz de asegurar la validez de las operaciones algebraicas.

Sylvester abordó los determinantes en el marco de la teoría de los invariantes, pues, en su opinión "¿qué es en el fondo la teoría de los determinantes?, es un álgebra sobre el álgebra, un procedimiento de cálculo que nos sitúa en condiciones de combinar y de prever los resultados de las operaciones algebraicas, de la misma forma que con la ayuda del álgebra podemos prescindir de realizar las operaciones de la aritmética".

El determinante es un "invariante" en cuanto que determina todo el sistema de soluciones de un sistema de ecuaciones y posee propiedades comunes a determinantes de otros sistemas de ecuaciones construidos de la misma forma.

Otro de los matemáticos importantes surgidos de la universidad de Cambridge fue Cayley, que se sentía inclinado al álgebra como casi todos sus contemporáneos ingleses. En su estudio de la geometría analítica ordinaria del espacio n-dimensional, casi simultáneo al de Grassmann, utiliza los determinantes como una notación clave. Usando coordenadas homogéneas, escribía las ecuaciones de la recta y del plano como se expone a continuación, y lo generaliza al hiperplano n-dimensional.

$$\begin{vmatrix} x & y & t \\ x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & x_2 & t_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix} = 0$$

En la segunda mitad del siglo XIX, al tomar posesión de su puesto como profesor en Erlangen, Felix Klein describe una geometría como el estudio de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo la acción de un determinado grupo de transformaciones, desarrollando y ampliando la teoría de Galois al respecto. El contenido de esta conferencia, llamada posteriormente Erlanger Programm, permite clasificar las geometrías a través de sus grupos de transformaciones, y en el estudio y desarrollo hecho por Cayley de este tema aparecería por primera vez la teoría de matrices. En un trabajo sobre teoría de transformaciones lineales, emplea las matrices como una notación útil y sencilla. Haciendo actuar dos transformaciones sucesivamente y en orden distinto, se encuentra que el producto de matrices no es conmutativo. Estudiando las demás operaciones y sus propiedades, concluye que el conjunto de las matrices posee una estructura de álgebra. A idénticos resultados llegarían los Pierce por su parte, en EEUU, de forma que todos estos estudios, junto con los de otras estructuras de álgebras no conmutativas, contribuyeron enormemente a crear un concepto del Álgebra como una importante rama de las matemáticas cada vez más abstracta.

El desorden en que se encontraban la mayor parte de las nociones algebraicas a principios del siglo XIX se fue clarificando poco a poco en su segunda mitad, y se fue organizando en tomo a tres corrientes de ideas.

La primera, que comenzó hacia 1840, supuso el desarrollo progresivo del álgebra lineal y multilineal en el sentido moderno, con la introducción de las transformaciones geométricas y la noción de espacio vectorial sobre *R* y C, y posteriormente sobre un cuerpo cualquiera. Hacia 1880 se formula la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales generales sobre *R* y C, se estudian los valores propios de las matrices cuadradas y la reducción de las mismas a una forma canónica, y los sistemas hipercomplejos ó álgebras.

La segunda corriente giró en tomo a la teoría de los números algebraicos surgida de la obra de Gauss, llegando a las nociones de anillo, cuerpo, módulos sobre un anillo, etc., que constituyen actualmente la geometría algebraica.

Finalmente, a partir de las obras de Galois se desarrolló la teoría de grupos, surgida del nuevo y original enfoque que proporcionó al problema de la resolubilidad de ecuaciones de grado mayor que cuatro.

1.2.10 SIGLO XX

Las aportaciones más importantes de este siglo al álgebra lineal se encuentran en sus aplicaciones: cadenas de Markov, modelos de desarrollo, teoría de juegos, la inversa generalizada de una matriz sin importar su rango, etc.

El concepto de **inversa generalizada** de una matriz A_{mxn} debida originalmente a E. H. Moore (1920), quien desarrollo el concepto en el contexto de las transformaciones lineales de espacios vectoriales n-dimensiónales en espacios vectoriales m-dimensiónales, sobre un campo complejo con la norma euclidiana usual, fue un hallazgo importante ya que se consiguió una solución aproximada a los sistemas de ecuaciones donde no necesariamente eran cuadradas.

Destacamos además la programación lineal, que surge al intentar optimizar determinadas funciones sujetas a ciertas condiciones, que aparecen frecuentemente en la vida económica, social, industrial, militar, etc., de un país. El primer matemático que intentó resolver estos problemas, en concreto, la duración de las etapas de un programa de despliegue, entrenamiento y suministro logístico de la forma más rápida y económica posible, fue el americano Dantzig como asesor de matemáticas de la Fuerza Aérea de E.E.U.U. durante la Segunda Guerra mundial.

Su método, conocido como el método simplex, es aplicado para resolver los más diversos problemas de planificación, con la gran ventaja de ser de fácil automatización, lo que permite su programación en los ordenadores y un ahorro considerable de tiempo en los cálculos. En 1958 se aplicaron los métodos de la programación lineal al cálculo del plan óptimo de transporte de arena a las obras de reconstrucción de la ciudad de Moscú. En este problema había 10 puntos de partida y 230 de llegada. Los cálculos se efectuaron en el ordenador Strena que tardó 10 días en realizarlos. En 1947 Dantzig conoce a Von Neumann y sus trabajos en teoría de juegos, en concreto el teorema dual, a través del que la programación lineal se relaciona con la teoría de juegos y amplía el planteamiento de sus restricciones a las probabilidades.

CAPITULO 2
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

2.1. EXISTENCIA DE SOLUCION.

2.1.1 INTRODUCCION

Uno de los temas matemáticos que más aplicación tiene en la vida cotidiana es el del álgebra lineal. El álgebra lineal forma parte de la base teórica de la programación lineal, las ecuaciones diferenciales, la geometría vectorial y muchas otras ramas de las matemáticas que encuentran aplicaciones en el mundo de los negocios, en los temas gubernamentales, en las ciencias naturales y sociales, etc., así como también tiene aplicaciones dentro de la misma matemática. En esta parte apenas comenzamos el estudio.

En el análisis formal de algunas cuestiones que se estudian en las distintas áreas del conocimiento, con frecuencia se utilizan sistemas de ecuaciones lineales o bien no lineales que, a menudo, son linealizables. En cualesquiera de estas situaciones interesara conocer si dicho sistema tiene o no solución y, en caso de que exista , si esta es o no única. Por ejemplo, en la discusión del modelo de equilibrio estático de un mercado es fundamental saber si existen valores de equilibrio de las variables endógenas del mercado y conocer si estas son o no únicas.

Así pues, ante un sistema de ecuaciones lineales las dos cuestiones fundamentales que se plantean son:

1. conocer si tiene solución y las características de la misma.
2. calcular la solución cuando existe.(matrices cuadradas y no cuadradas)

En esta parte del trabajo se establecen resultados que dan respuesta a la primera de estas cuestiones, pues el Teorema de Rouche-Frobenius brinda condiciones que aseguran la existencia y unicidad de la solución de un sistema lineal.

2.1.2. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES: (EXISTENCIA)

Dada la ecuación ax = b para escalares a y b reales, se dice que es una ecuación lineal que la variable tiene potencia uno. Por lo general se piensa en despejar x en la ecuación(lo cual implica en encontrar la solución de dicha ecuación), dividiendo entre a si $a \neq 0$, pero también se puede pensar en multiplicar por 1/a. Al separar la solución en pequeños pasos tenemos:

$$\left(\tfrac{1}{a}\right)(ax) = \left(\tfrac{1}{a}\right)b \text{, multiplicando por 1/a}$$

$$\left[\left(\tfrac{1}{a}\right)a\right]x = \left(\tfrac{1}{a}\right)b \text{, asociatividad del producto}$$

$$1x = \left(\tfrac{1}{a}\right)b$$

$$x = \left(\tfrac{1}{a}\right)b$$

la cual es la solución de dicha ecuación $x = a^{-1}b$.

Así mismo, un sistema de ecuaciones se dice que es lineal si todas las ecuaciones que lo componen son lineales en los escalares desconocidos o variables x_1, x_2, x_3,.... x_n, es decir son de la forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + ... + \alpha_n x_n = \beta$$

Donde α_i, i = 1, 2,...,n y β son habitualmente números reales, números complejos o funciones. así pues, en una ecuación lineal no pueden aparecer productos o potencias de x_1, x_2, x_3,.... x_n .

Por tanto, un sistema de m ecuaciones lineales y n variables o incógnitas x_1, x_2, x_3,....x_n
Es de la forma

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

que, teniendo en cuenta la notación matricial, se puede escribir **A X = b.** sustituyendo a por A y x por X .

- donde A = $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ es una matriz m×n de coeficientes de las ecuaciones del sistema.
- X^t = $\left(x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad x_n\right)$, es un vector fila 1×n de variables o incógnitas.
- b = $\left(b_1 \quad \cdots \quad b_n\right)^t$ es un vector columna m×1 de términos independientes.

Y todos ellos constituidos por elementos del mismo cuerpo K en el cual se esta trabajando.

Al intentar resolver la ecuación AX = b como en el caso de ax = b, procedemos de forma similar. La multiplicación de matrices es asociativa, y la matriz identidad I de n×n desempeña el mismo papel para la multiplicación matrices de n×n que el número 1 para la multiplicación de números. Lo crucial es hallar una matriz C de n×n tal que CA=I, de modo que C desempeñe para matrices el mismo papel que a^{-1} desempeña para números. Si existe dicha matriz C, entonces, a partir de la ecuación AX=b, obtenemos:

C(AX) = Cb Multiplicando por C
C(AX) = Cb Asociatividad de la multiplicación
IX= Cb
X= Cb, donde C= A^{-1}
X=A^{-1}b.

La única cuestión es saber cuando existe dicha matriz.

La matriz de orden $m\times(n+1)$ que se obtiene de A añadiendo como columna n + 1 el vector **b** se denomina matriz ampliada del sistema y se denota por $\tilde{A}$, esto es,

$$\tilde{A} = (\mathrm{A/b}) \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

el sistema dado en la definición se dice homogéneo cuando el vector b de términos independientes es nulo. En particular al sistema **A X = 0.**

Otra manera de expresar el sistema dado en la definición es en forma vectorial, es decir,

$$\alpha_{\bullet 1}x_1 + \alpha_{\bullet 2}x_2 + \alpha_{\bullet 3}x_3 + \ldots + \alpha_{\bullet n}x_n = \beta\,.$$

Donde, $\alpha_{\bullet j}$, j = 1, 2, ...,n es el j-ésimo vector columna de la matriz A.

Definición 1: *Dado el sistema lineal* $\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$, *se dice que un vector* $X^* \in K^n$ *es solución del mismo si y solo si se verifica las m ecuaciones es decir* $AX^* = b$.

NOTA 1: es sencillo comprobar que si X^* es una solución de un sistema de ecuaciones lineales lo es también del sistema que obtiene a partir de el por las siguientes modificaciones:

- permutar ecuaciones.
- Multiplicar una ecuación por un escalar no nulo.
- Sustituir una ecuación cualesquiera, por la suma de ella misma con otra de las ecuaciones del sistema.

Definición 2: *un sistema de ecuaciones lineales* $A_{m\times n}X_{n\times 1} = b_{m\times 1}$ *es:*

- *Compatible si admite al menos una solución.*
- *Incompatible si no tiene solución.*

En caso de existir solución para el sistema, esto es:

- *Compatible determinado si la solución es única*
- *Compatible indeterminado cuando hay infinitas soluciones.*

Definición3: *Dos sistemas de ecuaciones lineales compatibles son equivalentes si y solo si tiene el mismo conjunto de soluciones.*

Teorema 1: sea el sistema lineal compatible **A X = b.** Con $A \in M_{m\times n}$ $X \in K^n$ y $b \in K^m$. Entonces se verifica que este sistema es equivalente al sistema **BA X = Bb** siendo B cualquier matriz no singular de orden m.

Demostración: para comprobar que los sistemas de ecuaciones lineales **A X = b** y **BA X = Bb** son equivalentes basta demostrar que ambos tienen el mismo conjunto de soluciones. Si X^* es solución de $A\,X^* = b$ es también solución de **BA X = Bb.**

Recíprocamente si X^* es también solución del segundo sistema, entonces $BA\,X^* = Bb$, y como B es invertible, si se multiplica en la expresión anterior por B^{-1}, resulta $B^{-1}BA\,X^* = B^{-1}Bb$ lo cual implica $A\,X^* = b$, es decir, X^* es solución de $A\,X = b$.

Por lo tanto ambos sistemas tienen las mismas soluciones y, por ello, son equivalentes.

NOTA 2: Las modificaciones que se pueden hacer en un sistema lineal de ecuaciones consiste en:

- Permutar dos ecuaciones
- Multiplicar por un escalar no nulo
- Sustituir una ecuación cualquiera por la suma de ella misma con otra u otras de las ecuaciones del sistema.

Pueden multiplicarse ambos miembros del sistema de ecuaciones por una matriz no singular de orden adecuado. Por ello estas modificaciones, en virtud del teorema anterior dan lugar a sistemas de ecuaciones equivalentes.

Teorema 2:(Rouche-Frobenius)

Dado un sistema lineal con m ecuaciones y n incógnitas, A X = b donde la matriz de coeficientes A es de orden $m \times n$ y la matriz ampliada $\tilde{A}$ =(A/b) es $m \times (n+1)$, se verifica que

i. El sistema es incompatible si y solo si rang(A) $\neq$ rang($\tilde{A}$) .

ii. El sistema es compatible si y solo si rang(A)=rang($\tilde{A}$); siendo además compatible determinado si rang(A) = rang($\tilde{A}$) = n e indeterminado cuando rang(A) = rang($\tilde{A}$) $<$ n.

Demostración:

1. En primer lugar se muestra que un sistema es compatible si, y solo si, rang(A) = rang($\tilde{A}$) entonces las matrices A y $\tilde{A}$ tienen el mismo numero de columnas linealmente independientes y, por tanto, dada la definición de $\tilde{A}$, esclaro que el vector b es linealmente dependiente de los vectores columna de A. por ello b se puede escribir como combinación de los vectores $a_{\bullet 1}, a_{\bullet 2}, a_{\bullet 3}, \ldots, a_{\bullet n} = b$, es decir, existen escalares $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_n^* \in K$ tales que

$$a_{\bullet 1}x_1^* + a_{\bullet 2}x_2^* + a_{\bullet 3}x_3^* + \ldots + a_{\bullet n}x^*_n = b$$

lo cual significa que al menos $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_n^*)$ es una solución del sistema A X = b. Recíprocamente si se supone que existe $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_n^*)$ solución del sistema, entonces por definición de solución b es combinación lineal de vectores columna A. así pues, los conjuntos $\{a_{\bullet 1}, a_{\bullet 2}, a_{\bullet 3}, ..., a_{\bullet n}\}$ y $\{a_{\bullet 1}, a_{\bullet 2}, a_{\bullet 3}, ..., a_{\bullet n}, b\}$ tienen el mismo numero de vectores linealmente independientes y por ello, rang(A) = rang($\bar{A}$).

Por lo tanto queda probado que un sistema de ecuaciones lineales es compatible (incompatible) si y solo si rang(A) = rang($\bar{A}$) (rang(A) $\neq$ rang($\bar{A}$)).

2.un sistema es compatible determinado si y solo si rang(A) = rang($\bar{A}$) = n .

