ADAPTACIÓN TECNOLÓGICA DE ALGUNAS ACTIVIDADES TOMADAS DE DOS LIBROS DE TEXTO PARA DESARROLLAR EL PENSAMIENTO VARIACIONAL

DORA INÉS DÍAZ AMÉZQUITA
VIVIANA MANRIQUE PÉREZ
YOHANY HUERTAS GUERRERO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

BOGOTÁ

2015

ADAPTACIÓN TECNOLÓGICA DE ALGUNAS ACTIVIDADES TOMADAS DE DOS LIBROS DE TEXTO PARA DESARROLLAR EL PENSAMIENTO VARIACIONAL

DORA INÉS DÍAZ AMEZQUITA
VIVIANA MANRIQUE PÉREZ
YOHANY HUERTAS GUERRERO

Asesor:

EDWIN ALFREDO CARRANZA VARGAS

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE ESPECIALISTA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

BOGOTÁ

2015

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado "***Adaptación tecnológica de algunas actividades tomadas de dos libros de texto para desarrollar el pensamiento variacional***", presentado por los estudiantes:

Dora Ines Diaz Amezquita** - **2015182005** - **40023074
Viviana Elena Manrique Perez** - **2015182011** - **1023895167
Herlinton Yohany Huertas Guerrero - 2015182025 - 79814376

Como requisito parcial para optar al título de **Especialista en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado**, con **47** Puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 03 días del mes de diciembre de 2015.

JURADOS

Directora del Trabajo: Profesor: EDWIN CARRANZA

Jurados: Profesora: María Nubia Soler
MARÍA NUBIA SOLER

A Dios y a mis hijas por su motivación y su continuo apoyo

Dora Inés DíazAmézquita

A mis padres y mis hermanos por su apoyo incondicional.

Viviana Manrique Pérez

A mis padres por ser ejemplo de constancia y trabajo.

Yohany Huertas Guerrero

Se agradece al profesor Edwin Carranza, puesto que sus aportes, sugerencias y enseñanzas han sido importantes en el desarrollo de este escrito ofrecido a los lectores.

RESUMEN Analítico EN EDUCACIÓN – RAE

1.Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado de Especialización.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Adaptación tecnológica de algunas actividades tomadas de dos libros de texto para desarrollar el pensamiento variacional.
Autor(es)	Díaz, Dora Inés; Huertas Guerrero, Herlinton Yohany; Manrique Pérez, Viviana.
Director	Carranza Vargas, Edwin Alfredo
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 155 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	ARGUMENTO; CONJETURA; GEOGEBRA; DATOS; GARANTÍA; TOULMIN; PENSAMIENTO VARIACIONAL.

2.Descripción
Trabajo de grado donde se realiza una adaptación tecnológica de tres actividades tomadas de libros de texto de matemáticas de grado 11, de edición reciente. Para ello, muestra una selección de actividades que favorezcan su implementación en el software GeoGebra y un diseño de guías para el estudiante que a partir de cada applet promueva el ejercicio de la conjeturación, la argumentación, de acuerdo al modelo de Toulmin, y el desarrollo del pensamiento variacional entre los estudiantes. En el trabajo se plantea la situación problema, los objetivos, el marco teórico donde se sustenta el concepto de conjeturación y argumentación, el modelo de argumentación de Toulmin y el pensamiento variacional. Seguidamente, en la metodología se muestran los

pasos que se llevaron a cabo para el desarrollo de la propuesta. Luego, se hace el análisis de la implementación de las actividades, que se llevó a cabo con 19 estudiantes de grado 11 del Colegio José Acevedo y Gómez de la localidad 4 de San Cristóbal, en la ciudad de Bogotá. Finalmente, aparecen algunas conclusiones con las que se muestra que este trabajo realiza un aporte a los libros de texto y a los profesores que hacen uso de ellos, mostrando como las actividades que allí se presentan se pueden dinamizar mediante el uso del software GeoGebra y la intervención adecuada del docente, permitiendo además el desarrollo de la conjeturación y la argumentación.

3.Fuentes

Atienza, M. (2005). Las razones del derecho. Teorías de la argumentación jurídica. Universidad Nacional Autónoma de México, México.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Universidad de los Andes.

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria*. Tesis Doctoral. Valencia: Universitat de València.

Conner, A.(2012). Garantías como indicadores de patrones de razonamiento en clases de matemáticas de secundaria. *Décimo segundo congreso internacional de educación matemática*. COEX, Seoul, Korea

Duval, R. (1999). Algunas cuestiones relativas a la argumentación. *International newsletter on the theaching and learning of mathematical proof*. Lille: IUFM de Lille.

Goizueta, M (2011). *Interpretaciones sobre la argumentación en el aula de matemáticas de secundaria por parte de un grupo de profesores*. Tesis para optar al título de máster de investigación en didáctica de las matemáticas y de las ciencias experimentales. Barcelona: Universidad autónoma de Barcelona.

González, M. & Sierra, M. (2004). *Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX.* Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. España. Universidad de Salamanca

Londoño, D., Villa, D., & Morales, S. (2013). *Comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrica sobre la base del modelo de Pirie y Kieren*. Medellín, Colombia. Universidad de Medellín.

MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, Colombia.

Rendón, C., Ruiz, K., & Córdoba, Y. (2014). *La comprensión del concepto de derivada en el marco de "La enseñanza para la comprensión"*. Medellín, Colombia. Universidad de Antioquia.

Toulmin, S. (1958). *Los usos de la argumentación*. Barcelona: Península.

4.Contenidos
El objetivo de este trabajo es seleccionar de dos de los libros de texto de matemáticas de grado 11, de edición reciente, tres actividades que se puedan adaptar al software GeoGebra y que al mismo tiempo faciliten el diseño de actividades que permitan el estudio de la conjeturación, la argumentación, de acuerdo con el modelo de Toulmin, y el pensamiento variacional de los estudiantes en razón al trabajo y orientaciones que en el aula se propongan, siguiendo los pasos nombrados a continuación: **1.** Metodología: Se describe la selección de actividades en libros de texto relacionadas con la noción de derivada, su proceso de adaptación al software GeoGebra, el diseño de preguntas para cada applet, su implementación y posterior análisis utilizando las evidencias obtenidas en guías de los estudiantes y videos. **2.** Marco teórico: Se presenta mediante referencias a libros y artículos, autores que validen los conceptos de conjeturación y argumentación, el modelo de Toulmin y una

reseña del pensamiento variacional.

3. Marco de antecedentes: Se hace referencia a artículos y trabajos de grado que se han desarrollado sobre aspectos como el análisis de libros de texto de matemáticas, la implementación del software GeoGebra para el desarrollo de la noción de derivada y el análisis de conjeturas y argumentos en la clase de matemáticas mediante el modelo de Toulmin.

4. Análisis: Se hace un análisis detallado de los diálogos e interacciones que sucedieron en la aplicación de las actividades desde la aplicación del modelo de argumentación de Toulmin. Se identifican las conjeturas y argumentos que ofrecen los estudiantes en sus respuestas, ya sea de forma verbal o escrita, y el desarrollo del pensamiento variacional en cada momento.

5. Conclusiones: Se muestra el cumplimiento de los objetivos del trabajo de grado.

6. Anexos: En ellos aparece la transcripción de cada uno de los videos que se tomaron durante la implementación de las actividades.

5.Metodología
Este trabajo de grado es meramente descriptivo. Se desarrolló con un grupo de 19 estudiantes de grado 11 del Colegio José Acevedo y Gómez y se utilizaron como elementos para recoger información guías que debían desarrollar los estudiantes y videos tomados en el momento de implementación de las actividades.

6.Conclusiones
Del trabajo realizado se obtuvieron las siguientes conclusiones: - Es posible adaptar actividades de libros de texto de matemáticas de grado 11 (de edición reciente) relacionadas con el concepto de derivada al software GeoGebra dándoles dinamismo e innovación. - A partir de los applet generados con la adaptación de las actividades, se facilita la construcción de guías para el estudiante donde es posible formular preguntas y ejercicios que promueven la conjeturación y la argumentación.

- La implementación de las actividades desarrolla la conjeturación y la argumentación por parte de los estudiantes puesto que ellos utilizan la información dada a través del applet y la guía; usan como garantía el applet, los datos por ellos obtenidos o en algunos casos la validación de sus conjeturas a partir de la valoración que haga el profesor para llegar a conclusiones. - Mediante la implementación de actividades relacionadas con la noción de derivada, donde se completan tablas, se analizan gráficas de función, regularidades, crecimiento y decrecimiento de funciones y puntos de intersección se presenta un desarrollo del pensamiento variacional entre los estudiantes.

Elaborado por:	Díaz, Dora Inés; Huertas Guerrero, Herlinton Yohany; Manrique Pérez, Viviana.
Revisado por:	Carranza Vargas, Edwin Alfredo

Fecha de elaboración del Resumen:	11	10	2015

Tabla de contenido

Índice de figuras

Índice de tablas

INTRODUCCIÓN

La dinámica de la educación en la actualidad exige del profesor actualización permanente en el uso de diversas metodologías, estrategias didácticas y pedagógicas, recursos bibliográficos y tecnológicos que favorezcan el proceso de aprendizaje, el desarrollo de competencias básicas y la motivación del estudiante de acuerdo con el contexto, sus necesidades y expectativas. El presente trabajo de grado pretende hacer un estudio acerca de la respuesta de un grupo de estudiantes de educación media frente a la utilización de algunas estrategias empleadas por docentes en el área de matemáticas.

El interés que lleva a realizar este estudio, parte de la experiencia como docentes en los niveles de educación básica y media, al observar la apatía de los estudiantes frente al desarrollo de talleres y actividades que plantean los libros de texto y la necesidad de dinamizar los procesos de enseñanza aprendizaje en la apropiación de los estándares básicos de aprendizaje y desarrollo de competencias básicas en el área de matemáticas con miras a la obtención de buenos resultados en las pruebas externas y desempeño adecuado en estudios de pregrado.

La identificación del problema parte de la observación y análisis del desarrollo de las clases de matemáticas en los colegios, usando como herramienta libros de texto. En este contexto se da lugar a pensar en la posibilidad de que el profesor pueda replantear las actividades que se presentan en estos libros, con el objetivo de adaptarlas a las necesidades específicas de su clase y del grupo que atiende.

Por tanto, se realiza una adaptación tecnológica al software GeoGebra, de tres actividades tomadas de dos libros de texto de matemáticas de grado 11 de edición reciente, con el propósito de que dicha adaptación promueva el desarrollo de la conjeturación, la argumentación y el uso del pensamiento variacional por parte de los estudiantes; en ese sentido, las actividades diseñadas se implementaron a un grupo de estudiantes de grado 11 del Colegio José Acevedo y Gómez de la localidad 4 de San Cristóbal.

Las conclusiones de este trabajo muestran que las adaptaciones tecnológicas realizadas, junto a las guías diseñadas y la intervención del profesor, facilitaron por parte de los estudiantes el uso de datos, la formulación de conjeturas y la obtención de conclusiones, donde los estudiantes utilizaron como garantía los applet y los datos por ellos obtenidos, aunque en algunos casos se utilizo la validación del docente en los razonamientos y explicaciones que ellos ofrecen. Se espera que con los resultados de este trabajo se realice un aporte a los libros de texto y a los profesores que hacen uso de ellos, mostrando como las actividades que allí se presentan se pueden dinamizar a través del software GeoGebra y por medio de la intervención del docente.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. JUSTIFICACIÓN

Los libros de texto usualmente son usados por los docentes como una guía para planear y desarrollar sus clases, así como fuente de actividades para proponer a sus alumnos. Por eso consideramos importante que el docente de matemáticas tenga herramientas para analizar las actividades que se presentan en un libro de texto y sacar el mayor provecho de ellas.

Por otro lado, la conjeturación y la argumentación son actividades que han sido ampliamente estudiadas en el campo de la educación matemática. El interés por ellas radica en su potencial para construir y validar conocimiento matemático en el aula, por lo cual entendemos que es fundamental que los docentes en matemáticas busquen mecanismos para que los estudiantes se familiaricen con estas dos actividades.

El presente trabajo pretende aportar en estas dos líneas, siendo un ejemplo de análisis de algunas de las actividades que proponen dos de los libros de texto de edición reciente, usados por los docentes de matemáticas en Bogotá, relacionadas con el concepto de derivada. El propósito es mostrar como estas actividades pueden promover el desarrollo de la conjeturación y la argumentación mediante la intervención del docente y a través de su adaptación al software GeoGebra. De esta forma, se espera que este trabajo sea un aporte para los profesores y para los editores de libros de texto en el área de matemáticas.

1.2. OBJETIVO GENERAL

Adaptar, mediante el software GeoGebra, algunas de las actividades propuestas por dos libros de texto de matemáticas de grado 11 de edición reciente respecto al concepto de derivada.

1.3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Estudiar las actividades asociadas al concepto de derivada que proponen dos libros de texto de edición reciente.
2. Proponer una adaptación de algunas actividades estudiadas para que sean resueltas mediante el software GeoGebra de tal forma que promuevan el desarrollo de la conjeturación y la argumentación sobre el concepto de derivada.
3. Implementar las actividades propuestas a un grupo de estudiantes de grado 11°, para analizar si con la adaptación realizada se desarrolla conjeturación y argumentacióne identificar los elementos del pensamiento variacional que desarrollan.

2. METODOLOGÍA

En este capítulo abordamos el desarrollo metodológico del trabajo de grado, el cual se realizó a través de tres procesos fundamentales: (i) diseño de las actividades, (ii) recolección de la información y (iii) análisis y elaboración de conclusiones. Estos procesos se detallan a continuación.

2.1. DISEÑO DE LAS ACTIVIDADES

Para diseñar las actividades se tomaron como base las propuestas en algunos libros de texto de matemáticas de grado 11. La selección de estos libros se hizo teniendo en cuenta que fueran de edición reciente, de esta forma se garantiza que dentro de su enfoque están contemplados los lineamientos curriculares y los estándares, ya que son posteriores a 1998. Además, tenemos conocimiento que los docentes en Bogotá, en general, hacen uso actualmente de estos libros.

Los libros seleccionados fueron:

- Los caminos del saber: matemáticas 11. Editorial Santillana, 2013.
- Zoom a las matemáticas 11. Editorial Libros & Libros, 2012.

En estos libros se revisaron las actividades que se proponen para el desarrollo del concepto de derivada y se seleccionaron inicialmente las 9 actividades que se muestran a continuación:

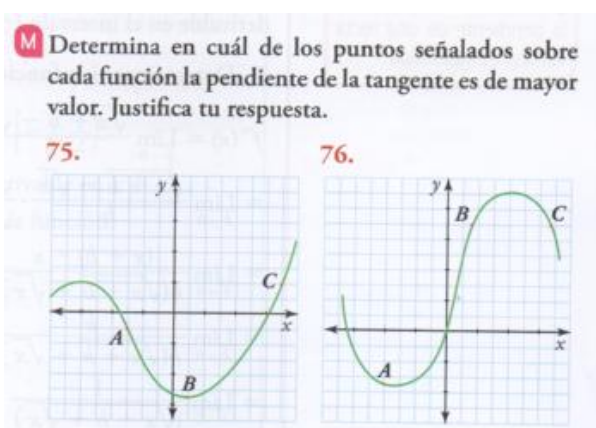
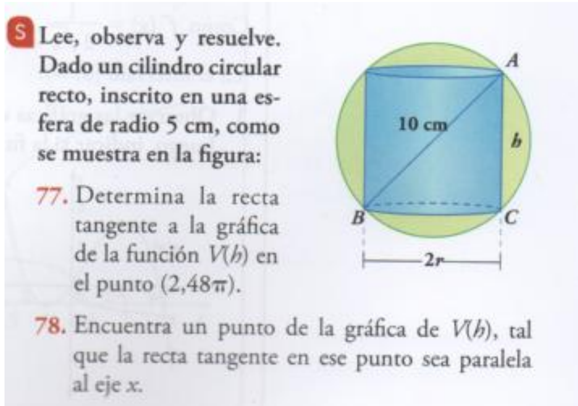


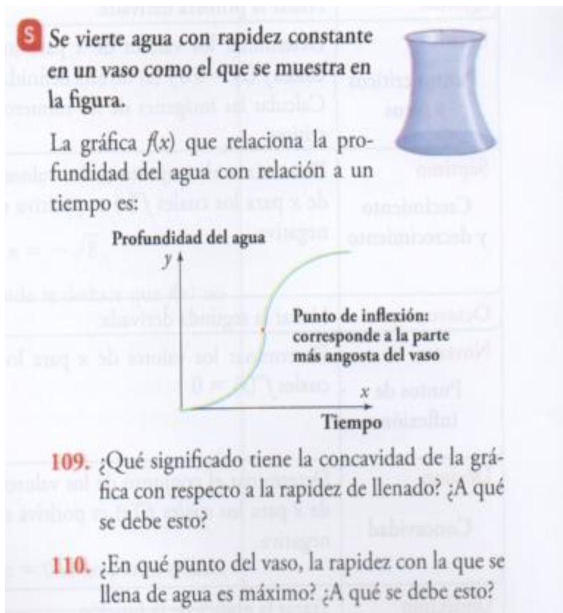
Figura 1. Actividad a, tomada del libro Los caminos del saber 11


Lee, observa y resuelve. Dado un cilindro circular recto, inscrito en una esfera de radio 5 cm, como se muestra en la figura:

77. Determina la recta tangente a la gráfica de la función $V(h)$ en el punto $(2,48\pi)$.

78. Encuentra un punto de la gráfica de $V(h)$, tal que la recta tangente en ese punto sea paralela al eje x.

Figura 2. Actividad b, tomada del libro Los caminos del saber 11


Se vierte agua con rapidez constante en un vaso como el que se muestra en la figura.

La gráfica $f(x)$ que relaciona la profundidad del agua con relación a un tiempo es:

109. ¿Qué significado tiene la concavidad de la gráfica con respecto a la rapidez de llenado? ¿A qué se debe esto?

110. ¿En qué punto del vaso, la rapidez con la que se llena de agua es máximo? ¿A qué se debe esto?

Figura 3. Actividad c, tomada del libro Los caminos del saber 11

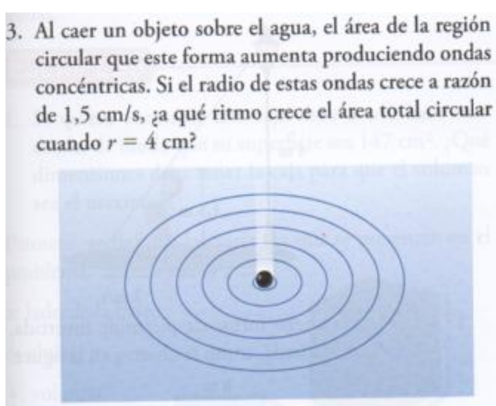
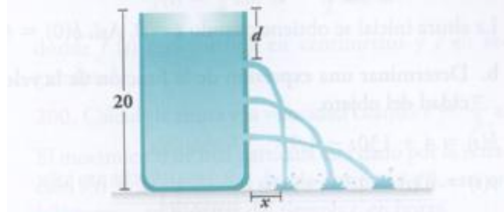

3. Al caer un objeto sobre el agua, el área de la región circular que este forma aumenta produciendo ondas concéntricas. Si el radio de estas ondas crece a razón de 1,5 cm/s, ¿a qué ritmo crece el área total circular cuando $r = 4$ cm?

Figura 4. Actividad d, tomada del libro Los caminos del saber 11

Un tanque cilíndrico con una altura de 20 pies se llena hasta el tope con agua. Si se hace un agujero en la parte lateral del tanque, el flujo de agua que sale del tanque llegará al suelo a una distancia de x pies de la base del tanque donde $x(d) = 2\sqrt{d(20-d)}$.



180. Encuentra el valor d, para que el alcance sea máximo.

Un granjero tiene 750 metros de alambre para cercar un área rectangular y dividirla en cuatro partes con cercas paralelas a cada uno de los lados del rectángulo.

181. Determina el área total máxima posible de las cuatro partes.

Figura 5. Actividad e, tomada del libro Los caminos del saber 11

9. Una mujer que se encuentra en un punto A sobre la playa de un lago circular con radio de 2 millas, desea llegar al punto C, opuesto al punto A sobre el otro lado del lago, en el tiempo más corto posible. Puede caminar a razón de 4 millas por hora y remar en un bote a 2 millas por hora. ¿En qué ángulo en relación con el diámetro debe remar?

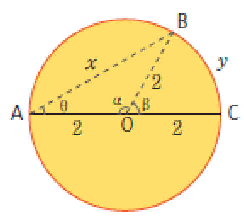


Figura 6. Actividad f, tomada del libro Zoom a las matemáticas 11

4. Un depósito en forma de cono invertido tiene una altura de 2 m y un radio de 3,5 m. Si el agua fluye en él a razón de 0,6 m^3 por minuto, halla la razón de cambio de la altura del agua cuando el depósito se ha llenado 45 cm.

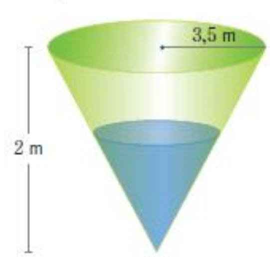


Figura 7. Actividad g, tomada del libro Zoom a las matemáticas 11

9. Una escalera de 13 m de longitud está apoyada contra una pared vertical. Si la base de la escalera se desliza de la pared alejándose de ella a razón de 2 m/s, ¿con qué rapidez resbala sobre la pared la parte superior de la escalera cuando su base se halla a 5 m del muro?

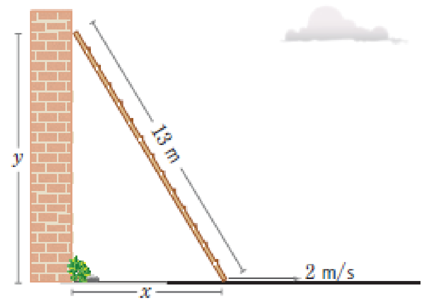


Figura 8. Actividad h, tomada del libro Zoom a las matemáticas 11

9. Un reloj de arena consta de dos conos idénticos contenidos en un cilindro recto de radio 2,5 cm y altura 6 cm. El cono superior está lleno de arena. Calcula la razón entre el volumen de la parte llena de arena y el volumen del cilindro.

Figura 9. Actividad i, tomada del libro Zoom a las matemáticas 11

Para cada una de estas actividades, se analizó la viabilidad de transformarla en un applet construido con el software GeoGebra, que permitiera el desarrollo de argumentación y conjeturación en los estudiantes. Al realizar el proceso con cada una, se encontró que 3 de ellas se adaptaban mejor a dicho objetivo. Las seleccionadas fueron:

- Actividad 1: actividad a, tomada del libro Los caminos del saber 11
- Actividad 2: actividad b, tomada del libro Los caminos del saber 11
- Actividad 3: actividad i, tomada del libro Zoom a las matemáticas 11

Con el applet construido en GeoGebra para cada una de estas tres actividades, se elaboró una guía de preguntasen las que se buscaba el desarrollo de la conjeturación y la argumentación. Dichas actividades fueron piloteadas con dos estudiantes y luego fueron ajustadas con base en los resultados obtenidos.

De esta manera, las actividades presentadas en los libros de texto se transformaron en actividades de aula. Si bien el pretexto de cada actividad es el mismo (en la primera, la recta tangente; en la segunda, el cilindro inscrito y en la tercera, el reloj de arena), lo que cambia de la actividad original a la adaptación, es el objetivo de las preguntas elaboradas.

Las actividades finales son las que se muestran a continuación.

2.1.1. ACTIVIDAD 1

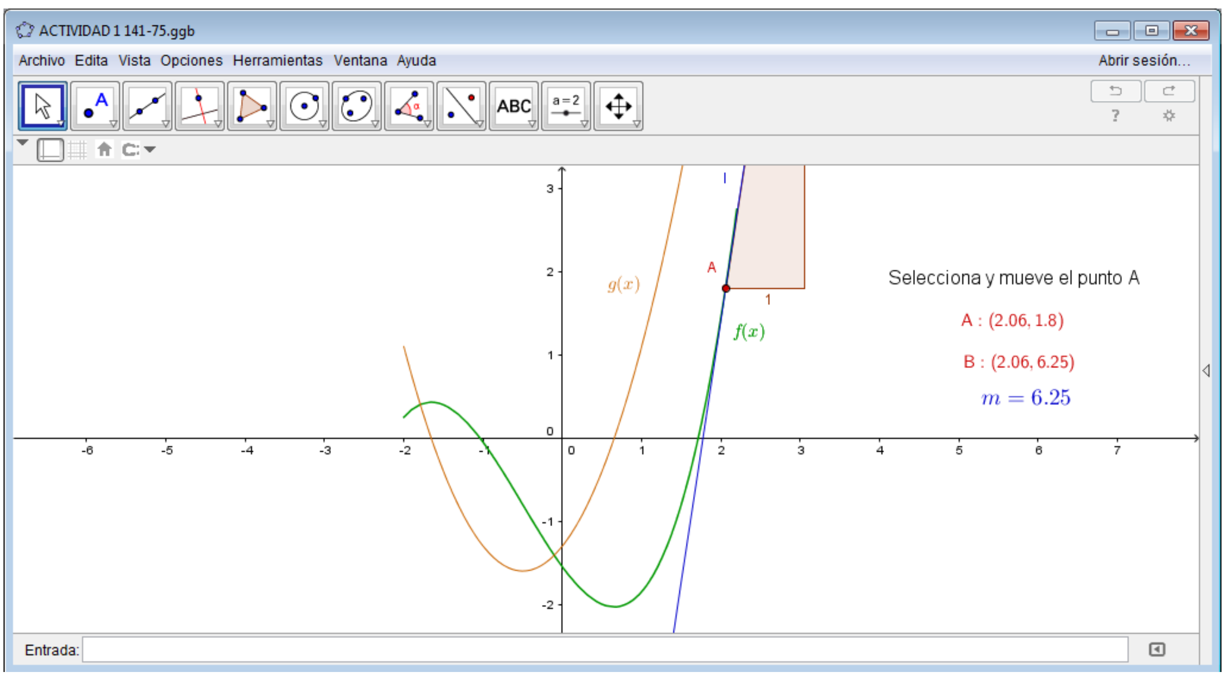


Figura 10. Applet de la actividad 1

1. En la construcción realizada en GeoGebra se representa:

- La función $f(x)$ de color verde.
- El punto A que pertenece a la función $f\ \ x$.
- La recta l que es tangente a la función$f(x)$ en el punto A.

Supongamos que el punto A representa un objeto que se desplaza siguiendo la trayectoria dada por la función $f(x)$. Puedes mover el punto A, sosteniendo el clic izquierdo sobre él, para ver como varia la pendiente (m) de la recta l.

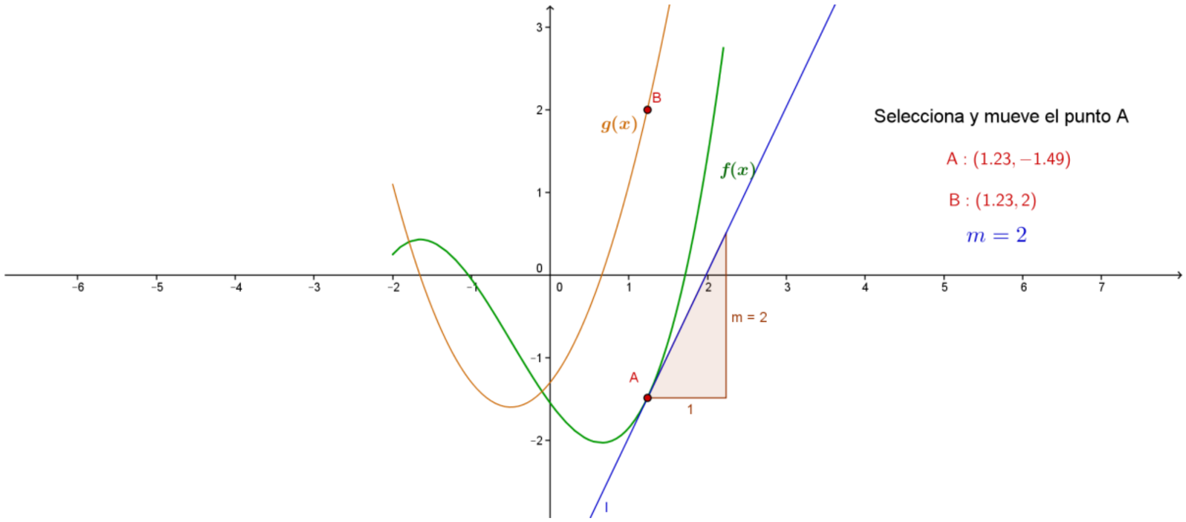


Figura 11. Imagen de la actividad 1

A continuación, resuelve usando la construcción:

b. Mueve el punto A y completa la tabla registrando las coordenadas del punto A, las coordenadas del punto B y el valor correspondiente de la pendiente (m) de la recta l en cada caso.

En los dos últimos renglones ubica el punto A en cualquier lugar de la función y escribe todos los valores que requiere la tabla:

Coordenadas de A		Coordenadas de B		Pendiente de l
x	y	x	y	
-2	$0{,}25$	-2	$1{,}1$	$1{,}1$
	$0{,}4$			
-1				
				$-1{,}6$
	$-1{,}54$			
$0{,}5$				
				$1{,}2$

Tabla 1. Primera tabla a completar en la actividad 1

c. Señala en la tabla las coordenadas del punto A para las cuales la pendiente m es positiva. Describe la forma que tiene la trayectoria del punto A cuando la pendiente m es positiva.

d. Señala en la tabla las coordenadas del punto A para las cuales la pendiente m es negativa. Describe la forma que tiene la trayectoria del punto A cuando la pendiente m es negativa.

e. ¿Cómo es la forma de la función $f(x)$ cuando la pendiente de la recta l es positiva? ¿Cómo es la forma de la función $f(x)$ cuando la pendiente de la recta$l$ es positiva? Establece una conclusión para responder estas preguntas y explica por qué esto ocurre.

f. ¿En qué partes de la gráfica de la función $f(x)$ el valor de la pendiente m es igual a cero? ¿Qué características tiene la trayectoria del objeto en estas partes de la función?

g. A medida que mueves el punto A, observa que se desplaza con él un triángulo rectángulo, ¿qué características permanecen constantes en el triángulo y cuáles cambian?

h. ¿Qué características en el trazo de la gráfica $f(x)$ hacen que el triángulo rectángulo prácticamente desaparezca? Señala las posiciones donde esto sucede escribiendo las coordenadas donde esté ubicado el punto A.

i. ¿Qué representa el triángulo respecto a la función? Establece una conclusión y justifícala.

j. Observa todos los valores registrados en la tabla, ¿qué relaciones observas entre ellos?

k. De acuerdo con tu respuesta a la pregunta anterior, ¿cuál es la relación entre el punto B y la gráfica de la función g(x)? ¿Qué representa esta función? Justifica tu respuesta.

2. Contesta nuevamente las preguntas anteriores con la segunda construcción que te ofrecemos en GeoGebra. Completa la siguiente tabla con valores de esta construcción.

Coordenadas de A		**Coordenadas de B**		**Pendiente de l**
x	y	x	y	

Tabla 2. Segunda tabla a completar en la actividad 1

2.1.2. ACTIVIDAD 2

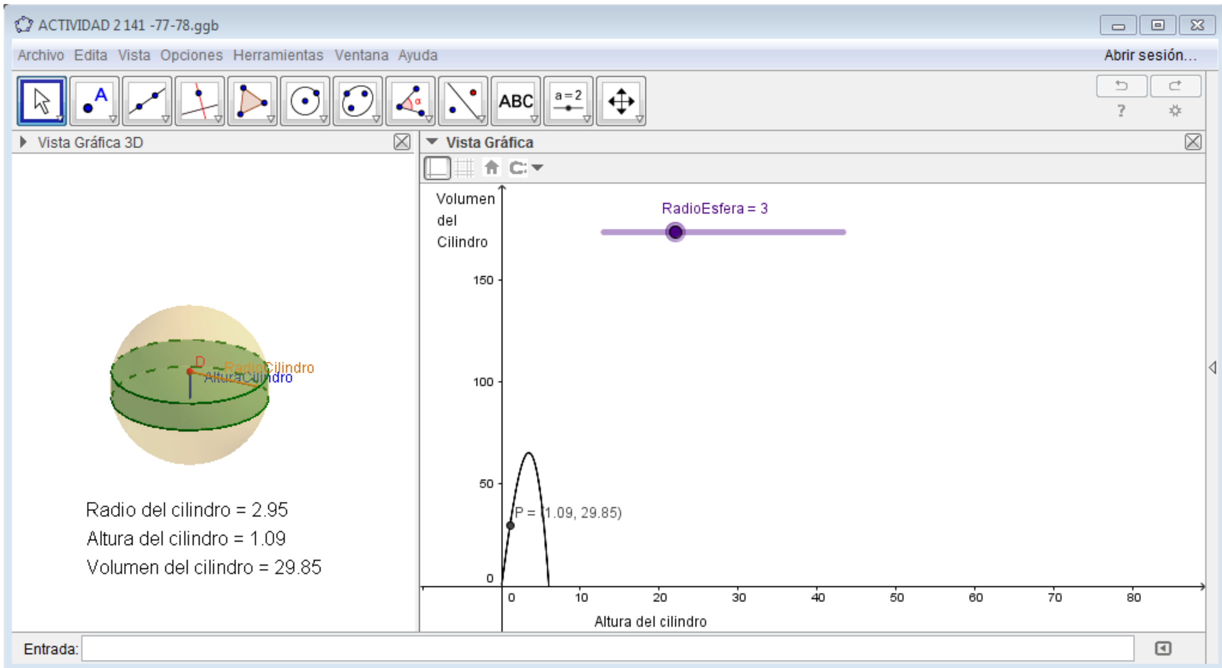


Figura 12. Applet de la actividad 2

La construcción en GeoGebra corresponde a un cilindro inscrito en una esfera, como se muestra en la siguiente imagen:

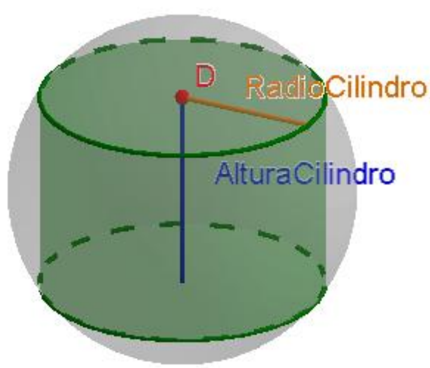


Figura 13. Imagen de la actividad 2

Puedes mover el punto D en GeoGebra para modificar la altura del cilindro y el deslizador *RadioEsfera* para modificar el radio de la esfera. En la vista gráfica se observa la función que representa el volumen del cilindro inscrito con respecto a su altura.

Contesta las siguientes preguntas:

a. Completa la siguiente tabla para la esfera de 3 unidades de radio, registrando algunos valores para la altura y el volumen del cilindro. Para encontrarlos mueve el punto D.

