UN ESTUDIO DE LAS SECCIONES CÓNICAS Y CUÁDRICAS A PARTIR DE SU MATRIZ ASOCIADA

WILMER FERNANDO ARANDIA AYALA

JONNATHAN ANDRÉS GARCÉS BRAVO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.

2019

UN ESTUDIO DE LAS SECCIONES CÓNICAS Y CUÁDRICAS A PARTIR DE SU MATRIZ ASOCIADA

WILMER FERNANDO ARANDIA AYALA
2014140005

JONNATHAN ANDRÉS GARCÉS BRAVO
2014140046

Trabajo de grado como requisito para obtener el título de

Licenciatura en Matemáticas

Asesor
EDWIN CARRANZA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2019

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
Titulo del documento	Un estudio de las secciones cónicas y cuádricas a partir de su matriz asociada.
Autor(es)	Arandia Ayala, Wilmer Fernando; Garcés Bravo, Jonnathan Andrés
Director	Carranza Vargas Edwin
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2019. 100 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	MATRIZ SIMETRICA, MATRIZ NO SIMETRICA, MATRIZ DE COEFICIENTES, CONICA, CUADRICA, ECUACIÓN CANÓNICA, CONICA DEGENERADA, ECUACIÓN CARACTERÍSTICA.

2. Descripción

Se realiza un estudio a las secciones cónicas y cuádricas, por medio de la matriz de coeficientes bien sea simétrica o no simétrica que se asocia a cada una de ellas. En donde se analizan problemas propios de la geometría analítica y se estudian operaciones básicas del algebra lineal, en cada parte del estudio se realiza un acompañamiento visual por parte del software *Geogebra*.

3. Fuentes

Poole, D. (2011). *Algebra lineal Una introducción moderna.* Mexico: CENGAGE Learning.
Vian, J. A. (1997). *Álgebra Lineal Formas Cuadráticas.* España: Universidad de Valladolid.
Lehman, C. (1989). Geometría analítica. Editorial Limusa, S.A. de C.V.
Muños, A. (2015). Curvas cónicas desde su origen hasta sus aplicaciones en la actualidad (Tesis de maestría). Universidad de Valladolid, España.
Rosales, A. (2009). Evolución histórica del concepto de matriz. Revista digital Matemática, educación e interned. Vol.9, N° 1.pp. 1-10

4. Contenidos

El objetivo del presente trabajo de grado es realizar el estudio a las secciones cónicas y cuádricas a partir de una matriz cuadrada simétrica o no simétrica que se asocia a cada una de estas superficies, para este fin se realizaron cinco capítulos que se describen a continuación.

- En el capítulo uno se tratan contenidos teóricos preliminares en donde se ilustran los aspectos más relevantes de las secciones cónicas a través de la historia, algunas definiciones y resultados básicos tanto de la geometría analítica como del álgebra lineal. También se abordan expresiones equivalentes de la ecuación general de segundo grado a partir de la representación de matriz simétrica y ampliada a matrices no simétricas que serán el pilar de estudio para el desarrollo de las secciones restantes.

- En el capítulo dos se realiza una adaptación de los dos problemas fundamentales de la geometría analítica planteados por Lehmann, los cuales permiten realizar el primer acercamiento al objeto de estudio. Sin embargo, ambos problemas están estrechamente relacionados, como se menciona en su libro *"Geometría analítica",* estos problemas son esencialmente inversos entre sí y que juntos constituyen el problema fundamental de toda la Geometría Analítica.
- En el capítulo tres se abordan las propiedades algebraicas propias de las matrices de coeficientes, con las cuales se realizan cálculos y operaciones sujetos a las reglas del álgebra de matrices, como son la adición de matrices, multiplicación por escalar, multiplicación, potencia, transpuesta e inversa de matrices. Estas operaciones matriciales juegan un papel significativo en el estudio debido a que emitirá una perspectiva a lo que se llamará operación entre cónicas.
- En el capítulo cuatro se realiza un estudio específico de las cuádricas y como la intersección de estas generan cónicas en el espacio, las cuales tendrán, una matriz asociada de 4×4.
- En el último capítulo se presentan las conclusiones generales obtenidas en el desarrollo del estudio, donde se establece el cumplimiento de los objetivos propuestos al inicio del trabajo; de modo que se explica que a partir de transformaciones en la matriz asociada a una cónica como varía el comportamiento gráfico y algebraico de estas.

5. Metodología

Se analizó primero la expresión equivalente a la ecuación general o canónica de una cónica cualquiera, de donde se pudo observar el comportamiento de las cónicas al efectuar cambios a la matriz.
Posteriormente se estudian y adaptan los dos problemas fundamentales del algebra lineal planteados por Lehmann para poder deducir los términos analíticos de las cónicas y cuádricas.
Para finalmente estudiar operadores y operaciones con las matrices para así deducir el comportamiento de las cónicas.

6. Conclusiones

La presente investigación se ha dedicado al estudio de las secciones cónicas a partir de su matriz asociada. Se ha utilizado software académico (Geogebra) para analizar de manera gráfica cómo se

transforman las cónicas y cuádricas al realizar transformaciones y operaciones propias de matrices.
En el desarrollo del trabajo de investigación que ha dado lugar a la presente tesis se han alcanzado los objetivos inicialmente planteados en cuanto a:

- Determinar cómo se altera el comportamiento gráfico y algebraico de las cónicas al aplicar transformaciones en la matriz asociada a la cónica.
- Visualizar mediante el software Geogebra cómo se representan las trasformaciones en un espacio bidimensional y tridimensional.
- Establecer una analogía entre el método algebraico con los métodos usuales para generar las canicas mediante: excentricidad, analíticos y lugar geométrico.

En la investigación se ha realizado una clasificación de las secciones cónicas y cuádricas respecto a su matriz asociada tanto de manera canónica como de manera ordinaria al igual que en matrices simétricas y no simétricas, dicha clasificación ha sido el pilar de estudio en la investigación debido a que facilitó el trabajo con las cónicas y cuádricas, esta clasificación se decidió hacerla debido a que en la bibliografía estudiada no encontramos nada similar.
Del análisis de los aspectos teóricos encontrados en la bibliografía que tratan sobre el estudio de cónicas a partir de su matriz se concluye que se realizan pequeños avances sobre el tema además de que el todo el estudio es realizado con matrices simétricas y que aportan muy poco en el aspecto de cuádricas y cónicas en el espacio.
En la investigación se abordan los dos problemas fundamentales de la geometría analítica planteados por Lehemann, donde se hace uso de cónicas degeneradas para brindar la solución a uno de ellos donde se concluye que dada una cónica sin importar la cónica se podrá calcular la matriz a la que se le asocia además de que esta matriz será irreductible, con lo que se establece la primera conjetura del estudio.
Al realizar el estudio con las operaciones propias del algebra lineal se establece lo que serían familia de matrices equivalentes al multiplicar por un escalar, demostrando que se cumplen las propiedades reflexiva, simétrica, transitiva tanto en matrices simétricas como no simétricas y que dichas familia de matrices equivalentes se asocian a una sola cónica, con lo que se concluye que a una cónica o cuádrica no se le asocia una única matriz sino una familia de matrices, idea que complementa la había surgido al reconocer que cada cónica y cuádrica tenía dos matrices asociada la simétrica y la no simétrica.
La importancia de Geogebra en el estudio fue ayudar a determinar el comportamiento de las cónicas. Al momento de sumar, restar y multiplicar matrices Geogebra nos ayudó a determinar los puntos en los cuales se cortaban las cónicas, puntos que fueron importantes para determinar el resultado de dichas operaciones. Lo anterior mente nombrado surge como proposición del estudio.
De la multiplicación de matrices surge la idea de la potencia de una matriz con lo que se descubrió que cuando la potencia de una es par esta curva no tendrá representación real, por lo que se trabaja con las potencias impares y examinar particularidad con cada una de las cónicas, con lo que se observó cómo se alteró cada una de las cónicas cuando su potencia era impar negativa y positiva. Idea similar al trabajar con la inversa de una matriz.

Por último, al trabajar con cuádricas se identificó que al intersectar dos de estas se generarían una cónica en el espacio y se trabajaron las cónicas en el espacio la cual tendría una matriz asociada de 4 X 4, se resalta que se trabajaron las intersecciones de cuádricas cuando esta intersección era paralela a alguno de los ejes.

Se realizaron los siguientes aportes

- Se ha sistematizado las definiciones y teoremas relacionados con la matriz asociada a una cónica.
- Se ha realizado una clasificación de cónicas y cuádricas tanto con matrices simétricas como no simétricas, que facilitara futuros estudios referentes al tema.
- Se formularon proposiciones que pueden generar bases para futuros estudios.
- Se ha determinado por medio de ejemplos la variación o deformaciones de las cónicas al aplicar potenciación de matrices, transpuesta e inversa.
- Todas las operaciones marciales fueron realizadas por medio de un programa diseñado en geogebra, el cual estará en Geogebra.org, donde al introducir las matrices pueden escoger las operaciones a realizar y brinda como resultado las cónicas que se generan.
- Se brindan los primeros avances de las cónicas en el espacio con su respectiva clasificación.

Una vez concluida la tesis, se considera interesante investigar otros aspectos relacionados con las matrices y se propone:

- Extender los estudios expuestos en esta tesis al estudio de las cónicas en el espacio.
- Examinar cómo se comportan las cónicas| y cuádricas al trabaja con eingevalores y eingevectores.
- Se podría establecer un trabajo para desarrollar en los colegios, con el fin de enseñar todo lo relacionado con las secciones cónicas a partir de una representación no usual, como lo es su representación matricial.

Elaborado por:	Arandia Ayala, Wilmer Fernando; Garcés Bravo, Jonnathan Andrés.
Revisado por:	Carranza Vargas Edwin

Fecha de elaboración del Resumen:	22	12	2018

Índice general

Índice de figuras

Página

Índice de tablas

Página

Agradecimientos

Este trabajo lo dedicamos a toda aquella persona que contribuyó con un granito de arena para que lograramos llegar a este punto, como lo son nuestras familias, amigos y profesores. Un agradecimiento especial a nuestro asesor, el cual aporto de varias maneras a que este trabajo se llevará acabo.

Introducción

El presente trabajo de grado muestra un estudio de las secciones cónicas y cuádricas a partir de su representación matricial, para ello se inicia exponiendo la correspondiente justificación y el interés que motivó a abordar, desarrollar e indagar sobre este tema. Después, se identifican los objetivos que se trazaron al inicio de este proceso con el fin de guiar el desarrollo de la monografía.

En el capítulo uno, se tratan contenidos teóricos preliminares en donde se ilustran los aspectos más relevantes de las secciones cónicas a través de la historia, algunas definiciones y resultados básicos tanto de la geometría analítica como del algebra lineal. También se abordan expresiones equivalentes de la ecuación general de segundo grado a partir de la representación de matrices simétricas y ampliado a matrices no simétricas que serán el pilar de estudio para el desarrollo de las secciones restantes.

En el siguiente capítulo, se realiza una adaptación de los dos problemas fundamentales de la geometría analítica planteados por Lehman, los cuales permiten realizar el primer acercamiento al objeto de estudio. Sin embargo, ambos problemas están estrechamente relacionados, como menciona en su libro, estos problemas son esencialmente inversos entre sí y que juntos constituyen el problema fundamental de toda la Geometría Analítica.

En el tercer capítulo, se abordan las propiedades algebraicas propias de las matrices de coeficientes, con las cuales se realizan cálculos y operaciones sujetos a las reglas del algebra de matrices, como son la adición de matrices, multiplicación por escalar, multiplicación, potencia, transpuesta e inversa de matrices. Estas operaciones matriciales juegan un papel significativo en el estudio debido a que emitirá una perspectiva a lo que se llamará operación entre cónicas.

En el último apartado se presenta un estudio de las cuádricas y de la intersección de estas y de cómo generan cónicas en el espacio con una matriz 4×4. En la presentación de cada resultado se introducen ejemplos de diversa índole para su mejor comprensión y visualización. También, se plantean una serie de proposiciones y las correspondientes demostraciones según el respectivo caso.

Finalmente, se presentan las conclusiones generales obtenidas en el desarrollo del estudio, donde se establece el cumplimiento de los objetivos propuestos al inicio del trabajo; de modo que se explica que a partir de transformaciones en la matriz asociada a una cónica como varía el comportamiento gráfico y algebraico de estas y para culminar se presenta la bibliografía empleada en el desarrollo del trabajo.

Justificación

Este trabajo de grado se enmarca en uno de los problemas surgidos en el curso de geometría analítica de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Se pretende estudiar este problema, con el objetivo de contribuir al desarrollo en la línea del algebra y geometría de la universidad, específicamente en la rama de la geometría analítica, aportando insumos para futuros trabajos de grado. Sumado a esto, se plantea la posibilidad de implementarse en algunas de las asignaturas del ciclo de fundamentación matemática tales como geometría analítica.

La teoría algebraica en las secciones cónicas es importante en la geometría analítica, debido a que las líneas y figuras geometrías se estudian mediante la aplicación de técnicas básicas del algebra y análisis matemático en un determinado sistema coordenado. Esto se logra generalmente por medio de representar las líneas y figuras geométricas mediante ecuaciones polinómicas de segundo grado y el estudio de sus propiedades algebraicas.

Se han encontrado diversos estudios donde se encuentran algunos aportes sobre el tema, pero dichos estudios se realizan utilizando matrices simétricas debido a sus propiedades. Un asunto que interesó a los estudiantes del curso de geometría analítica en el semestre 2016-2 fue representar las secciones cónicas con una matriz no simétrica y analizar cómo se alteran las secciones cónicas, estudio que no se completó en dicho curso.

Por lo tanto, se propone retomar el estudio y determinar los comportamientos gráficos de las secciones cónicas al realizar procesos algebraicos con matrices simétricas y no simétricas, a su vez se plantea compilar los aportes más importantes encontrados en un solo documento y abrir la posibilidad de realizar un estudio similar con las superficies cuádricas.

Objetivos

Objetivo general

Establecer relaciones entre las secciones cónicas y cuádricas con la expresión matricial que se asocia a cada una de ellas.

Objetivos específicos

- Determinar cómo se altera el comportamiento gráfico y algebraico de las cónicas al aplicar transformaciones en la matriz asociada a está.
- Visualizar mediante el software GeoGebra cómo se representan las transformaciones en un espacio bidimensional y tridimensional.
- Establecer una analogía entre el método algebraico con los métodos usuales para generar las cónicas mediante: excentricidad, analíticos y lugar geométrico.
- Generar un documento escrito en el cual se evidencien los resultados obtenidos en la exploración del trabajo realizado.

Capítulo 1

Marco Teórico

A continuación se encontraran los referentes teóricos que se usaran a lo largo del trabajo de grado, el cual contiene tres secciones: la primera contiene una recopilación histórica del tratamiento de las secciones cónicas hasta llegar a matemáticos como Arthur Cayley y James Sylvester, quienes fueron los primeros en trabajar las secciones cónicas con una representación matricial; la segunda habla de algunas definiciones de las secciones cónicas según Lehmann y de otros autores sobre los sectores cuádricos; por último, la tercera sección desarrolla los conceptos de la representación matricial de las cónicas con matrices simétricas y no simétricas.

1.1. Historia

Cuenta la leyenda que las secciones cónicas surgen en Atenas aproximadamente en el año 430 a.C a la par de la peste que sacudió a Atenas; su creencia en los dioses los llevó a uno de los problemas clásicos de la antigüedad.
El oráculo de Apolo (dios de la medicina) en Delos les dijo a los atenienses que para poder librarse de la peste debían duplicar el altar cubico dedicado a Apolo. Los griegos conocían la manera de cuadrar un rectángulo, es decir si el rectángulo tiene por lados a

y b, encontrar un cuadrado cuya área es ab; por otro lado, dedujeron que, si duplicaban los lados del altar, este no se duplicaría si no que seria 8 veces de la inicial.

Fue **Hipócrates de Quíos** (470 a.C - 410 a.C) quien reconoció la analogía que existía entre el problema de cuadrar el rectángulo y de duplicar el cubo. El problema de cuadrar el rectángulo equivalía a verificarse la siguiente proporción:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Hipócrates de Quíos, intentó interpolar dos medidas entre a y b, es decir:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Mencionó que resolver este problema era equivalente a resolver la duplicación del cubo.

Menecmo (380 a.C - 320 a.C) descubre que existen curvas con la propiedad deseada; se basó en la construcción de puntos de las curvas al intersecar un cono con un plano; aunque las curvas buscadas para resolver el problema eran lo que hoy conocemos como parábolas o hipérbolas; también surgieron las elipses.

Arquímedes (287 a.C - 212 a.C) en su escrito la cuadratura de la parábola a su amigo Dositeo presentó 24 proposiciones; en una de ellas Arquímedes logra cuadrar un segmento de parábola, es decir:

Dada una parábola y un segmento parabólico el área por debajo del segmento será cuatro tercios del triángulo inscrito. Dicho triángulo formado con los puntos de intersección y el vértice de la parábola (figura 1.1).

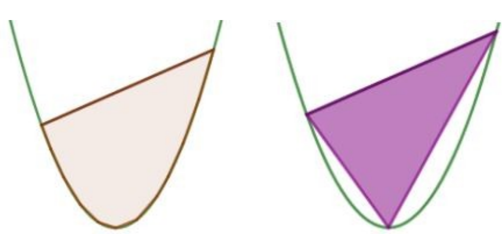


Figura 1.1: Cuadratura de un segmento parabólico

Por otra parte, en su libro: Sobre conoides y esferoides, en la proposición 4 Arquímedes calcula el área de una elipse utilizando polígonos regulares inscritos en la elipse y la circunferencia que se forma utilizando el semieje mayor. Por todo, su conocimiento sobre la cónicas y sus propiedades era posible creer la leyenda de que Arquímedes utilizó las propiedades de las parábolas para ganar la batalla de Siracusa, quemando las naves enemigas mediante espejos reflectores, aunque estudios actuales desmienten la hazaña. Sin duda alguna, uno de los matemáticos de la antigüedad que centró gran parte de su estudio a las cónicas fue **Apolonio de Perga** (262 a.C - 180 a.C); esto lo demuestran sus ocho libros "Cónicas". El cual no solo incorporaba los conocimientos sobre el tema, hasta el momento, sino también ampliaba y sistematizaba el mismo.

Apolonio fue el primero en probar que cualquier corte de un plano con un cono cualquiera siempre va a generar una cónica, es decir, no es necesario un cono recto, agudo u obtuso como lo menciono Menecmo. Así pues, de cualquier cono se pueden obtener las tres secciones cónicas, solo se debe variar la inclinación del plano que realice el corte con el cono.

Fue Apolonio quien definió el cono de dos hojas, definición que se ha conservado hasta el momento. Después de esta definición la hipérbola se convirtió en una curva de dos ramas, esto con el fin de dar solución a lo que los geómetras de la antigüedad relacionaban con dos hipérbolas.

