VISUALIZACIÓN DE DIFERENTES OBJETOS QUE SE ESTUDIAN EN LA TOPOLOGÍA ALGEBRAICA CON AYUDA DE SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Trabajo realizado por:

Angie Lizeth Galán Cipagauta

Cod. 2014140043

Maria Andrea Del Pilar Patiño Cifuentes

Cod. 2013240089

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2019-I

VISUALIZACIÓN DE DIFERENTES OBJETOS QUE SE ESTUDIAN EN LA TOPOLOGÍA ALGEBRAICA CON AYUDA DE SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Trabajo realizado por:

Angie Lizeth Galán Cipagauta
Cod. 2014140043

Maria Andrea Del Pilar Patiño Cifuentes

Cod. 2013240089

Asesora del trabajo:

María Nubia Soler Álvarez

Trabajo para obtener el título de Licenciadas en Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2019-I

Dedicatoria

¡Que nadie se quede afuera, se los dedicamos a todos!

Sobre todo a esos seres de luz que hacen que nuestros días sean maravillosos. Con su amplia sonrisa, con esos ojos cafés, tan cafés como las semillas del girasol que crece en los huertos de Colombia. Gracias por ser nuestras cómplices, nuestras confidentes, nuestras amigas, por ayudarnos a crecer por amarnos, por ser tan ustedes, pero sobre todo gracias por nunca cortarnos las alas, se lo dedicamos a ustedes mamás.

Angie Galán, Andrea Patiño

Un matemático que no tenga también algo
de poeta jamás será un completo matemático.

Karl Weierstrass

Agradecimientos

En estas lineas queremos agradecer a todas las personas que hicieron posible este logro y que de alguna manera estuvieron con nosotras en los momentos difíciles, alegres y tristes. Estas palabras son para ustedes. A nuestros padres por todo su amor, comprensión y apoyo pero sobre todo infinitas gracias por la paciencia que nos han tenido. No tenemos palabras para agradecerles las incontables veces que nos brindaron su apoyo en todas las decisiones que hemos tomado a lo largo de nuestras vidas, unas buenas, otras malas, otras locas. Gracias por darnos la libertad de desenvolvernos como seres humanos.

A mis amigos. Con todos los que compartimos dentro y fuera de las aulas. Aquellos amigos del cole, que se convierten en amigos de vida y aquellos que serán mis colegas, gracias por todo su apoyo y diversión.

A nuestra asesora Nubia Soler, quien desde el primer momento nos brindó su amistad, su bondad, y fue de gran apoyo en momentos difíciles de nuestras vidas; gracias por la paciencia, dedicación, orientación y por guiarnos en el desarrollo de este largo estudio.

Y por ultimo a todos aquellos que contribuyeron en nuestra formación académica para lograr ésta meta.

"No hay amor mas sincero que el amor
a las matemáticas, ellas nunca fallan"

Anónimo

	FORMATO
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 5

1.|Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	VISUALIZACIÓN DE DIFERENTES OBJETOS QUE SE ESTUDIAN EN LA TOPOLOGÍA ALGEBRAICA CON AYUDA DE SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA.
Autor(es)	Galán Cipagauta, Angie Lizeth; Patiño Cifuentes, María Andrea Del Pilar
Director	Soler Álvarez, María Nubia
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2019. 67 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional U.P.N.
Palabras Claves	CAMINOS CERRADOS, GEOGEBRA, GRUPO FUNDAMENTAL, HOMOMORFISMO, HOMOTOPÍA, PUNTO BASE, GEOGEBRA, TOPOLOGÍA ALGEBRAICA.

2.Descripción

Este documento presenta una ruta seguida para estudiar el concepto de Grupo Fundamental en la Topología Algebraica. Para construir esta ruta se estudiaron definiciones, ejemplos y teoremas de esta rama de la matemática. Para estudiar en detalle algunas definiciones y teoremas fue necesario recurrir a ejemplos que podían ser representados en el software de geometría dinámica GeoGebra.

La ruta expuesta en este trabajo de grado se divide en cuatro partes, que parten de la definición de función continua que se estudia en la Topología:

- ✓ Homotopía que hace referencia a la deformación continua entre dos funciones.
- ✓ Caminos que son un caso particular de funciones, que se pueden deformar a partir de la Homotopía Relativa $\{0,1\}$ que se pueden operar por medio de la multiplicación de caminos obteniendo una estructura topológica y de grupo.
- ✓ Algunos ejemplos conocidos del Grupo Fundamental son: el Grupo Fundamental $\mathbb{R}^n$ es un grupo Trivial, el Grupo Fundamental de la circunferencia es homomorfo ha $\mathbb{Z}$ y el Grupo Fundamental del toro es homomorfo $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB		Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012		Página 2 de 5

3.Fuentes

Para el desarrollo del trabajo de grado se tomaron algunas fuentes, las cuales hacen referencia en la Topología Algebraica.

Espanier, E. H. (1966). Algebraic Topology. Mc Graw Hill, New York.

Hatcher, A. (2001). Algebraic Topology. Copyirght.

Hohenwarter, M, & Preinter, J. (march de 1997). ynamic Mathematics with GeoGebra, Journal of online mathematics and its aplications (7). Obtenido de https://www.maa.org/press/periodicals/loci/joma/dynamic-mathematics-with-geogebra .

Kosniowski, C. (1989). Topología Algebraica. Barcelona, España: Reverté, S.A.

Macho Stadler, M. (2008). Topología Algebraica. Euskal Herriko Unibertsitatea: Universidad del País Vasco.

Macho Stadler, M. (2015). Topología Algebraica. Euskal Herriko Unibertsitatea: Universidad del País Vasco.

Moreno Armella, L. (2014). ¿Cómo impactan las tecnologías los currículos de la Educación Matemática?, XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recife Brasil.

Munkres, J. (s.f.). Prentice-Hall: Englewood Cliffs,.

Muñoz Q., J. M. (2002). Introducción a la teoría de conjuntos. Bogotá, D. C,: Universidad Nacional de Colombia.

Neira, C. (2012). Topología General. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Osorno, A. (2018). Invitación a la teoría de homotopía: Grupo fundamental y espacios recubridores. Lecturas Matemáticas.

Rubiano, G. (2001). Topología. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Rubiano, G. (2007). Topología Algebrica. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Tejada Jiménez, D. M. (2000). Introducción a la Topología Algebraica. Medellin, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

4. Contenidos

Este documento contiene cuatro capítulos en los que se expone el estudio realizado sobre el Grupo Fundamental de la Topología Algebraica.

En el primer capítulo contiene los preliminares necesarios para poder entender la teoría que se presentará en el siguiente apartado. En la segunda sección se presenta la teoría necesaria para comprender el Grupo Fundamental de la Topología Algebraica, sus propiedades y algunos ejemplos. En el tercero apartado hace referencia el apoyo del software de geometría dinámica - GeoGebra - para la realización de este estudio, y, por último, en el cuarto capítulo se presentan las reflexiones que se obtienen de este trabajo.

5. Metodología

El proceso de construcción de la ruta de comprensión del concepto de Grupo Fundamental no fue lineal, es decir no se siguió una secuencia estricta de pasos y actividades, sin embargo, es posible identificar algunas acciones que permitieron construir la ruta que se presenta en el capítulo.

- ✓ Se leyeron diferentes libros, especialmente los capítulos 3 y 4 del libro Topología Algebraica de Rubiano y el artículo titulado "Invitación a la teoría de homotopía: Grupo Fundamental y espacios recubridores" de la revista Lecturas Matemáticas en los cuales se encontraban conceptos de homotopía, homotopía relativa, caminos cerrados, topología cociente, levantamiento de caminos y Grupo Fundamental.

- ✓ Se utilizó la estrategia de mapa de ideas para determinar las conexiones que existían entre los conceptos que iban apareciendo y los ya abordados, para lograr la construcción del mapa conceptual de la ruta expuesta en este trabajo de grado.

- ✓ Se construyeron applets que tenían la intención de representar ejemplos que permitieran comprender de mejor manera las definiciones de esta teoría.

- ✓ Se presentó una ponencia en un evento con un avance inicial de la ruta con el propósito de determinar si lo construido era comprensible al lector y para saber si este trabajo puede ser aceptado por la comunidad de matemáticos.
- ✓ Por último, se consolidó este trabajo de grado.

6. Conclusiones

Las reflexiones finales luego de concluir el trabajo de grado se exponen a continuación:

Generales

- ✓ Participar en diferentes eventos con ponencias, talleres o póster, permite afianzar y consolidar nuestros conocimientos matemáticos especialmente en la topología.
- ✓ La participación en el semillero de Topología y la realización de este trabajo de grado ha contribuido al desarrollo de competencias como la lectura, la escritura, la búsqueda de diferentes fuentes, la representación de ejemplos en software de geometría dinámica entre otras cosas, que fueron necesarias para el entendimiento y la comunicación de los temas abordados en el trabajo de grado.
- ✓ Para comprender la teoría de una manera más sencilla, se puede a partir de la visualización de conceptos matemáticos incorporando herramientas tecnológicas.
- ✓ Organizar los conceptos matemáticos en un mapa conceptual permite ver las conexiones entre cada objeto matemático, para una mayor comprensión de la teoría estudiada.
- ✓ Durante el desarrollo de este documento se mostró el proceso que se realizó para poder construir la ruta topológica y algebraica y así poder estudiar el grupo fundamental de la Topología Algebraica.

En relación con la Teoría

- ✓ La reparametrización permite cambiar la velocidad o ritmo que se recorre en los caminos.
- ✓ La multiplicación de caminos en el conjunto de caminos cerrados tiene una estructura de monoide topológico debido a que tiene una operación interna que es

continua, pero carece de elemento idéntico y de elemento inverso. Pero al realizar esta misma operación en el conjunto de las clases de equivalencia se obtiene un monoide algebraico que resulta tener toda una estructura de grupo.

- ✓ Una de las propiedades del grupo fundamental es que el punto base cambia dentro de la misma componente conexa por caminos, por esta razón es suficiente estudiar el subespacio correspondiente.

Apoyo de GeoGebra

- ✓ Es importante el uso de software de geometría dinámica para modelar algunos conceptos de la Topología Algebraica. Que nos permiten conceptualizar o comprender mejor una definición o teorema que se aborda en esta teoría, ayudando en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en la formación de profesores en esta área.

- ✓ El uso de GeoGebra nos ayudó a buscar ejemplos de algunos conceptos y a evidenciar visualmente algunos objetos matemáticos como definiciones y teoremas que se establecieron durante el desarrollo del trabajo.

- ✓ En la Universidad Pedagógica Nacional se aprovechan las características anteriormente mencionadas de GeoGebra en los diferentes cursos que ofrece la Licenciatura en Matemáticas permitiéndonos visualizar características de objetos matemáticos que no son posible entender tan solo con la teoría.

- ✓ Este trabajo se logró debido al dinamismo, rastro y muchas de las propiedades que nos ofrece GeoGebra.

Elaborado por:	Angie Lizeth Galán Cipagauta; Maria Andrea Del Pilar Patiño Cifuentes
Revisado por:	María Nubia Soler Álvarez

Fecha de elaboración del Resumen:	04	07	2019

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y **aprobados** el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado, en el tipo Monografía, titulado: **"Visualización de diferentes objetos que se estudian en la topologia algebraica con ayuda de software de geometria dinámica."**, elaborado por las estudiantes:

Maria Andrea del Pilar Patiño Cifuentes código 2013240089 y cédula 1018468954

Angie Lizeth Galán Cipagauta código 2014140043 y cédula 1024568998

Como requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**, el jurado evaluador asigna **42** puntos al mismo.

Sugerencia de Distinción: Ninguna X Meritoria ___ Laureada ___

En constancia se firma a los 09 días del mes de julio de 2019.

Directora del Trabajo: Profesora MARIA NUBIA SOLER ALVAREZ

Jurado: Profesor LUIS EDUARDO ESPITIA SUPELANO

Contenido

Índice de figuras xii

PRESENTACIÓN DEL TRABAJO 1

OBJETIVOS 6

1. PRELIMINARES 7

1.1. Conjuntos . . . 7

1.1.1. Operaciones entre conjuntos . . . 7

1.1.2. Relaciones . . . 8

1.1.3. Relación de orden . . . 9

1.1.4. Funciones . . . 9

1.2. Álgebra . . . 11

1.2.1. Grupos . . . 11

1.2.2. Homomorfismos . . . 13

1.3. Topología . . . 13

1.3.1. Espacios topológicos . . . 14

2. GRUPO FUNDAMENTAL 16

2.1. Homotopía . . . 18

2.2. Caminos . . . 23

2.3. Propiedades del Grupo Fundamental . . . 27

2.4. Ejemplos de grupos fundamentales . . . 30

2.4.1. Grupo Fundamental $\mathbb{R}^n$ . . . 30

2.4.2. Grupo fundamental de la circunferencia . . . 31

2.4.3. Grupo fundamental del toro . . . 32

3. APOYO DE GEOGEBRA **34**
3.1. Aplicativos para la ruta 1 34
3.2. Aplicativos para la ruta 2 36
3.3. Aplicativos para la ruta 3 39

4. REFLEXIONES **41**
4.1. Generales 41
4.2. En relación a la Teoría 42
4.3. Apoyo de GeoGebra 42

Bibliografía **44**

ANEXOS **46**
.1. Homotopía - Relación de equivalencia 46
.2. Multiplicación de caminos es continua 47
.3. Multiplicación de caminos - clases de equivalencia 47
.4. Grupo Fundamental 49
.5. Homomorfismos Inducidos 51
.6. Grupo fundamental - punto base 52

Índice de figuras

1. Póster realizado para EDEM del 2017. *Fuente: Creación propia.* 3

1.1. Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$. *Fuente: Creación propia.* 9
1.2. Gráfica de la función $f(x) = 2x - 1$. *Fuente: Creación propia.* 10
1.3. Gráfica de la función inversa $f(x) = x^3$. *Fuente: Creación propia.* 11

