Doblando papel para desdoblar argumentos

Alba Carvajal Adonai

Velandia Cruz Diana Margarita

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de matemáticas

Bogotá, Colombia

2019

Doblando papel para desdoblar argumentos

Alba Carvajal Adonai

Código 2017185001

Velandia Cruz Diana Margarita

Código 2017185025

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar por el título de:

Magister en Docencia de la Matemática

Director:

Magister en Docencia de la Matemática y Magister en Tecnologías de la Información Aplicadas a la Educación

Camilo Sua Flórez

Grupo de Investigación:

Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría Æ•G

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

2019

Dedicatoria

A mi hogar, pues por ellos decidí emprender este proyecto en mi vida.

Adonai Alba

A mi hija Naomi Ayelén Rojas Velandia quien con su carisma motivó en mí el anhelo de seguir adelante en mis proyectos.

Margarita Velandia

Agradecimientos

A Dios por guiarme en cada momento del desarrollo de esta maestría, además de ofrecerme esperanzas de culminarla.

A mis hermanos Jaime y Nicolás. Fueron apoyo constante en los momentos en que más lo necesité.

Al profesor Camilo Sua por su dedicación, paciencia y enorme contribución para sacar adelante este trabajo.

A Margarita por las cosas que me permitió aprender gracias a la relación académica de estos dos años.

A la profesora Cecilia Valderrama por contribuir a espacios de reflexión sobre nuestra práctica y concientizarnos sobre esta.

A la profesora Leonor Camargo por sus ideas que aclararon nuestro rumbo con respecto a este trabajo.

Adonai Alba

A mis hermanas, Violeta y Dalia Velandia, quienes con sus consejos y formas de actuar constituyeron en mí un ejemplo a seguir.

A mi sobrino Abayomi Velandia e hija Naomi Rojas quienes han compartido conmigo espacios de dispersión aportandome tranquilidad gracias a su manera inocente y alegre de ver el mundo.

A mi mamá quien ha sido una mujer entregada a sus hijas y con sus sabias frases reiterativas me ha sabido encaminar a alcanzar mis sueños y mejorar mi calidad de vida.

A mi papá quien siempre con su buen sentido del humor me permitió despejar las tomentas en los vasos de agua que me encierro.

A mi compañero Adonai Alba por su compañía incondicional a pesar las dificulatades.

Al profesor Camilo Sua, asesor del presente trabajo de grado quien con su esfuerzo, compromiso y paciencia contribuyó en el desarrollo de este y aportó a mi formación con su ejemplar actitud que demuestra gran experiencia y profesionalismo en su quehacer.

Margarita Velandia

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***Doblando papel para desdoblar argumentos***, presentado por los estudiantes:

Adonai Alba Carvajal, Cód. 2017185001, CC. 1.090.388.426
Diana Margarita Velandia Cruz, Cód. 2017185025, CC. 1.030.551.602

como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por la estudiante en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada,** con 47 puntos.

Observaciones: Se postula el trabajo de grado a distinción meritoria

En constancia se firma a los 12 días del mes de septiembre de 2019.

JURADOS

Director *ad hoc* del Trabajo: Profesor: Sarmiento
BENJAMÍN RAFAEL SARMIENTO (UPN)

Jurados:

Profesor:
WILLIAM ALFREDO JIMÉNEZ (UPN)

Profesora:
JORGE FERNANDO VARGAS (UPTC)

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

Código: FOR020GIB	**Versión: 01**
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	**Página 1 de 7**

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado de Maestría en profundización
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Doblando papel para desdoblar argumentos
Autor(es)	Alba Carvajal, Adonai; Velandia Cruz, Diana Margarita
Director	Sua Flórez; Jeison Camilo
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2019. 344 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional UPN
Palabras Claves	NATURALEZA DE ARGUMENTOS; GEOMETRÍA DEL DOBLADO DE PAPEL; HUMANOS-CON-MEDIOS; DOBLECES.

2. Descripción
El trabajo de grado versa alrededor de la naturaleza de los argumentos que se pueden promover por medio de la Geometría del Doblado de Papel (GDP). Conscientes del rol que debe jugar la argumentación en la educación matemática se presenta al doblado de papel como un medio propicio para promoverla. Es sabido que en los ambientes de Geometría Dinámica se promueve la argumentación, no obstante, la imposibilidad de contar con recursos digitales, en muchas instituciones, demanda de una respuesta, por tal motivo se proyectó como objetivo principal del presente trabajo caracterizar los argumentos que se promueven con el doblado de papel para dar razones de su pertinencia ante los requerimientos presentados. Para tal efecto se diseñó e implementó una secuencia de tareas, en un ambiente con GDP, con un grupo de estudiantes de octavo grado, de los que se analizó sus producciones, que dejan ver al papel plegado como una posibilidad para el trabajo en aula con miras de promover argumentos.

3. Fuentes

- Arellano, C. (2013). La argumentación de alumnos de bachillerato al resolver problemas matemáticos. Universidad Autónoma de Querétaro.
- Arici, S., y Aslan-Tutak, F. (2013). Using Origami to Enhance Geometric Reasoning and Achievement. In Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8). Antalya, Turkey.
- Arrieta, M. (1998). Medios materiales en la enseñanza de la matemática. Revista de Psicodidáctica, 5, 107–114. Retrieved from http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2001952
- AuthorMapper - Scientific Research and Author Locations Globally. (n.d.). Retrieved April 7, 2019, from https://www.authormapper.com/
- Avilés, P. (2016). Uso de la didáctica del plegado de papel, como herramienta de apoyo en la enseñanza de los contenidos de la geometría para estudiantes del 10o año de educación general básica, de la unidad educativa Best del Cantón Vinces (Pontificia Universidad Católica del Ecuador; Vol. 3). https://doi.org/https://doi.org/10.3929/ethz-b-000238666
- Black, P., Harrison, C., Lee, C., y Marshall, B. (2004). Working inside the black box: Assessment for learning in the classroom. Phi Delta Kappan, 86(1), 8–21. https://doi.org/10.1177/003172170408600105.
- Beltran, D., Duque, K., Fernández, C., y Suárez, B. (2016). El proceso de generalización a partir de pliegues de papel. 3 Encuentro Distrital de Educación Matemática, 198–205. Bogotá, Colombia.
- Blanco, L., y Barrantes, M. (2003). Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=199520330051. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 6(2), 107–132.
- Boakes, N. (2008). Origami-Mathematics Lessons: Paper Folding as a Teaching Tool. Mathitudes, 1(1), 1–9. Retrieved from http://www.coe.fau.edu/centersandprograms/mathitudes/documents/20080901bMathitudesOct08revisionFinalVersionforpublicationOct242008.pdf
- Boakes, N. (2009). Origami Instruction in the Middle School Mathematics Classroom: Its Impact on Spatial Visualization and Geometry Knowledge of Students. RMLE Online, 32(7), 1–12. https://doi.org/10.1080/19404476.2009.11462060
- Borba, M., y Villarreal, M. (2005). Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking. https://doi.org/10.1007/b105001
- Brady, K. (2008). Using Paper-folding in the Primary Years to Promote Student Engagement in Mathematical Learning. 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 77–83. Retrieved from https://dspace.flinders.edu.au/jspui/handle/2328/12191
- Çakmak, S. (2009). An Investigation of the Effect of Origami-Based Intruction on Elementary Students Spatial Ability in Mathematics (Middle east Technical University, Turquia). Retrieved from http://www.albayan.ae
- Camargo, L., Perry, P., Samper, C., Molina, O., y Echeverry, A. (2007). Geometría y lineamientos curriculares: una experiencia en la formación inicial de profesores. Memorias 9o Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, 207–215. Bogotá, Colombia.
- Cardona, A., Gómez, J., y Santa, M. (2015). La simetría y su comprensión a través del doblado de papel en el marco de la Enseñanza para la Comprensión. Revista Colombiana de Matemática Educativa, 1, 218–223.
- Chamizo, J. (2007). Las Aportaciones de Toulmin a la Enseñanza de las Ciencias Historia y Epistemología de las Ciencias. Enseñanza de Las Ciencias, 25(1), 133–146.
- Chico, J. (2014). Impacto de la interacción en grupo en la construcción de argumentación colectiva en clase de matemáticas. Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona.

- Crespo, C. (2014). La importancia de la argumentación matemática en el aula. Premisa, 24(July), 23–29. Retrieved from http://www.soarem.org.ar/Documentos/24 Crespo.pdf
- Escorcia, L., y Jaimes, C. (2015). Tendencias de uso de las TIC en el contexto escolar a partir de las experiencias de los docentes. Educación Y Educadores, 18(1), 137–152. https://doi.org/10.5294/edu.2015.18.1.8
- Fiallo, J. (2010). Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia.
- Flores, P., Lupiañez, J., Berenguer, L., Marin, A., y Molina, M. (2011). MATERIALES Y RECURSOS EN EL (Mario Garc). Granada.
- Fortuny, J. M., Iranzo, N., y Morera, L. (2010). Geometría y tecnología. In T. Mar, M.; Estrada, A.; Sierra (Ed.), SEIEM (Vol. 14, pp. 69–85). Granada.
- García, T. A. (2009). La psicomotricidad en educación infantil. Innovación Y Experiencias Educativas, 16, 1–10. https://doi.org/19886047
- Gómez-Chacón, M. (2010). Educación matemática y ciudadanía. In M. Callejo y J. Goñi (Eds.), Educación matemática y ciudadanía (pp. 59–85). Barcelona: Editorial GRAÓ, Dde IRIF, S.L.
- González, F., y Vargas, J. (2000). Geometría del Papel: una experiencia de uso de materiales matemáticamente potentes. NÚMEROS. Revista Didáctica de Las Matemáticas, 42, 3–10.
- Goñi, J. (2010). La aspiración a la ciudadanía y el desarrollo de la competencia matemática. In M. Callejo y J. Goñi (Eds.), Educación matemática y ciudadanía (pp. 11–58). Barcelona, España: Editorial GRAÓ, Dde IRIF, S.L.
- Gutiérrez, A. (2009). Aspectos Metodológicos de la Investigación Sobre Aprendizaje de la Demostración Mediante Exploraciones con Software de Geometría Dinámica. Colección Digital, Eudoxus, 1, 1–18.
- Harada, E. (2009). Algunas Aclaraciones Sobre el “modelo” Argumentativo de Toulmin. Contactos, 73(1978), 45–56.
- Hernández, O. G., Jurado, H. D., y David, Y. (2014). Análisis de publicaciones hispanoamericanas sobre TIC en escuelas y zonas rurales. Revista Colombiana de Educación, 66, 103–126.
- Horacio, S., y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. Bolema - Mathematics Education Boletín, 30(56), 1092–1112. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a13
- Inglis, M., y Mejía-Ramos, J. (2005). La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación en matemáticas. Revista EMA, 10(2), 328–353.
- Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. In P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), The Emergence of Mathematical Meaning (Primera, p. 317). https://doi.org/10.4324/9780203053140
- Laiton, E. V., Gómez, S. E., Sarmiento, R. E., y Mejía, C. (2017). Competencia de Prácticas Inclusivas: Las TIC y la Educación inclusiva en el desarrollo profesional docente. Sophia, 13(2), 82–95. https://doi.org/10.18634/sophiaj.13v.2i.502
- Leal, C., Suárez, G., Fernández, M., y Moreno, H. (2010). El plegado en la Geometría. Líneas notables del triángulo. Bogotá, Colombia.
- Mateus, L., Fajardo, N., Rossmajer, G., Andres, G., Luis, V., y Del Pilar, R. (2009). Propuesta metodológica para la enseñanza de la geometría a través de la papiroflexia. 10o Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Nariño.