Los pitagóricos griegos ya habían utilizado los vocablos ellipsis (deficiencia), e hyperbola (exceso) asociado a la resolución de ecuaciones cuadráticas mediante áreas, y Arquímedes utilizó el vocablo parábola para referirse a la sección de un cono rectangular. Apolonio fue quien utilizó estos nombres haciendo alusión a la técnica pitagórica de la aplicación de áreas que se cumple en las tres secciones cuando se considera el *"latus-rectum",l,* que las caracteriza :

$$y^2 = lx \quad \text{parábola;} \quad y^2 > lx \quad \text{hipérbola;} \quad y^2 < lx \quad \text{elipse}$$

Uno de los últimos matemáticos griegos de la antigüedad fue **Pappus de Alejandría** (290 d.C - 350 d.C) quien realiza una compilación matemática, en la que presenta un panorama histórico de la matemática clásica y se comentan los trabajos de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Ptolomeo entre otros e incluye algunas demostraciones alternativas y nuevas proposiciones geométricas; gran parte de esta obra está conservada hasta la actualidad excepto el primer libro y parte del segundo en el cual se introducía la noción de foco de una parábola y la directriz de una sección cónica.

Un matemático que trabajó con las secciones cónicas al comienzo del siglo XVI fue **Johann Kepler** (1571-1630); se hace evidente al analizar las leyes de Kepler. En la primera ley de Kepler, demostró que las órbitas de los planetas alrededor del sol son trayectorias elípticas y que él solo está situado en uno de los focos. En su segunda ley, demostró que el radio vector que une a un planeta y el sol recorre áreas iguales en tiempos iguales; por último, en su tercera ley Kepler demuestra que, para cualquier planeta, el cuadrado de su periodo orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica.

Kepler fue el primero en establecer una multiplicidad o como él lo llamo el principio de continuidad, que establece que dada una cónica formada por dos rectas cuyos focos coinciden con la intersección de dichas rectas, si alejamos uno de los focos de manera gradual se obtiene una familia de hipérbolas y cuando el foco llega hacia el infinito se obtendrá una parábola, si se hace de cuenta que se puede traspasar la línea del infinito y el foco que hemos estado moviendo comienza a acercarse al otro pero por el lado contrario se obtendrá un conjunto infinito de elipses, cuando los focos vuelven a coincidir se obtiene una circunferencia. De esta manera Kepler tiene en cuenta cinco tipos de cónicas (figura 1.2), las cuales se conocen hasta la actualidad.

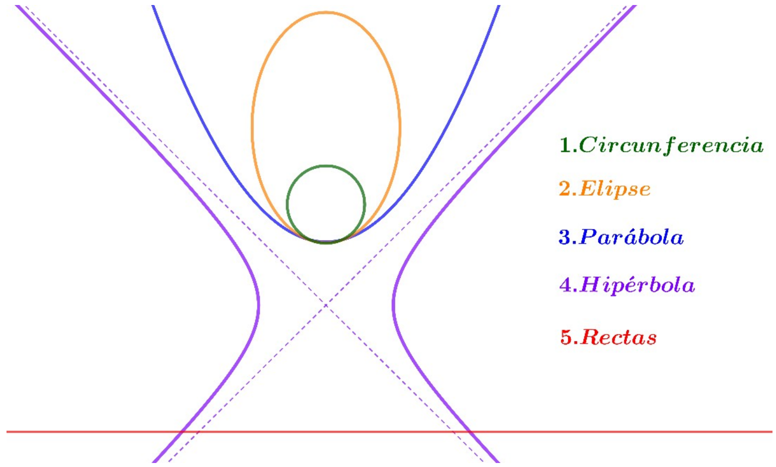


Figura 1.2: Cónicas plano Euclídeo

A pesar de los avances en cuanto a las secciones cónicas no se había presentado un documento formal desde Apolonio, hasta el siglo XVI cuando Girad Desargues presenta un documento, traducido al español, Practica de la línea de prueba, en el cual expone la idea que es pilar en la geometría proyectiva, la cual plantea que:

Dada una curva cónica esta sigue manteniendo su condición de cónica independientemente de la perspectiva bajo la que se observe y que dichas propiedades permanecen invariables bajo tales cambios.

Para probar lo anterior Desargues introduce conceptos tales como puntos del infinito, los cuales le permitieron una sucesión continua de correspondencia entre cónicas y reducir las secciones cilíndricas a un caso particular de las cónicas.

Rene Descartes (1596 - 1650) en 1637 presenta un libro llamado "La geometría", en el tomo 2 de dicho libro realiza un tratamiento de las líneas curvas en donde reduce el estudio y los problemas geométricos de las cónicas a un tratamiento algebraico. A la par de Descartes trabajó **Pierre de Fermat** (1601 - 1665) quien también utiliza el lenguaje algebraico para estudiar las curvas que se pueden expresar como ecuaciones de primer y segundo orden; en su libro Introducción a los lugares planos y solidos Fermat demuestra la relación existente entre las ecuaciones de primer orden con las rectas y las de segundo orden con las cónicas.

Un alumno de Desargues sigue sus pasos en la geometría proyectiva y elabora un artículo donde presenta el teorema del hexágono místico o lo que hoy se conoce como el teorema de **Pascal** (1623 - 1662):

Si se inscribe un hexágono en una cónica, los puntos de intersección de los pares de lados opuestos están alineados.

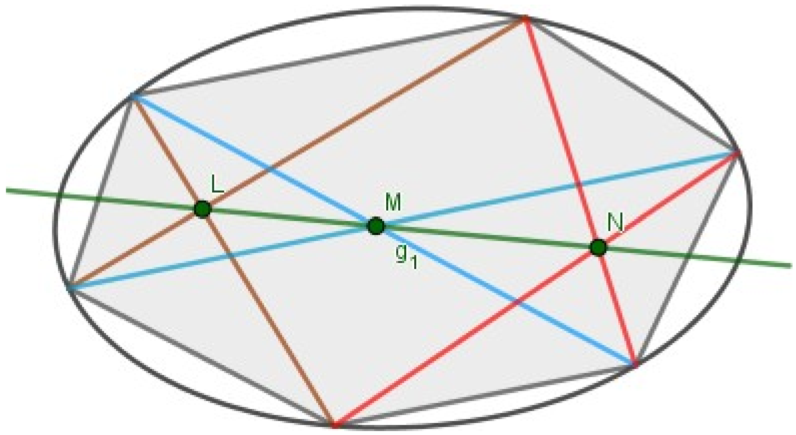


Figura 1.3: Hexágono inscrito en elipse

Isaac Newton (1642 - 1727) retoma los estudios de Kepler sobre el movimiento de los cuerpos celestes para establecer la ley de Gravitación universal, expuesto en su libro titulado "El movimiento de los cuerpos" donde demuestra que la órbita de un cuerpo alrededor de una fuerza de tipo gravitatorio es siempre una curva cónica.

Por último, a partir del siglo XIX después de la aparición del cálculo matricial **Arthur Cayley y James Sylvester** brindan el lenguaje matricial para representar y estudiar las secciones cónicas. Este lenguaje matricial surge del problema de encontrar las raíces al intersecar dos secciones cónicas de tal forma que se forme un cuadrángulo.

Cayley expone que existen cinco casos de intersección y solo tres tipos de multiplicidad de raíces: tres raíces simples, una doble y una triple y es Sylvester quien al dar solución llega a la representación matricial de las cónicas quien en 1851 expone, es fantástico que una teoría de tal pureza analítica encuentre su origen en especulaciones geométricas.

1.2. Definición de cónicas

En este apartado se hará una clasificación de las cónicas a partir de sus distintas definiciones y de sus características propias. Entre estas definiciones están:

* Definición como sección cónica: En esta definición las cónicas son las curvas determinadas mediante diferentes secciones de un plano con respecto a un cono circular recto (Figura 1.4). Si el plano de sección que corta al cono no pasa por su vértice se obtiene una cónica no degenerada.

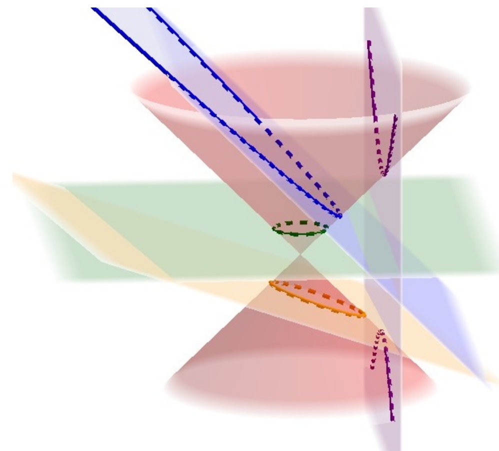


Figura 1.4: Secciones cónicas

* Definición como lugar geométrico: En esta definición las cónicas son los puntos de curvas que verifican una determinada relación de distancias. A partir de dicha relación, es posible estudiar las cónicas también como casos particulares de ecuaciones de segundo grado:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

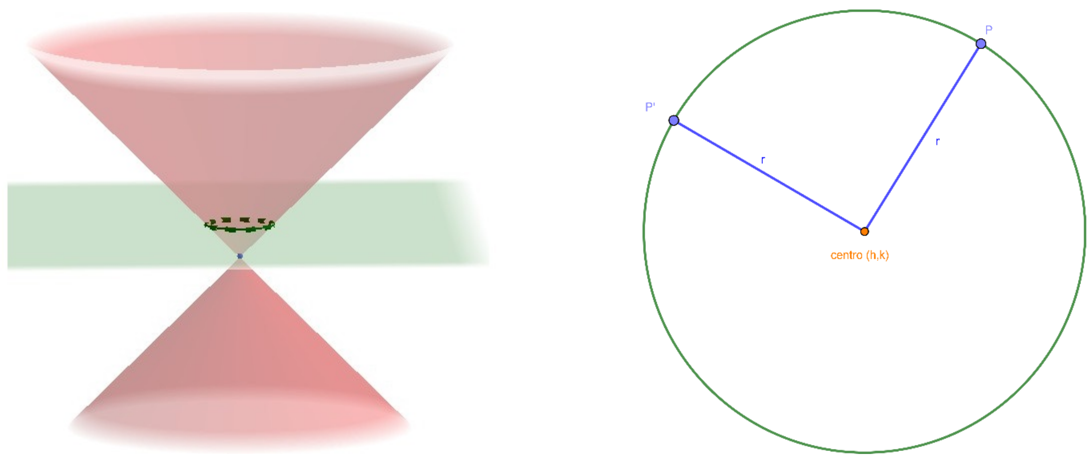
* Definición por excentricidad: En esta definición las cónicas se distinguen por el cociente entre la distancia focal (c) y el eje real (a) y se representa generalmente por la letra e. Tal que:

$$e = \frac{c}{a}$$

Todas estas definiciones equivalentes de cónicas no degeneradas que se han mencionado, se relacionarán de manera particular a lo largo de esta sección. Así mismo se describirán sus ecuaciones analíticas, partiendo de su definición como lugar geométrico; finalmente se mencionarán algunas de sus propiedades métricas.

1.2.1. Circunferencia

Como sección cónica (Figura 1.5a), la circunferencia es generada cuando un plano y un cono se cortan y dicho plano es paralelo a la base del cono.



(a) Sección cónica (b) Lugar geométrico

Figura 1.5: Circunferencia

Una circunferencia es el lugar geométrico determinado por todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo de ese plano (Figura 1.5b). El punto fijo se llama centro de la circunferencia y la distancia constante se llama radio.

La circunferencia cuyo centro es el punto (h, k) y de radio $r > 0$ se expresa analíticamente, por la siguiente ecuación ordinaria:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Al desarrollar los cuadrados, trasponer y ordenar los terminos se obtiene:

$$x^2 + y^2 - 2xh - 2yk + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

La cual se puede reescribir como la ecuación de segundo grado:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

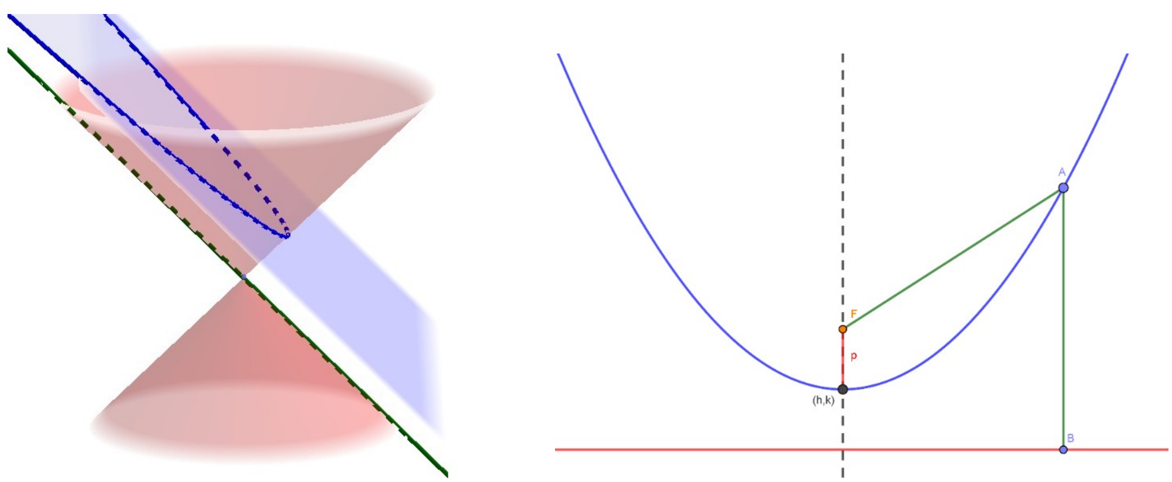
En donde, $D = -2h$; $E = -2k$ y $F = k^2 + h^2 - r^2$

Ahora bien, cuando el centro de la circunferencia coincide en el origen $(0, 0)$, se dice que tendrá como ecuación canónica:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

1.2.2. Parábola

Si el plano de sección es paralelo a una única generatriz del cono circular (Figura 1.6a), la cónica que se determina en la intersección de ambos es una parábola:



(a) Sección cónica (b) Lugar geométrico

Figura 1.6: Parábola

Una parábola es el lugar geométrico determinado por los puntos del plano que equidistan de un punto fijo F, llamado foco, y de una recta fija l, llamada directriz (Figura 1.6b). La recta punteada será llamada a, la cual se considera como el eje de la parábola y esta es perpendicular a la recta directriz que pasa por el foco.

La parábola con vértice (h, k) y eje de la parábola paralelo al $eje\ y$ es expresada analíticamente por la siguiente ecuación ordinaria:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Donde p es la distancia del foco al vértice. Si $p > 0$, la parábola es cóncava o con ramas hacia arriba, por otra parte, si $p < 0$, la parábola es convexa o con ramas hacia abajo. Luego al desarrollar el cuadrado, trasponer y ordenar términos se obtiene:

$$x^2 - 2hx - 4py + h^2 + 4pk = 0$$

La cual se puede reescribir como la ecuación de segundo grado:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Con $D = -2h$; $E = -4p$ y $F = h^2 + 4pk$

Ahora bien, la ecuación de una parábola de vértice en el origen y con el eje de la parábola que coincide al $eje\ y$, se dice que tendrá por ecuación canónica

$$x^2 = 4py$$

Recíprocamente la parábola con vértice (h, k) y eje de la parábola paralelo al $eje\ x$, se expresa analíticamente por la siguiente ecuación ordinaria:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

y por ecuación canónica

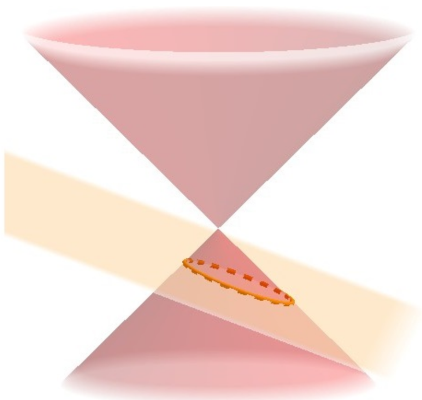
$$y^2 = 4px$$

Finalmente se llama excentricidad de una parábola al cociente entre la distancia focal y el eje real, el cual debe ser 1 en todos los casos.

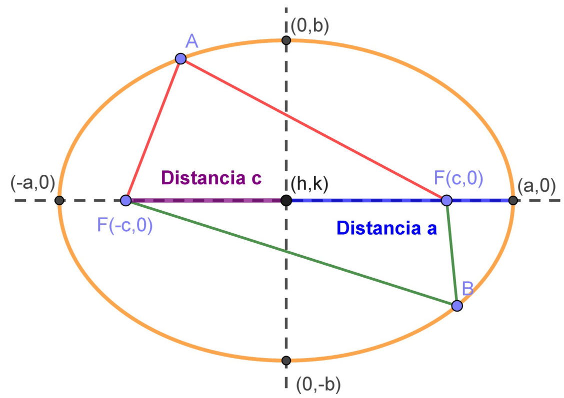
$$e = \frac{c}{a} = 1$$

1.2.3. Elipse

Cuando un plano de sección corta a todas las generatrices de una hoja del cono y dicho plano no es paralelo a la base del cono (Figura 1.7a), dicha intersección determina una elipse.



(a) Sección cónica



(b) Lugar geométrico

Figura 1.7: Elipse

Una elipse es el lugar geométrico determinado por todos los puntos del plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos de la elipse, es igual a un constante mayor que la distancia entre los dos focos (Figura 1.7b). La elipse de centro (h, k) y eje focal paralelo al *eje* x se expresa analíticamente por la siguiente ecuación ordinaria:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Al reducir la expresión, desarrollar denominadores, los cuadrados, transponer y ordenar términos se obtiene:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

La cual se puede reescribir como la ecuación de segundo grado:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde, $A = b^2$; $B = a^2$; $D = -2b^2k$; $E = -2a^2k$ y $F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$

Ahora bien, la ecuación de una elipse con centro en el origen y con el eje focal que coincide al *eje* x, se dice que tendrá por ecuación canónica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Recíprocamente la elipse de centro (h, k) y eje focal paralelo al *eje* y, se expresa analíticamente por la siguiente ecuación ordinaria:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

y por ecuación canónica

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

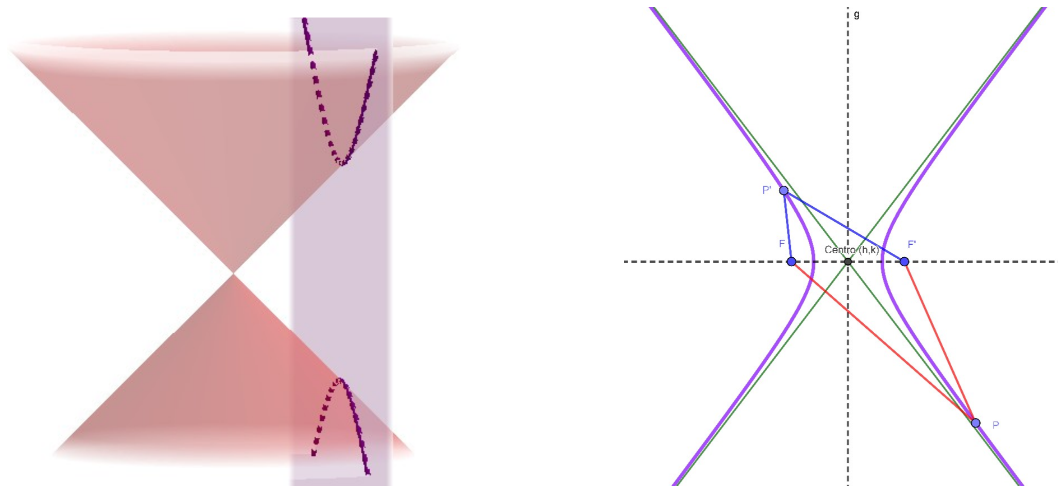
Para cada elipse, a es la longitud del semieje mayor, b la del semieje menor y $a > b > 0$.