Altura del cilindro	**Volumen del Cilindro**
0,5	14,06
1,09	
	39,44
1,98	
	58,02
2,96	
	65,3
4,05	
	58,46
5,03	

Tabla 3. Primera tabla a completar en la actividad 2

b. Mueve cuidadosamente el punto D y observa el cambio en los valores de las coordenadas del punto P en la *vista gráfica*. ¿Cuál es el volumen máximo que puede tener el cilindro inscrito en la esfera de 3 unidades de radio? ¿Cuál es la altura del cilindro cuando tiene el máximo volumen?

c. Al mover el punto D, observa la relación entre el volumen del cilindro y la representación de la función que se observa en la *vista gráfica*. ¿Por qué la función tiene esta forma? Justifica tu respuesta.

d. Modifica ahora el radio de la esfera, con los valores que aparecen en la tabla siguiente. Busca el volumen máximo que puede tener el cilindro inscrito en la esfera para cada radio y completa los correspondientes radios y alturas del cilindro.

Radio de la esfera	**Volumen máximo del cilindro inscrito**	**Radio del cilindro con el volumen máximo**	**Altura del cilindro con el volumen máximo**
2			
2,5			
3			
3,6			
4,2			
4,5			
5			

Tabla 4. Segunda tabla a completar en la actividad 2

e. Observa los datos registrados en la tabla, ¿qué características tiene el cilindro con el volumen máximo para cualquier esfera? Justifica tu respuesta.

2.1.3. ACTIVIDAD 3

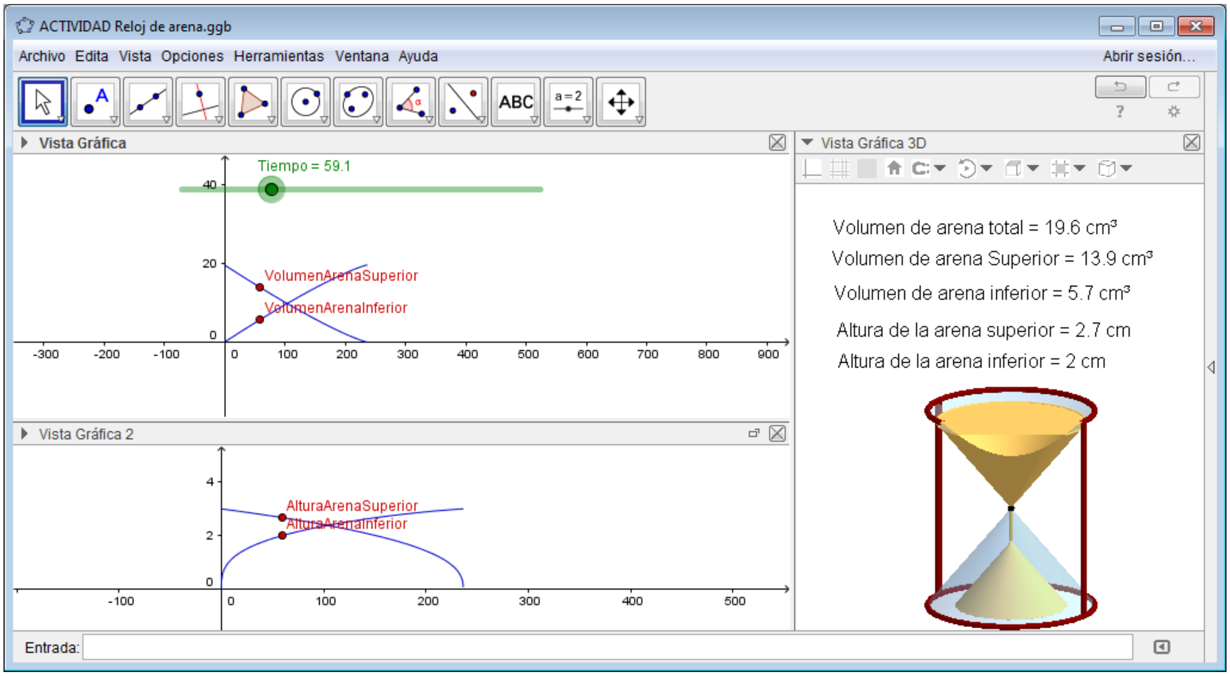


Figura 14. Applet de la actividad 3

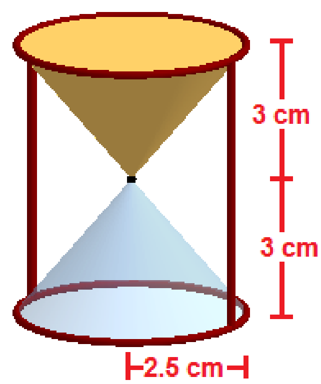


Figura 15. Reloj de arena con sus dimensiones.

La construcción de GeoGebra muestra la simulación de un reloj de arena con las dimensiones que se indican a la derecha. Si modificas el deslizador *Tiempo* verás como cae la arena. En la *vista gráfica* se hallan las gráficas de las funciones que relacionan:

- El volumen de la arena que hay en el cono superior y en el cono inferior a medida que pasa el tiempo.
- La altura de la arena que hay en el cono superior y en el cono inferior a medida que pasa el tiempo.

Usa la construcción para resolver las siguientes preguntas:

a. Completa la tabla registrando los valores correspondientes en cada tiempo determinado.

Tiempo	Volumen de arena superior	Altura de la arena superior	Volumen arena inferior	Altura de arena inferior
11	18,5	2,9	1,1	1,1
26,8				
46,5				
81,2				
112,7				
153,7				
176,5				
212,8				

Tabla 5. Tabla a completar en la actividad 3

b. A medida que el tiempo aumenta, ¿qué valores aumentan? ¿qué valores disminuyen?

c. ¿Cuál es el tiempo que ha transcurrido cuando se intersecan las funciones en cada gráfica?

d. ¿Qué representa el punto de intersección de las funciones en cada caso respecto a la situación?

e. Ubica el deslizador en *Tiempo = 0*. Haz clic derecho sobre el deslizador y activa la opción *animación*. Observa como varían las alturas y los volúmenes de la arena en el cono inferior y superior. ¿Por qué las gráficas tienen esta forma? Justifica tu respuesta.

2.2. RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

La aplicación de las actividades se realizó durante dos clases. En la primera clase se trabajó en la actividad 1 y en la segunda se trabajó en las actividades 2 y 3. Durante la aplicación de cada actividad los estudiantes se organizaron en parejas y trabajaron en los applet proporcionados y respondiendo las preguntas de cada guía. Para recolectar información se tomó grabación de video y se recopilaron las respuestas escritas de los alumnos.

2.2.1. POBLACIÓN

La implementación de las actividades se realizó con un grupo de 19 estudiantes de grado 11 del colegio José Acevedo y Gómez, ubicado en la localidad 4 de San Cristóbal en la ciudad de Bogotá. Los estudiantes tienen edades entre los 15 y 19 años, su estrato socioeconómico en su mayoría es dos.

2.3. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Tomando como base la grabación de video y las guías con las respuestas de los estudiantes, se realizó el análisis de las actividades. Para ello, se realizó el siguiente procedimiento:

1. Se revisó la grabación de video para determinar los momentos claves en la resolución de cada una de las actividades, en términos de argumentación y conjeturación.
2. Se realizaron transcripciones de los diálogosque se presentaron entre los estudiantes y los docentes, las cuales se presentan al final del presente documento.
3. Se usaron las transcripciones para identificar en los diálogos conjeturas, argumentos, explicaciones o diferentes aspectos del pensamiento

variacional. Se hizo énfasis en especificar cuáles de estos elementos eran aportados por los alumnos y cuales por los estudiantes. Para eso, se uso el modelo de Toulmin para caracterizar los argumentos, el cual como se verá a lo largo del documento, resulta ser tanto un sustento teórico como una herramienta metodológica para el desarrollo del análisis.

3. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se exponen los referentes teóricos en los que se basa el análisis de la aplicación de las actividades. En la primera parte se presenta una aproximación a las nociones de conjeturación y argumentación en la clase de matemáticas, con el propósito de diferenciar estos procesos de otros como la explicación o la demostración. En la segunda parte se realiza una interpretación del modelo de argumentación de Toulmin, así como una descripción de la concepción de razonamiento de este mismo autor, con el fin de establecer una distinción entre estos dos conceptos. Y en la tercera parte se caracteriza el pensamiento variacional,de acuerdo con los elementos expuestos en los lineamientos curriculares y los estándares de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional.

3.1. LA CONJETURACIÓN Y LA ARGUMENTACIÓN

En las últimas décadas, las investigaciones desarrolladas por la comunidad de educadores matemáticos han mostrado especial interés por el estudio de la argumentación en la clase de matemáticas. El modelo de Piaget del desarrollo del razonamiento en el niño y el adolescente, fue durante mucho tiempo la teoría aplicada para analizar los problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, este modelo resulta limitado para analizar asuntos relacionados con la argumentación, especialmente aquellos que tienen que ver con la demostración, ya que no permite caracterizar las dificultades que encuentran los estudiantes al desarrollar estos procesos o estudiar las condiciones que se presentan en el trabajo grupal en el aula (Duval, 1999).

Balacheff (citado por Duval, 1999) fue uno de los primeros autores en tener en cuenta esta situación respecto a la introducción de la prueba y la demostración en la educación secundaria. En su trabajo, este autor propone una aproximación a la prueba en matemáticas, tomando como punto de partida las actividades que realiza un estudiante para analizar un problema. Este nuevo enfoque impulsó el interés por las formas de argumentar que promueven la resolución de problemas, lo que condujo a pensar que las formas de argumentación eran el camino para llegar a la demostración.

Camargo (2010) engloba las actividades que apoyan e impulsan la producción de una demostración matemática en un conjunto denominado "actividad demostrativa". Respecto a estas actividades esta autora afirma que:

> Generalmente éstas comienzan con la exploración de una situación para buscar regularidades, pasan por la formulación de conjeturas y la respectiva aceptación del hecho geométrico enunciado, posteriormente se concentran en la búsqueda de ideas o argumentos que conforman la demostración del enunciado y la organización de dichas ideas en un discurso comunicable según reglas establecidas por el grupo humano al que se dirige y terminan con la inclusión del enunciado al interior de un sistema teórico. (p. 49).

En consecuencia, para Camargo, la actividad demostrativa no se reduce únicamente a la organización de una demostración matemática coherente dentro de un sistema lógico deductivo. Sino que debe abarcar además todos los procesos que se realizan para establecer la propiedad que se va a demostrar, analizar los argumentos que soportan dicha propiedad y organizar estos argumentos en la demostración matemática formal. Por lo tanto, la conjeturación y la argumentación son procesos en los que se basa el desarrollo de la actividad demostrativa y que detallaremos a continuación.

Una de las primeras actividades que conforman la actividad demostrativa es la de conjeturar. Cuando se realiza un trabajo de exploración y, a partir de este, se establece una hipótesis, se dice que se ha desarrollado conjeturación. La hipótesis formulada se denomina conjetura (Camargo, 2010). Para Boero (citado por Camargo, 2010) una conjetura es una proposición que tiene implícita la forma condicional si-entonces. En ocasiones, para formular una conjetura de manera apropiada, esto es con la forma condicional, el profesor debe actuar como guía para llevar a los estudiantes hacia las formulaciones lingüísticas adecuadas.

En el momento en el que se tiene clara una conjetura, surge la necesidad de validarla, para lo cual se pueden tomar diversos caminos. De acuerdo con Balacheff (2000), uno de estos caminos es la explicación. Para este autor, la explicación permite establecer y garantizar la validez de una proposición. Cuando una persona expresa una explicación en un discurso, lo que pretende es transmitir la verdad de una proposición que ya ha asumido.

No obstante, otros autores le otorgan menos poder a la explicación. Es el caso de Duval (citado por Goizueta, 2011), para quien la explicación tiene que ver con la presentación de un hecho, esto es, hacer comprensible un dato, una proposición, un fenómeno o un resultado. Es decir, la explicación tiene un carácter más descriptivo que persuasivo. Para Duval (1999) la tarea de justificar una proposición (que puede ser una conjetura) es asumida por la argumentación y no por la explicación. Duval considera que un hecho, el resultado de la experiencia, un ejemplo, una definición, una regla o una creencia, pueden ser argumentos si se usan para decir por qué se acepta o se rechaza una proposición determinada. La explicación busca comprensión de una proposición, mientras que la argumentación busca comunicar la fuerza de esta proposición.

Existen dos elementos fundamentales que determinan el nivel de aceptación o rechazo de un argumento, estos son: su pertinencia y su fuerza. Un argumento es pertinente si pertenece al mismo campo semántico de la tesis o conjetura que defiende. Dicho de otra forma, para que un argumento sea pertinente debe hacer referencia al mismo cuerpo de contenidos o campo del conocimiento en el que se enmarca la conjetura. Por otro lado, la fuerza de un argumento obedece a dos factores: su resistencia a objeciones, esto es que resista contraargumentos; y el valor epistémico que tenga para la persona a la cual se dirige, es decir, si lo considera válido, evidente o, por el contrario, absurdo o imposible (Goizueta, 2011).

Las matemáticas tienen una serie de características especiales que hacen que la producción de argumentos en esta área del conocimiento sea radicalmente diferente a la que se realiza en otros campos. En particular, cuando un argumento surge como parte de la solución de un problema en matemáticas, su fuerza depende de su adaptación a las condiciones del problema, más que de la aceptación por parte del receptor. En este caso se dice que la argumentación es heurística. Pero cuando el argumento surge de la necesidad de convencer a otra persona para que tome una decisión, su fuerza depende mayormente de la convicción de quien plantea el argumento. En este caso la argumentación se denomina retórica (Duval, 1999).

Luego de que una conjetura es explicada y, en el algún nivel, argumentada, se procede a demostrarla. De acuerdo con Balacheff (2000), la demostración es una forma de prueba muy común en el campo de las matemáticas, y consiste en una serie de enunciados que se organizan de acuerdo con unas reglas. Coincide en cierta medida con la concepción de Duval (1999), quien señala que la demostración es un tipo de prueba formal que se realiza en la última etapa de una actividad matemática.

En este punto se hace necesario diferenciar entre argumentación y demostración, términos que muchas veces usamos los docentes de matemáticas sin distinción alguna. Mientras que la argumentación nace del debate, de la discusión o de la oposición; la demostración tiene una estructura similar a la de una cadena de cálculos, que se efectúa aplicando unas reglas o propiedades preestablecidas. La demostración se basa en un cuerpo de contenidos pertenecientes a una teoría seleccionada, mientras que la argumentación permite recurrir a diferentes teorías no preestablecidas para la tarea (Goizueta, 2011).

Por su parte, Douek (citado por Goizueta, 2011) considera que "demostrar una conjetura requiere una intensa actividad argumentativa basada en "transformaciones" de la situación representada por la aserción" (p.15). Lo que hace pensar que, aunque se trate de actividades diferentes, la argumentación y la demostración se pueden considerar complementarias.

3.2. EL MODELO DE ARGUMENTACIÓN DE TOULMIN

Toulmin (1958) propone un modelo de argumentación mediante el cual es posible caracterizar cualquier tipo de argumento. Para este autor, el término *argumentación* tiene que ver con la actividad total de plantear afirmaciones, ponerlas en discusión y respaldarlas usando diferentes razones. Mientras que el término *razonamiento,* de un carácter más particular, tiene que ver con la actividad central de presentar razones a favor o en contra de una afirmación. Es decir, el razonamiento es un proceso que se realiza dentro de la argumentación.

Además, para Toulmin, un argumento puede ser entendido en dos sentidos. El primero es como un tramo de razonamiento, es decir, una secuencia de afirmaciones y razones encadenadas que pretenden transmitir la fuerza de la proposición a favor de la cual se está argumentando. Y la segunda es como un conjunto de interacciones humanas mediante las cuales se formulan, debaten o reforman dichos tramos de razonamiento(Atienza, 2005). A Toulmin le interesan especialmente los argumentos vistos desde la segunda concepción y estos son los que nos interesa analizar en la clase de matemáticas.

¿Qué elementos se deben tener en cuenta para realizar un argumento de acuerdo con el modelo propuesto por Toulmin (1958)? Para responder esta pregunta debemos considerar como marco las interacciones humanas en las que se desarrolla la argumentación según este autor. En lo que sigue expondremos uno de los ejemplos que propone Toulmin con el fin de distinguir los elementos de su modelo.

Supongamos que realizamos una afirmación como que “Harry es súbdito británico”; si alguien pone en duda dicha afirmación, debemos ser capaces de apoyarla, es decir, comprobar que está justificada. Para eso, se puede recurrir a hechos conocidos como que “Harry nació en Bermuda”. La afirmación realizada, también denominada *conclusión*, se denotará con C y los elementos justificatorios, que se toman como base para realizar dicha afirmación, llamados *datos*, se denotaran con D.

Si para la persona que nos cuestiona, los datos no son suficientes, sino que requiere que indiquemos qué tienen que ver los datos que hemos señalado con la conclusión establecida, lo que debemos establecer es un enunciado hipotético de carácter general que actúe como puente entre los datos y la conclusión. Normalmente estos enunciados están formulados de la forma Si D, entonces C. A las proposiciones de este tipo, Toulmin las denomina *garantías* y las denota con G.Retomando el ejemplo, saber que D: "Harry nació en Bermuda" nos permite afirmar que C: "Harry es súbdito británico" sobre la base que G: "Quién nace en Bermuda es súbdito británico".

Con estos tres elementos, se puede realizar un esquema básico para analizar argumentos. La relación entre los datos y la conclusión se puede indicar con una flecha, debajo de la cual se escribe la garantía.

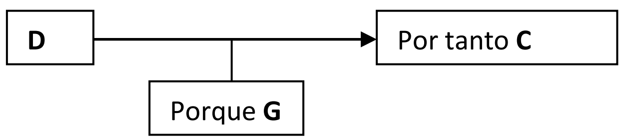


Figura 16. Esquema básico del modelo de Toulmin

Ajustando el ejemplo desarrollado a este esquema, se obtiene lo siguiente.

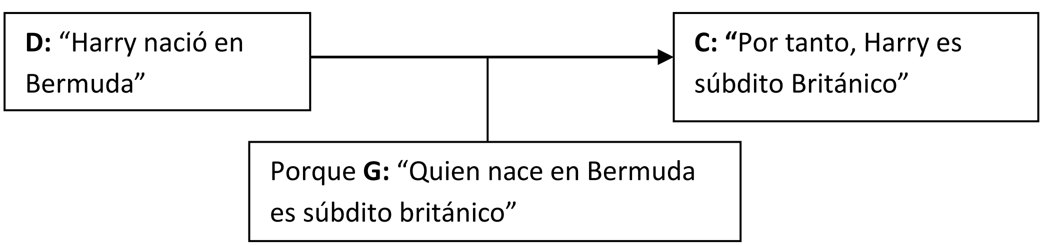


Figura 17. Ejemplo básico del modelo de Toulmin

Este esquema permite observar que en un argumento, la conclusión se realiza sobre la base de unos datos y que la garantía permite explicitar la validez del paso de los datos a la conclusión. Además, puede observarse que la garantía es general, ya que puede aplicarse a diferentes argumentos, mientras que los datos son más específicos.

Si se analiza el paso de los datos a la conclusión, se puede distinguir entre diferentes clases de garantías. Algunas de ellas permiten establecer una conclusión de manera indiscutible y otras solo de manera provisional. En el segundo caso, se hace necesario indicar las condiciones bajo las cuales hay excepciones a la garantía apelada. Para considerar estos aspectos es necesario complejizar el modelo, agregando dos elementos adicionales: los *calificativos o modalizadores* (M) y las *condiciones de excepción o refutación*(E). Los modalizadores, son términos como "probablemente" o "presumiblemente", que indican la fuerza que le da la garantía al argumento, mientras que las condiciones de refutación hacen referencia a circunstancias en las que la garantía pierde autoridad y en las que se puede rechazar la conclusión establecida.

Estos elementos se pueden agregar al esquema, el modalizador (M) se escribe a lado de la conclusión y las condiciones de refutación (E) debajo del modalizador.

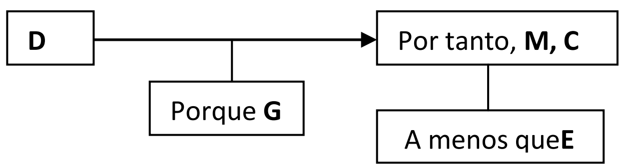


Figura 18. Modelo de Toulmin con modalizador y condiciones de refutación

Identifiquemos estos dos nuevos elementos en el ejemplo que se venía desarrollando. La conclusión de que Harry es súbdito británico, se defiende usando como dato la información de que nació en Bermuda y usando como garantía las leyes que regulan la nacionalidad británica. Sin embargo, puede suceder que los padres de Harry sean extranjeros o que se haya cambiado su nacionalidad después de nacer, bajo estas dos condiciones la garantía apelada no es aplicable. Por lo tanto, la conclusión se asume como "presumiblemente" correcta. Luego, el argumento se complementa como se muestra a continuación:

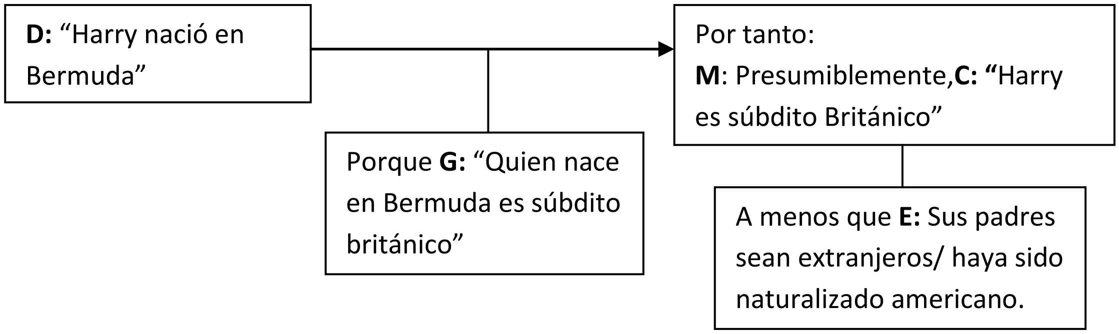


Figura 19. Ejemplo con modalizador y condiciones de refutación

Finalmente, Toulmin(1958) complementa su modelo con un elemento denominado *respaldo*(R), el cuál le da autoridad y vigencia a las garantías usadas. Cuando en un argumento se han explicitado sus datos, la garantía, losmodalizadores y las condiciones de refutación y, sin embargo, la persona que pone en duda el argumento no está convencida del mismo porque requiere que la garantía sea válida en cualquier caso, entonces, se debe especificar el respaldo del argumento. Dentro del esquema este elemento se ubica debajo de la garantía.

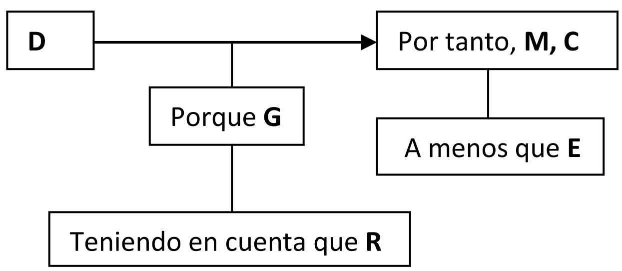


Figura 20. Modelo de Toulmin completo

Mientras la garantía es un enunciado hipotético que sirve de puente entre los datos y la conclusión, el respaldo es un enunciado categórico sobre hechos en los que se basa la garantía. En el caso del ejemplo en desarrollo, la garantía G: "Quién nace en Bermuda es súbdito británico" se respalda en diferentes decretos y provisiones legales que rigen la nacionalidad de las personas nacidas en colonias británicas. El esquema final del argumento es el siguiente:

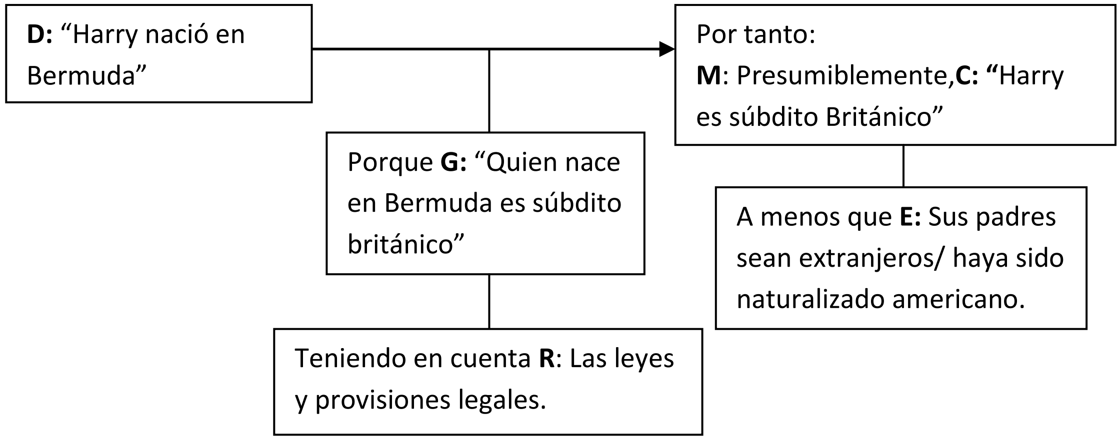


Figura 21. Ejemplo del modelo de Toulmin completo

Cabe señalar que al desarrollar un argumento no es necesario especificar el respaldo, de hecho, este elemento es en la mayoría de ocasiones implícito.

Realizando un desarrollo similar se puede plantear el siguiente ejemplo de argumento en matemáticas, ajustado al modelo de Toulmin (1958).

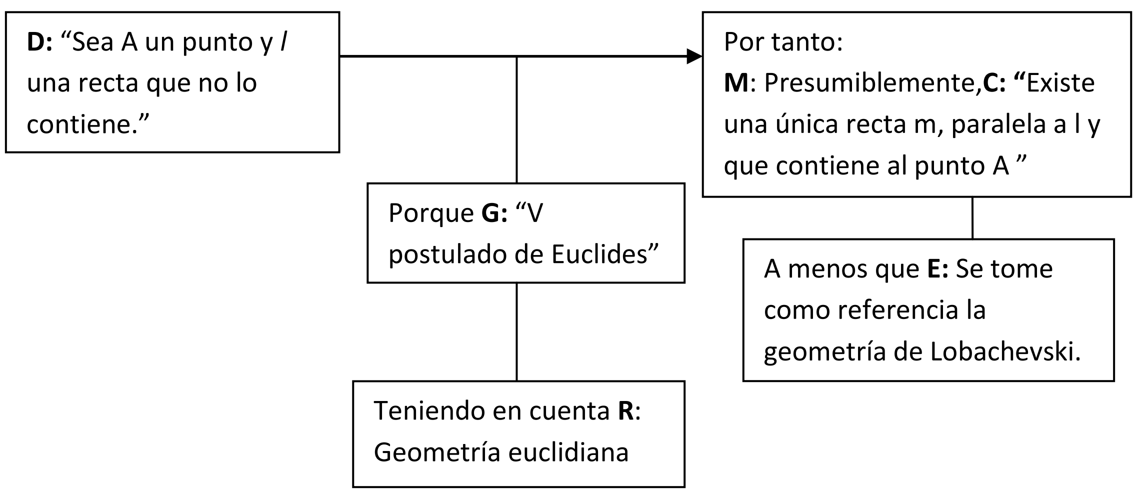


Figura 22. Ejemplo de argumento en matemáticas ajustado al modelo de Toulmin

En la actualidad, son muchos los trabajos desarrollados alrededor de la argumentación en el campo de la educación matemática, que usan como marco de referencia el modelo de Toulmin. Nos interesa destacar el realizado por Conner (2012), el cual se detalla en el marco de antecedentes.

3.3. EL PENSAMIENTO VARIACIONAL

Inicialmente, el álgebra se entiende como una generalización de los procesos numéricos y de cuantificación, así mismo, es un sistema en que se plantean ecuaciones, igualdades, funciones y modelos para representar situaciones de cuantificación o para representar fenómenos de variación y cambio, es por ello que se debe trabajar en el uso comprensible de la variable, la formulación y manipulación de igualdades, las formas de representación de una función, estrategias de resolución de problemas, análisis de relaciones de variación y contextualización de relaciones de dependencia entre variables, todo lo anterior enmarcado en el desarrollo del pensamiento variacional (MEN, 1998).

De acuerdo con el MEN (1998), trabajar en el desarrollo del pensamiento variacional supone no permitir la fragmentación del conocimiento matemático, favorecer la integración y estructuración de una metodología que a través de la aplicación de conceptos y procedimientos permita analizar, organizar y modelar situaciones propias de la matemática, las ciencias y la vida cotidiana, donde la variación sirva como sustento de las conclusiones obtenidas.

El desarrollo del pensamiento variacional puede empezarse pronto en el currículo de matemáticas, utilizando situaciones problema de variación y de cambio referidos a contextos cotidianos, donde la organización de la variación en tablas, la aproximación, el uso de ecuaciones, las operaciones aritméticas y el uso de la calculadora hacen que se vaya generando progresos en el estudio de la variación. Además, es importante exponer a los estudiantes a situaciones donde deban completar tablas como forma de representar una función, donde se empiece a generar la idea de variación numérica continua, también donde se puedan observar patrones y regularidades, que lleven al estudiante a construir formulas y ecuaciones (MEN, 1998).

La observación de dos fotografías similares sirve para identificar patrones entre las imágenes. Del mismo modo, en escenarios numéricos y geométricos se identifican relaciones de índole aditivo y multiplicativo. También, el empleo de tablas puede llevar de forma natural al uso del plano cartesiano para representar la situación tratada y con ello ayudar a hacer visible las relaciones de dependencia entre las variables.

Finalmente, aparece la noción de función como una herramienta que enlaza dos conjuntos que cambian, de manera que sirve para hacer predicciones y controlar el cambio, donde los modelos más simples encierran relaciones de variación como la proporcionalidad. También, se requiere el trabajo con funciones que no contengan regularidades y por tanto, no tengan representación en una ecuación y aun así garantizar su existencia, dar a conocer los modelos de función más común, sus características como dominio, rango, crecimiento y decrecimiento, y con ello adoptar el uso de calculadoras graficadoras u otros dispositivos como computadores y tabletas, que hacen más dinámico y práctico el proceso de enseñanza y aprendizaje de este concepto.

4. MARCO DE ANTECEDENTES

El desarrollo del presente trabajo de grado contempló la revisión de diferentes tesis y artículos relacionados con los intereses investigativos de nuestro estudio. Al respecto, se encontraron varios antecedentes entre los cuáles nos interesa destacar cuatro. El primero tiene que ver con el análisis de libros de texto de secundaría en lo referente al desarrollo del concepto de puntos críticos de una función; el segundo y el tercero están relacionados con la comprensión del concepto de derivada usando como mediador el software GeoGebra; y el cuarto y último,hace referencia al modelo de Toulmin como herramienta para caracterizar los argumentos que surgen en la clase de matemáticas.

4.1. Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX (Gonzales, M. & Sierra, M., 2004).

González & Sierra (2004) abordan el tema de la eficiencia de los libros de texto en el estudio de los procesos de enseñanza de la matemática. En su artículo exponen un instrumento para el análisis de dichos libros haciendo énfasis en la evolución de los conceptos relativos, los puntos críticos en los libros de texto publicados en España a lo largo del siglo XX partiendo de los inicios de la enseñanza del análisis matemático, la introducción de la matemática moderna, el desarrollo del plan de estudios del bachillerato unificado y polivalente (BUP), hasta la enseñanza de las matemáticas bajo las orientaciones de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE).

Los investigadores concluyen que el libro de texto se utiliza como material de apoyo en la enseñanza y que durante el proceso de aprendizaje debe estar acompañado de otros textos, material audiovisual, material real y otros que permitan una mejor apropiación del conocimiento. El análisis permitió mostrar que con relación a la derivada se ha dado significado a las ideas, para mayor comprensión del tema mostrando otras formas de presentar los contenidos, como cuando se dice el máximo es el mayor valor de la función, reglas como la derivada ha de ser cero, gráficas que muestran curvas, líneas tangentes horizontales, puntos máximos y mínimos, en relación con los problemas de puntos críticos han aumentado en cantidad y en su forma donde solo se busca su resultado.

4.2. Comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrica sobre la base del modelo de Pirie y Kieren (Londoño, D., Villa, D. & Morales, S., 2013).

En el trabajo de grado "*Comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrica sobre la base del modelo de Pirie y Kieren*" se desarrolla un esfuerzo por mejorar la comprensión del concepto de derivada desde sus principales representaciones semióticas en un grupo de cuatro estudiantes seleccionados de un curso cálculo diferencial, ofrecido para el segundo semestre de carreras de ingeniería en la Universidad de Medellín; y otros del grado Undécimo A de la Institución Educativa Presbítero Antonio José Bernal Londoño, con los que se inició una prueba diagnóstica que propone la realización de un mapa conceptual que exige relacionar los conceptos e ideas que los jóvenes tienen acerca de la recta tangente a la gráfica de una función, luego, de acuerdo a los resultados de esta prueba se diseñaron tres actividades para mejorar la comprensión del concepto de derivada desde el punto de vista gráfico, utilizando como referente teórico el modelo de Pirie y Kieren, donde se proponen ocho niveles para la comprensión de un concepto matemático, como son el conocimiento primitivo, la construcción de la imagen, comprensión de la imagen, captación de la propiedad, formalización, observación, estructuración e invención. Pero el objetivo del trabajo consiste en superar los tres primeros niveles (Londoño y et. al., 2013).

En ese sentido, se utilizó el software GeoGebra como una herramienta que facilita la representación de funciones en un plano cartesiano, donde rectas secantes y tangentes a las gráficas de una función son dinámicas y las actividades orientadas en el análisis de relaciones entre estos elementos ayudaron a superar las dificultades de comprensión que se identificaron en la prueba diagnóstica.

El aporte de este trabajo es el diseño progresivo de actividades que desde el punto de vista geométrico ayuda a superar las dificultades de comprensión del concepto de derivada, con lo cual hay un ejemplo para desarrollar actividades alrededor de este tema. También, clasificar las actividades dentro de los tres primeros niveles propuestos por el modelo para la comprensión de conceptos matemáticos de Pirie y Kieren, hizo que estas actividades tuvieran grados progresivos de dificultad y esto ayudó a alcanzar los objetivos del trabajo de grado.

4.3. La comprensión del concepto de derivada en el marco de la "Enseñanza para la comprensión" (Rendón, C., Ruiz, K., & Córdoba, Y., 2014)

En el trabajo de grado *La comprensión del concepto de Derivada en el marco de la "Enseñanza para la Comprensión"* se desarrolla una propuesta de metodológica y de actividades de exploración de applets, que buscan facilitar la comprensión del concepto de derivada en estudiantes de primer año de universidad, mediante el uso del software GeoGebra que por su carácter dinámico y de movimiento permitió la implementación de actividades donde se toma como metodología la enseñanza para la compresión, que cuenta con cinco niveles que son ingenua, de principiante, de aprendiz y de maestría. Además, en el desarrollo de las actividades propuestas se utiliza la entrevista de carácter socrático como herramienta metodológica y secuencial con la que se plantean preguntas a medida que los estudiantes desarrollan las actividades en GeoGebra, con ello facilitar el análisis en los avances de la comprensión del concepto de derivada por parte de los estudiantes, en concordancia, con el estudio de casos implementado en este trabajo, debido a que es un trabajo de corta duración, limitado en recursos y de particular aplicación (Rendón et. al., 2014).