2.1. Mapa conceptual del Grupo Fundamental de la Topología Algebraica. *Fuente: Creación propia.* 17
2.2. Ruta de Homotopía. *Fuente: Creación propia.* 18
2.3. Homotopía. *Fuente: Creación propia.* 19
2.4. Homotopía relativa. *Fuente: Creación propia.* 20
2.5. Línea que viaja por las funciones en una homotopía. *Fuente: Creación propia.* 21
2.6. Ejemplo Homotopía lineal. *Fuente: Creación propia.* 21
2.7. Ejemplo Homotopía lineal de Homotopía Relativa. *Fuente: Creación propia.* 22
2.8. Ruta que describen los caminos. *Fuente: Creación propia.* 23
2.9. Ejemplos de caminos en $\mathbb{R}^2$. *Fuente: Creación propia.* 24
2.10. Ejemplos de caminos cerrados en $\mathbb{R}^2$. *Fuente: Creación propia.* 24
2.11. Ejemplo de homotopía de caminos. *Fuente: Creación propia.* 26
2.12. Ejemplo de homomorfismo. *Fuente: Creación propia.* 29
2.13. Ejemplos de grupo fundamental. *Fuente: Creación propia.* 30
2.14. $\mathbb{R}$ sobre S^1. *Fuente: Creación propia.* 31
2.15. Proceso de levantamiento. *Fuente: Creación propia.* 32

3.1. Ruta de la Homotopía. *Fuente: Creación propia.* 35
3.2. Aplicativo de la homotopía. *Fuente: Creación propia.* 35
3.3. Aplicativo de la Homotopía relativa. *Fuente: Creación propia.* 36

3.4. Ruta de los caminos. *Fuente: Creación propia.* 36
3.5. Aplicativos de caminos cerrados en $\mathbb{R}^2$. *Fuente: Creación propia.* 37
3.6. Aplicativos de la multiplicación de caminos cerrados en $\mathbb{R}^2$. *Fuente: Creación propia.* 38
3.7. Aplicativos de la Homotopía de caminos cerrados en $\mathbb{R}^2$. *Fuente: Creación propia.* 39
3.8. Ruta de la propiedad de de los Grupo Fundamentales. *Fuente: Creación propia.* 40
3.9. Aplicativo de Homomorfismo Inducido en $\mathbb{R}^2$. *Fuente: Creación propia.* . . 40

PRESENTACIÓN DEL TRABAJO

"Las matemáticas poseen no solo la verdad,
sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y
austera, como la de una escultura"
Bertrand Russell

Desde hace tres años aproximadamente, como parte de un semillero estudiantil, hemos venido realizando estudios relacionados con la Topología y la visualización de algunos de sus objetos a través de herramientas tecnológicas, particularmente con software de geometría dinámica. La exploración que hemos hecho en el campo de la topología nos ha permitido avanzar en el conocimiento matemático y en el diseño de aplicativos que permiten comprender los conceptos de esta área. Los resultados de estos estudios los hemos comunicado a través de talleres, ponencias y póster en diferentes eventos académicos.

El primer ejercicio académico que hicimos en el semillero fue estudiar la definición de Topología. Observamos que este objeto matemático requería al menos dos condiciones importantes para su constitución; para comprender dichas condiciones leímos la definición en varios libros pero no logramos entender lo que significaba que uniones arbitrarias e intersecciones finitas fueran elementos de ese conjunto al que llamamos topología. Buscamos ejemplos en conjuntos finitos y fue allí donde vimos con claridad lo que significaba que se cumplieran las características de la definición. Después de esto fue posible encontrar ejemplos en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^2$ los cuales se podrían representar en GeoGebra.

Dado que el curso de topología es opcional en la Licenciatura y lo que habíamos estudiado nos parecía pertinente para nuestros compañeros, nos pareció importante participar en la Jornada del Educador Matemático -JEM- de ese semestre $(2016 - II)$ proponiendo un taller a través del cual buscábamos que los participantes, desde representaciones hechas en GeoGebra, identificaran y comprendieran las condiciones que se necesitaban para determinar si un conjunto era, o no, una topología. Este taller tuvo una buena acogida por parte de nuestros compañeros, debido a los aplicativos y a que el tema abordado era nuevo para ellos, lo que nos motivo a seguir con el estudio en esta área.

Después de esta indagación inicial, quisimos estudiar otros conceptos de topología, buscamos unos ejemplos que se pudiesen representar en GeoGebra y encontramos estos: base para una topología, adherencia, punto de acumulación, conjunto abierto, conjunto cerrado, exterior, interior y frontera.
Para comprender mejor las definiciones de estos conceptos revisamos diferentes ejemplos que nos permitieron visualizar representaciones de cada uno de estos.

Como producto de este estudio surgió una ponencia para el VII Simposio de matemáticas y educación matemática y VI congreso internacional de matemáticas asistida por computador (MEN 2017) de la Universidad Antonio Nariño. El propósito fue presentar una propuesta en la cual los asistentes pudieran visualizar y discutir en relación con algunos objetos topológicos representados en un software de geometría dinámica. A los participantes les gustó nuestro trabajo, debido a que habíamos buscado incorporar herramientas tecnológicas en el aprendizaje de las matemáticas, enfatizado en la topología, la cual tiene un fuerte componente de abstracción. Esto llevó a que creciera nuestra motivación para seguir trabajando.

También realizamos un taller virtual para el 3$^{\text{er}}$ Congreso Internacional de Matemática Educativa en línea, organizado por el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA - IPN), México. No fue un trabajo fácil debido a que se debía especificar muy bien el taller preparado, el cual hace parte del estudio que habíamos hecho hasta ese momento para que los participantes lograran la exploración los conceptos de base, de conjuntos y puntos especiales de una topología por medio de los aplicativos de GeoGebra.

Posteriormente, nuestro estudio se centró en los espacios métricos. Estos tienen la particularidad de generar nuevas topologías a partir de la definición de bolas abiertas. Para visualizar ejemplos de bolas abiertas de diferentes métricas en $\mathbb{R}^2$ hicimos construcciones en GeoGebra. La bola en $\mathbb{R}^2$ puede ser un círculo, ser vacía, un plano completo, la región encerrada por un cuadrado, un rombo o una región no acotada. Uno de los resultados más sorprendentes de este estudio fue darnos cuenta que las circunferencias tenían diferentes formas si cambiábamos la definición de distancia, se nos ocurrió entonces estudiar otras figuras geométricas como la elipse, la parábola y la hipérbola para participar en el *IV* Encuentro Distrital de Educación Matemática (EDEM 2017) con un postér el que se buscaba mostrar las distintas formas de las secciones cónicas en la distancia: usual, inversa, discreta, mínima, taxista y máxima; como se muestra en la figura 1.

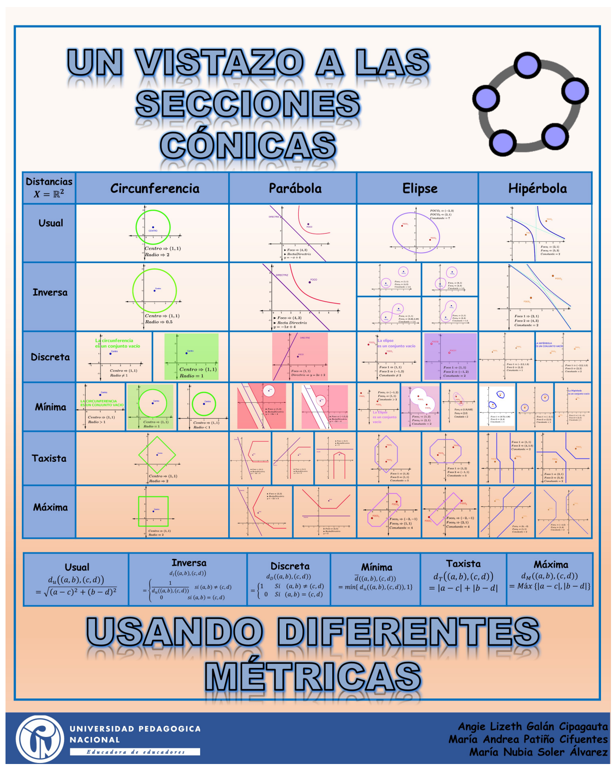


Figura 1: Póster realizado para EDEM del 2017. *Fuente: Creación propia.*

Continuamos con nuestro trabajo estudiando el concepto de función continua, nos dimos cuenta que los objetos matemáticos de imagen directa e imagen reciproca son fundamentales para comprender este concepto. Con el apoyo de GeoGebra se buscó estudiar las representaciones gráficas de imagen directa y recíproca de ciertos conjuntos. Otro ejercicio académico que hicimos fue cambiar la topología del dominio y rango de las funciones estudiadas, lo cual nos permitió una mejor compresión de este objeto matemático; donde observamos la continuidad debido que de abiertos se devuelven abiertos en cada topología. Nos pareció importante dar a conocer en la JEM del semestre $2017 - I$ nuestro trabajo realizado sobre la imagen directa e imagen reciproca, debido que se debe tener muy claro estos conceptos como futuros licenciados en matemáticas, donde se busco que nuestros compañeros de la Licenciatura visualizaran diferentes funciones tanto de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ como de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$. Esta ponencia resulto siendo un éxito, debido a que se contó con una buena participación por parte de los asistentes.

En nuestra exploración de esta área, encontramos documentos de Topología Algebraica donde se relacionaban algunas cosas que habíamos estado estudiando con temas que habíamos abordado en el curso de Teoría de Grupos. Pensamos entonces que podríamos ponernos el reto de estudiar esta área de las matemáticas.

En los primeros acercamientos que realizamos en esta área logramos mostrar algunos ejemplos de la teoría, apoyándonos de la geometría dinámica (GeoGebra) para empezar a estudiar los conceptos de Homotopía y Homotopía lineal. Los resultados obtenidos de este nuevo estudio se mostraron en JEM del semestre $2018 - I$ con un taller que tenia como propósito presentar y construir con los participantes Homotopías de diferentes funciones continuas, a este taller asistieron estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y de otras carreras de la Universidad. Lo que más llamo la atención de los participantes fue como se lograba construir la deformación de dos funciones continuas con el apoyo de GeoGebra, debido a que algunos de ellos no manejaban este software de geometría dinámica.

Debido a que ya estábamos finalizando nuestros estudios de licenciatura y ya habíamos avanzado en el estudio de la Topología Algebraica, nos pareció conveniente desarrollar nuestro trabajo de grado en esta área, teniendo como base lo que habíamos realizado en este último taller. Nos propusimos entonces la tarea de construir una ruta para acceder al concepto de Grupo Fundamental, a partir del estudio de definiciones, ejemplos y teoremas de la Topología Algebraica. El resultado de este ejercicio académico es el que presentamos en este trabajo de grado.

Para comprender un poco mejor algunas definiciones y teoremas que hacían parte de la ruta que íbamos construyendo y dada la experiencia previa que teníamos, fue necesario recurrir a ejemplos que fuesen representados en GeoGebra. El proceso de construcción de la ruta de comprensión del concepto de Grupo Fundamental no fue lineal, es decir no se siguió una secuencia estricta de pasos y actividades, sin embargo es posible identificar algunas acciones que permitieron construir la ruta que se presenta en el capítulo 2.

- Se leyeron diferentes libros, especialmente los capítulos 3 y 4 del libro Topología Algebraica de Rubiano [13] y el articulo titulado Ïnvitación a la teoría de homotopía: Grupo Fundamental y espacios recubridores"de la revista Lecturas Matemáticas [11] en los cuales se encontraban conceptos de homotopía, homotopía relativa, caminos cerrados, topología cociente, levantamiento de caminos y Grupo Fundamental.
- Se utilizó la estrategia de mapa de ideas para determinar las conexiones que exis- tían entre los conceptos que iban apareciendo y los ya abordados, para lograr la construcción del mapa conceptual de la ruta expuesta en este trabajo de grado.
- Se construyeron applets que tenían la intención de representar ejemplos que permitieran comprender de mejor manera las definiciones de esta teoría.
- Se presentó una ponencia a un evento con un avance inicial de la ruta con el propósito de determinar si lo construido era comprensible al lector y para saber si este trabajo puede ser aceptado por la comunidad de matemáticos.
- Finalmente se consolido este trabajo de grado.El cuál está organizado de la siguiente manera: En el primer capítulo contiene los preliminares necesarios para poder entender la teoría que se presentará en el siguiente apartado. En la segunda sección se presenta la teoría necesaria para comprender el Grupo Fundamental de la Topología Algebraica, sus propiedades y algunos ejemplos. En el tercero apartado hace referencia la apoyo del software de geometría dinámica - GeoGebra - para la realización de este estudio, y por último, en el cuarto capítulo se presentan las reflexiones que se obtienen de este trabajo.

OBJETIVOS

En esta sección se presentan los objetivos que se lograron a lo largo del trabajo de grado.

Objetivo general

- Apropiar la conceptualización y el conocimiento de objetos matemáticos de Topología Algebraica que hicieron parte de la construcción de una ruta que lleva al concepto de Grupo Fundamental.

Objetivos específicos

- Estudiar y apropiarse de los conceptos que llevan a la comprensión del Grupo Fundamental.
- Estudiar algunos ejemplos de conceptos de la Topología Algebraica que se pueden representar con Software de geometría dinámica.
- Construir una ruta desde la Topología y el Álgebra que permita ver conexiones entre objetos matemáticos que llevan al concepto del Grupo Fundamental de la Topología Algebraica.

Capítulo 1

PRELIMINARES

"Las matemáticas son un lugar donde puedes hacer cosas
que no puedes hacer en el mundo real"
Marcus du Sautoy

En esta parte, se presentarán las nociones básicas de Conjuntos, Álgebra y Topología, con el fin de brindar las herramientas necesarias para la comprensión de la Topología Algebraica que involucren contenido matemático necesario en el desarrollo del trabajo.

1.1. Conjuntos

En esta sección se presentarán los conceptos de la teoría de conjuntos que se deben tener presentes para la lectura de esté trabajo de grado, con la finalidad de establecer una respectiva notación.

1.1.1. Operaciones entre conjuntos

A continuación, queremos recordar las operaciones entre conjuntos.

1. **Unión** de una familia de conjuntos

$$\bigcup B = \bigcup_{B \in \mathfrak{C}} B = \{x | (\exists B \in \mathfrak{C})(x \in B)\}$$

2. **Intersección** de una familia de conjuntos

$$\bigcap B = \bigcap_{B \in \mathfrak{C}} B = \{x | (\forall B \in \mathfrak{C})(x \in B)\}$$

3. **Producto** de una familia de conjuntos

$$\prod_{j\in J} B_j = \{f : J \to \bigcup_{j\in J} B_j | f(j) \in B_j\}$$

4. **Suma** de una familia de conjuntos, se denota $\coprod_{j\in J} B_j$

$$\sum_{j\in J} B_j = \{(a,j)|a \in B_j, j \in J\}$$

1.1.2. Relaciones

Definición 1.1.1. Sean A y B conjuntos. Un subconjunto $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A\times B$ se llama una relación de A en B, es decir $\mathcal{R}$ es una relación de A en B si $\mathcal{R} \in P(A \times B)$.