Se define por excentricidad una elipse, cuando el cociente entre la distancia focal y el eje real menor a 1, en dado caso que el cociente sea igual a 0 la cónica que se determina es una circunferencia.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$$

1.2.4. Hipérbola

Si el plano de sección corta ambas hojas del cono, la cónica que se determina en la intersección de ambos es una hipérbola (Figura 1.8a):



(a) Sección cónica (b) Lugar geométrico

Figura 1.8: Hipérbola

Una hipérbola es el lugar geométrico determinado por todos los puntos del plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos (Figura 1.8b).

La hipérbola de centro (h, k) y eje focal paralelo al *eje x* se expresa analíticamente por la siguiente ecuación ordinaria:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Al reducir la expresión, desarrollar denominadores, los cuadrados, transponer y ordenar términos se obtiene:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2hx + 2a^2ky + b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

La cual se puede reescribir como la ecuación de segundo grado:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde, $A = b^2$; $B = -a^2$; $D = -2b^2k$; $E = 2a^2k$ y $F = b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2$

Ahora bien, la ecuación de una hipérbola con centro en el origen y con el eje focal que coincide al *eje* x, se dice que tendrá por ecuación canónica:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Recíprocamente la hipérbola de centro (h, k) y eje focal paralelo al *eje* y, se expresa analíticamente por la siguiente ecuación ordinaria:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

y por ecuación canónica

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Donde a es la longitud del semieje transverso y b la del semieje conjugado, con $a, b > 0$

Se define por excentricidad una hipérbola, cuando el cociente entre la distancia focal y el eje real es mayor a 1.

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

1.2.5. Cónicas degeneradas

Las cónicas degeneradas son las curvas determinadas mediante diferentes secciones de un plano con respecto a un cono circular recto (Figura 3.15). Si el plano de sección que corta al cono pasa por su vértice representa el lugar geométrico de un punto, una recta, dos rectas paralelas o dos rectas secantes. Estos casos particulares se llaman también formas límite de las cónicas.

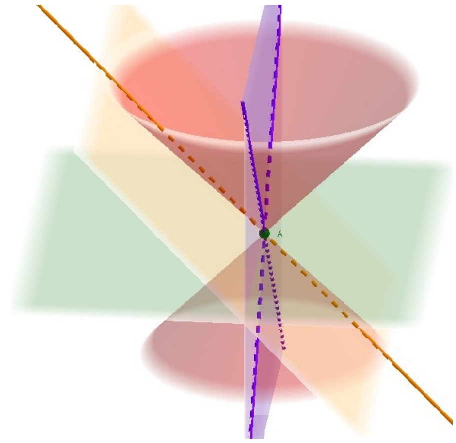


Figura 1.9: Secciones cónicas degeneradas

- **Punto:** Si el plano de sección es paralelo a la base del cono por el vértice, la cónica degenerada que se determina en la intersección de ambos es un punto.

- **Recta:** Si el plano de sección contiene al vértice y es paralelo a una única generatriz del cono circular, la cónica que se determina en la intersección de ambos es precisamente la recta generatriz y la cual tendrá por ecuación general de segundo grado:

$$dx + ey + f = 0$$

- **Rectas paralelas:** El par de rectas paralelas se representan mediante la ecuación general de segundo grado:

$$ax^2 + ey + f = 0$$

- **Rectas secantes:** Si el plano de sección contiene al vértice y es perpendicular a la base del cono, la cónica que se determina en la intersección de ambos son dos rectas secantes. El par de rectas secantes se representan mediante la ecuación general de segundo grado:

$$ax^2 + by^2 + dx + ey + f = 0$$

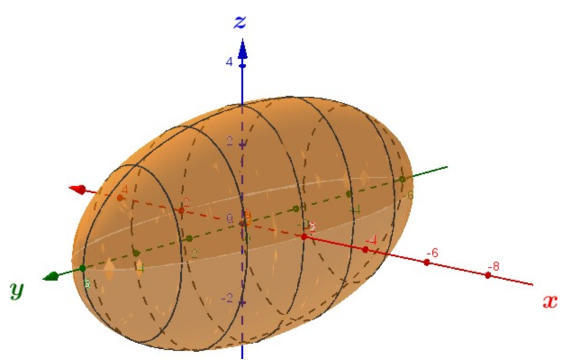
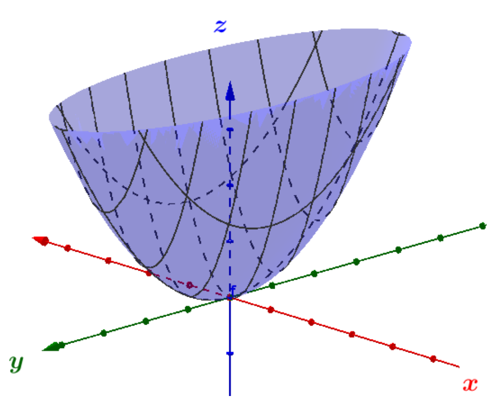
1.3. Clasificación de cuádricas

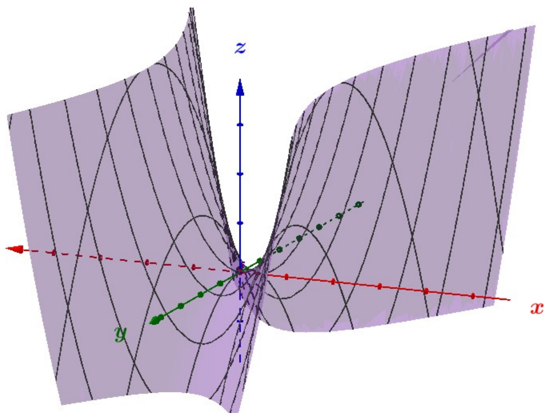
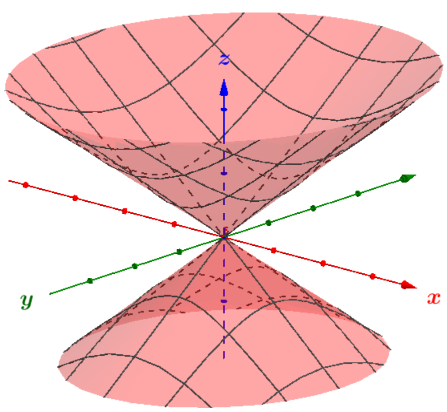
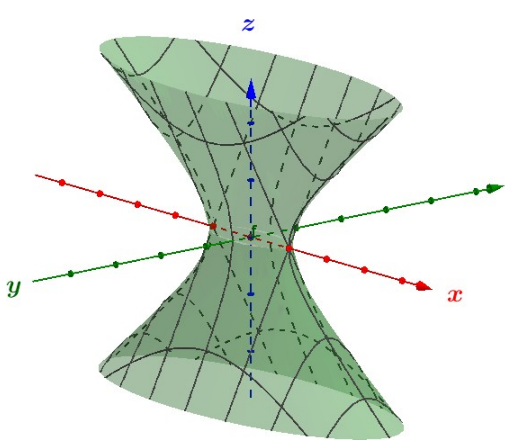
Definición: *Superficie Cuádrica*, es la gráfica de una ecuación de segundo grado con tres variables x, y y z de la forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

Donde a, b, c, d, e, f, g, h, i, j son constantes y a, b, c, d, e, $f \neq 0$

La tabla que se presenta a continuación muestra gráficas de superficies cuádricas. Todas las superficies resultan simétricas con respecto al *eje z*.

Superficie	**Ecuación**
Elipsoide 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Todas las trazas son elipses
Paraboloide elíptico 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses Las trazas verticales son parábolas

Superficie	**Ecuación**
Paraboloide hiperbólico 	$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$ Las trazas horizontales son hipérbolas Las trazas verticales son parábolas
Cono 	$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$ Dependiendo el plano de sección se determinan las distintas cónicas
Hiperboloide de una hoja 	$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$ Las trazas horizontales son elipses Las trazas verticales son hipérbolas

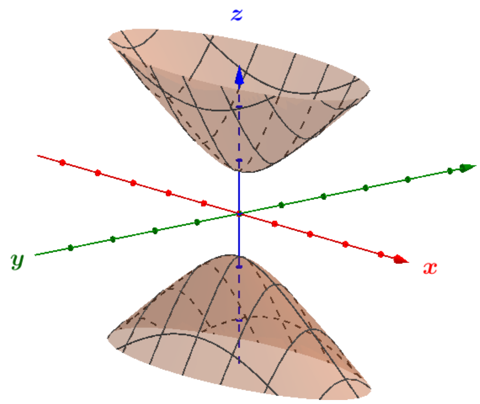
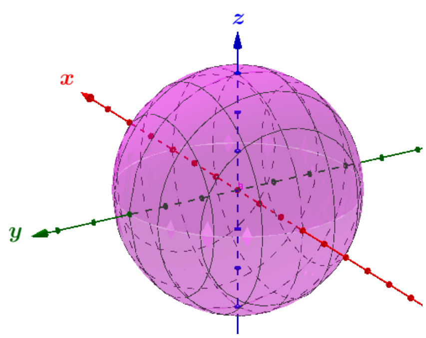
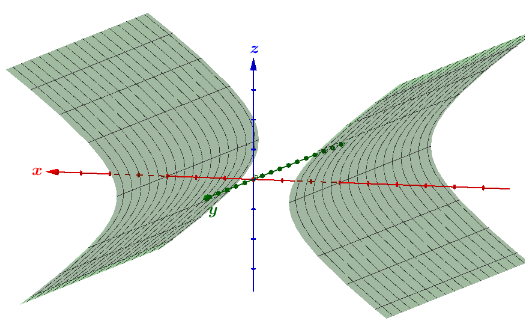
Superficie	**Ecuación**
Hiperboloide de dos hojas 	$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$ Las trazas horizontales en $z = k$ son elipses Las trazas verticales son hipérbolas
Esfera 	$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$ Todas las trazas son circunferencias
Cilindro hiperbólico 	$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ Las trazas verticales en $y = k$ son hipérbolas

Tabla 1.1: Clasificación de cuádricas

Existen casos en los cuales una superficie a pesar que satisface las condiciones para serlo no lo es. En tal caso se dirá que la superficie es una de las siguientes superficies degeneradas: Un plano, par de planos paralelos o par de planos que se cortan.

1.4. Expresiones equivalentes

Una cónica se determina por la siguiente ecuación general de segundo grado:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \quad \text{con } a,\, b,\, c \neq 0$$

Vian, J (1997) menciona otras expresiones equivalentes de la ecuación de una cónica o cuádrica las cuales son:

- En función de una única matriz simétrica que se llamará A, cuyos términos están determinados por los coeficientes de la ecuación general de segundo grado, de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad con \quad A = \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{c}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

La matriz de coeficientes simétrica asociada a la siguiente forma cuadrática:

$$\underbrace{8}_{a} x^2 \underbrace{-3}_{b} y^2 + \underbrace{6}_{c} xy + \underbrace{4}_{e} y + \underbrace{5}_{f} = 0$$

Se observa que los coeficientes de los términos cuadrados están sobre la diagonal de la matriz, mientras que los coeficientes de los demás términos están divididos por la mitad y distribuidos de manera simétrica, situación que nos lleva a

$$A = \begin{pmatrix} 8 & \frac{6}{2} & \frac{0}{2} \\ \frac{6}{2} & -3 & \frac{4}{2} \\ \frac{0}{2} & \frac{4}{2} & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

De manera que tendrá por ecuación característica

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

- En función de infinitas matrices no simétricas cuyos términos están determinados de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad con \quad A = \begin{pmatrix} a & o & p \\ q & b & r \\ s & t & f \end{pmatrix}$$

Esto es,

$$ax^2 + by^2 + \underbrace{(o+q)}_{c} xy + \underbrace{(p+s)}_{d} x + \underbrace{(r+t)}_{e} y + f = 0$$

Donde los coeficientes de los términos cuadrados van sobre la diagonal, mientras que los términos con productos cruzados son: $c = o + q$, $d = p + s$ y $e = r + t$.

Ejemplo:

Tomando como referencia la anterior ecuación de segundo grado:

$$\underbrace{8}_{a} x^2 \underbrace{-3}_{b} y^2 + \underbrace{6}_{c} xy + \underbrace{4}_{e} y + \underbrace{5}_{f} = 0$$

Los coeficientes de los términos cuadrados van sobre la diagonal de la matriz, sin embargo, los coeficientes de los términos con productos cruzados resultan de la suma de otros dos, situación que nos lleva a determinar infinitas matrices de coeficientes diferentes entre sí, se enseñan dos matrices A_1 y A_2 con $A_1 \neq A_2$ a modo de ilustración

$$A_1 = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Donde se verifica fácilmente que $c = 2 + 4 = 6$, $d = 5 + (-5) = 0$ y $e = 1 + 3 = 4$.

La cual tendrá por ecuación característica

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Caso similar con la siguiente matriz de coeficientes.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Donde $c = 1 + 5 = 6$, $d = 2 + (-2) = 0$ y $e = 3 + 1 = 4$.

La cual tendrá por ecuación característica

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

- Los sectores cuadráticos están determinados por la siguiente ecuación general de segundo grado:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0 \quad \text{con} \quad a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \neq 0$$

Análogo a las secciones cónicas, esta ecuación se puede expresar en relación a una matriz A simétrica o no simétrica de coeficientes, con la diferencia que esta matriz será de 4×4.

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad con \quad A = \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & \frac{g}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} & \frac{h}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c & \frac{i}{2} \\ \frac{g}{2} & \frac{h}{2} & \frac{i}{2} & j \end{pmatrix}$$

- Finalmente expresadas en coordenadas homogéneas

	Ecuación homogénea	**Abreviada**
Cónica	$\begin{pmatrix} x & y & t \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}$	$X^t A X = 0$
Cuádrica	$\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$	

Tabla 1.2: Coordenadas homogéneas

Donde X representa el vector columna de coordenadas de los puntos de la cónica y la cuádrica respectivamente. De la cual se puede deducir que, en coordenadas homogéneas, los puntos de la cónica y cuádrica son vectores autoconjugados los cuales determinan la matriz asociada A.

Capítulo 2

Problemas fundamentales

Como lo menciona Lehmann en su libro geometría analítica, existen dos problemas fundamentales de dicha área, los cuales se pueden extender al estudio de la representación matricial de las cónicas y cuádricas.

I. Dada gráficamente una curva o una superficie, determinar su ecuación en función de la matriz A asociada a la cónica o cuádrica.

II. Dada una ecuación en función de la matriz A asociada a la cónica o cuádrica interpretarla geométricamente.

2.1. Primer problema fundamental

De acuerdo con Lehmann (1989) se define una curva o superficie como el lugar geométrico descrito por todos los puntos y solamente de aquellos puntos, que satisfacen una o más condiciones geométricas dadas. De esta manera, el problema a desarrollar ahora, es determinar la ecuación en función de la matriz A que describe aquella cónica al pasar por una colección de puntos. Retomando la ecuación general de segundo grado:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

Se observa que la ecuación tiene 6 parámetros a determinar, sin embargo, si se garantiza que alguno de ellos no es cero, se puede dividir y representar una sola cónica bajo esa representación, por lo que son 5 condiciones las que determinan a la ecuación. Si los puntos son $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$ y $P_5(x_5, y_5)$, basta con resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

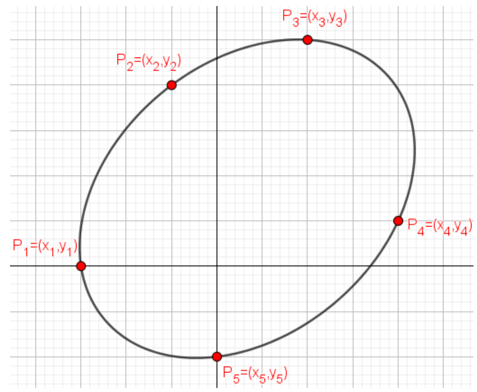


Figura 2.1: Cónica dados 5 puntos

$$
\begin{aligned}
ax_1^2 + by_1^2 + cx_1y_1 + dx_1 + ey_1 + f = 0\\
ax_2^2 + by_2^2 + cx_2y_2 + dx_2 + ey_2 + f = 0\\
ax_3^2 + by_3^2 + cx_3y_3 + dx_3 + ey_3 + f = 0\\
ax_4^2 + by_4^2 + cx_4y_4 + dx_4 + ey_4 + f = 0\\
ax_5^2 + by_5^2 + cx_5y_5 + dx_5 + ey_5 + f = 0
\end{aligned}
$$

La cual tendrá por matriz aumentada

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
x_1^2 & y_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 & 0\\
x_2^2 & y_2^2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 & 0\\
x_3^2 & y_3^2 & x_3y_3 & x_3 & y_3 & 1 & 0\\
x_4^2 & y_4^2 & x_4y_4 & x_4 & y_4 & 1 & 0\\
x_5^2 & y_5^2 & x_5y_5 & x_5 & y_5 & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

Lo siguiente es reducir la matriz a la forma escalonada reducida, sin embargo, antes de hacer el procedimiento como menciona González (2009), existe otro método más práctico para resolver el problema, el cual es:

Considerando los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$ y $P_5(x_5, y_5)$:

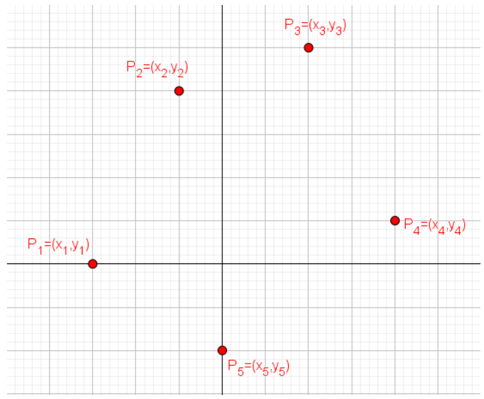


Figura 2.2: Cinco puntos distintos en el plano

- Lo primero es determinar las ecuaciones de las rectas que pasan por los puntos P_2P_5 y P_1P_4 respectivamente, las cuales se denotaran con δ.

$$\delta_{P_2P_5} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (y - y_2) - m(x - x_2) = 0 \ con \ m = \frac{y_5 - y_2}{x_5 - x_2}\} \tag{2.1}$$

$$\delta_{P_1P_4} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (y - y_1) - n(x - x_1) = 0 \ con \ n = \frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1}\} \tag{2.2}$$

El producto de la ecuación (2.1) y (2.2) determina la cónica degenerada C_1 que las representa y la cual contiene a los puntos P_1, P_2, P_4 y P_5:

$$C_1 = \delta_{P_2P_5}\delta_{P_1P_4} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | ((y - y_2) - m(x - x_2))((y - y_1) - n(x - x_1)) = 0\} \tag{2.3}$$

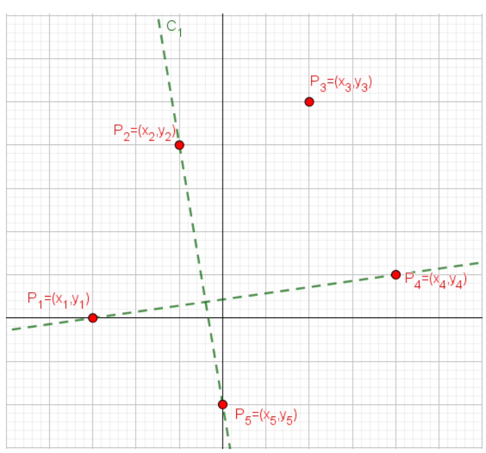


Figura 2.3: Cónica degenerada C_1

- Seguidamente se determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1P_5 y P_2P_4.