- Mejía-Ramos, J., y Tall, D. (2005). Personal and public aspects of formal proof: a theory and a single-case study. Proceedings of the Sixth British Congress of Mathematics Education, 97–104. Coventry, England.
- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares en matemáticas del Ministerio de Educación Nacional. Retrieved from https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf.pdf
- MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. In Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá, Colombia.
- Meza, P. (2009). Aproximación al modelo argumentativo de Stephen Toulmin mediante su aplicación a cartas de opinión. Simposio Internacional de Estudos de Generos Textuais, 1–29. Caxias do Sul, Brasil.
- Molina, M., y Padilla, C. (2012). Argumentar en las disciplinas: una aproximación desde la perspectiva toulminiana. V Congreso Internacional de Letras. Transformaciones Culturales, 1–9. Buenos Aires.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? Educational Studies in Mathematics, 66(1), 23–41. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x
- Pérez, R. (2014). Enfoques Teóricos en Investigación Para la Integración de la Tecnología Digital en la Educación Matemática. https://doi.org/10.4151/07189729-Vol.53-Iss.2-Art.200
- Pinochet, J. (2015). El modelo argumentativo de Toulmin y la educación en ciencias: una revisión argumentada. Ciência y Educação (Bauru), 21(2), 307–327. https://doi.org/10.1590/1516-731320150020004
- Pulido, D. C., Nájar, O., y Guesguan, L. G. (2016). Vivamos la innovación de la inclusión de dispositivos móviles en la educación. Praxis y Saber, 7(14), 115–130. https://doi.org/10.19053/22160159.5220
- Ramos, M., Sánchez, W., y Huapaya, E. (2014). Argumentación lógica como herramienta para la formación ciudadana en estudiantes de 3ro de secundaria: una propuesta didáctica. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. Lima, Perú, 1235–1241.
- Royo, J. (2002). Matemáticas Y Papiroflexia. Sigma, 21, 175–192.
- Samper, C., y Toro, J. (2017). Un experimento de enseñanza en grado octavo sobre la argumentación en un ambiente de geometría dinámica. REVISTA VIRTUAL Universidad Católica Del Norte, 50, 367–382.
- Santa, M. (2011). La Elipse Como Lugar Geométrico a Través de la geometría del doblado de papel en el Contexto de Van Hiele. Universidad de Antioquia.
- Santa, M., y Jaramillo, C. (n.d.). La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele. 12o Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, 813–821. Quindío, Colombia.
- Santa, M., y Jaramillo, C. (2010). Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. Revista Virtual Universidad Católica Del Norte, 1(31), 338–362.
- Santa, M., y Jaramillo, C. (2013). Producción de conocimiento geométrico a través de la visualización de construcciones con doblado de papel. I CEMACYC, 1–10. Santo Domingo.
- Soto, J., Franco, M., y Giraldo, J. (2014). Desarrollo de una metodología para integrar las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) en las IE (Instituciones Educativas) de Montería. Zona Próxima, 21, 34–51.
- Sowder, L., y Harel, G. (1998). Types of students Justifications. The Mathematics Techer, 91(8), 670–675.
- Toulmin. (1958). The Uses of Argument. In Cambridge, Cambridge University Press (Primera). Retrieved from http://bilder.buecher.de/zusatz/22/22199/22199087_vorw_1.pdf

- Toulmin, Rieke, R., y Janik, A. (1984). An introduction to reasoning (Segunda; M. P. Company, Ed.). New York: Macmillan Publishing Company.
- Triana, J., y Zambrano, J. (2016). Tareas que promueven el uso experto de un elemento teórico en la argumentación matemática (Universidad Pedagógica Nacional). https://doi.org/https://doi.org/10.3929/ethz-b-000238666
- Valero, P. (2012). Educación Matemática Como Una Red. In P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), Educación matemática crítica: una visión socio-política del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (pp. 299–326). Bogotá, Colombia: Ediciones Uniandes.
- Villa-Ochoa, J., y Borba, M. C. (2011). Humans-with-Media en la producción de conocimiento matemático. El caso de Geogebra. 12o Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, 667–683. Quindío, Colombia: Encuentro colombiano de matemática educativa.
- Villareal, M. (2013). Humanos-con-medios: un marco para comprender la producción matemática y repensar prácticas educativas. In U. N. de Córdoba (Ed.), Formación de profesores, Currículum, sujetos y Prácticas Educativas (Primera, pp. 85–122). Córdoba.
- Villarroel, S., y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría. Revista de Didáctica de Las Matemáticas, 78, 73–94. Retrieved from http://www.sinewton.org/numeros/numeros/78/Articulos_04.pdf
- Weber, K., Maher, C., Powell, A., y Hollylynne, S. (2008). Learning opportunities from group discussions: Warrants become the objects of debate. Educational Studies in Mathematics, 68(3), 247–261. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9114-8
- Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher’s role in collective argumentation. Journal of Mathematical Behavior, 21(4), 423–440. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00143-8.

4. Contenidos

El presente documento se divide en ocho capítulos. En el capítulo inicial se presenta la introducción del trabajo en la que a grandes rasgos se describe la estructura general del documento. En el segundo capítulo se delimita el problema que se quiere resolver por medio de esta investigación, en este apartado se incluyen las motivaciones particulares para la realización del trabajo, las ideas que lo justifican y los objetivos general y específicos del estudio. En el tercero se da lugar a algunos antecedentes investigativos relacionados con los intereses de nuestra investigación, concretamente el uso del plegado de papel en educación matemática y en la argumentación en geometría. En cuarto lugar, se hace referencia al marco teórico que orientó el diseño de las tareas y la fundamentación de las categorías de análisis, este comprende Humanos-con-Medios, la geometría del doblado de papel y la argumentación según Toulmin.

El quinto capítulo hace referencia al aspecto metodológico donde se describe la perspectiva investigativa, la revisión literaria sobre los tópicos concernientes a nuestra investigación, el contexto donde se realizó el estudio, el diseño de la secuencia de tareas con las que se intervino en el aula, la modalidad del acopio de datos y la descripción de las distintas categorías para el análisis de la información. En el sexto capítulo se presentan las trascripciones del trabajo realizado por los estudiantes junto con una descripción analítica de acuerdo a las categorías definidas para tal fin.

El capítulo siete se analiza de manera global los resultados arrojados por la implementación de la secuencia de tareas. Por último, en el capítulo ocho se da cuenta de las conclusiones del trabajo de profundización referenciando la relaciones obtenidas del análisis comparativo del capítulo anterior, la caracterización de los argumentos según su naturaleza, el logro de los objetivos propuestos y la mención de ideas para investigaciones en estudios posteriores derivadas del presente trabajo.

5. Metodología
Para desarrollar este estudio se tomó en cuenta tres elementos incluidos en el marco teórico: Humanos con medios, geometría del doblado de papel y La argumentación según Toulmin. Por medio del primer elemento se establece la incidencia del medio en el conocimiento que se promueve en la clase por medio del doblado de papel, que a su vez relaciona un nivel de suplementación. El segundo elemento del marco permite sustentar el desarrollo de una secuencia de tareas enmarcadas en una geometría alterna a la Euclidiana, que involucra las propiedades y características del papel en la resolución de las situaciones propuestas. Con el tercer elemento se proveyó sustento para categorizar los argumentos, según los aspectos de: relación de los elementos, completitud y tipo de garantía. De manera simultánea se diseñó e implementó una secuencia de tareas, de las que se distinguen tareas de descubrimiento y de profundización, en ambas se previó oportunidades para que los estudiantes exhibieran argumentos haciendo uso de un sistema de referentes teóricos propio de la clase, el cual se construyó durante el desarrollo de las tareas de descubrimiento. Para el análisis de las producciones de los estudiantes se tuvo en cuenta las categorías diseñadas por el grupo de investigadores y las adoptadas de Samper y Toro (2017), en cuanto a la naturaleza de la garantía y relación de los elementos de un argumento. Con base en el análisis realizado se establecieron resultados respecto a la naturaleza de los argumentos promovidos en los estudiantes y la incidencia del medio en las producciones de estos.

6. Conclusiones
Las conclusiones derivadas del estudio se agrupan en dos asuntos principalmente. En primer lugar, se presenta la secuencia de tareas y algunas generalidades de los argumentos con

respecto a esta. Destacamos las tareas de profundización, frente a las de descubrimiento, pues en estas el estudiante debía proponer estrategias para dar solución a los planteamientos y generar sus propios argumentos por medio del doblado de papel. En cuanto a los argumentos se pudo apreciar que eran cada vez más elaborados a medida que el sistema de referentes teóricos se robustecía, además que predominaron los de corte deductivo en comparación con los de tipo inductivo y abductivo. En cuanto a los elementos de los argumentos el refutador fue el que menos presencia tuvo en el discurso argumental de los estudiantes.

En segundo lugar, se presenta el rol que desempeñó el medio en las producciones de los estudiantes donde se puedó ver que las propiedades del papel permean el conocimiento promovido en ellos, de acuerdo al marco Humanos-con-medios. En un momento inicial el papel no tuvo un protagonismo tan particular como en el desarrollo de las tareas posteriores pues en estas los estudiantes involucraron por iniciativa propia las características del papel para apoyar argumentos, dejando ver así suplementaciones parciales, totales y únicas de este medio.

Elaborado por:	Alba Carvajal, Adonai; Velandia Cruz, Diana Margarita
Revisado por:	Sua Flórez, Jeison Camilo

Fecha de elaboración del Resumen:	17	06	2019

Tabla de Contenidos

Lista de diagramas

Lista de figuras

INTRODUCCIÓN

En este documento se presenta el desarrollo de una investigación que pretende caracterizar los argumentos de estudiantes que se pueden generar a partir del uso del doblado de papel en el aula de geometría. El estudio se llevó a cabo en varias clases de geometría con estudiantes de grado octavo, en una institución educativa en Bogotá (Colombia) durante el año 2017. El objetivo proyectado consistía en describir la naturaleza de los argumentos promovidos en los estudiantes al diseñar e implementar con ellos una secuencia de tareas que se soportaban en la geometría del doblado de papel (GDP).

Para desarrollar este estudio se tuvo en cuenta tres componentes conceptuales dentro del marco teórico: la geometría del doblado de papel, Humanos-con-medios y la Argumentación según Toulmin. Por medio del primer componente se describe la geometría que se puede desarrollar por medio de los dobleces del papel y sus implicaciones, como una alternativa frente a la regla y el compás o a la geometría dinámica. Con el constructo Humanos con medios se hace mención a que el conocimiento mediado por el doblado de papel es permeado por este, lo que se explica según el nivel de suplementación (carente, parcial, total y única) de este recurso en el trabajo de los estudiantes. El último componente describe los elementos de un argumento y permite señalar la completitud de estos en el discurso de los estudiantes.

El documento está organizado en ocho capítulos, de los cuales este es el primero. El segundo capítulo presenta la justificación del estudio realizado, las delimitaciones del problema al que se le quiere dar solución y las motivaciones correspondientes de esta elección, el objetivo general y específicos. El tercer capítulo menciona investigaciones que involucran el doblado de papel en la enseñanza de la geometría. En el cuarto capítulo se detallan los elementos teóricos que se mencionaron en el segundo párrafo. En el quinto capítulo se da lugar a los aspectos metodológicos tenidos en cuenta para desarrollar de este trabajo, como la perspectiva investigativa, revisión literaria, contexto del estudio, descripción de la secuencia implementada y del proceso de recolección de información, junto con las categorías establecidas para el correspondiente análisis.

En el sexto capítulo se presentan las transcripciones y análisis de las producciones de los estudiantes en cada una de las tareas. En el séptimo capítulo se realiza un análisis general de los resultados arrojados tras el análisis de cada uno de los protocolos del capítulo seis. En el octavo capítulo se presentan las conclusiones de la investigación, donde se atiende a la pregunta de investigación y los objetivos de esta, así como algunas proyecciones a futuro de este estudio.

JUSTIFICACIÓN

En la actualidad se evidencian nuevas necesidades en la formación de los estudiantes, idea sugerida por Goñí (2010) al referirse al tipo de conocimiento requerido para que el ciudadano se desenvuelva adecuadamente en la sociedad. Según Gómez-Chacon (2010) la sociedad requiere ciudadanos que sean reflexivos ante los temas que allí emergen, que construyan una opinión propia y a través de esta participen en la toma de decisiones, de tal forma que sean escuchados y que reconozcan la existencia de distintos puntos de vista.

Para propiciar una formación de tal naturaleza, se requiere que el sistema educativo promueva principios de igualdad y participación desde etapas tempranas (Valero, 2012). Lo anterior, haciendo eco a Gómez-Chacon (2010), puede ser atendido a través de la clase de matemáticas. Esto conlleva a concebir las matemáticas escolares de manera distinta a la que ha prevalecido a lo largo de los últimos años -v.g. rutinas, procedimientos y memorización- (Fortuny, Iranzo, y Morera, 2010).

En el contexto colombiano se han considerado ideas en esta vía, particularmente los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) señalan que por medio de la educación matemática se requiere fomentar en el estudiante el desarrollo del pensamiento analítico ante situaciones de su realidad, promoviendo con ello una postura reflexiva y crítica en el entorno en el que este se desenvuelve. Este objetivo conlleva a la configuración de espacios en los que la comunicación de ideas a cargo de los estudiantes y su confrontación ante otras sea un aspecto característico. De acuerdo a los planteamientos del MEN (1998) la comunicación y discusión que toma protagonismo al interior de la clase de matemáticas aporta a los estudiantes elementos para expresar sus ideas de forma adecuada, así como el reconocimiento de otros puntos de vista, lo que en última instancia apoya la construcción social de conocimiento.

Por lo anterior vemos que la clase de matemáticas puede concebirse como un espacio en el que la discusión entre sus participantes permita elaborar y movilizar ideas alrededor de un saber matemático, asunto que requiere por parte del profesor una gestión particular, pues las condiciones bajo las cuales esto acontece no son aquellas que tienen presencia en la clase tradicional. El diseño de estos espacios debe permitir a los estudiantes tomar decisiones, así como exponer y escuchar posturas en discusiones donde se desarrolle la capacidad de justificar las afirmaciones con argumentos (MEN, 2006).