En el estudio de casos se seleccionaron 3 estudiantes que tuvieran facilidad de comunicación, utilizando tres fuentes de recolección de información, que son la entrevista semiestructura, observaciones y módulo de trabajo. En la entrevista con los estudiantes se aplicaban preguntas que fueran desde básico e iban aumentando en nivel de complejidad, además se tenía cierta flexibilidad y actitud de escucha por parte del entrevistador para ir orientando las preguntas dependiendo lo que dijera el entrevistado, lo que se busco es una conversación formal, con una intencionalidad, planteada desde los objetivos de la investigación.

Este trabajo nos muestra como la manipulación planificada de applets, junto con el diseño de actividades con algunas preguntas orientadoras, ayuda en el proceso de comprensión de conceptos como tasa de variación media y derivada, es un ejemplo para el desarrollo de nuestro trabajo de grado.

4.4. Garantías como indicadores de patrones de razonamiento en clases de matemáticas de secundaria (Conner, A., 2012).

Diversos trabajos desarrollados en el campo de la educación han estudiado los argumentos que se construyen en la clase de matemáticas. En esta línea nos interesa mencionar el trabajo deConner (2012), quien plantea que las matemáticas escolares deben permitir a los estudiantes hacer matemáticas y que en este proceso es importante analizar los tipos de razonamientos que se presentan. Para esta autora, la argumentación colectiva es un lente que permite realizar dicho análisis y tiene lugar cuando los estudiantes y el profesor trabajan juntos para establecer o rechazar afirmaciones matemáticas.

En el marco de un proyecto de investigación, Conner analiza los argumentos construidos en dos clases diferentes de geometría: la clase de noveno grado, orientada por la profesora Bridgett y la clase de décimo grado, orientada por la profesora Kylee. Para desarrollar esta investigación, se grabaron en video las clases de estas profesoras durante 9 semanas, se realizó la transcripción de cada una de las clases y se recolectaron las hojas de trabajo de los estudiantes y las notas de campo de los las docentes.

A partir de la información recolectada, Conner usa el modelo de Toulmin (1958) para estudiar la argumentación colectiva, identificando cuáles elementos de los argumentos construidos son aportados por el docente, cuáles por los estudiantes y cuáles por los dos. Además, esta autora incluye el concepto de subargumentopara referirse a los argumentos que se enlazan para formar el argumento completo. Usando estas ideas y a través del uso de convenciones, se obtienen argumentos como el que se muestra en la siguiente figura, que corresponde a la clase de la profesora Bridgett.

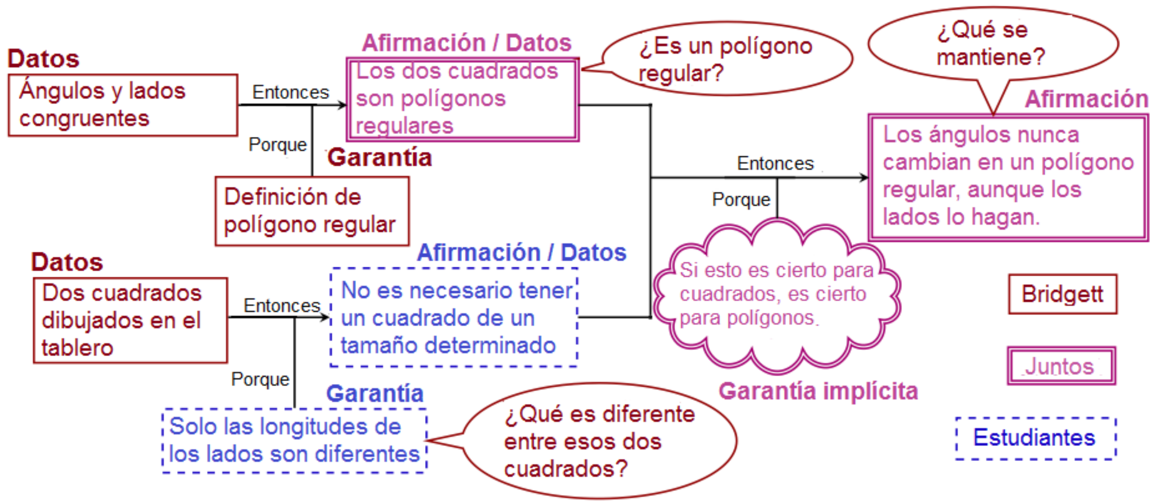


Figura 23. Ejemplo de argumento de la clase de la profesora Bridgett

Con base en caracterizaciones como la anterior, Connerencuentra que en los argumentos producidos se presentan 29 clases diferentes de garantías, entre las cuales hace énfasis las siguientes: la apariencia de un diagrama, la observación de un patrón, la declaración o interpretación de un teorema y los cálculos matemáticos. En relación con los datos, estos los clasifica en 10 categorías principales: el conocimiento matemático, la verificación, la autoridad de una validación externa, la interpretación, los patrones, el método, los cálculos, lo visual, los conocimientos matemáticos informales y la información dada. Además se concluye que en la clase de Bridgett, la mayor parte de las garantías explicitas fueron dadas por los estudiantes o por la profesora y los estudiantes juntos. Por el contrario, en la clase de la profesora Kylee, ella misma contribuyó con más de la mitad de las garantías explicitas, dejando de lado a los alumnos en la justificación de los argumentos.

Consideramos importante este trabajo porque nos proporciona un ejemplo de cómo el modelo de Toulmin se puede usar para caracterizar, no solo los argumentos de los estudiantes, sino los aportes que el docente realiza a dichos argumentos y cómo él influye en la construcción de los mismos. Además, proporciona una clasificación de las garantías y los datos que se pueden presentar en los argumentos que se construyen en la clase de matemáticas. Clasificación que, como se observa, se basa en diferentes aspectos de las matemáticas, de los objetos matemáticos y de sus representaciones.

5. ANÁLISIS

En este capítulo se presenta el análisis de las conjeturas y los argumentos desarrollados por los estudiantes y los docentes en todas las discusiones generadas a partir de las tres actividades propuestas. Los análisis están divididos por actividad y en cada uno se identifican las diferentes conjeturas construidas y los argumentos elaborados con sus elementos, de acuerdo con el esquema básico del modelo de Toulmin. Los datos se denotan con D, la conclusión con C y la garantía con G. En algunos casos se indica la existencia de explicaciones, en lugar de argumentos.

5.1. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD 1

Para realizar el análisis de esta actividad, consideremos algunos momentos claves de la clase en los que se desarrolla conjeturación y argumentación.

Momento 1: la discusión que se desarrolla en el video *Actividad1_video4.* Los estudiantes se encontraban contestando la siguiente pregunta:

b. Señala en la tabla las coordenadas del punto A para las cuales la pendiente m es positiva. Describe la forma que tiene la trayectoria del punto A cuando la pendiente m es positiva.

Después de discutir acerca de la misma, resuelven dar una respuesta.

> **Estudiante 5:** *Escribamos entre paréntesis este y este [señala las coordenadas del punto A]… es la trayectoria… y son positivos [señala m].*
>
> **Estudiante 3:***Ah bueno… hagámosle.*
>
> *[Los estudiantes empiezan a anotar coordenadas de puntos en los que m es positivo, en este momento se acerca una de las docentes]*

A continuación se observa que esa respuesta se modifica por la intervención de la docente.

P2: *¿Cómo van? ¿Tienen alguna duda?*

Estudiante 3: *Si señora. Acá nos están diciendo que…*

Estudiante 5: *Pues hay que señalar las coordenadas del punto A, donde la pendiente sea positiva.*

Estudiante 3: *Pues nosotros escribimos esto [señala las coordenadas] ¿Si es así?*

P2*:* *Entonces miremos en la… miremos digamos aquí en la construcción de GeoGebra, en qué puntos la pendiente es positiva. Por ejemplo, mueve el punto A.*

[Los estudiantes comienzan a manipular el Applet]

P2:*Por ejemplo, ¿ahí como es la pendiente? En este momento.*

Estudiante 3:*La pendiente ahí es negativa.*

P2:*Listo. Entonces tratemos de buscar puntos donde es positiva.*

[Uno de los estudiantes manipula el Applet y ubica el punto A donde la pendiente m es positiva]

P2:*Trata de dar una característica que tenga la trayectoria de A, o sea la verde, cuando la pendiente es positiva. ¿Cómo es esa trayectoria?*

Los estudiantes reconsideran la respuesta que dieron inicialmente y vuelven a analizar la situación desde el Applet.

Estudiante 5: *Aquí comienza lo positivo [ubica el punto A usando el Applet]… es así [señala con el esfero la inclinación de la curva en ese momento].*

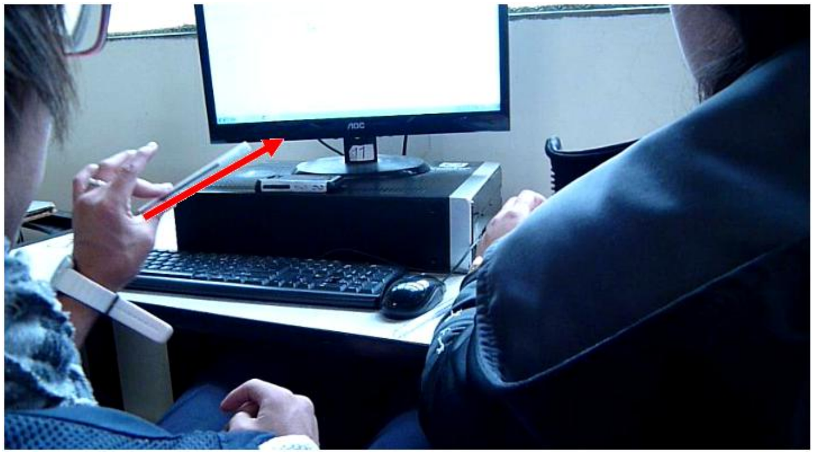


Figura 24. Estudiantes resolviendo las preguntas de la actividad 1

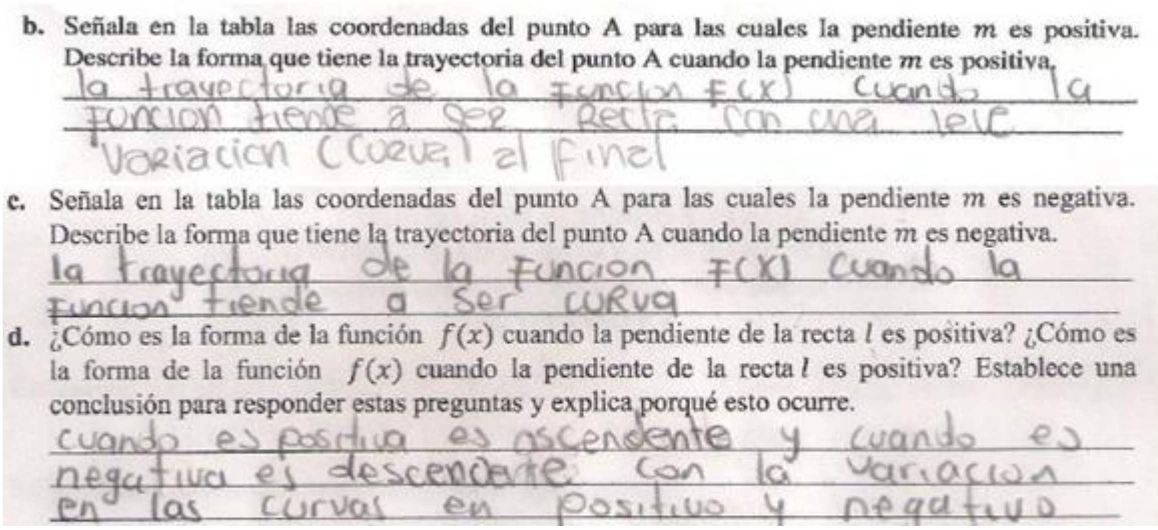
[Los estudiantes usan las manos para tratar de interpretar la forma de la curva]

Figura 25. Estudiantes discutiendo las preguntas de la actividad 1

Estudiante 5: *Pues lo que parece es que la curva vaya ascendiendo para que… el valor de* m *sea positivo.*

[Los estudiantes vuelven a mover el punto A en el Applet para revisar esta idea sea correcta]

Luego de esta discusión, estos dos estudiantes redactan las siguientes respuestas:


b. Señala en la tabla las coordenadas del punto A para las cuales la pendiente m es positiva. Describe la forma que tiene la trayectoria del punto A cuando la pendiente m es positiva.

la trayectoria de la funcion F(x) cuando la funcion tiende a ser Recta con una leve Variacion (Curva) al Final

c. Señala en la tabla las coordenadas del punto A para las cuales la pendiente m es negativa. Describe la forma que tiene la trayectoria del punto A cuando la pendiente m es negativa.

la trayectoria de la Funcion F(x) cuando la Funcion tiende a ser curva

d. ¿Cómo es la forma de la función $f(x)$ cuando la pendiente de la recta l es positiva? ¿Cómo es la forma de la función $f(x)$ cuando la pendiente de la recta l es positiva? Establece una conclusión para responder estas preguntas y explica porqué esto ocurre.

cuando es positiva es ascendente y cuando es negativa es descendente con la variacion en las curvas en positivo y negativo

Figura 26. Respuestas de los estudiantes del video Actividad1_video4

Por lo tanto, vemos que inicialmentelo que ellos planteaban era escribir las coordenadas del punto A en las cuáles la pendiente m de la recta tangente es positiva. Esto constituye una *explicación*, ya que lo que se realiza es una descripción de los puntos que cumplen la condición pedida y los estudiantes no buscan persuadir o convencer al otro.

Cuando el profesor interviene, los estudiantes replantean su respuesta. Al ver la forma que tiene la curva en los puntos donde la pendiente es positiva, ellos plantean una idea que se puede reescribir así:

Conjetura 1: Si la curva es ascendente entonces el valor de *m* es positivo

Consideramos que esta idea es una conjetura, ya que implícitamente tiene la forma si-entonces. Además, podemos caracterizar el *argumento* desarrollado por los estudiantes así:

D: Puntos de la función donde la pendiente de la tangente es positiva.

Coordenadas de A		Pendiente de l
x	y	
−2	0,25	1,1
−1,8	0,4	0,43
−1	0,05	−1,3
−0,5	−0,8	−1,6
−0,01	−1,54	−1,31
0,5	−2	−0,4
1,03	−1,82	1,2
1,53	−0,71	3,33
2,2	2,75	7,15

Los puntos seleccionados están en una parte de la curva que es "ascendente".

C: Si la curva es ascendente entonces el valor de *m* es positivo

G: El applet

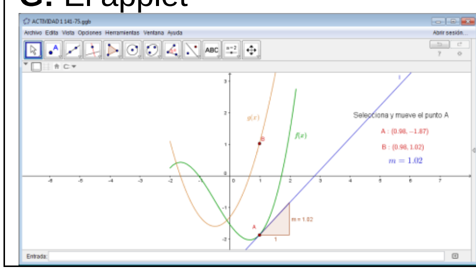


Figura 27. Diagrama de Toulmin respecto al signo de la pendiente cuando la curva es ascendente

Momento 2: el análisis que realiza una de las estudiantes en el video*Actividad1_video5.* En este video, la estudiante 2 analiza los cambios que presenta el triángulo en relación con el movimiento del punto A y el valor de la pendiente *m.*

> **Estudiante 2:** *Entonces aquí como podemos ver, la pendiente* m *está positiva y lo que cambia es que el triángulo siempre va hacia abajo y cada vez baje su… cada vez que vamos bajando, entonces ya ahí llega a ser negativo y el triángulo cambia su forma.*

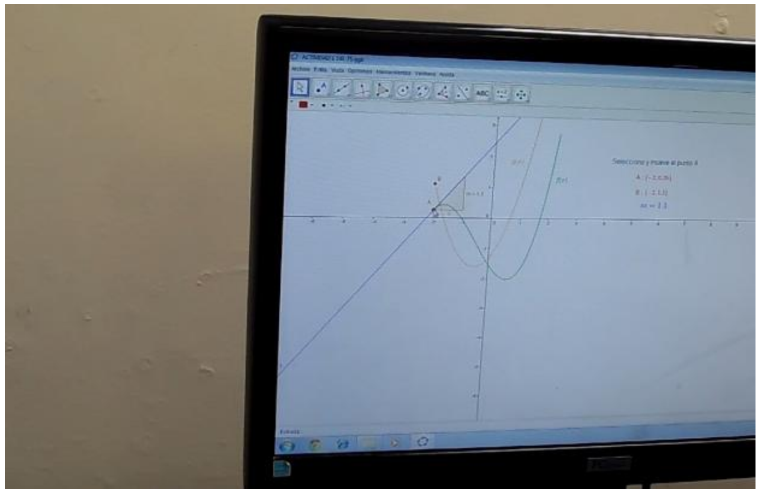


Figura 28. Estudiantes señalando cuando el triángulo está hacia abajo en la actividad 1

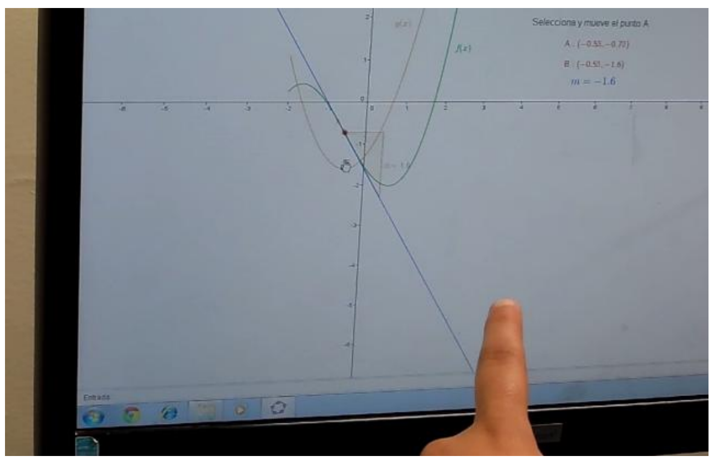


Figura 29. Estudiantes señalando cuando el triángulo está hacia arriba en la actividad 1

La afirmación que realiza la estudiante es una *conjetura* que se puede expresar de la siguiente forma:

Conjetura 2: Si la pendiente cambia de signo, entonces el triángulo cambia de sentido.

La estudiante no trata de justificar su planteamiento, por lo tanto en este momento no hay un argumento. A diferencia del momento anterior, en el que los alumnos verificaron de manera inmediata su conjetura en el Applet.

Momento 3: el profesor realiza todo el recorrido del punto A sobre el Applet, caracterizando el signo de la pendiente en cada caso. De esta manera, resume lo que han encontrado los estudiantes hasta ese momento. Esto se muestra en el video *Actividad1_video5.*

P: *Atención. Miren, si ustedes se dieron cuenta con la experiencia que … con la experiencia que ya hicieron con la tabla, se dieron cuenta que ustedes a medida de que mueven el punto A, miren, miren ahí donde empieza la pendiente, todos van a observar el valor de m. Aquí m es positivo, ¿cierto? mEs positivo. Y si usted sube un poquito, va mirando despacio…Mire ahí la pendiente sigue siendo positiva.*

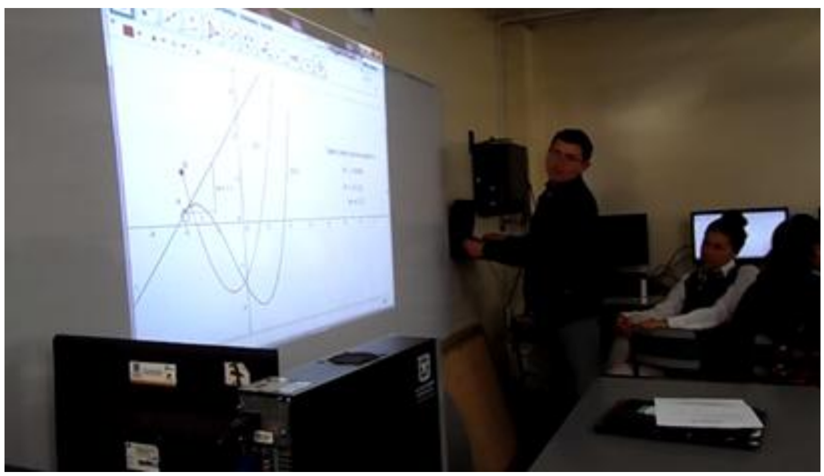


Figura 30. Profesor describiendo la trayectoria del punto A de la actividad 1

Estudiante 2: Pero va disminuyendo.

P:*Positiva, pero va disminuyendo, muy bien como usted lo dice. Aquí ya casi, es cero [El profesor continua deslizando el punto A de izquierda a derecha]. 0,13, sigue, ahí ya pasa a ser negativa. Todo este pedazo la pendiente es…*

Estudiantes:*Negativa.*

P:*Sigue avanzando y la pendiente sigue siendo negativa. Luego, llego acá a la parte de abajo. Es negativa, pero ya casi es cero porque es -0,4. Aquí -*

0,15, ya casi es cero. Y observen lo que pasa con el triángulo. ¿Qué pasa con el triángulo?

Estudiante 2: *Que se empequeña.*

P: *Que queda muy pequeñito el triángulo. Luego, sigue subiendo…*

Estudiante 7: *Y ya es positivo.*

P: *Y acá el triángulo, ¿si ven que cambio de sentido? Miren, un paso antes el triángulo estaba hacia abajo, ¿cierto? y acá quedo hacia arriba. Pero sigue siendo el triángulo muy pequeño. Acá el triángulo se va agrandando y la pendiente es…*

Estudiante 2: *Positiva.*

Vemos que en esta parte, el profesor está realizando una descripción de lo que se observa en el Applet cuando se mueve el punto A. Como, además, los estudiantes ya habían encontrado estas características, esto no es algo nuevo para ellos. Por lo tanto la caracterización realizada por el docente es una *explicación*. Más adelante la discusión continúa así:

P: *Positiva. Entonces la pregunta en sí es, ¿qué forma tiene la gráfica de la función cuando la pendiente es positiva?*

Estudiante 2: *Que el triángulo queda hacia arriba.*

P: *El triángulo queda hacia arriba, muy bien, pero esta pregunta se refiere es a qué forma tiene este pedacito de la gráfica de la función o acá este pedacito cuando la pendiente es positiva [el profesor señala las dos partes de la gráfica de la función $f(x)$ en los que la pendiente es positiva].*

Estudiante 1: *La curva va hacia abajo.*

[Los estudiantes hablan todos al mismo tiempo, el profesor les asigna la palabra]

P*:* *Esperen un momentico, yo los dejo hablar de a uno. ¿Qué dice usted? Solamente hable usted y ahorita la dejo hablar a ella.*

Estudiante 8: *Que, pues cuando la pendiente es negativa, el triángulo queda hacia abajo. Y cuando la pendiente es positiva, el triángulo queda hacia arriba.*

P: *El triángulo queda hacia arriba, ¿Y qué pasa con esta línea? [Señala la función verde]*

[Los estudiantes hablan al tiempo de nuevo]

P: *Hable usted ahora.*

Estudiante 3: *La variación de la función verde… la variación de positivo y negativo se encuentra en la función verde en el lado de las curvas. El positivo está siempre al lado de las curvas. El negativo está siempre casi en lo recto.*

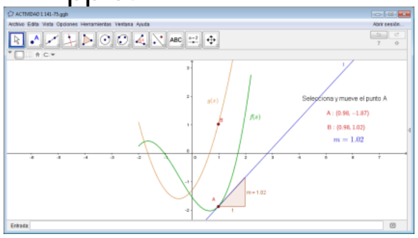
En esta parte, se observa que los estudiantes realizan *conjeturas* relacionadas con el triángulo y el valor de la pendiente.

Conjetura 3: cuando la pendiente es negativa, el triángulo queda hacia abajo. Y cuando la pendiente es positiva, el triángulo queda hacia arriba.

Conjetura 4: La pendiente varía de positivo a negativo en las curvas.

En los dos casos, estas conjeturas construidas por los alumnos, surgen de la observación del Applet y se basan en la descripción que realizó previamente el docente. Consideramos que las dos son conclusiones de los argumentos que se caracterizan a continuación, en donde se observa que el docente proporciona la garantía y el Applet los datos:

D: Applet

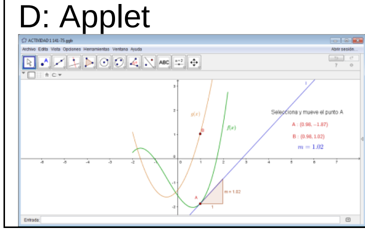


C: cuando la pendiente es negativa, el triángulo queda hacia abajo. Y cuando la pendiente es positiva, el triángulo queda hacia arriba.

G: Descripción realizada por el docente:
"Y acá el triángulo, ¿si ven que cambió de sentido? Miren, un paso antes el triángulo estaba hacia abajo, ¿cierto? y acá quedo hacia arriba. Pero sigue siendo el triángulo muy pequeño. Acá el triángulo se va agrandando y la pendiente es…"

Figura 31. Argumento organizado de acuerdo al modelo de Toulmin, respecto al signo de la pendiente

D: Applet



C: La pendiente varía de positivo a negativo en las curvas

G: Descripción realizada por el docente:
"Positiva, pero va disminuyendo, muy bien como usted lo dice. Aquí ya casi, es cero [El profesor continua deslizando el punto A de izquierda a derecha]. 0,13, sigue, ahí ya pasa a ser negativa"

Figura 32. Argumento organizado de acuerdo al modelo de Toulmin, respecto al cambio signo en el valor de la pendiente en las curvas que describen la función

Momento 4: Analicemos la discusión que se presenta en el video *Actividad1_video7.* En este, el profesor tiene la siguiente conversación con una alumna:

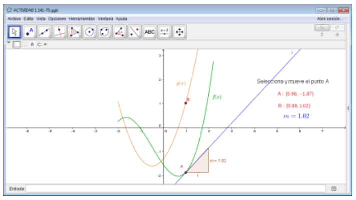
> **P:** *Bueno digamos que usted va de izquierda a derecha. Si usted arranca de aquí [señala el punto de inicio de la curva en la parte izquierda] y sigue así [señala la trayectoria hacia la derecha]. Si va de izquierda a derecha. ¿Cómo diría que va? ¿Hacia a donde?*
>
> **Estudiante 7:** *Todo lo que va subiendo.*
>
> **P:** *¿Todo lo que va subiendo la pendiente es?*
>
> **Estudiante 7:** *Positiva.*
>
> **P:** *Y si…*
>
> **Estudiante 7:** *Si va bajando, es negativa.*
>
> **…**
>
> **Estudiante 7:** *¿Puedo poner esto?...La diferencia que encontramos es que, si va de izquierda a derecha, cuando va subiendo tiene signo positivo y cuando va bajando cambia para el signo negativo.*
>
> **P:** *Si. Eso es lo que debe colocar. Muy bien.*

De nuevo se observa que las preguntas del docente y las descripciones que él realiza sobre el Applet permiten construir la siguiente conjetura:

Conjetura 5: Si el punto A va subiendo, de izquierda a derecha, la pendiente tiene signo positivo y cuando A va bajando, la pendiente cambia para el signo negativo.

Esta conjetura se puede obtener como conclusión del siguiente argumento, en el cual la garantía son las preguntas del docente, junto con las respuestas que daba el estudiante, ya que con base en esto se elaboraba la conjetura.

D: Applet



C: Si el punto A va subiendo, de izquierda a derecha, la pendiente tiene signo positivo y cuando A va bajando, la pendiente cambia para el signo negativo

G: Discusión del docente y el estudiante:

P: Bueno digamos que usted va de izquierda a derecha. Si usted arranca de aquí y sigue así. Si va de izquierda a derecha. ¿Cómo diría que va? ¿Hacia a donde?

Estudiante 7: Todo lo que va subiendo.
Estudiante 7: Si va bajando, es negativa.

Figura 33. Argumento organizado de acuerdo al modelo de Toulmin, respecto al signo en el valor de la pendiente

Momento 5: En el video *Actividad1_video8* una de las estudiantes señala que aunque el triángulo tiene una forma determinada cuando la pendiente es positiva, si hay partes donde el triángulo en más grande o más pequeño. El profesor le explica porque ocurre esto.

Estudiante 2: *Pero hay otra cosa que pasa profe.*

P: *Dígame.*

Estudiante 2*:* *Que cuando está en este lado, el triángulo ya no es grande sino pequeño.*

P: *Si.*

Estudiante 2: *Y que al ser positivo en el otro lado ya es mucho más grande [se refiere a las dos partes donde la pendiente es positiva]*

P: *Ya es mucho más grande*

Estudiante 8: *Eso es lo que decimos, es mayor la pendiente*.

P: *Es mayor la pendiente.*

Estudiante 2: *Pero, ¿por qué no pasa lo mismo aquí, si en juntos lados es positiva?*

P: *Porque será…*

Estudiante 8: *Porque la curva es más pequeñita. La curva es más pequeñita. Por eso es más grande la pendiente de este lado que la de este lado.*

Estudiante 2: *Ah por la curva.*

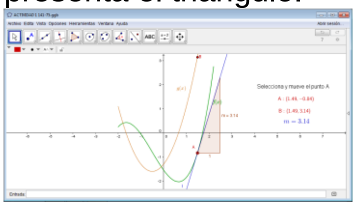
P*: Por la curva, porque es que esta curva está así, como más agachadita. En cambio acá ya está casi vertical. Entonces es por eso que varía el valor de la pendiente.*

[El profesor muestra con las manos que la inclinación en una de las partes donde la pendiente es positiva es menor que en la otra]

Figura 34. Profesor mostrando la inclinación de la curva en una parte en la actividad 1

En esta parte vemos que la estudiante 2, saca una conclusión a partir del Applet y que el profesor y la estudiante 8 le proporcionan garantías para justificar dicha conclusión. El argumento colectivo construido se puede caracterizar como se muestra en el siguiente esquema:

D: Applet, fijándose en los cambios que presenta el triángulo.



C:
Estudiante 2:
El triángulo es pequeño en una parte donde la pendiente es positiva y grande en otra donde la pendiente también es positiva.

G:
Estudiante 8: Hay partes donde la pendiente es mucho más grande.

P: La inclinación de la curva varia, aunque sea positiva la pendiente en las dos partes.

Figura 35. Argumento organizado de acuerdo al modelo de Toulmin, respecto al tamaño del triángulo cuando el valor de la pendiente es positivo

Momento 6: En el video *Actividad1_video9*, una de las estudiantes trata de explicar cómo es la forma de la curva donde la pendiente de la tangente es igual a cero.

> **Estudiante 7:** *Pues llega… Se desaparece pues llega un punto en que está intermedio entre lo positivo y lo negativo.*
>
> **P2:** *Okey, esa podría ser una respuesta. ¿Listo?*

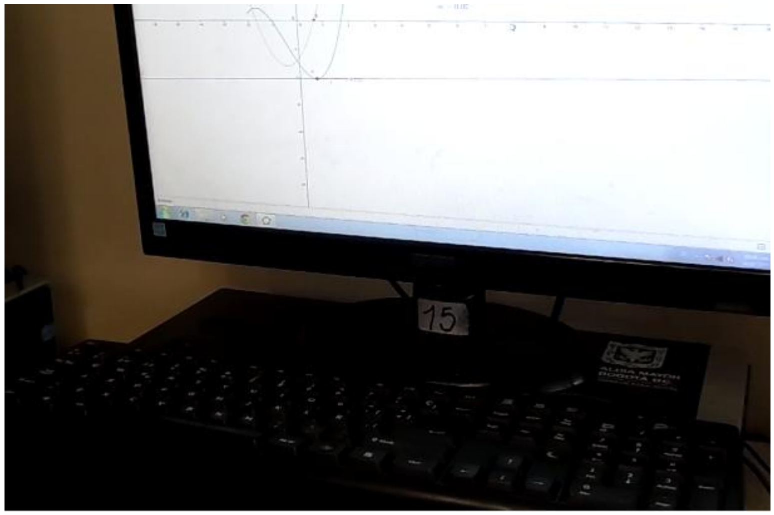


Figura 36. Applet donde una estudiante indica donde la pendiente es cero en la actividad 1

Estudiante 7: *Y así con cada uno. Por ejemplo, acá puede haber otro punto [señala otro punto de la gráfica donde ella cree que la pendiente de la tangente será cero].*

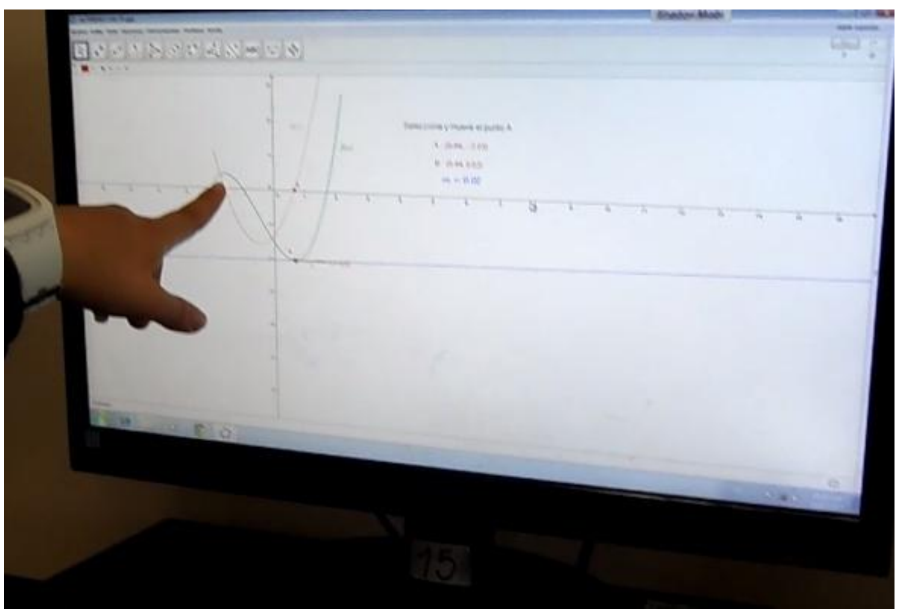


Figura 37. Applet donde una estudiante indica otros puntos donde la pendiente es cero en la actividad 1

P2: *Tú dirías que ahí hay otro.*

La estudiante 7 ha desarrollado una conjetura que podemos reescribir así:

Conjetura 6: La pendiente es cero en las partes donde pasa de ser negativa a positiva.

Aunque no lo hace de manera explícita, consideramos que la estudiante también asocia esta conjetura a una representación gráfica. Es decir, ella comprende que la pendiente es cero en las partes en las que la curva tiene máximos o mínimos. Pues en un determinado momento, se desprende del análisis del cambio de signo y señala directamente la parte donde ella cree que la pendiente es cero en la gráfica.