En efecto si rang(A) = rang($\bar{A}$) = n , entonces los vectores columna de A son una base de un espacio vectorial de dimensión n, al cual pertenece b. así pues, el vector X^* constituido por las coordenadas de b respecto de dicha base, es la única solución del sistema, pues todo vector respecto de una base tiene coordenadas únicas.
Recíprocamente, si suponemos que el sistema es compatible determinado y rang(A) $<$ n, entonces existirán escalares $\alpha_{\bullet 1}, \alpha_{\bullet 2}, \alpha_{\bullet 3}, ..., \alpha_{\bullet n} \in K$ no todos nulos tales que

$$a_{\bullet 1}\alpha + a_{\bullet 2}\alpha + a_{\bullet 3}\alpha + ... + a_{\bullet n}\alpha = 0$$

por otra parte, por ser el sistema compatible, existe $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, ..., x_n^*)$ solución del mismo tal que $a_{\bullet 1}x_1^* + a_{\bullet 2}x^*_2 + a_{\bullet 3}x^*_3 + ... + a_{\bullet n}x_n = b$ sumando ambas ecuaciones resulta

$$a_{\bullet 1}(x_1^* + \alpha_1) + a_{\bullet 2}(x^*_2 + \alpha_2) + a_{\bullet 3}(x^*_3 + \alpha_3) + ... + a_{\bullet n}(x_n + \alpha_n) = b$$

por lo que el vector $X^0 = \left(x_1^* + \alpha_1, x^*_2 + \alpha_2, x^*_3 + \alpha_3, ..., x_n + \alpha_n\right)$ es también solución del sistema diferente de X^*, esto contradice que este sea compatible y determinado .por tanto rang(A) = n.

3. Un sistema es compatible indeterminado si y solo si rang(A)= rang($\bar{A}$) $<$ n.
En efecto, si rang(A)= rang($\bar{A}$) $<$ n , entonces, por ser el sistema compatible, existen escalares $x_1^*, x_2^*, x_3^*, ..., x_n^* \in K$ tales que $a_{\bullet 1}x_1^* + a_{\bullet 2}x^*_2 + a_{\bullet 3}x^*_3 + ... + a_{\bullet n}x_n = b$, dado que por hipótesis rang(A)= r $<$ n, se verifica que los vectores $\alpha_{\bullet i}$ i = 1,2,...,n son linealmente independientes y, por tanto, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ no todos nulos tales que $a_{\bullet 1}\alpha + a_{\bullet 2}\alpha + a_{\bullet 3}\alpha + ... + a_{\bullet n}\alpha = 0$, razonando como en el apartado anterior se obtiene que y* $= \left(x_1^* + \alpha_1, x^*_2 + \alpha_2, x^*_3 + \alpha_3, ..., x_n + \alpha_n\right)$. Con $Y^* \neq X^*$ es también solución del sistema y por ello, la solución del sistema es única.

Si se supone que el sistema es compatible indeterminado entonces rang(A)= rang($\bar{A}$) y además existen X^{*} y X', con $X^{*} \neq X'$ tales que

$$a_{\bullet 1}x_1^{*} + a_{\bullet 2}x^{*}_{2} + a_{\bullet 3}x^{*}_{3} + ... + a_{\bullet n}x^{*}_{n} = b$$
$$a_{\bullet 1}x_1' + a_{\bullet 2}x'_{2} + a_{\bullet 3}x'_{3} + ... + a_{\bullet n}x'_{n} = b$$

restando estas dos expresiones resulta

$$a_{\bullet 1}(x_1^{*} - x'_1) + a_{\bullet 2}(x^{*}_2 - x'_2) + a_{\bullet 3}(x^{*}_3 - x'_3) + ... + a_{\bullet n}(x_n - x'_n) = 0\,,$$

con algún $x_j^{*} - x_j' \neq 0$. Así pues los vectores $\alpha_{\bullet i}$, i = 1...,n son linealmente independientes y, por tanto, rang(A) $<$n.

a partir del teorema anterior se asegura la existencia de la solución.

NOTA 3: Si el sistema lineal es homogéneo, es decir b = 0 es obvio que siempre será compatible pues $\bar{A}$ =(A/0) y por lo tanto, rang(A) = rang($\bar{A}$). De hecho, el vector X^{*} = 0 es siempre solución del sistema, pues $AO_n = O_m$.
El vector X^{*} = 0 se le denomina solución trivial.

En particular, si rang(A) = n, la solución trivial es la única del sistema. Sin embargo si el rang(A) $<$n, el sistema tiene infinitas soluciones, siempre siendo una de ellas X^{*} = 0.

2.2. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES:

Hasta aquí se han estudiado condiciones necesarias y suficientes de existencia y unicidad de las soluciones de un sistema lineal, lo que sigue tiene como objetivo fundamental el análisis de diferentes reglas o métodos de calculo de soluciones de un sistema compatible de ecuaciones lineales.

Hasta ahora los sistemas lineales considerados en los cursos básicos de álgebra, por su reducida dimensión, ha sido sencillo resolverlos utilizando el método de sustitución o eliminación que consisten o se basan en los siguientes pasos:

(método de sustitución) empezamos con un sistema de la forma

$$\begin{cases} \text{Primera ecuacion} \\ \text{Segunda ecuacion} \end{cases} \qquad (1)$$

resolvemos una de las ecuaciones respecto de x en términos de y (o de respecto de y en términos de x), y obtenemos lo siguiente:

$$\begin{cases} \text{primera ecuacion} \\ \text{segunda ecuacion (resuelta respecto a x)} \end{cases} \quad (2)$$

entonces, sustituimos en la primera ecuación el valor de la variable determinado en la segunda ecuación, y eliminamos así una variable de la primera ecuación. Esto nos da un sistema con la forma siguiente:

$$\begin{cases} \text{primera ecuacion con una variable} \\ \text{segunda ecuacion (resuelta en termino de cualquier variable)} \end{cases} \quad (3)$$

el sistema (3) puede resolverse mediante los métodos de la resolución de ecuaciones lineales.

(método de eliminación) comenzamos con un sistema

$$\begin{cases} \text{Primera ecuacion} \\ \text{Segunda ecuacion} \end{cases} \quad (1)$$

hallamos un sistema de la forma siguiente:

$$\begin{cases} \text{forma lineal A} = 0 \\ \text{forma lineal B} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

multiplicamos o dividimos cada ecuación de (2) por algún numero distinto de cero, obteniendo así un sistema equivalente (3), donde los coeficientes de x o y sean iguales u opuestos uno del otro en las formas lineales C y D. Esto nos da el sistema siguiente:

$$\begin{cases} \text{forma lineal C} = 0 \\ \text{forma lineal D} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

la suma o la diferencia de las dos formas lineales en (3) es una forma lineal con una sola variable. Entonces obtenemos el sistema equivalente siguiente:

$$\begin{cases} \text{forma lineal C} + \text{forma lineal D} = 0 \\ \text{forma lineal C (o D)} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

el sistema (4) puede resolverse por los métodos de solución de ecuaciones lineales con una variable; sin embargo , estas técnicas no son muy operativas cuando el sistema tiene mas de 4 o 5 ecuaciones o incógnitas.

Otro procedimiento ya conocido de resolución, para un sistema A X = b cuando la matriz A es invertible, es el calculo de su única solución a través de la expresión $X^* = A^{-1}$ b, este ultimo método es generalizable si la matriz de coeficientes, es de orden $m \times n$ con $n < m$ y rang(A) = n, ya que como $A^t A$ es invertible, entonces, teniendo en cuenta la definición dada anteriormente, el sistema A X = b es equivalente a $A^t A X = A^t b$ y, por tanto, su única solución es $X = \left(A^t A\right)^{-1} A^t b$, incluso cuando la matriz A del sistema no es de rango completo puede construirse una solución del sistema de forma análoga a la señalada ($X^* = A^{-1}$ b), utilizando en lugar de A^{-1} alguna generalización del concepto de inversa de una matriz que trataremos mas adelante.

Cualquiera de estas alternativas es poco operativa y, por ello, se hace necesario utilizar otros métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales compatibles.

2. 3. SOLUCIÓN DE SISTEMAS EQUIVALENTES

Antes de abordar el análisis de los diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales compatibles, dentro del álgebra lineal, se procederá a estudiar como se puede reducir un sistema compatible cualquiera a otro equivalente compatible determinado y con matriz de coeficientes cuadrada.

En este estudio cabe señalar dos casos:

2.3.1.SISTEMA EQUIVALENTE A UN SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

Dado el sistema compatible determinado A X = b, tal que rang(A) = rang ($\tilde{A}$) = r < n, se trata de encontrar un sistema compatible equivalente de la forma $\hat{A}\hat{X} = \hat{b}$ con $\hat{A}$ de orden $r \times r$. $\left|\hat{A}\right| \neq 0$ y $\hat{X}$, $\hat{b} \in \mathbb{R}^r$.

Para ello se procede como sigue:

Por ser rang(A) = rang ($\tilde{A}$) = r < n, sin perdida de generalidad se puede suponer que la submatriz A_{11} Correspondiente a las r primeras filas y columnas de A tiene determinante no nulo.

Particionando adecuadamente la matriz de coeficientes A y los vectores X y b en la forma $A = \left(\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$, $X = \left(\begin{array}{c} \vec{X}_1 \\ \hline \vec{X}_2 \end{array}\right)$, $b = \left(\begin{array}{c} \vec{b}_1 \\ \hline \vec{b}_2 \end{array}\right)$, con A_{ij} de orden $m_i \times n_j$, i, j=1,2. donde $m_1 = n_1 = r$, $m_1 + m_2 = m$ y $n_1 + n_2 = n$ el sistema puede escribirse mediante dos bloques uno de r ecuaciones y el otro de m-r como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}\vec{x}_1 + A_{12}\vec{x}_2 = \vec{b}_1 \\ A_{21}\vec{x}_1 + A_{22}\vec{x}_2 = \vec{b}_2 \end{array}\right\}$$

entonces se verifica que el sistema es equivalente a $A_{11}\vec{x}_1 + A_{12}\vec{x}_2 = \vec{b}_1$ es decir ambos tienen el mismo conjunto solución.

Es obvio que toda solución de $\left.\begin{array}{l} A_{11}\vec{x}_1 + A_{12}\vec{x}_2 = \vec{b}_1 \\ A_{21}\vec{x}_1 + A_{22}\vec{x}_2 = \vec{b}_2 \end{array}\right\}$, también lo es de $A_{11}\vec{x}_1 + A_{12}\vec{x}_2 = \vec{b}_1$. Recíprocamente, si $X^* = (\vec{x}_1^{\,*}, \vec{x}_2^{\,*})$ es solución de $A_{11}\vec{x}_1 + A_{12}\vec{x}_2 = \vec{b}_1$, también lo es de $\left.\begin{array}{l} A_{11}\vec{x}_1 + A_{12}\vec{x}_2 = \vec{b}_1 \\ A_{21}\vec{x}_1 + A_{22}\vec{x}_2 = \vec{b}_2 \end{array}\right\}$. Para ello basta demostrar que X^* es solución del sistema $A_{21}\vec{x}_1 + A_{22}\vec{x}_2 = \vec{b}_2$ es decir verifica las m-r ultimas ecuaciones de $\left.\begin{array}{l} A_{11}\vec{x}_1 + A_{12}\vec{x}_2 = \vec{b}_1 \\ A_{21}\vec{x}_1 + A_{22}\vec{x}_2 = \vec{b}_2 \end{array}\right\}$.

Por ser rang(A) = rang ($\tilde{A}$) = r < n y $|A_{11}| \neq 0$, las r primeras filas de $\tilde{A}$ son linealmente independientes, siendo entonces la fila r + 1 combinación lineal de las r primeras y existiendo, por tanto, escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ reales tales que:

$$(a_{r+1\bullet}, b_{r+1}) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j (a_{j\bullet}, b_j) = (\sum_{j=1}^{r} \alpha_j a_{j\bullet}, \sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j)$$

entonces X^* verifica la primera ecuación de $A_{21}\vec{x}_1 + A_{22}\vec{x}_2 = \vec{b}_2$ que es $a_{r+1\bullet}X = b_{r+1}$ pues $a_{r+1\bullet}X^* = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j a_{j\bullet} X^* = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j = b_{r+1}$ por ser X^* solución de $A_{21}\vec{x}_1 + A_{22}\vec{x}_2 = \vec{b}_2$.

Así pues para resolver el sistema compatible indeterminado $\left.\begin{array}{l} A_{11}\vec{x}_1 + A_{12}\vec{x}_2 = \vec{b}_1 \\ A_{21}\vec{x}_1 + A_{22}\vec{x}_2 = \vec{b}_2 \end{array}\right\}$ con m ecuaciones y n incógnitas basto hallar las soluciones del sistema equivalente respectivo $A_{11}\vec{x}_1 = \vec{b}_1 - A_{12}\vec{x}_2$ que tiene r "incógnitas" $\vec{x}_1$ y la matriz de coeficientes A_{11}, cuadrada de orden r con .

2.3.2. SISTEMA EQUIVALENTE A UN SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO CON MATRIZ DE COEFICIENTES NO CUADRADA

Sea el sistema compatible determinado AX = b, A de orden $m \times n$ tal que m $>$ n y rang(A) = rang($\vec{A}$) = n.

Por ser, en este caso rang(A) = n, sin perdida de generalidad se puede suponer que la submatriz A_{11} de A correspondiente a sus n primeras filas tiene determinante no nulo. En esta situación, si se consideran las particiones de la matriz de coeficientes de A y los vectores X y b de la forma $A = \left(\frac{A_{11}}{A_{21}}\right)$, x $= \vec{x}_1$, b = $\left(\frac{\vec{b}_1}{\vec{b}_2}\right)$, se tiene que el sistema inicial se puede expresar como $\left.\begin{array}{l} A_{11}X = \vec{b}_1 \\ A_{21}X = \vec{b}_2 \end{array}\right\}$ se verifica entonces que el sistema es equivalente al sistema compatible determinado $A_{11}X = \vec{b}_1$ con matriz de coeficientes cuadrada y cuya única solución es $X^* = A_{11}^{-1}\vec{b}_1$.

Por ejemplo:

El sistema $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = \ \ 2 \\ 3x_1 \quad\ \ + 2x_3 = 1 \end{array}\right\}$ es compatible indeterminado pues tiene tres incógnitas y el rango de las matrices de coeficientes y ampliada es igual a dos.

Dado que la matriz de coeficientes A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ la submatriz $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ tiene determinante no nulo, el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}\vec{x}_1 + A_{12}\vec{x}_2 = \vec{b}_1 \\ A_{21}\vec{x}_1 + A_{22}\vec{x}_2 = \vec{b}_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2x_3 = 1 \end{array}\right\}$$

de acuerdo con lo indicado en 1, es que equivalente a

$$A_{11}\vec{x}_1 + A_{12}\vec{x}_2 = \vec{b}_1 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

las soluciones de este sistema son de la forma $x^* = \left(\vec{x}_1^*, \quad \vec{x}_2\right)$ con $\vec{x}_1^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$, $\vec{x}_2 = x_3^*$ donde $\vec{x}_1^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3^*\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2x_3^* \\ -4 & -x_3^* \end{pmatrix}$ para cualquier $x_3^* \in \mathbb{R}$.

Si observamos los elementos del conjunto $S^* = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_3, x_2 = -\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_3, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$ solo depende de un parámetro, pues 3-rang(A) = 1. además, todos ellos son soluciones del sistema inicial, ya que también cumplen la tercera ecuación.

Si consideramos de nuevo la matriz A, se observa que también el menor correspondiente a los elementos $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ es no nulo. Así pues, reordenando el sistema en la forma $\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 \qquad + 2x_3 = \ \ 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{array}\right\}$ se obtiene que su matriz de coeficientes tiene una submatriz $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ con $\left|A_{11}\right| \neq 0$ y por ello, el sistema $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2$ es equivalente al inicial.

Las soluciones de ambos sistemas son los elementos del conjunto $S^{**} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 3 + 2x_2, x_3 = -4 - 3x_2, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ que como era de esperarse coincide con S^*, pues los dos sistemas que se han resuelto son equivalentes al sistema del cual se ha partido.

En este ejemplo se ilustra que el conjunto de las soluciones del sistema inicial no depende de la elección de la submatriz A_{11} con $|A_{11}| \neq 0$ que se toma en la matriz de coeficientes de A. En particular dado que los menores de orden 2 de la matriz A son no nulos, cualquier submatriz A_{11} de orden 2 permite construir un sistema equivalente al inicial. En general, cuando rang(A)=r, para cualquier elección de una submatriz A_{11} de orden r, siempre que esta sea no singular, se obtiene un sistema equivalente al de partida, es decir, con el mismo conjunto de soluciones. Sin embargo, si se toma una submatriz de orden r singular, el sistema construido no será equivalente al sistema inicial.