Definición 1.1.2. Si X es un conjunto, una **relación** $\mathcal{R}$ en X es un subconjunto de $X\times X$. Decimos que $\mathcal{R}$ es :

1. **Reflexiva**: si $(x,x) \in \mathcal{R}$ pata todo $x \in X$
2. **Simétrica**: Si $(x,y) \in \mathcal{R}$ implica $(y,x) \in \mathcal{R}$
3. **Transitiva**: Si $(x,y),(y,z) \in \mathcal{R}$ implica $(x,z) \in \mathcal{R}$
4. **Antisimétrica**: Si $(x,y),(y,z) \in \mathcal{R}$ implica $x = y$

Definición 1.1.3. Una relación se llama de **equivalencia** en un conjunto A si es reflexiva, simétrica y transitiva en A. Cada relación de equivalencia determina una partición $X/\mathcal{R} = \{[x] : x \in X\}$ de X formada por las clases de equivalencia $[x] = \{y : x\mathcal{R}y\}$; es decir existe una función sobreyectiva.

$$q : X \to X/\mathcal{R}$$

Toda función $f : X \to Y$ define una relación de equivalencia en X si definimos $x \sim y$ si y solo si $f(x) = f(y)$. Es decir la relación como $\mathcal{R}_f$ con $\mathcal{R}_f = \{f^{-1}(t) : t \in f(X)\}$.

1.1.3. Relación de orden

Definición 1.1.4. Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A se llama **relación de orden** en A si $\mathcal{R}$ es *reflexiva*, *antisimétrica* y *transitiva* en A. Se dice que A es un conjunto ordenado por $\mathcal{R}$.

Definición 1.1.5. Un subconjunto P de X es **totalmente ordenado** si para cada par de elementos $a, b \in P$ se tiene que $a \leq b$ o $b \leq a$; $u \in X$ es una **cota superior** para P si $x \leq u$ para todo $x \in P$.

1.1.4. Funciones

Definición 1.1.6. Una función es una relación en la cual no existen dos o más parejas distintas con la misma primera componente.

$$f \text{ es una función} \Leftrightarrow f \text{ es una relación, tal que}$$

$$(\forall x, y, z)((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \to y = z)$$

.

Ejemplo 1.1.1. Sea $f(x) = \sqrt{x}$ una función cuya grafica se puede observar en la figura 1.1.
Su dominio es $D(f) = \{\forall x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ y su recorrido es $R(f) = \{\forall x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$.

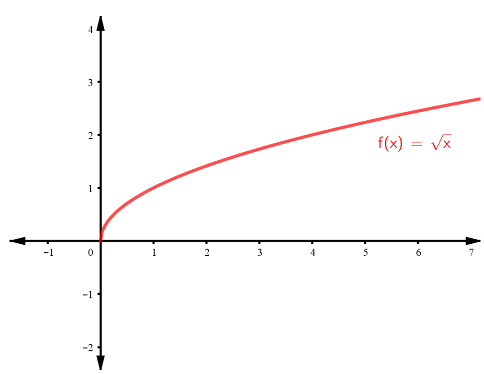


Figura 1.1: Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$. *Fuente: Creación propia.*

Definición 1.1.7. Sea $f : A \longrightarrow B$ y sea $M \subseteq A$; se llama **imagen** de M por f al conjunto de las imágenes por f de los elementos de M. Si lo notamos por $f(M)$, se tiene

$$f(M) = \{f(x)|x \in M\}$$

.

Ejemplo 1.1.2. Dada la función $f(x) = 2x - 1$ cuya gráfica se puede observar en la figura 1.2. Al ser una función polinómica (no hay ningún punto problemático en la definición de la función, como dividir por 0), el dominio es todos los reales:

$$D(f) = \mathbb{R}$$

La imagen o recorrido de la función es el conjunto formado por los números reales:

$$f(M) = \mathbb{R}$$

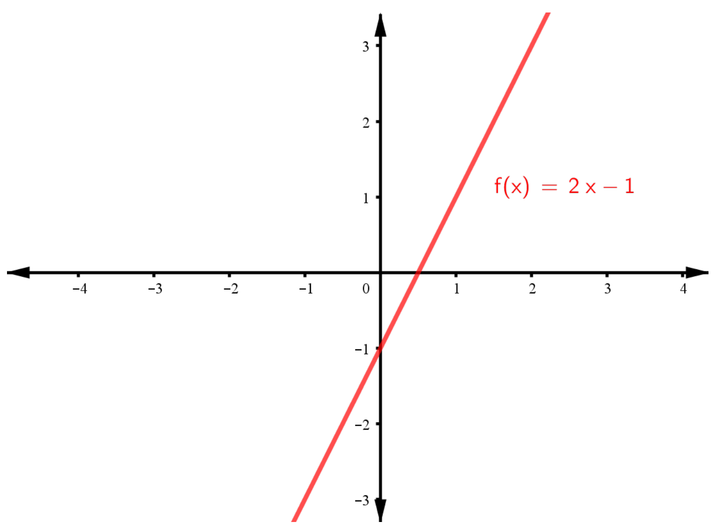


Figura 1.2: Gráfica de la función $f(x) = 2x - 1$. *Fuente: Creación propia.*

Definición 1.1.8. Sea $f : A \to B$ y sea $N \subseteq B$; se llama **imagen inversa** de N por f al subconjunto de A constituido por todos aquellos elementos cuyas imágenes por f a N; se nota por $f^{-1}(N)$, cuya gráfica se puede observar en la figura 1.3.

Ejemplo 1.1.3. Dada la función $f(x) = x^3$, su inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

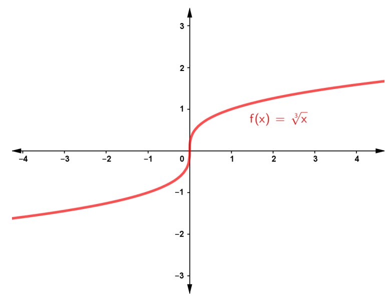


Figura 1.3: Gráfica de la función inversa $f(x) = x^3$. *Fuente: Creación propia.*

Definición 1.1.9. Una función f de A en B es uno a uno o **inyectiva** si elementos distintos de A tienen imágenes distintas mediante f; es decir

$$f \texttt{ es inyectiva } \longrightarrow (\forall u, v \in D(f)) \qquad (u \neq v \longrightarrow f(u) \neq f(v)).$$

Definición 1.1.10. Se dice que una función $f : A \longrightarrow B$ es **sobreyectiva** si todos los elementos de su codominio son imágenes por f de elementos del dominio, es decir $\mathcal{R}(f) = B$.

$$f : A \longrightarrow B \text{ es sobreyectiva si y solo si } (\forall y \in B)(f(x) = y).$$

Definición 1.1.11. Una función $f : A \longrightarrow B$ es **biyectiva** si f es simultáneamente inyectiva y sobreyectiva.

Definición 1.1.12. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones tales que $f(A) \subseteq C$. Es posible a partir de las dos funciones anteriores, construir una tercera $h : A \longrightarrow C$, es decir $h = g \circ f$

1.2. Álgebra

En esta sección se presentarán los conceptos de álgebra abstracta que se deben tener presentes para la lectura de esté trabajo de grado.

1.2.1. Grupos

En esta parte queremos recordar todo lo referente a grupos:

Definición 1.2.1. Un grupo $\langle G, * \rangle$ en un conjunto G, junto con una operación binaria $*$ en G, tal que se satisface las siguientes condiciones:

- La operación binaria $*$ es asociativa.
- Existe un elemento e en G tal que $\mathrm{e} * x = x * \mathrm{e} = x$ para todas las $x \in G$.
- Para cada a en G existe un elemento a' en G con la propiedad de que $\mathrm{a}' * \mathrm{a} = \mathrm{a} * \mathrm{a}' = \mathrm{e}$

Un conjunto $\{\mathrm{e}\}$ de un elemento se le llama **Grupo trivial**. La única operación binaria $*$ posible en $\{\mathrm{e}\}$ está definida por $\mathrm{e} * \mathrm{e} = \mathrm{e}$. Se puede corroborar de inmediato que se cumplen los tres axiomas de grupo. En cada grupo, el elemento identidad es siempre su propio inverso.

Definición 1.2.2. Sea B un conjunto no vació. Una función $* : B \times B \longrightarrow B$ se llama una operación interna en B. Al par $(B, *)$ se denomina ***monoide***.

Dados $a, b, c \in B$ se puede calcular $a * (b * c)$ y $(a * b) * c$, si queremos igualar este calculo, entonces $*$ debe ser asociativo, es decir que para todo $a, b, c \in B$ se debe cumplir:

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

A lo anterior se le denomina *monoide asociativo*

Definición 1.2.3. Un monoide asociativo es un **semigrupo**. Un **grupo** $(G, *)$ es un semigrupo el cual cumple con:

1. Existe $e \in G \rightarrow a * e = a = e * a$ para todo $a \in G$.
2. Para cada $a \in G$ existe $b \in G$ talque $a * b = e = b * a$.

La primera condición garantiza la existencia de un único elemento neutro para la operación $*$. La segunda condición garantiza la existencia del elemento inverso para cada $a \in G$. Este elemento lo notaremos como a^{-1}.

Definición 1.2.4. Sea $(G, *)$ un grupo. Si $H \subseteq G$ tal que $* : H \times H \rightarrow H$ donde $H \neq \emptyset$ es una operación de grupo, donde H es un **subgrupo** de G. Se denota como $H \leq G$.

Definición 1.2.5. Sea H un subgrupo de un grupo G de orden finito. El **índice** $(G : H)$ de H en G es igual a $|G| \diagup |H|$. Es decir, el índice es el número de coclases a izquierda (derecha) de H.

1.2.2. Homomorfismos

En esta parte definiremos funciones entre los grupos que relacionen los conjuntos y sus estructuras.

Definición 1.2.6. Dados dos grupos G, H un **homomorfismo** es una función $f : G \to H$ (como conjuntos) que satisface $f(ab) = f(a)f(b)$ la operación a la izquierda de la igualdad es en G y a la derecha es en H.

Ejemplo 1.2.1. Dada la función $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ dada por

$$f(x) = (cosx, senx)$$

esta función satisface

$$\begin{aligned} f(x+y) &= (cos(x+y), sen(x+y) && (1.1)\\ &= (cosxcosy - senxseny, senxcosy + senycosx) && (1.2)\\ &= (cosx, seny)(cosy, seny) && (1.3)\\ &= f(x)f(y) && (1.4)\end{aligned}$$

El producto $f(x)f(y)$ es geométricamente la suma de dos ángulos.

Un **isomorfismo** permite cambiar los nombres de los elementos y preserva la estructura algebraica y se usa el símbolo $\approx$ para indicar que dos grupos son isomorfos.

Un **automorfismo** es un isomorfismo de grupo en si mismo. Este automorfismo se llama **automorfismo interno** de G.

1.3. Topología

En esta sección se presentarán los conceptos de la topología de conjuntos que se requieren en lo que sigue del documento para comprender la Topología Algebraica (Grupo Fundamental $\prod_1(X, x_0)$).

1.3.1. Espacios topológicos

En esta parte queremos recordar todo lo referente a topología:

Definición 1.3.1. Si X es un conjunto, **una base para una topología** sobre X es una colección β de subconjuntos de X (llamados elementos básicos) tales que:

1. Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico β que contiene a x

2. Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos (β_1 *y* β_2), entonces existe un elemento básico β_3 que contiene a x y tal que $\beta_3 \subseteq \beta_1 \cap \beta_2$.

Ejemplo 1.3.1. Dado un conjunto ordenado $(X, \leq)$, el conjunto $\beta = \{(a, b) : a, b \in X\}$ es base para una topología.

Definición 1.3.2. Sea X un conjunto. Una colección τ de subconjuntos de X es una topología sobre X si cumple con las siguientes condiciones:

1. El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto X pertenecen a τ

2. Si $A, B \in \tau$ entonces $A \cap B \in \tau$

3. La unión de cualquier familia de elementos de τ pertenecen a τ.

La pareja (X, τ) es un **espacio topológico**

Definición 1.3.3. Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathbb{R} = \{A_i\}$ una partición o descomposición de X. Formamos un nuevo espacio Y llamado el **espacio cociente**. Los puntos de Y son los miembros de $\mathbb{R}$ y si $q : X \longrightarrow Y$ es la función cociente $q(x) \mapsto A_i$, la topología para Y es la más grande para la cual q es continua; es decir $U \subseteq Y$ es abierto si y sólo si $q^{-1}(U)$ es abierto en X. Esta topología se llama **la topología cociente** para la partición $\mathbb{R}$ y se denota

$$\tau/\mathbb{R}$$

$$\tau/\mathbb{R} := \{U \subseteq Y : q^{-1}(U) \textit{ es abierto de } X\}$$

Definición 1.3.4. Sea X, Y espacios topológicos. Dado K subespacio compacto de X compacto y U subconjunto abierto de Y, se define

$$S(K,U) := \{f \in C(X,Y) : f(K) \subseteq U\}$$

La colección $\{S(K,U)\}_{K,U}$ *forma una subbase para la topología sobre* $C(X,Y)$ *llamada la* ***Topología compacto - abierto.***

Capítulo 2

GRUPO FUNDAMENTAL

"Si simplemente hace girar la rueda, es álgebra;
pero si contiene una idea, es topología."
Solomon Lefschetz

En este capítulo se muestra la ruta tanto topológica como algebraica que fueron necesarias para el estudio del **Grupo Fundamental** de la Topología Algebraica.

Los teoremas que se presentan en este capítulo, sus respectivas demostraciones se encuentran en el anexo de este documento.

Para exponer el estudio se realizó el mapa conceptual presentado en la figura 2.1, el cual muestra la ruta de los conceptos generales para comprender el Grupo Fundamental de la Topología Algebraica, los cuales se describirán a continuación y el modo en que intervienen en la teoría. Algunos de estos objetos se ilustran con ayuda de software de geometría dinámica, en este caso GeoGebra resaltados en el mapa con color rosado.