Momento 7: En el video *Actividad1_video10* el profesor trata de socializar las respuestas de los estudiantes. En este momento se presentan varias conjeturas.

> **P:**¿*Qué observaron de común entre estos tres valores?... Entre estos tres valores, ¿qué observaron de común? [Señalando las coordenadas de A y B, y el valor de la pendiente m]*

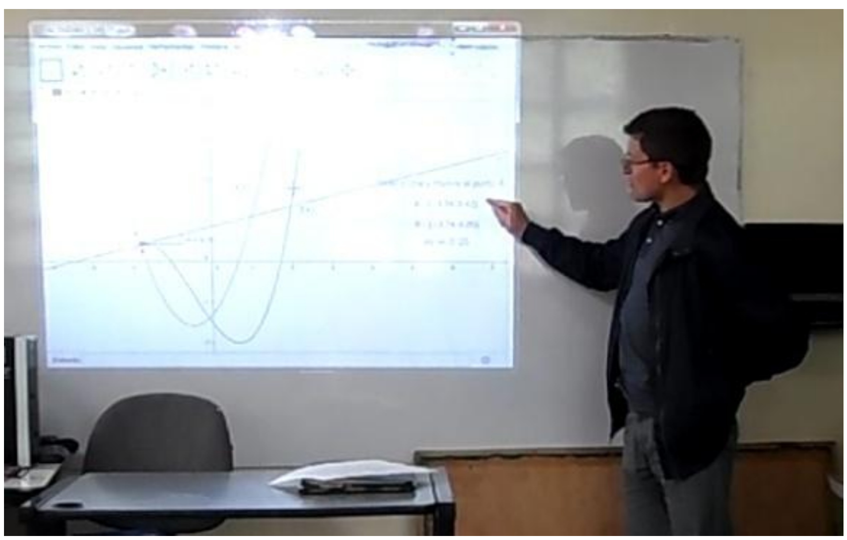


Figura 38. Profesor señalando las coordenadas de A, B y el valor de la pendiente en la actividad 1

> *[Los estudiantes empiezan a hablar todos al mismo tiempo]*

> **P:***Perdón, vamos a hablar de a uno. Uno, dos y tres [Les da la palabra a los estudiantes]. Uno.*

Estudiante 4: *Que el resultado de $x$de A y B, siempre da igual. Y que el resultado de y y de m siempre da lo mismo.*

En este momento se establece una conjetura que resulta como una generalización de las relaciones encontradas en la tabla.

Conjetura 7: Las coordenadas en x de A y B son iguales y la coordenada en y de B y la pendiente m también son iguales.

Luego, el profesor pregunta qué representa la función $g(x)$. En esta parte los estudiantes plantean diferentes respuestas.

Estudiante 4: *Una línea complementaria de $f(x)$.*

P: *Complementaria, pero, ¿de dónde sale? A partir de lo que hemos trabajado. ¿Qué tienes que decir?*

Estudiante 1: *¿Eso podría ser digamos coseno, no?*

P: *No…*

Estudiante 1: *No, porque digamos que las curvas de coseno van bajando y subiendo [Indica con la mano la forma de la función coseno]. Y vea que esa es diferente a la otra.*

P: *Si. Pero, de acuerdo con lo que hemos trabajado, ¿cómo usted supone que resulta $g(x)$?*

Estudiante 3: *Una línea.*

P: *¿Una línea que describe qué puntos?*

Estudiante 7: *Profe, pero es que ahí la $f(x)$ es paralela a $g(\ x)$.*

Estudiante 3*:* *Las coordenadas y de B.*

Como se puede observar, los estudiantes plantean diferentes conjeturas para responder la pregunta del docente. Estas se pueden reescribir así:

- *Conjetura 8:* La función $g(x)$ representa una línea complementaria de $f(x)$

- *Conjetura 9:* La función $g(x)$ representa coseno.
- *Conjetura 10:* $f(x)$ es paralela a $g(x)$.
- *Conjetura 11:* $g(x)$ representa las coordenadas$y$ del punto B.

Estas conjeturas se pueden fundamentar en los siguientes aspectos:

- *Conjetura 8:* El estudiante observa que al variar el punto sobre $f(x)$, varia también el punto sobre $g(x)$, y por eso cree que las funciones se relacionan.
- *Conjetura 9:* Por la forma que tiene la función la estudiante la asocia con los conocimientos previos que tiene de la función coseno.
- *Conjetura 10:* En una parte de las dos funciones, estas tienen la misma inclinación y pareciera que son paralelas.
- *Conjetura 11:* La estudiante observa que el punto B se mueve sobre la gráfica $g(x)$ y considera que esta representa las coordenadas y de B.

Momento 8: En un último momento de la clase, una de las docentes habla sobre una estudiante respecto a la última pregunta que pide explicar lo que representa la función $g(x)$. Esto se encuentra registrado en el video *Actividad1_video11.*

P2: *Listo. Recuerda que B… ¿Cuáles son las coordenadas de B?¿Cuál es la coordenada x de B?... La misma de A.*

Estudiante 7: *La de B es la misma de A.*

P2: *Y la coordenada y de B es…*

Estudiante 7: *La misma de la pendiente.*

P2: *Es la pendiente. Si, o sea que, ¿qué representa la función $g(x)$?*

Estudiante 7: *¿Qué representa la función $g(x)$? Pues la misma… coordenada de B… y en B.*

P2: *¿De y en B? O sea, ¿qué es la coordenada de y en B?*

Estudiante 7: *La pendiente.*

P2: *La pendiente, o sea que, ¿qué te está representando la función $g(x)$?*

Estudiante 9: *La pendiente.*

Como vemos, la estudiante con apoyo de la docente logra establecer que la función $g(x)$ representa la pendiente de la función $f(x)$. El argumento construido colectivamente entre la estudiante y la docente se puede caracterizar así:

D:
$g(x)$ representa las coordenadas en y de B.

C:
$g(x)$ representa la pendiente

G:
y de B es igual a la pendiente

Figura 39. Argumento organizado de acuerdo al modelo de Toulmin, respecto a la representación que tiene la función g(x)

La garantía de este argumento es una de las conjeturas establecidas previamente.

Para finalizar este análisis, la tabla 6 resume algunos aspectos importantes encontrados en la aplicación de esta actividad.

Momentos importantes de la clase	Asuntos de interés		Ideas que responden a los intereses del trabajo de grado
	Sobre argumentación y conjeturación	**Sobre pensamiento variacional**	
1	Los estudiantes inicialmente desarrollan *explicaciones*. Cuando el profesor interviene, realizan *conjeturas* sobre la forma que tiene la función cuando la pendiente de la tangente es positiva. El *argumento* que se elabora tiene como *garantía* el Applet.	Hay una noción de *variación* cuando observan el movimiento del punto A y de *dependencia* cuando ven los efectos que tiene dicho movimiento sobre la pendiente de la tangente.	Los estudiantes realizan conjeturas a partir de los datos de la tabla y con base en el Applet. El docente es importante en la elaboración de argumentos.
2	Se realizan *conjeturas* a partir del Applet, en el momento en que la estudiante observa que el triángulo cambia de sentido y que esto se relaciona con la pendiente.	La idea de *dependencia* entre el valor de la pendiente y la posición del triángulo.	El Applet permite elaborar multiplicidad de conjeturas.
3	Los estudiantes toman como *garantía* la información que les da el docente para establecer *conclusiones*. Dichas conclusiones son *conjeturas*. Es decir, consideramos que las conjeturas en este momento son conclusiones de acuerdo con el modelo de Toulmin. El Applet proporciona los *datos* necesarios para realizar el argumento.	Los estudiantes logran establecer que la pendiente de la recta tangente *cambia su signo de positivo a negativo* en las “curvas”, es decir donde hay máximos o mínimos.	Las conjeturas son las conclusiones de los argumentos en los que el profesor o el Applet pueden actuar como garantía. El Applet también proporciona gran cantidad de datos para establecer argumentos.

4	Los estudiantes establecen *conjeturas* a partir de la información que obtienen del Applet. La garantía en este caso son todas las discusiones desarrolladas entre la estudiante y el profesor.	Reconocen que la pendiente es positiva si la curva es ascendente y negativa si es descendente.	Nuevamente, el Applet proporciona datos para establecer conjeturas. En este caso en particular, la garantía es la discusión que tuvieron previamente la estudiante y el docente.
5	Los argumentos se construyen entre un par de estudiantes y el docente. En este caso, una de las alumnas establece una *conclusión* a partir de los *datos* que le da el Applet. El docente y otra estudiante le dan *garantías* para dicha conclusión.	Los alumnos identifican que hay partes de la curva donde la pendiente es mayor o menor. No solo se habla de su signo.	Los estudiantes y el profesor construyen argumentos de manera colectiva. El Applet proporciona los datos.
6	La estudiante construye una *conjetura* relacionada con las partes de la función donde la pendiente es cero. Luego, acepta esta conjetura como válida para indicar en qué otras partes ocurre lo mismo.	Se identifica que la pendiente de la recta tangente es igual a cero en los puntos máximos relativos o mínimos de la curva.	Los estudiantes construyen conjeturas y las aceptan como verdaderas para establecer otras conclusiones.
7	Los estudiantes generan *diferentes tipos de conjeturas*. Vemos que estas surgen de conocimientos previos (función coseno o	En estas conjeturas se identifican diferentes elementos del pensamiento variacional: • Una idea de *constante* y	Las conjeturas surgen de conocimientos previos o de los datos que proporciona el Applet y la

	paralelismo) o de los datos que obtienen de la actividad y el Applet.	*variable*. Al ver valores que son iguales y otros que cambian. • La idea de *dependencia*, ya que al variar un valor, habían otros valores que dependían de ese (abscisa y ordenada).	actividad planteada.
8	El último argumento que se presenta, tiene como garantía una conjetura construida en argumentos anteriores. Este es el argumento más fuerte de la actividad, ya que logra enlazar dos argumentos. De la misma forma que en casos anteriores, este es un argumento construido colectivamente entre el docente y la estudiante.	Las estudiantes establecen que la función $g(x)$ representa la pendiente de $f(x)$.	Se encuentran argumentos cuyas garantías son conjeturas establecidas previamente.

Tabla 6. Resumen de la primera actividad donde se resaltan los elementos que tienen importancia en el desarrollo del trabajo de grado

5.2. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD 2

Para empezar, el profesor hizo una introducción y explicación para involucrar a los estudiantes a desarrollar esta actividad iniciando con la lectura de la guía así:

Los estudiantes, empiezan a realizar el ejemplo del renglón uno del punto a, que ya estaba resuelto para comprobar que sabían manipular el Applet correctamente, donde la altura 0,5 les debía dar con volumen 14,06, sin embargo, en la socialización de este mismo ejercicio que hace el docente, una pareja de estudiantes no coinciden con el resultado de la guía, como se muestra a continuación

(00:00 – 1:35)

P: *¿Y me quedó qué el volumen del cilindro es?* [El docente señala con su mano, los primeros datos, en el Applet]

[Los estudiantes que responden no se identifican quienes son]

Estudiante x: *14,06*

P: *14,06*

Estudiante 3: *No acá da 16,01*

P2: *Tiene el radio 3 la esfera, arriba en el deslizador esta en 3*

Estudiante 4: *No*

P2: *Ay que poner el deslizador en 3*

P: *Listo , entonces ya está lleno ese primer renglón, en la guía ya está lleno, entonces de acuerdo con lo que acabo de explicar me hacen el favor y llenan los otros renglones.*

Estudiante 3: [Llaman al profesor y le muestra su inquietud, sin embargo por el ruido de unas sillas, no se alcanza a comprender cuál era esta]

P: *¿Cuánto le da?*

Estudiante 4: *14,06, ah sí ya* [Siente satisfacción al ver que le da el volumen del ejemplo en su computador]

P: *Si ahí ya está bien, entonces hagamos los otros*

Se observó, el cambio, de la respuesta por intervención del docente, y los estudiantes se dan cuenta que en el resultado del volumen cambia con respecto al valor del radio y la altura del cilindro, si cambia un valor, cambia el resultado del volumen.

P: [Se dirige hacia la estudiante 1 y le vuelve a leer la guía, aclarándole que el radio debe ser 3 unidades y luego se dirige a todos los estudiantes] *Recuerden que el radio de la esfera es 3 unidades, con eso es con lo que vamos a empezar trabajar*

Esta actividad sirvió de garantía a los estudiantes, puesto que al resolver los siguientes renglones de la tabla, sabrían que sus respuestas serian correctas

(2:20 – 8:22)

Estudiante 1: ¿*Qué tal le dio la altura del cilindro?*

Estudante2: ¡*Ay! y si da aproximado*

Estudiante 1: *Profe y si da aproximado*

Estudiante 2: *¿si me sirve?*

P: *La mayoría de esos valores da ¿Cuál va hacer?*

Estudiante2: *Este* [El profesor toma el mouse] *El de abajo*

Estudiante2: *0,9 A ya, si no da en el uno, da en el otro*

P: Sí lo que pasa es que usted ya lo había bajado y prácticamente estaba trabajando al contrario

Las estudiantes realizan un razonamiento basados en la observación del Applet manifestando, que el valor, se puede buscar con la altura de un lado de la curva o del otro, sin embargo con la intervención del docente, se dan cuenta, de que su afirmación no era correcta.

Estudiante 1: *En la altura del cilindro 2,96*

Estudiante 2: *El volumen es 63,35*

[El profesor pregunta si ya acabaron el ejercicio]

Estudiante2: *Venga yo busco y usted escribe* [estudiantes asumenroles]

Estudiante 1: *En altura del cilindro, eh no mentiras el volumen del cilindro es 65,3*

Estudiante 2: *Coma 3 o coma 03*

Estudiante 1: C*oma 3*

Estudiante 2: *La altura es 3,46 bueno ahora en la altura 4,05*

Al dar por terminado el punto "a" de la actividad 2, podemos observar en las estudiantes, un desarrollo que sirve de apoyo para la argumentación y resolución de los siguientes puntos, así:

D: Tabla para resolver sobre la relación de altura volumen del cilindro, manteniendo el radio 3.

Altura del cilindro	Volumen del Cilindro
0,5	14,06
1,09	
	39,44
1,98	
	58,02
2,96	
	65,3
4,05	
	58,46
5,03	

C:Desarrollo correcto de la tabla como se muestra

Altura del cilindro	Volumen del Cilindro
0,5	14,06
1,09	29,85
1,49	39,44
1,98	49,86
2,47	58,02
2,96	63,35
3,46	65,3
4,05	62,36
2,47	58,46
5,03	42,18
1,95	[illegible]

G: La manipulación del Applet, el ejemplo del primer renglón de la tabla y la asesoría del docente

Figura 40. Esquema del modelo de Toulmin, respecto al llenado de la tabla (8:23 – 12:53)

P: *Bueno, entonces presten atención, vamos a pasar al punto "b" de la guía, miren aquí lo que dice, dice que "muevan cuidadosamente el punto D" para ver cuál es el volumen máximo y resulta que dice que se fije en el movimiento del punto P, el punto P ¿Qué nos representa, este movimiento del punto p?¿Qué nos representa?*

[El profesor, busca que los estudiantes encuentren una evidencia, para que fundamenten una afirmación]

Estudiante 2: *La altura del cilindro*

P: *La altura del cilindro con el correspondiente ¿Qué?*

Estudiante 2: *Volumen*

P: *Volumen, entonces si usted mueve el punto "P" ahí le cambian los valores, y así como cambian los valores de la altura y el cilindro también va a cambiar la posición de este punto P, entonces ahí les preguntan que...miremos en donde se ubica el volumen máximo entonces observen los valores de altura, entonces aquí el volumen del cilindro esta en 58,46 y la altura esta en 4,34 ¿será que hay valores mayores?*

Estudiante x: *En 59,46*

Estudiante x: *En 65,29*

[Los estudiantes realizan unas afirmaciones, lo cual los lleva luego a una decisión común]

P: *Bueno entonces usted dice en 65, entonces donde está el punto ¿Sera que esa curva que está ahí me sirve para algo?*

Estudiante X: *La altura del cilindro* [La respuesta del estudiante, es debido al razonamiento que realiza]

P: *La altura del cilindro con respecto ¿a qué? al volumen*

Estudiante 2: *Cuando está en la mitad de la curva es volumen máximo que tiene el cilindro* [Argumenta, con respecto a lo que observo en el Applet]

P: [Busca poner el punto P, donde le dice la estudiante]

Estudiante 2: *A mí la altura me dio 3,46*

P: *Pero entonces como ustedes dicen que en la punta o en la mitad, es como la cima de esa curva, en donde vamos a encontrar, yo aquí no lo moví exacto, ustedes tienen que mover donde les de aquí el máximo volumen, ósea, este valor sea el máximo porque ese el valor que ustedes tienen que hallar, entonces muevan, el punto máximo es más que 65, entonces cada que muevan el punto D, y encuentren el punto máximo*

Entonces cada quien ponga el volumen máximo y mire que es lo que sucede entre los datos que ustedes tiene aquí y en la vista gráfica y valla mirando que más observa ahí

En el inicio conjunto (estudiantes y docente) del punto “b” de la actividad, el profesor invita a los estudiantes a que con base a la observación de los cambios realicen una aseveración, consiguiendo un resultado satisfactorio, puesto que en esta socialización los estudiantes dan varios puntos de vista, y con esto cada uno de ellos realiza un proceso de argumentación con ayuda de la manipulación del Applet para darle fuerza a su respuesta, al encontrar lo que representan los diferentes elementos (puntos y curva) que se ven en el Applet.

Luego de llenar las tablas, analizan, que al mantener el mismo radio en la esfera, el volumen aumenta o disminuye, mientras que al cambiar los valores del radio de la esfera el volumen disminuye y la altura aumenta, y con esto evidenciamos una conjeturación, al comparar los resultados y sacar las conclusiones

(00:00 – 3:41)

Estudiante 3: *Acá* [muestra el taller] *dice entre menor altura del cilindro lo bajamos va ser mayor la* bolita [Refiriéndose al cilindro]

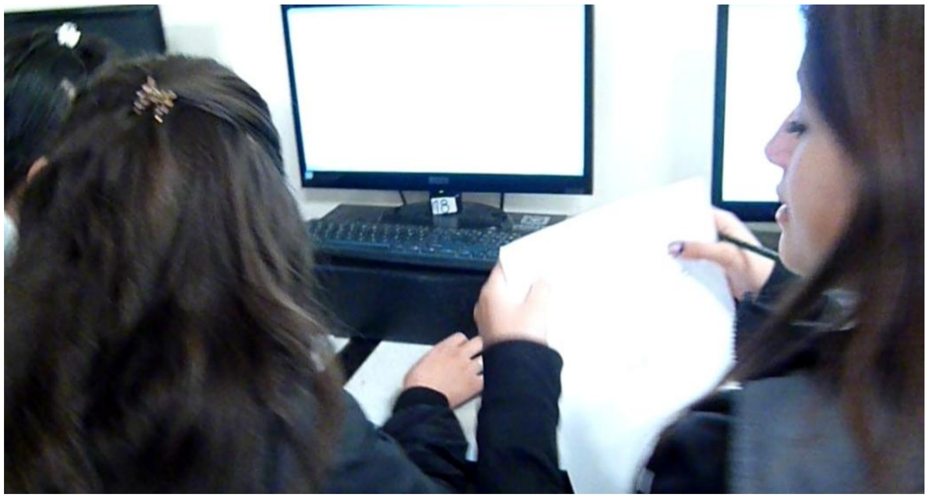


Figura 41. La estudiante señala en la actividad 2, el punto donde tiene una inquietud

P: *¿Entre menor qué?*

Estudiante 3: *Entre menor altura del cilindro es mayor el volumen del cilindro o viceversa, porque yo bajo y la altura del cilindro va bajando* [La estudiante describe los cambios que se presentan a medida que la compañera mueve el deslizador]

P: *Si bueno y cuando aumenta* [El profesor busca que la estudiante argumente sobre la afirmación hecha]

Estudiante 3:*¿Cuándo aumenta qué?*

P: *Déjemelo bien bajito el cilindro a ver qué pasa bajito seria así [*indica con los dedos, la niña va moviendo el mouse] *¿cómo se ve el volumen?* [Profesor insiste que ella vea las relaciones que se presentan]

Estudiante 3: *El volumen se ve…*

P: *10,86, váyalo subiendo ahí va aumentando un poquito va aumentando va aumentado y después empieza a disminuir*

Estudiante 4: *Entre más ancho más aumenta, entre más largo menos aumenta* [la estudiante hace una conjeturación]

Con las observaciones y exploraciones hechas en el Applet por el estudiante, realiza un proceso de verificación, nuevamente para así hacer validar la conjetura formulada hacia el profesor, sin embargo, su conjetura no está completa, así por la intervención del profesor encuentra la relación, seguido de una nueva conjeturación

Estudiante 3: *No pero…como era* [se vuelve a mirar la gráfica] *a mayor altura del cilindro que da más volumen del cilindro y cuando es menor altura del cilindro disminuye el volumen del cilindro* [La estudiante al escuchar a la compañera hace un razonamiento diferente y lo hace más convincente con la manipulación de nuevo del Applet]

P: *Bueno, pero haga la altura máxima altura máxima, lo más alto [profesor invita a que se sigan analizando]*

Estudiante 3: *¿Del cilindro?*

P: *Si, del cilindro*

Estudiante 3: *Y qué no se pierda*

P:*No pero incluso que llegue a perderse la altura máxima sería 6 cierto entonces ahí el volumen es indefinido, ósea indefinido es prácticamente que cero cierto en esa parte bueno ahora vayámoslo bajando un poquito si ve que el volumen ahí es poquito digamos , dejémoslo bien delgadito que el volumen es 4 o 4,44 volumen es muy poquito por qué estamos hablando de que esta muy delgada cierto vállalo agrandando digamos ahí va aumentando, va aumentando pero ahí llega un momento en que aumenta el máximo aumenta mucho y luego empieza a disminuir* [El profesor busca que con la observación puedan dar sus puntos de vista]

Estudiante 3: *Bueno a mí lo máximo que me llego fue 65,29 y la altura* [Muestra la guía donde está contestando], *pero ahí yo podría decir que entre más delgado el cilindro el volumen del cilindro va hacer más poco.*

P: *Si y también cuando sea muy bajito también es poquito entonces cuando es muy alto o muy bajito el cilindro el volumen va a ser poco y es una imagen*

Estudiante 3: *¿Cuándo el cilindro es más que?*

P: *Cuando el cilindro es muy alto el volumen es poco, también cuando es muy bajito también ósea cuando la altura…* [Se retira y se dirige a todos los alumnos]

Al obtener la estudiante, tanto el profesor la respuesta correcta, evidenciamos procesos de razonamiento y conjeturación como los explicamos anteriormente, además el docente, con relación a cada conjetura y argumento de estas dos estudiantes, les ayuda al resto de los estudiantes a tener más claro el ejercicio, y la conclusión a la que deben llegar.

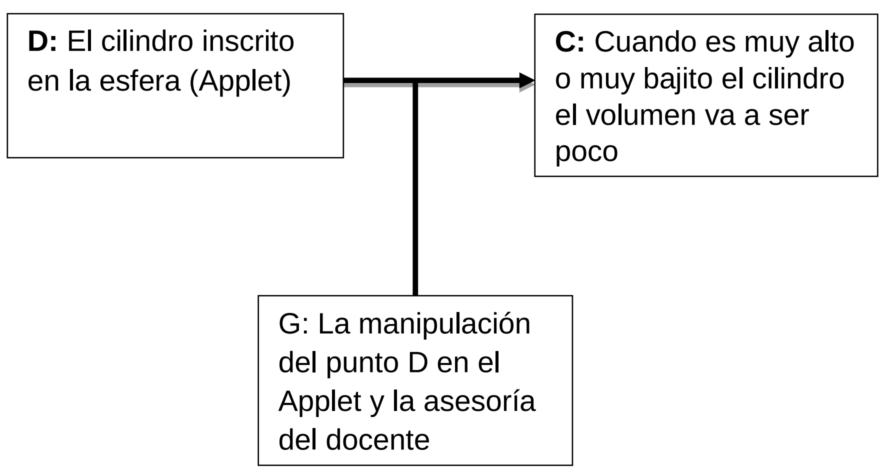


Figura 42. Esquema del modelo de Toulmin, respecto al volumen cambiante de un cilindro inscrito en una esfera de radio constante.

(3:42 - 6:17)

P: *Mire lo que ustedes tienen que ver lo que estamos haciendo con su compañera para describir esa relación que se ve aquí representada en la* *gráfica mire observen lo siguiente si el volumen, vea que pasa con el volumen si la altura es muy poca, el volumen también es poco, mire aquí tenemos una altura de 0,3 el volumen que tanto es.*

Estudiante X: *Es 8,57*

P: *8,57 y sabiendo que el volumen máximo es como 65 o sea que ahi tenemos poco volumen cierto porque esto prácticamente esta plano (Pide atención a un estudiante)... eh cierto ese volumen va aumentando cierto pero esto no quiere decir entre más altura más volumen porque va aumentando ,va aumentando pero llega el momento vea este es el volumen máximo cierto 65,23 creo que algunos les dio 65,3 volumen máximo pero si yo sigo aumentando la altura, ese valor no sigue aumentando, vea empieza a disminuir ... porque ya cuando el cilindro se va haciendo muy delgado qué pasa con el volumen? Se va disminuyendo el volumen hasta desaparecer*

Estudiante X: *¿Hasta quedar indefinido?*

P: *Hasta quedar indefinido porque ya prácticamente queda reducida a una línea el volumen entonces vea acá empieza a aumentar, aumentar a pesar de que va bajando la altura del cilindro aumentando el volumen hasta llegar a un punto que llega a su máximo valor y después 65,3 es el máximo y después empieza a disminuir entonces no quiere decir que porque haya más altura hay más volumen cierto ahí como lo que tiene que ver es que si el cilindro es muy bajito el volumen es poco y si es muy alto también el volumen es muy poco*

Los estudiantes con ayuda del docente en la observación y sus conocimientos previos específicamente este estudiante, ya que al dar definiciones como "indefinido" refiriéndose al concepto infinito, obtienen conclusiones correctas.

(00:00 - 1:15)

Estudiante 7: *Acá ese es radio de la esfera disminuye por ejemplo en 2,5 disminuye casi 4, entonces acá no, acá lo que hizo fue aumentar* [Le señala con los dedos la guía en la tabla donde están los resultados, para contestar el punto e]

La estudiante realiza un proceso de razonamiento, de acuerdo a las respuestas del punto d en las respuestas de la tabla, para poder resolver el punto e, dando una conclusión.

P: *Si es que hay que analizar reglón por reglón no es mirar todo global sino renglón por renglón*

Estudiante 8: A*mmm*

P: [Se dirige a la compañera de trabajo**]** *Entonces ayúdenle aquí a ella….*

[Se forma una pequeña discusión entre las estudiantes respecto a quien ha ayudado más así que el profesor interviene nuevamente]

P: *Bueno no tienen que escribir, sino ayudarle a analizar esta tabla, porque dice*, [lee la pregunta del último punto] *"¿Qué características tiene el cilindro con el volumen máximo para cualquier esfera?" entonces tienen que analizar reglón por reglón*

Estudiante 7: *¿Cómo así para cualquier esfera?*

P: *Porque se supone que nosotros aquí buscamos es volumen máximo* [El profesor se retira]

(1:16 - 3:46)

Estudiante 7: *Pero acá*

Estudiante 8: *En cada esfera es que claro obviamente todos son distintas*

Estudiante 7: *Por eso*

Estudiante 8: *Esta esfera es distinta a esta otra esfera* [Señalando en la tabla un renglón y después otro]

Estudiante 7: *El uno se aumenta y el otro disminuye como acá en todas aumenta*

Estudiante 8: *En estas también, es que en todas aumenta*

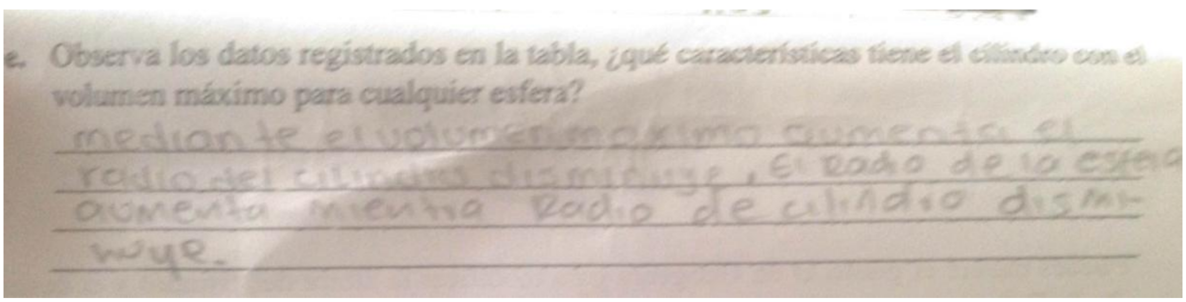
Estudiante 7: *Hay una que disminuye 2,5 la esfera… acá disminuye 4 puntos porque es 2,01* [Le explica a su compañera con ayuda de los datos de la guía]

Estudiante 8: *Aaaa, es que este es radio y radio*

Estudiante 7: *Por eso mediante el volumen máximo aumenta el radio…*

Estudiante 8: *Entonces aquí todo disminuye, todo ósea de aquí para acá todo aumenta pero en el radio de la esfera, pero en el radio del volumen todo disminuye* [Al ser ella la que argumentó la respuesta, su compañera le pasa la hoja para que escriba la misma en la guía] *Listo*

Las estudiantes plantean una conjeturación inicial, luego, como nos dimos cuenta, por la intervención del docente, las estudiantes revisan más detalladamente sus respuestas y el Applet para así poder dar una conclusión, así



e. Observa los datos registrados en la tabla, ¿qué características tiene el cilindro con el volumen máximo para cualquier esfera?

mediante el volumen máximo aumenta el radio del cilindro disminuye, El Radio de la esfera aumenta mientra Radio de cilindro dismi-nuye.

Figura 43. Punto e de la actividad 2 desarrollado por las estudiantes 7 y 8

P: [Se dirige a todos los estudiantes**]** Bueno, vamos a dar por terminado, entonces esta actividad.

Finalmente, se resume el desarrollo de la guía en tres momentos de la clase donde se hace una recopilación de los asuntos de interés sobre la conjeturación, argumentación y el pensamiento variacional, junto a las ideas que responden a los intereses de este trabajo de grado, como se muestra en la tabla 7.

Descripción de los momentos importantes de la clase	Asuntos de interés		Ideas que responden a los intereses del trabajo de grado
	Sobre argumentación y conjeturación	Sobre pensamiento variacional	
1. El docente utiliza el primer renglón de la tabla previamente diligenciado como ejemplo de lo que deben desarrollar los estudiantes. Sin embargo, a dos estudiantes no les da el resultado esperado, hasta que el docente aclara que el radio de la esfera debe ser 3 unidades.	El dato utilizado por los estudiantes es el ejemplo que hay en la tabla de la guía, la garantía es la intervención del docente para que el resultado sea correcto y la conclusión es entender los elementos del applet y su relación con cada una de las columnas de la tabla.	Los estudiantes se dan cuenta que en el valor del volumen, interviene tanto la altura del cilindro como el radio de la esfera.	Trabajo de innovación en la utilización de GeoGebra. Formulación de conjeturas utilizando los valores que intervienen en la determinación del volumen de un cilindro.
2. Para dar inicio al desarrollo del punto b, de la actividad, el docente pide a los estudiantes que observen los cambios del punto P, y además, argumenten que representa este movimiento	Los estudiantes utilizan como dato la información que ofrece el Applet, para llegar a las conclusiones expuestas en la socialización.	Sin hacer énfasis en el concepto de derivada, los estudiantes trabajan con nociones que fundamentan esta idea a través de la actividad previamente diseñada.	Utilizando como garantía el applet y los datos tomados en el desarrollo de la actividad, el estudiante señala un volumen máximo que se presenta en la situación plateada. Siendo esto una aproximación a una de las aplicaciones del concepto de derivada.
3. Los estudiantes realizan varias conjeturas acerca de la relación de la altura del cilindro con el volumen del cilindro, sin embargo, muchas de estas no fueron del todo correctas así que con la intervención del docente pudieron llegar a una conclusión adecuada.	Como dato los estudiantes tienen los resultados de las tablas, del punto a y d. Como garantía el applet y el docente, que a su vez ayuda en el uso adecuado de este recurso para obtener conclusiones en los puntos b, c y d.	Se observa, la manipulación del applet y el razonamiento para encontrar la relación entre los valores de volumen y altura.	Manipulación del applet en GeoGebra (cilindro y función) para dar respuesta a los interrogantes propuestos. Con el análisis de la gráfica se detectan fácilmente los máximos de la función.

Tabla 7. Resumen de la segunda actividad donde se resaltan los elementos que tienen importancia en el desarrollo de trabajo de grado

5.3. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD 3

En la actividad número tres, se presenta un applet donde aparece a la derecha un reloj de arena y en la parte izquierda las gráficas de volumen de la arena en función del tiempo en cada uno de los conos y las gráficas de la altura de la arena en función del tiempo en cada uno de los conos, como se muestra en la figura 44.