2.4. METODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS UTILIZADOS EN ALGEBRA LINEAL:

2.4.1.REGLA DE CRAMER.

Si AX = b es un sistema compatible determinado con A cuadrada de orden n, como ya se indico en la introducción, su única solución es $X^* = A^{-1}b$ la regla de Cramer va a proporcionar una forma alternativa de calcular X^* mediante la evaluación de ciertos determinantes, generalmente mas sencillos de obtener que la inversa de una matriz.

Teorema 3: Dado el sistema lineal de n ecuaciones y n incógnitas AX=b con $|A| \neq 0$, se verifica que el único vector solución del sistema es $X^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ con $x_i = \frac{|B_i|}{|A|}$ donde B_i es la matriz de orden n que se obtiene a partir de A sustituyendo su columna i-esima, i=1,...,n por el vector de términos independientes b, es decir, $B_i = [a_{\bullet 1} ... a_{\bullet i-1} b a_{\bullet i+1} ... a_{\bullet n}]$.

Demostración: Dado que $|A| \neq 0$, el sistema es compatible determinado y, por ello la única solución es $X^* = A^{-1}b$ como $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$, entonces para cada i=1,...,n $x_i^* = \frac{1}{|A|} a_{i\bullet} b$ donde $a_{i\bullet}$ es la fila i-esima de la matriz adjunta de A, es decir, $a_{i\bullet} = [A_{1i}, A_{2i}, ..., A_{ni}]$ por lo tanto, $x_i^* = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{n} A_{ji} b_j = \frac{|B_i|}{|A|}$ ya que $\sum_{j=1}^{n} A_{ji} b_j$ es el valor del determinante de b_i cuando se efectúa su desarrollo por la columna i-esima.

NOTA 4: 1. Es de destacar que en la obtención de la regla de Cramer desempeña un papel fundamental el hecho de disponer de la expresión A^{-1} como $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A)$ esto es una muestra de la utilidad de esta forma del calculo para la inversa de una matriz.

1. Es obvio que la regla de Cramer no es aplicable directamente a la resolución de cualquier sistema compatible. Sin embargo, todo sistema compatible indeterminado, o bien compatible determinado con matriz de coeficientes no cuadrada, puede reducirse a un sistema equivalente compatible determinado con igual número de ecuaciones y de incógnitas, así, para todo sistema lineal compatible $A_{m\times n}X_{n\times 1}=b_{m\times 1}$ con rang(A) = r < min.{m, n} existe un subsistema equivalente de la forma $A_{11}\vec{x}_1 = \vec{b}_1 - A_{12}\vec{x}_2$ si r < min.{m, n} o del tipo $A_{11}\vec{x}_1 = b - A_{12}\vec{x}_2$ si r = m < n, o bien $A_{11}x = \vec{b}_1$ si r = n < m.

En cualquiera de estas situaciones, en el subsistema equivalente puede aplicarse la regla de Cramer para obtener la solución, que es, respectivamente,

$$\left(\vec{x}_1^*, \vec{x}_2^*\right) = \left(A_{11}^{-1}\left(\vec{b}_1 - A_{12}\vec{x}_2\right), \vec{x}_2\right)$$

$$\left(\vec{x}_1^*, \vec{x}_2^*\right) = \left(A_{11}^{-1}\left(b - A_{12}\vec{x}_2\right), \vec{x}_2\right)$$

$$x^* = A_{11}^{-1}\vec{b}_1$$

2.4.2. METODO DE GAUSS-JORDAN

Cuando un sistema de ecuaciones lineales compatible determinado con matriz de coeficientes cuadrada tiene mas de 5 o 6 ecuaciones , su resolución por la regla de Cramer puede resultar un tanto laboriosa, dado el volumen de los cálculos a realizar. Otra opción es hallar la solución X^* con $X^*=A^{-1}\vec{b}_1$ utilizando para ello el método de Gauss-Jordán para el calculo de A^{-1}, ya que es mas cómodo que hacer uso de la expresión

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A).$$

Sin embargo, los cálculos para la resolución del sistema aun se podrían simplificar mas si fuese posible transformar fácilmente el sistema inicial en uno equivalente cuya matriz de coeficientes sea triangular, ya que para este tipo de sistemas es sencillo hallar su solución.

El método de Gauss- Jordan permitía calcular la matriz inversa de una dada (siempre y cuando la matriz sea cuadrada), también permite transformar un sistema compatible determinado en otro equivalente cuya matriz de coeficientes es triangular (superior o inferior). Para ello, se precisa en primer lugar:

a. Comprobar que cuando en un sistema de ecuaciones lineales compatible se efectúan operaciones elementales como:
   - Intercalar ecuaciones.
   - Multiplicar una ecuación por un escalar.
   - Sumar a una ecuación un múltiplo de otra.

   El sistema que se obtiene es equivalente al de otra partida.

b. Dado el sistema compatible determinado A X = b con A cuadrada de orden n, siempre es posible mediante operaciones elementales y lo indicado en el apartado anterior encontrar un sistema equivalente $\tilde{A}$ X = b, siendo $\tilde{A}$ una matriz triangular.

   Si en un sistema compatible AX = b, rang(A) = r$\leq$ min.{m, n} se aplica directamente el método de Gauss-Jordan, tras un numero adecuado de operaciones elementales, la matriz $\tilde{A}$ =(A/b) se transforma en una matriz con m-r filas de ceros.

   Así un sistema compatible determinado: $\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$

   mediante diversas transformaciones elementales se reduce al sistema equivalente:

$$\left.\begin{array}{r} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + ... + b_{1n}x_n = c_1 \\ b_{22}x_2 + ... + b_{2n}x_n = c_2 \\ .... \\ b_{mn}x_n = c_m \end{array}\right\}$$

2.5. INVERSAS DE MATRICES CUADRADAS:

En resumen, los métodos antes descritos se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones lineales, sin importar el numero de variables siempre y cuando el sistema sea cuadrado.

Hemos visto que para los sistemas compatibles determinados de orden $n\times n$ es posible encontrar la solución a dicho sistema, este hecho en todos los métodos lo conocemos como el calculo de la matriz inversa, pero ¿ Que es una matriz inversa?, respondamos la pregunta a partir de la siguiente definición.

Definición 4: *Sea A una matriz de $n\times n$. Una matriz C de $n\times n$ es inversa de A si CA = AC = I matriz identidad de $n\times n$.*

A partir de lo anterior, podemos probar que dicha matriz es única

Teorema 4: Unicidad de inversas cuadradas.
Sea A una matriz de $n\times n$ con inversa C de modo que CA = AC = I. Si D es una matriz de $n\times n$ tal que AD = I, entonces C = D.
Demostración: como la multiplicación de matrices es asociativa, tenemos C(AD) = (CA)D, pero como AD=I y CA= I, resulta que C(I) = (I)D, luego C = D.

Dicho teorema muestra que se puede hablar simplemente de la inversa de la matriz A. Que se denota A^{-1} pero nunca se expresa como 1/A.

Definición5: *Una matriz cuadrada que tiene inversa se llama invertible. Una matriz cuadrada que no es invertible se llama singular.*

2.6 INVERSAS DE MATRICES ELEMENTALES:

Sea E_1 una matriz elemental de intercambio de filas, obtenida de la matriz identidad al intercambiar las filas i y k. recordemos que E_1A afecta el intercambio de las filas i y k de A para cualquier matriz A del mismo tamaño que E_1.. en particular, al tomar A = E_1 vemos que E_1 E_1 intercambia las filas i y k de E_1 y, por los tanto, devuelve E_1 a I. Así, E_1 E_1= I.

En consecuencia, E_1 es una matriz invertible y es su propia inversa.

Ahora, sea E_{2r} una matriz elemental de cambio de escala de fila, obtenida de la matriz identidad al multiplicar la fila i por un escalar r distinto de cero. Sea $E_{2,1/r}$ la matriz obtenida de la matriz identidad al multiplicar la fila i por 1/r. Esta claro que E_{2r} $E_{2,1/r}$ = $E_{2,1/r}$ E_{2r} =I, de modo que E_{2r} es invertible con inversa $E_{2,1/r}$.

Por ultimo sea E_{3r} una matriz elemental de suma de filas, obtenida de I al sumar la fila i multiplicada por r a la fila k. Si E_{3-r} se obtiene de I al sumar la fila i multiplicada por –r a la fila k, entonces es evidente que $E_{3r}\ E_{3-r} = I$, luego se ha probado que :

Toda matriz elemental es invertible

2.7. ALGORITMO PARA CALCULAR A^{-1}

Observemos ahora la obtención de la inversa a partir de los métodos antes descritos.

Sea A una matriz de $n\times n$ tal que AX=I, esto es, tal que $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ la ecuación matricial corresponde a n^2 ecuaciones lineales con las n^2 incógnitas x_{ij}; hay una ecuación lineal para cada una de las n^2 posiciones en una matriz $n\times n$. Por ejemplo, igualando los registros de la posición de la segunda fila y la primera columna a cada lado de la ecuación, obtenemos la ecuación lineal $a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + ... + a_{2n}x_{n1} = 0$ de estas n^2 ecuaciones lineales, n de ellas comprenden las n incógnitas x_{i1} para i=1, 2,...,n, y estas ecuaciones están dadas por la ecuación con vectores columna $A\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ hay también n ecuaciones que incluyen las n incógnitas x_{i2} para i=1, 2,...n y así sucesivamente. Además de la ecuación hay que resolver $A\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., A\begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donde cada sistema tiene la misma matriz de coeficientes A. Nuestra experiencia con el trabajo con estos sistemas nos indica que debemos formar la matriz aumentada $\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & 0 & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$, la matriz A esta al lado izquierdo de la partición y la matriz idéntica I esta a la derecha. Entonces hacemos una reducción de Gauss-Jordan para resolver el sistema, recordemos que el teorema 3 nos garantiza la existencia y la unicidad de la inversa. Por lo tanto la inversa existe, al resolver el sistema anterior estamos en el caso de solución única y, según lo establecido por el teorema, podemos reducir la matriz A de los coeficientes a la matriz idéntica reduce el sistema a $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ 0 & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{array}\right)$ y demuestra que $A^{-1}=(d_{ij})$. Esta es una manera eficiente de calcular A^{-1}.

En resumen:

Algoritmo para calcular A^{-1}
Para hallar A^{-1}, si existe, se procede como sigue:
Paso 1: formar la matriz ampliada
Paso 2: aplicar el método Gauss-Jordan para reducir (A/I) a (I/D). Si se puede hacer la reducción, entonces $A^{-1}= D$. De no ser asi, A^{-1} no existe.

Teorema 5: condiciones para que exista A^{-1}
las condiciones para una matriz A de $n\times n$ son equivalentes:
i. A es invertible
ii. A es equivalente por filas a la matriz identidad I
iii. El sistema AX=b tiene una solución para cada vector columna b de n componentes.
iv. A se puede expresar como un producto de matrices elementales.

Demostración: solo falta demostrar la equivalencia de iii y iv con i.
Si A es invertible, entonces queda claro que AX=b tiene solución $X= A^{-1}b$ de donde i implica iii. Por otro lado, si AX=b tiene solución para cada b, entonces AX=b tiene solución; basta con considerar que el j-ésimo vector columna de X es la solución de $AX=e_j$, donde e_j es el j-ésimo vector columna de la matriz identidad.

Volviendo a la equivalencia de i y iv, sabemos que la matriz A es equivalente por la matriz **I** si, y solo si, existe una sucesión de matrices elementales E_1, E_2 ,...,E_t tal que E_t .....E_2 E_1A = **I**, y esto sucede si, y solo si, A se puede expresar como un producto $A= E_1^{-1}, E_2^{-1} ,...,E_t^{-1}$ de matrices elementales.

Algunas consideraciones presentadas en este capitulo son las imposiciones que se dan a las matrices (que sean cuadradas o cuya solución sea compatible determinada), entonces:
¿Qué pasa si la matriz es no cuadrada o no tiene rango completo ?, ¿Qué pasa con los sistemas cuyas soluciones son compatibles indeterminados?
Estas preguntas serán resueltas en el capitulo siguiente.

CAPITULO 3
INVERSA DE UNA MATRIZ NO CUADRADA (G-INVERSA O INVERSA GENERALIZADA)
3.1GENERALIDADES:

No toda matriz es invertible, pues únicamente es posible calcular la inversa de una matriz cuadrada no singular. Sin embargo, en determinados contextos puede ser útil disponer de un concepto semejante al de matriz inversa aplicable a matrices bien no cuadradas, o bien de rango no completo.

Las distintas generalizaciones del concepto de matriz inversa permiten resolver diversos problemas como por ejemplo, el calculo de soluciones aproximadas de un sistema incompatible.

Un sistema $\left\{\begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{21}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn}x_n & = b_n \end{array}\right\}$ de m ecuaciones lineales con n incógnitas, puede escribirse abreviadamente como **A X = b.**

- donde A = $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ es una matriz m$\times$n de coeficientes de las ecuaciones.
- X^t = $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & \cdots & \cdots & x_n \end{pmatrix}$, es un vector fila 1$\times$n de variables.
- b = $\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}^t$ es un vector columna m$\times$1 de términos independientes.

En general, una solución para este sistema, esto es, un vector X tal que **A X = b**, para una matriz A y un vector b dados, está determinado por **X = A^{-1}b** si A es una matriz cuadrada, o por **X =** $\overline{\mathrm{A}}$**b** en caso contrario, donde A^{-1} es la matriz inversa de A_{nxn} y $\overline{A}$ es la **inversa generalizada** de A_{mxn}.

En el primer caso, la existencia de X está determinada por la existencia de la matriz inversa A^{-1} de A, y a la vez la existencia de ésta depende de la no singularidad de A, esto es que $Det(A) \neq 0$. Bajo ésta condición el calculo de A^{-1} se hace por alguno de los métodos conocidos: método de la adjunta, método de gauss, método de las series, etc, y cumple, entre otras las siguientes propiedades:

$$AA^{-1}A = A \qquad (1)$$
$$AA^{-1} = I_n \qquad (2)$$
$$A^{-1}A = I_n \qquad (3)$$
$$A^{-1}AA^{-1} = A^{-1} \qquad (4)$$

En el segundo caso la solución **X =** $\overline{A}$ **b**, está determinada por la existencia de $\overline{A}$, una matriz que denominaremos **g-inversa** o **inversa generalizada** de A que hace que $\overline{A}$ A sea "algo así " como una matriz idéntica I de tal forma que si **A X = b,** entonces $\overline{A}$ A **X =** $\overline{A}$ **b,** e impliquen que **IX =** $\overline{A}$ **b,** luego **X =** $\overline{A}$ **b**; aquí es claro, que si A es una matriz $m \times n$, **X =** $\overline{A}$ b es $m \times n$ e "I" es $n \times n$, IX = X es $n \times 1$, consistente con que $\overline{A}$ b es también $n \times 1$.

Por ello parece lógico al intentar generalizar el concepto de matriz inversa al caso de una matriz no invertible, buscar las matrices que verifiquen propiedades análogas a las del caso 1 y dependiendo del número de éstas condiciones que se exija cumplir a la matriz en cuestión, se obtiene diferentes generalizaciones del concepto de inversa.

3.2 INVERSA GENERALIZADA DE UNA MATRIZ

En la búsqueda de un concepto lo más semejante posible al de matriz inversa para matrices cualesquiera, se han definido diferentes tipos de "inversas" más generales que cumplen ciertas propiedades que verifica A^{-1}; por ejemplo:

- Dada una matriz A se dice que una matriz A_C de orden $n \times m$ es c-inversa o inversa condicionada de A si y solo si se verifica:

$$AA_CA = A$$

La matriz $A_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, es c-inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ya que $AA_CA = A$.

por la misma razón también lo es la matriz $B_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Así pues, la c-inversa de una matriz no es única aunque siempre existe.

- Dada una matriz A de orden $m \times n$ se dice que una matriz A_S de orden $n \times m$ es s-inversa de A inversa mínimo cuadrática si y solo si se verifica que $AA_SA = A$ y AA_S es simétrica.