Autores como Krummheuer (1995) y Chico (2014) han estudiado escenarios de clase en los que los estudiantes exponen y defienden sus ideas ante sus compañeros en el marco de la solución de problemas o la negociación de significados. De este ejercicio se ha reconocido una estrecha relación entre este tipo de configuraciones en la clase de matemáticas y la emergencia de la argumentación, vista como un fenómeno social (Krummheuer, 1995). Lo anterior permite considerar que la configuración de ambientes en la clase de matemáticas que promuevan la argumentación por parte de los estudiantes se convierte en una oportunidad para atender a los asuntos mencionados líneas atrás.

Aun cuando reconocemos en la normatividad (v.g. MEN, 1998, 2006) y en resultados investigativos la relevancia de la argumentación, así como formas a través de las cuales esta se favorece en la clase de matemáticas (Horacio y Deulofeu, 2016; Weber, Maher, Powell, y Hollylynne, 2008; Yackel, 2002), desde nuestra experiencia como profesores de matemáticas, particularmente de geometría, hemos podido evidenciar que la enseñanza de esta última en el nivel escolar se ha enfocado principalmente en el trabajo alrededor de fórmulas y memorización de propiedades de objetos geométricos sin promover una comprensión profunda de estos (Blanco y Barrantes, 2003; Camargo, Samper y Perry, 2006; Camargo, Perry, Samper, Molina, y Echeverry, 2007; Fiallo, 2010). En el caso de procesos de la actividad matemática relacionados con la justificación[1] se reconoce una exposición magistral a cargo del profesor, mientras que el estudiante se limita a replicar las acciones en situaciones similares, dejando de lado una comprensión frente a la necesidad de justificar (Crespo, 2014). Lo anterior lleva a que el discurso de los estudiantes se caracterice por la formulación de argumentos empíricos y no teóricos, pues en el sustento empírico se reconoce una fuente de validación confiable.

La búsqueda de estrategias que aporten al desarrollo de procesos argumentativos ha puesto en relieve los recursos computacionales y las conexiones entre la dimensión empírica y teórica que estos permiten abordar (v.g. Fiallo, 2010; Gutiérrez, 2009; Gutiérrez y Jaime, 2015; Samper y Toro, 2017g). Sin embargo, en muchas instituciones educativas estas bondades son inalcanzables pues no se implementan por motivos como la escasa capacitación de los docentes para hacer uso de estas, tanto en sectores urbanos como rurales (Hernández, Jurado, y David, 2014; Pulido, Nájar, y Guesguan, 2016), o la resistencia a un

---

[1] La entendemos como la acción de dar explicaciones sobre una afirmación o punto de vista, que pueden ser: no legítimas, explicación empírica y la explicación analítica (Camargo, Samper y Perry, 2006).

Argumentación: Este término será usado para referirnos a toda la actividad de hacer aserciones, cuestionarlas, apoyarlas con razonamientos que a la vez se apoyan en un marco axiomático aceptado, criticar esas razones o rebatir esas críticas (Toulmin, 1984).

cambio curricular que propenda por una integración de las tecnologías digitales de las que se dispone en las instituciones (Escorcia y Jaimes, 2015; Laiton et al., 2017; Soto, Franco, y Giraldo, 2014).

Autores como Santa y Jaramillo (2010) proponen el uso del doblado de papel, medio de fácil manipulación accesible para los estudiantes, a través del cual se pueden representar, observar, comparar y ordenar propiedades y construcciones, hacer inferencias y abstracciones sobre los objetos representados, por mencionar algunas bondades dada la naturaleza de los objetos representados. Estos autores señalan que a través de la implementación de este medio se podría apoyar la emergencia de procesos que contribuyan a la argumentación en los estudiantes.

La inclusión de este recurso manipulable, haciendo eco a las ideas de *Humanos con medios* (Borba y Villarreal, 2005), lleva consigo a la consideración de un conocimiento sobre los objetos geométricos involucrados cuya naturaleza es particular. Esto permite reconocer que la naturaleza de los argumentos desarrollados a través de la interacción con este nuevo recurso puede tener características particulares, propias del medio mismo en el que estas toman lugar.

Lo anterior permite ver que el doblado de papel provee una oportunidad para el desarrollo de la argumentación, una con posibles características particulares; el doblado de papel además es un medio pertinente cuando no se tiene acceso a recursos tecnológicos digitales. Sin embargo, no se reconocen estudios que expongan la naturaleza de los argumentos que se promueven en clase de geometría cuando se involucra el doblado de papel. Formulamos así la siguiente pregunta que orientará el estudio reportado en este documento.

¿Cuál es la naturaleza de los argumentos en la clase de geometría cuando se involucra el doblado de papel?

OBJETIVOS

Objetivo general

Caracterizar los argumentos que emergen en la clase de geometría a partir de la resolución de tareas que involucran el doblado de papel.

Objetivos específicos

- Construir un sistema teórico alrededor de la geometría del doblado de papel.
- Diseñar e implementar una secuencia de tareas alrededor de algunos objetos de la geometría en la que se involucre el doblado de papel.
- Reconocer y clasificar los argumentos que surgen por parte de los estudiantes.

ANTECEDENTES

Presentamos en este capítulo algunas investigaciones que guardan relación con el estudio realizado en este documento. Estas investigaciones han sido agrupadas en dos grandes vertientes: (i) uso del plegado de papel en educación matemática, donde relacionamos algunos estudios que involucran el uso del plegado de papel en la enseñanza de las matemáticas; y (ii) plegado de papel y argumentación en geometría, en donde se presentan estudios realizados alrededor de la argumentación en la enseñanza de la geometría por medio de este recurso. Pretendemos así ofrecer una mirada panorámica sobre lo que se ha realizado respecto a la argumentación en geometría a través del doblado de papel.

USO DEL PLEGADO DE PAPEL EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Para iniciar el recorrido por la literatura revisada en esta categoría tenemos en cuenta a González y Vargas (2000), quienes relatan una experiencia vivida a partir de la implementación de doblado y rasgado de papel con estudiantes de octavo grado de educación secundaria en Chile, con el propósito descubrir alternativas que permitan superar el enfoque tradicionalista de la enseñanza de la matemática, el cual se considera limitado para promover el aprendizaje en los estudiantes. Según González (1998, citado en González y Vargas, 2000), por medio de este tipo de materiales se le posibilita al estudiante explorar ideas matemáticas. En la investigación se implementó una secuencia de tareas que involucraba objetos geométricos como cuadrado, rectángulo, rombo, diagonal, altura, y aspectos como áreas solapadas de objetos geométricos, construcciones de objetos geométricos, entre otras. Los autores resaltan de los resultados obtenidos de la investigación la motivación en los estudiantes al involucrarse en un trabajo de esta naturaleza, la posibilidad de aclarar conceptos previos e incorporar otros nuevos, todo gracias a la manipulación de los objetos geométricos a través del doblado de papel.

Siguiendo nuestro recorrido, presentamos el estudio realizado por Brady (2008) en Australia, donde se investiga cómo a través del plegado de papel en la enseñanza de las matemáticas en el nivel de primaria, se puede promover el compromiso afectivo, conductual y cognitivo en el aprendizaje matemático. Por medio de un experimento de enseñanza se involucraron estudiantes destacados en Matemáticas y estudiantes con dificultades de aprendizaje. A través de una secuencia de enseñanza se involucraron características de figuras geométricas como caras, vértices, aristas, ángulos y sus propiedades; el desarrollo de habilidades en el plegado de papel, visualización espacial y razonamiento geométrico. De los resultados obtenidos destacamos aquellos relacionados con el aspecto cognitivo, sobre el cual se reporta que en los estudiantes se favoreció la capacidad para dar explicación de procedimientos y razonamientos de tipo conceptual a otros estudiantes, junto con la comprensión de ideas referentes a la naturaleza de las matemáticas como patrones matemáticos. Se resalta también, el progreso que mostro un estudiante con autismo, al completar con éxito modelos razonablemente complejos con escaza ayuda, además del ensamble de cuerpos geométricos por parte del mismo.

Presentamos ahora la investigación de Boakes (2008, 2009), donde se describe el impacto de la implementación del origami en la visualización espacial y los efectos que este puede lograr en la capacidad matemática de los estudiantes. Se realizó un estudio de tipo experimental con estudiantes de primaria y de grado séptimo en Estados Unidos. Algunos grupos de estudiantes recibieron clases de geometría basadas en las planeaciones del profesor, sin involucrar origami, mientras que otros recibieron estas clases con el apoyo del origami. Los asuntos geométricos abordados fueron: rectas paralelas, triángulo rectángulo, rectas perpendiculares y ángulos, entre otros. A través de esta investigación se muestran algunas bondades que ofrece el origami, ejemplo de ello son el logro de habilidades matemáticas en la visualización bidimensional y tridimensional de figuras geométricas.

Siguiendo la misma línea de investigación encontramos a Çakmak (2009), quien se interesó por indagar, además de la visualización espacial, la orientación espacial. Su estudio involucró 38 estudiantes de cuarto, quinto y sexto grado del sistema educativo en Turquía, en el que intervino el plegado de papel para reconocer algunas propiedades de objetos geométricos como triángulos, ángulos, líneas paralelas y perpendiculares, cuadriláteros, cubos, entre otros. El estudio se llevó a cabo por medio de la aplicación de un test, previo y posterior a la instrucción con origami al grupo de muestra, además de cuestionarios que pedían que los estudiantes manifestaran dificultades durante el desarrollo de la clase, así como las oportunidades de aprendizaje que consideraban tenían lugar. El análisis de los resultados dejó ver que la instrucción basada en origami fortalece en los estudiantes habilidades espaciales, tanto visual como de orientación; por otro lado, se estimula el aspecto emotivo de los estudiantes, al tiempo que ellos declararon haber comprendido conceptos de la geometría.

En lo realizado por Mateus et al. (2009) se reconoce una propuesta de enseñanza para el nivel de bachillerato sobre conceptos de la geometría, álgebra y trigonometría por medio de la papiroflexia. El trabajo surge ante la necesidad de abordar la enseñanza de estos asuntos por medio de una metodología factible de ser aplicada en cualquier población. La implementación de la metodología se llevó a cabo con integrantes de un programa de formación de profesores de matemáticas en Bogotá. Los objetos de estudio fueron línea, rectas paralelas y perpendiculares, semejanza y congruencia de triángulos, identidades trigonométricas, área, volumen, polígonos y poliedros. Los autores consideran que al involucrar recursos didácticos en la enseñanza de la geometría se posibilita el reconocimiento de características de objetos geométricos, lo que permite la construcción de definiciones. De lo realizado por estos autores destacamos el rol que tuvo la papiroflexia para definir objetos matemáticos por medio del reconocimiento de propiedades de los objetos involucrados.

De modo similar al anterior referimos a Cardona, Gómez, y Santa (2015) sobre la implementación del doblado de papel como un recurso pertinente para promover la comprensión de modo activo y significativo del concepto de simetría en estudiantes de séptimo grado de una institución en Medellín, Colombia. La propuesta de los autores se fundamenta en el marco de la Enseñanza para la Comprensión en miras de analizar el progreso de la comprensión de los estudiantes y la reflexión sobre la misma práctica pedagógica dentro del aula. El enfoque del estudio fue de tipo cualitativo basado en la observación de las situaciones del aula, para lo cual se diseñaron e implementaron actividades que involucraban el doblado de papel, además se hacían observaciones y se entablaban diálogos con los estudiantes antes y durante sus trabajos. Como resultados se pudo apreciar que al desarrollar estrategias didácticas con doblado de papel se reconocen comprensiones del concepto de simetría por parte de los estudiantes. Estos resultados nos permiten asegurar que el doblado de papel posibilita el reconocimiento de propiedades de los objetos geométricos a estudiarse con el fin de que los estudiantes adquieran bagaje conceptual para que argumenten y den evidencia del desarrollo de esta competencia en su proceso de aprendizaje.

Con relación a las ideas tratadas presentamos igualmente a Beltran, Duque, Fernández, y Suárez (2016) quienes por medio de una experiencia de aula muestran que el plegado de papel media en el modo de razonar de estudiantes de grado once en una institución de Bogotá, Colombia, cuando se abordan problemas de generalización. El estudio fue de tipo cualitativo en el que se intervino el aula por medio de problemas de generalización según Radford (2013; citado en Beltran et al., 2016) con el que se buscaba señalar aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes como el sentido de indeterminancia, la designación simbólica de sus objetos entre otros (Radford, 2006; citado en Beltran et al., 2016). La información recolectada sobre la producción de los estudiantes tuvo que ver con lo que ellos habían hecho en las hojas de trabajo tras solucionar los problemas propuestos para su posterior análisis. También se hizo registro en audio. Los autores reportan que por medio del trabajo con dobleces de papel se promovió la intuición, la deducción y la generalización de ideas por parte de los estudiantes, estos resultados dan cuenta de lo propicio que puede llegar a ser este recurso en los procesos de enseñanza en los que se espera que los estudiantes propongan argumentos de corte deductivos, inductivos y abductivos.