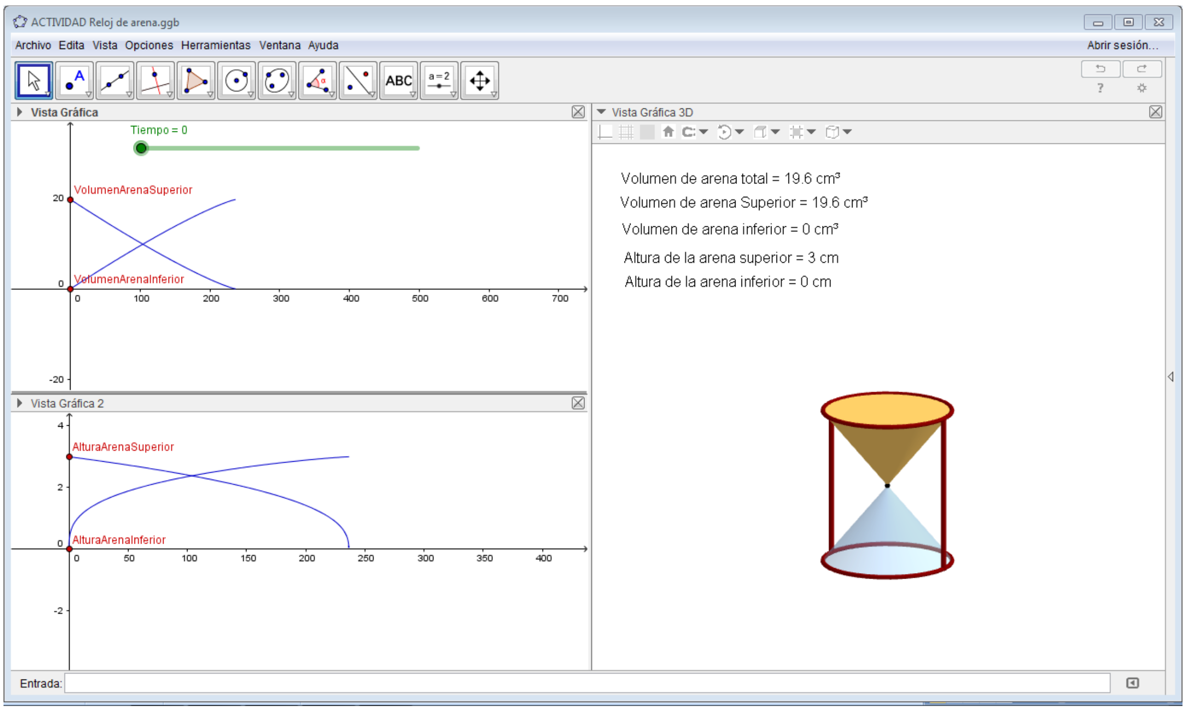


Figura 44. Imagen del Applet de la tercera actividad que se presento a los estudiantes

Inicialmente los estudiantes llevaron a cabo la siguiente orientación en el desarrollo de la guía propuesta:

a. *Completa la tabla registrando los valores correspondientes en cada tiempo determinado*

Tiempo	Volumen de arena superior	Altura de la arena superior	Volumen arena inferior	Altura de arena inferior
11	18,5	2,9	1,1	1,1
26,8	17 cm^3	2,9 cm	2,6 cm^3	1,5 cm
46,5	15,1 cm^3	2,7 cm	4,5 cm^3	1,8 cm
81,2	11,9 cm^3	2,5 cm	7,8 cm^3	2,2 cm
112,7	9 cm^3	2,3 cm	10,6 cm^3	2,4 cm
153,7	5,6 cm^3	2 cm	14,1 cm^3	2,7 cm
176,5	3,8 cm^3	1,7 cm	15,9 cm^3	2,8 cm
212,8	1,2 cm^3	1,2 cm	18,4 cm^3	2,9 cm

Figura 45. Tabla diligenciada por un grupo de estudiantes durante el desarrollo de la actividad número tres

El completar la tabla no ofreció dificultad, debido a que los estudiantes tenían experiencia en encasillados similares en las actividades previas, por tanto la parte *a* de la actividad, con solo las orientaciones iníciales del profesor, fueron suficientes para el desarrollo del trabajo en el inicio de la guía.

Ahora, en la guía del estudiante aparece la siguiente pregunta:

b. *A medida que el tiempo aumenta, ¿qué valores aumentan? ¿qué valores disminuyen?*

Las respuestas a esta pregunta fueron acertadas, con la salvedad de que algunos grupos, como los estudiantes 1 y 2 que se nombran en la transcripción (anexo C), olvidaron parte de la pregunta cómo se muestra en la siguiente respuesta:

b. A medida que el tiempo aumenta, ¿qué valores aumentan? ¿qué valores disminuyen?

disminuye los valores de volumen de Arena superior y Altura de la Arena Superior

Figura 46. Respuesta dada a la pregunta b por parte de los estudiantes 1 y 2 en la actividad número 3

Sin embargo, se puede comprobar mediante el dialogo que sostenían los estudiantes, que ellos entendían la totalidad de la pregunta, como se muestra en el siguiente lapso de dialogo entre ellos:

Estudiante 1: *A medida que el tiempo aumenta, ¿Qué valores aumentan? ¿Qué valores disminuyen? La altura…*

Estudiante 2: *La altura y el volumen.*

Estudiante 1: *No inferior.*

Estudiante 2: *Los que disminuyen, el tiempo no.*

Estudiante 1: *¿Qué valores disminuyen?*

Estudiante 2: *Volumen y la altura superior.*

Luego, aparece la siguiente pregunta en la guía del estudiante:

c. *¿Cuál es el tiempo que ha transcurrido cuando se intersecan las funciones en cada gráfica?*

A lo que aparecen dos tipos de respuesta, algunos que responden solo exactamente lo que se les pregunta:

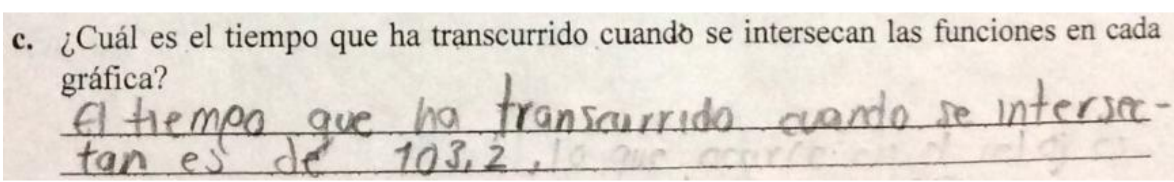
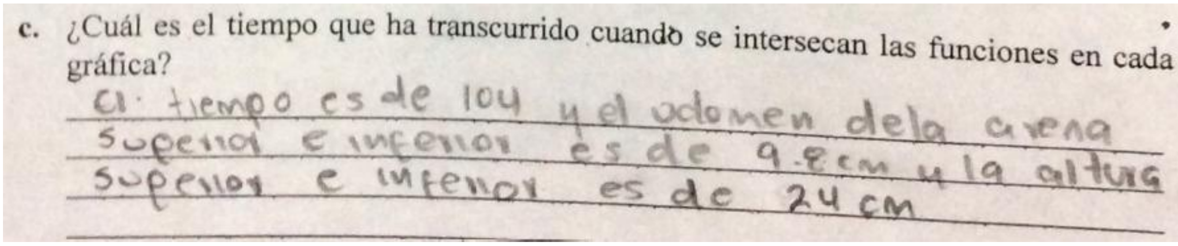

c. ¿Cuál es el tiempo que ha transcurrido cuando se intersecan las funciones en cada gráfica?
El tiempo que ha transcurrido cuando se intersec-
tan es de 103,2.

Figura 47. Respuesta precisa a la pregunta c de la tercera actividad

Y otros que agregan más información, respecto a lo que les ofrece el applet:



c. ¿Cuál es el tiempo que ha transcurrido cuando se intersecan las funciones en cada gráfica?

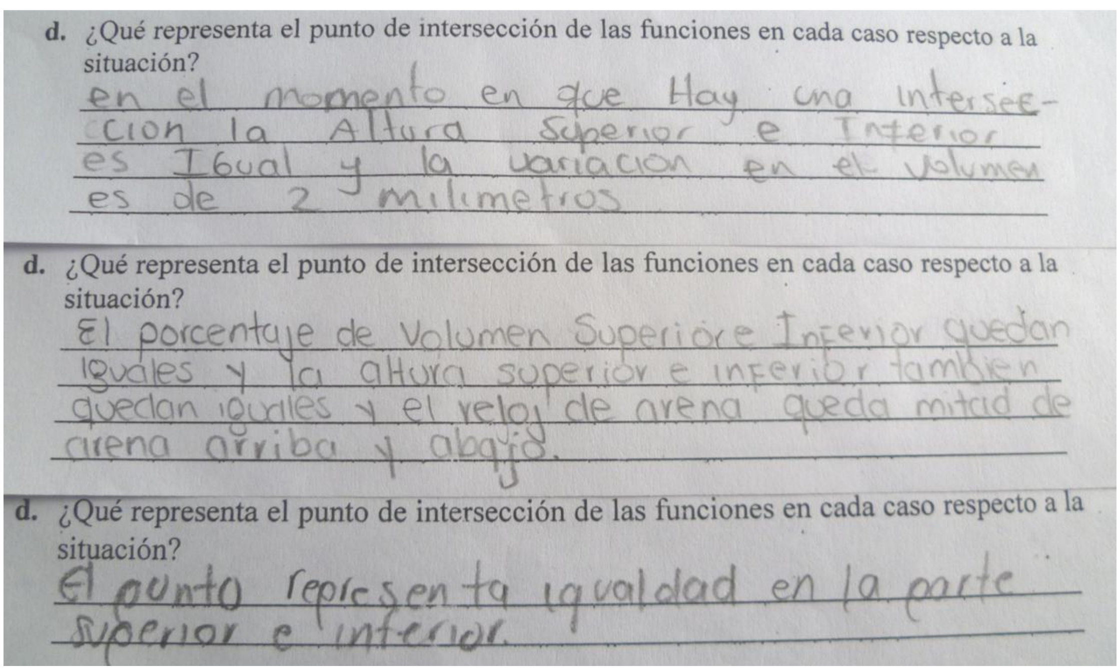
el tiempo es de 104 y el volomen dela arena superior e inferior es de 9.8 cm y la altura superior e inferior es de 24 cm

Figura 48. Respuesta a la pregunta c de la tercera actividad donde agregan información adicional

Con respuestas como la anterior se concluye que los estudiantes entendieron el Applet y que sin proponérselo están abordando aspectos que posteriormente serán cuestionados en el desarrollo de la actividad. Ahora, aparece la pregunta d:

d. *¿Qué representa el punto de intersección de las funciones en cada caso respecto a la situación?*

Los estudiantes escriben las siguientes respuestas:



d. ¿Qué representa el punto de intersección de las funciones en cada caso respecto a la situación?

en el momento en que Hay una intersec-cion la Altura Superior e Inferior es Igual y la variacion en el volumen es de 2 milimetros

d. ¿Qué representa el punto de intersección de las funciones en cada caso respecto a la situación?

El porcentaje de Volumen Superior e Inferior quedan iguales y la altura superior e inferior tambien quedan iguales y el reloj de arena queda mitad de arena arriba y abajo.

d. ¿Qué representa el punto de intersección de las funciones en cada caso respecto a la situación?

El punto representa igualdad en la parte superior e inferior.

Figura 49. Tres respuestas similares en la pregunta d de la tercera actividad

Las respuestas obedecen en su mayoría a una comprensión clara del recurso tecnológico utilizado, puesto que, se concluye que los estudiantes lograron entender a partir de la manipulación del Applet, que la intersección de las gráficas presentadas corresponde a que ha caído la mitad de la arena del cono superior al cono inferior, por tanto, el volumen y la altura en cada uno es el mismo. Sin embargo, esa conclusión tuvo un proceso de discusión al interior de los grupos como se observa en el siguiente dialogo:

Estudiante 1: *¿Qué representa el punto de intersección de las funciones de cada caso respecto a la situación?*

Estudiante 2: *¿Qué representa? ¿Qué están las dos al mismo tiempo?*

Estudiante 1: *No, que la cantidad de arena en las dos partes,… es igual.*

Estudiante 2: *Para que quedara equilibradas tienen que haber 102* [valor aproximado del tiempo donde se interceptan las gráficas de las funciones de volumen y altura de la arena]*, en cada una ya.*

Estudiante 1: *Pero es que,… de las funciones en cada caso.*

Estudiante 2: *La intersección es eso,… en el…*

Estudiante 1: *En el momento,…, la altura superior e inferior.*

Estudiante 2: *E inferior es igual,…., es igual,…, es igual a la variación,…*

Estudiante 1: *La variación es de…*

Estudiante 2: *En el volumen, es de,…*

Estudiante 1: *En el volumen es de,…*

Estudiante 2: *Ahí si no se cumple,…*

Estudiante 1: *Centímetros, porque está en centímetros.*

Estudiante 2: *No porque si yo le pongo dos centímetros a esto daría 11.*

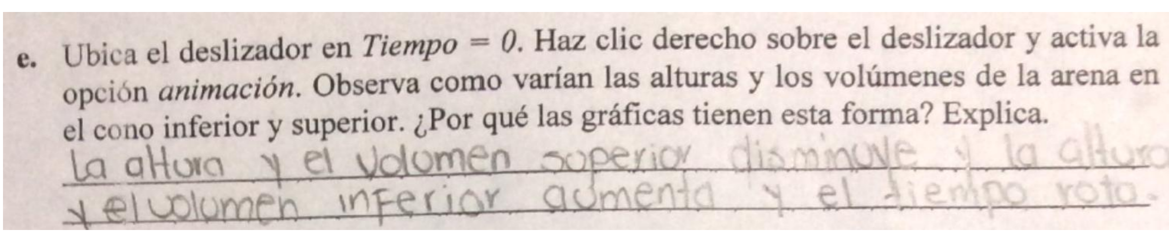
Estudiante 1: *2 milímetros, si porque aquí en 9 centímetros coma 7 milímetros y aquí es aproximando queda el 10, entonces 2 milímetros.*

Inicialmente la estudiante 2, solo hace referencia al tiempo, respecto al punto donde se cruzan las dos gráficas, pero el estudiante 1 nombra ‘cantidad’ para señalar la arena que se está moviendo, luego hace énfasis en la palabra función que aparece en la pregunta *e*, lo que lo lleva a pensar en que el valor del tiempo debe estar relacionado con otra variable como la altura de la arena en cada cono, lo que hace que la estudiante 2 llegue a la misma conclusión, luego el estudiante 1 hace la misma relación para el volumen y se encuentran que en estos valores hay una pequeña diferencia que es de dos decimas, que es casi el mismo resultado.

Finalmente, en el punto *e*, aparece una instrucción acompañada de una pregunta:

e. *Ubica el deslizador en Tiempo = 0. Haz clic derecho sobre el deslizador y activa la opción animación. Observa como varían las alturas y los volúmenes de la arena en el cono inferior y superior. ¿Por qué las gráficas tienen esta forma? Justifica tu respuesta.*

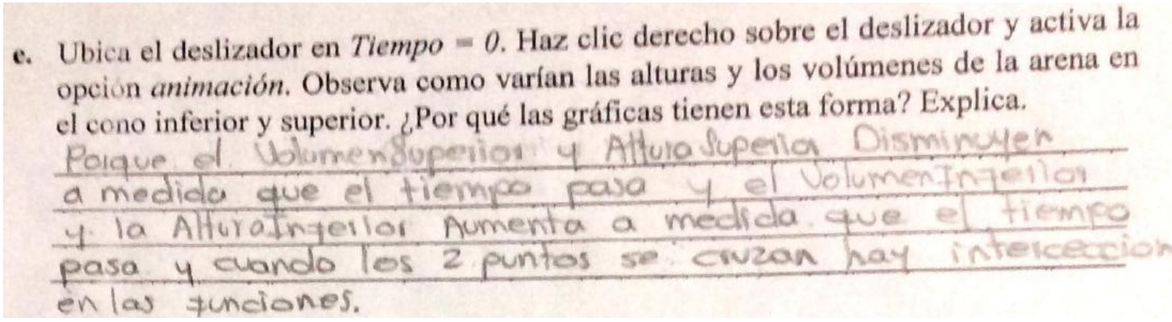
Mostramos dos de las respuestas dadas por los estudiantes:



e. Ubica el deslizador en *Tiempo = 0*. Haz clic derecho sobre el deslizador y activa la opción *animación*. Observa como varían las alturas y los volúmenes de la arena en el cono inferior y superior. ¿Por qué las gráficas tienen esta forma? Explica.

la altura y el volumen superior disminuye y la altura y el volumen inferior aumenta y el tiempo rota.

Figura 50. Respuesta directa a la pregunta e de la tercera actividad



e. Ubica el deslizador en *Tiempo = 0*. Haz clic derecho sobre el deslizador y activa la opción *animación*. Observa como varían las alturas y los volúmenes de la arena en el cono inferior y superior. ¿Por qué las gráficas tienen esta forma? Explica.

Porque el VolumenSuperior y AlturaSuperior Disminuyen a medida que el tiempo pasa y el VolumenInferior y la AlturaInferior Aumenta a medida que el tiempo pasa y cuando los 2 puntos se cruzan hay intercección en las funciones.

Figura 51. Respuesta a la pregunta e de la tercera actividad con algunos detalles adicionales

En las dos respuestas mostradas a la pregunta *e*, se puede ver la asociación que hacen de la simulación gráfica del reloj de arena y las graficas en el plano cartesiano que aparecen en la vista gráfica, por tanto, se encuentra que el Applet facilita dicha relación.

Por otro lado, no se presta atención al detalle, puesto que, cuando queda poca arena en el cono superior esta baja rápidamente y así mismo la altura, cosa a la que ningún grupo hace referencia para explicar la leve curva que aparece en cada una de las gráficas de volumen con respecto al tiempo. Así mismo, en las gráficas de la altura de la arena con respecto al tiempo, en el cono superior al final de la gráfica aparece una curva pronunciada, que se explica porque queda poca cantidad de arena que disminuye rápidamente y en el cono inferior la curva pronunciada aparece al comienzo de la gráfica debido a que cuando empieza a caer arena se tiene en cuenta la altura del montón que se forma en el centro del cono sin que este alcance a completar la cavidad con respecto a la altura que lleva.

Por otro lado, podemos encontrar en el siguiente lapso de dialogo, como la estudiante 7 utiliza la valoración del profesor en su conjetura como garantía para llegar a una conclusión:

P: *Siguiendo las instrucciones que hay dice,…, observa como varían las alturas y los volúmenes de la arena en el cono superior e inferior, ¿Por qué las gráficas tienen esa forma? Mire,…*

Estudiante 7: *Yo digo porque.*

P: *Entonces, dime, ¿por qué?*

Estudiante 7: *Pues yo no sé, mire, espere le digo y usted me dice si sí está bien, la primera gráfica muestra que el volumen va disminuyendo a medida que va transcurriendo el tiempo y la altura, la de altura va aumentando, la…, va aumentando la altura a medida que el tiempo,…*

P: *Pero espere, es que resulta que es,…, está si va aumentando ¿cierto? Que es la altura de la arena inferior, pero ¿qué sucede con la otra?*

Estudiante 4: *Con la superior si disminuye.*

P: *Con la superior,…, disminuye vea que esta [señalando en el tablero], que esto es lo que describe, ¿cierto? Entonces,…*

Luego, el profesor usa como dato la información que ofrece el estudiante 7, para reorientar su conclusión, utilizando como garantía el Applet y lo que en él se muestra, lo que hace que el estudiante 4 intervenga y se llegue a una conclusión adecuada. Sin embargo, el profesor sigue insistiendo, como se muestra a continuación, para hacer ver que en el primer plano cartesiano aparecen las graficas del volumen de la arena que está en los dos conos del reloj de arena y que en el segundo plano cartesiano aparecen las graficas de la altura de la arena que están en cada uno de los conos de reloj de arena en función del tiempo.

Estudiante 7: *Pero entonces tocaría en esa forma [haciendo señas con sus manos].*

P: *Entonces, tienen esa forma porque si usted observa, si usted devuelve la animación y usted misma la,…, si usted misma va moviéndola, vea, si usted* *misma va moviéndola poco a poco,…, usted ve, que a medida de que, de que, voy, si se da cuenta que aquí va cayendo arena, entonces y ya se corre, ya bajo un poquito el punto* [hace referencia al punto rojo que se desplaza sobre la gráfica del volumen de arena en el cono superior], *porque ya disminuyo el volumen porque ya cayo arena de aquí del cono de arriba, entonces este volumen de arena en el cono superior ya bajo y aquí la altura puede empezar a bajar, porque la altura de la arena ¿Qué es? La distancia de la arena hasta acá [señalando en el tablero], ¿cierto? En el cono, pero si empieza a caer arena por este orificio, pues empieza a bajar esa altura y eso es lo que describe a través de la animación, entonces vea como lo voy corriendo, vea, va bajando el volumen, ¿es obvio que baje el volumen? ¿Es obvio que baje este volumen? Claro porque se está cayendo la arena ¿cierto? Y ¿es obvio que baje la altura de la arena?*

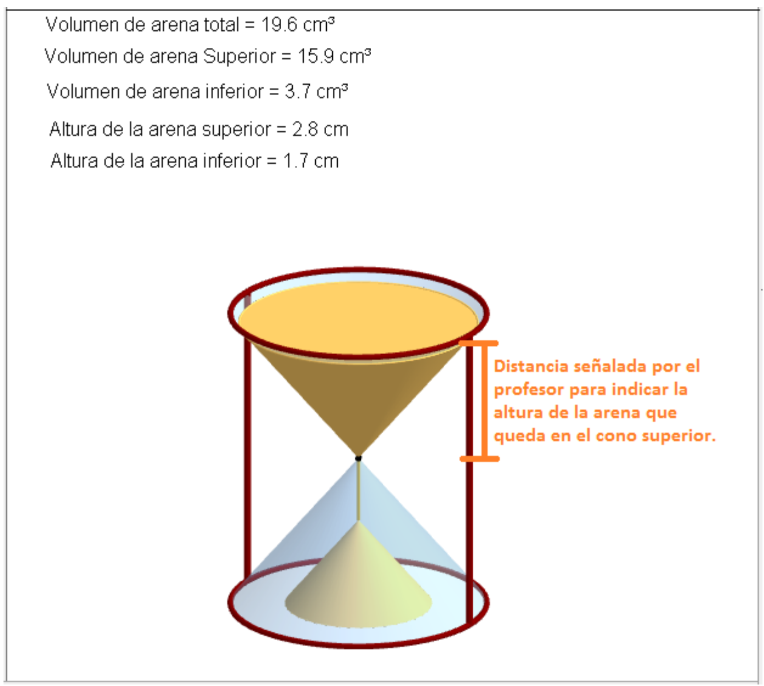


Figura 52. Distancia señalada por el profesor para indicar la altura de la arena en el cono superior del reloj de arena

P: *Claro, entonces,…, y lo que sucede es que a medida que va corriendo [el deslizador tiempo],…, pues va disminuyendo el volumen en la parte superior, vea,* *porque va bajando esta arena y acá va llegando arena, entonces va subiendo esa cantidad de arena, va subiendo, va subiendo,…*

Finalmente, se resumen cada punto de la guía en un momento de la clase donde se hace una recopilación de los asuntos de interés sobre la conjeturación, la argumentación y el pensamiento variacional, junto a las ideas que responden a los intereses de este trabajo de grado, como se muestra en la tabla 8.

Descripción de los momentos importantes de la clase	Asuntos de interés		Ideas que responden a los intereses del trabajo de grado
	Sobre argumentación y conjeturación	Sobre pensamiento variacional	
1. Los estudiantes deben llenar una tabla que requiere el volumen y la altura de la arena tanto en el cono superior como en el inferior de un reloj de arena, utilizando un Applet previamente diseñado, para lo cual hay una explicación en la guía del estudiante y por parte del docente encargado.	Los estudiantes utilizaron como dato las orientaciones de la guía y el Applet sirve como garantía para el registro de los datos que la tabla requiere.	Los estudiantes observan y registran que a medida que pasa el tiempo, las variables volumen y altura cambian su valor.	Trabajo de la noción de variación a través del registro de datos en una tabla. Innovación de la actividad estática del libro de texto a través de su implementación en GeoGebra.
2. Los estudiantes deben observar que sucede con las variables volumen y altura de la arena en cada uno de los conos del reloj, a medida que transcurre el tiempo, para ello fue importante el llenado de la tabla que se proponía.	Los estudiantes utilizan como dato los valores recogidos en la tabla para obtener conclusiones y la garantía es que los obtuvieron mediante el Applet.	Los estudiantes observan relaciones de dependencia entre variables.	Uso de datos obtenidos por los estudiantes para obtener una conclusión.
3. Identificación del momento en el que se interceptan las graficas del volumen de la arena en el cono superior e inferior y de las graficas de la altura de la arena en el cono superior e inferior en función del tiempo.	Utilizan el Applet como garantía para justificar las respuestas dadas.	Se observa la gráfica de una función como la representación de una relación entre dos variables de ahí que identifiquen su punto de intersección.	Uso del recurso tecnológico y de su carácter dinámico para dar respuesta a una pregunta.
4. Los estudiantes deben interpretar el punto de intersección de la gráfica de las funciones volumen	Los estudiantes usan como dato lo trabajado hasta el	Los estudiantes hacen uso de la idea que tienen de función para	La simulación en GeoGebra de la situación encontrada en

en el primer plano cartesiano y de las funciones altura en el segundo plano cartesiano que ofrece el Applet de acuerdo a toda la situación planteada y trabajada durante la actividad.	momento en la actividad y utilizan el Applet y la noción que tienen de función como garantía para justificar su conclusión.	relacionar dos variables y con ello hacer más significativo la respuesta dada.	el libro de texto, la hace más comprensible para el estudiante, por tanto, le facilita la obtención de datos, garantías y conclusiones.
5. Se busca que los estudiantes mediante una animación completa de la simulación expliquen la forma de las gráficas ofrecidas en el caso del volumen y la altura de la arena en el cono superior e inferior en el reloj de arena, ambas en función del tiempo.	Los estudiantes usan las gráficas de funciones dadas como datos. El Applet y en algunos casos la valoración del profesor respecto a las conjeturas sirven como garantía.	Se trabaja sobre un dominio que es el tiempo y los estudiantes ofrecen en sus respuestas una idea de función creciente y decreciente.	El Applet sirve como garantía y su carácter dinámico sirve para la extracción de conclusiones. Los estudiantes ofrecen una idea de función creciente y decreciente para explicar la forma de la gráfica en algunas funciones.

Tabla 8. Resumen de la tercera actividad donde se resaltan los elementos que tienen importancia en el desarrollo de trabajo de grado.

6. CONCLUSIONES

En general, el trabajo realizado demostró que es posible adaptar actividades de libros de texto de matemáticas al software GeoGebra, dándoles dinamismo e innovación. En este caso, en particular, actividades relacionadas con el concepto de derivada. A partir de los Applet generados con la adaptación de las actividades, se facilitó la construcción de guías para el estudiante, donde es posible formular preguntas y ejercicios que promueven la conjeturación y la argumentación, bajo la orientación del docente.

De manera particular, en este capítulo nos interesa señalar algunas conclusiones organizadas en dos partes. En la primera parte se presentan conclusiones relacionadas con la conjeturación y la argumentación y en la segunda se presentan conclusiones relativas al pensamiento variacional. A través de estas dos clases de conclusiones se espera responder a los objetivos planteados al comienzo del trabajo.

6.1. CONCLUSIONES RELATIVAS A LA ARGUMENTACIÓN Y LA CONJETURACIÓN

En cada una de las tres actividades se pueden identificar tres actores influyentes: los estudiantes, el docente y el applet. A lo largo de cada implementación, estos tres actores interactuaron en la construcción de conjeturas y argumentos, aunque en algunos casos también se presentaron intervenciones de tipo explicativo. Al respecto se puede concluir que:

- El **applet** y las guías propuestas proporcionaron una gran cantidad de información que en la mayoría de argumentos formaba parte de los datos. Estos datos permitieron a los estudiantes encontrar regularidades y posteriormente elaborar conjeturas. Esto se observó en las actividades 1 y 2, y se puede verificar en la tabla 6 (numerales 1, 2, 3, 4, 5 y 7) y en la tabla 7 (numerales 2 y 3). Para el caso de la actividad 3, el applet actuó principalmente como garantía, ya que los estudiantes lo usaban para justificar sus conjeturas, como se observa en la tabla 8 (numerales 1, 2, 3 y 5).

- Los **estudiantes** demostraron tener capacidad para elaborar conjeturas a partir de regularidades numéricas, conocimientos previos o la observación de un gráfico como herramienta de análisis. Evidenciamos esto en la tabla 6 (numerales 1 y 2), en la tabla 7 (numeral 2) y en la tabla 8 (numeral 1, 2, 3). Dichas conjeturas constituían la conclusión de los argumentos. Sin embargo, los alumnos presentaron falencias para justificar el paso de los datos a la conclusión. Las garantías de los argumentos estaban dadas por el Applet o por el docente.
- El **docente** fue fundamental para el desarrollo de argumentos, ya que sin su intervención, los alumnos creían suficiente establecer explicaciones y no argumentos. Además, sus aportes fueron usados como garantías en muchos de los argumentos. Cómo se relaciona en los numerales 1, 3, 4, 5 y 8 de la tabla 6. También, en el numeral 3 de la tabla 7. Así mismo, en el numeral 5 de la tabla 8.

Respecto a los argumentos, cabe señalar que durante la implementación de las tres actividades varios de ellos fueron construidos de manera colectiva. Es decir, los estudiantes realizaron aportes a algún elemento del modelo, el profesor a otro y el mismo applet también. Como se observa en las conclusiones obtenidas en los numerales 5 y 8 de la tabla 6.

6.2. CONCLUSIONES RELATIVAS AL PENSAMIENTO VARIACIONAL

A lo largo de las tres actividades los estudiantes realizaron acercamientos a diferentes ideas relacionadas con el pensamiento variacional. Más específicamente nos parece importante señalar que:

- Las actividades planteadas se enmarcan en diferentes tipos de contextos, tal y como lo sugieren los lineamientos curriculares en relación con el pensamiento variacional. La primera actividad está dada en un contexto matemático y la segunda surge de uno cotidiano, al igual que la tercera.

- Si bien en estas actividades no se habla explícitamente del concepto de derivada, si se realizan aproximaciones a diferentes conceptos o nociones asociados con ella, donde se completan tablas, se utiliza una idea de relación entre variables, se analizan gráficas de una función, se buscan regularidades, se estudia el crecimiento y decrecimiento de funciones y puntos de intersección. Es decir, se presenta un desarrollo del pensamiento variacional entre los estudiantes.
- Los applet y las preguntas propuestas en cada una de las guías de los estudiantes, permitieron en las tres actividades trabajar la dependencia y la variación entre variables. Analizar el valor y el signo de la pendiente en la grafica de una función. Además de abordar diferentes representaciones de una situación al mismo tiempo: lo gráfico, lo tabular y la situación misma.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Atienza, M. (2005). Las razones del derecho. Teorías de la argumentación jurídica. Universidad Nacional Autónoma de México, México.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Universidad de los Andes.

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria*. Tesis Doctoral. Valencia: Universitat de València.

Conner, A.(2012). Garantías como indicadores de patrones de razonamiento en clases de matemáticas de secundaria. *Decimo segundo congreso internacional de educación matemática*. COEX, Seoul, Korea

Duval, R. (1999). Algunas cuestiones relativas a la argumentación. *International newsletter on the theaching and learning of mathematical proof*. Lille: IUFM de Lille.

Goizueta, M (2011). *Interpretaciones sobre la argumentación en el aula de matemáticas de secundaria por parte de un grupo de profesores*. Tesis para optar al título de máster de investigación en didáctica de las matemáticas y de las ciencias experimentales. Barcelona: Universidad autónoma de Barcelona.

González, M. & Sierra, M. (2004). *Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX.* Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. España. Universidad de Salamanca

Londoño, D., Villa, D.,& Morales, S. (2013). *Comprensión del concepto de la derivada en su componente geométrica sobre la base del modelo de Pirie y Kieren*. Medellín, Colombia. Universidad de Medellín.

MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, Colombia.

Rendón, C., Ruiz, K., & Córdoba, Y. (2014). *La comprensión del concepto de derivada en el marco de "La enseñanza para la comprensión"*. Medellín, Colombia. Universidad de Antioquia.

Toulmin, S. (1958). *Los usos de la argumentación*. Barcelona: Península.

ANEXO A: Transcripción actividad 1

Video: Actividad1_video1

En esta parte el profesor presenta la actividad y realiza una corta explicación de cómo se deben abordar las preguntas.

Tiempo: 0:00 – 2:33

P: Les dice que hay un punto rojo, ¿cierto? Que yo lo voy a… desplazar sobre una trayectoria que es curva. Que la trayectoria pues va a representar una función $f(x)$, que es la trayectoria verde que ahí aparece. Entonces dice que yo sobre este botón, si mantengo el click ahí, puedo desplazar ese botón [selecciona el punto A y lo mueve]… puedo desplazar ese punto, por la gráfica de la función. Entonces… ¿Cuál es la idea? La idea es que ustedes miren que es lo que pasa con ese triángulo [señala el triángulo de la construcción]… Y ¿Qué es lo que pasa con los valores del triángulo?

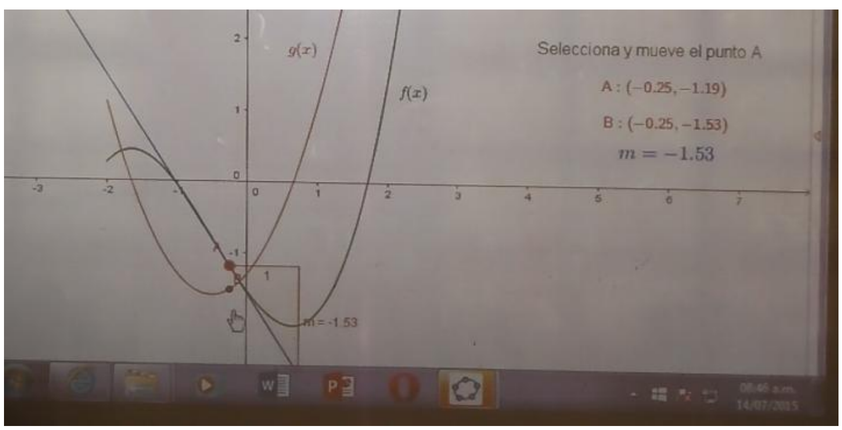


Figura 53. Introducción del profesor a la actividad 1

P: Entonces ustedes saben que es un triángulo rectángulo, ¿cierto?

[Los estudiantes responden afirmativamente]

P: Entonces, ahí hay unos valores que se mantienen y otros valores que van cambiando a medida que el punto A va…transitando por la trayectoria que la definimos como la función $f(x)$.

Estudiante 1: Pero también cambia el naranja [se refiere al punto de la curva $g(x)$]

P: Por supuesto, entonces eso es lo que ustedes tienen que ir analizando. Como dice la compañera, que también cambia el punto naranja, que es el punto B. Y ahí salen una serie de características que ustedes deben analizar. ¿Qué observan con estos valores que ven acá? [El profesor señala los valores de las coordenadas de A y de B y el valor de m]

Estudiante 2: Cambian.

P: Cambian.

Estudiante 3: Que disminuyen a medida que se va hacia el lado izquierdo y aumentan hacia el lado derecho.

P: Bueno, entonces todas esas características son las que tienen que ir mirando. Que estas coordenadas van cambiando a medida que yo voy moviendo el punto A. Y también van cambiando las coordenadas del punto B. Y m, como en la guía se les indica, ¿m es qué? ¿Qué significa?

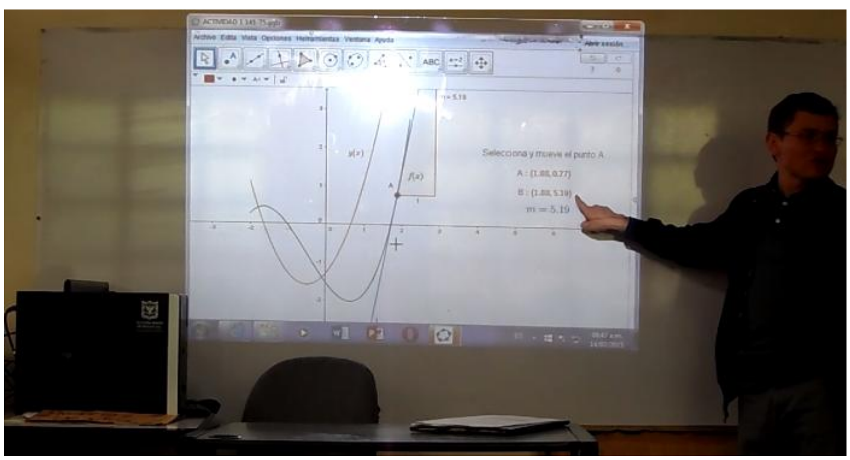


Figura 54. El profesor indica lo que se debe analizar en el Applet de la actividad 1

Estudiante 4: La pendiente de la recta l.