Aquí se estudia una generalización del concepto de inversa de una matriz mas restrictivo que el de c-inversa, ya que no solo habrá de cumplirse la condición (1), sino que también se deberá verificar una versión mas débil de la condición (2) tomadas de la inversa común.

Esta segunda generalización del concepto de matriz inversa tiene no solo aplicaciones de la c-inversa sino que además, en el caso de sistemas de ecuaciones incompatibles, permite hallar soluciones aproximadas.

Por ejemplo:

Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matriz $A_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es s-inversa de A, ya que

$AA_SA = A$ y $AA_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es simétrica.

En los ejemplos estudiados, se ha encontrado su respectiva inversa; sin embargo, la característica de unicidad de la inversa de una matriz cuando existe, no es siempre cierta, ya que por ejemplo A_C dada en el primer apartado no se reduce a una sola matriz que cumple dicha propiedad.

La propiedad de unicidad para una matriz que generalice el concepto de inversa, se obtiene exigiendo a dicha matriz que cumpla más propiedades afines a las que tiene A^{-1}. Al imponer condiciones semejantes a las indicadas en la inversa común, surge el concepto de g-inversa o inversa generalizada de una matriz que, debido a su característica de unicidad, permitirá encontrar soluciones aproximadas para un sistema de ecuaciones incompatible.

Definición*: Sea A una matriz de m $\times$ n de rango cualquiera. Una inversa generalizada (o g inversa) de A es una matriz n$\times$m denotada por $\overline{A}$ tal que* ***X =*** $\overline{A}$ ***b*** *es una solución de la ecuación* ***A X = b****.*

Ahora, sobre la base de las siguientes condiciones, establecemos la existencia, la unicidad y algunas propiedades:

Teorema 1:

i. $\overline{A}$ es una g-inversa si, y solo si $A\overline{A}A = A$

Demostración:

($\Rightarrow$Si $\overline{A}$ es una g-inversa, entonces podemos tomar b como la j-esima columna de $a_{j\in}$ A, es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$AX = a_j$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & \dots & a_{1jx_2} & \dots & a_{1n}x_n = & a_{1j} \\ a_{21}x_1 & \dots & a_{2j}x_2 & \dots & a_{2n}x_n = & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & \dots & a_{mj}x_2 & \dots & a_{mn}x_n = & a_{mj} \end{matrix}$$

(0, 0, ..., 1, ...,0) es solución del sistema

$$X=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

Como $\overline{A}$ es g- inversa entonces X = $\overline{A}a_j$, entonces AX = $A\overline{A}a_j$, y a_j = $A\overline{A}a_j$, para todo j, entonces A = $A\overline{A}A$.

$\Leftarrow$) Si A = $A\overline{A}A$, entonces $\overline{A}$ es una g-inversa.

Como A = $A\overline{A}A$ y AX = b es inconsistente, entonces AX = $A\overline{A}$(AX) o lo que es equivalente $A\overline{A}b$ = AX. Ahora tenemos $A\overline{A}b$ = b, entonces $\overline{A}b$ es una solución, luego $\overline{A}$ es g-inversa.□

ii. Una inversa generalizada definida anteriormente no es necesariamente única. Podemos sin embargo imponer algunas condiciones como las siguientes:

Sea $\overline{A}$ cualquier g-inversa de A y $\overline{A}A$ = H, entonces:

a.) H^2 = H, esto es H es idempotente.

Demostración: $A_{mxn}\overline{A}_{nxm}A_{mxn} = A_{mxn}$

$H^2 = (\overline{A}A)(\overline{A}A) = \overline{A}(A\overline{A}A) = \overline{A}A$ por la propiedad anterior, es decir $A\overline{A}A$ = A, así tenemos que $\overline{A}A$ = H. Como se quería demostrar, luego H es idempotente □ .

b.)AH = A y rang(A) = rang(H) = Traz(H)

Demostración:

- AH = $A(\overline{A}A) = (A\overline{A}A)$ = A, por la propiedad anterior.
- Como se tiene que: AH = A, tenemos, rang(AH) = rang(A), así tenemos rang(AH) = rang(A) $\leq$ min{rang(AH), rang(A)}, entonces rang(H)$\geq$rang(A), pero $\overline{A}A$ = H, luego rang(H) = rang($\overline{A}A$)

ahora rang(H) = rang($\overline{A}A$) $\leq$ min{rang($\overline{A}$),rang(A)}, luego rang(A)$\geq$rang(H).

por lo anterior tenemos que rang(A) = rang(H).

Ahora para calcular el rango de calculamos rang(H), procedemos así:

$H = B_1C_1$ (factorizacion del rango)

$$A=B^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}C^{-1}$$

$$\text{además, } H^2 = (B_1C_1)(B_1C_1)$$

Pero como H es ídempotente $H^2 = H$, entonces $H = (B_1C_1)(B_1C_1)$, pero $(B_1C_1)=(B_1C_1)(B_1C_1)$, sea además $\begin{cases} \text{L inversa a izquierda de } B_1 \\ \text{R inversa a derecha de } C_1 \end{cases}$ así tenemos

$$LB_1C_1R = LB_1C_1B_1C_1R$$
$$LB_1C_1R = C_1B_1$$

por lo tanto $Traz(H) = Traz(B_1C_1) = Traz(C_1B_1) = Traz(I_r) = rang(H) = r$. □

c.) Una solución general de AX = 0 es (H - I)Z donde Z es arbitraria.

Demostración: partamos del hecho que AH = A; si multiplicamos ambos lados por Z, arbitraria, tenemos: AHZ = AZ, donde se tiene AHZ – AZ = 0, entonces A(H–I)Z= 0. Así (H–I)Z = 0, es una solución al sistema AX = 0. □

d.) Una solución general de una ecuación consistente AX = b es $\overline{A}b$ -(H–J)Z, donde Z es arbitraria.

Demostración: AX = b por ser $\overline{A}$ g- inversa, entonces X = $\overline{A}b$ es solución, por la proposición anterior tenemos A(H–J)Z = 0, entonces:

$$AX = A\overline{A}b + 0$$
$$AX = A\overline{A}b + A(H - J)Z$$
$$b = A\overline{A}b + A(H - J)Z$$
$$b = A(\overline{A}b + (H - J)Z)$$

entonces $b = \overline{A}b + (H - J)Z$ es solución del sistema AX = b. □

e.) Q'X tiene un único valor para todo X que satisface AX = b si, y solo si Q'A = Q'.

Demostración: veamos Q'X es único; supongamos X_1, X_2 soluciones tales que $AX_1= b$, $AX_2= b$, por hipótesis Q'H = Q'.

Ahora $Q'HX_1 = Q'X_1$ y $Q'HX_2 = Q'X_2$

$Q'\overline{A}AX_1 = Q'X_1$, implica $Q'\overline{A}b = Q'X_1$, así mismo $Q'\overline{A}AX_2 = Q'X_2$, implica $Q'\overline{A}b = Q'X_2$, pero $Q'X_1= Q'X_2$.

Sean X_1, X_2 dos soluciones particulares tales que:

$$X_1 = \overline{A}b + (H - I)Z, \text{ para } Z = 0.$$

$$X_2 = \bar{A}b + (H - I)Z\text{, para } Z = I.$$

Por hipótesis $Q'X_1 = Q'X_2$

$$Q'(\bar{A}b) = Q'\left[\bar{A}b + (H - I)Z\right]\text{, como } Z = I$$

$$Q'\bar{A}b = Q'\bar{A}b + Q'H - Q'$$

$$Q'\bar{A}b - Q'\bar{A}b = Q'H - Q'$$

$$0 = Q'H - Q'$$

$$Q'H = Q'.$$

$\Leftarrow)$ $Q'X = Q'\left[\bar{A}b + (H - I)Z\right] = Q'\bar{A}b + Q'(H - I)Z = Q'\bar{A}b + Q'HZ - Q'Z$,

pero $Q'H = Q'$, $Q'X = Q'$,

$$Q'X = Q'\bar{A}b + Q'HZ - Q'Z$$

$$Q'X = Q'\bar{A}b + Q'Z - Q'Z = Q'\bar{A}b + 0$$

$Q'X = Q'\bar{A}b$ independiente de X. □

iii. $\bar{A}$ existe y Rang $(\bar{A}) \geq$ Rang (A).

De hecho $\bar{A}$ construida con la propiedad adicional $\bar{\bar{A}} = A$ y Rang$(\bar{A})$ = Rang (A), cada g- inversa no necesariamente satisface esta condición adicional.

iv. $\bar{A}$ es una g-inversa si, y solo si $\bar{A}A$ es idempotente y R(A) = R($\bar{A}A$) o $A\bar{A}$ es idempotente y R($A\bar{A}$) = R(A). (Otra definición de g-inversa).

vi. La clase de todas las g-inversas: la solución general de $A \times A = A$ esto es la g-inversa de A puede ser expresada en formas alternativas como:

a. $A = \bar{A} + U - \bar{A}AUA\bar{A}$

$A(\bar{A} + U - \bar{A}AUA\bar{A}) = A\bar{A} + AU - (A\bar{A}A)UA\bar{A} =$

$= (A\bar{A} + AU - AUA\bar{A})A = A\bar{A}A + AUA - AUA\bar{A}A = A\bar{A}A + AUA -$
$AUA\bar{A}A = A\bar{A}A + AUA - AUA = A\bar{A}A = A$. □

b. $A = \bar{A} + V(I - A\bar{A}) + (I - A\bar{A})W$

$A(\bar{A} + V(I - A\bar{A}) + (I - A\bar{A})W)A = A\bar{A}A + AV(I - A\bar{A})A + A(I - A\bar{A})WA$

$= A + AVA - AVA\bar{A}A + AWA - A\bar{A}AWA = A + AVA - AVA + AWA - AWA = A.$

c. $A = \bar{A} + V(I - P_A) + (I - P_{A^*})W$

Donde $\bar{A}$ es cualquier g-inversa particular P_A, P_{A^*} son los operadores de sobre $\mu(A)$ y $\mu(A^*)$ respectivamente y U, V, W son matrices arbitrarias.

Definición: *Una matriz G particular de g-inversa de A que satisface la condición AGA = A y GAG = G es llamada una g-inversa reflexiva de A y se nota* $\overline{\mathrm{A}}_r$*, las condiciones pueden ser equivalentes escritas como AGA = A y R(G) = R(A).*

La c-inversa dada anteriormente se conoce como g-inversa reflexiva. No todas las g-inversas son reflexivas.

Teorema 2:

vi. Los siguientes resultados se cumplen para cualquier escogencia de g-inversas.

a. $\mathrm{A}(\overline{\mathrm{A}^*\mathrm{A}})\mathrm{A}^*\mathrm{A}=\mathrm{A}$, y, $\mathrm{A}^*\mathrm{A}(\overline{\mathrm{A}^*\mathrm{A}})\mathrm{A}^*=\mathrm{A}^*$

Demostración: $\mathrm{D} = \mathrm{A}(\overline{\mathrm{A}^*\mathrm{A}})\mathrm{A}^*\mathrm{A}$ -A

$\mathrm{A}^*\mathrm{D} = \mathrm{A}^*\mathrm{A}(\overline{\mathrm{A}^*\mathrm{A}})\mathrm{A}^*\mathrm{A} - \mathrm{A}^*\mathrm{A} = \mathrm{A}^*\mathrm{A} - \mathrm{A}^*\mathrm{A} = 0$

$\mathrm{A}^*\mathrm{D} = 0$, entonces D = 0.

Veamos $\mathrm{A}^*\mathrm{D}$ = B = $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$, B^t = $\begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \dots & \overline{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{m1} & \cdots & \overline{a}_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}$ BB^* = 0,

entonces B = 0; $c_{ij} = 0$, $\forall ij$

C_{ii}= fila i de B × Columna i de B^*

= $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \times (\overline{a_{1i}}, \overline{a_{2i}}, \dots, \overline{a_{ni}})$

= $(a_{i1}\times \overline{a_{1i}}, a_{i2}\times \overline{a_{2i}}, \dots, a_{in} \times \overline{a_{ni}}) = \sum\left(a^2+b^2\right)=0$.

b. Una condición necesaria y suficiente es: $\mathrm{B}\overline{\mathrm{A}}\mathrm{A} = \mathrm{B}$, es que $\mu(\mathrm{B}') \subset \mu(\mathrm{A}')$

Demostración:

R($\mathrm{B}\overline{\mathrm{A}}\mathrm{A}$) ≤ min. $\left\{\mathrm{R(B)},\mathrm{R}(\overline{\mathrm{A}}),\mathrm{R(A)}\right\}$

R($\mathrm{B}\overline{\mathrm{A}}\mathrm{A}$) = R(B), entonces R(B) ≤ R(A)

Entonces $\mu(\mathrm{B}') \subset \mu(\mathrm{A}')$

Supongamos que $\mu(\mathrm{B}') \subset \mu(\mathrm{A}')$, entonces $\mathrm{B}' \in \mu(\mathrm{A}')$, $\mathrm{B}^t = k_i(a_i)$, i=1,2,...,n;

$\mathrm{B}^t = \begin{pmatrix} k_1 a_{11} & \dots & k_1 a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_n a_{1n} & \cdots & k_n a_{mn} \end{pmatrix}$

c. Sean B y C no nulas, entonces $B\overline{A}C$ es invariante para cualquier escogencia de $\overline{A}$ si, y solo si $\mu(B') \subset \mu(A')$ y , $\mu(C) \subset \mu(A')$ análogo.

vii. A $A\overline{(A^*A)}A^*$ es hermitiana e invariante para cualquier escogencia de g-inversa.

Demostración: consideremos la diferencia $D = A(\overline{A^*A})\text{-}A^*\overline{(A^*A)}^{*}A^*$

$$D = A(\overline{A^*A})^*A^*\text{-}A(\overline{A^*A})A^*$$

$$D\,D^* = A(\overline{A^*A})A^*A\overline{(A^*A)}^{*}A^*\text{-}\,A(\overline{A^*A})A^*A(\overline{A^*A})A^*\text{-}A\overline{(A^*A)}^{*}A^*A(\overline{A^*A})A^* + A(\overline{A^*A})A^* -$$

$$\text{-}A(\overline{A^*A})A^*.$$

Multiplicando A^* a derecha y A por la izquierda, tenemos:

$$(A^*D)\,(D^*A) = A^*A(\overline{A^*A})A^*A\overline{(A^*A)}^{*}A^*A\text{-}\,A^*A(\overline{A^*A})A^*A(\overline{A^*A})A^*A -$$

$$\text{-}A^*A\overline{(A^*A)}^{*}A^*A(\overline{A^*A})A^*A + A^*A(\overline{A^*A})A^*A - A^*A(\overline{A^*A})A^*A$$

$$= \begin{array}{l} A^*A(\overline{A^*A})A^*A\text{-}\,A^*A(\overline{A^*A})A^*A - A^*A(\overline{A^*A})A^*A + \\ + A^*A(\overline{A^*A})A^*A = 0 \end{array}$$

Es decir, $(A^*D)(D^*A) = 0$, entonces $(A^*D)(A^*D)^* = 0$, entonces $A^*D = 0$, luego D =0. Ahora $A^*A(\overline{A^*A})A^*\text{-}\,A\overline{(A^*A)}^{*}A^* = 0$ lo que implica que $A^*A(\overline{A^*A})A^* = A\overline{(A^*A)}^{*}A^*$.así $A(\overline{A^*A})A^*$ es hermitiana. ∎

3.3 INVERSA DE MOORE – PENROSE

También esa conocido el hecho de que existen distintos tipos de matrices inversas generalizadas, entre las que se destaca el concepto de Moore-Penrose, que entre otras goza de la propiedad de su unicidad. De modo general, pueden distinguirse distintos tipos de ellas que obedecen a diferentes condiciones.