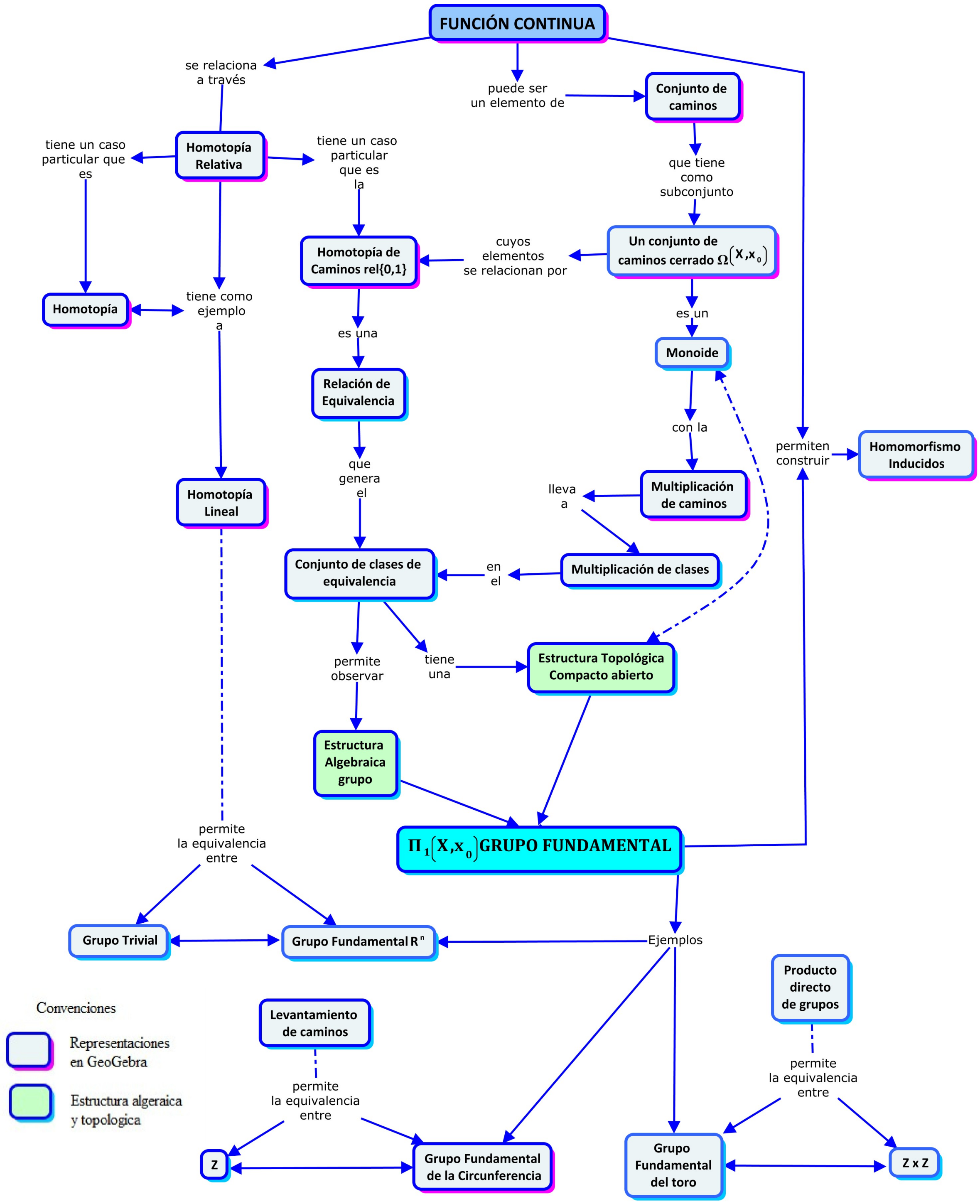


Figura 2.1: Mapa conceptual del Grupo Fundamental de la Topología Algebraica. *Fuente: Creación propia.*

Este estudio inicia con el concepto de función continua.

Definición 2.0.1. *Una función continua es una función entre dos espacios topológicos X e Y, $f : X \longrightarrow Y$ tales que la imagen recíproca de cualquier abierto de Y es un abierto de X.*

Este concepto de función continua nos permitió estudiar tres conceptos importantes para acceder al Grupo Fundamental: Homotopía relativa, caminos y homomorfismos.

2.1. Homotopía

El estudio del Grupo Fundamental de la Topología se inicia con las homotopías, en la figura 2.2 se presentan los conceptos que se relacionan con estos objetos, los cuales se describen a continuación.

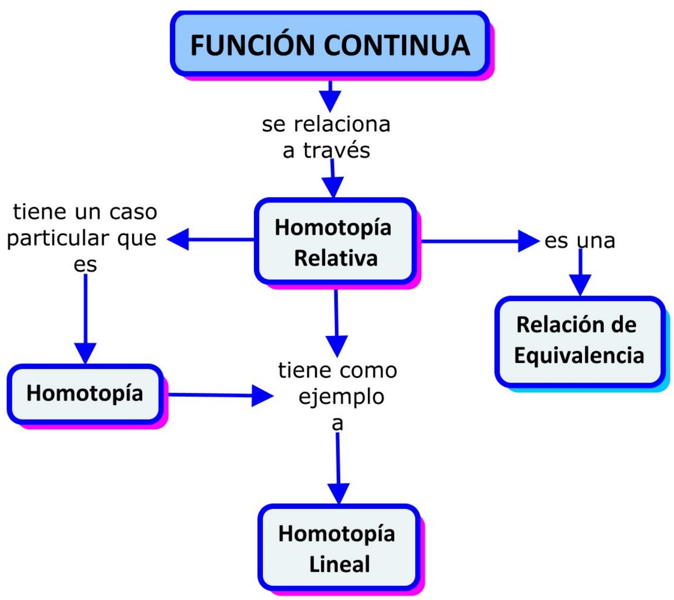


Figura 2.2: Ruta de Homotopía. *Fuente: Creación propia.*

Las funciones continuas se pueden deformar una en otra, esta deformación se denomina homotopía y cumple con dos condiciones principalmente:

Definición 2.1.1. *Una homotopía de f a g ($f, g : X \longrightarrow Y$ dos funciones continuas) es una función continua $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ tal que*

$$H(x,0) = f(x), \text{ para } x \text{ en } X$$

$$H(x,1) = g(x), \text{ para } x \text{ en } X$$

Las funciones f y g son llamadas homótopas y las notamos como $H : f \simeq g$.

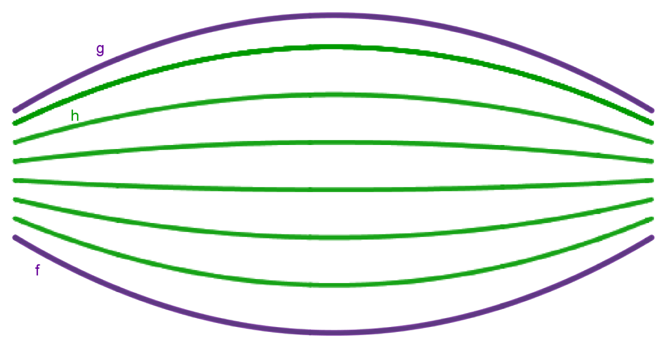


Figura 2.3: Homotopía. *Fuente: Creación propia.*

En la figura 2.3 se muestra la deformación de las funciones f y g.

Se encuentra también la homotopía relativa, donde dicha deformación entre las funciones es una homotopía H que cumple una condición adicional, debido a que se establece a partir de un subespacio A del conjunto X. Denotamos por I al intervalo cerrado $[0,1]$.

Definición 2.1.2. *Sean X e Y espacios topológicos y $A \subset X$. Si $f, g : X \longrightarrow Y$ son funciones continuas, tales que $f|_A = g|_A$, se dice que f y g son homótopas relativamente a A, si existe una función continua, $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$, tal que*

$$H(x,0) = f(x), \text{ para } x \text{ en } X.$$
$$H(x,1) = g(x), \text{ para } x \text{ en } X.$$
$$H(a,t) = f(a) = g(a), \text{ para todo } a \text{ en } A, \text{ todo } t \text{ en } I.$$

Las funciones f y g son llamadas homótopas y las notamos como $H : f \simeq g$(rel A).

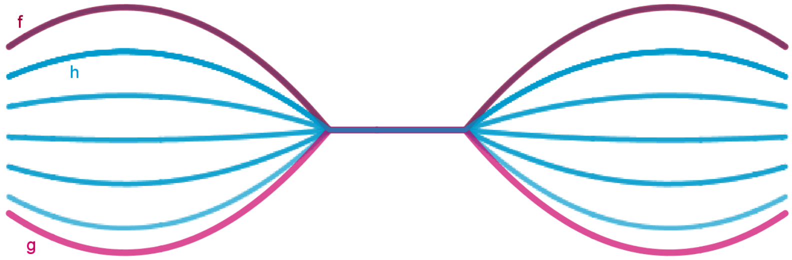


Figura 2.4: Homotopía relativa. *Fuente: Creación propia.*

En la figura 2.4 se muestra la deformación de las funciones f y g a partir de la homotopía relativa.

Obsérvese que para todo $t \in [0,1]$ se define la función continua $h_t : X \longrightarrow Y$ por la fórmula $h_t(x) = H(x,t)$, la homotopía H da lugar a una familia $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ de funciones continuas, transformando de manera continua $h_0 = f$ en $h_1 = g$. La función h_t puede pensarse como la deformación en el instante t.

Sean X un espacio topológico cualquiera, $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas. Si para cada punto $x \in X$, las imágenes $f(x)$ y $g(x)$ pueden ser unidas por medio de un segmento de recta en Y entonces f y g son homótopas.

Durante esta homotopía cada punto de $H_t(x)$ viaja por el segmento de línea recta que une a $f(x)$ con $g(x)$; es decir, f va a g por medio de los segmentos de recta, como se muestra en la figura 2.5.

Un ejemplo especial de homotopía es la homotopía lineal definida como

$$H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x) \tag{2.1}$$

Ejemplo 2.1.1. Sea $f(x) = 2x^2 + 2$ y $g(x) = cos(x)$ continuas.
La función f es homótopa a g porque existe la función $H(x,t) = (1-t)(2x^2+2)+t(cos(x))$ que es continua y satisface lo siguiente:

$$H(x,0) = 2x^2 + 2 = f(x)$$

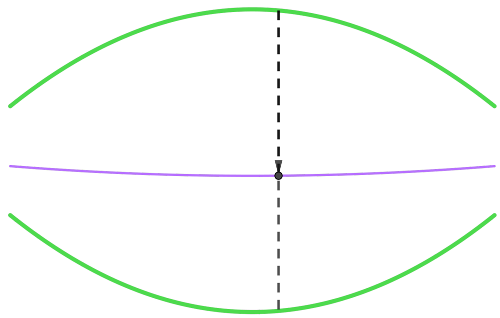


Figura 2.5: Línea que viaja por las funciones en una homotopía. *Fuente: Creación propia.*

$$H(x, 1) = cos(x) = g(x)$$

La figura 2.6 permite apreciar como la función f se deforma en g a través de la función H.

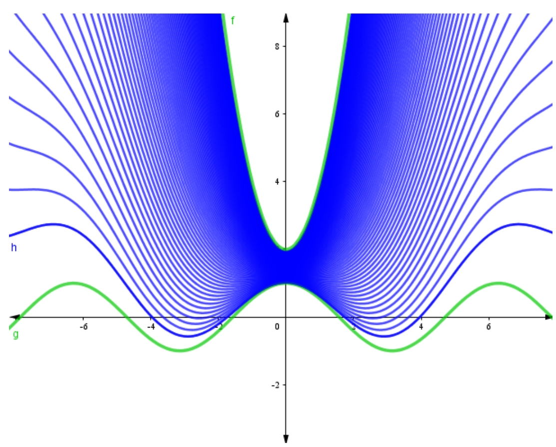


Figura 2.6: Ejemplo Homotopía lineal. *Fuente: Creación propia.*

Ejemplo 2.1.2. Sean

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 : x \leq -1 \\ sen(\pi x) : -1 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2 : x \geq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x+1 : x \leq -1 \\ sen(\pi x) : -1 \leq x \leq 1 \\ 1-x : x \geq 1 \end{cases}$$

continuas. f y g son homótopas relativamente a $sen(\pi x)$ porque existe una función continua H tal que:

$$H(x,0) = f(x)$$

$$H(x,1) = g(x)$$

$$H(sen(\pi x),t) = f(sen(\pi x)) = g(sen(\pi x))$$

como se muestra en la figura 2.7.

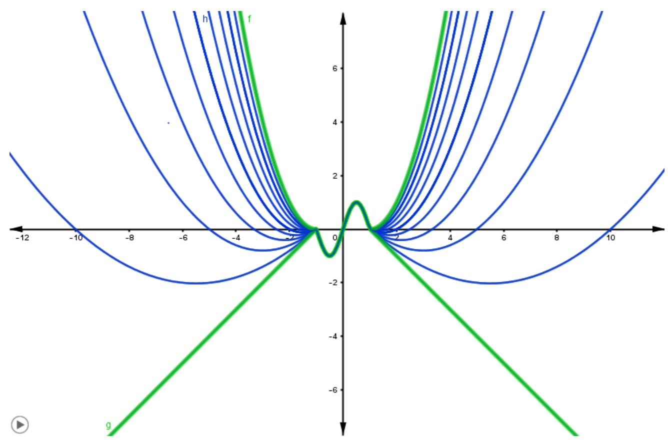


Figura 2.7: Ejemplo Homotopía lineal de Homotopía Relativa. *Fuente: Creación propia.*

Las homotopías resultan siendo una relación de equivalencia respecto a las funciones. La clase de una función f se denota $[f]$ y se llama la clase de equivalencia de f.

Teorema 2.1.1. [1] *La relación de homotopía es una relación de equivalencia en $C(X,Y)$ de las funciones continuas de X en Y.*

[1]Ver la demostración en el anexo .1.

2.2. Caminos

A continuación, se presenta la ruta topológica y algebraica que se describe apartir de los caminos para poder definir el Grupo Fundamental, la cual se muestra en la figura 2.8.