P: La pendiente de la recta, entonces esos valores van cambiando. Entonces… como eso va cambiando, van a ir mirando qué les preguntan en la guía. En la guía hay que completar una tabla. Entonces esta tabla hay que llenarla utilizando los valores que aquí nos salen, ¿cierto? y el valor de la pendiente. Entonces como primer punto vamos a llenar los puntos de la guía y después vamos a contestar cada una de las preguntas.

Video: Actividad1_video2

Inicialmente los estudiantes tienen algunas dudas para llenar la tabla, relacionadas con las coordenadas x y y, dado que las confunden. Así mismo no están seguros de lo que se debe hacer cuando hay un valor en la fila o cuando no hay alguno. El profesor orienta a los grupos con esta parte de la actividad.

Tiempo: 0:00 – 0:30

[El profesor se acerca a uno de los grupos para explicarles como llenar la tabla]

P: -2 y 0,25 son las primeras coordenadas [señala en la guía donde deben escribir esto, que corresponde a las casillas de las coordenadas de A]. De B, -2… 1,1 [señala en la guía donde deben escribir esto]. Y la pendiente 1,1, o sea ya está lleno el primer renglón. [La estudiante va registrando los datos]

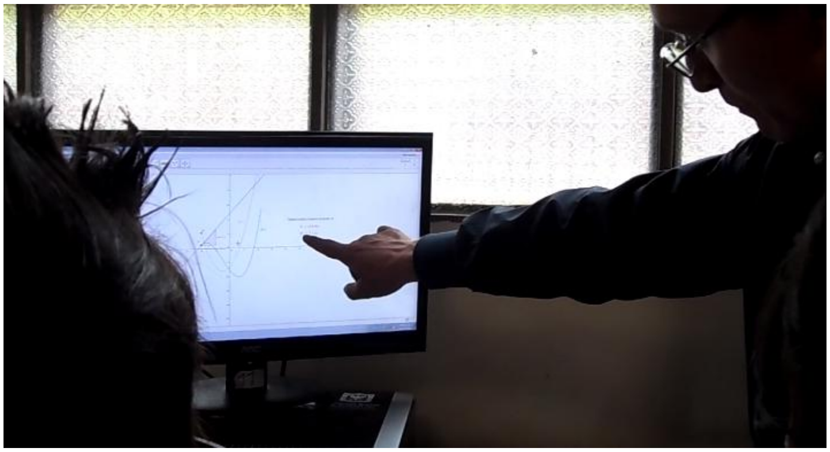


Figura 55. Profesor explicando cómo llenar la tabla de la actividad 1

P: Tienen es que mover el punto y buscar las coordenadas de los otros…

…

Estudiante 3: Acá en cada cuadrito, digamos en este [señala una fila donde solo hay un valor en la pendiente] Digamos aquí toca buscar que la pendiente… dé 1,2 y ya después llenamos los demás.

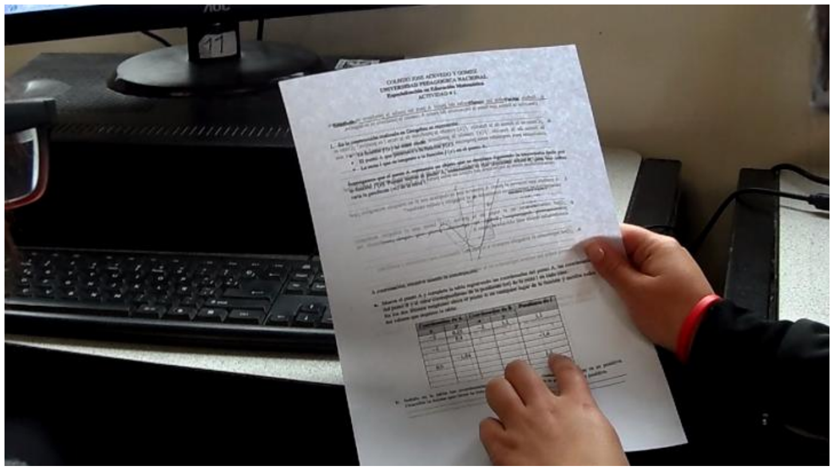


Figura 56. Estudiantes llenando la tabla de la actividad 1

P: Exactamente.

Video: Actividad1_video3

El profesor les señala a los estudiantes que para completar la tabla es necesario buscar partes de la función donde se cumplan ciertas condiciones, por ejemplo, si lo que se necesita es que la pendiente sea positiva, se deben buscar partes de la función donde eso ocurra.

Tiempo: 0:00 –0:15

P: Digamos les da -1,2, pero a ustedes les está interesando es el valor positivo, entonces tienen que buscar el pedacito de la grafica de la función donde esos valores son positivos.

Estudiante 3: Nosotros ya llenamos la tabla.

P: Listo. Entonces ya pueden empezar a responder las preguntas.

Video: Actividad1_video4

Una de las parejas de estudiantes que llenó primero la tabla, procede a responder las preguntas. En este momento, se presentan las siguientes discusiones.

Tiempo: 0:00 –4:33

Estudiante 3: [Lee la pregunta] Señala en la tabla las coordenadas del punto A para las cuales la pendiente m es positiva. Describe la forma que tiene la trayectoria del punto A cuando la pendiente m es positiva.

Estudiante 5: Trayectoria [señala la función verde en el Applet]. Pendiente [señala el valor de m]

[Los estudiantes discuten por un momento qué es lo que deben analizar]

Estudiante 5: Escribamos entre paréntesis este y este [señala las coordenadas del punto A]… es la trayectoria… y son positivos [señala m].

Estudiante 3: Ah bueno… hagámosle.

[Los estudiantes empiezan a anotar coordenadas de puntos en los que m es positivo, en este momento se acerca una de las docentes]

P2: ¿Cómo van? ¿Tienen alguna duda?

Estudiante 3: Si señora. Acá nos están diciendo que…

Estudiante 5: Pues hay que señalar las coordenadas del punto A donde la pendiente sea positiva.

Estudiante 3: Pues nosotros escribimos esto [señala las coordenadas] ¿Si es así?

P2: Entonces miremos en la… miremos digamos aquí en la construcción de GeoGebra, en qué puntos la pendiente es positiva. Por ejemplo, mueve el punto A.

[Los estudiantes comienzan a manipular el Applet]

P2: Por ejemplo, ¿ahí como es la pendiente? En este momento.

Estudiante 3: La pendiente ahí es negativa.

P2: Listo. Entonces tratemos de buscar puntos donde es positiva.

[Uno de los estudiantes manipula el Applet y ubica el punto A donde la pendiente m es positiva]

P2: Trata de dar una característica que tenga la trayectoria de A, o sea la verde, cuando la pendiente es positiva. ¿Cómo es esa trayectoria?

Estudiante 3: Como…

P2: ¿Si? Hay una parte de la curva en la que la pendiente es negativa, hay otra donde es positiva. Entonces trata de mirar cómo qué características tiene esa curva para que la pendiente sea positiva o negativa. ¿Sí?

[Los estudiantes piensan por un momento]

…

Estudiante 5: Aquí comienza lo positivo [ubica el punto A usando el Applet]… es así [señala con el esfero la inclinación de la curva en ese momento].

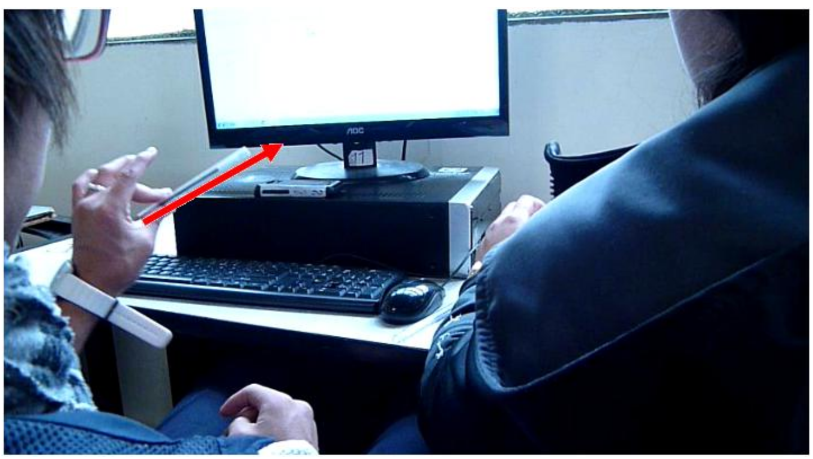


Figura 57. Estudiantes resolviendo las preguntas de la actividad 1

[Los estudiantes usan las manos para tratar de interpretar la forma de la curva]

Estudiante 5: Pues lo que parece es que la curva vaya ascendiendo para que… el valor de $m$sea positivo.

[Los estudiantes vuelven a mover el punto A en el Applet para revisar esta idea sea correcta]

…

Figura 58. Estudiantes discutiendo las preguntas de la actividad 1

Estudiante 3: La parte es positiva cuando hay como una… [Indica una curva con la mano]

Estudiante 5: Espera [sigue buscando valores en el Applet] aquí va así…

Estudiante 3: Ahí va negativo [se refiere al valor de m] y cuando coge la curva redonda, cambia a positivo.

[El Estudiante 5 verifica esta idea en el Applet y ven que es correcta]

Estudiante 5: Si, lo positivo da en las curvas.

Video: Actividad1_video5

Dos estudiantes tratan de responder una de las preguntas de la guía. Una de las profesoras las está orientando.

Tiempo: 0:15-1:58

Estudiante 2: Entonces aquí como podemos ver, la pendiente m está positiva y lo que cambia es que el triángulo siempre va hacia abajo y cada vez baje su… cada vez que vamos bajando, entonces ya ahí llega a ser negativo y el triángulo cambia su forma.

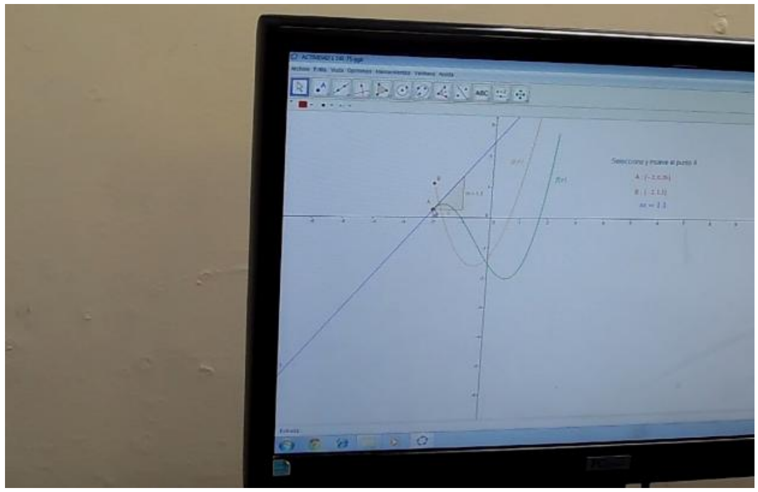


Figura 59. Estudiantes señalando cuando el triángulo está hacia abajo en la actividad 1

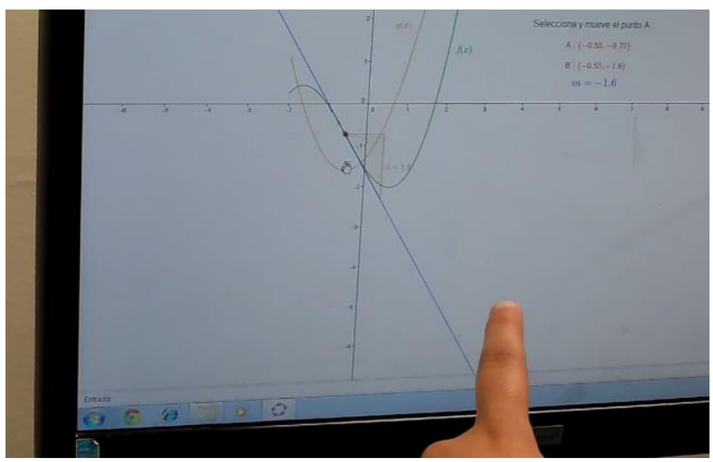


Figura 60. Estudiantes señalando cuando el triángulo está hacia arriba en la actividad 1

Estudiante 6: Cambia de sentido.

Estudiante 2: Y después vuelve a subir y vuelve a ser positivo. Y el triángulo vuelve en a quedar otra forma. Entonces, de pronto el triángulo es el que cambia, a manera de que si está en esta parte de la gráfica o aquí en esta parte de la gráfica [la estudiante señala las dos partes donde el triángulo que representa la pendiente cambia su dirección].

P2: Entonces ahora tenemos que decir que forma tiene… ¿cuál es la trayectoria del punto A?, la verde, ¿cierto? Esa es la trayectoria por donde él se está moviendo. Lo que tenemos que explicar ahí es, ¿cómo es la trayectoria cuando la pendiente es positiva? O sea, ¿el cómo va moviéndose?

Estudiante 2: En esta es bajando… [La estudiante mueve el punto A de derecha a izquierda, y ve que va bajando por la curva]

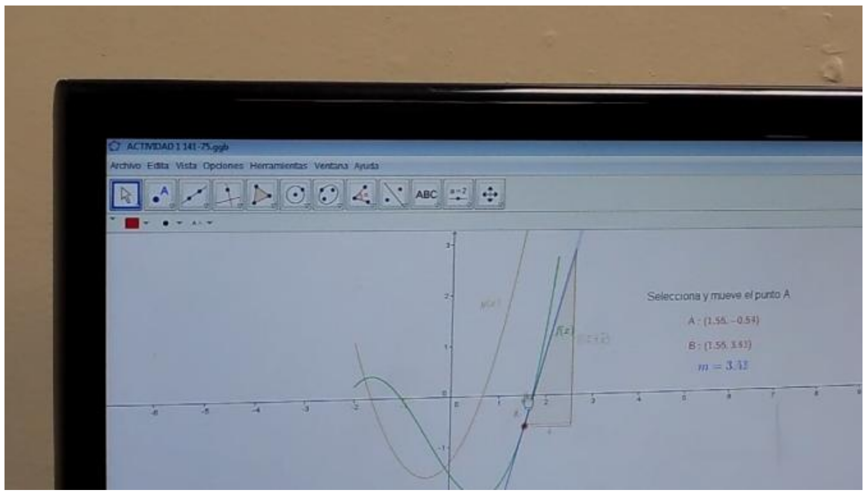


Figura 61. Applet en el que una estudiante analiza la variación de la pendiente en la actividad 1

P2: Pero depende hacia donde vayas, ¿no? Porque tú ahí vas hacia la derecha.

Estudiante 2: Si vamos hacia la derecha, ahí baja, sigue siendo positiva.

P2: Hacia la izquierda sería bajando.

Estudiante 2: Si, hacia la izquierda seria bajando. Sigue positivo la pendiente. Después vamos hacia la izquierda y sube, ¿sí?... Ya vuelve a ser negativo. Ya llegando a esta parte de la gráfica [señala la parte de la curva donde hay un cambio de dirección y un máximo], sigamos subiendo, vuelve a ser positiva y queda casi semirrecta. ¿Ya?

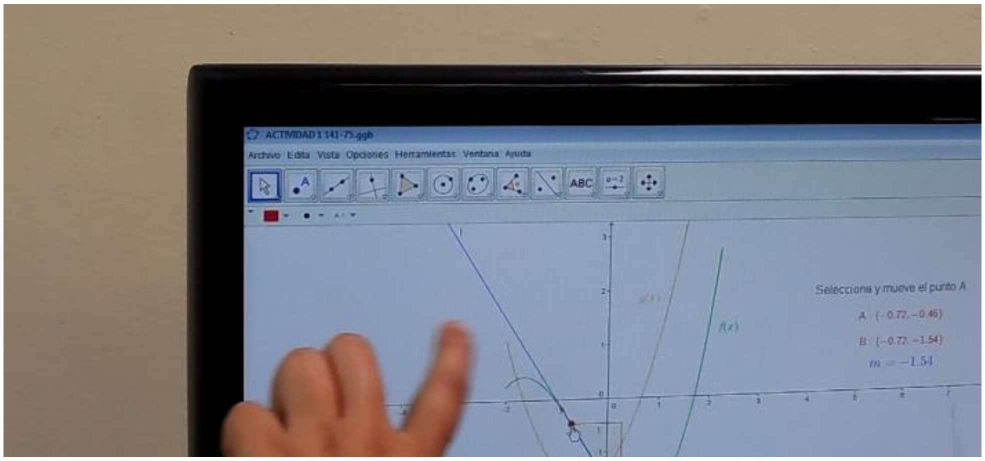


Figura 62. Applet en el que una estudiante observa donde cambia el signo de la pendiente en la actividad 1

P2: O sea, ¿a qué te refieres con semirrecta?

Estudiante 2: Pues que no queda completamente recta la línea.

P2: Horizontal dices tú.

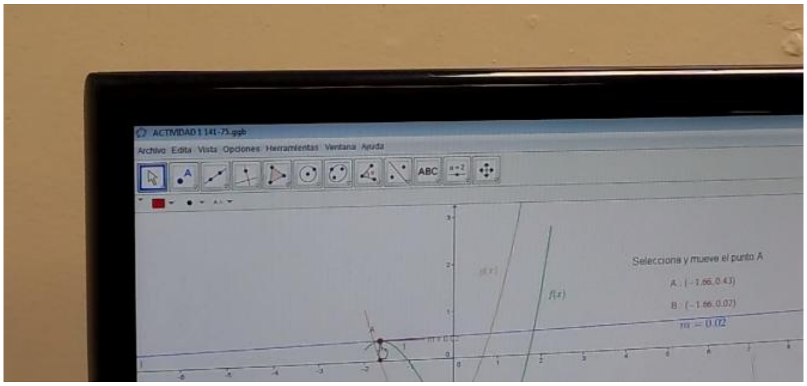


Figura 63. Applet en el que una estudiante observa el sentido de la recta l de la actividad 1

Video: Actividad1_video6

El profesor vuelve a pedir la atención de los estudiantes para explicar algunos aspectos que se han trabajado hasta el momento.

Tiempo: 0:00- 2:52

P: Atención. Miren, si ustedes se dieron cuenta con la experiencia que … con la experiencia que ya hicieron con la tabla, se dieron cuenta que ustedes a medida de que mueven el punto A, miren, miren ahí donde empieza la pendiente, todos van a observar el valor de m. Aquí m es positivo, ¿cierto? $m$es positivo. Y si usted sube un poquito, va mirando despacio…Mire ahí la pendiente sigue siendo positiva.

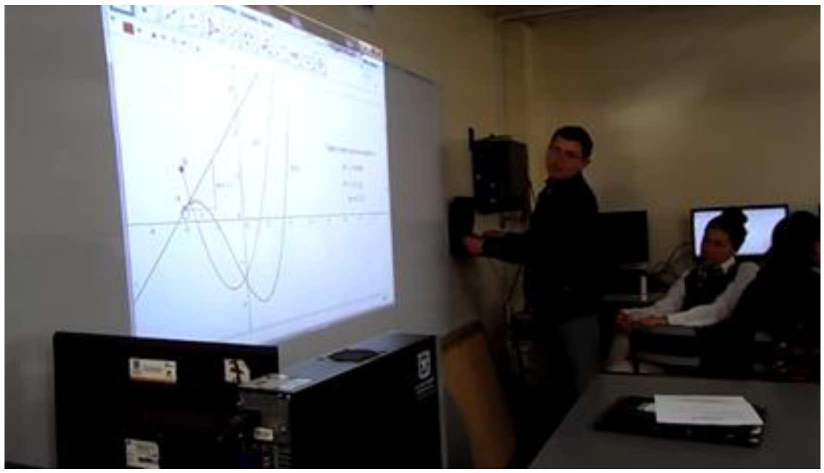


Figura 64. Profesor describiendo la trayectoria del punto A de la actividad 1

Estudiante 2: Pero va disminuyendo.

P: Positiva, pero va disminuyendo, muy bien como usted lo dice. Aquí ya casi, es cero [El profesor continua deslizando el punto A de izquierda a derecha]. 0,13, sigue, ahí ya pasa a ser negativa. Todo este pedazo la pendiente es…

Estudiantes: Negativa.

P: Sigue avanzando y la pendiente sigue siendo negativa. Luego, llego acá a la parte de abajo. Es negativa, pero ya casi es cero porque es -0,4. Aquí -0,15, ya casi es cero. Y observen lo que pasa con el triángulo. ¿Qué pasa con el triángulo?

Estudiante 2: Que se empequeña.

P: Que queda muy pequeñito el triángulo. Luego, sigue subiendo…

Estudiante 7: Y ya es positivo.

P: Y acá el triángulo, ¿si ven que cambio de sentido? Miren, un paso antes el triángulo estaba hacia abajo, ¿cierto? y acá quedo hacia arriba. Pero sigue siendo el triángulo muy pequeño. Acá el triángulo se va agrandando y la pendiente es…

Estudiante 2: Positiva.

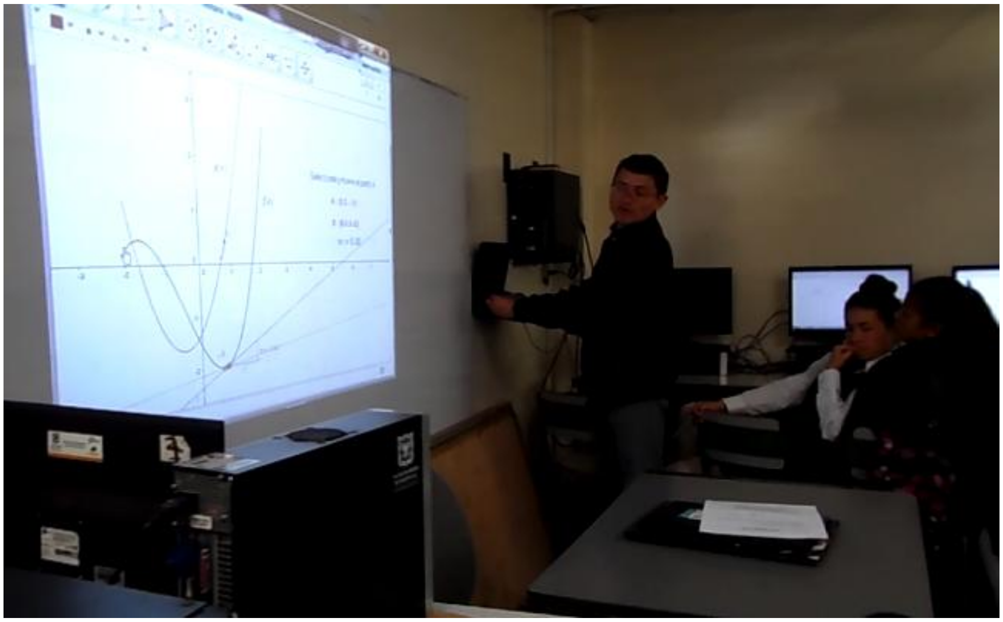


Figura 65. Profesor describiendo los cambios en el triángulo de la actividad 1

P: Positiva. Entonces la pregunta en sí es, ¿qué forma tiene la gráfica de la función cuando la pendiente es positiva?

Estudiante 2: Que el triángulo queda hacia arriba.

P: El triángulo queda hacia arriba, muy bien, pero esta pregunta se refiere es a qué forma tiene este pedacito de la gráfica de la función o acá este pedacito cuando la pendiente es positiva [el profesor señala las dos partes de la gráfica de la función $f(x)$ en los que la pendiente es positiva].

Estudiante 1: La curva va hacia abajo.

[Los estudiantes hablan todos al mismo tiempo, el profesor les asigna la palabra]

P: Esperen un momentico, yo los dejo hablar de a uno. ¿Qué dice usted? Solamente hable usted y ahorita la dejo hablar a ella.

Estudiante 8: Que pues cuando la pendiente es negativa, el triángulo queda hacia abajo. Y cuando la pendiente es positiva, el triángulo queda hacia arriba.

P: El triángulo queda hacia arriba, ¿Y qué pasa con esta línea? [Señala la función verde]

[Los estudiantes hablan al tiempo de nuevo]

P: Hable usted ahora.

Estudiante 3: La variación de la función verde… la variación de positivo y negativo se encuentra en la función verde en el lado de las curvas. El positivo está siempre al lado de las curvas. El negativo está siempre casi en lo recto.

Video: Actividad1_video7

El profesor trabaja con una pareja de estudiantes para intentar responder una de las preguntas de la guía.

Tiempo: 0:00-1:54

P: ¿Cómo es la trayectoria en este pedacito donde la pendiente es positiva? Mire aquí en este pedacito la trayectoria es positiva, la pendiente positiva y aquí en este pedacito también. ¿Qué tienen en común este pedacito y este pedacito?

[El profesor señala sobre la pantalla del computador estos aspectos]

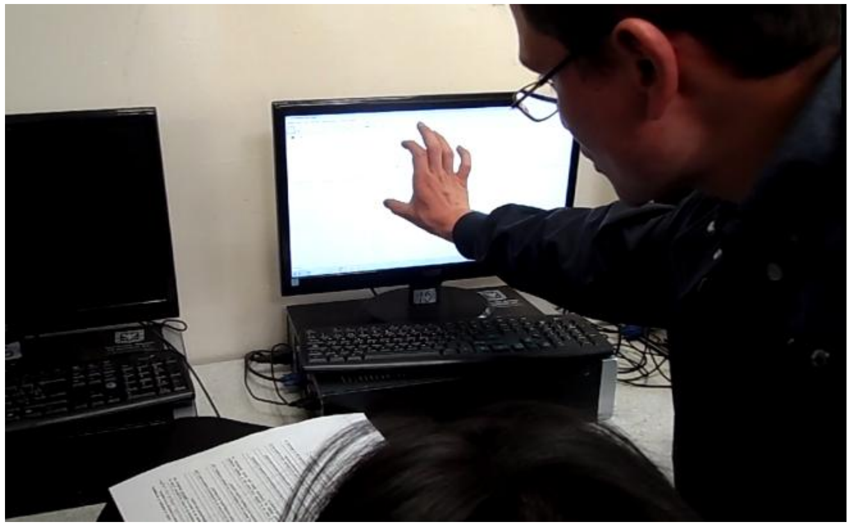


Figura 66. Profesor señalando partes de la función donde la pendiente es positiva en la actividad 1

Estudiante 7: Que van… o sea van de… ¿cómo le explico que está así y no así? [La estudiante indica con la mano la inclinación de la curva donde la pendiente es positiva]

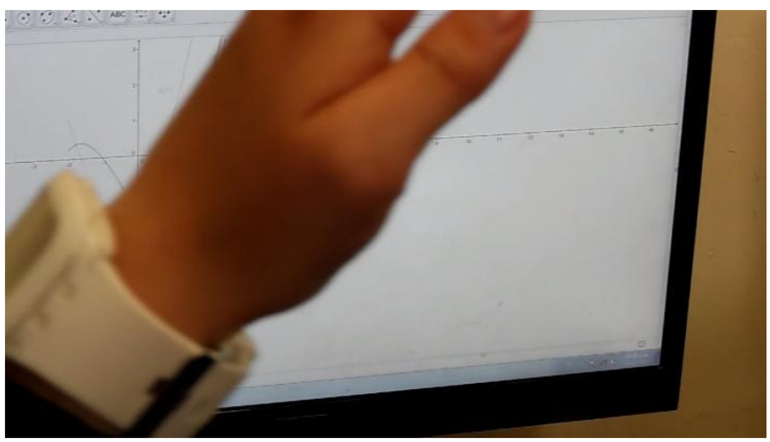


Figura 67. Estudiante describiendo la pendiente de la tangente en la actividad 1

P: Bueno digamos que usted va de izquierda a derecha. Si usted arranca de aquí [señala el punto de inicio de la curva en la parte izquierda] y sigue así [señala la trayectoria hacia la derecha]. Si va de izquierda a derecha. ¿Cómo diría que va? ¿Hacia a donde?

Estudiante 7: Todo lo que va subiendo.

P: ¿Todo lo que va subiendo la pendiente es?

Estudiante 7: Positiva.

P: Y si…

Estudiante 7: Si va bajando, es negativa.

P: Si va bajando es negativa. Suponiendo que su trayectoria… que usted coge como si esto fuera un carrito, vea. Aquí arranca [el docente empieza a mover el punto A del Applet para explicarle a la estudiante]. Pendiente es positiva, ¿cierto? Positiva. Aquí llega a una cima, y aquí la pendiente si ve que ya pasa a ser negativa. Pendiente negativa. Negativa, hasta ahí, que cambia el triángulo y empieza a ver la pendiente positiva. Entonces yo lo que quiero es que en esta pregunta usted me diferencie, ¿qué pasa con la función cuando la pendiente de la recta azul es positiva? y la forma de la función donde la pendiente de la recta l es negativa y que establezca una conclusión. Que mire, ¿qué diferencias hay entre esos pedacitos?

Figura 68. Profesor señalando partes de la función donde la pendiente es positiva y negativa en la actividad 1

Estudiante 7: ¿Puedo poner esto?...La diferencia que encontramos es que, si va de izquierda a derecha, cuando va subiendo tiene signo positivo y cuando va bajando cambia para el signo negativo.

P: Si. Eso es lo que debe colocar. Muy bien.

Video: Actividad1_video8

Nuevamente el profesor socializa lo que los estudiantes han encontrado hasta ahora.

Tiempo: 2:40-3:50

P: Entonces, si vamos igual de izquierda a derecha. Entonces, repasemos. En este pedacito la pendiente es…

Estudiantes: Positiva.

P: Menor y positiva. ¿Cierto? Sigue siendo positiva hasta cuando llega, ¿hasta dónde?

Figura 69. Profesor realizando el recorrido de izquierda a derecha con el punto A en la actividad 1

Estudiante 3: Hasta ahí, hasta abajo.

P: Hasta ahí. [Ubica el punto A en un mínimo relativo de la curva]

Estudiante 2: Pero hay otra cosa que pasa profe.

P: Dígame.

Estudiante 2: Que cuando está en este lado, el triángulo ya no es grande sino pequeño.

P: Si.

Estudiante 2: Y que al ser positivo en el otro lado ya es mucho más grande [se refiere a las dos partes donde la pendiente es positiva]

P: Ya es mucho más grande

Estudiante 8: Eso es lo que decimos, es mayor la pendiente.

P: Es mayor la pendiente.

Estudiante 2: Pero, ¿por qué no pasa lo mismo aquí, si en juntos lados es positiva?

P: Porque será…

Estudiante 8: Porque la curva es más pequeñita. La curva es más pequeñita. Por eso es más grande la pendiente de este lado que la de este lado.

Estudiante 2: Ah por la curva.

P: Por la curva, porque es que esta curva está así, como más agachadita. En cambio acá ya está casi vertical. Entonces es por eso que varía el valor de la pendiente

[El profesor muestra con las manos que la inclinación en una de las partes donde la pendiente es positiva es menor que en la otra]

Figura 70. Profesor mostrando la inclinación de la curva en una parte en la actividad 1

Video: Actividad1_video9

Una estudiante se encuentra respondiendo en qué partes de la función $f(x)$ *la pendiente de la tangente es igual a cero.*

Tiempo: 0:04 – 0:20

Estudiante 7: Pues llega… Se desaparece pues llega un punto en que está intermedio entre lo positivo y lo negativo.

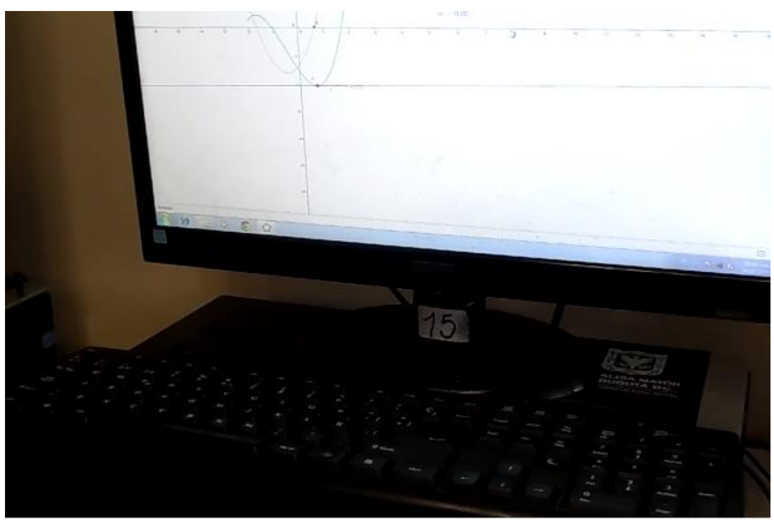


Figura 71. Applet donde una estudiante indica donde la pendiente es cero en la actividad 1

P2: Okey, esa podría ser una respuesta. ¿Listo?

Estudiante 7: Y así con cada uno. Por ejemplo, acá puede haber otro punto [señala otro punto de la gráfica donde ella cree que la pendiente de la tangente será cero].

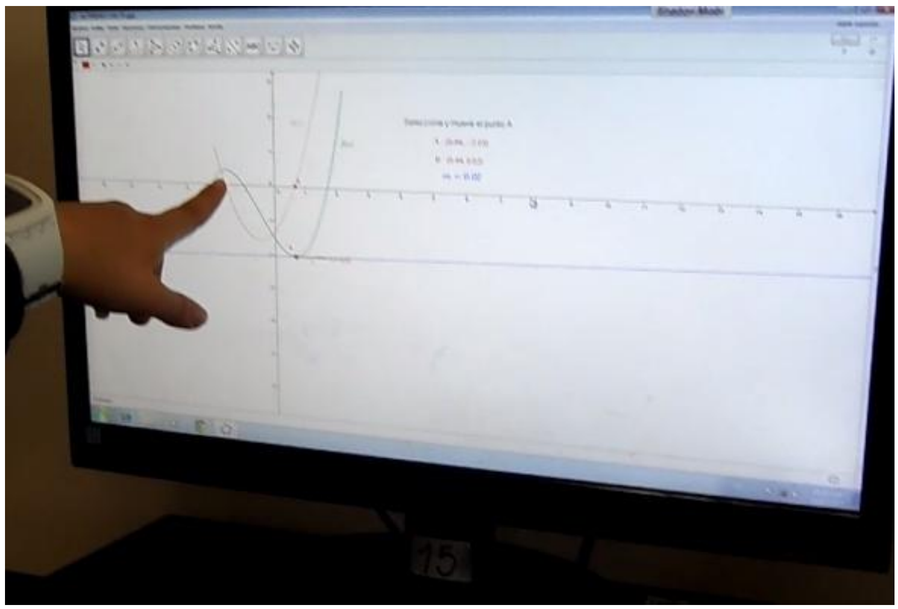


Figura 72. Applet donde una estudiante indica otros puntos donde la pendiente es cero en la actividad 1

P2: Tú dirías que ahí hay otro.