$$\delta_{P_1P_5} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (y - y_1) - p(x - x_1) = 0 \ con \ p = \frac{y_5 - y_1}{x_5 - x_1}\} \tag{2.4}$$

$$\delta_{P_2P_4} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (y - y_2) - o(x - x_2) = 0 \ con \ o = \frac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2}\} \tag{2.5}$$

Análogamente, el producto de la ecuación (2.4) y (2.5) determina la cónica degenerada C_2 que las representa y la cual contiene a los puntos P_1, P_2, P_4 y P_5:

$$C_2 = \delta_{P_1P_5}\delta_{P_2P_4} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | ((y - y_1) - p(x - x_1))((y - y_2) - o(x - x_2)) = 0\} \tag{2.6}$$

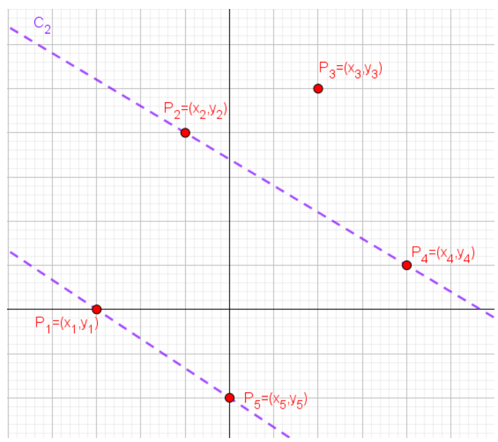


Figura 2.4: Cónica degenerada C_2

Al establecer la combinación lineal entre C_1 (2.3) y C_2 (2.6) se determina la ecuación general de la cónica C que se desea hallar:

$$C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$$

La ecuación (**??**) determina todas las posibles cónicas que pasan por los punto P_1, P_2, P_4 y P_5. Solo basta con determinar la cónica que pasa por el punto P_3 restante.

$$C(x_3, y_3) = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$$

Donde,

$$\lambda_1 C_1 = -\frac{\lambda_2 C_2(x_3, y_3)}{C_1(x_3, y_3)} \; con \; \lambda_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Por lo tanto, λ_1 depende del valor real que tome λ_2. Así, la ecuación de la cónica que pasa por los 5 puntos estará determinada por la ecuación:

$$C = -\frac{\lambda_2 C_2(x_3, y_3)}{C_1(x_3, y_3)} C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$$

Finalmente, el proceso se reduce a determinar la matriz de coeficientes que describe aquella cónica al pasar por la colección de los 5 puntos, donde:

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$$

sustituyendo en la ecuación C_1 y C_2, se consigue

$$\lambda_1((y - y_2) - m(x - x_2))((y - y_1) - n(x - x_1)) + \lambda_2((y - y_2) - o(x - x_2))((y - y_1) - p(x - x_1)) = 0$$

Al distribuir, trasponer y ordenar términos, se obtiene la siguiente expresión:

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(y - y_2)(y - y_1) - (\lambda_1 n + \lambda_2 p)(y - y_2)(x - x_1) - (\lambda_1 m + \lambda_2 o)(y - y_1)(x - x_2) + (\lambda_1 mn + \lambda_2 op)(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

a continuación, se reduce la expresión en términos de las siguientes variables

$$a(y - y_2)(y - y_1) - b(y - y_2)(x - x_1) - c(y - y_1)(x - x_2) + d(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Donde,

$a = \lambda_1 + \lambda_2$

$b = \lambda_1 n + \lambda_2 p$

$c = \lambda_1 m + \lambda_2 o$

$d = \lambda_1 mn + \lambda_2 op$

Después de operar, transponer y ordenar términos se obtiene la ecuación:

$$dx^2 + ay^2 + (-b-c)xy + [by_2 + cy_1 - d(x_1+x_2)]x + [bx_1 + cx_2 - a(y_1+y_2)]y + f = 0$$

La cual tendrá asociada la siguiente matriz de coeficientes simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} d & -\frac{(b+c)}{2} & \frac{by_2+cy_1-d(x_1+x_2)}{2} \\ -\frac{(b+c)}{2} & a & \frac{bx_1+cx_2-a(y_1+y_2)}{2} \\ \frac{by_2+cy_1-d(x_1+x_2)}{2} & \frac{bx_1+cx_2-a(y_1+y_2)}{2} & f \end{pmatrix}$$

Con,

$$f = ay_1y_2 - by_2x_1 - cy_1x_2 + dx_1x_2$$

$$-(b+c) = -\lambda_1(n+m) - \lambda_2(p+o)$$

$$by_2 + cy_1 - d(x_1+x_2) = (\lambda_1 n + \lambda_2 p)y_2 + (\lambda_1 m + \lambda_2 o)y_1 - (\lambda_1 mn + \lambda_2 op)(x_1+x_2)$$

$$bx_1 + cx_2 - a(y_1+y_2) = (\lambda_1 n + \lambda_2 p)x_1 + (\lambda_1 m + \lambda_2 o)x_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)(y_1+y_2)$$

Conjetura

Sea

$$\lambda_1 C_1 = -\frac{\lambda_2 C_2(x_3,y_3)}{C_1(x_3,y_3)} \; con \; \lambda_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

La matriz de coeficientes será irreductible si y solo si $\lambda_2 = il$ con $C_1(x_3,y_3) = \dfrac{i}{j}$ y $C_2(x_3,y_3) = \dfrac{k}{l}$ donde i, j, k, $l \in \mathbb{R}$ y l, $j \neq 0$

2.2. Segundo problema fundamental

En esta sección se aborda el segundo problema fundamental mencionado al inicio del capítulo 2. Donde se espera establecer el tipo de cónica y cuádrica que se genera al poseer una matriz de coeficientes sea simétrica o no simétrica, al satisfacer la estructura matricial presentada en la siguiente tabla.

Cónica	**Canónica**		
	Ecuación	**Matriz de coeficientes Simétrica**	**Matriz de coeficientes no Simétrica**
Circunferencia	$x^2 + y^2 = r^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & m & n \\ -m & 1 & o \\ -n & -o & -r^2 \end{pmatrix}$
Parábola	$y^2 = 4px$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2p \\ 0 & 1 & 0 \\ -2p & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & m & n \\ -m & 1 & o \\ -(4p+n) & -o & 0 \end{pmatrix}$
	$x^2 = 4py$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & m & n \\ -m & 0 & o \\ -n & -(4p+o) & 0 \end{pmatrix}$
Elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b^2 & m & n \\ -m & a^2 & o \\ -n & -o & -a^2b^2 \end{pmatrix}$
	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a^2 & m & n \\ -m & b^2 & o \\ -n & -o & -a^2b^2 \end{pmatrix}$
Hipérbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b^2 & m & n \\ -m & -a^2 & o \\ -n & -o & -a^2b^2 \end{pmatrix}$
	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$\begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -a^2 & m & n \\ -m & b^2 & o \\ -n & -o & -a^2b^2 \end{pmatrix}$

Tabla 2.1: Clasificación de cónicas a partir de la matriz canónica de coeficientes

Cónica	Ordinaria		
	Ecuación	Matriz de coeficientes Simétrica	Matriz de coeficientes no Simétrica
Circunferencia	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & -k \\ -h & -k & h^2+k^2-r^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & m & n \\ -m & 1 & o \\ -(2h+n) & -(2k+o) & h^2+k^2-r^2 \end{pmatrix}$
Parábola	$(y-k)^2=4p(x-h)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2p \\ 0 & 1 & -k \\ -2p & -k & k^2+4ph \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & m & n \\ -m & 1 & o \\ -(4p+n) & -(2k+o) & k^2+4ph \end{pmatrix}$
	$(x-h)^2=4p(y-k)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 0 & -2p \\ -h & -2p & h^2+4pk \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & m & n \\ -m & 0 & o \\ -(2h+n) & -(4p+o) & h^2+4pk \end{pmatrix}$
Elipse	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\begin{pmatrix} b^2 & 0 & -b^2h \\ 0 & a^2 & -a^2k \\ -b^2h & -a^2k & F \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b^2 & m & n \\ -m & a^2 & o \\ -(2b^2h+n) & -(2a^2k+o) & F \end{pmatrix}$
		Con $F=(ah)^2+(bk)^2-(ab)^2$	
	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & -a^2h \\ 0 & b^2 & -b^2k \\ -a^2h & -b^2k & F \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a^2 & m & n \\ -m & b^2 & o \\ -(2a^2h+n) & -(2b^2k+o) & F \end{pmatrix}$
		Con $F=(bh)^2+(ak)^2-(ab)^2$	
Hipérbola	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\begin{pmatrix} b^2 & 0 & -b^2h \\ 0 & -a^2 & a^2k \\ -b^2h & a^2k & F \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b^2 & m & n \\ -m & -a^2 & o \\ -(2b^2h+n) & 2a^2k-o & F \end{pmatrix}$
		Con $F=(bh)^2-(ak)^2-(ab)^2$	
	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	$\begin{pmatrix} -a^2 & 0 & a^2h \\ 0 & b^2 & -b^2k \\ a^2h & -b^2k & F \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -b^2 & m & n \\ -m & a^2 & o \\ 2a^2h-n & -(2b^2k+o) & F \end{pmatrix}$
		Con $F=(bk)^2-(ah)^2-(ab)^2$	

Tabla 2.2: Clasificación de cónicas a partir de la matriz ordinaria de coeficientes

Cuádrica	Canónica		
	Ecuación	Matriz de coeficientes Simétrica	Matriz de coeficientes no Simétrica
Elipsoide	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\begin{pmatrix} b^2c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2b^2c^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b^2c^2 & m & n & p \\ -m & a^2c^2 & o & q \\ -n & -o & a^2b^2 & s \\ -p & -q & -s & -a^2b^2c^2 \end{pmatrix}$
Paraboloide Elíptico	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$	$\begin{pmatrix} b^2c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a^2b^2}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{a^2b^2}{2} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b^2c & m & n & p \\ -m & a^2c & o & q \\ -n & -o & 0 & s \\ -p & -q & -(a^2b^2+s) & 0 \end{pmatrix}$
Paraboloide Hiperbólico	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$	$\begin{pmatrix} b^2c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a^2b^2}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{a^2b^2}{2} & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b^2c & m & n & p \\ -m & -a^2c & o & q \\ -n & -o & 0 & s \\ -p & -q & -(a^2b^2+s) & 0 \end{pmatrix}$
Cono	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$	$\begin{pmatrix} b^2c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b^2c^2 & m & n & p \\ -m & a^2c^2 & o & q \\ -n & -o & -a^2b^2 & s \\ -p & -q & -s & 0 \end{pmatrix}$
Hiperboloide de una hoja	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$\begin{pmatrix} b^2c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2b^2c^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b^2c^2 & m & n & p \\ -m & a^2c^2 & o & q \\ -n & -o & -a^2b^2 & s \\ -p & -q & -s & -a^2b^2c^2 \end{pmatrix}$
Hiperboloide de dos hojas	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\begin{pmatrix} -b^2c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2b^2c^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -b^2c^2 & m & n & p \\ -m & -a^2c^2 & o & q \\ -n & -o & a^2b^2 & s \\ -p & -q & -s & -a^2b^2c^2 \end{pmatrix}$
Esfera	$x^2+y^2+z^2=r^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & m & n & p \\ -m & 1 & o & q \\ -n & -o & 1 & s \\ -p & -q & -s & -r^2 \end{pmatrix}$

Tabla 2.3: Clasificación de cuádricas a partir de la matriz canonica de coeficientes

Cuádrica	Ordinaria		
	Ecuación	Matriz de coeficientes Simétrica	Matriz de coeficientes no Simétrica
Elipsoide	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-i)^2}{c^2}=1$	$\begin{pmatrix} b^2c^2 & 0 & 0 & -hb^2c^2 \\ 0 & a^2c^2 & 0 & ka^2c^2 \\ 0 & 0 & a^2b^2 & -ia^2b^2 \\ -hb^2c^2 & -ka^2c^2 & -ia^2b^2 & F \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b^2c^2 & m & n & p \\ -m & a^2c^2 & o & q \\ -n & -o & a^2b^2 & s \\ -(2hb^2c^2+p) & -(2ka^2c^2+q) & -(2ia^2b^2+s) & F \end{pmatrix}$
		Con $F=(bch)^2+(ack)^2+(abi)^2 \quad (abc)^2$	
Paraboloide Elíptico	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=\frac{(z-i)}{c}$	$\begin{pmatrix} b^2c & 0 & 0 & -hb^2c \\ 0 & a^2c & 0 & -ka^2c \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a^2b^2}{2} \\ -hb^2c & -ka^2c & -\frac{a^2b^2}{2} & F \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b^2c & m & n & p \\ -m & a^2c & o & q \\ -n & -o & 0 & s \\ (2hb^2c + p) & (2ka^2c + q) & (a^2b^2 + s) & F \end{pmatrix}$
		Con $F=b^2ch^2+a^2ck^2+a^2b^2i$	
Paraboloide Hiperbólico	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=\frac{(z-i)}{c}$	$\begin{pmatrix} b^2c & 0 & 0 & -hb^2c \\ 0 & -a^2c & 0 & ka^2c \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a^2b^2}{2} \\ hb^2c & ka^2c & \frac{a^2b^2}{2} & F \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b^2c & m & n & p \\ m & a^2c & o & q \\ -n & -o & 0 & s \\ -(2hb^2c^2+p) & 2ka^2c^2-q & -(a^2b^2+s) & F \end{pmatrix}$
		Con $F=b^2ch^2 \quad a^2ck^2 + a^2b^2i$	
Cono	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=\frac{(z-i)^2}{c^2}$	$\begin{pmatrix} b^2c^2 & 0 & 0 & -hb^2c^2 \\ 0 & a^2c^2 & 0 & -ka^2c^2 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 & ia^2b^2 \\ hb^2c^2 & ka^2c^2 & ia^2b^2 & F \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b^2c^2 & m & n & p \\ -m & a^2c^2 & o & q \\ -n & -o & -a^2b^2 & s \\ -(2hb^2c^2+p) & -(2ka^2c^2+q) & 2ia^2b^2-s) & F \end{pmatrix}$
		Con $F=(bch)^2+(ack)^2-(abi)^2$	
Hiperboloide de una hoja	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(z-i)^2}{c^2}=1$	$\begin{pmatrix} b^2c^2 & 0 & 0 & -hb^2c^2 \\ 0 & a^2c^2 & 0 & ka^2c^2 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 & ia^2b^2 \\ -hb^2c^2 & -ka^2c^2 & ia^2b^2 & F \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b^2c^2 & m & n & p \\ -m & a^2c^2 & o & q \\ -n & -o & -a^2b^2 & s \\ -(2hb^2c^2+p) & -(2ka^2c^2+q) & 2ia^2b^2-s & F \end{pmatrix}$
		Con $F=(bch)^2+(ack)^2-(abi)^2-(abc)^2$	
Hiperboloide de dos hojas	$-\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-i)^2}{c^2}=1$	$\begin{pmatrix} -b^2c^2 & 0 & 0 & hb^2c^2 \\ 0 & -a^2c^2 & 0 & ka^2c^2 \\ 0 & 0 & a^2b^2 & -ia^2b^2 \\ hb^2c^2 & ka^2c^2 & ia^2b^2 & F \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -b^2c^2 & m & n & p \\ -m & -a^2c^2 & o & q \\ -n & -o & a^2b^2 & s \\ 2hb^2c^2-p & 2ka^2c^2-q & -(2ia^2b^2+s) & F \end{pmatrix}$
		Con $F=-(bch)^2-(ack)^2+(abi)^2-(abc)^2$	

Tabla 2.4: Clasificación de cuádricas a partir de la matriz ordinaria de coeficientes

Cónica $\mathbb{R}^3$	**Pertenece al plano $x = m$**	
	Ecuación	**Matriz de coeficientes Simétrica**
Circunferencia	$x + \frac{(y-k)^2}{s^2} + \frac{(z-i)^2}{s^2} = m+1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/s^2 & 0 & -k/s^2 \\ 0 & 0 & 1/s^2 & -i/s^2 \\ 1/2 & -k/s^2 & -i/s^2 & k^2/s^2 + i^2/s^2 - (m+1) \end{pmatrix}$
Parábola	$m^2 + (y-k)^2 + 1 = z$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -k & -\frac{1}{2} & m^2 + k^2 + 1 \end{pmatrix}$
Elipse	$x + \frac{(y-k)^2}{p^2} + \frac{(z-i)^2}{r^2} = m+1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/p^2 & 0 & -k/p^2 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & -i/r^2 \\ 1/2 & -k/p^2 & -i/r^2 & k^2/p^2 + i^2/r^2 - (m+1) \end{pmatrix}$
Hipérbola	$x - \frac{(y-k)^2}{p^2} + \frac{(z-i)^2}{r^2} = m+1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/p^2 & 0 & k/p^2 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & -i/r^2 \\ 1/2 & k/p^2 & -i/r^2 & i^2/r^2 - (k^2/p^2 + m + 1) \end{pmatrix}$

Estas tablas de clasificación serán el pilar del estudio, debido que en el transcurso del documento se estará haciendo referencia ala matriz de coeficientes simétrica o a la matriz de coeficientes no simétrica de las diferentes cónicas.

Capítulo 3

Operaciones matriciales

En esta sección se hará un estudio en función de las matrices de coeficiente asociada a las cónicas por su propio valor. Dado que estas matrices están sujetas a propiedades algebraicas que permite desarrollar cálculos y operaciones con ellas.

3.1. Multiplicación por escalar

Sea A una matriz de coeficientes de 3×3 de la ecuación de una cónica y c un escalar, de manera que la multiplicación por escalar corresponde a la familia de matrices de coeficientes equivalentes entre sí, las cuales se llamarán *matriz de coeficientes equivalentes* y son representadas de la siguiente manera

$$[A] = cA$$

Esto es, la familia de matrices que sean equivalentes a A, con a_{ij} y $c \in \mathbb{R}$ tal que c será una constante de proporcionalidad. En términos de una relación será:

$$[a_{ij}] \approx [b_{ij}] \ si\ y\ solo\ si\ \frac{a_{ij}}{b_{ij}} = c\ para\ cada\ a_{ij}\ y\ b_{ij}\ diferentes\ de\ cero$$

Esto significa que

$$[A] = [B] \text{ o } [[a_{ij}]] = [[b_{ij}]] \text{ si y solo si } [a_{ij}] \approx [b_{ij}]; \text{ esto es, si y solo si } \frac{a_{ij}}{b_{ij}} = c$$

Esta relación se comporta como una relación de equivalencia, por lo cual cumple que es:

I. **Reflexiva**

Para todo $a_{ij} \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$[a_{ij}] \approx [a_{ij}] \text{ ya que } \frac{a_{ij}}{a_{ij}} = 1; \text{ donde } 1 \text{ es la constante de proporcionalidad}$$

II. **Simétrica**

Para todo a_{ij} y $b_{ij} \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\text{si } [a_{ij}] \approx [b_{ij}] \text{ entonces } \frac{a_{ij}}{b_{ij}} = c$$

por propiedad de los reales se puede establecer que

$$\frac{b_{ij}}{a_{ij}} = k \text{ donde } k = \frac{1}{c}$$

donde $\frac{1}{c}$ es la constante de proporcionalidad, por lo que se puede concluir que $[b_{ij}] \approx [a_{ij}]$

III. **Transitiva**

Sea a_{ij}, b_{ij} y $c_{ij} \in \mathbb{R}$ y $[a_{ij}] \approx [b_{ij}]$ y $[b_{ij}] \approx [c_{ij}]$

$$\text{Como } [a_{ij}] \approx [b_{ij}] \text{ entonces } \frac{a_{ij}}{b_{ij}} = k \tag{3.1}$$

$$\text{Como } [b_{ij}] \approx [c_{ij}] \text{ entonces } \frac{b_{ij}}{c_{ij}} = p \tag{3.2}$$

De la ecuación (3.1) b_{ij} se puede expresar como $\frac{a_{ij}}{k}$; al reemplazar en la ecuación (3.2) se obtiene

$$\frac{\frac{a_{ij}}{k}}{c_{ij}} = \frac{a_{ij}}{kc_{ij}} = p$$

Resolviendo

$$\frac{a_{ij}}{c_{ij}} = kp$$

Donde kp es la constante de proporcionalidad, por lo que se puede concluir que $[a_{ij}] \approx [c_{ij}]$.