Por último mencionamos a Avilés (2016), quien a partir de la necesidad de superar las dificultades en el aprendizaje de la geometría en estudiantes de grado décimo, propone el plegado del papel como una posibilidad para su enseñanza y aprendizaje. En su investigación se involucró un enfoque descriptivo no experimental con un grupo de estudiantes en Ecuador. La intervención en el aula se llevó a cabo a través de una secuencia apoyada en el doblado de papel, lo que conllevó a abordar los contenidos involucrados en dicha secuencia previa a su implementación. La secuencia se apoyó en el modelo de Van Hiele para determinar en el estudiante el desarrollo de nociones, definiciones e identificación de características alrededor de objetos geométricos como bisectrices, mediatrices, cuadriláteros y polígonos. Los resultados del análisis estadístico a priori y posteriori de la secuencia muestran cambios considerables en el logro académico de los estudiantes. Lo anterior permitió asegurar a la autora que el plegado de papel es una herramienta poderosa para fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría por su carácter versátil y el sustento matemático que provee.

Los antecedentes presentados en este apartado permiten resaltar el aporte que realiza el doblado del papel en el aprendizaje de las matemáticas en distintos contextos y niveles educativos. Se reconoce que al involucrar el doblado de papel se propicia la motivación, la comprensión de conceptos, el razonamiento y la habilidad espacial apoyada en la visualización, junto con el reconocimiento de características de los objetos geométricos estudiados. Dado lo anterior, creemos que la estimulación de aspectos cognitivos en el estudiante se puede alcanzar por medio de secuencias de enseñanza que tienen en cuenta el doblado de papel, lo que nos permite pensar en la pertinencia de este recurso para nuestra investigación. Ahora bien, a pesar de las contribuciones mencionadas, falta observar si el plegado de papel posibilita la emergencia de argumentos en la clase de geometría. Algunos estudios en esta vía se presentan a continuación.

PLEGADO DE PAPEL Y ARGUMENTACIÓN EN GEOMETRÍA

Inicialmente mencionamos el trabajo realizado por Leal, Suárez, Fernández y Moreno (2010), quienes proponen una secuencia de actividades de geometría que involucra el plegado de papel. El objetivo de su propuesta es llevar a los estudiantes a identificar propiedades y relaciones entre objetos geométricos. La secuencia se implementó con estudiantes de grado sexto entre 10 y 12 años de edad, en Colombia. Los autores manifiestan que, a través de la construcción de figuras y cuerpos geométricos con el apoyo del doblado de papel, estos se dotan de significado. En cuanto al manejo del papel en el aula, se resaltan las habilidades del estudiante para el logro de las construcciones propuestas por el profesor y la ayuda mutua que entre sus pares se manifiesta. Los autores atribuyen al doblado de papel el aprendizaje grupal y el apoyo al estudiante en el desarrollo de sus propias habilidades, alejándose de la dependencia en el docente. Además, se reconoce que el doblado de papel promueve la creatividad del estudiante y le lleva a descubrir características y propiedades de los objetos geométricos abordados, junto con el desarrollo de habilidades argumentativas por medio del lenguaje, al pedirle al estudiante explicar procesos de pensamientos en momentos de socializaciones de ideas a otros compañeros.

En cuanto a la construcción y reconocimiento de propiedades geométricas de las cónicas como lugares geométricos, apoyados en la geometría del doblado de papel y sus axiomas, encontramos a Santa y Jaramillo (2010, 2011). Estos autores reportan los resultados obtenidos en el desarrollo de talleres, llevados a cabo en encuentros regionales sobre educación con profesores y estudiantes. En su reporte los autores señalan que, a través de la manipulación de una hoja de papel, al hacer doblados en ella, se pueden reconocer conceptos geométricos por medio de la visualización. Además, se cuenta con la posibilidad de favorecer justificaciones apoyadas en un sistema axiomático configurado alrededor del plegado de papel. De lo comunicado por los autores, resaltamos el aporte que puede proveer la geometría del doblado de papel frente a la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Por consiguiente, se puede pensar en las posibilidades que, para la argumentación, ofrecería esta geometría alterna a la geometría euclidiana.

De modo similar al anterior, Sgreccia y Villarroel (2011) reportan acerca del carácter intuitivo de la geometría y su evidente relación con lo real, aduciendo que por medio de lo experimental el estudiante tiene la posibilidad de lograr aprendizaje a través de la manipulación de materiales didácticos concretos, por medio de actividad de construcción de objetos geométricos y el análisis de sus características, situación que conlleva a que ellos argumenten con base a las propiedades reconocidas en el proceso de manipulación. La investigación se centró en conocer las habilidades geométricas que ofrecen siete tipos de materiales didácticos concretos al involucrarse en el desarrollo de actividades de enseñanza aprendizaje en geometría. Los autores en su trabajo se fundamentan en la Educación Matemática Realista de Hans Freudenthal y el modelo de Van Hiele (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2008; Van Hiele 1957; citados en Sgreccia y Villarroel 2011). En cuanto al primero se hace alusión a seis principios para tener en cuenta dentro del aula de clase y también en las habilidades específicas de Hoffer (1981; citado en Sgreccia y Villarroel 2011), entre las que se encuentran las habilidades lógicas o de razonamiento que tienen que ver con la generación de justificaciones, argumentaciones y contraejemplos por parte del estudiante.

La investigación de Arici y Aslan-Tutak (2013) se centró en conocer el efecto del uso del origami en la promoción del logro académico y el razonamiento geométrico en estudiantes de décimo grado en Turquía. Este estudio se realizó con dos grupos, uno con enseñanza de geometría desde un enfoque tradicional y el otro con un enfoque experimental basado en origami, ambos con el mismo profesor y texto guía. Los resultados de los estudios dejan ver como un aspecto positivo la implementación del origami en el conocimiento geométrico de los estudiantes que contaron con dicho recurso, teniendo en cuenta el razonamiento exhibido por este grupo en comparación con el grupo que no contó con este material. Los hallazgos concernientes al razonamiento geométrico presentaron un cambio estadísticamente significativo, tomando en cuenta lo hallado previo a la implementación de la secuencia de tareas y el estado posterior gracias a una prueba realizada en ambos grupos. Los autores sugieren que el origami facilitó a los estudiantes que usaron este recurso razonar en un nivel de abstracción superior en geometría.

A partir de la búsqueda realizada en esta vía, podemos notar que los estudios en el campo de la Educación Matemática sobre la relación entre el plegado de papel y la argumentación en geometría no está lo suficientemente documentada. No obstante, las investigaciones realizadas y presentadas en este apartado dejan ver que es posible promover argumentos gracias a la implementación de secuencias de enseñanza que involucren el doblado de papel como recurso de mediación.

MARCO TEÓRICO

Presentamos en este capítulo los referentes conceptuales que sustentan el estudio realizado. Se contemplaron tres constructos teóricos cuya conjugación permite analizar la naturaleza de los argumentos exhibidos por los estudiantes en su interacción con el doblado del papel. Estos elementos teóricos son Humanos con Medios, geometría del doblado de papel y la Teoría de la argumentación desde una perspectiva social.

HUMANOS CON MEDIOS

Borba y Villarreal (2005) proponen el constructo teórico *Humanos-con-medios*, el cual habla sobre el rol que desempeñan los medios en la generación del conocimiento. En este constructo los seres humanos y los medios son concebidos como una unidad inseparable que conforman un sujeto epistémico. Por consiguiente, la cognición no es una labor de carácter individual sino de tipo colectivo, la cual involucra artefactos, dispositivos y herramientas para generar conocimiento (Villa-Ochoa y Borba, 2011). Estos autores destacan que cualquier tipo de tecnología puede considerarse como medio y que esta, a su vez, no es neutral al tipo de conocimiento que se produce.

La teoría *Humanos-con-medios* sienta sus bases en la idea de Pierre Lévy en el año de 1993, quien afirma: "(…) nuestro pensamiento se encuentra profundamente moldeado por dispositivos materiales y colectivos sociotécnicos" (p. 10; citado en Villarreal, 2013). Los dispositivos, cualesquiera que sean, constituyen un colectivo pensante y se relacionan con las tecnologías, que, según Lévy, condicionan las maneras de pensar de una sociedad, haciendo posible el establecimiento de estilos para la adquisición de conocimiento junto con la modificación de los pasos para llegar a adquirir ese conocimiento (Villarreal, 2013). En este orden de ideas, la innovación del uso de las tecnologías relacionadas con el intelecto produce cambios en los modos de aprender, posibilitando maneras de conocimiento que difieren de las producidas por las tecnologías tradicionales, desarrolladas en el transcurso de la historia de la humanidad, siendo estas las más usadas en el trabajo matemático de los estudiantes en la escuela (escritura y oralidad, con ambientes de lápiz y papel).

Presentamos ahora una situación que puede reconocerse como ejemplo de un colectivo pensante. El desarrollo por parte de un estudiante de una tarea de geometría plana a través de la geometría del doblado de papel. Ejemplificamos con la descripción de una situación, que el modo de abordar la solución a la tarea genera un estilo de cognición particular impregnado del medio que se involucra. El conocimiento adquirido por dicho individuo ostentara características particulares si se compara con otra situación donde el medio hubiera sido un papel, lápiz y transportador. Las acciones y modos de proceder en cada ambiente tendrán una naturaleza distinta.

A un par de estudiantes se propone la siguiente situación:

> *A partir de un doblez, construido en una hoja, construye un doblez perpendicular a este. Explica tu procedimiento.*

Tras analizar y discutir el modo de abordar la solución de la tarea los estudiantes explican.

> *Tomamos la hoja y plegamos el doblez sobre sí mismo. De esa manera se formó un nuevo doblez, que es perpendicular al primero.*

Independientemente de la justificación del resultado de este procedimiento, reconocemos aquí un particular de colectivo pensante, conformado por estudiantes-doblado de papel. Proponen un modo característico de construir dobleces perpendiculares, en el que la naturaleza de lo realizado es propia del ambiente de la geometría del doblado de papel. Con esta situación descrita, a modo de ejemplo, queremos destacar que el conocimiento construido está permeado por el medio, aspecto distintivo de los colectivos pensantes.

Villarreal (2013), al explicar la perspectiva tenida en cuenta en *Humanos-con-medios*, declara que el concepto tecnología no solo se relaciona con el auge de aparatos sofisticados, sino que va más allá. Apoyada en Kenski (2007; citado en Villarreal, 2013), esta autora señala que el término tecnología encierra el total de creaciones realizadas por el ingenio del hombre durante el transcurrir de la historia, sus maneras de uso y aplicaciones. Según Borba y Villarreal (2005) y Villarreal (2013) los elementos comunes que están en las aulas de clase, como lápiz, cuaderno, tablero, marcadores, entre otros, no siempre estuvieron allí y con su llegada modificaron el trabajo escolar. Con base en lo anterior, la autora señala que hay una influencia de los medios usados en la generación de conocimiento, los cuales determinan la práctica, el contenido y la manera de conocer. Según Gvirtz (1999; citado en Borba y Villarreal, 2005) los elementos articulados para el quehacer en el aula son reorganizadores de la actividad escolar, por lo que se pueden ver como estructurantes de la dinámica de la clase.

De acuerdo con el constructo *Humanos-con-medios* los seres humanos y no humanos, calculadoras, computador, dispositivos móviles, etc., conforman un sujeto epistémico. Para Borba (2009; citado en Pérez, 2014) la noción de *Humanos-con-medios* sustenta que el medio y el ser humano se configuran mutuamente a tal punto que no se evidencia una dicotomía entre ellos, sino que se propicia una colectividad, dado que el medio reorganiza el pensamiento humano, propiciando que este haga parte de la ecología cognitiva del que desarrolla un conocimiento. Lo anterior lleva a pensar que los medios empleados por un individuo ponen su sello distintivo en la construcción y aprendizaje de las matemáticas de este sujeto.

Alrededor de la teoría *Humanos-con-medios* se han propuesto las ideas de substitución, *suplementación* y reorganización. Para ejemplificar esto, consideremos las ideas de Tikhomirov (1981; citado en Villarreal, 2013), quien analiza el rol del computador en su relación con las personas desde un punto de vista psicológico. Al referirse a *substitución* se considera que el ser humano puede ser sustituido por la computadora en su trabajo intelectual bajo el supuesto de que la computadora puede resolver problemas que el hombre soluciona. En el caso de la *suplementación* se señala a la computadora como un complemento del pensamiento humano al dar celeridad y volumen al procesamiento de la información realizado por el hombre. Finalmente, la *reorganización* hace alusión a que la implementación de la computadora por el hombre condiciona la actividad de orden intelectual de este, dado que intervine la estructura de dicha intelectualidad. Se redefinen entonces los modos en que se crea, busca y guarda la información. Lo anterior deja ver a la computadora como más que un mecanismo de apoyo, pues se convierte en un transformador de la actividad humana (Villarreal, 2013).