El concepto de **inversa generalizada** de una matriz A_{mxn} debida originalmente a E. H. Moore (1920), quien desarrollo el concepto en el contexto de las transformaciones lineales de espacios vectoriales n-dimensiónales en espacios vectoriales m-dimensiónales, sobre un campo complejo con la norma euclidiana usual. Esencialmente, la definición esta dada como sigue:

Definición *(**Inversa de Moore**): Una matriz G de orden $n \times m$ es la inversa generalizada de A de orden $m \times n$, si $AG = P_A$, $GA = P_G$.*

Donde P_A es el operador (matriz), que proyecta vectores en E^m sobre $\mu(A)$, y P_G en el operador (matriz) que proyecta vectores en E^n sobre $\mu(G)$, donde $\mu(A)$ ($\mu(G)$) es el espacio vectorial generado por las columnas de A (G).

Aquí P_A y P_G representan la idea de, como se dijo antes "algo así " como una matriz idéntica I_{mxm}, a izquierda o I_{nxn} a derecha.

Sin conocer la existencia del trabajo de Moore. R. Penrose (1.955) definió una inversa generalizada la cual es la misma que la de Moore, cuando la norma asociada en E^m y E^n es del tipo simple $\|X\|=(X^tX)^{\frac{1}{2}}$. Tal definición es :

***Definición** (**Inversa de Penrose**): G es la inversa generalizada de A si*

i) $AGA = A$
ii) $GAG = G$
iii) $(AG)^t = AG$*, es simétrica.*
iv) $(GA)^t = GA$*, es simétrica.*

La definición así dada se conoce como la "**inversa de Moore–Penrose** "; estas cuatro condiciones son usualmente llamadas las condiciones de Penrose. La prueba de Penrose de la existencia de una matriz G que satisfaga las condiciones i)-vi) se basa sobre las siguientes dos lemas:

Lema 1: Si $X^tX = 0$, entonces $X = 0$.

Lema 2: Si $PX^tX=QX^tX$, entonces $PX^t = QX^t$

Demostración de los lemas: El lema es cierto, puesto que si $X^tX = 0$, entonces la suma de los cuadrados de los elementos de cada fila son cero, y de aquí, los elementos mismos deben ser 0. esto es,

$X^tX = 0$, entonces $\sum_{i=1}^{n} X_{ik}X_{kj}$, luego $\sum_{k=i}^{n} X_{ik}^2 =0$, para cada i, j, entonces $X_{ij} = 0$ para cada i,j□

Para probar el lema 2, se tiene que $PX^tX=QX^tX$, entonces $PX^tX\text{-}QX^tX=0$, luego $\left(PX^t\text{-}QX^t\right)X=0$, entonces $\left(PX^t\text{-}QX^t\right)X(P\text{-}Q)^t=0$, por lo tanto $\left(PX^t\text{-}QX^t\right)\left[(P\text{-}Q)X^t\right]^t=0$, así $\left(PX^t\text{-}QX^t\right)\left(PX^t\text{-}QX^t\right)^t=0$

$$PX^t-QX^t=0 \Rightarrow \boxed{PX^t=QX^t}$$

La prueba de existencia de G comienza estableciendo que las condiciones i. y iii son verdaderas si y solo si $AA^tG^t=A$ que es equivalente a que $GAA^t=A^t$ (1) similarmente, las condiciones ii, vi son verdaderas si y solo si $G.G^tA^t=G$ (2).

Esto es, alguna matriz G que satisface (1) y (2), también satisface las condiciones de Penrose, y queda establecida la existencia de G.

Para probar la unicidad, supongamos que existe otra matriz, Sea M, satisface las condiciones de Penrose. De las condiciones i y vi, se puede tener que $A^tAM=A^t$, (3) y de ii, y iii se tiene que $A^tM^tM=M$ (4). substituyendo (3) en (2) se tiene que G = GAM, substituyendo (4) en esta y usando (1), tenemos que $G=GAM=GAA^tM^tM=A^tM^tM=M$.

Así, G satisface (1) y (2), satisface las condiciones de Penrose, y es única.

- Para establecer la forma como G se puede determinar, supongamos que $G=T.A^t$, (5) para alguna matriz T .

$G=T.A^t$ satisface las condiciones (1) y (2), y por tanto las condiciones de Penrose. La determinación de T se plantea como sigue:

Consideremos la matriz A^tA. Esta matriz es cuadrada, así como sus potencias, Para

$t\in Z$, y como consecuencia del teorema de Cayley Hamilton[1]*, una serie de escalares $c_{1,}c_2....,c_t$ no todos cero, tales que $c_1A^tA+c_2(A^tA)^2+....+c_t(A^tA)^t=0$. Si c_r es el [1]primer coeficiente en esta igualdad, diferente de cero, entonces se define T como:

---

[1] ***Teorema de Cayley – Hamilton :**

Sea A una matriz n*n, $f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^n+C_{n-1}\lambda^{n-1}+C_{n-2}\,\lambda^{n-2}+....+C_1\lambda+C_0$ su polinomio característico. Evolución $f(A)=0$. Esto es $A^n+C_{n-1}A^{n-1}+....+C_1A+C_0=0$

$t\in Z \qquad T=\left(-\dfrac{1}{c_r}\right)\left[c_{r+1}I+c_{r+2}A^tA+....+c_t\left(A^tA\right)^{t-r-1}\right] \qquad (6)$

Multiplicado directamente,

$$T\left(A^tA\right)^{r+1}=\left(-\frac{1}{c_r}\right)\left[c_{r+1}\left(A^tA\right)^{r+1}+c_{r+2}\left(A^tA\right)^{r+2}+...+c_t\left(A^tA\right)^{t}\right]$$

$=\left(-\dfrac{1}{c_r}\right)\left[-c_1A^tA-c_2\left(A^tA\right)^2-...-c_r\left(A^tA\right)^r\right]$, por ser $c_1A^tA+c_2\left(A^tA\right)^2+...+c_t\left(A^tA\right)^t=0$.

siendo c_r el primer $c\neq 0$, tenemos que

$T\left(A^tA\right)^{r+1}=\left(-\dfrac{1}{c_r}\right)\left(-c_r\left(A^tA\right)^r\right)=\left(A^tA\right)^r$. Esto es,

$T\left(A^tA\right)^{r+1}=\left(A^tA\right)^r. \qquad (7).$

(7) se puede expresar como $T\left(A^tA\right)^r\left(A^tA\right)=\left(A^tA\right)^{r-1}\left(A^tA\right)$, y por el lema 2, tenemos que $T\left(A^tA\right)^rA^t=\left(A^tA\right)^{r-1}A^t$. Aplicando sucesivamente el lema 2 llegamos a que $TA^tAA^t=A^t$. Y como $TA^t=G$, tenemos $GAA^t=A^t$ que es la condición (1) así, $G=TA^t$, un T definido como en (6) satisface las condiciones (1) y (2), y por tanto las condiciones de Penrose. $G=TA^t$ es la única inversa generalizada.

Por ejemplo:

Para $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\-1&0&2\\1&2&0\end{pmatrix}$ obtenemos $A^t=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&-1&0&2\\2&1&-2&0\end{pmatrix}$. Así ,

$A^tA=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&5&-1\\4&-1&9\end{pmatrix}$ obteniendo el polinomio característico de (A^tA) se tiene que $c_1=66$, $c_2=-17$ y $c_3=1$ y debe ser que $66\ (A^tA)\ -17\left(A^tA\right)^2+\left(A^tA\right)^3=0$;

siendo r =1 se tiene que $T=\left(-\dfrac{1}{66}\right)\left(-17I+A^tA\right)$, o sea

$$T=\left(-\frac{1}{66}\right)\left(\begin{bmatrix}-17 & 0 & 0\\ 0 & -17 & 0\\ 0 & 0 & -17\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 5 & -1\\ 4 & -1 & 9\end{bmatrix}\right)= =\frac{1}{66}\begin{bmatrix}14 & -2 & -4\\ -2 & 12 & 1\\ -4 & 1 & 8\end{bmatrix}$$ luego

$$\text{G=T.A}^{t}=\frac{1}{66}\begin{bmatrix}14 & -2 & -4\\ -2 & 12 & 1\\ -4 & 1 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -2 & 0\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}6 & -2 & -6 & 10\\ 0 & -11 & 0 & 22\\ 12 & 7 & -12 & -2\end{bmatrix}$$ es la inversa de Penrose de A.

La matriz G definida por las condiciones impuestas en la definición, es única para una matriz dada A. Pero hay muchas matrices M, las que satisfacen la condición de Penrose AMA = A, pondremos mas atención a esta matriz M que al a inversa G de Penrose.

Finalmente **Graybill** (1966) sugiere un método para hallar G: hallar X y Y tales que $AA^{t}X = A$,y $A^{t}AY = A^{t}$ (8). A partir de aquí , $G = XAY$. La prueba de que G satisface las condiciones de Penrose se hace usando (8) Y el lema 2 para probar que $AXA = A = AYA$.

La idea de inversa generalizada en su concepción actual es básicamente igual a la inversa de Penrose. A partir de dicha definición, podemos enunciar otras propiedades importantes de la g-inversa:

Teorema 3:

i. Si A es una matriz de orden m×n y existe una g-inversa $\overline{A}$, entonces $\overline{A}$ es de orden n×m.

Demostración: Si A es de orden m×n y si A$\overline{A}$ es simétrica, por la condición 1., A$\overline{A}$ es cuadrada de orden m ×m, luego $\overline{A}$ es n×m. □

Un modo de escribir $\overline{A}$ ésta basado sobre la factorización de A $_{n\times m}$ como A = BC donde B y L tienen columna llena y rango fila respectivamente igual a r entonces $\overline{A}$ de la definición es $\overline{A}=C^{t}(CC^{t})^{-1}(B^{t}B)^{-1}B^{t}$

ii. Si A $_{n\times m}$ de Rang(A $_{n\times m}$)= r, entonces A $_{n\times m}$ = B $_{n\times r}$ C $_{r\times m}$

Demostración: Dada A se puede escribir P y Q son no singulares

$$PAQ=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q^{-1}, \text{ entonces } \begin{array}{l} P^{-1}=\left(B_{n\times r} IW_{n\times(n-1)}\right) \\ Q^{-1}=\left(\dfrac{C_{r\times m}}{Z_{(n-r)\times m}}\right) \end{array}$$

$$[BW]\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ Z \end{bmatrix}=[KO]\begin{bmatrix} C \\ Z \end{bmatrix}=B_{n\times r}C_{r\times m}$$

Rang($A_{n\times n}$)= n, rango completo

Rang($A_{n\times m}$)= n < m, rango completo fila

Rang($A_{n\times m}$) = m < n, rango completo columna.

Con el siguiente ejemplo veremos una forma como se factoriza una matriz

$$\text{Dada } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = BC$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l} F_3 \to F_1 + F_3 & C_3 \to C_3 + C_1 \\ F_3 \to 2F_2 + F_3 & C_4 \to -C_1 + C_4 \\ F_2 \to \frac{1}{2}F_2 & C_3 \to -C_2 + C_3 \\ & C_4 \to C_2 + C_4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \approx P, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx Q, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AP^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad AQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} = BC$$

$$B^tAC^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$(B^tAC^t)^{-1} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{36}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir de la definición de Penrose se puede demostrar la unicidad de la g-inversa, veamos:

iii. Para cada matriz A existe una matriz $\overline{A}$ que satisface las condiciones de Penrose.

Demostración: Si A = 0, entonces $\overline{A}$ = 0 y satisface las condiciones de la definición. Supongamos que A $\neq$ 0, por lo anterior tenemos, si A es de rango r $\geq$ 0, puede ser factorizada como A = BC donde B es m$\times$r, de rango r y C es r $\times$n de rango r.

Siendo que B^tB y CC^t son ambas no singulares, definiendo $\overline{A}=C^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^t$ (10). Se puede verificar fácilmente que (10) cumple la condiciones de la definición. En efecto verificando:

- $A\overline{A}A=BCC^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^tBC$, y como $I=CC^t(CC^t)^{-1}$, e, $I=(B^tB)^{-1}B^tB$ entonces tenemos $A\overline{A}A = BIIC = A$.

- $\overline{A}A\overline{A}=C^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^tBCC^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^t$ y como $I=(CC^t)^{-1}CC^t$, e $I = (B^tB)^{-1}B^tB$, tenemos $\overline{A}A\overline{A}= C^t(CC^t)^{-1}II(B^tB)^{-1}B^t = \overline{A}$.

Igualmente tenemos con las otras propiedades, verificando:

- $\overline{A}A$ es simétrica: $\overline{A}A = (A\overline{A})^t$

$A\overline{A}=BCC^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^t \quad = \quad B\left[CC^t(CC^t)^{-1}\right](B^tB)^{-1}B^t \quad = \quad BI(B^tB)^{-1}B^t$
$= B(B^tB)^{-1}B^t = I$.

$$\begin{aligned}
(A\overline{A})^t = \overline{A}^t A^t &= (C^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^t)^t(BC)^t \\
&= (C^t(CC^t)^{-1}(B^tB)^{-1}B^t)^t C^tB^t \\
&= \left[(C^t(CC^t)^{-1})((B^tB)^{-1}B^t)\right]^t C^tB^t \\
&= ((B^tB)^{-1}B^t)^t(C^t(CC^t)^{-1})^tC^tB^t \\
&= B((B^tB)^{-1})^t((CC^t)^{-1})^tCC^tB^t \\
&= B((B^tB)^{-1})^t((C^t)^{-1}(C)^{-1})^tCC^tB^t \\
&= B((B^tB)^{-1})^t((C^t)^{-1}(C)^{-1})CC^tB^t \\
&= B((B^tB)^{-1})^t(CC^t)^{-1}CC^tB^t \\
&= B((B^tB)^{-1})^t IB^t = B(B)^{-1}(B^t)^{-1}B^t = I\ \square
\end{aligned}$$

- $A\overline{A}$ es simétrica: $A\overline{A} = (\overline{A}A)^t$ (La demostración se hace en forma análoga a la anterior)

iv. Cada matriz A tiene una única g-inversa.

v. La g-inversa de la transpuesta de A es igual a la transpuesta de la g-inversa de A. Esto es: $\overline{A^t} = \left(\overline{A}\right)^t$.

vi. La g-inversa de $\overline{A}$ es igual a A. Esto es, $\overline{\overline{A}}=A$.
Demostración: Se verifican las condiciones de g-inversa.

vii. El rango de la g-inversa de A es igual al rango de A.
Demostración: De la condición iii de la definición, $A\overline{A}A = A$, y por la propiedad anterior, Rang(A)= Rang($A\overline{A}A$) $\leq$ Rang($\overline{A}$) por otro lado, si $\overline{A}A\overline{A} = \overline{A}$, entonces se tiene que Rang($\overline{A}$) = Rang($A\overline{A}A$)$\leq$Rang(A). Esto es, Rang(A) $\leq$Rang($\overline{A}$) y Rang($\overline{A}$) $\leq$Rang(A). luego Rang(A) = Rang($\overline{A}$)$\square$

viii. Para alguna matriz A, $\overline{(A^tA)}= \overline{A}\ \overline{(A^t)}$.

ix. Para alguna matriz A, $\overline{\left(A\overline{A}\right)} = A\,\overline{A}$. y $\overline{\left(\overline{A}A\right)} = \overline{A}A$

Cualquier matriz G que satisfaga AGA es llamada una inversa generalizada de A; cuando A es n×m entonces G es m×n, entonces G es "una " inversa generalizada de A y no "la" inversa generalizada porque para cualquier A dada hay generalmente muchas matrices G que satisfacen la condición anteriormente dada. La excepción es cuando A es no singular, en este caso hay solo una G que satisfaga AGA = A, ella es inversa regular G = A^{-1} = M.

A continuación daremos dos deducciones de G:

A. Deducción de operadores fila.

Como parte del desarrollo de la formula canónica equivalente PAQ = C, utilizaremos las operaciones entre filas.