Cada clase de equivalencia de esta relación la cual ha sido llamada *matriz de coeficientes equivalentes* corresponde al producto escalar y serán:

$$[[a_{ij}]] = \{[b_{ij}] : \frac{a_{ij}}{b_{ij}} = c, \textit{ donde } c \textit{ es la constante de proporcionalidad } \}$$

$$[A] = cA = c[a_{ij}] = [ca_{ij}] = [b_{ij}] = B$$

a continuación, se considerarán unos cuantos ejemplos para ilustrar la forma en que se evidencia las matrices de coeficientes equivalentes tanto simétricas como no simétricas

Ejemplos

Matrices simétricas

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 10 \\ 8 & 10 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 8 & 12 & 20 \\ 16 & 20 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 & 32 \\ 16 & 24 & 40 \\ 32 & 40 & 56 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 7 & 8 & 3 \\ 10 & 3 & 13 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 6 & 14 & 20 \\ 14 & 16 & 6 \\ 20 & 6 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 21 & 30 \\ 21 & 24 & 9 \\ 30 & 9 & 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 28 & 40 \\ 28 & 32 & 12 \\ 40 & 12 & 52 \end{pmatrix}$$

Matrices no simétricas

$$\left[\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ -5 & -5 & -4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 10 \\ -4 & 2 & 12 \\ -10 & -10 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -9 & -15 \\ 6 & -3 & -18 \\ 15 & 15 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 7 & 0 & 8 \\ 3 & -9 & -7 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 12 \\ 14 & 0 & 16 \\ 6 & -18 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -15 & 18 \\ -21 & 0 & -24 \\ -9 & 27 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -2 \\ \frac{7}{3} & 0 & \frac{8}{3} \\ 1 & -3 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Proposición 1

Sean A_1 y A_2 matrices de coeficientes. Si A_1 y $A_2 \in [A]$ entonces se determina una misma cónica.

Demostración

Sean

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & \frac{c_1}{2} & \frac{d_1}{2} \\ \frac{c_1}{2} & b_1 & \frac{e_1}{2} \\ \frac{d_1}{2} & \frac{e_1}{2} & f_1 \end{pmatrix} \quad y \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & \frac{c_2}{2} & \frac{d_2}{2} \\ \frac{c_2}{2} & b_2 & \frac{e_2}{2} \\ \frac{d_2}{2} & \frac{e_2}{2} & f_2 \end{pmatrix}$$

Como A_1 y $A_2 \in [A]$ entonces existe una constante de proporcionalidad k, tal que

$$\frac{a_1}{a_2} = k; \ \frac{c_1}{c_2} = k; \ \frac{d_1}{d_2} = k; \ \frac{b_1}{b_2} = k; \ \frac{e_1}{e_2} = k; \ \frac{f_1}{f_2} = k$$

luego

$$a_1 = ka_2; \ c_1 = kc_2; \ d_1 = kd_2; \ b_1 = kb_2; \ e_1 = ke_2; \ f_1 = kf_2.$$

Ahora A_1 tendrá por ecuación característica.

$$a_1x^2 + b_1y^2 + c_1xy + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \tag{3.3}$$

remplazando términos, se obtiene

$$ka_2x^2 + kb_2y^2 + kc_2xy + kd_2x + ke_2y + kf_2 = 0$$

esto es

$$k(a_2x^2 + b_2y^2 + c_2xy + d_2x + e_2y + f_2) = 0$$

por lo tanto

$$a_2x^2 + b_2y^2 + c_2xy + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \tag{3.4}$$

Luego, como (3.3) y (3.4) son equivalentes entonces la cónica que se determina será la misma.

Ejemplo

Sean dos matrices de coeficientes simétricas asociadas a dos cónicas:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 14 & 12 \\ 8 & 12 & 10 \end{pmatrix} \quad y \quad A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 9 & 21 & 18 \\ 12 & 18 & 15 \end{pmatrix}$$

A_1 tendrá por ecuación característica

$$4x^2 + 14y^2 + 12xy + 16x + 24y + 10 = 0$$

Se observa que 2 es un factor común de los términos, por lo tanto, al factorizar la ecuación se obtiene

$$2x^2 + 7y^2 + 6xy + 8x + 12y + 5 = 0$$

A_2 tendrá por ecuación característica

$$6x^2 + 21y^2 + 18xy + 24x + 36y + 15 = 0$$

Se observa que 3 es un factor común de los términos, por lo tanto, al factorizar la ecuación se obtiene

$$2x^2 + 7y^2 + 6xy + 8x + 12y + 5 = 0$$

En ambos casos la ecuación determinada tendrá por matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

De tal manera que A_1 y A_2 pertenecen a la clase de matriz de coeficientes equivalentes A, esto es

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 14 & 12 \\ 8 & 12 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 9 & 21 & 18 \\ 12 & 18 & 15 \end{pmatrix}$$

Aunque el ejemplo se planteó para dos matrices de coeficientes simétricas, el procedimiento es análogo para infinitas matrices simétricas y no simétricas.

Por lo estudiado en esta sección nace la noción de ***matrices equivalentes*** que surge de lo que se conoce como el factor común de los términos de un polinomio, pero es abordado desde una operación propia de las matrices como lo es el producto escalar.

3.2. Adición y sustracción de matrices

Sean A y B dos matrices de coeficientes simétricas asociadas a dos cónicas.

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{c}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} g & \frac{i}{2} & \frac{j}{2} \\ \frac{i}{2} & h & \frac{k}{2} \\ \frac{j}{2} & \frac{k}{2} & l \end{pmatrix} \quad entonces$$

$$C = \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{c}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & \frac{i}{2} & \frac{j}{2} \\ \frac{i}{2} & h & \frac{k}{2} \\ \frac{j}{2} & \frac{k}{2} & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \pm g & \frac{(c\pm i)}{2} & \frac{(d\pm j)}{2} \\ \frac{(c\pm i)}{2} & b \pm h & \frac{(e\pm k)}{2} \\ \frac{(d\pm j)}{2} & \frac{(e\pm k)}{2} & f \pm l \end{pmatrix}$$

Esta es una operación en la que partiendo de dos matrices de coeficientes se obtiene una tercera matriz C la cual conserva la estructura de simetría por lo tanto se dirá que es cerrada bajo la operación de la adición y sustracción y se podrá asociar a la ecuación de una tercer cónica $X^tCX = 0$.

Ejemplo

Sean dos matrices de coeficientes simétricas asociadas a dos cónicas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & -9 \end{pmatrix}$$

I. A tendrá por ecuación característica

$$x^2 + y^2 - 16 = 0 \tag{3.5}$$

II. B tendrá por ecuación característica

$$x^2 + 3y^2 + 6xy + 4x + 10y - 9 = 0 \tag{3.6}$$

Al realizar la suma de los polinomios (3.5) y (3.6) se obtiene.

$$2x^2 + 4y^2 + 6xy + 4x + 10y - 25 = 0$$

La cual tendrá asociada la matriz de coeficientes $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & -25 \end{pmatrix}$

La cuál resulta asimismo de la siguiente operación

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & -25 \end{pmatrix}$$

Aunque el ejemplo se planteó para la suma de dos matrices de coeficientes simétricas el procedimiento es análogo para infinitas matrices simétricas y no simétricas.
Su representación gráfica se muestra a continuación como la cónica de color naranja en (Figura 3.1).

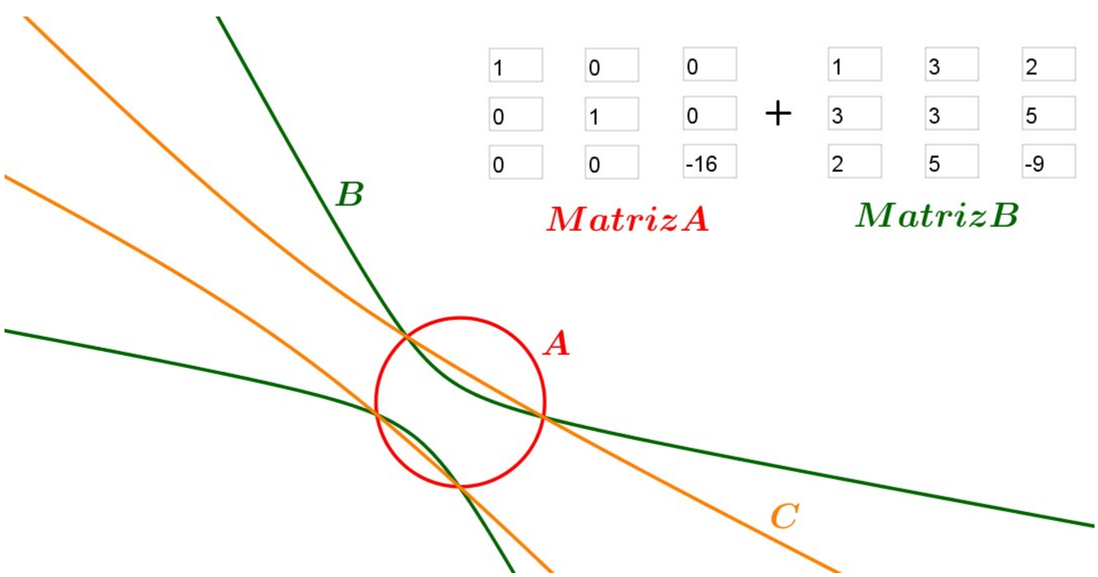


Figura 3.1: Cónica asociada a suma de matrices

De manera análoga se puede establecer que la sustracción de matrices da como resultado otra matriz, utilizando las matrices anteriores se obtiene gráficamente la cónica de color azul en (Figura 3.2).

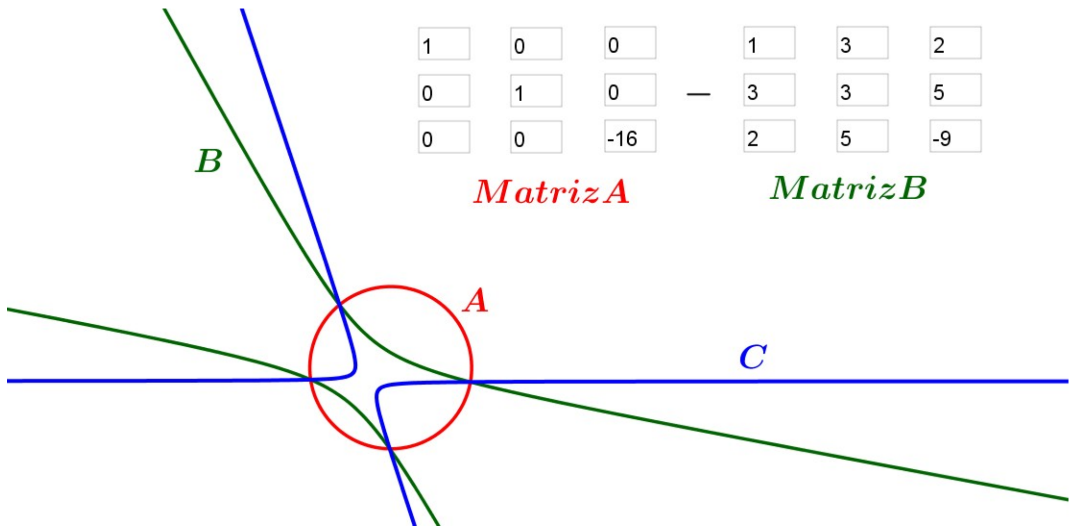


Figura 3.2: Cónica asociada a resta de matrices

Proposición 2

Sean A y B matrices de coeficientes simétricas asociadas a cónicas y $C = A + B$. si $A = B$ entonces las ecuaciones de las cónicas asociadas a las matrices de coeficientes A y C determinan la misma cónica

Demostración

Si $A = B$ entonces $C = A + A$ por lo tanto $C = 2A$.

Por definición de matriz de coeficientes equivalentes $A \in [A]$ y $2A \in [A]$ por lo tanto $C \in [A]$. Como A y $C \in [A]$ por la proposición 1 las ecuaciones asociadas a las matrices de coeficientes A y C determinarán la misma cónica.

En general, si A es una matriz simétrica de coeficientes asociada a una cónica, entonces la suma de k términos de una matriz será:

$$kA = \underbrace{A + A + A + ... + A}_{k\ terminos}$$

Como consecuencia de la proposición anterior se deduce que $kA \in [A]$ y $A \in [A]$ por lo tanto las ecuaciones asociadas a las matrices de coeficientes kA determinan la misma cónica que la matriz de coeficientes A.

3.3. Multiplicación de matrices

Sean A y B dos matrices simétricas de coeficientes asociadas a dos cónicas, entonces el producto $C = AB$ será la siguiente matriz:

$$C = AB = \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{c}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & \frac{i}{2} & \frac{j}{2} \\ \frac{i}{2} & h & \frac{k}{2} \\ \frac{j}{2} & \frac{k}{2} & l \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4ag + ci + dj & 2ai + 2ch + dk & 2aj + ck + 2dl \\ 2bi + 2cg + ej & 4bh + ci + ek & 2bk + cj + 2el \\ 2dg + ei + 2fi & di + 2eh + 2fk & dj + ek + 4fl \end{pmatrix}$$

Se debe resaltar que la multiplicación de matrices simétricas no es una operación cerrada, únicamente la matriz C es simétrica y se puede asociar a la ecuación de una cónica cuando $A = B$, lo cual con lleva al desarrollo de potencias de una matriz.
Sin embargo, si es una operación cerrada cuando se asumen A y B como matrices no simétricas, esto es:

$$C = AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & t \\ o & p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bd + cg & ab + be + ch & ac + bf + ci \\ ad + de + fg & e^2 + bd + fh & cd + ef + fi \\ ag + dh + gi & bg + eh + hi & i^2 + cg + fh \end{pmatrix}$$

Ejemplo

I. $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 10 = X^t \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ -10 & -7 & -10 \end{pmatrix} X = 0$

II. $x^2 + y^2 - 12x + 13y - 8 = X^t \begin{pmatrix} 1 & -10 & -2 \\ 10 & 1 & 4 \\ -10 & 9 & -8 \end{pmatrix} X = 0$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ -10 & -7 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -10 & -2 \\ 10 & 1 & 4 \\ -10 & 9 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -89 & 21 & -54 \\ -15 & -22 & -30 \\ 20 & 3 & 72 \end{pmatrix}$$

Con ecuación característica $X^t \begin{pmatrix} -89 & 21 & -54 \\ -15 & -22 & -30 \\ 20 & 3 & 72 \end{pmatrix} X = 0$

Gráficamente se determina la curva de color morado en (Figura 3.3)

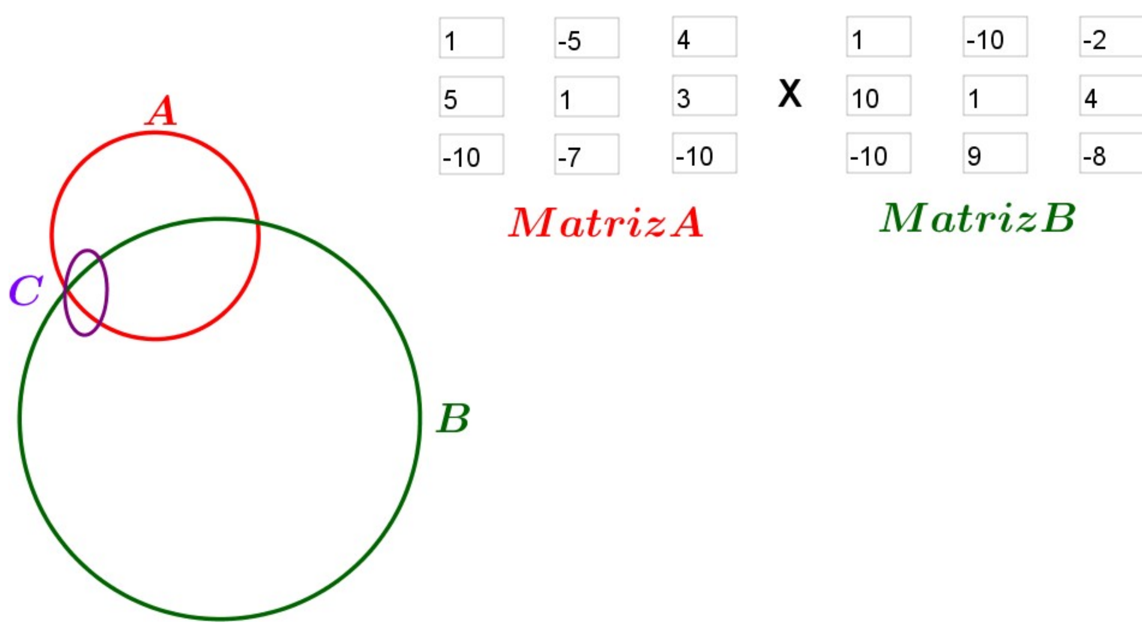


Figura 3.3: Cónica asociada a la multiplicación de matrices

3.4. Potencia de una matriz

Sea A una matriz de coeficientes asociada a una cónica, entonces la potencia de una matriz será

$$A^k = \underbrace{A \times A \times A \times ... \times A}_{k\ factores}$$

Ejemplo

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{c}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{c}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4a^2 + c^2 + d^2 & 2ac + 2bc + de & 2ad + ce + 2df \\ 2ac + 2bc + de & 4b^2 + c^2 + e^2 & 2be + cd + 2ef \\ 2ad + ec + 2df & 2be + cd + 2ef & d^2 + e^2 + 4f^2 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bd + cg & ab + be + ch & ac + bf + ci \\ ad + de + fg & e^2 + bd + fh & cd + ef + fi \\ ag + dh + gi & bg + eh + hi & i^2 + cg + fh \end{pmatrix}$$

Esta es una operación en la que partiendo de una matriz de coeficientes se obtiene una segunda matriz la cual conserva la estructura de simetría o no simetría respectivamente, por lo tanto, se dirá que es cerrada bajo la operación potenciación y se podrá asociar a la ecuación de una segunda cónica $X^t AX = 0$.