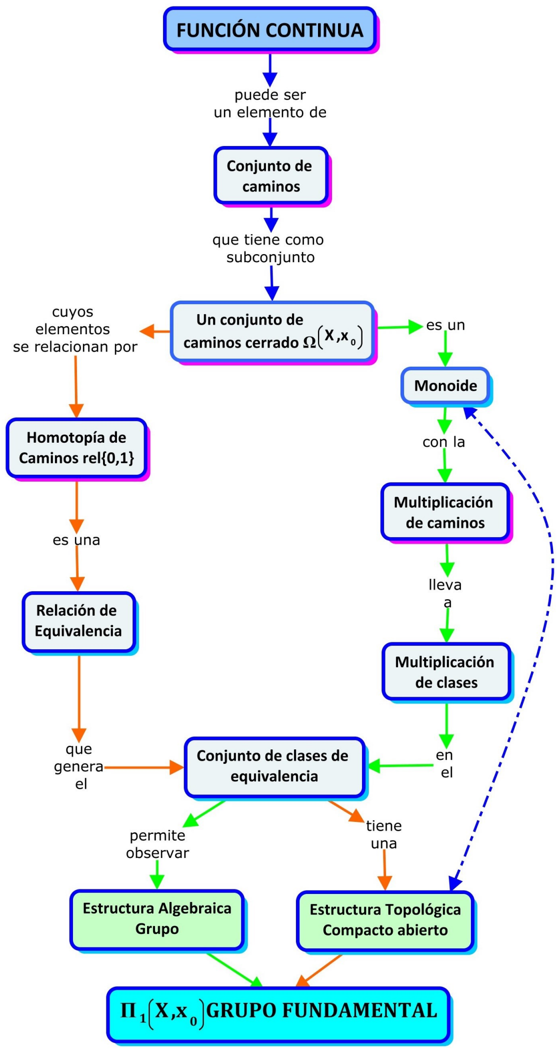
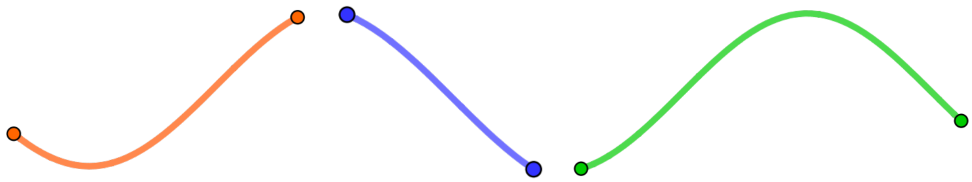


Figura 2.8: Ruta que describen los caminos. *Fuente: Creación propia.*

Las funciones continuas también pueden ser caminos, los cuales se estudian en la Topología Algebraica, estos objetos tienen un punto de inicio y un punto final, como se muestra en la figura 2.9.

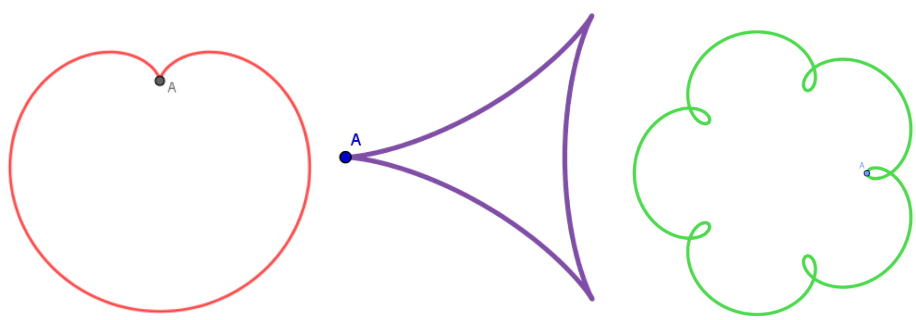


(a) Camino 1 (b) Camino 2 (c) Camino 3

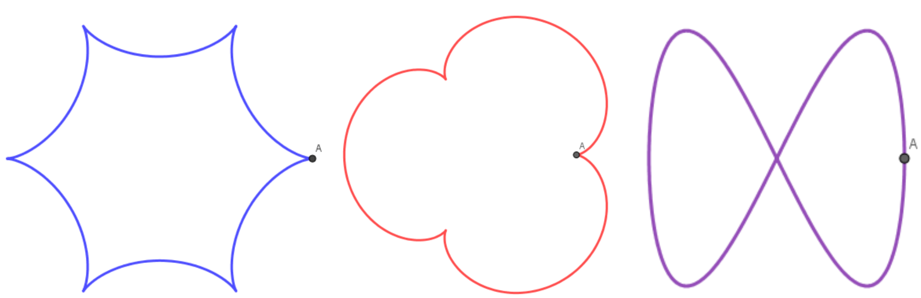
Figura 2.9: Ejemplos de caminos en $\mathbb{R}^2$. *Fuente: Creación propia.*

Definición 2.2.1. *Dado un espacio topológico X, un camino en X es una función continua $f : [0, 1] \longrightarrow X$. Si $f(0) = a$, $f(1) = b$, decimos que f es un camino desde a hasta b con punto inicial en a y punto final en b.*

Un tipo particular de los caminos, son los caminos cerrados o bucles en x_0, los cuales son caminos de la forma $f : [0, 1] \longrightarrow X$ tal que $f(0) = x_0 = f(1)$, es decir, inician y terminan en el mismo punto, como se muestra en la figura 2.10.



(a) Cardioide (b) Deltoide (c) Epicicloide



(d) Hipocicloide (e) Epitrocoide (f) Lemniscata

Figura 2.10: Ejemplos de caminos cerrados en $\mathbb{R}^2$. *Fuente: Creación propia.*

El conjunto de todos los caminos cerrados de X en x_0 se denota por $\Omega(X, x_0)$. En este conjunto se define la multiplicación de caminos de la siguiente manera:

Definición 2.2.2. *Dados dos caminos f, g tales que $f(1) = f(0)$, definimos otro camino $f \cdot g$ como*

$$f \cdot g = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ g(2t-1) & \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

La multiplicación de caminos es continua [2] y se nota por $m(f, g) := f \cdot g$. Esta operación permite que los caminos se recorran a una doble velocidad, es decir, se debe recorrer cada camino en $\frac{1}{2}$ de tiempo.

El conjunto de caminos cerrados con esta multiplicación, $\Omega(X, x_0)$, tiene una estructura de monoide topológico, esto quiere decir que tiene una operación interna y que es continua. Pero esta operación carece de elemento idéntico y por tanto de inversos, tampoco cumple con la propiedad asociativa, debido a esto tiene una estructura algebraica incompleta.

Los caminos cerrados se pueden deformar continuamente a partir de la homotopía de caminos relativa $\{0, 1\}$.

Definición 2.2.3. *Una homotopía de caminos rel$\{0, 1\}$ en X es una familia de funciones $f_t : [0, 1] \longrightarrow X$ con $0 \leq t \leq 1$ tal que:*

1. *Los puntos finales de cada camino $f_t(0) = x_0$ y $f_t(1) = x_1$ son los mismos para todo t.*
2. *La función asociada $F : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$ definida por $F(s, t) = f_t(s)$ es continua.*

Ejemplo 2.2.1. En la figura 2.11 se puede evidenciar la deformación continua en entre dos caminos, donde se cumple que i) $f_t(0) = x_0 = f_t(1)$ para todo t y ii) la función asociada

[2] Ver demostración en el anexo .2.

$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ definida por $F(s,t) = f_t(s)$ es continua.

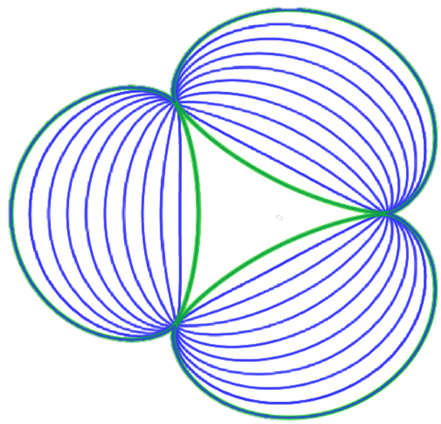


Figura 2.11: Ejemplo de homotopía de caminos. *Fuente: Creación propia.*

Por el teorema 2.1.1 sabemos que la homotopía es una relación de equivalencia sobre el conjunto de los caminos en X, $C([0,1], X)$. Denotamos por $[\sigma]$ la clase de homotopía del camino σ.

Ejemplo 2.2.2. Para cualesquiera dos caminos f y g en X un subespacio convexo $\mathbb{R}^n$ tenemos que $[f] = [g]$, lo cual se puede demostrar usando la misma homotopía lineal, notando que esta también es una homotopía de caminos.

Definición 2.2.4. *Sean X, Y espacios topológicos. Dados K subespacio compacto de X y U subconjunto abierto Y, definimos*

$$S(K,U) := \{f \in C(X,Y) : f(K) \subseteq U\}$$

La colección $\{S(K,U)\}_{K,U}$ forma una subbase para una topología sobre $C(X,Y)$ llamada topología compacto abierto.

El producto de caminos es compatible con las clases de homotopía, por lo tanto, es posible definir la multiplicación dentro de las clases de equivalencia a partir de la multiplicación de caminos.

Teorema 2.2.1. [3] *Sean $[f]$, $[g]$ las clases de homotopía de f y g respectivamente, si el producto es $f \cdot g$ está definido entonces el producto de clases es definido como*

$$[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$$

Está bien definido y no depende del representante de clase

Esta nueva operación que se realiza dentro del grupo de clases de equivalencia por homotopías genera una estructura algebraica de monoide notado por

$$\Pi_1(X, x_0) := \{[f] : f \in \Omega(X, x_0)\} \tag{2.3}$$

Pero tenemos mucho más, $\Pi_1(X, x_0)$ (2.3) tiene toda una estructura de grupo.

Teorema 2.2.2 (Grupo Fundamental)**.** [4] $\Pi_1(X, x_0)$ *es un grupo con la operación $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$. Este grupo se llama* ***el grupo fundamental*** *del espacio X en el punto base x_0.*

2.3. Propiedades del Grupo Fundamental

Una de las propiedad importantes del Grupo Fundamental es el comportamiento de éste con respecto a las funciones continuas. Debido a que el Grupo Fundamental es la conexión entre topología y álgbera, dado que es la manera sencilla como las funciones continuas son convertidas en homomorfismos de grupos.

Es necesario recordar que es un espacio punteado.

Definición 2.3.1. *Dado un espacio topológico X y un punto $x_0 \in X$, al par (X, x_0) se le llama espacio punteado*

[3] Ver demostración en el anexo .3.
[4] Ver demostración en el anexo .4.

Si se tiene $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ una función continua entre dos espacios punteados tal que $h(x_0) = y_0$, por cada camino $f \in \Omega(X, x_0)$ la función compuesta $h \circ f \in \Omega(X, y_0)$. Pero si F es una homotopía $F : f_0 \simeq f_1$ entonces $h \circ F : h \circ f_0 \simeq h \circ f_1$; por lo tanto, se tiene que h induce de manera natural una función h_* entre los grupos fundamentales. En la definición 2.3.2 se define el homomorfismo inducido.

Definición 2.3.2. *Si $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ una función continua entre espacios punteados, tal que $h(x_0) = y_0$. El homomorfismo inducido por h es la función*

$$h_* : \Pi(X, x_0) \longrightarrow \Pi(Y, y_0)$$

definido por $h_* = [h \circ f]$

Con el teorema 2.3.1 demostraremos que la función que establece el homomorfismo inducido esta bien definida.

Teorema 2.3.1. [5] *Dada una función $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ continua entre espacios punteados, la función $h_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ definida por $h_*([f]) = [h \circ f]$ es un homomorfismo de grupos, llamado homomorfismo inducido por h.*

Ejemplo 2.3.1. Sea

$$\begin{aligned} X &= \left\{(x, y) : (x+1)^2 + y^2 = 1\right\} \cup \left\{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 = 1\right\} \\ Y &= S^1 \end{aligned}$$

dos espacios punteados en los cuales se define la función h como

$$\begin{aligned} h : (X, x_0) &\longrightarrow (Y, y_0) \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = (|x| - 1, y) \end{aligned}$$

Sea $f \in \Omega(X, x_0)$ definida por $f(x) = (1 + cos(x), sen(x))$, se tiene que

$$h \circ f = (cos(x), sen(x))$$

[5] Ver demostración en Anexo .5.

Como se muestra en la figura 2.12. Logrando obtener que

$$\begin{aligned} h_* : \Pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \Pi_1(Y, y_0) \\ [h] &\longmapsto h_*([f]) = [h \circ f] = [(cos(x), sen(x))] \end{aligned}$$

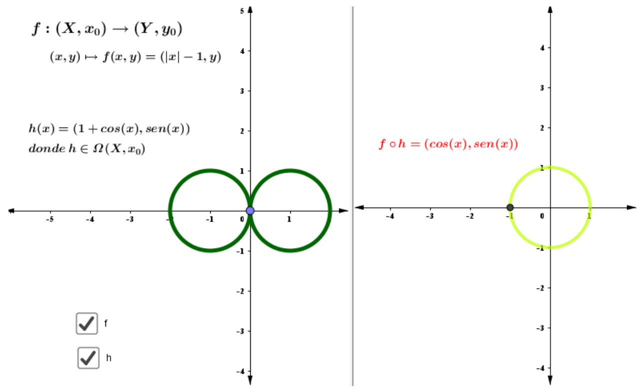


Figura 2.12: Ejemplo de homomorfismo. *Fuente: Creación propia.*

Recordemos que el Grupo Fundamental $\Pi_1(X, x_0)$ del espacio X esta definido respecto al punto base x_0. Como en $\Pi_1(X, x_0)$ se involucra $[x_0]$, el cual es la componente conexa por caminos en X del punto x_0, podemos afirmar que:

$$\Pi_1(X, x_0) = \Pi_1([x_0], x_0)$$

ya que cada camino en el espacio X cerrado en x_0 debe tener toda su imagen en $[x_0] \subseteq X$. Es decir, para el cálculo del grupo fundamental con respecto a un punto base es suficiente con estudiar el subespacio correspondiente del punto base.

También es cierto que si el punto base cambia dentro de la misma componente conexa por caminos, el Grupo Fundamental permanece en las misma clase de grupos isomorfos. Por otra parte, los grupos no tienen que guardar alguna relación si los puntos base pertenecen a diferentes componentes, como se indica en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.2. [6] *Si $x_1 \in [x_0]$, entonces $\Pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\Pi_1(X, x_1)$.*

[6] Ver demostracción en el Anexo .6.