GEOMETRÍA DEL DOBLADO DE PAPEL

Basados en Royo (2002) realizamos el siguiente recuento sobre la papiroflexia, a la cual se le reconoce como el arte de plegar papel con el fin de formar figuras reconocibles. Según la ortodoxa de la papiroflexia, solo se permite hacer doblados sobre el papel y no valerse de instrumento auxiliares como tijeras o algún tipo de pegante (Royo, 2002). El lugar donde se reconoce el origen de la papiroflexia, según Prieto, es Japón, aunque en otros lugares como la península ibérica también se cuenta con evidencia de que esta práctica se realizara.

Según Royo (2002) la papiroflexia involucra tres aspectos en los cuales se puede reconocer la matemática. Estos son, la papiroflexia modular (construcción de poliedros con papel), los axiomas de constructibilidad (construcciones con papel alternas a las de la regla y compás) y el diseño de figuras (papirofléctica). En nuestro trabajo nos enfocamos con especial atención al segundo aspecto, dado que la constructibilidad nos permitirá reconocer una geometría alterna a la geometría euclidiana, idea que guarda relación con lo expuesto por Santa y Jaramillo (2011) al referirse a la geometría del doblado de papel. En el siguiente apartado profundizamos al respecto.

Antes de ello y a modo de precisión, en nuestra investigación adoptamos la diferenciación sobre el doblado de papel y el origami que realiza Santa y Jaramillo (2011). Esta distinción denota a la creación de figuras con finalidades artísticas como origami y a la construcción de dobleces para la representación de figuras con fines educativos como doblado de papel. Para este autor, en esta última se propende por la visualización de propiedades geométricas en las construcciones.

Fundamentamos nuestra propuesta en el trabajo de Santa y Jaramillo (2010, 2011) sobre la geometría del doblado de papel. En su estudio los autores afirman que el doblado de papel es una herramienta que posibilita la asimilación de conceptos geométricos, dado que favorece procesos de visualización y experimentación. El doblado del papel favorece el reconocimiento de conceptos geométricos y procesos de justificación ligados a acciones realizadas sobre el papel, al acudir a un sistema axiomático de referencia que previamente se establece. Por medio del doblado de papel se posibilita realizar construcciones precisas como las de regla y compás. Con el paso del tiempo se ha consolidado un sistema de axiomas que guardan cierta similitud con los de la geometría Euclidiana, a través de estos se pueden hacer justificaciones de las construcciones realizadas a través del doblado de papel (Santa y Jaramillo, 2010).

Santa y Jaramillo (2010) atribuyen la fundamentación de esta geometría a los siete axiomas de Humiaki Huzita y Koshiro Hatori (1989 y 2003; citados en Santa y Jaramillo, 2010). En este sustento axiomático de la geometría del doblado de papel se puede identificar una suficiencia, relacionada con el hecho de que los postulados, definiciones junto con los teoremas, involucran hechos geométricos que engrosan y dan consistencia a dicho sistema axiomático. En esta base teórica se identifica una independencia entre postulados y axiomas, ya que no son deducibles unos de otros, y una compatibilidad entre estos, dado que no es posible obtener por medio de los axiomas conclusiones divergentes (Santa y Jaramillo, 2010).

En la geometría del doblado de papel Santa y Jaramillo (2010, 2011) establecen una relación entre los conceptos primitivos de la geometría euclidiana con la del doblado de papel. La recta se representa en el papel con un doblez, que, aunque limitado dada las restricciones de la hoja, ostenta la similitud de una línea recta la cual es infinita. El punto tiene su representación en la intersección de dos o más dobleces, o también con los vértices de los extremos de la hoja de papel. En este caso se acude a la intuición para asumir al punto como la huella mínima del lápiz. Por último, a la hoja de papel se le adjudica la noción de porción de un plano, que, aunque limitado, se asume de manera abstracta como un plano infinito.

Al contar con una hoja de papel, dobleces y puntos, se posibilita al estudiante la representación de relaciones entre rectas y/o segmentos como paralelismo o perpendicularidad; relaciones entre puntos y rectas como colinealidad; y otras como lugares geométricos, ángulos, etc. La representación en papel propicia la comprensión de varias definiciones, propiedades y conceptos geométricos (Santa, 2011).

LA ARGUMENTACIÓN: PERSPECTIVA DE STEPHEN TOULMIN Y UN GIRO HACIA LO SOCIAL

Desde hace algunos años algunas investigaciones se han enfocado en analizar procesos discursivos en actividades de enseñanza y aprendizaje de las ciencias dado que se reconoce que la argumentación desempeña un papel determinante en el desarrollo de la ciencia (Pinochet, 2015). Esto ha llevado al estudio de este asunto por parte de diversos autores como (Meza, 2009) en el ámbito periodístico; Molina y Padilla (2012) sobre la argumentación escrita; Crespo (2014), quien describe la importancia de argumentar en el aula de matemáticas y Pinochet (2015), quien hace una revisión documental del uso de la argumentación en el marco teórico de investigaciones sobre la educación de las ciencias, por nombrar algunos de ellos.

En el ámbito académico se ha ido tomando conciencia sobre los beneficios que tiene la argumentación como competencia en esferas políticas y sociales, que a su vez implican los saberes, las acciones, las habilidades y el aspecto de los valores para promover tales competencias (Harada, 2009). En este orden de ideas, la argumentación favorece la solución de conflictos y problemas, junto con la toma de decisiones, que atañen a lo práctico o teórico, en situaciones de tipo disciplinario o cotidiano (Harada, 2009). Desde la Educación Matemática se puede propender por el desarrollo de competencias ciudadanas en el estudiante a partir del fomento de habilidades que lo lleven a saber relacionarse consigo mismo, con los demás y con su contexto de modo asertivo, en paz y democráticamente (Ramos, Sánchez y Huapaya, 2014)

Asimismo, desde una perspectiva social, Krummheuer (1995; citado en Yackel, 2002; Chico, 2014), apoyado en el enfoque argumentativo de Toulmin y colaboradores (1984) reconoce en la argumentación colectiva una interacción entre individuos con la intención de presentar reclamos, que se consideran como posturas, dentro del marco social del aula. En las interacciones de un grupo de personas, lo que ellas declaran es lo que sustenta el desarrollo de la argumentación. En consonancia con lo anterior, bajo la perspectiva de la argumentación como actividad social, se concibe a la argumentación colectiva como un proceso consensuado que se lleva a cabo en un ambiente discursivo en el que los participantes superan controversias o diferencias que surjan y que a su vez puedan conducir a retracciones y cambios en los puntos de vistas de quienes interactúan (Krummheuer, 1995).

Mencionamos a Stephen Toulmin, filósofo, historiador, retórico, entre otros, quien propone una teoría de argumentación en su libro *The uses of argument*, editado por primera vez en 1958, y posteriormente *An Introduction to Reasonning*, en 1984 junto a Janik y Rieke. En Toulmin (1958), para abordar el uso de un argumento, se señala un problema inicialmente, que a su vez se puede presentar a través de una pregunta, entre otras formas. Posteriormente a este problema o pregunta se le da una respuesta que debe estar respaldada por un argumento; en este punto se consideran posibles soluciones, caracterizando aquellas que sean más pertinentes y dignas de atención, que a su vez cuenten con un sustento que provea fuerza a esa solución. Por consiguiente, se estructura unos elementos de argumento a la luz de este constructo, los cuales mencionaremos a continuación.

Esquema de un argumento

A diferencia de la estructura aristotélica (premisa menor, premisa mayor y conclusión), Toulmin adopta un esquema menos simple. Antes de presentar el esquema del autor como tal, es necesario presentar algunas definiciones sobre términos relacionados con este asunto. Según Toulmin et al. (1984, p.25):

- ♦ El término *argumentación* será usado para referirse a toda la actividad de hacer aserciones, desafiarlas, apoyarlas con razones, criticar esas razones, rebatir esas críticas, y así sucesivamente.

- ♦ El término *razonamiento* será usado, más estrechamente, para la actividad central de presentar las razones en apoyo de una aserción, como para mostrar cómo esas razones tienen éxito al darle fuerza a la aserción.

- ♦ Un *argumento*, en el sentido de secuencias de razonamientos, es la secuencia de aserciones y razones entrelazadas que, entre ellas, establecen el contenido y la fuerza de la posición que está sosteniendo un interlocutor en particular (p. 14).

El siguiente ejemplo ilustra lo anteriormente mencionado. En clase de geometría dos estudiantes enuncian proposiciones de la siguiente manera:

> *Estudiante A: en la geometría de Euclides si cuento con dos puntos en el plano, entonces cuento también con una recta en el plano que contienen a los dos puntos.*
>
> *Estudiante B: sí, porque por dos puntos se puede trazar una recta.*

En este caso tenemos como ejemplo de argumentación el diálogo entre los dos estudiantes. En este, se observa una secuencia de tres razonamientos, los dos puntos en el plano, la recta que pasa por ellos, ambos declarados por el estudiante A y el hecho geométrico expuesto por el estudiante B. El razonamiento se puede identificar en las relaciones condicionales que implícitamente los estudiantes declaran al entrelazar los dos puntos en el plano con una recta y la del hecho geométrico que respalda esa idea. Por último, el argumento se refleja en la declaración (estudiante A) de poder trazar una recta a partir de dos puntos, en la que se presenta como razón que respalda el hecho geométrico "por dos puntos se puede trazar una recta" (estudiante B).

Elementos de un argumento

A continuación se hace una breve descripción de los elementos que conforman todo argumento según Toulmin et al. (1984):

- ♦ Aserción. Se pueden describir como el destino a donde nos lleva el argumento, es el punto a donde se quiere arribar por medio de lo que se argumenta.

- ♦ Dato. Se le denomina así a la fundamentación de la aserción, en otras palabras, lo que motiva a hacer esa declaración. Los datos pueden ser de tipo estadístico, empírico, teóricos, etc.

- ♦ Garantía. Se pueden entender como la solides de los datos que fundamentan la aserción, lo que le da credibilidad. Las garantías justifican que los datos brindan un apoyo contundente a la aserción.

- ♦ Respaldo. Es aquello que ofrece confiabilidad a la garantía.

El siguiente ejemplo pretende ilustrar lo mencionado anteriormente

> *Si se cuenta con dos rectas paralelas en el plano, l_1 y l_2 , y una tercer recta l_3 en ese mismo plano es perpendicular a l_1, entonces l_2 es también perpendicular a l_3, ya que siempre que una recta sea perpendicular a otra, también lo será a toda recta paralela a la que es perpendicular inicialmente. No importa el número de rectas paralelas, siempre otra recta que sea perpendicular a una de ellas, será perpendicular para todas las demás rectas paralelas.*

A continuación se analiza cada una de las partes del argumento:

- ♦ Dato: Dos rectas paralelas en el plano l_1 y l_2 , y una tercera recta l_3 en ese mismo plano es perpendicular a l_1.

- ♦ Aserción: Una recta que sea perpendicular a una paralela será perpendicular a todas las demás rectas paralelas.

- ♦ Garantía: Si una recta es perpendicular a otra, también lo será a toda recta paralela a la que es perpendicular.

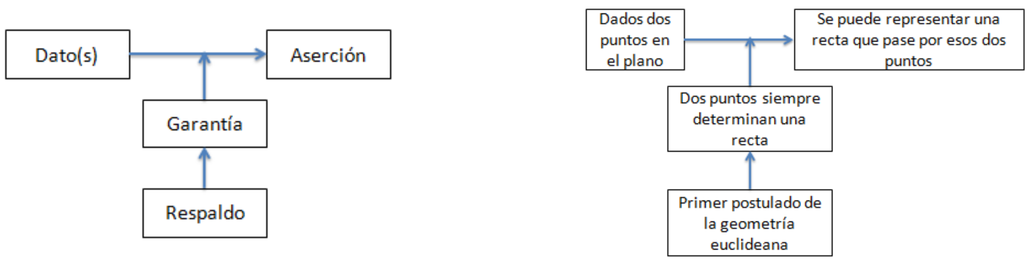
- ♦ Respaldo: Hecho geométrico que señala que cuando una recta es perpendicular a otra, también lo será a toda recta paralela a la que es perpendicular inicialmente.

Para Meza (2009, p. 5) la aserción "es aquello que se pretende sostener, el enunciado que se justifica a partir de la garantía y del dato". Cuando se considera la potencia y la fuente del argumento, es la aserción la que determina el punto de inicio y marca los pasos a seguir en el proceso de argumentar. En algunas ocasiones las afirmaciones son ambiguas o confusas, las palabras usadas a veces para presentar una aserción no son las más apropiadas, es decir, las palabras seleccionadas pueden conducir a confusiones o más de una interpretación. Cuando se da lugar a apreciaciones erradas, lo recomendable es corregir las ambigüedades.