PA = $\begin{bmatrix} T & R \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ T es triangular superior y no singular de orden γ_A, entonces:

$$G = \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P$$

en ocasiones cuando algunas columnas se cambian (Q) se necesita la forma apropiada.

$$PAQ = \begin{bmatrix} T & R \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } G = Q\begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P$$

Por ello desarrollemos el siguiente ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} F_3 \to F_1 + F_3 \\ F_3 \to -2F_2 + F_3 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B. **Deducción de la forma diagonal**: PAQ es diagonal, esto es:

$$PAQ = \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; r = r_A, \quad \Delta^{-1} = \begin{bmatrix} \Delta_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es una inversa generalizada de Δ con $\Delta\,\Delta^{-1}\,\Delta = \Delta$.

$$G = Q\begin{bmatrix} \Delta_r & X \\ Y & Z \end{bmatrix}P$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \Delta_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{entonces } \Delta_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = Q\begin{bmatrix} 1 & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & X_2 \\ Y_{11} & Y_{12} & Z_1 \\ Y_{21} & Y_{22} & Z_2 \end{bmatrix}P \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & X_2 \\ Y_{11} & Y_{12} & Z_1 \\ Y_{21} & Y_{22} & Z_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

X, Y, Z pueden ser cualesquiera valores y todos definen la relación AGA = A, esto enfatiza la existencia de muchas inversas generalizadas G para cualquier A particular.

3.4 . ALGORITMO PARA EL CALCULO DE LA G- INVERSA

Si las condiciones de la g inversa dadas por su definición, y las propiedades de la g-inversa son mas o menos claras y directas, en realidad no se puede afirmar lo mismo de la forma de calcularla. Igual que el algoritmo para el calculo de la inversa de Penrose, el (o los) algoritmo(s) de la g-inversa están determinados por condiciones mas o menos particulares en cada caso.

Un primer algoritmo, que parece ser el mas simple y directo, y el cual se reduce en el fondo, otros algoritmos, esta dado por las siguientes proposiciones:

Teorema 4:

i. Si A es una matriz m $\times$n de rango m, entonces $\overline{\mathrm{A}}=\mathrm{A}^{\mathrm{t}}\left(\mathrm{AA}^{\mathrm{t}}\right)^{-1}$ y $\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}}=\mathrm{I}$. si el rango de A es n, entonces $\overline{\mathrm{A}}=\left(\mathrm{A}^{\mathrm{t}}\mathrm{A}\right)^{-1}\mathrm{A}^{\mathrm{t}}$ y $\overline{\mathrm{A}}\mathrm{A}=\mathrm{I}$.

El siguiente ejemplo ilustra el teorema:

Si $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 4\end{bmatrix}$, como A es 2$\times$3, y rango (A) = 2 entonces $\overline{\mathrm{A}}=\mathrm{A}^{\mathrm{t}}\left(\mathrm{AA}^{\mathrm{t}}\right)^{-1}$.

Teniendo que $\mathrm{A}^{\mathrm{t}}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}$, y, $\left(\mathrm{AA}^{\mathrm{t}}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & -1\\ -1 & 21\end{bmatrix}$

$$\left(\mathrm{AA}^{\mathrm{t}}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}10 & -1\\ -1 & 21\end{bmatrix}=\frac{1}{208}\begin{bmatrix}21 & 1\\ 1 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{21}{208} & \frac{1}{208}\\ \frac{1}{208} & \frac{10}{208}\end{bmatrix}.$$ Así

$$\overline{\mathrm{A}}=\mathrm{A}^{\mathrm{t}}\left(\mathrm{AA}^{\mathrm{t}}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}21/208 & 1/208\\ 1/208 & 10/208\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23/208 & 22/208\\ 62/208 & -4/208\\ 4/208 & 40/208\end{bmatrix}$$

Como un corolario ala proposición anterior, se presenta el siguiente enunciado que se ha utilizado dentro del desarrollo del algoritmo planteado por la proposición siguiente.

Corolario 1: Si a es un vector no cero, entonces $a^{-}=\left(a^{t}a\right)^{-1}a^{t}$.

ii. Sea A una matriz m$\times$n y sea A_{n-1} la matriz que consiste de las primeras n - 1 columnas de A. Sea a_n la n-ésima columna de A. La g-inversa de A esta dado por $\mathrm{A}^{-}=\begin{bmatrix}\overline{\mathrm{A}}_{\mathrm{n-1}}-\overline{\mathrm{A}}_{\mathrm{n-1}}\mathrm{a}_{\mathrm{n}}\overline{\mathrm{b}}_{\mathrm{n}}\\ \overline{\mathrm{b}}_{\mathrm{n}}\end{bmatrix}$, donde $b^{-}n$ es un vector 1$\times$m , es la g inversa del vector b_n que se define por:

$$b_n = \begin{cases} (\mathrm{I} - \mathrm{A}_{n-1}\overline{\mathrm{A}_{n-1}})a_n, \text{ si } a_n \neq \mathrm{A}_{n-1}\overline{\mathrm{A}_{n-1}}a_n \\ \dfrac{\left[\mathrm{I} - a_n^t(\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_{n-1}^t)a_n\right]\overline{(\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_{n-1}^t)}a_n}{a_n^t\overline{(\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_{n-1}^t)}\,\overline{(\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_{n-1}^t)}a_n}, \text{ si } a_n = \mathrm{A}_{n-1}\overline{\mathrm{A}_{n-1}}a_n \end{cases}$$

Un derrotero para aplicar la proposición es:

Sea $\mathrm{A}_{m\times n}$, y sea C$_k$ $m\times k$ compuesta por las primeras k columnas de A. Sea A_{k-1} la matriz compuesta por las primeras k-1 columnas de C$_k$, y a$_k$ la k-esima columna de C$_k$. así, $C_K = [\mathrm{A}_{K-1}a_k]$. En particular, $C_2 = [\mathrm{A}_1 a_2] = [a_1 a_2]$. Determinado C$_2$, se calcula $\overline{C_2}$ haciendo uso del corolario.
Se define $C_3 = [\mathrm{A}_2 a_3] = [C_2 a_3]$., y se calcula $\overline{C_3}$ por el mismo corolario. Conocido $\overline{C_2}$ y $\overline{C_3}$, se continua el proceso hasta obtener $C_n = [\mathrm{A}_{n-1}a_n] = [C_{n-1}a_n]$. conocido $\overline{C_{n-1}}$, se aplica por ultima vez la proposición para obtener $\overline{\mathrm{C}_n} = \overline{\mathrm{A}_n}$.

Como ilustración a lo anterior, considérese el calculo de la g-inversa de $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Inicialmente, $C_2 = [\mathrm{A}_1 a_2] = [a_1 a_2]$. implican $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Por el corolario, tenemos $a^- = \left(a^t a\right)^{-1} a^t$, obtenemos que $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, y

$$\overline{A_1} = \overline{a_1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

comparamos $A_1\overline{A_1}a_2$ con a_2. como $A_1\overline{A_1}a_2 \neq a_2$, tomamos

$$b_2 = (\mathrm{I}\text{-}\mathrm{A}_1\overline{\mathrm{A}_1})a_2 = \left(\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\2\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2 & -1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\\-1\end{pmatrix},$$

conocido b2, calculamos $\overline{b_2}$ usando el corolario:

$$\overline{b_2} = \left[\begin{pmatrix}1/2 & 1 & 1/2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\\0\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}1/2 & 1 & 1/2 & 0\end{pmatrix} = \left(\frac{4}{6}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1/2 & 1 & 1/2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3 & 2/3 & 1/3 & 0\end{pmatrix},$$ así,

$\overline{\mathrm{C}_2} = \overline{\mathrm{A}_2} = \begin{bmatrix}\overline{A_1} - \overline{A_1}a_2\overline{b_2}\\ \overline{b_2}\end{bmatrix}$, siendo que

$$\overline{A_1} - \overline{A_1}a_2\overline{b_2} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & 0 & 1/3\end{pmatrix},$$ tenemos

que $\overline{\mathrm{C}_2} = \overline{\mathrm{A}_2} = \begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 0 & 1/3\\ 1/3 & 2/3 & 1/3 & 0\end{bmatrix}$. Ahora calculamos

$\overline{\mathrm{C}_3} = \overline{\mathrm{A}_3} = \begin{bmatrix}\overline{A_2} - \overline{A_2}a_3\overline{b_3}\\ \overline{b_3}\end{bmatrix} = \overline{\mathrm{A}}$, conocido $\overline{\mathrm{A}_2}$, calculamos $\mathrm{A}_2\overline{\mathrm{A}_2}a_3$:

$$A_2\overline{A_2}a_3 = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&1\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 0 & 1/3\\ 1/3 & 2/3 & 1/3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&1\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/3\\-1\\-2/3\\1/3\end{bmatrix} \neq a_3$$

luego $b_3 = (\mathrm{I}-\mathrm{A}_2\overline{\mathrm{A}_2})a_3 = a_3 - \mathrm{A}_2\overline{\mathrm{A}_2}a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/3 \\ 0 \\ 5/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$, de aquí,

$$\overline{b_3} = \left[\begin{pmatrix} -5/3 & 0 & 5/3 & 5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5/3 \\ 0 \\ 5/3 \\ 5/3 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} -5/3 & 0 & 5/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$= \left(\frac{75}{9}\right)^{-1} \begin{pmatrix} -5/3 & 0 & 5/3 & 5/3 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{25}\right) \begin{pmatrix} -5/3 & 0 & 5/3 & 5/3 \end{pmatrix}$, y finalmente

$\overline{\mathrm{C}_3} = \overline{\mathrm{A}_3} = \begin{bmatrix} \overline{A_2} - \overline{A_2}a_3\overline{b_3} \\ \overline{b_3} \end{bmatrix}$; siendo $\overline{\mathrm{A}_2}a_3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1 \end{pmatrix}$, y $\overline{A_2}a_3\overline{b_3} = \begin{pmatrix} 1/15 & 0 & -1/15 & -1/15 \\ 3/15 & 0 & -3/15 & -3/15 \end{pmatrix}$,

$\overline{\mathrm{A}_2} - \overline{\mathrm{A}_2}a_3\overline{b_3} = \begin{pmatrix} 4/15 & 5/15 & 1/15 & 6/15 \\ -2/15 & 10/15 & 6/15 & 3/15 \end{pmatrix}$, y así, $\overline{\mathrm{C}_3} = \overline{\mathrm{A}_3} = A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 6 \\ -2 & 10 & 8 & 3 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Es interesante observar que el uso de la proposición anterior puede hacerse mas general, en el siguiente sentido:

Si A es $m\times n$, $m \geq n$, y rango(A) = n, entonces $\overline{\mathrm{A}} = \left(\mathrm{A}^t\mathrm{A}\right)^{-1}\mathrm{A}^t$, lo mismo, si rango(A) =k < n, entonces $\overline{\mathrm{A}} = \overline{\left(\mathrm{A}^t\mathrm{A}\right)}\mathrm{A}^t$.Esta extensión se basa en el hecho de que $\overline{\left(\mathrm{A}^t\mathrm{A}\right)}\mathrm{A}^t = \overline{\mathrm{A}}\,\overline{(\mathrm{A}^t)}\mathrm{A}^t = \overline{\mathrm{A}}(\overline{(\mathrm{A})}\mathrm{A})^t = \overline{\mathrm{A}}\mathrm{A}\overline{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{A}}$.

Como ilustración a esta extensión, sea $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$, A es 4×2, y rango(A) = 1.

$$A^tA=\begin{pmatrix}0&1&-1&-2\\0&2&-3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&2\\-1&-3\\-2&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&17\\17&49\end{pmatrix}$$, $\mathrm{Det}(A^tA)=5$, entonces A^tA es no singular, y $\overline{(A^tA)}=(A^tA)^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}49&-17\\-17&6\end{pmatrix}$, luego

$$\overline{A}=\overline{(A^tA)}A^t=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}49&-17\\-17&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-1&-2\\0&2&-3&-6\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}0&15&2&4\\0&-5&-1&-2\end{bmatrix}$$

El siguiente teorema y un corolario pueden ser usados para calcular la g-inversa de matrices de grado pequeño o mediano, que tengan arreglo especial así:

Teorema 5:
sea $A_{m\times n}$, con $m\geq n$, y sea $B_{n\times n}$ alguna matriz que satisfaga $(A^tA)^2B=(A^tA)$,entonces, la g-inversa de A esta dada por: $\overline{A}=B^tA^t$.

Corolario 2: sea A alguna matriz simétrica de orden n, entonces la g-inversa de A esta dada por $\overline{A}=B^tAB$.

Como ilustración del corolario anterior, sea A $=\begin{bmatrix}1&2\\2&0\end{bmatrix}$,por el corolario , cualquier solución del sistema $A^2B=A$, pues $\begin{bmatrix}1&2\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1/2\\1/2&-1/4\end{bmatrix}=$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1/2\\1/2&-1/4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1/2\\1/2&-1/4\end{bmatrix}.$$

Teorema 6: Si B es simétrica de orden m, la g-inversa de B esta dada por $\overline{B}=(BK)^2B$, donde K es cualquier solución del sistema $B^2KB^2=B^2$.

Teorema 7: sea B una matriz simétrica de orden m y de rango r,, y sea P una matriz no singular de orden m, tal que $P^t B^2 P = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = R_r$. Entonces una matriz K que satisface la ecuación $B^2 K B^2 = B^2$ esta dada por $K = PR_r P^t$.

Demostración:

Sea $K = PR_r P^t$, entonces $B^2 P = (P^t)^{-1} R_r$ implican $B^2 = (P^t)^{-1} R_r P^{-1}$. Entonces

$B^2 K B^2 = (P^t)^{-1} R_r P^{-1} P R_r P^t (P^t)^{-1} R_r P^{-1} =$

$(P^t)^{-1} R_r I R_r I R_r P^{-1} = (P^t)^{-1} R_r R_r R_r P^{-1} = (P^t)^{-1} R_r P^{-1} = B^2$.

Los teoremas anteriores pueden ser usados para determinar la g-inversa de una matriz dada. Por ejemplo, si B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, B es simétrica de orden 3.

de aquí, $\overline{B} = (BK)^2 B$, donde $K = PR_r P^t$, por rango(B)=2 y P se obtiene de B^2 efectuando operaciones Elementales en filas:

B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces B^2 = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $P^t B^2 P = R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, implican

$P^t = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. De aquí,

$$K = PR_2 P^t = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ así}$$

$$\overline{B} = (BK)^2 B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Teorema 8: sea A una matriz de orden $m\times n$. La g-inversa de A esta dada por $\overline{A}=\left(A^tAK\right)^2 A^tAA^t$,donde K es cualquier solución de la ecuación $\overline{A}=\left(A^tA\right)^2 K\left(A^tA\right)^2=\left(A^tA\right)^2$.

Demostración: Haciendo $B=A^tA$, B es simétrica, y aplicando los teoremas anteriores, se sigue el resultado.

Teorema: Sea A una matriz de orden $m\times n$ de rango r, donde 0 < r, r < m, r < n. Sea A=$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, donde la submatriz A_{11} es una matriz r×r, de rango r.

Entonces, la g-inversa de A esta dada por:

$\overline{A}=\begin{bmatrix} A_{11}^tBA_{11}^t & A_{11}^tBA_{21}^t \\ A_{12}^tBA_{11}^t & A_{12}^tBA_{21}^t \end{bmatrix}$, donde B esta dada por:

B = $\left(A_{11}A_{11}^t+A_{12}A_{12}^t\right)^{-1}\times A_{11}\left(A_{11}^tA_{11}+A_{12}^tA_{12}\right)^{-1}$.

El teorema 8 es usado en aplicaciones de matrices particionadas.

Teorema 9: sea A una matriz de rango r. Entonces la g-inversa de A puede ser calculada por los siguientes pasos:

1.calcule $B=A^tA$

2.Haga C_1= I

3.Calcule C_{i+1} = $C_{i+1}=I\left(\frac{I}{i}\right)Tr\left(C_iB\right)-C_iB$, para i = 1,2,3,...,r-1.

4.Calcule. $rC_rA^t/TrC_rB=\overline{A}$.

Se tiene también $TrC_rB\neq 0$ y $C_{r+1}B=0$.

La prueba de este teorema puede ser consultado en “On best aproximate solutions of linear matriz equations”. De R. Penrose. Este algoritmo es muy utilizado por la facilidad de automatizar su calculo. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento a seguir:

Sea $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, A es 4×3, y rango(A) = 3 = r.