Si X es conexo por caminos, $[x_0] = X$ entonces $\Pi_1(X, x_0)$ es independiente del punto base y por tanto la notación $\Pi_1(X)$ es suficiente si no se quiere distinguir entre grupos isomorfos.

2.4. Ejemplos de grupos fundamentales

Algunos grupos fundamentales tienen estructuras conocidas, por ejemplo $\Pi_1(\mathbb{R}^n, x_0)$ es homomorfo al grupo trivial; $\Pi_1(\mathcal{S}^1, x_0)$ es homomorfo a $\mathbb{Z}$ y el grupo fundamental del toro es equivalente con $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, como se muestra en la figura 2.13.

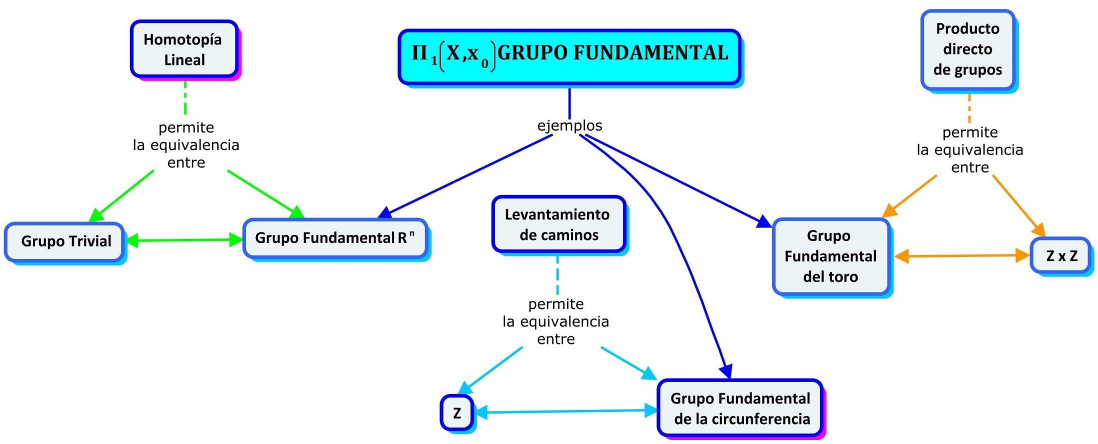


Figura 2.13: Ejemplos de grupo fundamental. *Fuente: Creación propia.*

A continuación se describen los grupos fundamentales mencionados.

2.4.1. Grupo Fundamental $\mathbb{R}^n$

El Grupo Fundamental de $\mathbb{R}^n$ es el grupo trivial, esto se debe a que dados dos caminos cerrados f y g en $\mathbb{R}^n$, estos se pueden relacionar por la homotopía linial:

$$h(x,t) = (1-t)f + t\ g$$

Es decir que para todo $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, el Grupo Fundamental $\Pi_1(X, x_0)$ es isomorfo al grupo trivial, ya que todo camino con base en x_0 es homotópico al camino constante.

2.4.2. Grupo fundamental de la circunferencia

El Grupo Fundamental de la circunferencia $(\Pi_1(S^1, x_0))$ con punto base en $(0,1)$ contiene varias clases de homotopía; ya que un camino cerrado que da una vuelta difícilmente puede transformarse en el camino constante sin soltar una de las puntas, debido que al soltar uno de los puntos se viola las condiciones que establece la homotopía relativa, que debe mantener los extremos de cada camino h_t atado a sus extremos.

Para poder determinar que el Grupo Fundamental de la circunferencia es homomorfo a $\mathbb{Z}$ se debe establecer la función:

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \tag{2.4}$$

$$t \mapsto p(t) := (cos(2\pi t),\ sen(2\pi t)) \tag{2.5}$$

Donde se tiene que los números enteros son identificados con el punto $1 = (1, 0)$ por la función 2.5, y escogemos este punto como el punto base.

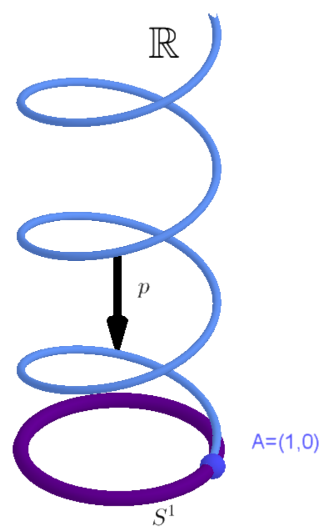


Figura 2.14: $\mathbb{R}$ sobre S^1. *Fuente: Creación propia.*

Como se muestra en la figura 2.14 se deduce que cada intervalo unitario $[0,1], [1,2], ..., [n, n+1], ...$ da una vuelta alrededor de S^1. Esta función puede ser visualizada como los puntos de $\mathbb{R}$ se proyectan a $\mathbb{R}^3$ en forma de hélice o caracol por medio de la parametrización

$$t \mapsto (cos(2\pi t), sen(2\pi t), t)$$

Con lo que p es la restricción a la hélice de la proyección

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

dada por $(x, y, z) \mapsto (x, y)$, esta función enrolla a $\mathbb{R}$ alrededor de S^1 en un número infinito de veces, como se muestra en la figura 2.15.

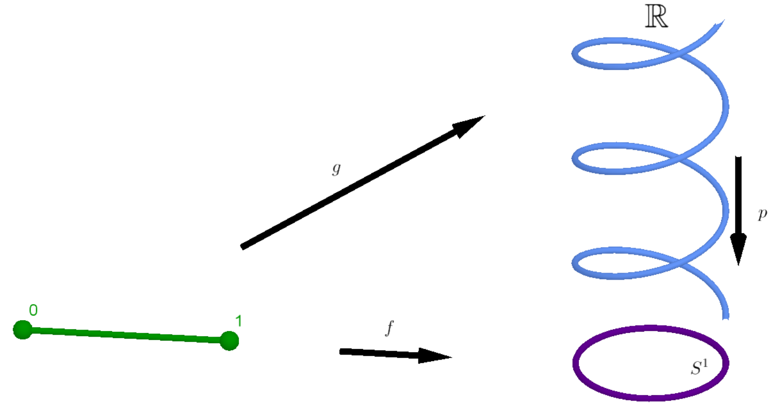


Figura 2.15: Proceso de levantamiento. *Fuente: Creación propia.*

Definición 2.4.1. Si $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ y $f : [0, 1] \longrightarrow S^1$ son funciones cualquiera, una función $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $p \circ g = f$ se llama levantamiento de f.

Esto es enrollar al intervalo $[0, 1]$ n-veces al rededor de la circunferencia en sentido contrario de las manillas del reloj si n es positivo, o en el sentido de las manecillas del reloj si n es negativo.

2.4.3. Grupo fundamental del toro

El grupo fundamental del toro es homomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, debido a que Π_1 es productivo.
Si tenemos dos espacios punteados (X, x_0), (Y, y_0), su producto conjuntista es definido como $(X \times Y, (x_0, y_0))$. Π_1 preserva el producto.

Teorema 2.4.1. *Sea* (X, x_0), (Y, y_0) dos espacios topológicos punteados y $(X \times Y, (x_0, y_0))$ con la topología producto, entonces

$$\Pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \approx \Pi_1(X, (x_0)) \times \Pi_1(Y, (y_0))$$

Donde $\Pi_1(X, (x_0)) \times \Pi_1(Y, (y_0))$ es el producto directo de grupos.

Topológicamente, un toro es una superficie cerrada definida como el producto cartesiano de dos circunferencias: $S^1 \times S^1$ y con la topología producto. Aplicando el teorema 2.4.1 se tiene

$$\Pi_1(S^1 \times S^1) = \Pi_1(S^1) \times \Pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Capítulo 3

APOYO DE GEOGEBRA

"La matemática es el trabajo
del espíritu humano que ésta
destinado tanto a estudiar como
a conocer, tanto a buscar
la verdad como a encontrarla"
Évariste Galois

Como se mencionó en la presentación inicial, GeoGebra nos ayudó a representar de manera gráfica, muchos de los conceptos que están presentes en la ruta que construimos. Por esta razón, en este capítulo presentamos las aplicaciones hechas en GeoGebra que representan ejemplos que permitieron comprender las definiciones de la ruta mencionada.

3.1. Aplicativos para la ruta 1

Los conceptos estudiados en la ruta 1, que se encuentran en la figura 3.1 resaltados con una sombra rosada, fueron aquellos que se representaron en GeoGebra. Estos conceptos son: homotopía, homotopía lineal y la homotopía relativa. El concepto de homotopía lineal se puede representar fácilmente en GeoGebra cuando las funciones consideradas tienen dominio y rango en los números reales con la topología usual. Este ejemplo particular de la homotopía nos permitió acercarnos a la idea de la homotopía y homotopía relativa en términos de deformación continua de una función en otra.

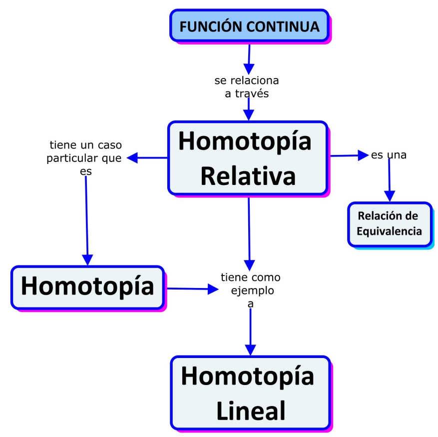
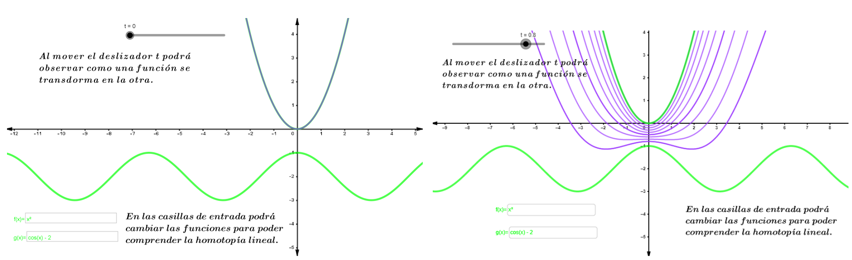


Figura 3.1: Ruta de la Homotopía. *Fuente: Creación propia.*

Para lograr este acercamiento construimos una aplicación en GeoGebra para representar dos funciones f y g, y la función de homotopía lineal dada por la ecuación $H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$. Esta aplicación se encuentra en la página https://www.geogebra.org/classic/un5vmfkj y se caracteriza porque contiene un deslizador t que representa el intervalo $[0,1]$ y dos casillas de entrada en las que se puede introducir la ecuación de dos funciones cualquiera. En la figura 3.2.(a) se pueden apreciar estos elementos. Al mover el deslizador t se observa la deformación de una función en otra, como se puede apreciar la figura 3.2.(b).



(a) Aplicativo de la homotopía (b) Deformación de una función a otra

Figura 3.2: Aplicativo de la homotopía. *Fuente: Creación propia.*

Cuando las funciones f y g descritas anteriormente tiene puntos en común la homotopía lineal sobre estas funciones reales permiten acercarnos a la idea de homotopía relativa en la que es posible evidenciar la deformación de una parte de las funciones y la quietud de estas funciones en un conjunto dado, en donde es relativa. Para construir el ejemplo en GeoGebra donde se observará las características de la homotopía relativa fue necesario recurrir a la definición de función a trozos, como se muestra en la figura 3.1 la aplicación usada se encuentra en la página https://www.geogebra.org/classic/dqbdsyd3.

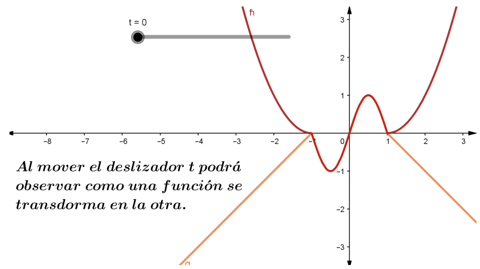


Figura 3.3: Aplicativo de la Homotopía relativa. *Fuente: Creación propia.*

3.2. Aplicativos para la ruta 2

Los objetos matemáticos estudiados en la ruta 2, que se encuentra en la figura 3.4, se resaltan con una sombra rosada los conceptos que logramos representar en GeoGebra fueron: caminos cerrados, multiplicación de caminos y homotopía de caminos.

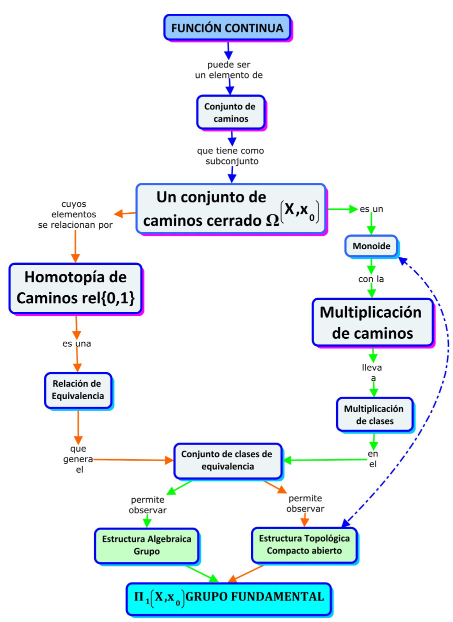
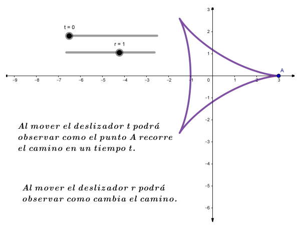
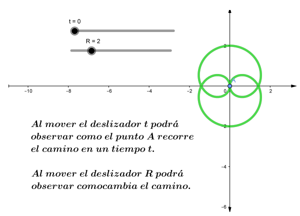


Figura 3.4: Ruta de los caminos. *Fuente: Creación propia.*

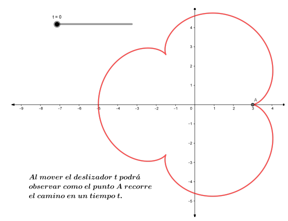
Para lograr este acercamiento construimos una serie de aplicativos en GeoGebra para representar caminos cerrados en $\mathbb{R}^2$. Al principio teníamos pocos ejemplos de caminos cerrado, la circunferencia y la elipse. Nos pusimos a indagar por otras curvas cerradas y encontramos una gran variedad, que después utilizamos para las comprensiones que estábamos buscando. Particularmente trabajamos estas curvas: deltoide, epicicloide, epitrocoide, hipocicloide, lemniscata, lissajous, trisectriz de ceva y cardioide. Estas aplicaciones se encuentran en la página https://www.geogebra.org/m/xb4c6wpg y se caracterizan porque tienen un deslizador t que permite visualizar como el punto A recorre el camino una vez en el intervalo $[0, 1]$. En la figura 3.5 se pueden apreciar estas curvas.