Ejemplo

$$x^2 + 4y^2 + 2xy + 7x + 2y - 3 = X^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{2} \\ 1 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix} X = 0$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{2} \\ 1 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{2} \\ 1 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{2} \\ 1 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{169}{4} & \frac{681}{8} \\ \frac{169}{4} & 85 & \frac{137}{4} \\ \frac{681}{8} & \frac{137}{4} & \frac{333}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 14 & 338 & 611 \\ 338 & 680 & 274 \\ 611 & 274 & 666 \end{pmatrix}$$

La cónica que se asocia a la matriz A^3 estará representada por la ecuación característica $X^tA^3X=0$, la cual gráficamente estará representada por la curva de color verde en (Figura 3.4).

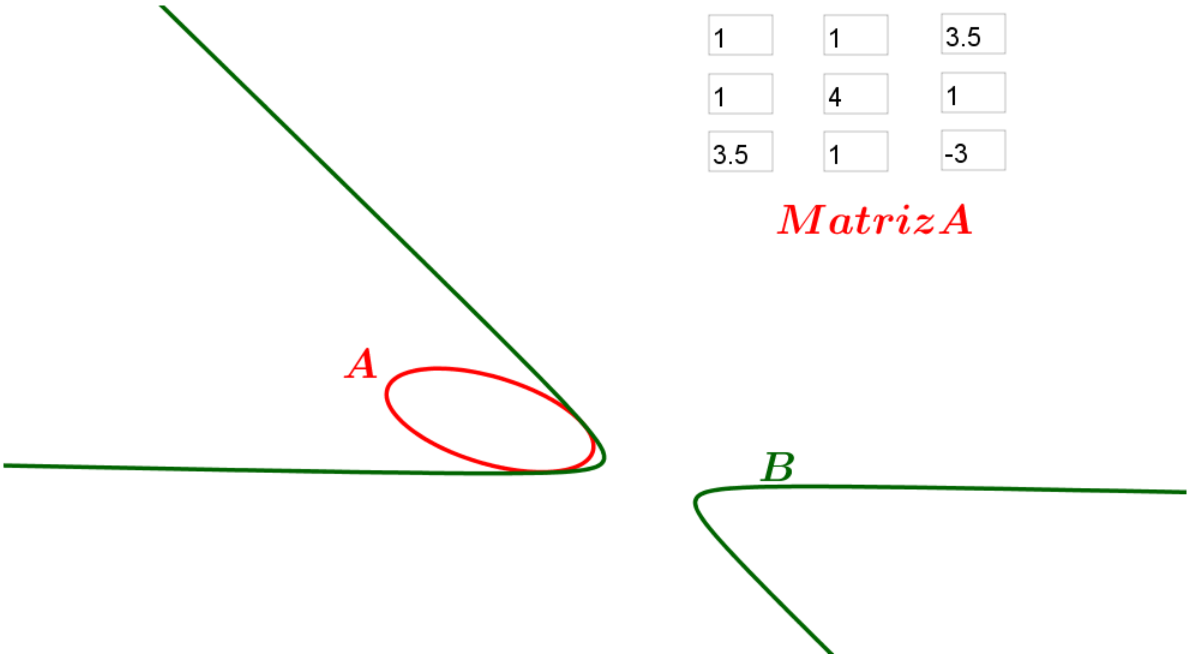


Figura 3.4: Cónica asociada a la potencia de una matriz

Al realizar el estudio de la potencia de matrices simétricas, se establecen ciertas particularidades que se cumplen con las cónicas.

3.4.1. Particularidades de las potencias

Circunferenica

Sea A la matriz canónica de coeficientes de la circunferencia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix}$$

a) Si las k potencias son pares, es decir:

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix}^{2k} \quad con \;\; k \in \mathbb{Z}^+$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix}^{2k} = \begin{pmatrix} 1^{2k} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{2k} & 0 \\ 0 & 0 & (-r^2)^{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (r^{2k})^2 \end{pmatrix}$$

La cual tendrá por ecuación característica:

$$x^2 + y^2 = -(r^{2k})^2 \tag{3.7}$$

La ecuación (3.7) corresponde a una circunferencia imaginaria, por lo tanto, con potencias pares no tendrá una representación real.

b) Si las k potencias son impares, se tendría que:

$$A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix}^{2k+1} \quad con \;\; k \in \mathbb{Z}^+$$

Entonces

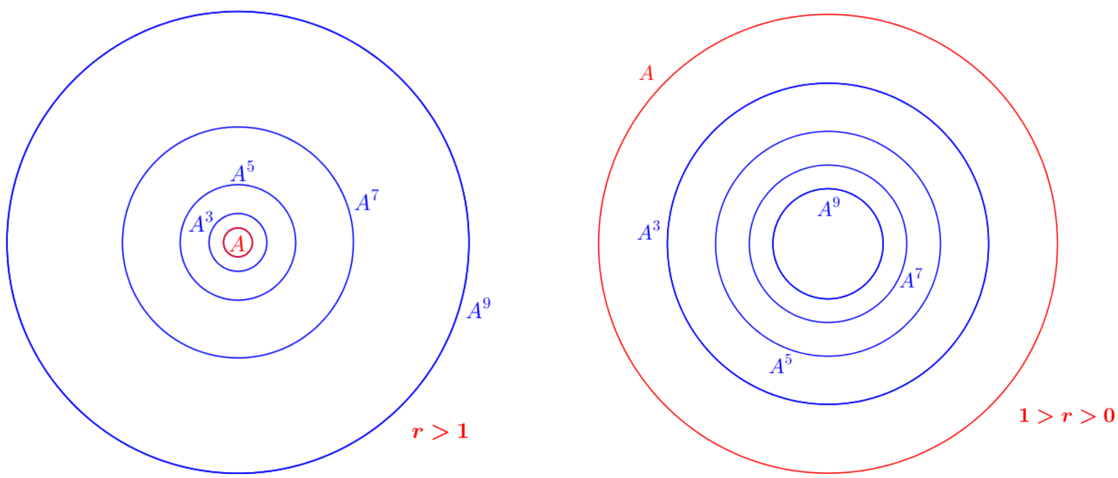
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix}^{2k+1} = \begin{pmatrix} 1^{2k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{2k+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-r^2)^{2k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(r^{2k+1})^2 \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes corresponde a una circunferencia con ecuación canónica de radio r^{2k+1}, la cual tendrá por ecuación característica:

$$x^2 + y^2 = (r^{2k+1})^2 \tag{3.8}$$

Si $r > 1$ entonces $r^{2k+1} \geq r$ por lo tanto las circunferencias determinadas por A^{2k+1} tendrán el radio mayor o igual a la circunferencia determinada por la matriz de coeficientes A.

Pero si $0 < r < 1$ entonces r es de la forma $r = \dfrac{1}{n}$ por lo tanto $\dfrac{1}{n} \geq \dfrac{1}{n^{2k+1}}$ entonces la circunferencia que se determinada por A^{2k+1} cuando el radio esta entre 0 y 1 será de radio menor a la circunferencia determinada por la matriz de coeficientes A.



(a) Radio mayor que 1 (b) Radio entre 0 y 1

Figura 3.5: Particularidad de la potencia en la circunferencia

Parábola

Sea A la matriz canónica de coeficientes de la parábola:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & 0 \end{pmatrix}$$

a) Si las k potencias son pares, es decir:

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & 0 \end{pmatrix}^{2k} \quad con \quad k \in \mathbb{Z}^{+}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & 0 \end{pmatrix}^{2k} = \begin{pmatrix} 1^{2k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2p)^{2k} \\ 0 & (-2p)^{2k} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2p)^{2k} \\ 0 & (2p)^{2k} & 0 \end{pmatrix}$$

La cual tendrá por ecuación característica:

$$x^2 + 2((2p)^{2k})y = 0 \tag{3.9}$$

La ecuación (3.9) corresponde a una elipse imaginaria, por lo tanto, con potencias pares no tendrá una representación real.

b) Si las k potencias son impares, es decir:

$$A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} \quad con \quad k \in \mathbb{Z}^{+}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = \begin{pmatrix} 1^{2k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2p)^{2k+1} \\ 0 & (-2p)^{2k+1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(2p)^{2k+1} \\ 0 & -(2p)^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

La cual tendrá por ecuación característica:

$$x^2 - 2((2p)^{2k+1})y = 0$$

por lo tanto

$$y = \frac{x^2}{2(2p)^{2k+1}} \tag{3.10}$$

Estiramiento y acortamiento vertical

Una trasformación de función corresponde al estiramiento o acortamiento vertical de las gráficas, lo cual da como resultado que las funciones sean más estrechas o amplias respectivamente.

I. Si $0 < 2p < 1$ entonces $2p$ es de la forma $\frac{1}{n}(2p = \frac{1}{n})$ con $n \geq 2$ por lo tanto

$$(2p)^{2k+1} = \frac{1}{n^{2k+1}}$$

Al realizar la sustitución en la ecuación característica (3.10), se obtiene:

$$y = \frac{n^(2k+1)}{2}x^2$$

Dado que $n^{2k+1} \geq n$ y $n \geq 2$ entonces por el principio de transitividad $n^{2k+1} \geq 2$ por lo tanto

$$\frac{n^(2k+1)}{2} \geq 1$$

Sustituyendo se obtiene que

$$\frac{1}{2(2p)^{2k+1}} \geq 1$$

La cónica determinada por la matriz de coeficientes A^{2k+1} tendrá un alargue vertical por un factor de $\frac{1}{2(2p)^{2k+1}}$. El resultado es la parábola mas estrecha en la figura (3.6)

II. Si $2p > 1$ entonces $(2p)^{2k+1} > 1$ tal que $1 > \frac{1}{(2p)^{2k+1}} > \frac{1}{2(2p)^{2k+1}}$
Por definición $p > 0$ luego $\frac{1}{2(2p)^{2k+1}} > \frac{1}{(2p)^{2k+1}} > 0$ entonces,

$$1 > \frac{1}{2(2p)^{2k+1}} > 0 \tag{3.11}$$

La cónica determinada por la matriz de coeficientes A^{2k+1} tendrá un alargamiento1vertical por un factor de $\frac{1}{2(2p)^{2k+1}}$. El resultado es la parábola más amplia de la figura (3.6)

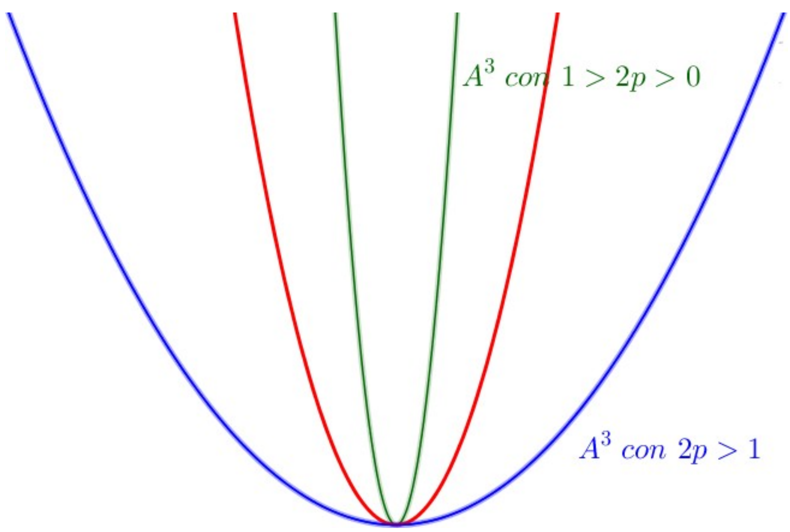


Figura 3.6: Particularidad de la potencia en la parábola

Elipse

Sea A la matriz canónica de coeficientes de la elipse cuando el eje focal de la elipse coincide con el *eje* X:

$$A = \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$$

a) Si las k potencias son pares, es decir:

$$A = \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}^{2k} \quad con \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

Por lo tanto

$$A = \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}^{2k} = \begin{pmatrix} (b^2)^{2k} & 0 & 0 \\ 0 & (a^2)^{2k} & 0 \\ 0 & 0 & (-a^2b^2)^{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b^{2k})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a^{2k})^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a^{2k})^2(b^{2k})^2 \end{pmatrix}$$

La cual tendrá por ecuación característica:

$$(b^{2k})^2x^2 + (a^{2k})^2y^2 + (a^{2k})^2(b^{2k})^2 = 0 \tag{3.12}$$

La ecuación (3.12) corresponde a una elipse imaginaria, por lo tanto, con potencias pares no habrá una representación real.

b) Cuando el eje focal de la elipse coincide con el *eje* y, entonces el procedimiento es análogo al anterior con las k potencias pares, esto es:

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$$

Con,

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} (a^{2k})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (b^{2k})^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a^{2k})^2(b^{2k})^2 \end{pmatrix}$$

y tendrá por ecuación característica

$$(a^{2k})^2x^2 + (b^{2k})^2y^2 + (a^{2k})^2(b^{2k})^2 = 0 \tag{3.13}$$

La ecuación (3.13) análogo a la ecuación (3.12) corresponde a una elipse imaginaria, por lo tanto, con potencias pares no habrá una representación real.

c) Si las k potencias son impares y el eje focal coincide con el *eje* x, se obtiene que la matriz canónica se pude expresar como:

$$A^{2k+1} = \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}^{2k+1} \quad con \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}^{2k+1} = \begin{pmatrix} (b^2)^{2k+1} & 0 & 0 \\ 0 & (a^2)^{2k+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-a^2b^2)^{2k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b^{2k+1})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a^{2k+1})^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a^{2k+1})^2(b^{2k+1})^2 \end{pmatrix}$$

Cuya ecuación característica estará expresada por:

$$\frac{x^2}{(a^{2k+1})^2} + \frac{y^2}{(b^{2k+1})^2} = 1 \tag{3.14}$$

La matriz de k potencias impares (A^{2k+1}) pertenece a la matriz canónica de coeficientes de una elipse con eje focal de la elipse que coincide con el *eje* X

d) Si las k potencias son impares y el eje focal coincide con el *eje* y, entonces la matriz canónica se puede expresar como:

$$A^{2k+1} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}^{2k+1} \quad con \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}^{2k+1} = \begin{pmatrix} (a^{2k+1})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (b^{2k+1})^2 & 0 \\ 0 & 0 & -(a^{2k+1})^2(b^{2k+1})^2 \end{pmatrix}$$

Cuya ecuación característica estará expresada por:

$$\frac{x^2}{(b^{2k+1})^2} + \frac{y^2}{(a^{2k+1})^2} = 1 \tag{3.15}$$

Donde la matriz de k potencias impares (A^{2k+1}) pertenece a la matriz canónica de coeficientes de una elipse con eje focal de la elipse que coincide con el *eje* y.

Casos

I. Si $a > b > 1$ entonces $a^{2k+1} > b^{2k+1} > 1$ con $a^{2k+1} > a$ y $b^{2k+1} > b$. Luego la ecuación corresponde a una elipse con centro en el origen, con eje focal al *eje* X y con la longitud del semieje mayor (a^{2k+1}) más amplia a la longitud del semieje mayor a y la longitud del semieje menor (b^{2k+1}) más amplia a la longitud del semieje menor b (Figura 3.7).

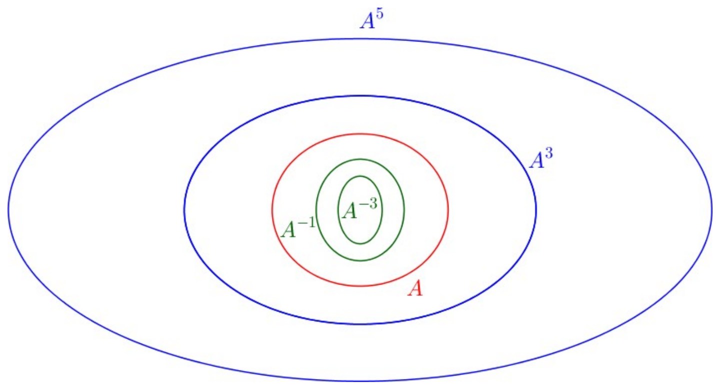


Figura 3.7: Particularidad de la potencia en la elipse, **caso 1**

II. Si $1 > a > b > 0$ entonces $1 > a^{2k+1} > b^{2k+1} > 0$ con $a > a^{2k+1}$ y $b > b^{2k+1}$. Luego la ecuación corresponde a una elipse con centro en el origen, con eje focal al *eje* X y con la longitud del semieje mayor (a^{2k+1}) más amplia a la longitud del semieje mayor a y la longitud del semieje menor (b^{2k+1}) más angosta a la longitud del semieje menor b (Figura 3.8).

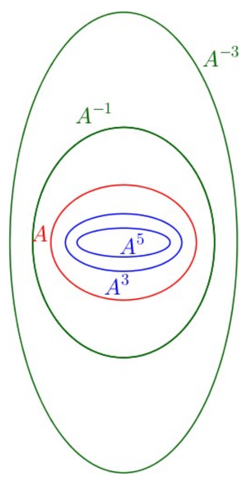


Figura 3.8: Particularidad de la potencia en la elipse, **caso 2**

III. Si $b > a > 1$ entonces $b^{2k+1} > a^{2k+1} > 1$ con $b^{2k+1} > b$ y $a^{2k+1} > a$. Luego la ecuación corresponde a una elipse con centro en el origen, con eje focal al *eje* y y con la longitud del semieje mayor (a^{2k+1}) más amplia a la longitud del semieje mayor a y la longitud del semieje menor (b^{2k+1}) más amplia a la longitud del semieje menor b (Figura 3.9).

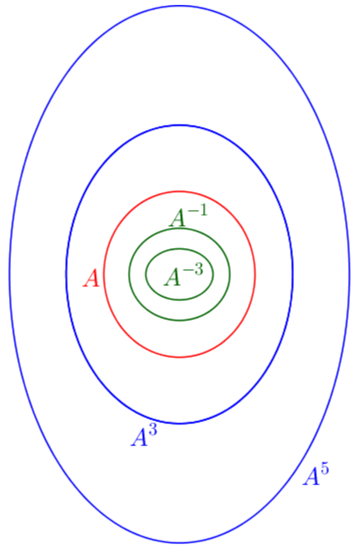


Figura 3.9: Particularidad de la potencia en la elipse, **caso 3**

IV. Si $1 > b > a > 0$ entonces $1 > b^{2k+1} > a^{2k+1} > 0$ con $a > a^{2k+1}$ y $b > b^{2k+1}$. Luego la ecuación corresponde a una elipse con centro en el origen, con eje focal al *eje y* y con la longitud del semieje mayor (a^{2k+1}) más angosta a la longitud del semieje mayor a y la longitud del semieje menor (b^{2k+1}) más angosta a la longitud del semieje menor b (3.10).