Estudiante 7: Si.

Video: Actividad1_video10

El profesor trata de establecer conclusiones más fuertes junto con los alumnos.

Tiempo: 3:03 – 8:31

P: ¿Qué observaron de común entre estos tres valores?... Entre estos tres valores, ¿qué observaron de común? [Señalando las coordenadas de A y B, y el valor de la pendiente m]

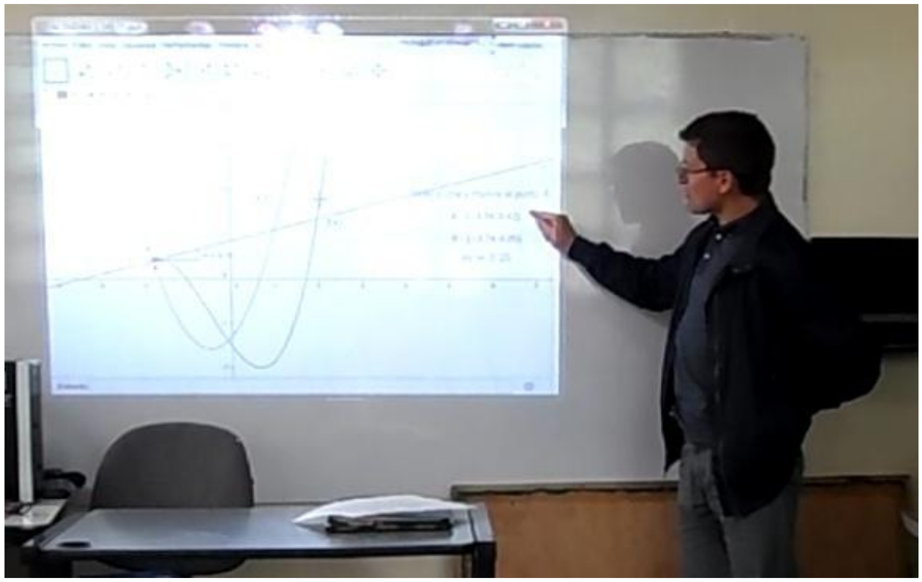


Figura 73. Profesor señalando las coordenadas de A, B y el valor de la pendiente en la actividad 1

[Los estudiantes empiezan a hablar todos al mismo tiempo]

P: Perdón, vamos a hablar de a uno. Uno, dos y tres [Les da la palabra a los estudiantes]. Uno.

Estudiante 4: Que el resultado de $x$de A y B, siempre da igual. Y que el resultado de y y de m siempre da lo mismo.

P: Vamos a ver si nos logramos entender. ¿Me podría explicar mejor lo que acabo de decir? …

Estudiante 4: [Piensa por un momento]

P: ¿Qué es lo que observa que es común?

Estudiante 4: Que la x de A y la x de B siempre es igual.

P: Igual, siempre es igual

Estudiante 4: Y que la y.

P: ¿La y de quién?

Estudiante 4: La y de B.

P: La y de B, osea esta [El profesor señala la ordenada de B en el tablero]

Estudiante 4: Y la m siempre dan igual.

P: La pendiente [Señala el valor de m en el tablero]

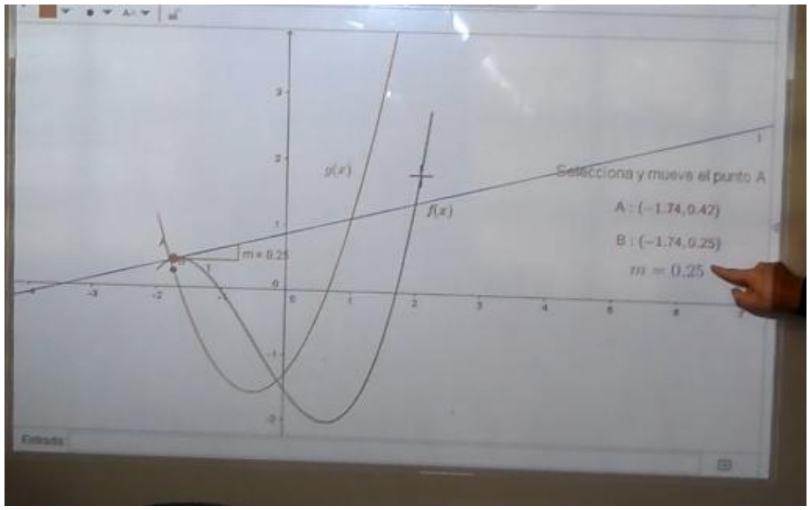


Figura 74. Profesor señalando el valor de la pendiente en la actividad 1

Estudiante 4: La pendiente y la y de B siempre dan lo mismo.

P: Si. Él nos está diciendo que la pendiente, la pendiente que es esta y la y de B son lo mismo. O sea que ahí está bien, vean acá tenemos 0,25 y acá 0,25. Está bien lo que él dijo, ahora,¿qué tienes que decir? [Le da la palabra a otra estudiante].

Estudiante 7: Las coordenadas A y B… en el eje x son lo mismo. Pero la pendiente de i depende de las cordenadas de y en B.

P: La segunda parte no comprendí muy bien.

Estudiante 7: Pues la pendiente de i depende de las coordenadas de B.

P: ¿i donde lo tenemos? ¿Será y o i? [Señala la ordenada de B]

Estudiante 7: De y.

Estudiante 3: Y ahí es la pendiente.

Estudiante 7: La pendiente le da las coordenadas de B, depende de las coordenadas de y. ¿No? ¿No es?

P: Si, ¿De qué punto? ¿Del A o del B?

Estudiante 7: Del B.

P: Del B. Entonces…

Estudiante 7: O sea, el m depende del punto de coordenadas de la B en la y.

P: De la B en la y. Listo, lo que pasa es que ahí no está como muy clara la redacción, entonces tocaría...

Estudiante 3: Que… La coordenada de y tiene que dar en la pendiente… El mismo resultado.

P: Bueno, ahí yo le entiendo pero entonces tiene que mejorar un poquito la redacción. Ahora, ¿qué nos representa entonces...? , la pregunta para todos, ¿qué nos representa la gráfica $g(x)$? Que es esta que aparece en café [Señala la gráfica de $g(x)$ en el tablero]. ¿Qué nos representa la gráfica $g(x)$?

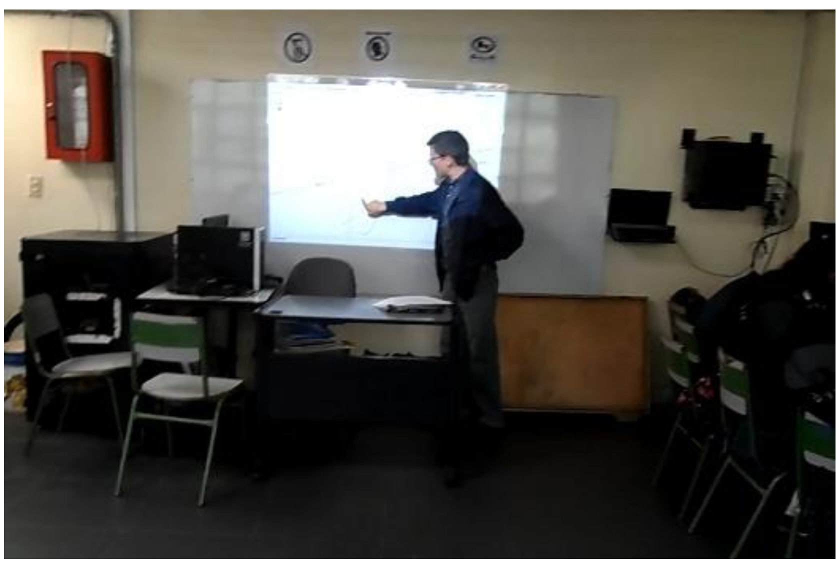


Figura 75. Profesor señalando la función g(x) en la actividad 1

…

Estudiante 4: Una línea complementaria de $f(x)$.

P: ¿Una línea que qué?

Estudiante 4: Una línea complementaria de $f(x)$.

P: Complementaria, pero, ¿de dónde sale? A partir de lo que hemos trabajado. ¿Qué tienes que decir?

Estudiante 1: ¿Eso podría ser digamos coseno, no?

P: No…

Estudiante 1: No, porque digamos que las curvas de coseno van bajando y subiendo [Indica con la mano la forma de la función coseno]. Y vea que esa es diferente a la otra.

P: Si. Pero, de acuerdo con lo que hemos trabajado, ¿cómo usted supone que resulta $g(x)$?

Estudiante 3: Una línea.

P: ¿Una línea que describe qué puntos?

Estudiante 7: Profe, pero es que ahí la $f(x)$ es paralela a $g(x)$.

Estudiante 3: Las coordenadas y de B.

Estudiante 7: ¿Ya? y tiene, o sea, va igualmente vertical. ¿Vertical? No, horizontal. Pero cambia en la vertical [Señala con las manos estos sentidos]

P: Si.

Estudiante 4: No, si va en vertical pero cambia en la horizontal.

…[En este momento hay confusión respecto a los sentidos horizontal y vertical, que interpretamos que los estudiantes usan para referirse a las coordenadas en *x* y en *y* del punto]

P: Entonces, se supone que las que son horizontales son las coordenadas de *x*, o sea la primera coordenada que nos corresponden a este eje [Señala el eje *x*].

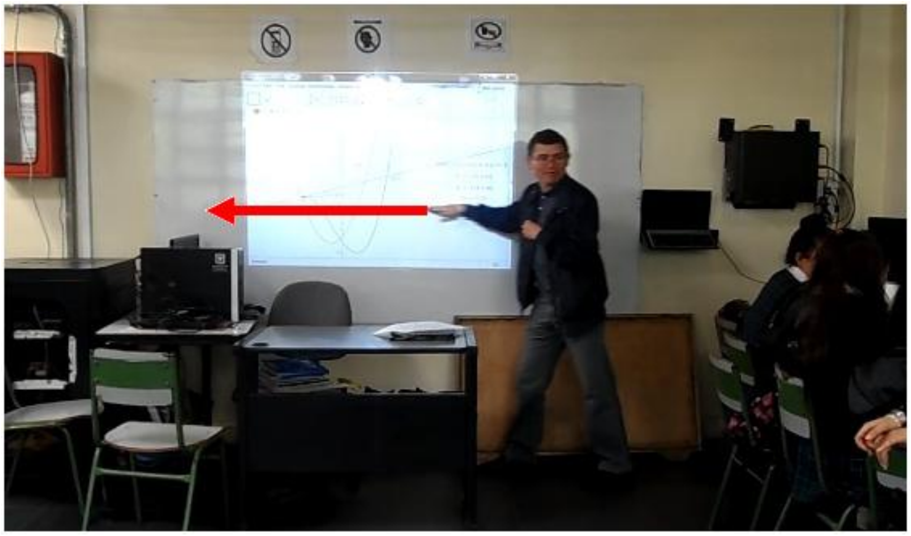


Figura 76. Profesor señalando el eje x en la actividad 1

P: Y vertical son estas dos coordenadas [señala las ordenadas de los puntos] que nos corresponden al eje [señala el eje *y*].

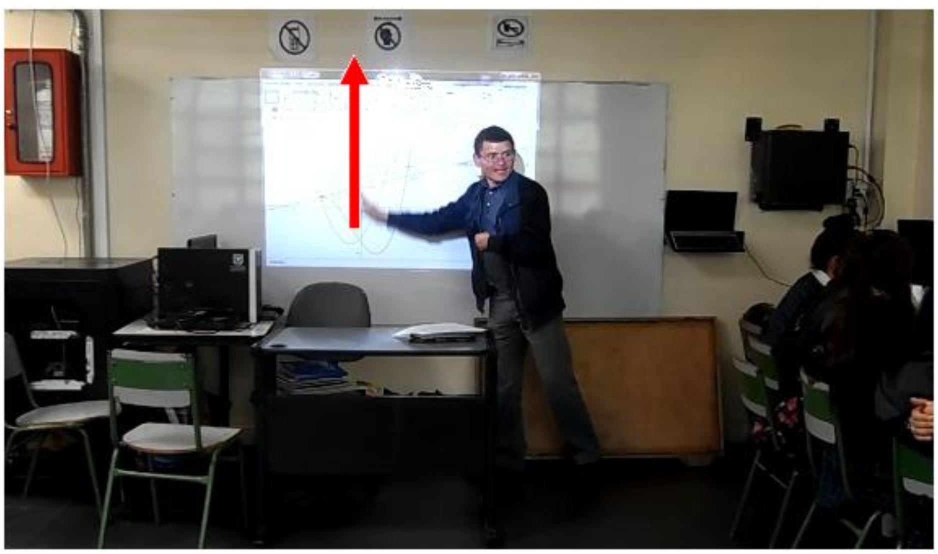


Figura 77. Profesor señalando el eje y en la actividad 1

P: Entonces, lo que usted decía, me lo repite. Entonces, ¿qué nos representa la función*(x)*?

Estudiante 3: [Piensa por un momento]

P: Lo que usted dijo ahorita.

Estudiante 3: Que las coordenadas…

P: ¿Las coordenadas de qué?

Estudiante 3: Las coordenadas de B, *x* y *y*.

P: ¿Las coordenadas de B?

Estudiante 3: Si, algo así, es que ya se me olvidó.

Estudiante 1:*x*y *y* de B.

Estudiante 3: No, la función g nos muestra las coordenadas del punto B en *x* y en *y*.

P: Exactamente. Porque lo que está mostrando *g(x)* es el recorrido de los puntos que hacen…

Estudiante 3:*x* y *y*.

P: ¿*x* y *y* en el punto qué?

Estudiante 3: en el punto B.

P: B. Entonces eso nos sirve ahí para las conclusiones que estamos haciendo.

Video: Actividad1_video11

Una de las profesoras trata de responder la última pregunta, respecto al significado de la función g(x), con una estudiante.

Tiempo: 3:55 – 4:49

P2: Listo. Recuerda que B… ¿Cuáles son las coordenadas de B? ¿Cuál es la coordenada *x* de B?... La misma de A.

Estudiante 7: La de B es la misma de A.

P2: Y la coordenada *y* de B es…

Estudiante 7: La misma de la pendiente.

P2: Es la pendiente. Si, o sea que, ¿qué representa la función *g(x)*?

Estudiante 7: ¿Qué representa la función *g(x)*? Pues la misma… coordenada de B… *y* en B.

P2: ¿De *y* en B? O sea, ¿qué es la coordenada de *y* en B?

Estudiante 7: La pendiente.

P2: La pendiente, o sea que, ¿qué te está representando la función *g(x)*?

Estudiante 9: La pendiente.

P2: Pero hay que explicarlo mejor ¿no?, no es solo la pendiente, si no es como el cambio…

ANEXO B: Transcripción Actividad 2

Video_1 (00:00 – 2:59)

P: Entonces nos vamos a fijar en lo que dice "La construcción en GeoGebra corresponde a un cilindro inscrito en una esfera" ¿Qué quiere decir eso? El cilindro que se ve acá en verde está dentro de la esfera que se ve ahí más grande. [Explica el profesor mientras los estudiantes lo siguen en sus respectivos computadores]

Figura 78. Profesor explicando la utilización del Applet de la actividad 2

Estudiante x: El mío no tiene esfera [Se escucha este comentario sin lograr identificar que estudiante lo hizo]

[A lo cual, el profesor responde]

P: De pronto está muy clarita, le falta de pronto oscurecer el color de la esfera pero ahí está, se ve clarita, y además es el mismo archivo el que yo tengo acá que el que ustedes tienen en su computador

[El profesor continúa explicando a todos los estudiantes]

P: Entonces miramos aquí hay un deslizador qué sirve para agrandar el radio de la esfera y así mismo como se agranda el radio de la esfera se agranda o se reduce el cilindro que igual queda dentro o inscrito dentro de la esfera, listo, Entonces lo vamos a dejar ahí en 3 como nos indica la guía listo Entonces dice “Puedes mover el punto D” Entonces sí vamos a mover el punto D yo puedo modificar el cilindro entonces al modificar la altura del cilindro cómo está inscrito dentro de la esfera cuando ya queda muy alto, ya hasta aquí queda con su máxima altura pero entonces se reduce acá, a casi nada, cierto entonces a medida que le voy bajando un poquito la altura pues yo me imagino que voy a encontrar un punto donde el volumen sea máximo porque aquí con la máxima altura el volumen es 0 porque queda reducido una línea el cilindro y aquí se va aumentando se va aumentando y de haber un punto donde el volumen al máximo [El docente busca que los estudiante interactúen con el computador al tiempo que él explica para que vallan observando si lo que él dice es cierto]

Figura 79. El profesor va haciendo algunos movimientos en el deslizador para recordarles a los estudiantes su utilización en la actividad 2

Entonces esto ustedes ya lo sabían desde la actividad anterior de mover esa parte. Entonces dice “Puedes mover el punto D para modificar la altura del cilindro y el deslizador radio-esfera” que es el de acá que ya lo movimos para modificar el radio de la esfera en la vista gráfica, como ustedes pueden ver, vista gráfica se observa la función.

Video_2 (00:00 – 1:35)

P: Y me quedó qué el volumen del cilindro es? [El docente señala con su mano, los primeros datos, en el Applet]

[Los estudiantes que responden no se identifican quienes son]

Estudiante x: 14,06

P: 14,06

Estudiante 3: No acá da 16,01

P2: Tiene el radio 3 la esfera, arriba en el deslizador esta en 3

Estudiante 4: No

P2: Ay que poner el deslizador en 3

P: Listo , entonces ya está lleno ese primer renglón, en la guía ya está lleno, entonces de acuerdo con lo que acabo de explicar me hacen el favor y llenan los otros renglones.

Estudiante 3: [Llaman al profesor y le muestra su inquietud, sin embargo por el ruido de unas sillas, no se alcanza a comprender cuál era esta]

P: ¿Cuánto le da?

Estudiante 4: 14,06, ah si ya [Siente satisfacción al ver que le da el volumen del ejemplo en su computador]

P: Si ahí ya está bien, entonces hagamos los otros

P: [Se dirige hacia la estudiante 1 y le vuelve a leer la guía, aclarándole que el radio debe ser 3 unidades y luego se dirige a todos los estudiantes] Recuerden que el radio de la esfera es 3 unidades, con eso es con lo que vamos a empezar trabajar

(2:20 – 8:22)

Estudiante 1: Qué tal le dio la altura del cilindro

Estudante2: Ay y si da aproximado

Estudiante 1: Profe y si da aproximado

Estudiante 2: ¿si me sirve?

P: La mayoría de esos valores da ¿Cuál va hacer?

Estudiante2: Este [El profesor toma el mouse] El de abajo

Estudiante2: 0,9 A ya, si no da en el uno, da en el otro

P: Sí lo que pasa es que usted ya lo había bajado y prácticamente estaba trabajando al contrario

Estudiante 2: ¿29?

Estudiante 1: 85... Ahí yo quiero manejar el Applet

Estudiante 2: Emm, en este volumen necesito que me de 39,44

Estudiante 1: Altura del cilindro 1,49

Estudiante 2: Ahora en altura del cilindro escriba 1,98...

Estudiante 1: ¿1,98?

Estudiante 2: Si… mmm cuanto me da en el volumen del cilindro

Estudiante 1: 49,86

Estudiante 2: En el volumen del cilindro 58,2 [la niña registra en la hoja lo que ve]

[Durante un lapso de tiempo las estudiantes solo manejan el Applet tratando de encontrar los valores que se les da en la hoja para completar el cuadro, donde esta actividad les da alegría**]**

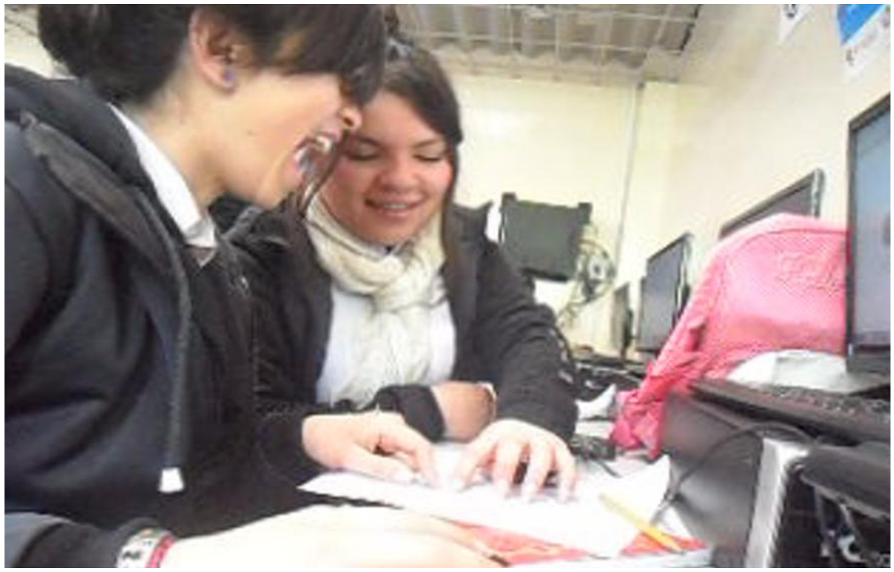


Figura 80. Reacción de dos estudiantes cuando hallan un valor que necesitan en la actividad 2

Estudiante 1: En la altura del cilindro 2,96

Estudiante 2: El volumen es 63,35

[El profesor pregunta si ya acabaron el ejercicio]

Estudiante2: Venga yo busco y usted escribe [estudiante asumen roles]

Estudiante 1: En altura del cilindro, eh no mentiras el volumen del cilindro es 65,3

Estudiante 2: Coma 3 o coma 03

Estudiante 1: coma 3

Estudiante 2: La altura es 3,46 bueno ahora en la altura 4,05

(8:23 – 12:53)

P: Bueno, entonces presten atención, vamos a pasar al punto "b" de la guía, miren aquí lo que dice, dice que "muevan cuidadosamente el punto D" para ver cuál es el volumen máximo y resulta que dice que se fije en el movimiento del punto P, el punto P ¿Qué nos representa, este movimiento del punto p? ¿Qué nos representa?

[El profesor, busca que los estudiantes encuentren una evidencia, para que fundamenten una aseveración]

Estudiante 2: La altura del cilindro

P: La altura del cilindro con el correspondiente ¿Qué?

Estudiante 2: volumen

P: Volumen, entonces si usted mueve el punto "P" ahí le cambian los valores, y así como cambian los valores de la altura y el cilindro también va a cambiar la posición de este punto P, entonces ahí les preguntan que...miremos en donde se ubica el volumen máximo entonces observen los valores de altura, entonces aquí el volumen del cilindro esta en 58,46 y la altura esta en 4,34 ¿será que hay valores mayores?

Estudiante x: En 59,46

Estudiante x: En 65,29

[Los estudiantes realizan unas afirmaciones, lo cual los lleva luego a una decisión común]

P: Bueno entonces usted dice en 65, entonces donde está el punto ¿Sera que esa curva que está ahí me sirve para algo?

Estudiante X: La altura del cilindro [La respuesta del estudiante, es debido al razonamiento que realiza]

P: La altura del cilindro con respecto ¿a qué? al volumen

Estudiante 2: Cuando está en la mitad de la curva es volumen máximo que tiene el cilindro [Argumenta, con respecto a lo que observo en el applet]

P: [Busca poner el punto P, donde le dice la estudiante]

Estudiante 2: A mí la altura me dio 3,46

P: Pero entonces como ustedes dicen que en la punta o en la mitad, es como la cima de esa curva, en donde vamos a encontrar, yo aquí no lo moví exacto, ustedes tienen que mover donde les de aquí el máximo volumen, ósea este valor sea el máximo porque ese el valor que ustedes tienen que hallar, entonces muevan, el punto máximo es más que 65, entonces cada que muevan el punto D, y encuentren el punto máximo

Entonces cada quien ponga el volumen máximo y mire que es lo que sucede entre los datos que usted tiene aquí y en la vista gráfica y valla mirando que más observa ahí.

(12:53 – 15:31)

Estudiante 2: [Lee el punto b**] "**Mueva cuidadosamente el punto D y observa el cambio en los valores de las coordenadas del punto p**"**

Estudiante 1: ¿Cuál es el punto D y el punto P? Aaa ya sé que es, ósea mueve el punto D

Estudiante 2: Ajam

Estudiante 1: Y observa que cambio de valores, ósea los de allá [Señala con la cara y luego con las manos en el computador donde está el Applet y se ve P] los de P, si ve P

[Las dos niñas se acercan a la guía, y leen lo que les falta del punto]

Estudiante 2: El volumen máximo, entonces suba… [Su compañera manipula el Applet] baje, ay pero donde se vea el número

Figura 81. Con un movimiento rápido de la mano, le explica a su compañera tiene que mover la gráfica para encontrar el punto máximo en la actividad

Estudiante 1: Donde altura

Estudiante 2: Noo, porque ahí nos están es preguntando volumen máximo [Toma el mouse y maneja el Applet hasta encontrar el volumen máximo, siguiente toma la guía y anota su respuesta]

Estudiante 2: Paula le dio 0,82

Estudiante 3: No, ¿En cuál?

Estudiante 2: En la b

Estudiante 3: Si es el volumen máximo

Estudiante 2: Por eso, mire

[La estudiante 3 se acerca al computador de su compañera para revisar el otro computador, toma el Applet y le ayuda a ubicar en el resultado 65,29**]**

Video_3 (00:00 – 1:52)

Estudiante 3: [Resolviendo el primer punto de la guía] Y en el último nos inventamos

P2: Si correcto

Estudiante 3: [Observa los resultados] Listo profe, ya acabamos

P2: Continúa con el otro

Estudiante 3: [Inicia leyendo el punto 2] dice "Mueve cuidadosamente el punto D y observa el cambio en los valores de las coordenadas del punto P" [deja la hoja para indicar en la pantalla] toca mirar aquí

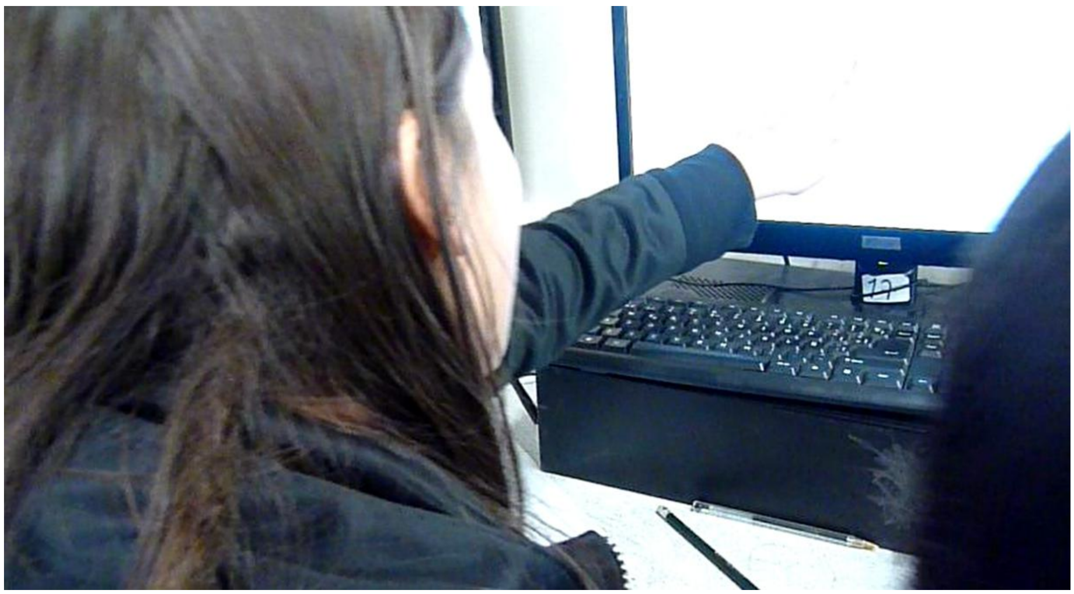


Figura 82. La estudiante indica en el computador los puntos que hay observar en la actividad 2

Estudiante 4: [Lee la segunda pregunta] ¿Cuál es el volumen máximo?

Estudiante 3: [maneja el mouse a medida que escucha la lectura]

Estudiante 4: Mueve hacia arriba, arriba, arriba, suave, baje, no pero hacia este lado, baje un poquito, baje

Estudiante 3: El volumen máximo

Estudiante 4: El volumen máximo

Estudiante 3: Cuál va primero el 3 0 el 5

Estudiante 4: 5,92[Pasa la hoja para llenar el dato]

[Las estudiantes finalmente encuentran el volumen máximo del cilindro, escribiendo en la guía 65,29]

(2:03 – 3:19)

Estudiante 5: [A medida que va leyendo va mirando y señalando con su dedo la gráfica y del elemento que le hablan] “¿Cuál es el volumen máximo que puede tener el cilindro?” ósea este [lo señala con el dedo en el Applet] “inscrito en la esfera de 3 unidades de radio” hay no mire, mire ya porque mire [vuelve y mira la gráfica, luego vuelve a leer la pregunta para mostrarle a la estudiante 6] ¿Cuál es el volumen máximo del cilindro inscrito en la esfera de 3 unidades de radio?

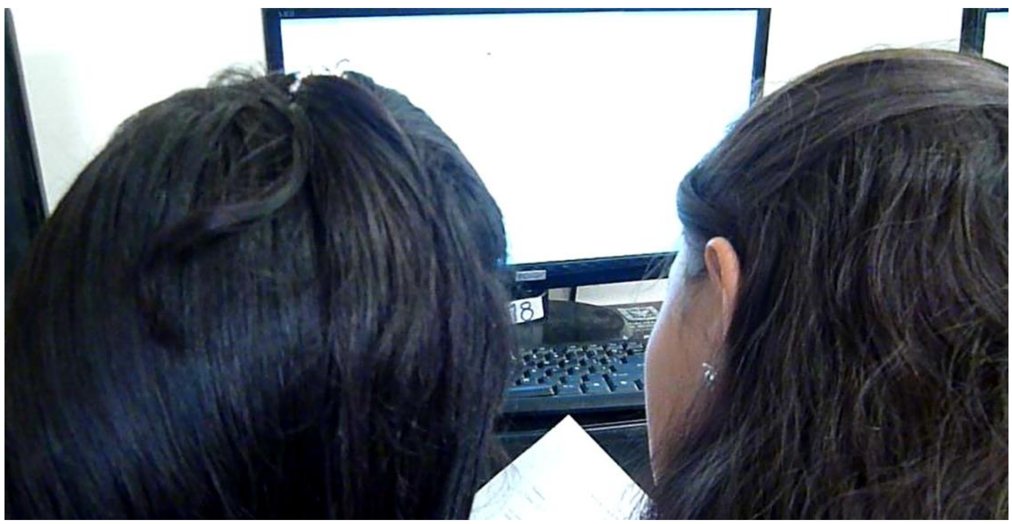


Figura 83. Las estudiantes revisan la actividad 2 y el Applet, para resolver los interrogantes correctamente

Estudiante 6: Profe

Estudiante 5: [indicando en el Applet] Aquí están 3 unidades de radio

P2: Si ahí esta

Estudiante 5: Ahí está bien cierto

P2: Si, ahí ya es coger y analizar cuál sería el volumen máximo a medida que usted, mueve D

Estudiante 5: D (haciendo movimiento de la cabeza para indicar que comprendido)

P2: Se va moviendo D y va moviendo el volumen a ver dónde considera que es máximo

P: (se dirige a todo el salón) Venga yo hago la aclaración a todos pongan atención vamos a pasar al punto b vamos prestar atención escuchen el dato

Video_4 (00:00 – 00:40)

P: El volumen la altura del cilindro la que se observa en la vista gráfica, vista grafica acá o sea hay que describir la relación entre esta simulación y lo que aparece en esta parte que es la vista gráfica que es como ven una gráfica y el plano cartesiano hay que escribir que relación ustedes encuentran en lo que ven acá y ven allá entonces por favor ahí esos cuatro reglones para describir esa relación.

Figura 84. El profesor da una explicación, de lo que deben hacer en el punto b de la actividad 2

Video_5(00:00 – 3:41)

Estudiante 3: Acá [muestra el taller] dice entre menor altura del cilindro lo bajamos va ser mayor la bolita [Refiriéndose al cilindro]

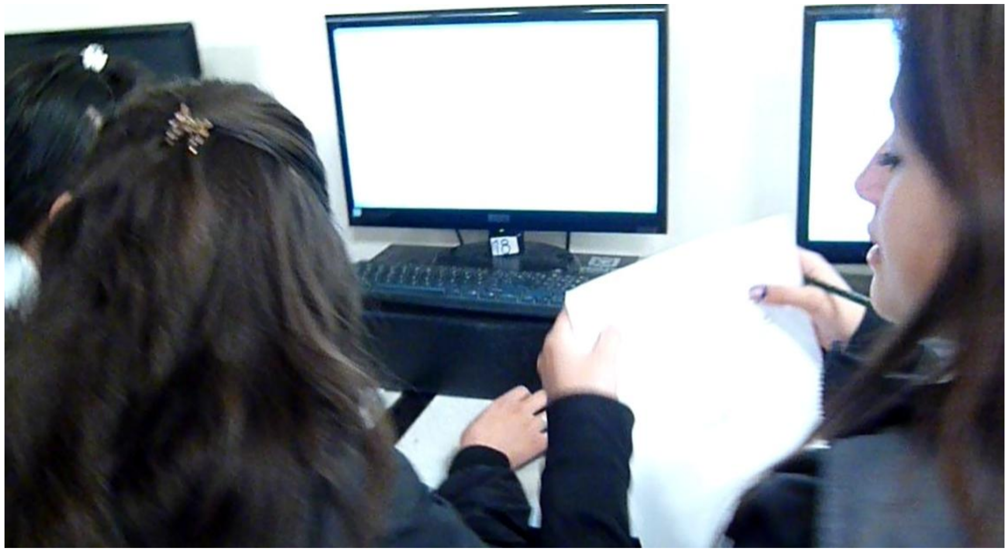


Figura 85. La estudiante señala en la actividad 2, el punto donde tiene una inquietud

P: ¿Entre menor qué?

Estudiante 3: Entre menor altura del cilindro es mayor el volumen del cilindro o viceversa porque yo bajo y la altura del cilindro va bajando [La estudiante describe los cambios que se presentan a medida que la compañera mueve el deslizador]

P: Si bueno y cuando aumenta [El profesor busca que la estudiante argumente sobre la afirmación hecha]

Estudiante 3: ¿Cuándo aumenta qué?