Haciendo alusión a los datos, estos se pueden entender como "los elementos justificatorios que alegamos como base de la afirmación" (Toulmin, 1958, p.133). Los hechos que dos o más personas comparten pueden funcionar como datos, ya que son cosas que ambas partes aceptan sin entrar en cuestionamientos, al menos cuando se trata de desarrollar una argumentación.

En lo que respecta a las garantías, las cuales son afirmaciones que indican de qué manera los hechos, en los cuales las partes están de acuerdo, conectan con las conclusiones, estas se caracterizan por ser afirmaciones de validez previamente establecida en las cuales existe un apoyo mutuo (entre afirmaciones y conclusiones) que se da por sentado. Hay diversas clases de garantías y modos de llamarlas. Se puede referir a ellas como reglas que se supone se deben tener en cuenta; en un sentido más teórico, también se le puede ver como principio, leyes naturales, en otros casos han de ser las costumbres, procedimientos o valores aceptados. Otro nombre dado a la garantía es el de licencia, el cual hace referencia a la noción de una autorización para realizar un paso, es decir, el pasar de los datos a la aserción.

El respaldo se puede ver como el conjunto de evidencias que se asumen con aceptabilidad general, haciendo posible la validez de las formas en que se da el argumento. La naturaleza de los respaldos se relaciona estrechamente con las bases que fundamentan la manera de argumentar, en otras palabras, el respaldo responde a las preguntas "¿es confiable la garantía?" o "¿es válida su aplicación para este caso?". De este modo se determina si son o no de peso los argumentos. El tipo de respaldo dependerá primordialmente del campo donde se genere el argumento, esto es, el ámbito, el cual puede ser científico, jurídico, de moral o de ética, de matemáticas, etc. Para concluir lo declarado anteriormente, presentamos el siguiente ejemplo que obedece la estructura de los argumentos de Toulmin et al. (1984), *Esquema 1*.



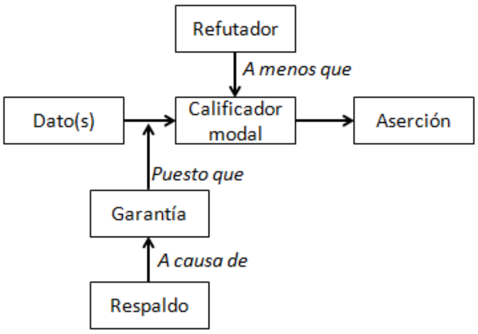
Esquema 1. Esquema de argumentación de Toulmin y un ejemplo.

Según Chamizo (2007), aun cuando Toulmin contempla esta estructura, en la observación de los argumentos, los elementos como los datos o la aserción por lo general tienen un carácter explícito, mientras que la garantía tiene un carácter implícito a la hora sostener un argumento. La aceptación de las garantías es imprescindible en el aula si se quiere dar lugar a una argumentación racional, además, se reconoce el uso de evidencia empírica como sinónimo de datos a la hora de argumentar (Chamizo, 2007).

Esquema completo de Toulmin

El esquema de argumentos propuesto por Toulmin es apenas un esquema básico, que consta de cuatro elementos y ha sido empleado por diversos investigadores en el campo de la Educación Matemática. Sin embargo, investigadores como Inglis y Mejia-Ramos (2005) resaltan la importancia de indagar los argumentos a partir del esquema completo de Toulmin que involucra dos elementos más respecto al anterior. En contraste con el esquema básico, el esquema completo brinda una perspectiva falibilista y no absolutista de las matemáticas, por lo que da lugar a la duda por parte de quien esta argumentando. A continuación, se presentan los dos elementos faltantes (*Esquema 2*):

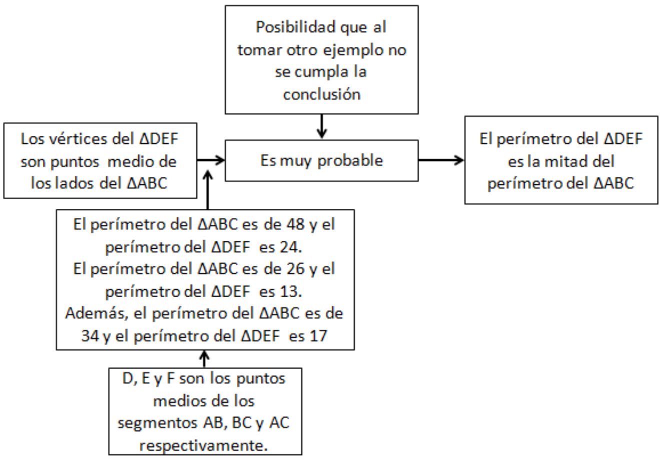
- Calificador modal: especifica la fuerza de la aserción, expresando el grado de confianza de la conclusión.
- Refutador: presenta las excepciones de la aserción, es decir, aquellos casos en los cuales no se cumple la conclusión establecida en el argumento.



Esquema 2. Esquema completo de Toulmin

Lo anterior se puede ilustrar con el siguiente ejemplo: sea el ΔABC, D punto medio del $\overline{AB}$, E punto medio del $\overline{BC}$, y F punto medio del $\overline{AC}$. Observe el $\Delta BDE\ y\ el\ \Delta DAF$. ¿Qué relación existe entre los perímetros de esos triángulos? Justifique su respuesta. Un estudiante responde al respecto: creo que el perímetro del ΔDFE es la mitad del perímetro del ΔABC porque al hacer la construcción para un ΔABC cuyo perímetro es 48, se obtiene que el perímetro del ΔDFE es de 24. Así que esto parece que se cumple para todos los casos, pues a mí me convence. Así que diría que es muy probable que esto suceda.

En el ejemplo anterior (*Esquema 3*), el estudiante para concluir que el perímetro del ΔDFE es la mitad del perímetro del ΔABC se valió de un calificador no absoluto, debido a que su proceso de razonamiento consistió en atribuirle valores a los datos de la tarea planteado para poder formular su conjetura pero reconoce que no abarca la generalidad de la conclusión que establece, al darle cabida al refutador cuando expresa "parece que se cumple para todos los casos". Sin embargo, su garantía es evidencia empírica, apoyada en datos específicos que son los que valida el estudiante al presentar los ejemplos en los cuales está implícita la idea de que el perímetro del triángulo ΔABC es la mitad del perímetro del ΔDFE. El respaldo se sustenta en la sustitución de valores, en la información de los datos, aunque no lo explicita. De este ejemplo, vale la pena resaltar el carácter del calificador modal pues, aunque al estudiante le convence la elaboración de su propia conjetura se reconocen estados de incertidumbre naturales en la actividad matemática.

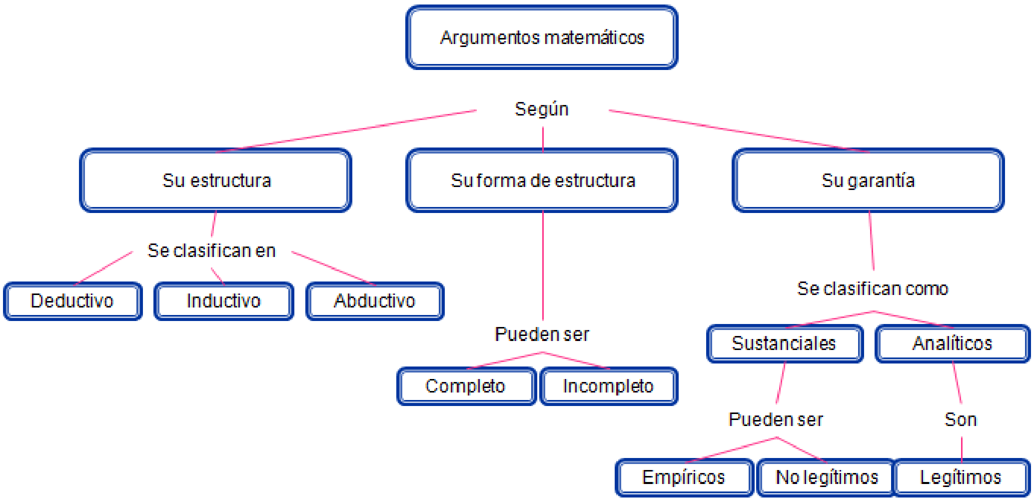


Esquema 3. Ejemplo de un argumento completo de Toulmin.

Tipos de argumentos

Adoptamos la propuesta de Samper y Toro (2017), quienes atienden a la clasificación de un argumento de acuerdo a su garantía, a su estructura y a la forma de su estructura. Esta propuesta de clasificación de argumentos está basada en Pedemonte (2007), quien consideró solo el primer aspecto mencionado. Los otros dos aspectos son resultado de una investigación llevada a cabo por estos autores con nueve estudiantes de grado octavo de educación media. Esta tipología de argumentos es por lo tanto más amplía con respecto a la de Pedemonte.

En el Esquema 4 se presenta la clasificación de argumentos mencionada por Samper y Toro, la cual plantea una diferenciación de estos según (i) su estructura, en la que se analiza el orden en el que se construye el argumento, (ii) la forma de su estructura, en la que se determina si se explicita o no alguno de los elementos que conforman el argumento y (iii) la naturaleza de la garantía, la cual permite identificar si el argumento es empírico o teórico.



Esquema 4. Clasificación de los argumentos matemáticos

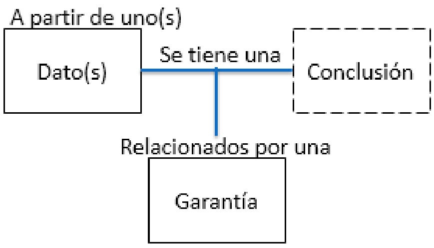
Esta tipología se configura a partir del modelo de argumentación básico de Toulmin. Explicamos a continuación cada tipología basados en Triana y Zambrano (2016).

Argumentos según su estructura

Aquellos que son producto de la relación entre los tres elementos que conforman un argumento, es decir la manera como en el argumento se establecen o bien los datos, la aserción o la garantía. Así, pueden ser deductivos, inductivos o abductivos.

Argumento deductivo

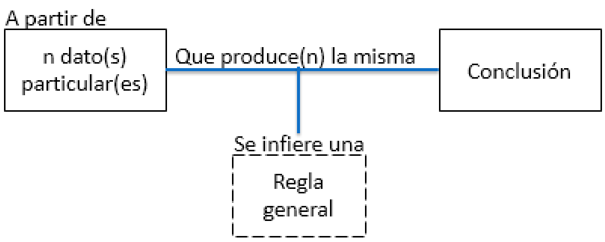
Es aquel en que, a partir de los datos y la garantía, previamente determinados, se deduce la aserción.



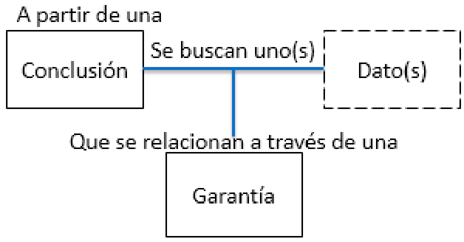
Esquema 5. Esquema de un argumento deductivo

Argumento inductivo

Es aquel en el que a partir de ejemplos particulares se deduce una ley general. La inducción conduce a la construcción de nuevos conocimientos partiendo de la observación repetida de relaciones de dependencia.



Esquema 6. Esquema de un argumento inductivo



Esquema 7. Esquema de un argumento abductivo

Argumento abductivo

Es aquel en el que a partir de la observación de un resultado se valida la conclusión independientemente de los datos y la garantía, hallando explicaciones plausibles en estos últimos que prueben que la conclusión efectivamente se da.

<u>Argumentos según la forma de su estructura</u>

Estos pueden ser completos o incompletos atendiendo a si se mencionan explícitamente los elementos básicos que conforman un argumento. Si se nombran los tres elementos entonces el argumento es completo, pero si alguno de ellos no se nombra el argumento es incompleto.

<u>Argumentos según la naturaleza de su garantía</u>

Son aquellos que se fundan en su estructura lógica. Así, un argumento es analítico si su estructura se sustenta en sistema teórico aceptado en determinada comunidad, por tanto es legítimo. Un argumento es sustancial si se fundamenta en lo empírico, es decir, si su garantía incluye datos numéricos, dibujos, gráficas etc., o si está basado en la experiencia de una representación en computador o papel. Este tipo de argumento no tiene un rigor lógico formal, no es incorrecto, pero debe constituirse en una base para generar argumentos analíticos. A esta misma categoría pertenecen los argumentos no legítimos que según Samper y Toro (2017) son aquellos que están conformados por una garantía que no corresponde al sistema teórico empleado o la garantía no relaciona los datos con la aserción, o la aserción no es consecuencia de los datos (o la garantía).