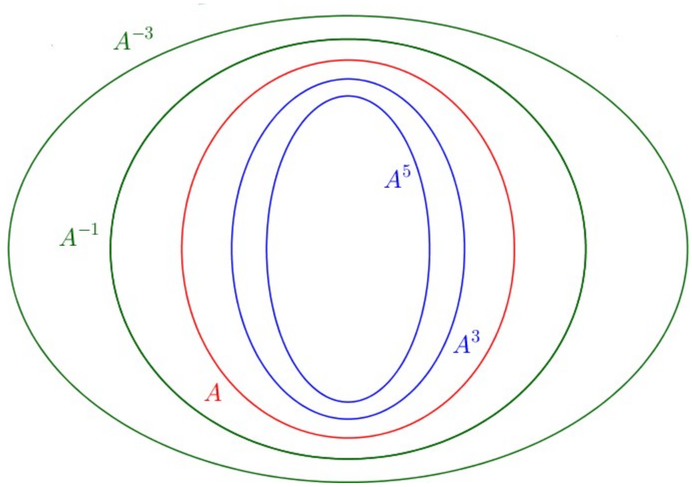


Figura 3.10: Particularidad de la potencia en la elipse, **caso 4**

Hipérbola

Sea A la matriz canónica de coeficientes de la hipérbola cuando el eje focal de la hipérbola coincide con el *eje x*:

$$A = \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$$

a) Si las k potencias son pares, es decir que:

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}^{2k} \quad con \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

por lo tanto

$$\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}^{2k} = \begin{pmatrix} (b^2)^{2k} & 0 & 0 \\ 0 & (-a^2)^{2k} & 0 \\ 0 & 0 & (-a^2b^2)^{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b^{2k})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a^{2k})^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a^{2k})^2(b^{2k})^2 \end{pmatrix}$$

La cual tendrá por ecuación característica:

$$(b^{2k})^2x^2 + (a^{2k})^2y^2 + (a^{2k})^2(b^{2k})^2 = 0 \tag{3.16}$$

La ecuación (3.16) corresponde a una elipse imaginaria, por lo tanto, con potencias pares no tendrá una representación real.

b) Cuando el eje focal de la hipérbola coincide con el *eje y*, entonces el procedimiento es análogo al anterior con las k potencias pares, esto es:

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}^{2k}$$

Con,

$$A^{2k} = \begin{pmatrix} (a^{2k})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (b^{2k})^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a^{2k})^2(b^{2k})^2 \end{pmatrix}$$

Donde la matriz de coeficientes corresponde a una elipse imaginaria.
c) Si las k potencias son impares y el eje focal coincide con el *eje* x, se obtiene que la matriz canónica se pude expresar como:

$$\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}^{2k+1} = \begin{pmatrix} (b^2)^{2k+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-a^2)^{2k+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-a^2b^2)^{2k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b^{2k+1})^2 & 0 & 0 \\ 0 & -(a^{2k+1})^2 & 0 \\ 0 & 0 & -(a^{2k+1})^2(b^{2k+1})^2 \end{pmatrix}$$

La cual tendrá por ecuación característica:

$$\frac{x^2}{(a^{2k+1})^2} - \frac{y^2}{(b^{2k+1})^2} = 1 \tag{3.17}$$

Donde la matriz de k potencias impares A^{2k+1} pertenece a la matriz canónica de coeficientes de una hipérbola con eje focal de la hipérbola que coincide con el *eje* x.

d) Las k potencias impares cuando el eje focal de la hipérbola coincide con el *eje* y, entonces el procedimiento es análogo al caso anterior, esto es:

$$A^{2k+1} = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}^{2k+1} \qquad con\ k\ \in \mathbb{Z}^+$$

La cual tendrá por ecuación característica:

$$\frac{y^2}{(a^{2k+1})^2} - \frac{x^2}{(b^{2k+1})^2} = 1 \tag{3.18}$$

Donde la matriz de k potencias impares A^{2k+1} pertenece a la matriz canónica de coeficientes de una hipérbola con eje focal de la hipérbola que coincide con el *eje* y.

Casos

I. Sea una hipérbola con centro en el origen y eje focal al *eje* x, tal que $a > b > 1$ entonces $a^{2k+1} > a$ y $b^{2k+1} > b$ por lo tanto la longitud del eje transversal a^{2k+1} mayor que la longitud del eje transversal a y la longitud del eje conjugado b^{2k+1} mayor que la longitud del eje conjugado b con $k \in \mathbb{Z}^+$ (Figura 3.11)

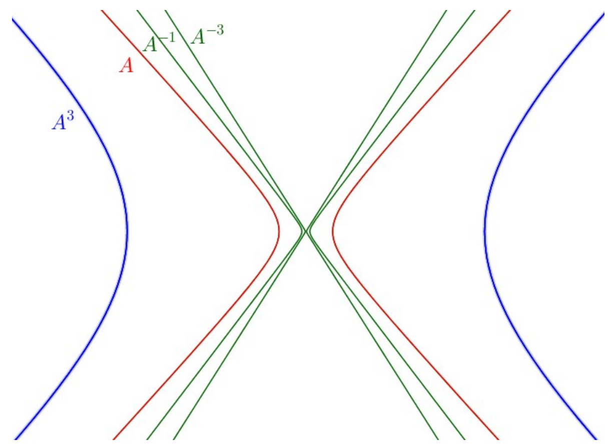


Figura 3.11: Particularidad de la potencia en la hipérbola, **caso 1**

II. Sea una hipérbola con centro en el origen y eje focal al *eje* x, tal que $1 > b > a > 0$ entonces $a > a^{2k+1}$ y $b > b^{2k+1}$ por lo tanto la longitud del eje transversal a mayor que la longitud del eje transversal a^{2k+1} y la longitud del eje conjugado b mayor que la longitud del eje conjugado b^{2k+1} con $k \in \mathbb{Z}^+$ (Figura 3.12)

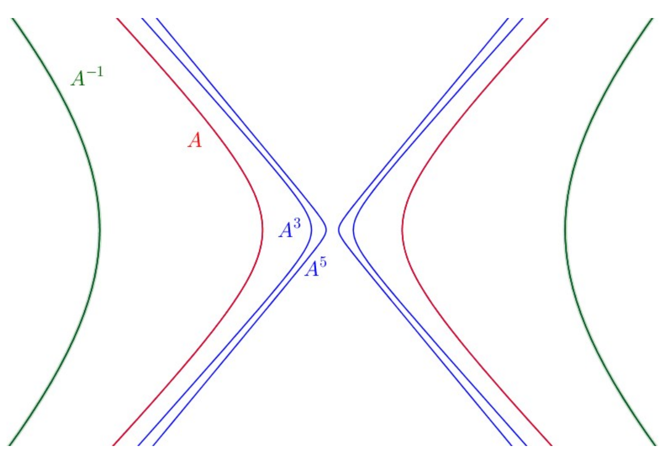


Figura 3.12: Particularidad de la potencia en la hipérbola, **caso 2**

3.5. Transpuesta de una matriz

Sea A una matriz simétrica de coeficientes asociada a una cónica, la matriz A^T se obtiene cuando se intercambian los renglones y columnas de A. Esto es, la *i-ésima* columna de A^T es el *i-ésimo* renglón de A para toda i.

Casos:

I. Sea A una matriz simétrica de coeficientes asociada a la ecuación de una cónica. La transpuesta de la matriz A de coeficientes será igual a su propia transpuesta, esto es, $A^T = A$. De donde se deduce que:

$$X^t A X = X^t A^T X$$

II. Sea A una matriz no simétrica de coeficientes asociada a la ecuación de una cónica, entonces:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

la cual tendrá por ecuación característica:

$$ax^2 + ey^2 + (b+d)xy + (c+g)x + (f+h)y + i = 0$$

Luego, por la propiedad conmutativa de la suma de los números reales se obtiene que:

$$axr + ey2 + (d+b)xy + (g+c)x + (h+f)y + i = 0$$

Lo que significa que esta ecuación general de segundo grado tendrá asociada la siguiente matriz de coeficientes no simétrica, $B = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$

Donde B resulta ser A^T , por lo tanto

$$X^t AX = X^t A^T X$$

Propiedad que se cumple para matrices simétricas y no simétrica.

3.6. Inversa de una matriz

Sea A una matriz simétrica de coeficientes asociada a una cónica de 3×3, la inversa de A es una matriz $A^{'}$ de $3 \in 3$ con la propiedad de que:

$$AA^{'} = I \quad y \quad A^{'}A = I$$

Donde $I = I_3$ es la matriz identidad de 3×3. Si tal A' existe, entonces A se denomina invertible y tendrá una única inversa, esto significa que:

$$\begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{c}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4bf-e^2}{4abf-ae^2-bd^2-c^2} & \frac{-2cf+de}{4abf-ae^2-bd^2-c^2} & \frac{-2bd-e^2}{4abf-ae^2-bd^2-c^2} \\ \frac{-2cf+de}{4abf-ae^2-bd^2-c^2} & \frac{4af+d^2}{4abf-ae^2-bd^2-c^2} & \frac{-2ae+cd}{4abf-ae^2-bd^2-c^2} \\ \frac{-2bd-e^2}{4abf-ae^2-bd^2-c^2} & \frac{-2ae+cd}{4abf-ae^2-bd^2-c^2} & \frac{4ab-c^2}{4abf-ae^2-bd^2-c^2} \end{pmatrix} = I$$

Ejemplo

$$x^2 - y^2 - 4y - 2 = X^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} X = 0$$

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ entonces $A^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ya que

$$AA^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La cual tendrá por ecuación característica:

$$X^t A^{'} X = X^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} X = 0$$

esto es una transformación de la hipérbola de matriz de coeficientes A a una circunferencia con matriz de coeficientes $A^{'}$ (Figura 3.13).

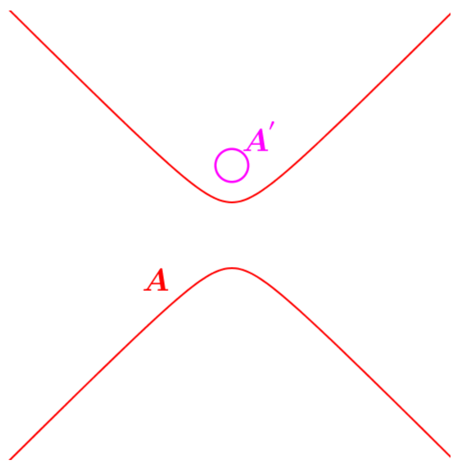


Figura 3.13: Transformación de hipérbola por medio de la inversa

3.6.1. Particularidades de la inversa

Circunferencia

Sea A la matriz canónica de coeficientes de la circunferencia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(\frac{1}{r})^2 \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes corresponde a una circunferencia con ecuación canónica de radio $\frac{1}{r}$, la cual tendrá por ecuación característica:

$$x^2 + y^2 = (\frac{1}{r})^2$$

casos

i. Si $r > 1$ entonces $r > \frac{1}{r}$ por lo tanto, la circunferencia determinada por A' será de menor radio respecto a la circunferencia determinada por la matriz de coeficiente A.

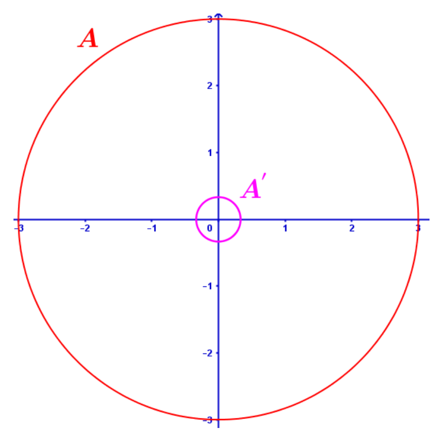


Figura 3.14: Inversa circunferencia con $r > 1$

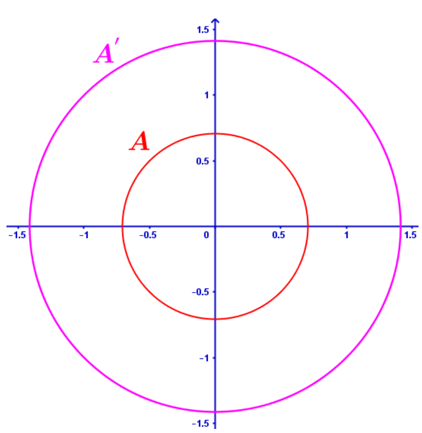


Figura 3.15: Inversa circunferencia con $0 < r < 1$

ii. Si $0 < r < 1$ entonces $\frac{1}{r} > r$ por lo tanto la circunferencia determinada por A' tendrán el radio mayor o igual a la circunferencia determinada por la matriz de coeficientes A.

Parábola

Sea A la matriz canónica de coeficientes de la parábola:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2p} \\ 0 & -\frac{1}{2p} & 0 \end{pmatrix}$$

Cuya ecuación característica está dada por:

$$x^2 - \frac{y}{p} = 0$$

Luego,

$$y = px^2$$

Casos (estiramiento o acortamiento vertical)

i. Si $p > \dfrac{1}{4p}$ entonces $p > \dfrac{1}{2}$. Cuando $p > \dfrac{1}{2}$ la gráfica de la parábola se alarga verticalmente por un factor de p. El resultado es la parábola más angosta (Figura 3.16).

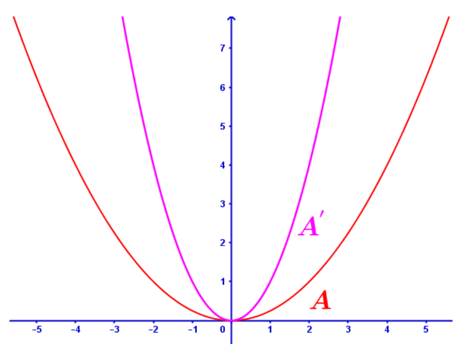


Figura 3.16: Parábola, **caso 1**

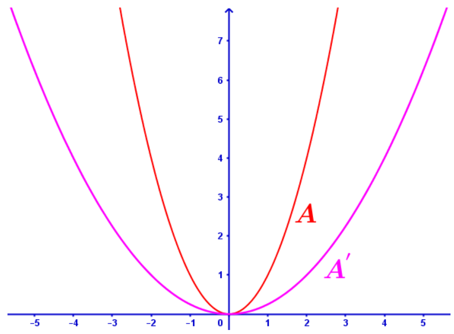


Figura 3.17: Parábola, **caso 2**

ii. Si $\frac{1}{4p} > p$ entonces $\frac{1}{2} > p > 0$. Cuando $\frac{1}{2} > p > 0$ la gráfica de la parábola se acorta verticalmente por un factor de p. El resultado es la parábola más amplia (Figura 3.17).

Elipse

Sea A la matriz canónica de coeficientes de la elipse cuando el eje focal de a elipse coincide con el *eje x*:

$$A = \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$$

entonces,

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^2b^2} \end{pmatrix}$$

Por definición de matriz de coeficientes equivalentes,

$$[A'] = a^2b^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^2b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2b^2}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2b^2}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2b^2}{-a^2b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$A' = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; con \; a^2b^2 = 1$$

Donde la matriz inversa A' pertenece a la matriz canónica de coeficientes de una elipse con eje focal de la elipse que coincide con el *eje* y.

Casos

i. Si $a > b > 1$ entonces $a > \frac{1}{a}$ y $b > \frac{1}{b}$. Luego la ecuación corresponde a una elipse con centro en el origen, con eje focal al *eje* y y con la longitud del semieje mayor y menor, más estrecha respecto a la elipse determinada por la matriz de coeficientes A (Figura 3.18).

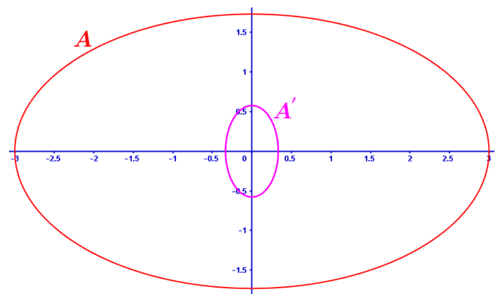


Figura 3.18: Elipse, **caso 1**

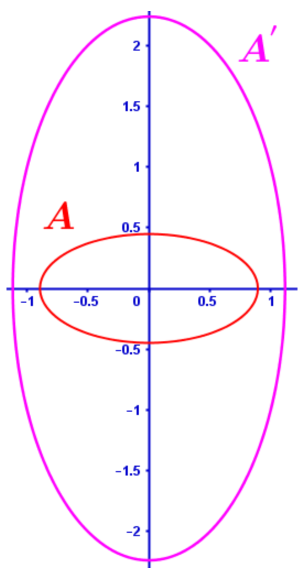


Figura 3.19: Elipse, **caso 2**

i. Si $1 > a > b > 0$ entonces $\frac{1}{a} > a$ y $\frac{1}{b} > b$. Luego la ecuación corresponde a una elipse con centro en el origen, con eje focal al *eje* y y con la longitud del semieje mayor y menor, más amplia respecto a la elipse determinada por la matriz de coeficientes A (Figura 3.19).

Sea A la matriz canónica de coeficientes de la elipse cuando eje focal de la elipse coincide con el *eje* y:

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$$

Análogo al procedimiento anterior, se puede concluir que,

$$[A'] = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^2b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} con \;\; a^2b^2 = 1$$

Donde la matriz inversa A pertenece a la matriz canónica de coeficientes de una elipse con eje focal de la elipse que coincide con el $eje\ x$.

Casos

iii. Si $b > a > 1$ entonces $a > \frac{1}{a}$ y $b > \frac{1}{b}$. Luego la ecuación corresponde a una elipse con centro en el origen, con eje focal al $eje\ x$ y con la longitud del semieje mayor y menor, más estrecha respecto a la elipse determinada por la matriz de coeficientes A (Figura 3.20).

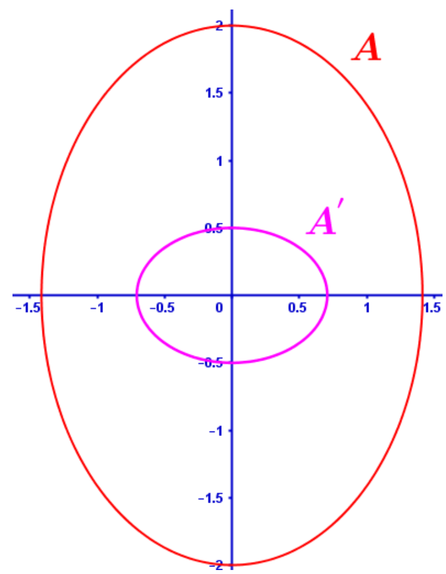


Figura 3.20: Elipse, **caso 3**

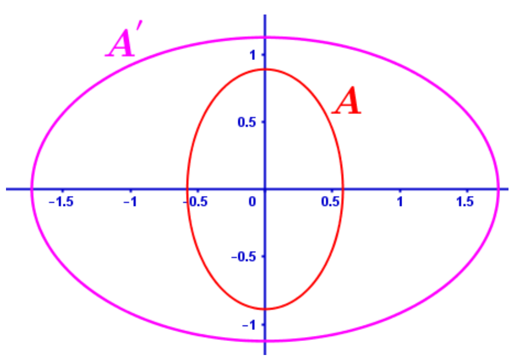


Figura 3.21: Elipse, **caso 4**

iv. Si $1 > b > a > 0$ entonces $\frac{1}{a} > a$ y $\frac{1}{b} > b$. Luego la ecuación corresponde a una elipse con centro en el origen, con eje focal al $eje\ x$ y con la longitud del semieje mayor y menor, más amplia respecto a la elipse determinada por la matriz de coeficientes A (Figura 3.21).

Hipérbola

Sea A la matriz canónica de coeficientes de la hipérbola, con eje focal que coincide con el *eje* x, donde a es la longitud del semieje transverso y b la longitud del semieje conjugado:

$$A = \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^2b^2} \end{pmatrix}$$

Por definición de matriz de coeficientes equivalentes,

$$[A'] = a^2b^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^2b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2b^2}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2b^2}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a^2b^2}{a^2b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$[A'] = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} con \;\; a^2b^2 = 1$$

De esta manera la matriz inversa A' pertenece a la matriz canónica de coeficientes de una hipérbola, con eje focal que coincide con el *eje* y, sin embargo, b es la longitud del semieje transverso mientras que a la del semieje conjugado puesto que los términos se intercambian.