P: Déjemelo bien bajito el cilindro a ver qué pasa bajito seria así (Indica con los dedos, la niña va moviendo el mouse) ¿cómo se ve el volumen? [Profesor insiste que ella vea las relaciones que se presentan]

Estudiante 3: El volumen se ve…

P: 10,86, valla lo subiendo ahí va aumentando un poquito va aumentando va aumentado y después empieza a disminuir

Estudiante 4: Entre más ancho más aumenta entre más largo menos aumenta [la estudiante hace una conjeturación]

Estudiante 3: No pero…como era [se vuelve a mirar la gráfica] a mayor altura del cilindro que da más volumen del cilindro y cuando es menor altura del cilindro disminuye el volumen del cilindro [La estudiante al escuchar a la compañera hace un razonamiento diferente y lo hace más convincente con la manipulación de nuevo del Applet]

P: Bueno pero haga la altura máxima altura máxima lo más alto [profesor invita a que se sigan analizando]

Estudiante 3: ¿Del cilindro?

P: Si, del cilindro

Estudiante 3: Y qué no se pierda

P: No pero incluso que llegue a perderse la altura máxima sería 6 cierto entonces ahí el volumen es indefinido ósea indefinido es prácticamente que cero cierto en esa parte bueno ahora vayámoslo bajando un poquito si ve que el volumen ahí es poquito digamos , dejémoslo bien delgadito que el volumen es 4 o 4,44 volumen es muy poquito por qué estamos hablando de que esta muy delgada cierto vállalo agrandando digamos ahí va aumentando, va aumentando pero ahí llega un momento en que aumenta el máximo aumenta mucho y luego empieza a disminuir [El profesor busca que con la observación puedan dar sus puntos de vista]

Estudiante 3: Bueno a mí lo máximo que me llego fue 65,29 y la altura [Muestra la guía donde está contestando], pero ahí yo podría decir que entre más delgado el cilindro el volumen del cilindro va hacer más poco

P: Si y también cuando sea muy bajito también es poquito entonces cuando es muy alto o muy bajito el cilindro el volumen va a ser poco y es una imagen

Estudiante 3: ¿Cuándo el cilindro es más que?

P: Cuando el cilindro es muy alto el volumen es poco también cuando es muy bajito también ósea cuando la altura… (Se retira y se dirige a todos los alumnos)

(3:42 - 6:17)

P: Mire lo que ustedes tienen que ver lo que estamos haciendo con su compañera para describir esa relación que se ve aquí representada en la gráfica mire observen lo siguiente si el volumen, vea que pasa con el volumen si la altura es muy poca el volumen también es poco mire aquí tenemos una altura de 0,3 el volumen que tanto es

Estudiante X: Es 8,57

P: 8,57 y sabiendo que el volumen máximo es como 65 o sea que ahi tenemos poco volumen cierto porque esto prácticamente esta plano (Pide atención a un estudiante)... eh cierto ese volumen va aumentando cierto pero esto no quiere decir entre más altura más volumen porque va aumentando ,va aumentando pero llega el momento vea este es el volumen máximo cierto 65,23 creo que algunos les dio 65,3 volumen máximo pero si yo sigo aumentando la altura, ese valor no sigue aumentando, vea empieza a disminuir ... porque ya cuando el cilindro se va haciendo muy delgado qué pasa con el volumen? Se va disminuyendo el volumen hasta desaparecer

Estudiante X: ¿Hasta quedar indefinido?

P: Hasta quedar indefinido porque ya prácticamente queda reducida a una línea el volumen entonces vea acá empieza a aumentar, aumentar a pesar de que va bajando la altura del cilindro aumentando el volumen hasta llegar a un punto que llega a su máximo valor y después 65,3 es el máximo y después empieza a disminuir entonces no quiere decir que porque haya más altura hay más volumen cierto ahí como lo que tiene que ver es que si el cilindro es muy bajito el volumen es poco y si es muy alto también el volumen es muy poco

Video_6 (00:00 – 00:47)

P: En la gráfica acá al lado derecho se va moviendo el punto P ósea el punto en

Estudiante 7: El cilindro, es un tono azul o sea el radio es este lado y la altura. [La estudiante le señala con el dedo, cada una de las partes que le mencionan en la actividad y debe ver en el Applet]

P: la altura es éste eje y el volumen es este eje [les señala con el dedo en el computador] y esta gráfica que se vea acá es la descripción, como de esa relación entre volumen y altura. Entonces porque a medida que voy moviendo el punto p se va desplazando (...) a medida que voy moviendo el punto d se va moviendo el punto p entonces esta gráfica, lo que me muestra la relación entre altura y volumen ¿sí?

[Las niñas asienten con la cabeza que entendieron]

Figura 86. El profesor, les indica la relación entre la altura y el volumen en la actividad 2

(00:48 – 1:11)

P: (El profesor se dirige a todo el curso) Miren esto es lo que tienen que ver esta gráfica es el recorrido que hace el punto d y el punto p es la relación que hay entre altura y volumen ¿sí?

[Las estudiantes, hacen un proceso de razonamiento, puesto que, a medida que van observando el movimiento del Applet, y de sus elementos**]**

Video_7 (00:00 – 1:03)

P: Si puede que se, aquí lo que cambia es por una centésima

Estudiante X: En donde en el de 2

P: Si en el de 2, radio 2… Luego hacen lo mismo cambiando el radio a 2,5 y vuelven a buscar el volumen máximo, tienen que mirar que el encabezado correspondan al dato al que están copiando ósea porque acá cada columna tiene su encabezado, entonces que corresponda con el dato

Estudiante X: Ah sí obvio, listo

P: Entonces les doy 5 minutos más para que terminen y luego pasarles la otra guía

(1:04 – 3:10)

Estudiante 7: Profe ven a ver

P: Dime

Estudiante 7: mire, cada que va aumentando

P: Bueno entonces digamos que voy a revisar el de 2,5, a ver como lo hizo [El profesor maneja el Applet durante algunos segundos] Entonces mire vamos a buscar cual es el volumen máximo

Estudiante X: [Una estudiante grita**]** Profe, pero toca que le cambien otra vez las cosas porque a mí ya me había dado un resultado y ahorita busque y otra vez me dio otro resultado

P: Busque que le dé, el máximo y ese es el que pone

Estudiante X: Por eso

[El profesor sigue conversando con las estudiantes]

P: Entonces ahí...

Estudiante 7: Ahí es el volumen máximo

P: ¿Si? 37,75

Estudiante 7: Si [El profesor sigue manipulando el Applet] ¿37,79?

Estudiante 7: 75

Estudiante 8: 78

P: Dejémoslo ahí, como difícil de que me cuadre, el radio es 2,01 y acá es la altura

Estudiante 7: 2,96

P: Así, ahí lo están llenando bien, ahora completa el último punto [El profesor comienza a leer el punto] "Observa los datos registrados en la tabla, ¿Qué características tiene el cilindro con el volumen máximo para cualquier esfera?"

[El profesor vuelve y lee la pregunta, y se dirige a todos los estudiantes]

(3:17 – 4:30)

P: Bueno, entonces como ustedes ya llenaron esa tabla, tienen que mirar qué características tiene el cilindro inscrito, el cual tiene el volumen máximo dentro de la esfera, emm, por ejemplo pueden ver qué relación tiene el valor del radio el radio del cilindro con la altura del cilindro, o también el valor del radio de la esfera con la altura del cilindro, mirar cuando les da el volumen máximo del cilindro qué características tiene ese cilindro o qué porcentaje es con respecto por ejemplo esa altura que porcentaje tiene con relación al radio del cilindro o al radio de la esfera

Video_8 (00:00 – 2:24)

Estudiante 9: El radio disminuye

Estudiante 10: Pero, ¿si es en todos?

Estudiante 9: Que si es en todos

Estudiante 10: Entonces dicte

Estudiante 9: Con respecto al radio de la esfera

Estudiante 10: ¿Disminuye? ¿Sí?

Estudiante 9: Si disminuye

Estudiante 10: [Ella vuelve a leer lo que llevan escrito de ese punto**] "**Con respecto al radio de la esfera disminuye...

Estudiante 9: El radio del cilindro y aumenta la altura del cilindro

Estudiante 10: ¿Ya?

Estudiante 9: YA

Video_9 (00:00 - 1:15)

Estudiante 7: Acá ese es radio de la esfera disminuye por ejemplo en 2,5 disminuye casi 4, entonces acá no, acá lo que hizo fue aumentar [Le señala con los dedos la guía en la tabla donde están los resultados, para contestar el punto e]

P: Si es que hay que analizar reglón por reglón no es mirar todo global sino renglón por renglón

Estudiante 8: ammm

P: [Se dirige a la compañera de trabajo**]** Entonces ayúdenle aquí a ella….

[Se forma una pequeña discusión entre las estudiantes respecto a quien ha ayudado más así que el profesor interviene nuevamente]

P: Bueno no tienen que escribir, sino ayudarle a analizar esta tabla, porque dice, [lee la pregunta del último punto] "¿Qué características tiene el cilindro con el volumen máximo para cualquier esfera?" entonces tienen que analizar reglón por reglón

Estudiante 7: ¿Cómo así para cualquier esfera?

P: Porque se supone que nosotros aquí buscamos es volumen máximo [El profesor se retira]

(1:16 - 3:46)

Estudiante 7: Pero acá

Estudiante 8: En cada esfera es que claro obviamente todos son distintas

Estudiante 7: Por eso

Estudiante 8: Esta esfera es distinta a esta otra esfera [Señalando en la tabla un renglón y después otro]

Estudiante 7: El uno se aumenta y el otro disminuye como acá en todas aumenta

Estudiante 8: En estas también, es que en todas aumenta

Estudiante 7: Hay una que disminuye 2,5 la esfera… acá disminuye 4 puntos porque es 2,01 [Le explica a su compañera con ayuda de los datos de la guía]

Estudiante 8: Aaaa, es que este es radio y radio

Estudiante 7: Por eso mediante el volumen máximo aumenta el radio…

Estudiante 8: Entonces aquí todo disminuye, todo ósea de aquí para acá todo aumenta pero en el radio de la esfera, pero en el radio del volumen todo disminuye [Al ser ella la que argumentó la respuesta, su compañera le pasa la hoja para que escriba la misma en la guía] Listo

P: [Se dirige a todos los estudiantes**]** Bueno, vamos a dar por terminado, entonces esta actividad

ANEXO C: Transcripción Actividad 3

Video: SAM_1338

En esta parte el profesor presenta la actividad y realiza una explicación de cómo se deben abordar las preguntas y se escucha en su mayoría el trabajo que desarrollan dos estudiantes (la mayor parte de este video estuvo enfocada al trabajo de dos estudiantes, pero como hablaban tan bajo, en algunos segmentos solo se escucha la voz del profesor). Se trabajó con un Applet realizado en GeoGebra donde se muestra la simulación de un reloj de arena y las gráficas que representan la altura y el volumen de la arena a medida que va pasando del cono superior al cono inferior como se muestra en la siguiente imagen:

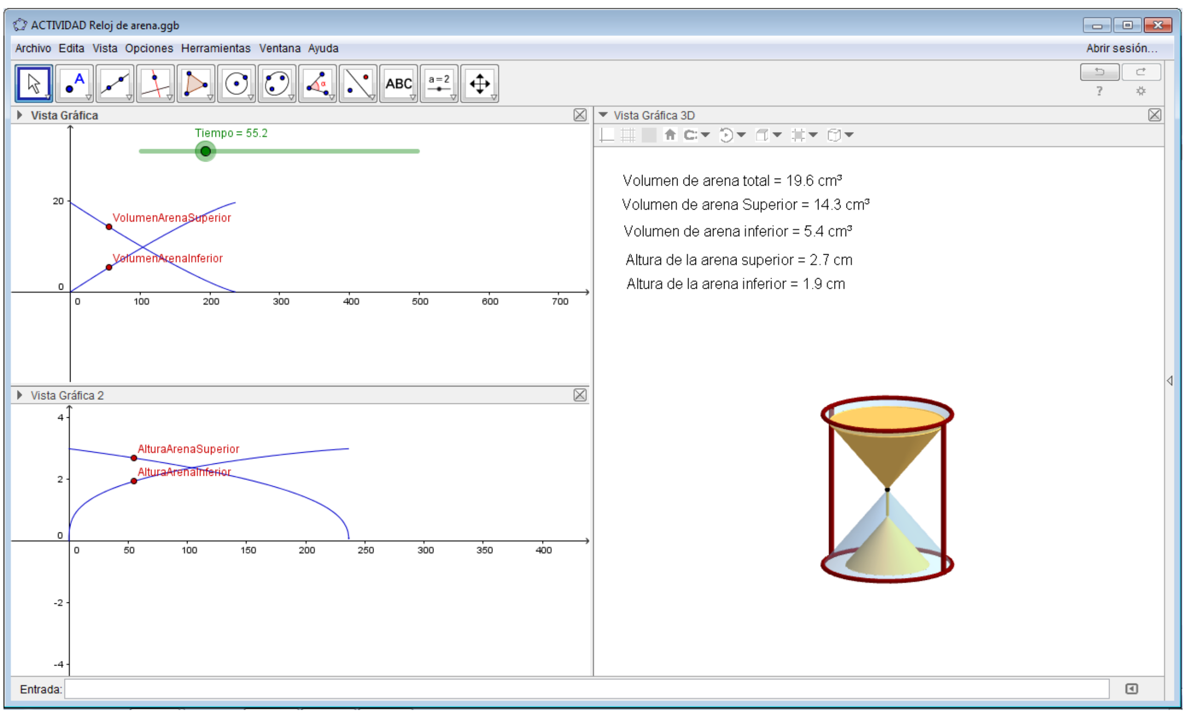


Figura 87. Imagen del Applet realizado en GeoGebra para la tercera actividad

Tiempo: 00:00 – 18:56

Estudiante 1: Tiempo 26, no ve que éste ya está hecho.

Figura 88. Enfoque de la cámara para observar el trabajo en particular de dos estudiantes

Estudiante 2: Sistema 8.

Estudiante 1: Volumen de área superior, de arena, perdón.

P: Bueno me van a escuchar un momentico, vamos a hacer silencio porque estamos hablando mucho, listo,… entonces por favor Deisy, vamos a escuchar, mire acá, resulta que hay como su nombre lo indica un reloj de arena, entonces en esta actividad, entonces podemos observar que hay en un deslizador que se llama tiempo, ese deslizador entonces al nosotros ponerlo, ósea al nosotros moverlo lo que hace es que paulatinamente se va cayendo un chorrito de arena.

Figura 89. Profesor mientras explica el desarrollo general de la tercera actividad

Estudiante 3: Hay sí, tan chévere.

P: Que está en el cono superior y se acaba el movimiento cuando sale,… termina de salir toda la arena del cono superior y cae al cono inferior, listo, el total del tiempo en el que sucede eso, son 200, 200 que, 236,4 segundos, venga vamos a escuchar por favor, vamos a escuchar, listo,… entonces nos sale, eh… una serie de gráficas que hay aparecen, listo, ya les prestó atención a eso [un estudiante alza la mano porque no funciona bien el Applet], …, entonces, nos salen dos gráficas, dos gráficas ahí, nos salen dos vistas gráficas,… si observan, en la primera hay una gráfica que dice volumen de la arena superior, obviamente va a ser el volumen del cono superior, ¿cierto?, y otra gráfica que es el volumen de arena inferior, que obviamente es el cono que está en la parte de abajo del reloj de arena, listo, ahora en la otra gráfica, eh,…, en la otra gráfica nos hablan de las alturas, de las alturas, listos, vea [señalando el tablero], observemos acá,… mire acá nos hablan de las alturas, eh Michael escuchemos un poquito, primero prestemos atención a lo que estamos explicando, acá, esto es una gráfica de altura de la arena superior, entonces es esta altura, aunque acá no se ve, no se ve muy bien, vamos a reducirlo un poquito para alcanzar a ver, … , entonces, vamos,… vamos a acomodar un poquito acá para poderlo ver mejor, …, listo, entonces ya lo podemos ver mejor, entonces, si ustedes ven esto me representa la gráfica del volumen de la arena superior, ósea la que está aquí arriba, … eh, volumen de la arena inferior, obviamente va aumentando porque como al principio esta vacio, ¿cierto?, al principio esta vacio y va aumentando su valor, entonces se aumenta hasta cierto valor… y luego la altura, están hablando de la altura que tiene esta arena, ¿cierto? Entonces, la altura de la arena superior que empieza siendo máxima y termina siendo cero, cuando se desocupa el cono y con él, con el otro cono sucede lo contrario, listo.

Estudiante 4: Profe este valor se pone, ¿cierto?

P: Sí, si usted le da clic derecho sobre el deslizador tiempo puede ver la simulación, la simulación, acá donde dice animación y va a ver lo que sucede, vea, va cayendo arena poco a poco, vea lo que sucede, hasta que termina de caer,…, listo.

Estudiante 1: Profe esa parte de allá no me sale acá.

P: ¿Esta parte no le sale? Eh, ya, ya voy y le organizo. Mire observen otra vez como se hizo la animación,… ¿si lo pudo hacer? Mire esta en tiempo cero, se para sobre el deslizador, clic derecho y ahí donde dice animación le da clic y automáticamente empieza a caer la arena y empiezan a variar estos valores, ¿todos lo hicieron? Entonces, para que vea la animación de lo que es el reloj de arena, entonces, hay que ir contestando las preguntas, entonces, la primera, … , es completar la tabla, hay un ejemplo en el primer renglón, entonces, por favor lo vamos a revisar,… cuando el tiempo es 11 y los correspondientes valores y a continuación van llenando los otros valores, primero miren el ejemplo cuando el tiempo es 11, miren los otros valores y de acuerdo a eso llenen los otros, … los otros renglones de la tabla,…

Estudiante 1: A medida que el tiempo aumenta, ¿Qué valores aumentan? ¿Qué valores disminuyen? La altura…

Estudiante 2: La altura y el volumen.

Estudiante 1: No inferior.

Estudiante 2: Los que disminuyen, el tiempo no.

Estudiante 1: ¿Qué valores disminuyen?

Estudiante 2: Volumen y la altura superior.

Estudiante 1: Eh,…, Michael si era con y, si era con y.

Estudiante 5: Hubiera dicho,…

Estudiante 1: ¿Cuál es el tiempo, que ha transcurrido cuando se interviene la función, interseca, cuando se unen?

Estudiante 2: Hay, [señalando con el cursor], no, en este sí, pero en este no.

Estudiante 1: Como que no, como que no, donde va el otro punto.

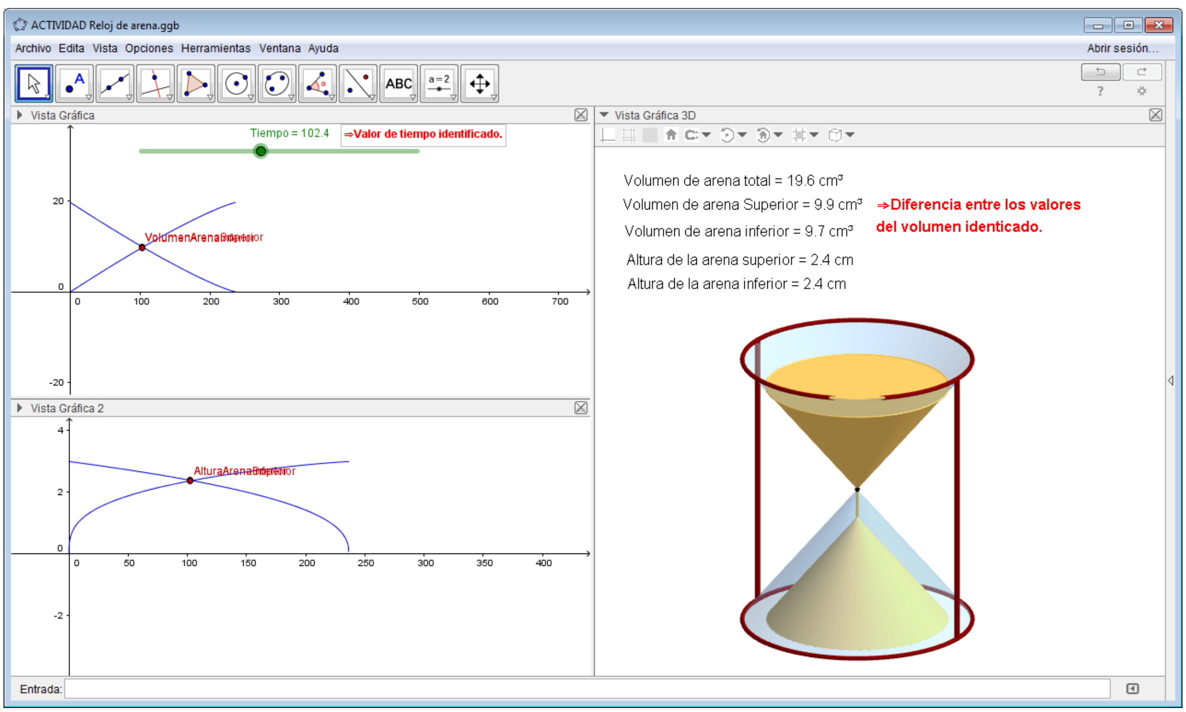


Figura 90. Imagen del Applet donde se identifica el valor del tiempo en que se interceptan las graficas de las funciones

Estudiante 2: … tiempo 102,4

Estudiante 1: ¿El tiempo que?

Estudiante 2: Han transcurrido es 102,4

Estudiante 1: ¿Qué representa el punto de intersección de las funciones de cada caso respecto a la situación?

Estudiante 2: ¿Qué representa? Que están las dos al mismo tiempo.

Estudiante 1: No que la cantidad de arena en las dos partes,… es igual.

Estudiante 2: Para que quedara equilibradas tienen que haber 102, en cada una ya.

Estudiante 1: Pero es que,… de las funciones en cada caso.

Estudiante 2: La intersección es eso,… en el…

Estudiante 1: En el momento,…, la altura superior e inferior.

Estudiante 2: E inferior es igual,…., es igual,…, es igual a la variación,…

Estudiante 1: La variación es de…

Estudiante 2: En el volumen, es de,…

Estudiante 1: En el volumen es de,…

Estudiante 2: Ahí si no se cumple,…

Estudiante 1: Centímetros, porque esta e centímetros.

Estudiante 2: No porque si yo le pongo dos centímetros a esto daría 11.

Estudiante 1: 2 milimetros, si porque aquí en 9 centímetros coma 7 milímetros y aquí es aproximando queda el 10, entonces 2 milímetros [El estudiante lee]. Ubica el deslizador en tiempo cero, haz clic derecho sobre el deslizador y activa la opción animación,…, observa como varían las alturas y los volúmenes en la arena en el cono inferior y superior ¿Qué significa tienen esta forma? Explique.

Estudiante 2: Eso que tiene que es.

Estudiante 1: La gráfica es la misma, póngale en el tiempo cero, dele animación,…

Estudiante 2: [Silencio]

Estudiante 1: Hola, entonces ¿cuál es? ¿Cuál es? Eh, papito,… La grafica A ya que,…

Estudiante 2: Toca es explicar que pasa, venga explico, que es lo que pasa, el volumen y la altura superior comienzan a disminuir y volumen y altura inferior aumentar.

Estudiante 1: La gráfica A, ya que el volumen… [Sigue escribiendo]

P: Ya les voy a explicar el punto b, entonces miren… pónganle cuidado, en la parte b, que decía,… me hace el favor y me escuchan y ahorita si ustedes ya lo resolvieron, entonces a ustedes les sobraría la explicación, pero si alguien falta pues me escucha esa parte, entonces dice. A medida que el tiempo aumenta. ¿Qué valores aumentan? ¿Qué valores disminuyen? Acá, el tiempo aumenta a medida que yo corro el deslizador, ¿cierto? Y aumenta el tiempo, entonces hay que mirar que valores, de todos esos valores que tenemos acá [señalando en el tablero] ¿Cuáles valores de esos aumentan y cuales disminuyen a medida de que aumenta el tiempo, es decir a medida de que yo voy corriendo el deslizador,… listo. Ahora en la pregunta c ¡dice!

Estudiante 4: [El estudiante lee] ¿Cuál es el tiempo que ha transcurrido cuando se intersecan las funciones en cada gráfica?

P: Sí, entonces,…

Estudiante 6: Profe, mire [señalando el computador].

P: Ya ahorita miramos, entonces, se intersecan las dos funciones en cada plano cartesiano es acá en este punto,… [Señalando el tablero], porque es ahí donde se cruzan, aquí y aquí, deben tener en cuenta que estas son funciones eh,… representa funciones diferentes porque acá es volumen de la arena, ¿cierto? Volumen de la arena inferior, volumen de la arena superior, o sea, la cantidad,…

Estudiante 4: Pero por datos que sacamos, podemos saber.

P: Sí, entonces, hay lo que le preguntan que es, que representan cuando, cuando vea, cuando ese punto está aquí [señalando en el tablero].

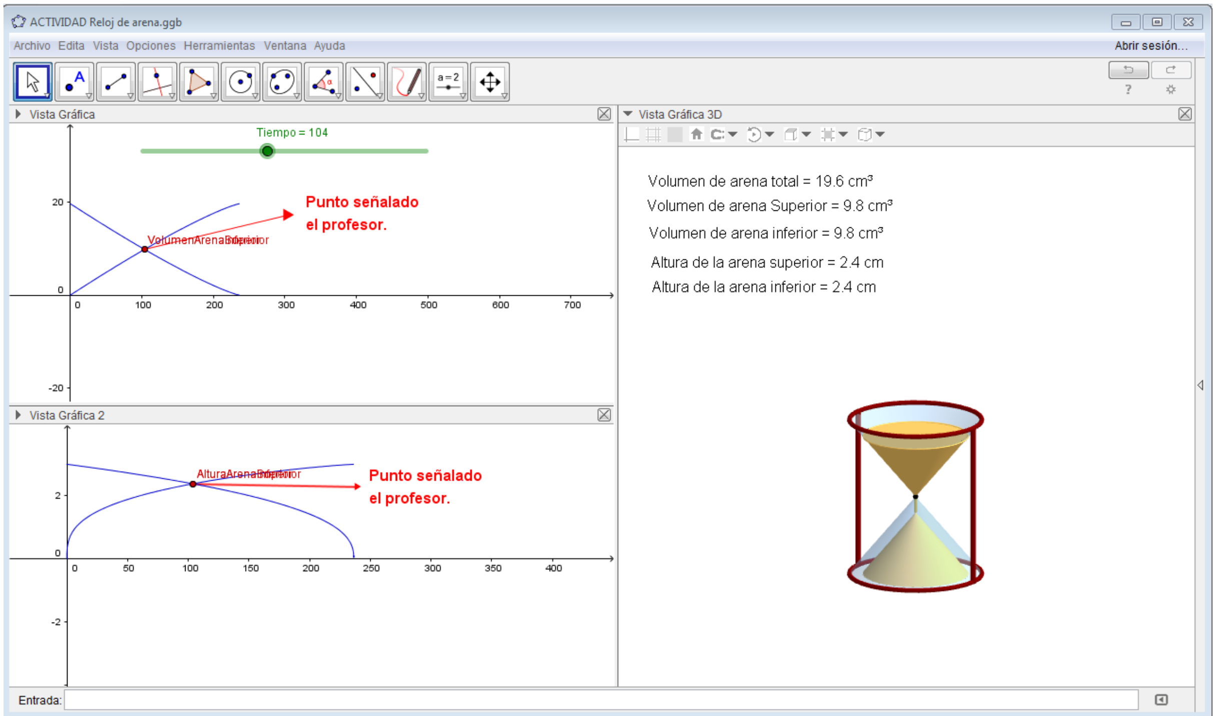


Figura 91. Imagen del Applet donde el docente señala el punto intersección de las funciones de volumen y altura

Video: SAM_1344

En esta parte el profesor explica y pregunta acerca del último punto de la tercera actividad.

Tiempo: 00:00 – 03:45

P: Siguiendo las instrucciones que hay dice,…, observa como varían las alturas y los volúmenes de la arena en el cono superior e inferior, ¿Por qué las gráficas tienen esa forma? Mire,…

Estudiante 7: Yo digo porque

P: Entonces, dime, ¿por qué?

Estudiante 7: Pues yo no se mire, espere le digo y usted me dice si sí está bien, la primera gráfica muestra que el volumen va disminuyendo a medida que va transcurriendo el tiempo y la altura, la de altura va aumentando, la…, va aumentando la altura a medida que el tiempo,…

P: Pero espere, es que resulta que es,…, esta si va aumentando ¿cierto? Que es la altura de la arena inferior, pero ¿qué sucede con la otra?

Estudiante 4: Con la superior si disminuye.

P: Con la superior,…, disminuye vea que esta [señalando en el tablero], que esto es lo que describe, ¿cierto? Entonces,…

Estudiante 7: Pero entonces tocaría en esa forma *[haciendo señas con sus manos]*.

P: Entonces, tienen esa forma porque si usted observa, si usted devuelve la animación y usted misma la,…, si usted misma va moviéndola, vea, si usted misma va moviéndola poco a poco,…, usted ve, que a medida de que, de que, voy, si se da cuenta que aquí va cayendo arena, entonces y ya se corre, ya bajo un poquito el punto [hace referencia al punto rojo que se desplaza sobre la gráfica del volumen de arena en el cono superior], porque ya disminuyo el volumen, porque ya cayo arena de aquí del cono de arriba, entonces este volumen de arena en el cono superior ya bajo y aquí la altura puede empezar a bajar, porque la altura de la arena ¿Qué es? La distancia de la arena hasta acá [señalando en el tablero], ¿cierto? En el cono, pero si empieza a caer arena por este orificio, pues empieza a bajar esa altura y eso es lo que describe a través de la animación, entonces vea como lo voy corriendo, vea, va bajando el volumen, ¿es obvio que baje el volumen? ¿Es obvio que baje este volumen? Claro porque se está cayendo la arena ¿cierto? Y ¿es obvio que baje la altura de la arena?

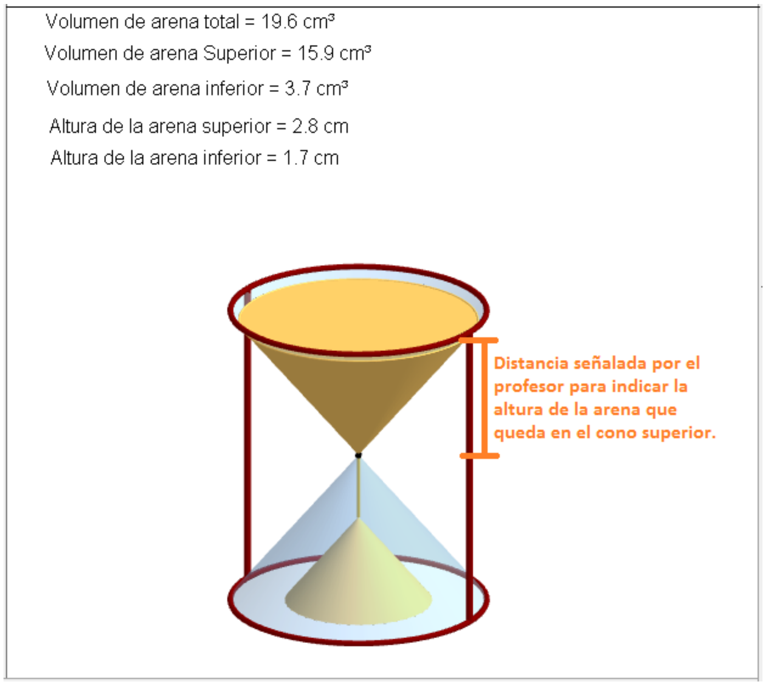


Figura 92. Distancia señalada por el profesor para indicar la altura de la arena en el cono superior del reloj de arena

P: Claro, entonces,…, y lo que sucede es que a medida que va corriendo [el deslizador tiempo],…, pues va disminuyendo el volumen en la parte superior, vea, porque va bajando esta arena y acá va llegando arena, entonces va subiendo esa cantidad de arena, va subiendo, va subiendo, y hay un punto de cruce ¿Qué sucede en el punto de cruce? ¿Quién me puede decir? ¿Qué sucede en el punto de cruce?

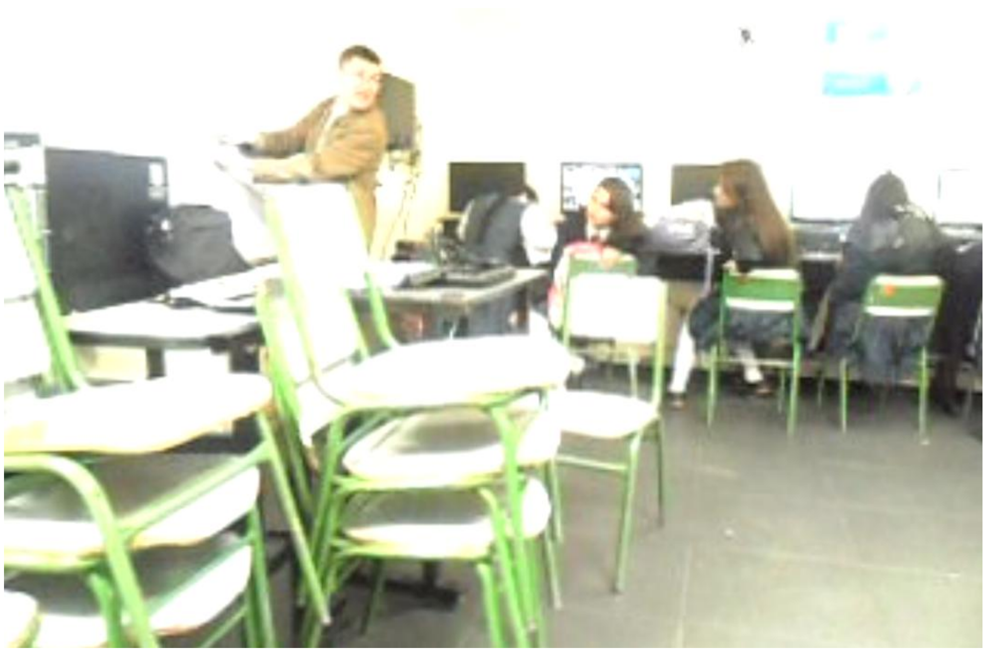


Figura 93. Profesor señalando la altura de la arena en el cono superior del reloj de arena

Estudiante 8: Es donde coincide, digamos la altura superior y la altura inferior, es el cruce.

P: O sea de las dos gráficas. Es el cruce de las dos gráficas, entonces, ¿qué más podemos ver ahí? Deisy ¿qué más podemos ver hay cuando se cruzan estas dos gráficas? Deisy,… Alguien me había dicho por acá, Johana ¿qué era lo que me había dicho cuando usted?... ¿qué más podía ver cuando se cruzaban estas dos gráficas? ¿Qué más en las gráficas y en los valores? ¿Qué puede ver?

Estudiante 7: Que la altura inferior y superior quedan en el mismo,…

P: ¿Qué la que?

Estudiante 1: La altura superior e inferior quedan igual.

P: Que la altura superior e inferior son la misma y ¿qué mas pueden ver?

Estudiante 7: Y la otra también, la de la altura,…

Estudiante 1: Y la variación del volumen es de 2 o 1 milésima.

P: Una milésima es la variación del volumen, o sea que casi es el mismo ¿cierto? Eh,… ¿ya acabaron? ¿Qué clase tienen ahorita?

Estudiante 1: Español.

P: Español.