1. $B=A^tA=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{bmatrix}$.

2. Sea $C_1 = I_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $C_1B = B$, $TrC_1B = 19$.

3. $C_2 = I_2(1/1)\mathrm{TrC_1B\text{-}C_1B} = \begin{bmatrix} 19 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 19 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -3 & 9 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 3 & -1 \\ 3 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$,

$C_2B = \begin{bmatrix} 68 & -28 & -3 \\ -28 & 35 & -9 \\ -3 & -3 & 85 \end{bmatrix}$, $TrC_2B = 188$

$C_3 = I_3(1/2)\mathrm{TrC_2B\text{-}C_2B} = \begin{bmatrix} 94 & 0 & 0 \\ 0 & 94 & 0 \\ 0 & 0 & 94 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 68 & -28 & -3 \\ -28 & 35 & -9 \\ -3 & -3 & 85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 28 & 3 \\ 28 & 59 & 9 \\ 3 & 9 & 9 \end{bmatrix}$, como $r = 3$, y $C_{r+1} = C_r = 0$.

4. $\overline{A} = \dfrac{rC_rA^t}{TrCrB} = \dfrac{3C_3A^t}{TrC_3B}$, siendo $TrC_3B = 225$,

$$\overline{A} = \frac{1}{225} \times 3 \times \begin{bmatrix} 26 & 28 & 3 \\ 28 & 59 & 9 \\ 3 & 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{3}{225} \begin{bmatrix} 20 & 25 & 5 & 30 \\ 10 & 50 & 40 & 15 \\ -15 & 0 & 15 & 15 \end{bmatrix}$$

iii. Supongamos $A_{n\times m} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, A_{11} submatriz principal no singular r_A una inversa generalizada obtenida de la partición de A como:

$A_{n\times m} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ es $G_{m\times n} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ con la verificación $AGA = A$ usando $A = A_{21}A^{-1}_{11}A_{12}$.

Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&4&3\\3&-1&2&-2\\5&-4&0&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&4&3\\0&-7&-10&-11\\0&-14&-20&-22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&4&3\\0&-7&-10&-11\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&4&3\\0&1&10/7&11/7\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$r_A = 2$

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&2\\3&-1\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}4&3\\2&-2\end{matrix}}\\\boxed{\begin{matrix}5&-4\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}0&-7\end{matrix}}\end{bmatrix},\qquad G=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\3&-1\end{vmatrix}^{-1}&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\end{bmatrix}_{4\times3},\qquad A_{11}^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\end{bmatrix},\quad \text{luego}$$

$$G=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Una forma general: No es necesario para la submatriz no singular de orden r, estar en la posición encontrada. Puede estar en cualquier sitio en A, después de lo cual el siguiente algoritmo puede ser desarrollado. sean R y S las matrices de permutación tales que RAS induce una submatriz no singular de orden r, a la posición encontrada, es decir RAS = $\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}$ con B_{11} no singular de orden r entonces una inversa generalizada de B es: $F=\begin{bmatrix}B_{11}^{-1}&0\\0&0\end{bmatrix}$, G = SFR es una inversa generalizada de A, ahora debido a la ortogonalidad de matrices de permutación implica que:

$$A=R^tBS^t=R^t\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}S^t\text{, esto equivale a:}$$

$$G=SFR=(R^tF^tS^t)=\left\{R^t\begin{bmatrix}B_{11}^{-1}&B_{12}\\B_{13}&B_{14}\end{bmatrix}S^t\right\}^t$$

con el siguiente algoritmo para encontrar G:

i.) En A encontrar cualquier submatriz no singular de orden r_A y denota W (en lugar de B_{11}).

ii.) Invertir y transponer W: $(W^{-1})^t$

iii.) En A reemplazar cada elemento de W por el correspondiente elemento de $(W^{-1})^t$

iv.) Reemplazar todos los elementos de A por cero.

v.) Transponer la matriz resultante.

vi.) El resultado es una inversa generalizada.

A partir de ello realicemos un ejemplo:

Sea A = $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 15 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 15 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 15 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 15 \\ 0 & -3 & -18 & -60 \\ 0 & -2 & -12 & -40 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 15 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ r_A = 2$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \ W^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \ (W^{-1})^t = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 \\ 2.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

En A reemplazo de $(W^{-1})^t$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 2.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix}$ implica que G = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 & 2.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es una inversa generalizada de A

Tiene entre otras las siguientes matrices como inversas generalizadas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 25 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & -0.1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1.5 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Ellas se deducen de invertir submatrices 2×2:

$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ respectivamente.

3.5 ARBITRARIEDADES EN UNA INVERSA GENERALIZADA.

Una generalización de $A_{n\times m} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ es $G = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, A_{11} no singular es que:

$$G' = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} - UA_{21}A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}V - A_{11}^{-1}A_{12}WA_{21}A_{11}^{-1} & U \\ V & W \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Es una generalización de A para arbitrarios U, V y W una importante consecuencia de (1) es la evidencia que suministra para la existencia de inversas generalizadas no singulares de matrices singulares. Suponemos $U = -A_{11}^{-1}A_{12}W$, V = 0 y W no singular entonces de (1) nos queda:

$$G' = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}W \\ 0 & W \end{bmatrix} \qquad (2)$$

La cual es no singular.
Ilustremos esta situación, por ejemplo:

Sea A = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

La partición de $A_{3\times 3}$ nos queda:

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ \hline A_{21}\ A_{11}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_2 \,|\, A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 \\ \hline \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \,| & \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \\ 0 & 1 \,| & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad -A_{11}^{-1}A_{12}W = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad |G| = \frac{1}{2}$$

$$AGA = A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una caracterización adicional de las arbitrariedades es cuando

Teorema 10: Si G es una inversa generalizada de A también lo es:

$$G^* = GAG + (IGA)T + S(I\text{-}AG)$$

Para cualesquiera matrices T y S de orden apropiado.
Demostración: Suponga G' es alguna inversa generalizada diferente de G es decir, $G' \neq G$ generalizadas.

T = G'
S = GAG'
GAG +(I-GA)G' + GAG'(I-AG)=GAG +G'-GAG' + GAG'- GAG'AG
=GAG + G' – GAG=G', es inversa generalizada de G.

3.6 MATRICES SIMÉTRICAS

Teorema 11: $A = A^t$ tienen algunas propiedades como:

3.6.1 la forma diagonal

$$PAP' = \begin{bmatrix} \Delta_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = P\begin{bmatrix} \Delta_r^{-1} & X \\ Y & Z \end{bmatrix}P^{-1}$$

Es una generalizada de una matriz simétrica que no es necesariamente simétrica sin embargo AGA = A, A'G'A'= A', lo que implica que AG'A = A.

3.6.2 Matrices definidas no negativas:

A es una matriz definida no negativa y simétrica A = KK' donde K es de rango columna, entonces KK' es no singular, luego la inversa de Moore-Penrose de A es:

$$A^t = K(K^tAK)^{-1}K^t = K(K^tK)^{-2}K^t$$

Ilustremos la situación anterior:

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \\ x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c & x \\ b & d & y \end{bmatrix}$, encontrando los valores de a, b, c, d, obtenemos:

$\begin{matrix} a^2+b^2=1, \ ac+bd=2, \ ax+by=0 \\ c^2+d^2=1, \ cx+dy=0, \ x^2+y^2=0 \end{matrix}$, entonces resolviendo el sistema obtenemos a =1, b = 0, como ac = 2, se tiene que c = 2,, x = 0, e, y = 0, d $=\pm\sqrt{3}i$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{3}i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}i & 0 \end{bmatrix}$$

$$K^tK = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{3}i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2\sqrt{3}i \\ 2\sqrt{3}i & -3 \end{bmatrix}, \quad \left\|K^tK\right\| = 3 \neq 0$$

$$A^t = K\left(K^tK\right)^{-2}K^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{3}i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2\sqrt{3}i \\ 2\sqrt{3}i & -3 \end{bmatrix}^{-2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{3}i \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 5 & 2\sqrt{3}i \\ 2\sqrt{3}i & -3 \end{bmatrix}^{-1}\right)^2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}i & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{3}i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/3 & -4\sqrt{3}i/9 \\ -4\sqrt{3}i/9 & 13/9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}i & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4\sqrt{3}i}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{5\sqrt{3}i}{9} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}i & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^t=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iii. se cumple: $AA^tA=A$ y $A^tAA^t=A^t$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c & x \\ b & d & y \end{bmatrix},\ \text{implican}\ \begin{matrix} a^2+b^2=0,\ ac+bd=2,\ ax+by=0 \\ c^2+d^2=1,\ cx+dy=1,\ x^2+y^2=0 \end{matrix}$$

entonces resolviendo el sistema obtenemos a =i, b = 1, c = $-\frac{3i}{4}$, x = $\frac{i}{2}$, e, y = $\frac{1}{2}$, d = $\frac{5}{4}$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} i & 1 \\ -\frac{3i}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{K}\underbrace{\begin{bmatrix} i & -\frac{3i}{4} & \frac{i}{2} \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{K^t}=\begin{bmatrix} -\frac{29}{46} & \frac{5i}{16} \\ \frac{5i}{16} & \frac{45}{16} \end{bmatrix},\ \left|K^tK\right|=5\neq 0,$$

$$A^t=K(K^tK)^{-2}K^t=K((K^tK)^{-1})^2K^t$$

$$=\begin{bmatrix} i & 1 \\ -\frac{3i}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{9}{16} & \frac{i}{16} \\ \frac{i}{16} & \frac{29}{80} \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} i & -\frac{3i}{4} & \frac{i}{2} \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} i/2 & 3/10 \\ i/2 & 1/2 \\ -i/4 & 3/20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & -3i/4 & i/2 \\ 1 & 5/4 & 1/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4/5 & 1/4 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$A^t=\begin{bmatrix} 4/5 & 1/4 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

se cumple: $AA^tA=A$ y $A^tAA^t=A^t$

3.7. MEJOR SOLUCIÓN APROXIMADA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES:

Como se dijo en la introducción, un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas puede escribirse como AX = b, donde A es una matriz $m\times n$ de coeficientes, X es un vector $n\times 1$ de variables y b es un vector $m\times 1$ de términos independientes.

El planteamiento de un tal sistema implica la pregunta de si existe un vector X que satisfaga el sistema, esto es si el sistema es consistente. Bajo el supuesto de que lo sea, cabe preguntarse cuantas soluciones existen. Si el sistema no es consistente, se puede plantear si existen vectores X que "aproximadamente" satisfagan el sistema.

Unos criterios para responder estas preguntas son planteadas en los teoremas siguientes:

Teorema 12: el sistema de ecuaciones lineales es consistente si, y solo si $A\bar{A}b=b$.

Demostración: $\Rightarrow)$ supongamos que el sistema AX = b es consistente, esto es existe un vector X_0 $n\times 1$ tal que AX_0 = b. Por teoremas de existencia y unicidad de la g-inversa (teoremas 2 y 3) existe para la matriz A una g-inversa $\bar{A}$, entonces AX_0 = b, implican $A\bar{A}AX_0=A\bar{A}b$. Pero $A\bar{A}A=A$, luego $AX_0=A\bar{A}b$ y así $b=A\bar{A}b$.

$\Leftarrow)$ Ahora suponemos que $b=A\bar{A}b$. Sea AX = b un sistema de ecuaciones lineales. Haciendo $X=\bar{A}b$, y substituyendo en la hipótesis $b=A\bar{A}b$, tenemos que AX = b, esto es $X=\bar{A}b$ es solución del sistema. Luego es consistente.

Los siguientes teoremas establecen condiciones para la existencia de soluciones y la forma de ellas.

Teorema 13: si el sistema de ecuaciones, para cada vector AX = b tiene una solución, entonces, para cada vector W_{n+1}, el vector X dado por $X = \overline{A}b + \left(I - \overline{A}A\right)W$ es una solución del sistema. además, toda solución del sistema puede ser escrita en la misma forma de X , para un vector dado.

Teorema 14: si A es una matriz $m\times n$, X es una matriz $n\times 1$, B una matriz $p\times q$, y C una matriz $m\times q$ entonces una condición necesaria y suficiente para que una matriz exista y satisfaga AXB = C es que $A\overline{A}C\overline{B}B = C$; la solución general esta dada por $X = \overline{A}C\overline{B} + H - \overline{A}AHB\overline{B}$, donde H es alguna matriz $n\times p$.

Teorema 15: si A es una matriz no singular de orden $n\times n$, entonces el sistema AX = b tiene una solución.
Demostración: como A es no singular, A^{-1}existe y X = A^{-1}b es solución. además, si A es real y como b es un real entonces también lo es.

Teorema 16: una solución para el sistema AX = b existe si, y solo si el rango dela matriz A es igual al del rango de la matriz aumentada $[A/b]$.

Teorema 17: una condición suficiente y necesaria para que exista una solución del sistema AX = b es que haya una c-inversa A_C de A tal que AA_Cb = b.
Demostración: $\Rightarrow)$asumamos que AX = b tiene una solución, sea X_0, así AX_0 = b. Sea A_C alguna c-inversa de A. multiplicando a ambos lados por AA_C tenemos que $AA_CAX_0 = AA_C\, b = AX_0 = b$. Así, $AA_C\, b = b$.
$\Leftarrow)$ asumiendo que $AA_C\, b = b$, sea $X_0 = A_C\, b$, entonces $AA_C\, b = A\, X_0 = b$. Así $A\, X_0 – b$ y la solución existe para el sistema.

Teorema 18: si A es una matriz $m\times n$, de rango m, entonces AX = b tiene una solución.
Demostración: por el teorema 9 si A es $m\times n$ de rango m entonces $A\overline{A} = I$, y de aquí, $b = A\overline{A}b$. Por el teorema 16 existe una solución.

Algunos criterios para la determinación del numero de soluciones esta dado en los siguientes dos teoremas:

Teorema 19: Si el sistema AX = b es consistente entonces la solución $AX_0 = \overline{A}b$ es única si, y solo si $A\overline{A} = I$.

Teorema 20: sea el sistema $AX = b$ consistente donde A es una matriz $m \times n$ de rango $r>0$ y $b \neq 0$, entonces hay exactamente $n-r+1$ vectores linealmente independientes que satisfacen el sistema.

Si el sistema $AX = b$ es inconsistente, no existe X tal que $AX = b$, o mejor para todo X, $AX \neq b$. En otro sentido se puede escribir que $AX-b = e(x)$, donde $e(x)$ es un vector no cero de residuos o de desviaciones. Si no existe un vector X tal que $e(x)=0$ (esto es que $AX = b$), puede ser deseable buscar un vector X tal que $e(x)$ sea lo mas pequeño posible, o que tal X sea una "solución aproximada" del sistema, y mas, que sea **la mejor aproximación**.

La siguiente definición formaliza el concepto, y el teorema 18 próximo establece, digamos, el algoritmo para tal mejor aproximación.

Definición: *el vector X_0 se define como la mejor solución aproximada (BAS) del sistema de ecuaciones $AX-b = e(x)$, si y solo si:*

3. para todo $X \in E^n$, se obtiene la relación $(AX-b)^t(AX-b) \geq (AX_0-b)^t(AX_0-b)$; y

4. para aquel $X \neq X_0$ tal que $(AX-b)^t(AX-b) = (AX_0-b)^t(AX_0-b)$ se obtiene la relación $X^tX > X_0^tX_0$.

Parece evidente que el B.A.S X_0 escogido es tal que minimiza la suma de los cuadrados de las desviaciones; y en caso contrario X_0 es tal que para todo otro vector X, la suma de cuadrados X^tX es mayor que $X_0^tX_0$.

Teorema 21: El B.A.S. del sistema de ecuaciones $AX = b$ es X_0, donde $X_0 = \overline{A}b$.

CAPITULO 4
“PROPUESTA PARA INICIAR ELEMENTOS PROPIOS DE UNA G-INVERSA”

4.1 INTRODUCCIÓN

La presente unidad didáctica pretende que los estudiantes vean el uso potencial de la g-inversa a contextos cotidianos de otras ramas elementales de las matemáticas. Es decir, hacer uso de problemas que no necesitan ser resueltos por álgebra lineal y que se pueden calcular con facilidad, por lo que nos sirven para calcular valores aproximados de algunos sistemas haciendo uso de la mima.