Casos

I. Sea una hipérbola con centro en el origen y eje focal al *eje* x, tal que $a > b > 1$ donde a es la distancia del semieje transverso y b la distancia del semieje conjugado en A entonces en A', b es la distancia del semieje transverso y a la distancia de semieje conjugado, como $a > b$ entonces la distancia del semieje tranverso en A será mayor que en A' mientras que la distancia del semieje conjugado en A' será mayor que en A (Figura 3.22).

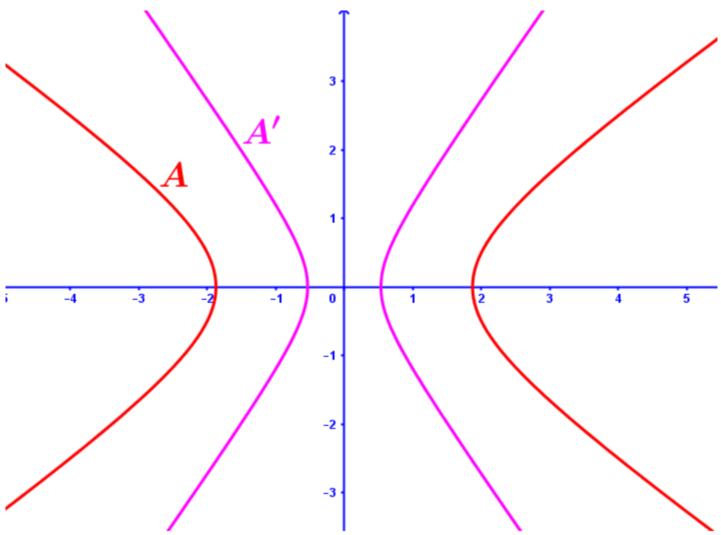


Figura 3.22: Inversa de la hipérbola, **caso 1**

II. Sea una hipérbola con centro en el origen y eje focal al *eje* x, tal que $1 > b > a > 0$ donde a es la distancia del semieje transverso y b la distancia del semieje conjugado en A entonces en A' , b es la distancia del semieje transverso y a la distancia de semieje conjugado, como $b > a$ entonces la distancia del semieje tranverso en A' será mayor que en A, mientras que la distancia del semieje conjugado en A será mayor que en A' (Figura 3.23).

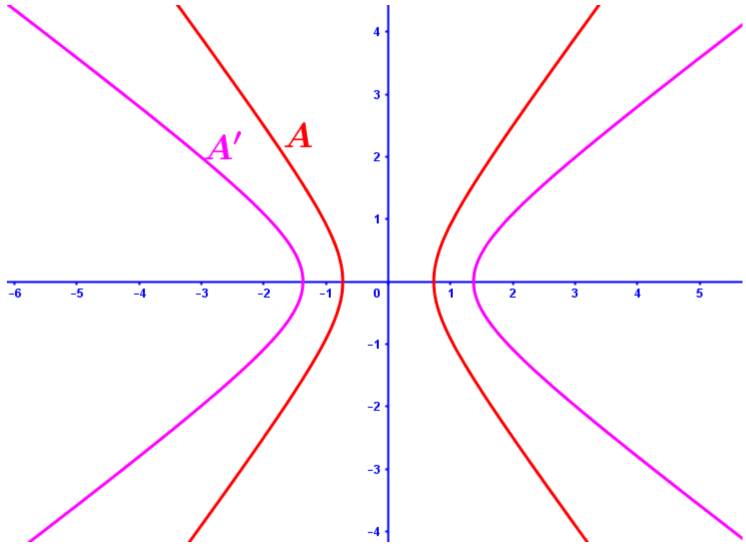


Figura 3.23: Inversa de la hipérbola, **caso 2**

Ahora sea A la matriz canónica de coeficientes de la hipérbola, con eje focal que coincide con el *eje* y, donde a es la longitud del semieje transverso y b la del semieje conjugado:

$$A = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$A' = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} con \;\; a^2b^2 = 1$$

De esta manera la matriz inversa A' pertenece a la matriz canónica de coeficientes de una hipérbola, con eje focal que coincide con el *eje* y, sin embargo, b es la longitud de semieje transverso mientras que a la del semieje conjugado puesto que los términos se intercambian.

Casos

I. Sea una hipérbola con centro en el origen y eje focal al *eje y*, tal que $a > b > 1$ donde a es la distancia del semieje transverso y b la distancia del semieje conjugado en A entonces en A', b es la distancia del semieje transverso y a la distancia de semieje conjugado, como $a > b$ entonces la distancia del semieje transverso en A será mayor que en A' mientras que la distancia del semieje conjugado en A' será mayor que en A (Figura 3.24).

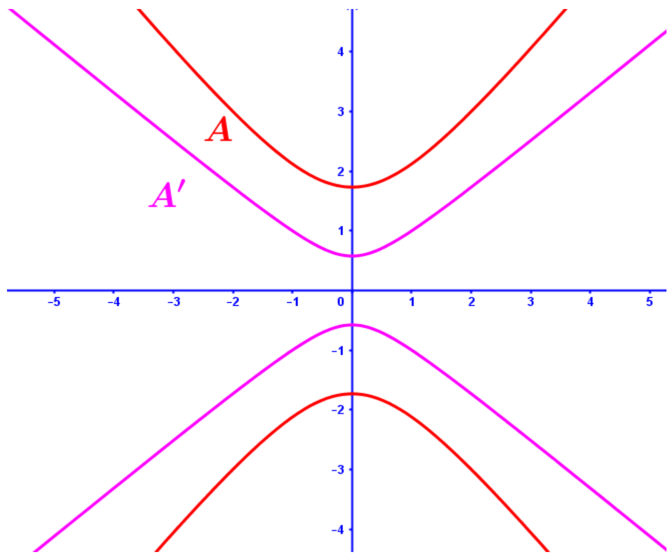


Figura 3.24: Inversa de la hipérbola, **caso 3**

II. Sea una hipérbola con centro en el origen y eje focal al *eje y* , tal que $1 > b > a > 0$ donde a es la distancia del semieje transverso y b la distancia del semieje conjugado en A entonces en A' , b es la distancia del semieje transverso y a la distancia de semieje conjugado, como $b > a$ entonces la distancia del semieje tranverso en A' será mayor que en A mientras que la distancia del semieje conjugado en A será mayor que en A' (Figura 3.25).

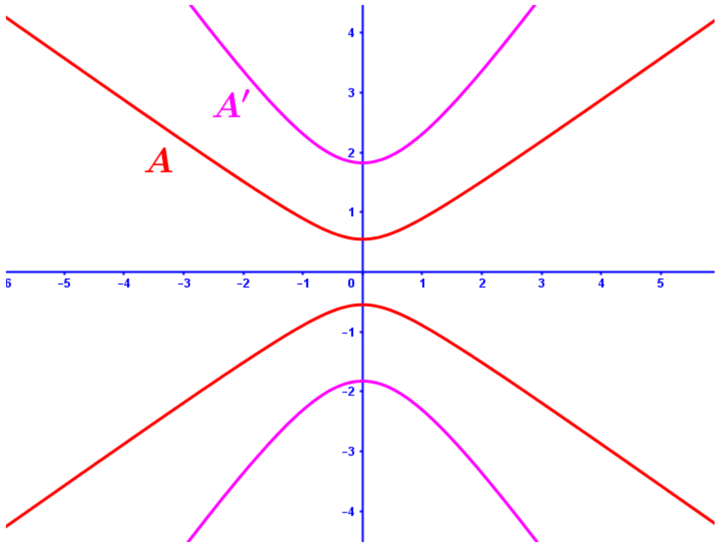


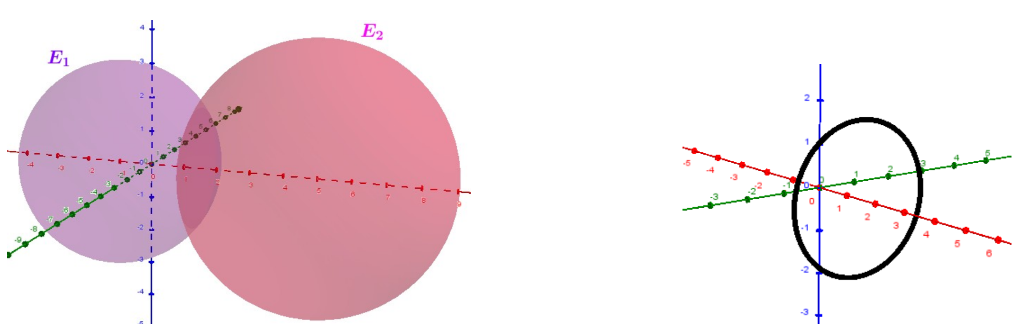
Figura 3.25: Inversa de la hipérbola, **caso 4**

Capítulo 4

Formas cuadráticas y cónicas en el espacio

En esta sección se hará un estudio a partir de la intersección entre formas cuadráticas las cuales determinan una cónica en el espacio, Donde se realiza una clasificación de cada curva según su matriz característica.

4.1. Intersección de esferas



(a) Intersección dos esferas　　(b) Curva de intersección

Figura 4.1: Esferas

Sean $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -h_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -h_1 & 0 & 0 & h_1^2 - r_1^2 \end{pmatrix}$ y $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -h_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -h_2 & 0 & 0 & h_2^2 - r_2^2 \end{pmatrix}$

las matrices de coeficientes de las respectivas esferas tal que

$$E_1 - E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -h_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -h_1 & 0 & 0 & h_1^2 - r_1^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -h_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -h_2 & 0 & 0 & h_2^2 - r_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -(h_1 + h_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(h_1 - h_2) & 0 & 0 & h_1^2 - r_1^2 - h_2^2 + r_2^2 \end{pmatrix}$$

Donde

$$m = -\frac{h_1^2 - r_1^2 - h_2^2 + r_2^2}{2(h_1 + h_2)} = \frac{r_1^2 + h_2^2 - h_1^2 - r_2^2}{2(h_1 + h_2)} \tag{4.1}$$

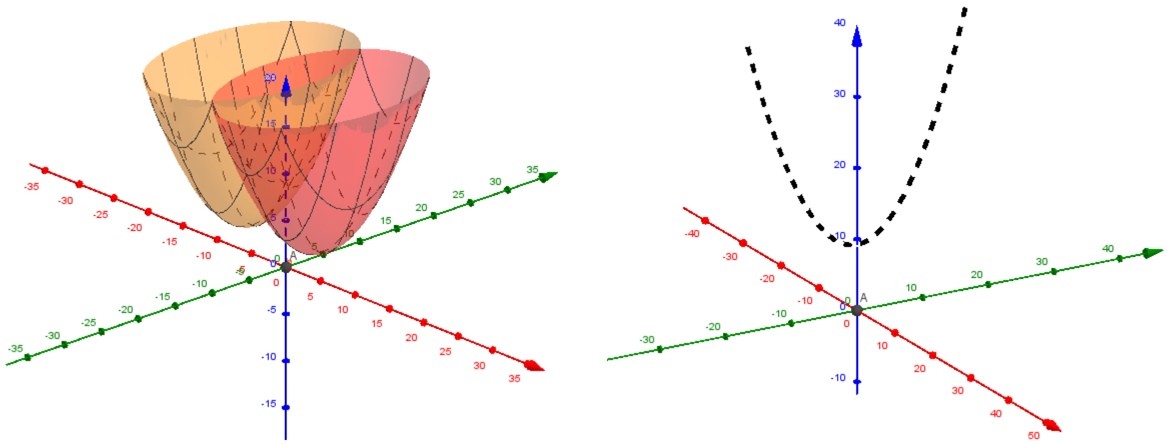
Sea

$$s^2 = r_1^2 - (h_1 - k)^2$$

Por lo tanto, la curva de intersección C_u , corresponde a una circunferencia con matriz de coeficientes:

$$C_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{s^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s^2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -(m+1) \end{pmatrix}$$

4.2. Intersección de paraboloides elípticos



(a) Intersección dos paraboloides (b) Curva de intersección

Figura 4.2: paraboloides

Sean

$$P_1 = \begin{pmatrix} b^2c & 0 & 0 & -h_1b^2c \\ 0 & a^2c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a^2b^2}{2} \\ -h_1b^2c & 0 & -\frac{a^2b^2}{2} & b^2ch_1^2 - a^2b^2i \end{pmatrix} \text{ y } P_2 = \begin{pmatrix} b^2c & 0 & 0 & -h_2b^2c \\ 0 & a^2c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a^2b^2}{2} \\ -h_2b^2c & 0 & -\frac{a^2b^2}{2} & b^2ch_2^2 - a^2b^2i \end{pmatrix}$$

las matrices de coeficientes de los respectivos paraboloides elípticos, tal que:

$$P_1 - P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b^2c(h_2-h_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b^2c(h_2-h_1) & 0 & 0 & b^2c(h_2-h_1) \end{pmatrix}$$

Por definición de matriz de coeficientes equivalentes,

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b^2c(h_2-h_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b^2c(h_2-h_1) & 0 & 0 & b^2c(h_2-h_1) \end{pmatrix}\right] = b^2c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & h_2-h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2-h_1 & 0 & 0 & h_2-h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & h_2-h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2-h_1 & 0 & 0 & h_2-h_1 \end{pmatrix}$$

Donde

$$m = \frac{-h_1^2 - h_2^2}{2(h_1 + h_2)} = \frac{h_2^2 - h_1^2}{2(h_1 + h_2)} \tag{4.2}$$

Por lo tanto, la curva de intersección C_u , corresponde a una parábola con matriz de coeficientes:

$$C_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & (bm + bh_1)^2 + 1 \end{pmatrix}$$

En síntesis, se ha expuesto las ideas básicas de como generar la matriz asociada aun curva Enel espacio. Curva que se genera al intersecar dos cuádricas, aunque se trabajaron cuádricas de la misma naturaleza se puede extender a la intersección de cuádricas distintas.

Conclusiones

La presente investigación se ha dedicado al estudio de las secciones cónicas a partir de su matriz asociada. Se ha utilizado software académico (GeoGebra) para analizar de manera gráfica como se transforman las cónicas y cuádricas al realizar transformaciones y operaciones propias de matrices.

En el desarrollo del trabajo de investigación que ha dado lugar a la presente tesis se han alcanzado los objetivos inicialmente planteados en cuanto a:

- Determinar cómo se altera el comportamiento gráfico y algebraico de las cónicas al aplicar transformaciones en la matriz asociada a está.

- Visualizar mediante el software GeoGebra como se representan las trasformaciones en un espacio bidimensional y tridimensional.

- Establecer una analogía entre el método algebraico con los métodos usuales para generar las cónicas mediante: excentricidad, analíticos y lugar geométrico.

En la investigación se ha realizado una clasificación de las secciones cónicas y cuádricas respecto a su matriz asociada, tanto de manera canónica como de manera ordinaria tanto en matrices simétricas y no simétricas, dicha clasificación ha sido el pilar de estudio en la investigación debido a que facilito el trabajo con las cónicas y cuádricas, esta clasificación se decidió hacerla debido a que en la bibliografía estudiada no se encontro nada similar. Del análisis de los aspectos teóricos encontrados en la bibliografía que tratan sobre el estudio de cónicas a partir de su matriz se concluye que se realizan pequeños avances sobre el tema además de que el todo el estudio es realizado con matrices simétricas y que aportan muy poco en el aspecto de cuádricas y cónicas en el espacio. En la investigación se abordan los dos problemas fundamentales de la geometría analistaca planteados por Lehmann, donde se hace uso de cónicas degeneradas para brindar la solución a uno de ellos donde se concluye que dada una cónica sin importar la cónica se podrá calcular la matriz a la que se le asocia además de que esta matriz será irreductible, con lo que se establece la primera conjetura del estudio.

Al realizar el estudio con las operaciones propias del algebra lineal se establece lo que serían familia de matrices equivalentes al multiplicar por un escalar, demostrando que se cumplen las propiedades reflexiva, simétrica, transitiva tanto en matrices simétricas como no simétricas y que dichas familias de matrices equivalentes se asocian a una sola cónica, con lo que se concluye que a una cónica o Cuádrica no se le asocia una única matriz sino una familia de matrices, idea que complementa había surgido al reconocer que cada cónica y Cuádrica tenía dos matrices asociadas, la simétrica y la no simétrica. La importancia de GeoGebra en el estudio fue ayudar a determinar el comportamiento de las cónicas. Al momento de sumar, restar y multiplicar matrices, GeoGebra nos ayudó a determinar los puntos en los cuales se cortaban las cónicas, puntos que fueron importantes para determinar el resultado de dichas operaciones. Lo anteriormente nombrado surge como proposición del estudio.

De la multiplicación de matrices surge la idea de la potencia de una matriz con lo que se descubrió que cuando la potencia de una es par esta curva no tendrá representación real, por lo que se trabaja con las potencias impares y examinar particularidad con cada una de las cónicas, con lo que se observó cómo se alteró cada una de las con- cas cuando su potencia era impar negativa y positiva. Idea similar al trabajar con la inversa de una matriz. Por último, al trabajar con cuádricas se identificó que al intersectar dos de estas se generarían una cónica en el espacio y se trabajaron las cónicas en el espacio la cual tendría una matriz asociada de $4 \in 4$, se resalta que se trabajaron las intersecciones de cuádricas cuando esta intersección era paralela a alguno de los ejes.

Se realizaron los siguientes aportes:

- Se ha sistematizado las definiciones y teoremas relacionados con la matriz asociada a una cónica.
- Se ha realizado una clasificación de cónicas y cuádricas tanto con matrices simétricas como no simétricas, que facilitará futuros estudios referentes al tema.
- Se formularon proposiciones que pueden generar bases para futuros estudios.
- Se ha determinado por medio de ejemplos la variación o deformaciones de las cónicas al aplicar potenciación de matrices, transpuesta e inversa.
- Todas las operaciones matriciales fueron realizadas por medio de un programa diseñado en GeoGebra, el cual estará en Geogebra.org, donde al introducir las matrices pueden escoger las operaciones a realizar y brinda como resultado las cónicas que se generan.
- Se brindan los primeros avances de las cónicas en el espacio con su respectiva clasificación.

Una vez concluida la tesis, se considera interesante investigar otros aspectos relacionados con las matrices y se propone:

- Extender los estudios expuestos en esta tesis al estudio de las cónicas en el espacio.
- Examinar cómo se comportan las cónicas y cuádricas al trabaja con eigenvalores y eingevectores.
- Se podría establecer un trabajo para desarrollar en los colegios, con el fin de enseñar todo lo relacionado con las secciones cónicas a partir de una representación no usual, como lo es su representación matricial.

Bibliografía

Lehmann, C. (1989). Geometría analítica. Editorial Limusa, S.A. de C. V.

Muños, A. (2015). Curvas cónicas desde su origen hasta sus aplicaciones en la actualidad (Tesis de maestría). Universidad de Valladolid, España.

Poole, D. (2011). Algebra lineal Una introducción moderna. México: CENGAGE Learning.

Vian, J. A. (1997). Álgebra Lineal Formas Cuadráticas. España: Universidad de Valladolid.

Rosales, A. (2009). Evolución histórica del concepto de matriz. Revista digital Matemática, educación e internet. Vol.9, N$\circ$ 1. pp.1 - 10