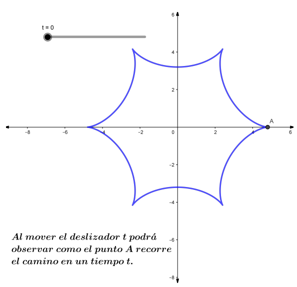
(a) Deltoide



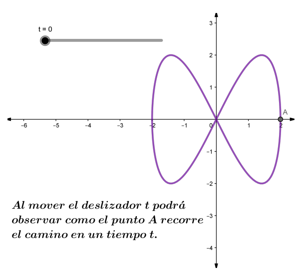
(b) Epicicloide



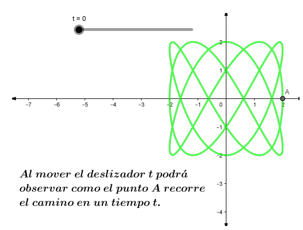
(c) Epitrocoide



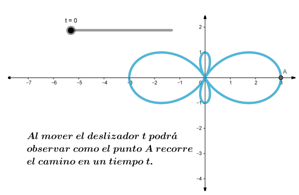
(d) Hipocicloide



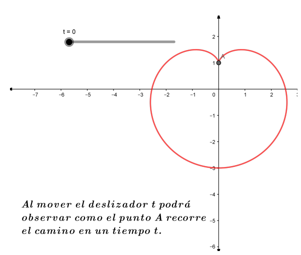
(e) Lemniscata



(f) Lissajous



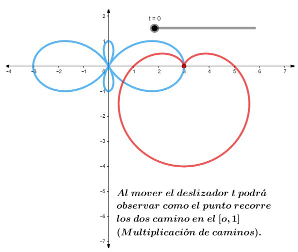
(g) Trisectriz de Ceva



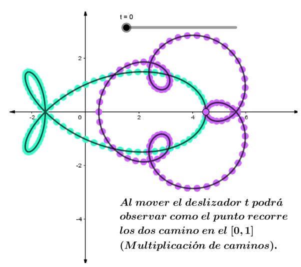
(h) Cardioide

Figura 3.5: Aplicativos de caminos cerrados en $\mathbb{R}^2$. *Fuente: Creación propia.*

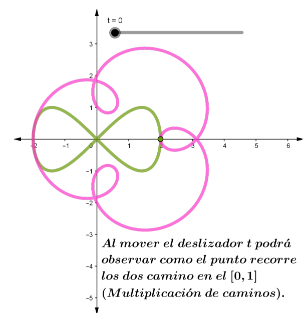
Los caminos cerrados pueden ser multiplicados según la ecuación 2.2, por esta razón realizamos ejemplos: multiplicamos un cardioide con una trisectriz de ceva, un deltoide con una epicicloide, un lemniscata con un epicicloide, un epitrocoide con un hipocicloide, un cardioide con un hipocicloide por ultimo un cardioide con un lissajous. En la figura 3.6 se muestran las aplicaciones realizadas, las cuales se encuentran en la página https://www.geogebra.org/m/nuepychm, se caracterizan por tener un deslizador t que permite observar como el punto recorre los dos caminos en el intervalo $[0,1]$, este punto recorre cada camino en $\frac{t}{2}$. Nos dimos cuenta que la multiplicación de caminos recorre cada camino en la mitad del tiempo y recorre en un mismo tiempo los dos caminos. Esta operación también hace que en ocasiones se cambien el sentido en el que se recorre el camino.



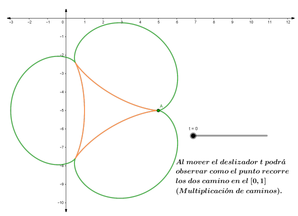
(a) Cardioide por Trisectriz de Ceva



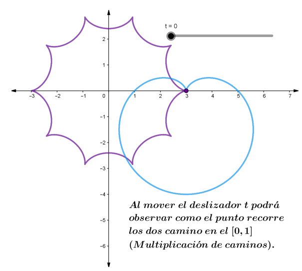
(b) Deltoide por Epicicloide



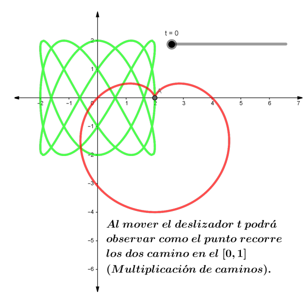
(c) Epicicloide por Lemniscata



(d) Epitrocoide por Hipocicloide



(e) Hipocicloide por Cardioide

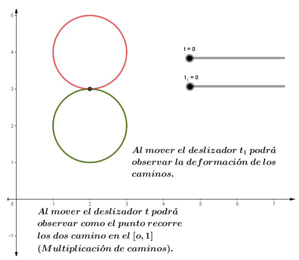


(f) Lissajous por Cardioide

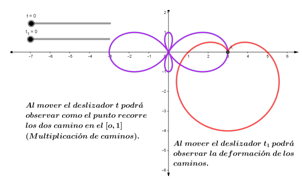
Figura 3.6: Aplicativos de la multiplicación de caminos cerrados en $\mathbb{R}^2$. *Fuente: Creación propia.*

El concepto de homotopía relativa $\{0,1\}$ se puede relacionar con los caminos cerrados, el cual nos permitió acercarnos a la deformación continua entre dos caminos. Para lograr este acercamiento realizamos diferentes aplicaciones que se encuentran en la página https:

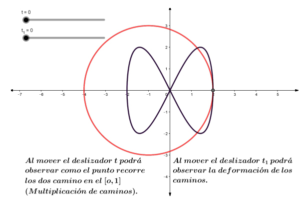
//www.geogebra.org/m/ydbcgems, se caracterizan por tener un deslizador t_1 que permite visualizar como los caminos se deforman continuamente en el intervalo $[0, 1]$. En la figura 3.7 se muestran estos elementos. Al mover el deslizador t_1 se puede apreciar la deformación continua de un camino a otro.



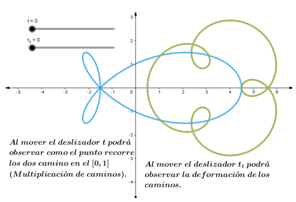
(a) Homotopía entre Circunferencia



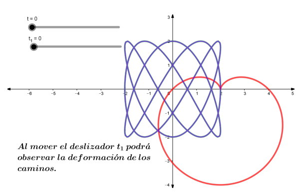
(b) Homotopía entre Cardioide y Trisectriz



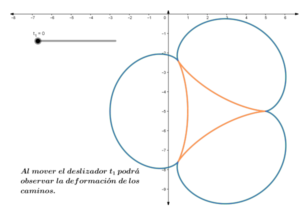
(c) Homotopia entre circunferencia y lemniscata



(d) Homotopia entre Deltoide y Epicicloide



(e) Homotopia entre Lissajous y Cardioide



(f) Homotopia Epitrocoide y Hipocicloide

Figura 3.7: Aplicativos de la Homotopía de caminos cerrados en $\mathbb{R}^2$. *Fuente: Creación propia.*

3.3. Aplicativos para la ruta 3

Los objetos matemáticos estudiados en la ruta 3, que se encuentra en la figura 3.8, se resaltan con una sombra rosada el concepto que logramos representar en GeoGebra fue: homomorfismo inducido. En la pagina https://www.geogebra.org/m/dyj4acdh se encuentra el aplicativo que se caracteriza por tener una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, donde su dominio son dos circunferencias tangentes y se puede observar que al mover el punto de color azul sus imágenes caen en el conjunto S^1, como se observa en la figura 3.9.

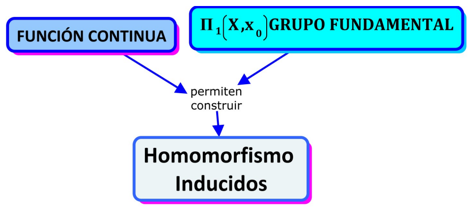


Figura 3.8: Ruta de la propiedad de de los Grupo Fundamentales. *Fuente: Creación propia.*

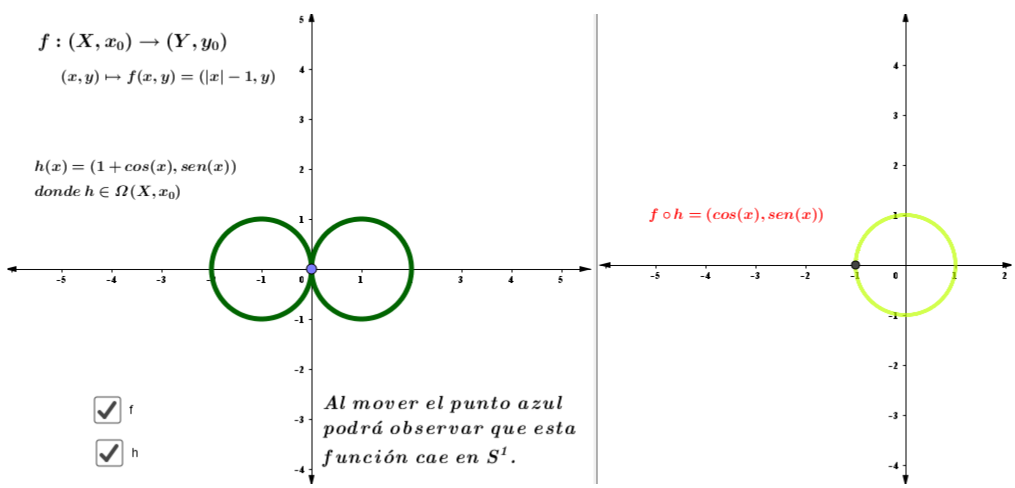


Figura 3.9: Aplicativo de Homomorfismo Inducido en $\mathbb{R}^2$. *Fuente: Creación propia.*

Capítulo 4

REFLEXIONES

Çómo es posible que la matemática, un producto del
pensamiento humano independiente de la experiencia, se adapte
tan admirablemente a los objetos de la realidad"
Albert Einstein

Las reflexiones que se presentan a continuación son en relación a los estudios realizados durante estos tres años, en relación al trabajo realizado en general, a la teoría y al apoyo de GeoGebra en este estudio.

4.1. Generales

* La participación en el semillero de Topología y la realización de este trabajo de grado ha contribuido al desarrollo de competencias como la lectura, la escritura, la búsqueda de diferentes fuentes, la representación de ejemplos en software de geometría dinámica entre otras cosas, que fueron necesarias para el entendimiento y la comunicación de los temas abordados en el trabajo de grado.

* Participar en diferentes eventos con ponencias, talleres o póster, permite afianzar y consolidar nuestros conocimientos matemáticos especialmente en la topología.

* Para comprender la teoría de una manera más sencilla, se puede a partir de la visualización de conceptos matemáticos incorporando herramientas tecnológicas.

* Organizar los conceptos matemáticos en un mapa conceptual permite ver las conexiones entre cada objeto matemático, para una mayor comprensión de la teoría estudiada.

* Durante el desarrollo de este documento se mostró el proceso que se realizo para poder construir la ruta topológica y algebraica y así poder visualizar el Grupo Fundamental de la Topología Algebraica.

* Con este trabajo se logra evidenciar que la formación académica brindada por parte de la universidad, permite profundizar en contenidos matemáticos más avanzados, como en este caso: Topología Algebraica.

4.2. En relación a la Teoría

* La reparametrización permite cambiar la velocidad o ritmo que se recorre en los caminos.

* La multiplicación de caminos en el conjunto de caminos cerrados tiene una estructura de monoide topológico debido a que tiene una operación interna que es continua pero carece de elemento idéntico y de elemento inverso. Pero al realizar esta misma operación en el conjunto de las clases de equivalencia se obtiene un monoide algebraico que resulta tener toda una estructura de grupo.

* El Grupo Fundamental es la conexión entre topología y álgebra, dado que es la manera sencilla como las funciones continuas son convertidas en homomorfismos de grupos.

* Una de las propiedades del grupo fundamental es que el punto base, este cambia dentro de la misma componente conexa por caminos, por esta razón es suficiente estudiar el subespacio correspondiente.

4.3. Apoyo de GeoGebra

* Es importante el uso de software de geometría dinámica para modelar algunos conceptos de la Topología Algebraica. Que nos permiten conceptualizar o comprender

mejor una definición o teorema que se aborda en esta teoría, ayudando en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en la formación de profesores en esta área.

* El uso de GeoGebra, nos ayudó a buscar ejemplos de algunos conceptos y a evidenciar visualmente algunos objetos matemáticos como definiciones y teoremas que se establecieron durante el desarrollo del trabajo.

* En la Universidad Pedagógica Nacional se aprovechan las características anteriormente mencionadas de GeoGebra en los diferentes cursos que ofrece la Licenciatura en Matemáticas permitiéndonos visualizar características de objetos matemáticos que no son posible entender tan solo con la teoría.

* Este trabajo se logro debido al dinamismo, rastro y muchas de las propiedades que nos ofrece GeoGebra.

Bibliografía

[1] Espanier, E, H, (1966), *Algebraic Topology*, Mc Graw Hill, New York.

[2] Hatcher, A. (2001), *Algebraic Topology*, Copyirght.

[3] Hohenwarter, M. and Preinter, J. (March-1997), *Dynamic Mathematics with GeoGebra, Journal of online mathematics and its aplications (7)*. obtenido de https://www.maa.org/press/periodicals/loci/joma/dynamic-mathematics-with-geogebra.

[4] Kosniowski, C. (1989), *Topología Algebraica*, Barcelona, España, Reverté, S.A.

[5] Macho Stadler, M. (2007/ 2008), *Topología Algebraica*, Universidad del País Vasco, Euskal Herriko Unibertsitatea

[6] Macho Stadler, M. (2014/ 2015), *Topología Algebraica*, Universidad del País Vasco, Euskal Herriko Unibertsitatea.