METODOLOGÍA

En este capítulo relatamos los aspectos metodológicos considerados para el desarrollo del trabajo expuesto en este documento. Inicialmente presentamos la perspectiva de investigación a la que acudimos, mencionando las motivaciones consideradas para esta elección. En segundo lugar, se realiza un recuento de la búsqueda de información en fuentes documentales, lo que nos brindó antecedentes y sustento teórico al estudio. En un tercer momento se menciona el contexto donde se desarrolló el estudio. Posteriormente se presenta la secuencia implementada y su respectivo análisis para así exponer su pertinencia. Por último, se describe la manera en que se realizó el acopio de datos y la forma en que estos se analizaron.

PERSPECTIVA INVESTIGATIVA

Este estudio se centra en reconocer y analizar las producciones de argumentos que surgen por parte de un colectivo de estudiantes en el marco de una clase en la que se involucra la geometría del doblado de papel. Por tal razón, el presente trabajo está diseñado desde un enfoque de investigación cualitativo que a la vez responde a las nuevas exigencias de la sociedad como reportan Guba y Lincoln (2004) "la metodología de la investigación ya no puede tratarse como un conjunto de reglas o de abstracciones aplicables de forma universal" (p. 39). Así, con la investigación no pretendemos medir o probar una hipótesis sino comprender una realidad frente a los tipos de argumentos que se presentan en un ambiente alterno a la geometría euclideana.

El estudio tiene una aproximación interpretativa (Miles y Huberman, 1994) sobre lo que sucede en un aula de geometría a través de una investigación basada en diseño en la que se realizó un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Con tal estrategia se persigue documentar a partir de la implementación de una secuencia de tareas, las interacciones en el aula, las concepciones de los estudiantes y su evolución, la intervención del medio en la producción de argumentos y la naturaleza de estos, teniendo en cuenta el conocimiento previo que pone en juego el estudiante en las tareas y la dinámica de la clase (Confrey, 2006).

REVISIÓN DE LITERATURA

La búsqueda de antecedentes investigativos y documentos que permitieran fundamentar el marco teórico se realizó con el apoyo de algunos repositorios virtuales (v.g. Scopus, Funes, Dialnet). Otras búsquedas se realizaron en bases de datos (v.g. Jstor, Springer). Estos repositorios y bases de datos se seleccionaron teniendo en cuenta su reconocimiento dentro de la comunidad académica. Para la búsqueda de información se tuvieron en cuenta palabras clave y combinaciones entre estas que se relacionaran con los temas que son foco de investigación (v.g. folding paper, argumentation, concrete material, math education, geometry). La búsqueda descrita anteriormente nos permitió reunir un conjunto de documentos que dejaron ver los avances investigativos relacionados con nuestro asunto de estudio. Debe mencionarse que no encontramos estudios que tuviesen el mismo objeto de investigación que nosotros contemplamos. Sin embargo, algunos autores realizaban una aproximación a nuestro asunto de estudio al considerar las posibles potencialidades que podría ofrecer el doblado de papel para promover argumentos en estudiantes de matemáticas (v.g. Leal et al., 2010) o bien sea, para favorecer procesos argumentativos (v.g. Santa y Jaramillo, 2013). Esto nos llevó a considerar la pertinencia de nuestro trabajo dentro del campo de investigación, dado que no encontramos un trabajo investigativo previo que respondiera puntualmente a nuestra pregunta de interés o que siguieran objetivos similares a los nuestros.

Para observar la presencia de investigaciones en cada una de las vías en las que nosotros trabajamos (v.g. doblado de papel y geometría, humanos con medios, Argumentación en Educación Matemática), se utilizó *AuthorMapper*, concebido como una herramienta que posibilita la visualización de la investigación científica. En ella se ofrece al usuario explorar documentos en función de la ubicación geográfica de sus autores, además de dar a conocer patrones en la indagación científica, tendencias y relaciones amplias en torno al tema de interés.

En primer lugar, nos dimos a la tarea de conocer sobre lo realizado en torno al doblado de papel en la geometría. Ante lo cual surgió el inconveniente de no lograr obtener mucha información de lo investigado, debido al uso de las palabras “folding paper, math, education” y algunas combinaciones entre estas, dado este inconveniente optamos por “origami, education, mathematics”. Los resultados obtenidos a través de AutorMapper, nos permiten mostrar la relación entre los años, desde 1991 hasta la actualidad, y el número de investigaciones, tal como se presenta en el siguiente diagrama.

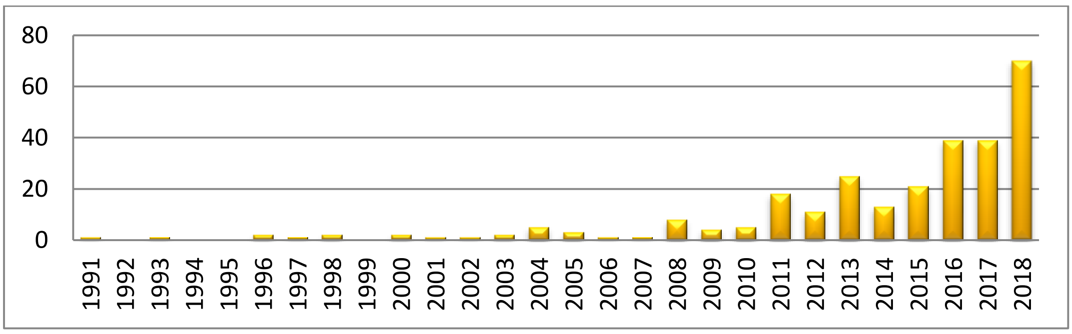


Diagrama 1. Frecuencia de trabajos investigativos sobre origami en Educación Matemática.

De la información relacionada en el diagrama se puede apreciar, que ha habido un incremento considerable en investigaciones que involucran el papel plegado en relación con el ámbito educativo. Por otra parte, a raíz de lo anteriormente mencionado, creemos que el doblado de papel ha tomado trascendencia como recurso que media el aprendizaje y por lo tanto reconocemos su pertinencia en el estudio, cuyos resultados presentamos en este documento. En lo que tiene que ver con Humans-whit-Media (humanos con Medios) presentamos a continuación el siguiente diagrama para ilustrar la información que nos ofreció *AutorMapper*.

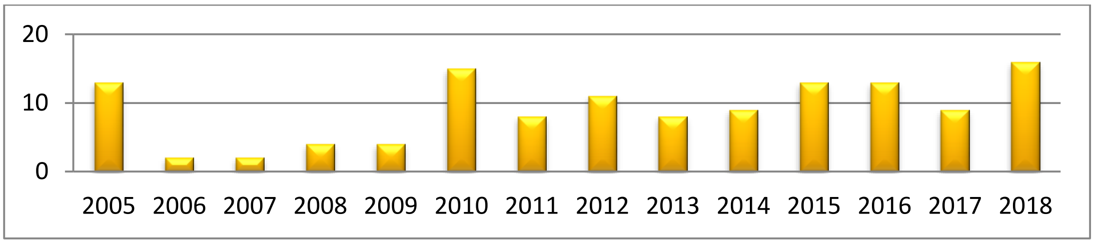


Diagrama 2. Frecuencia de los trabajos investigativos sobre SHM.

En la ilustración se ve parte de lo que se ha realizado durante los últimos 13 años, en esta se observa que a partir del año 2005 hasta el 2018 se ha registrado un total de 126 artículos, con 199 autores en consonancia con el tema, lo que nos indica una continuación de la labor científica en este campo sociocultural de la investigación educativa hasta nuestros días. Del mismo modo que el anterior, nos dimos a la tarea de conocer lo que se había hecho en relación con la argumentación. Al acudir a *AutorMapper*, obtuvimos los siguientes resultados.

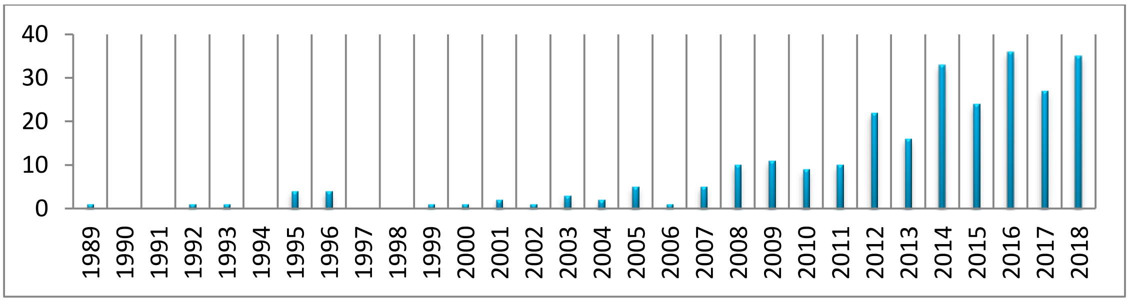


Diagrama 3. Frecuencia de publicaciones sobre Argumentation-Toulmin Math.

Tomamos como referencia el trabajo de Stephen Toulmin, debido a que través de *AutorMapper* notamos que en los últimos años ha habido una tendencia a incrementar las investigaciones en este campo alrededor de los términos *Argumentation*, *Toulmin* y *Math*.

CONTEXTO DEL ESTUDIO

Para la realización del estudio se tuvo en cuenta un grupo de 31 estudiantes de grado octavo, con edades entre 13 y 14 años, pertenecientes a una institución educativa ubicada en Bogotá (Colombia). En esta institución laboraba uno de los autores del estudio, lo que posibilitó su desarrollo. Los estudiantes contaban con experiencias de matemáticas distintas dado que no todos habían cursado sus estudios en años anteriores en esta institución. Sin embargo, el acompañamiento que el profesor había tenido con los estudiantes le había permitido reconocer algunas bases conceptuales en ellos, a saber: plano, rectas y sus relaciones, figuras geométricas (triángulo, rectángulo, cuadrado, círculo, circunferencia y clasificación de polígonos). Este hecho se tuvo en cuenta para el diseño de la secuencia que se propuso a los estudiantes. La institución educativa solamente contaba con una sala de sistemas y esta era de uso exclusivo por parte del profesor de tecnología, asunto que impedía que se pudiera trabajar con un recurso cumputacional (geometría dinámica) y por lo tanto llevó a la elección del doblado de papel como recurso para la clase.

Una generalidad del grupo de estudiantes era que nunca habían tenido experiencias con el doblado de papel en la clase de geometría. Esto imponía la necesidad adicional de instruir a los estudiantes en el manejo de este material, lo que conllevaba al dominio de un lenguaje apropiado y compartido sobre este recurso (v.g doblez, punto, plano), las restricciones en el uso de este material (usar regla, compás o algún otro instrumento de medición y construcción) y el desarrollo de habilidades de motricidad fina. Estos elementos se contemplaron en el desarrollo de la secuencia.

DISEÑO DE LA SECUENCIA

La investigación se realizó empleando una estrategia que centró el interés en la promoción de argumentos por parte de los estudiantes, señalando los tipos de razonamiento que ellos establecen (deductivo, inductivo y abductivo). Se consideraron algunos objetos geométricos como *colinealidad, ángulos, perpendicularidad y paralelismo* y sus relaciones a través de la implementación de una secuencia, con el fin de posibilitar procesos de argumentación y una comprensión profunda de estos. De esta manera se pretendía establecer un conjuto de referentes teóricos de los objetos mencionados, así como un lenguaje apropiado para referirlos. Con el propósito de observar si las tareas diseñadas permitían alcanzar los objetivos planteados frente a la producción de argumentos en la clase, se realizó una prueba piloto con un grupo de estudiantes de grado sexto. Durante su implementación los investigadores se reunían con el asesor semanalmente para discutir los avances y resultados de la gestión del profesor y las producciones de los estudiantes, esto permitió incluir o modificar aspectos en cada tarea propuesta.