Por tal motivo, nuestro empeño consiste en encontrar una utilidad de la g-inversa motivando a extender mas la teoría, por ello hay entonces mucho por hacer en el álgebra lineal.

4.2 FUNDAMENTACIÓN CONCEPTUAL

Todo parece indicarnos que en los estudiantes no aparece la idea clara en cuanto a los sistemas lineales, que muchos de dichos problemas se dice que tienen solución única, múltiple o simplemente no tienen solución.

Un error frecuente en los estudiantes, tal vez por la formación recibida, es que para ellos todos los sistemas deben tener solución, esto se da a razón de la no presentación de sistemas donde no se tiene solución o aquellos donde el sistema es compatible indeterminado.

Las vías usadas para los sistemas presentados en la secundaria y aun en el pregrado son: el método grafico donde se hace uso de la geometría analítica, métodos elementales de resolución de sistemas vía algebraica (sustitución, igualación, reducción) que no es otra cosa que la enseñanza a despejar ecuaciones mas que a resolverlas, una tercera posibilidad que se puede presentar tal vez en cursos mas avanzados es el trabajo con matrices y determinantes. En este ultimo método de trabajo tenemos ciertas restricciones, por ejemplo si trabajamos con determinantes nuestra condición es que los sistemas sean cuadrados y cuyo determinante diferente de cero.

Partamos del siguiente ejemplo: Encontrar un numero de dos cifras tal que la suma de sus cifras sea 4, además que dicho numero sea Palíndromo o capicúa.

Veamos algunos desarrollos del problema; partamos del hecho que el problema debe cumplir dos condiciones: que el numero es de dos cifras las cuales deben sumar cuatro, es decir: Sean x, y números naturales (vamos a encontrar solamente soluciones naturales) y tal que x + y = 4, la segunda condición esta dada a partir del hecho de ser capicúa, es decir, xy = yx que no esa otra cosa que el desarrollo decimal del numero, veamos: 10x + y = 10y + x resolviendo dicho problema tenemos que por las condiciones anteriores se desarrolla el sistema dando como resultado que x = y, es interesante observar que para resolver dicho problema no fue necesario hacer uso de algún tipo de método algebraico o grafico usados dentro del álgebra lineal, aquí el tipo de solución es única (el numero es22).

El razonamiento anterior nos hace pensar que todos los sistemas se resuelven igual sin importar el numero de variables; pero, ¿Que pasa si el sistema es de tres variables y se forman solo dos ecuaciones?, para responder la pregunta veamos el siguiente ejemplo, que pasa si el numero no es de dos sino de tres cifras; Sean x, y, z números naturales y tal que x + y +z = 4, la segunda condición esta dada a partir del hecho de ser capicúa, es decir, xyz = zyx que no esa otra cosa que el desarrollo decimal del numero veamos 100x + 10y + z = 100z + 10y + x resolviendo dicho sistema tenemos que por las condiciones anteriores se desarrolla el sistema dando como resultado, primero que 100x + z = 100z + x , lo cual implica que 99x = 99z, así x = z, lo anterior conlleva al hecho que no importa el termino de la mitad siempre y cuando los extremos sean iguales, pero por la primera condición impuesta, este sistema no puede tomar todas las soluciones por ejemplo 131 aunque sus extremos son iguales la suma de sus cifras no es igual a 4, es importante desatacar el hecho que se ha condicionado el sistema y para el desarrollo hemos establecido ciertos pasos para su solución es decir, el sistema que se planteo fue:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ 100x + 10y + z &= 100z + 10y + x \end{aligned}$$

el cual se desarrollo por cualquier método utilizado en el álgebra elemental, es importante siempre conocer las soluciones del sistema, aquí solamente existen dos, luego hay múltiples soluciones (202 y 121), entonces ¿será así de fácil calcular la solución de cualquier sistema? ¿que pasa si se desea encontrar los valores para los cuales se cumplen las condiciones del problema?

Las condiciones del problema están dadas para que puedan existir una, muchas o ninguna soluciones, en caso en que se desee encontrar un numero que cumpla las condiciones con cuatro cifras, debemos hacer uso de métodos mas avanzados por ejemplo hacer uso del álgebra lineal (en este caso de el tema del trabajo de la g-inversa).

Partamos del hecho que tenemos el numero con cuatro cifras es decir, xyzw, además, x + y + z + w = 4, en este caso es un poco mas complicado su representación decimal, pero aun se puede realizar $10^3x + 10^2y + 10z + w = 10^3w + 10^2z + 10y + w$, solucionando esta ecuación tenemos:

$$999x + 90y = 999w + 90z$$
$$999x + 90y - 999w - 90z = 0$$
$$111x + 10y - 111w - 10z = 0$$
$$111x - 111w = 10z - 10y, \text{ luego}$$
$$x - w = (10z - 10y)/111$$

además de la primera ecuación tenemos x + w = 4 –z -y , expresando en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{10}{111} & -\frac{10}{111} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ resolviendo el sistema tenemos}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{10}{111} & -\frac{10}{111} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{111} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{111} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{10}{111} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{111} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{10}{111} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{111} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{10}{111} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z & w \\ -\frac{10}{111}z & -w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{10}{111} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -z & -w \\ 0 & -\frac{10}{111}z & w \end{pmatrix}$$

aplicando determinantes tenemos:

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta s|} = \frac{\begin{vmatrix} 4-z-w & 1 \\ 0+\frac{10}{111}z+w & \frac{10}{111} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{10}{111} \end{vmatrix}}; \qquad |\Delta s| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{10}{111} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta s|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-z-w \\ \frac{10}{111} & 0+\frac{10}{111}z+w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{10}{111} \end{vmatrix}}; \qquad |\Delta s| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{10}{111} \end{vmatrix} \neq 0,$$ al resolver el sistema se nota que

$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta s|}$, $x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta s|}$ dependen de w y de z, esto quiere decir que el sistema tiene infinitas soluciones.

Todo lo anterior conlleva a propiciar espacios para poder estudiar este tipo de sistemas.

4.3 JUSTIFICACIÓN DE LA PROPUESTA

La educación a través de la historia no ha sido estática, sino que ha venido cambiando
en cuanto al qué enseñar, cómo enseñar, a quienes enseñar, en dónde enseñar, etc.

La concepción de las matemáticas también ha cambiado de parecer. Actualmente se señala que las matemáticas no constituyen un saber dado sino una actividad y un proceso.

Esta perspectiva considera el conocimiento matemático como dinámico, construible y constructivo, generado y organizado por las exigencias y conveniencias sociales y, por lo tanto, resulta que es comunicable y negociable por las personas en distintos contextos.
Además, la gran cantidad de conocimiento que produce la humanidad, la velocidad con que se revalúa y la cantidad de información a la que se tiene acceso en la actualidad, pone de manifiesto que la función de las instituciones educativas en general no se puede centrar en la transmisión de conocimientos sino más bien en proporcionar a los estudiantes una buena fundamentación y herramientas para el auto-aprendizaje.

Por ejemplo, el conocimiento de la solución de sistemas lineales no implica que los estudiantes deban a aprender a efectuar cálculos de gran complejidad mentalmente o con métodos avanzados. Más importante es que sean capaces de entender qué representa la solución de un sistema como medio para interpretar la realidad y qué aportes matemáticos puede brindar.

Los estudiantes deben desarrollar óptimamente sus habilidades intelectuales (pensamiento formal, crítico, creativo, etc.) y actitudinales (hábitos de estudio, disciplina de autoaprendizaje, destrezas para trabajar en equipo, etc.). Para ello es oportuno tener espacios donde el estudiante esté enfrentado con otras actividades mentales como analizar, proponer alternativas diferentes, crear opciones, sustentar sus ideas, mirar en forma crítica las ideas de los demás y refutarlas con argumentos válidos, utilizar racionalmente la tecnología y toda la información a la que tiene acceso.

De tal manera, el uso de la g-inversas en la enseñanza es una herramienta muy útil para abordar algunas temáticas, como por ejemplo, para ilustrar aquellos problemas donde el sistema no tenga solución por los métodos antes descritos y además su utilidad a otras áreas. Los ejemplos ya citados ilustran el potencial de esta herramienta en la enseñanza matemática.

El uso de la g-inversa no implica que los estudiantes ya no tengan que usar algoritmos. Deben conocerlos, pero dicho conocimiento debe surgir de las situaciones problemáticas que han dado lugar a que se necesiten dichos algoritmos, además que nos amplia el panorama en cuanto a los sistemas lineales.

Partiendo de estos supuestos, en esta propuesta de trabajo se presentan una serie de actividades donde se involucra el estudio de la g-inversa, dirigidos a que los estudiantes adquieran y consoliden conceptos, comprendan y utilicen procedimientos y adquieran actitudes positivas hacia el aprendizaje y uso de las Matemáticas.

LOGRO

- Utiliza las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones.

INDICADORES DE LOGRO

- Identifica el procedimiento necesario para encontrar las aproximaciones a los sistemas lineales.

- Formula conjeturas y las comprueba.

LOGRO

- Elabora estrategias para el análisis de los resultados a través de la calculadora dando unas solución aproximada a los sistemas de ecuaciones de rango no completo o donde la solución es incompatible indeterminada.

INDICADORES DE LOGRO

- Valora el trabajo con la calculadora para descubrir hechos y agilizar procedimientos de cálculo matemático.

- Ve en la calculadora una herramienta útil para representar gráficamente las aproximaciones de los sistemas de ecuaciones.

LOGRO

- Demuestra confianza en la propia capacidad para alcanzar resultados palpables y útiles.

INDICADORES DE LOGRO

- Desarrolla las actividades propuestas y expresa inquietudes ante situaciones que se le presenten.

- Muestra una actitud crítica ante los resultados obtenidos cuando utiliza la g-inversa en el desarrollo de problemas.

4.4 ELECCIÓN Y SECUENCIACIÓN DE CONTENIDOS

Para abordar esta propuesta didáctica se realizará de la siguiente manera:

En primera instancia se abordará de forma teórica el estudio de los sistemas lineales (aproximación de primer grado lineal) como se hace usualmente en un curso de álgebra. Para ello dará una explicación del contenido matemático, se realizarán gráficas y algunos ejemplos.

Seguidamente exploraremos el trabajo con el uso de la g-inversa primero teórica (exposición, trabajo, clase por parte del profesor), para que los estudiantes se familiaricen con este concepto. De igual manera, los ejemplos trabajados en la aproximación de los sistemas lineales nos servirán para trabajar en esta sesión.

Luego, los estudiantes realizarán un taller que aborda la aproximación de un sistema de ecuaciones lineales donde es necesario hacer uso de la g-inversa. El taller girará en torno a actividades exploratorias para que los estudiantes conjeturen y obtengan conclusiones.

Finalmente, se realizará la socialización del taller y las conclusiones obtenidas luego del trabajo colectivo.

Dentro de los conocimientos previos para la realización del taller los estudiantes deben haber tenido algún contacto con los sistemas de ecuaciones lineales.

4.5 LA ACTIVIDAD

Se pretende resolver la actividad en 8 horas de clase. En la realización de la actividad es importante el uso de los conceptos mencionados anteriormente y desarrollados en los capítulos anteriores.

Se busca dar prioridad al análisis, la discusión, la reflexión antes que a la cantidad de problemas.

Los estudiantes se dividen en grupos de cuatro personas. Los estudiantes deben presentar un informe. Posteriormente se hace la puesta en común del trabajo realizado. Allí los estudiantes tienen la posibilidad de confrontar su trabajo, validar sus ideas, etc.

El trabajo en el desarrollo de esta actividad girará en torno al uso de la g-inversa como un apoyo decisivo para la solución de los problemas planteados.

4.6 DIFICULTADES

El tema de los sistemas lineales presenta cierta dificultad para los estudiantes, por lo anteriormente expuesto. Se trata de entender cómo un sistema, puede tener una solución aproximada, a partir del desarrollo de la g-inversa y también puede ser igual al uso de la resolución de los sistemas usados en álgebra elemental.

La no familiaridad de los estudiantes con algunos sistemas (homogéneos, heterogéneos, compatibles determinados, compatibles indeterminados, etc.)

Con el fin de solventar estas dificultades, pretendemos:

Incentivar en los estudiantes el trabajo en equipo, auto-aprendizaje, etc.

Dar algunas indicaciones sobre el trabajo de la g-inversa como un trabajo natural acerca de los sistemas vistos dentro de la secundaria, A través del trabajo en un curso de álgebra lineal, los estudiantes podrán observar la solución de manera clara y precisa entre los sistemas de ecuaciones.

4.7 EVALUACIÓN

Se tiene en cuenta:

- El trabajo en equipo y el trabajo individual.
- La claridad y recursividad en la presentación del trabajo grupal.
- La argumentación ante las preguntas o discrepancias con los otros grupos.

4.8 TALLER PROPUESTA ENSEÑANZA G-INVERSA

1. Determine los métodos de resolver un sistema de ecuaciones lineales sin hacer uso del álgebra lineal

2. A partir de la pregunta anterior, resuelva el siguiente sistema:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\
2x_1 - x_2 + x_3 &= \ \ 2 \\
3x_1 \qquad + 2x_3 &= \ \ 1
\end{aligned}
$$

3. ¿Qué tipo de dificultades se le presentaron?, de no ser así ¿cual de los métodos utilizados le pareció más útil?

4. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?

Ahora:

5. ¿Qué métodos usted conoce para resolver sistemas de ecuaciones lineales que e aprenden en un curso de álgebra lineal?. (descríbalos brevemente)

6. A partir de lo anterior resuelva el siguiente sistema:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x & + & 2y & + & 4z & = & 0 \\
3x & - & y & + & 2z & = & 0 \\
5x & - & 4y & + & 0z & = & 0
\end{array}
$$

   a. ¿qué tipo de sistema es?, ¿cuál es el rango del sistema ? ¿cuántas soluciones tiene el sistema?
   b. Calcule la solución del sistema por el método de Gauss-Jordán.
   c. Calcule la solución del sistema por la regla de Cramer.
   d. Compare la soluciones obtenidas en los ítems a, b, c.

7. Cuando resuelve un sistema por el método de la regla de Cramer ¿qué restricciones existen? ¿ son las mismas para el calculo de determinantes?.

8. ¿qué pasa si el sistema es singular?

9. partir de todo lo anterior se puede resolver el siguiente sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a. calcule el determinante del sistema.
b. Encuentre una solución del sistema
c. Calcule la inversa del sistema.

10. Defina inversa de una matriz

11. Que condiciones debe tener la inversa de una matriz, ¿se pueden aplicar las condiciones a la matriz A del numeral 9?

12. ¿ se puede construir un concepto semejante al de inversa común tal que resuelva sistemas no cuadrados o singulares?

13. Que condiciones debe cumplir la inversa de una matriz construida en el numeral 12?

BIBLIOGRAFÍA:

[1] **Campbell S. L and Meyer Jr**. 1979, Generalized Inverses or linear transformations, Editorial Dover.

[2] **Cepeda, J. F**, 1992, La inversa generalizada o g-inversa de una matriz cualquiera., IV Jornadas de matemáticas y Coloquio Regional de Santander-UIS., Bucaramanga.

[3] **Guacaneme, J**. 1987, la g-inversa y el análisis funcional, curso de profundización. Universidad Nacional de Colombia, Bogota.

[4] **Marmolejo, A,** 1985, Aspectos geométricos de la inversa generalizada. Tesis de Especialización. U niversidad Nacional de Colombia, Palmira.

[5] **Pringle R. M. and Rayner A.A.,** 1975, Generalized Inverse Matrices whit applications to statistics., Griffin London.

[6] **Peña, M.**, 1992, Estadística, Modelos y Métodos 2-Modelos Lineales y Series Temporales, Alianza Editorial S. A., Madrid, (Pág. 494).

[7] **Rodríguez, N. Y Cepeda F. J**., 1991, Apuntes de clase, curso de especialización: convenio UN/UPTC- Duitama.