[7] Muños, J. M. (2002), *Introducción a la teoría de conjuntos*, Bogotá, D. C, Universidad Nacional de Colombia.

[8] Moreno Armella, L. (26 al 30 de junio de 2014).*¿Cómo impactan las tecnologías los currículos de la Educación Matemática?*, XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recife Brasil, P. 8.

[9] Munkres, J. R.*Topology a first course*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

[10] Neira, C. M. (2012), *Topología General*, Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

[11] Osorno, A. M. (2018 de Junio de 2018), *Invitación a la teoría de homotopía: Grupo fundamental y espacios recubridores*,Lecturas Matemáticas, 39, 29-48.

[12] Rubiano, G. N.(2002),*Topología*, Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

[13] Rubiano, G. N. (2007), *Topología Algebrica*, Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia

[14] Tejada Jiménez, D. M. (2000), *Introducción a la Topología Algebraica*, Medellin, Colombia, Universidad Nacional de Colombia.

ANEXOS

A continuación se presentan las demostraciones de los teoremas mencionados en el capítulo 2.

.1. Homotopía - Relación de equivalencia

A continuación se presenta la demostración del teorema 2.1.1 que indica que

> *La relación de homotopía es una relación de equivalencia en $C(X, Y)$. La clase de una función f la notaremos $[f]$ y la llamaremos la **clase de homotopía** de f.*

Demostración. Recordemos que debemos demostrar que la relación es reflexiva, simética y transitiva.

1. **Reflexiva** se obtiene ya que $f \simeq f$ por medio de la homotopía $f_t = f$, donde $F(s,t) = f(s)$ para $s, t \in [0,1]$

2. **Simétrica** si $f_0 \simeq f_1$ vía f_t, entonces $f_1 \simeq f_0$ vía la homotopía inversa f_{1-t}, $F^r(s, 1-t) = F(s, 1-t)$

3. **Transitiva** si $f_0 \simeq f_1$ vía f_t y $g_0 \simeq g_1$ vía g_t, donde $f_1 = g_0$, entonces $f_0 \simeq g_1$ vía la homotopía h_t que es igual a f_{2t} para $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y g_{2t-1} para $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, es decir:

$$h_t = \begin{cases} f_{2t} & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ g_{2t-1} & \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\square$

.2. Multiplicación de caminos es continua

Teorema .2.1. La multiplicación de caminos

$$m : \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(X, x_0)$$

dada por $m(f, g) := f \cdot g$, es continua.

Demostración. Si (K, W) es un abierto básico en $\Omega(X, x_0)$, con K compacto en $[0, 1]$ y W abierto en X, entonces $f \in (K, W)$ significa que $f : [0, 1] \longrightarrow X$ con $f(K) \subseteq W$.
Definamos los conjuntos A Y B como

$$A := 2(K \cap [0, 1/2]) \quad \text{y } B := 2(K \cap [1/2, 1]) - 1$$

son subconjuntos compactos de $[0, 1]$ y se tiene que

$$b^{-1}(K, W) = (A, W) \times (B, W)$$

Es decir, $m(f, g)(K) = f \cdot (K) \subseteq W$ si y solo si $f(A) \subseteq W$ y $g(B) \subseteq W$ para $(f, g) \in \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0)$ Con esta demostración también se demuestra que la multiplicación de caminos es abierta. □

.3. Multiplicación de caminos - clases de equivalencia

A continuación se presenta la demostración del teorema 2.2.1 que indica que

> *Sean $[f]$, $[g]$ las clases de homotopía de f y g respectivamente, si el producto es $f \cdot g$ está definido entonces el producto de clases es definido como*
>
> $$[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$$
>
> *Está bien definido y no depende del representante de clase*

Demostración. Lo que se busca demostrar es que si $f_0 \simeq f_1$ vía $F = f_t$, $g_0 \simeq g_1$ vía $G = g_t$ y si el producto existe entonces $f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$ vía $H = h_t$ donde $h_t = f_t \cdot g_t$.

H sigue a F en la primera mitad del dominio, y a G en la segunda mitad, similar a la ppropia definición de multiplicación de caminos:

$$(H(s,t)) = \begin{cases} F(2s,t), & si\ (s,t) \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \times [0,1] \\ G(2s-1,t), & si\ (s,t) \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \times [0,1] \end{cases}$$

Se tiene que H es continua en cada una de las partes cerradas y la intersección ocurre cuando $s = \frac{1}{2}$, y t es cualquiera. En este caso $H\left(\frac{1}{2}, t\right) = F(1,t) = f_t(1)$ por la primera parte de la definición, y $H\left(\frac{1}{2}, t\right) = G(0,t) = g_t(0)$ por la segunda parte; pero debido a a que F y G son homotopías, estos dos vales coinciden por estar unidas en los puntos iniciales y finales de los caminos.Por tanto, H está bien definida y es continua.

También se debe verificar que efectivamente $h_0 = f_0 \cdot g_0$ y $h_1 = f_1 \cdot g_1$.
Para $\frac{1}{2} \geq s$ se tiene

$$\begin{aligned} h_0(s) = H(s,0) &= F(2s,0) \\ &= f_0(2s) \\ &= (f_0 \cdot g_0)(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_1(s) = H(s,1) &= F(2s,1) \\ &= f_1(2s) \\ &= (f_1 \cdot g_1)(s) \end{aligned}$$

Para $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ se tiene

$$\begin{aligned} h_0(s) = H(s,0) &= G(2s-1,0) \\ &= g_0(2s-1) \\ &= (f_0 \cdot g_0)(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_1(s) = H(s,1) &= G(2s-1,1) \\ &= g_1(2s-1) \\ &= (f_1 \cdot g_1)(s) \end{aligned}$$

Finalmente se nota que H preserva los puntos extremos de los caminos. □

.4. Grupo Fundamental

A continuación se presenta la demostración del teorema 2.2.2 que indica que

> $\Pi_1(X, x_0)$ *es un grupo con la operación* $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$. *Este grupo se llama* ***el grupo fundamental*** *del espacio* X *en el punto base* x_0

Demostración. Se debe demostrar que se cumple la propiedad asociativa, la existencia del elemento neutro y la existencia de inversos.

- Asociativa. Dados los caminos f, g, h con $f(1) = g(0)$ y $g(1) = h(0)$ los productos

  $$f \cdot (g \cdot h) \text{ y } (f \cdot g) \cdot h$$

  están definidos por la repetición de la multiplicación de caminos (Ecuación 2.2). El producto que se realiza entre caminos introduce cambios en la velocidad y lo que se necesita es una homotopía correctora que los controle.

  El camino $f \cdot (g \cdot h)$ es el resulyado de componer primero g con h y luego componer con f. Así que, para $0 \leq S \leq \frac{1}{2}$ la función vale $f(2s)$. Para $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ esta función vale $(g \cdot h)(2s-1)$ que a su vez se descompone en dos vales: $0 \leq 2s - 1 \leq \frac{1}{2}$, o lo que es igual $\frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4}$ se tiene $(g \cdot h)(2s-1) = g(2(2s-1)-1) = g(4s-2)$, mientras que para $\frac{3}{4} \leq s \leq 1$ se tiene $(g \cdot h)(2s-1) = h(2(2s-1)-1) = h(4s-3)$. En resumen se tiene que:

  $$f \cdot (g \cdot h)(s) = \begin{cases} f(2s), & si\ 0 \leq s \leq \dfrac{1}{2} \\ g(4s-2), & si\ \dfrac{1}{2} \leq s \leq \dfrac{3}{4} \\ h(4s-3), & si\ \dfrac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

  De manera similar se puede ver que

  $$((f \cdot g) \cdot h)(s) = \begin{cases} f(4s), & si\ 0 \leq s \leq \dfrac{1}{4} \\ g(4s-1), & si\ \dfrac{1}{4} \leq s \leq \dfrac{1}{2} \\ h(2s-1), & si\ \dfrac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

  $f \cdot (g \cdot h)$ es una reparametrización de $(f \cdot g) \cdot h)$ por medio de la parametrización lineal a trozos $\alpha : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ donde

$$\alpha(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}s, & si\ s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ s - \frac{1}{4}, & si\ s \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ 2s - 1, & si\ s \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

Efectivamente,

$$((f \cdot g) \cdot h)(\alpha(s)) = \begin{cases} ((f \cdot g) \cdot h)\left(\frac{1}{2}s\right) = f\left(4\frac{1}{2}s\right) = f(2s), & si\ 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g\left(4\left(s - \frac{1}{4}\right) - 1\right) = g(4s - 2), & si\ \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ h(2(2s-1) - 1) = h(4s - 3), & si\ \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

lo que muestra que $(f \cdot g) \cdot h)(\alpha(s) = f \cdot (g \cdot h)$ y en definitiva ambas funciones recorren f, luego g y finalmente a h, pero en diferentes velocidades durante el intervalo $[0,1]$, y por tanto, la operación $\Pi_1(X, x_0)$ es asociativa.

- Existencia de Elemento Neutro. Se denota por c_{x_0} el camino constante a x_0, es decir, $c_{x_0} = x_0$ para todo $0 \leq s \leq 1$.
  El camino $c_{x_0} \cdot f$ es una reparametrización de f

$$\alpha(s) = \begin{cases} 0, & si\ s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2s - 1, & si\ s \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \end{cases}$$

  $c_{x_0} \cdot f = c_{x_0}(2s) = x_0$ para $s \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $c_{x_0} \cdot f(s) = f(2s-1)$ para $s \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$. Reparametrizando obtenemos que $f \cdot c_{x_0} \simeq f$, es decir, $[c_{x_0}] \cdot [f] = [f]$. $\therefore$ $[c_{x_0}]$ (la clase de homotopía del camino constante a x_0) es el elemento neutro de $\Pi_1(X, x_0)$.

- Existencia de Inversos. Para un camino f cerrado en x_0, la clase del camino inverso f^r sera también su inverso algebraico a izquierda, es decir, $f^r \cdot f \simeq c_{x_0}$. Intuitivamente, si primero se recorre el camino f y a continuación desandamos los pasos, es como si hubiera permanecido en el punto x_0, no se desplazo de x_0.
  Consideremos la homotopía H definida en el momento t como un camino que comienza en x_0, va hasta el punto $f(t)$ y permanece allí por un intervalo de tiempo

luego del cual regresa a x_0 por medio de f^r. La demostración que f^r también actúa como inverso a derecha es completamente similar. O si se prefiere, se hace referencia a un hecho simple de la teoría de grupos:"La existencia de identidad e inversos a izquierda, implica la existencia a derecha".

□

.5. Homomorfismos Inducidos

A continuación, se demuestra el teorema 2.3.1, el cual indica

Dada una función $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ continua entre espacios punteados, la función $h_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ definida por $h_*([f]) = [h \circ f]$ es un homomorfismo de grupos, llamado homomorfismo inducido por h.

Demostración. La composición por h preserva el producto de caminos.
En efecto

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t), & si\ 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \\ g(2t-1), & si\ \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

entonces $h \circ (f \cdot g)$ es el camino definido por

$$\begin{aligned} h \circ (f \cdot g)(t) &= \begin{cases} h(f(2t)), & si\ 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \\ h(g(2t-1)), & si\ \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (h \circ f)(2t), & si\ 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \\ (h \circ g)(2t-1), & si\ \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= ((h \circ f) \cdot (h \circ g)) \end{aligned}$$

Así que $h \circ (f \cdot g) = (h \circ f) \cdot (h \circ g)$

Podemos notar que

$$\begin{aligned} h_*([f][g]) &= h_*([f \cdot g]) \\ &= [h \circ (f \cdot g)] \\ &= [(h \circ f) \cdot (h \circ g)] \\ &= [(h \circ f)] \cdot [(h \circ g)] \\ &= h_*([f])h_*([g]) \end{aligned}$$

$\therefore h_*$ es un homomorfismo de grupos. $\square$

.6. Grupo fundamental - punto base

A continuación se demuestra que el grupo base no depende del punto base como se indica en el teorema 2.3.2.

Si $x_1 \in X$*, entonces* $\Pi_1(X, x_0)$ *es isomorfo a* $\Pi_1(X, x_1)$.

Demostración. Sea $\alpha : I \longrightarrow X$ un camino de x_1 a x_0 y sea $\alpha^r(\alpha) = \alpha(1-\alpha)$ el camino inverso de x_1 a x_0.
A cada camino f cerrado en x_0 se le asocia el camino $\alpha^r \cdot f \cdot \alpha$ definido por $(\alpha^r \cdot f) \cdot \alpha \simeq \alpha^r \cdot (f \cdot \alpha)$ con lo cual se tiene una función $[f] \longrightarrow [\alpha^r \cdot f \cdot \alpha]$.
La función de traslación $T_\alpha : \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow \Pi_1(X, x_1)$ definida como $T_\alpha([f]) = [\alpha^r \cdot f \cdot \alpha]$ y la función $T_{\alpha^r}([f]) = [\alpha \cdot f \cdot \alpha^r]$ están bien definidas ya que que el producto está bien definido (es independiente de la representación de la clase de homotopía) y son homomorfismos de grupos debido a que

$$\begin{aligned} T_\alpha([f] \cdot [g]) &= T_\alpha([f \cdot g]) \\ &= [\alpha^r \cdot f \cdot g \cdot \alpha] \\ &= [\alpha^r \cdot f \cdot \alpha \cdot \alpha^r \cdot g \cdot \alpha] \\ &= T_\alpha[f] \cdot T_\alpha[g] \end{aligned}$$

De manera similar para T_{α^r}

$$\begin{aligned} T_{\alpha^r}([f]\cdot[g]) &= T_\alpha([f\cdot g]) \\ &= [\alpha\cdot f\cdot g\cdot \alpha^r] \\ &= [\alpha\cdot f\cdot \alpha^r\cdot\alpha\cdot g\cdot\alpha^r] \\ &= T_{\alpha^r}[f]\cdot T_{\alpha^r}[g] \end{aligned}$$

Además cada compuesta es la respectiva identidad, esto es

$$T_\alpha(T_{\alpha^r}([f])) = T_\alpha[\alpha\cdot f\cdot\alpha^r] = [\alpha^r\cdot\alpha\cdot f\cdot\alpha^r\cdot\alpha] = [f]$$

con lo que $T_\alpha\cdot T_{\alpha^r} = id_{\Pi_1(X,x_1)}$ y así la función T_α es un isomorfismo de grupos. $\square$