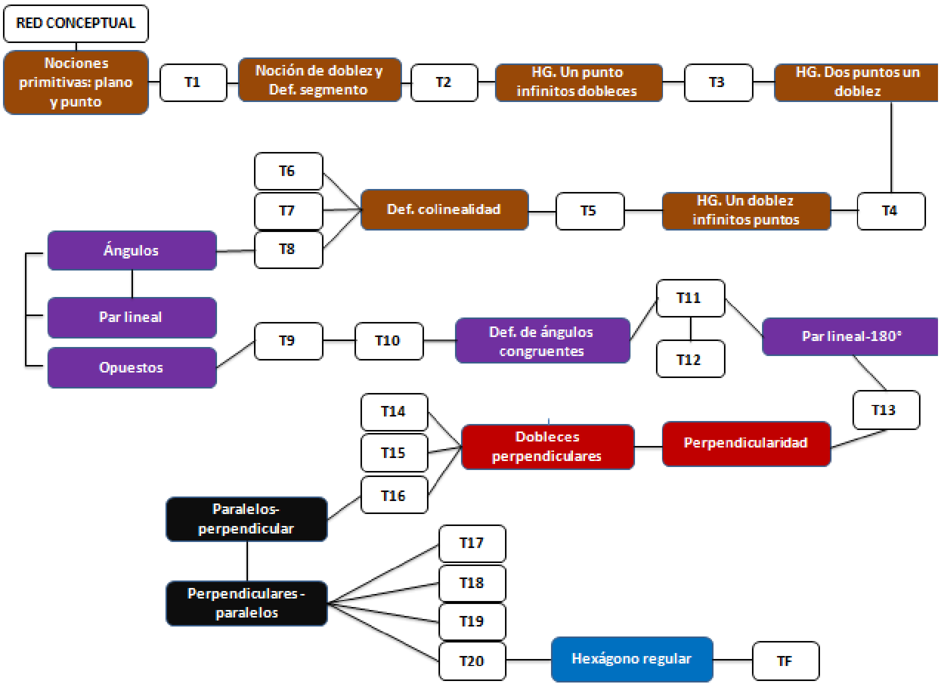
De manera paralela al desarrollo de cada tarea, los estudiantes iban adquiriendo nociones sobre la forma de construir objetos geométricos con ayuda del doblado de papel. Debe mencionarse que no se destinó un momento específico para instruir a los estudiantes sobre el uso de este recurso. A continuación se presenta la Tabla 1, en esta se puede apreciar que la naturaleza de los elementos teóricos involucrados difiere de la geometría euclidiana debido al medio empleado.

Ideas Primarias	
Plano	La hoja es la representación de un plano.
Doblez	Un doblez es la representación de una línea recta.
Punto	Es la intersección entre dos dobleces que se considerará como la mínima huella que deja el lápiz sobre la hoja de papel.

Definiciones	
Segmento	Conjunto de puntos entre P y Q, incluidos estos.
Colinealidad	Tres o más puntos son colineales si están en un mismo doblez.
Ángulos par lineal	Dados dos dobleces que se cruzan, dos ángulos son par lineal si comparten un lado.
Ángulos opuestos	Dados dos dobleces que se cruzan, dos ángulos son opuestos si comparten únicamente el vértice.
Ángulos congruentes	Dos ángulos son congruentes si al sobreponerlos sus lados coinciden.
Perpendicularidad	Dos dobleces son perpendiculares si al cruzarse forman un ángulo recto.
Paralelismo	Dos dobleces son paralelos si no se cruzan.
Hechos geométricos	
Punto - infinitos dobleces	Por un punto se pueden realizar infinitos dobleces.
Dos puntos - un doblez	Dos puntos determinan un único doblez.
Un doblez - infinitos puntos	Un doblez tiene infinitos puntos.
Par lineal – 180°	Si dos ángulos forman par lineal la suma de sus medidas es 180.
Doblez-perpendicular	Dado un doblez, al sobreponerlo sobre sí mismo se genera un doblez perpendicular a este.
Paralelos-perpendicular	Si se tienen dos dobleces paralelos, al sobreponerlos sobre sí mismos se genera un doblez perpendicular a estos.
Perpendiculares-paralelos	Si se tienen dos dobleces perpendiculares, al sobreponer uno de estos sobre sí mismo, se generan dos paralelos.

Tabla 1. Sistema teórico local de la clase de geometría: Ideas primarias, definiciones y hechos geométricos.

Cada una de las nociones, definiciones y hechos geométricos de este sistema teórico local están estrechamente relacionados. Los objetos geométricos involucrados no implican conceptos aislados, por el contrario, a medida que el estudiante explora y aborda cada una de las tareas propuestas (denotadas con la letra T), dota de significado estos elementos, para emplearlos en tareas posteriores. Así, presentamos una red conceptual en la que se establecen dichas relaciones entre los elementos del sistema teórico construido.



Esquema 8. Red conceptual del sistema teórico de la clase.

Esta red conceptual parte de colinealidad y finaliza en paralelismo, a través de una progresión jerárquica, en la que el último núcleo temático requiere acudir a los anteriores. Es posible evidenciar en el inicio del diagrama las nociones o principios que tienen presencia en cada uno de los cuatro núcleos temáticos. En el desarrollo de los núcleos se abordaban los hechos geométricos y definiciones que iban surgiendo a partir de las tareas formuladas.

La secuencia del doblado de papel involucró ocho tareas de colinealidad, cuatro de congruencia de ángulos, cuatro de perpendicularidad, cuatro de paralelismo y una tarea final que incluía todo. Para cada uno de estos núcleos de trabajo se propusieron tareas de dos tipos: descubrimiento y profundización. Denominamos tareas de *descubrimiento* a aquellas cuya solución involucraba la construcción o simplemente la manipulación de objetos geométricos con el propósito de dar lugar a una definición o a un hecho geométrico. En cuanto a las tareas que llamamos *profundización*, son aquellas en las que su solución requería involucrar construcciones, nociones, definiciones o hechos geométricos previos, que ponían en juego dichos elementos validados hasta ese momento de las tareas. Cada una de las tareas propuestas en la secuencia tenía el objetivo de establecer una definición o hecho geométrico (Tabla 1), o de profundizar en su comprensión a través de la resolución de un problema que lo involucraba. Se esperaba que a lo largo del desarrollo de estas tareas los estudiantes expusieran argumentos en el marco de la discusión grupal y de las socializaciones.

ANÁLISIS DE TAREAS

A continuación presentamos los objetivos que se perseguían con cada una de las tareas propuestas en la secuencia del doblado de papel. Cada una está acompañada de las definiciones o hechos geométricos involucrados, así como las posibles formas de solucionarla. También catalogamos si la tarea era de descubrimiento o profundización. Por motivos de extensión en este apartado se presenta el análisis de una tarea por núcleo. Un análisis similar sobre las demás tareas puede consultarse en el anexo A. Enseguida describimos las tareas que conforman cada uno de los cuatro núcleos estudiados:

Núcleo 1: Notación y colinealidad

En este núcleo temático se desarrollaron ocho tareas. Las primeras cuatro tareas que se implementaron tenían como propósito dar introducción a las nociones primitivas de la geometría del papel, a saber: punto, recta y plano, además, formalizar el lenguaje simbólico correspondiente a cada uno de estos elementos. La primera situación que se propone es netamente instruccional a fin de lograr definir la notación correspondiente a estos objetos. Luego, se trabajan tres problemas que implican la manipulación y exploración con el doblado de papel para tomar una postura frente a la explicación de resultados, que se constituían durante las socializaciones en hechos geométricos. Cada tarea requería el descubrimiento de hechos propios de la geometría cuyos enunciados son: "por dos puntos pasa una recta"; "la recta que pasa por dos puntos es única"; y "una recta tiene infinitos puntos". Por supuesto, este no fue el lenguaje que se manejó y hubo intervención del maestro con preguntas orientadoras, previamente planeadas. Las preguntas tenían como fin movilizar a los estudiantes en el proceso complejo de construcción de las primeras nociones y hechos geométricos, en tanto que la idea de infinitud para los estudiantes era muy abstracta y presentaban dificultades en asociar a un objeto limitado una cantidad infinita de puntos, dada su representación en el papel. Las siguientes cuatro tareas se fundamentaron en la comprensión de la definición de colinealidad. A continuación presentamos una de las tareas del primer núcleo de trabajo:

Enunciado tarea 6	Dibuja dos puntos P y Q. ¿Siempre son colineales? Explica
Tipo de tarea	Profundización.
Def o HG involucrados	HG. Dos puntos – un doblez. Def. Colinealidad.
Descripción	
Esta situación cuestiona al estudiante respecto si hay alguna forma de configurar los puntos en la hoja de papel de modo que no sean colineales. Además, trae a colación un elemento teórico como es el **HG dos puntos – un doblez** que garantiza que por dos puntos pasa un único doblez, lo que conduce a que dos puntos siempre son colineales.	

Estrategia de solución Se pueden encontrar dos respuestas a esta pregunta: una afirmativa y una negativa. La primera es manifestar que dos puntos siempre son colineales porque generan un único doblez, evocando de manera explícita o implícita el **HG dos puntos – un doblez.** La segunda es expresar que dos puntos no siempre son colineales porque es posible realizar un doblez que contiene a uno de ellos pero no al otro, como se muestra a continuación:

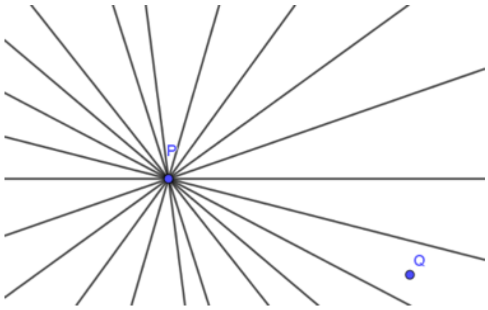


Figura 1. Representación de dobleces por P pero no por Q

Tabla 2. Análisis de la tarea 6

Núcleo 2: Ángulos: par lineal, opuestos y congruentes

En este núcleo temático se desarrollaron cuatro tareas. La primera tarea que se implementó tenía como propósito distinguir entre ángulos que forman par lineal y ángulos opuestos por el vértice. Esto con el fin de establecer elementos conceptuales para posteriormente abordar perpendicularidad y paralelismo. Enseguida, se propuso una tarea que involucraba tres dobleces con el fin de que los estudiantes aplicaran las definiciones vistas para diferenciar estos ángulos. Las siguientes dos tareas no involucraron el doblado de papel para su resolución, dado que se quería que el estudiante, por sí mismo, descubriera cómo podría definir ángulos congruentes e identificara la relación entre los ángulos que forman par lineal.

Para la tarea tres de este núcleo se diseñaron unos ángulos en cartulina, cuyas medidas variaban para que los estudiantes establecieran, a través de superponerlos y compararlos, la relación que se satisfacía para aquellas parejas cuya medida era la misma. En la tarea posterior se diseñaron los ángulos en cartón paja en los que algunas parejas conformaban par lineal, esto con el fin de reconocer que la suma de las medidas de estos ángulos es 180. La última tarea de este núcleo incluía nuevamente el uso del doblado de papel y consideraba dos construcciones distintas para formar ángulos congruentes. Presentamos su estructura y algunas estrategias de solución a continuación.

Enunciado tarea 12:	Construye dos ángulos que sean congruentes con dobleces. Proponga dos construcciones distintas.
Tipo de tarea	Profundización
Def o HG involucrados	Definición de ángulos congruentes.
Descripción	

La tarea propuesta tiene como objetivo que el estudiante haga uso del hallazgo de la tarea 10, para proponer modalidades distintas de determinar ángulos congruentes por medio del doblado de papel.

Estratégias de solución:

Una posible estrategia de solución a esta tarea es que el estudiante realice dos dobleces que se intersecan y a partir de estos encuentre que los opuestos son congruentes (Figura 2).

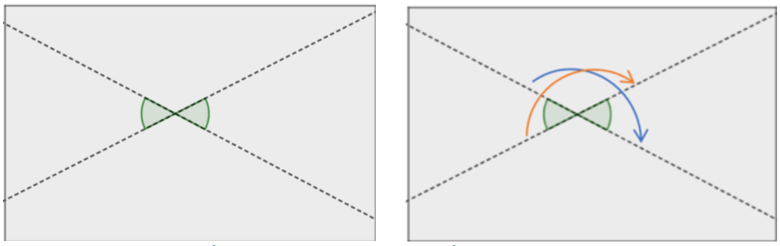


Figura 2. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes

De esta solución se derivan dos justificaciones distintas: la primera es que el estudiante sobreponga los lados de un par de ángulos opuestos por el vértice y encuentre que coinciden. La segunda es que determine el doblez que es bisectriz de dos ángulos opuestos y pliegue el papel por allí encontrando que los dos ángulos restantes coinciden y por tanto son congruentes.

Otra estrategia de solución que se puede presentar es que el estudiante realice un doblez y bien sea que desdoble o no la hoja, haga coincidir este doblez sobre sí, de donde se determina un doblez perpendicular al primero. De esta construcción se puede derivar la justificación de que los cuatro ángulos formados coinciden todos, por lo tanto, son congruentes (Figura 3).

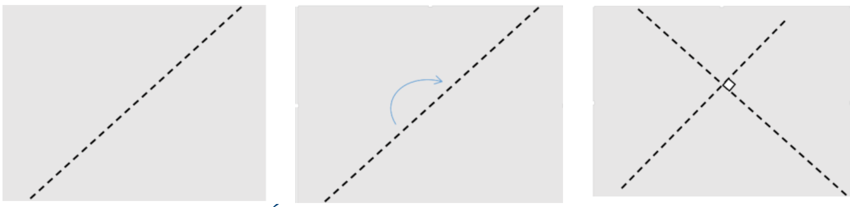


Figura 3. Ángulos congruentes por perpendicularidad

Una respuesta que se deriva de la anterior es que el estudiante divida la hoja por la mitad haciendo coincidir los bordes de la hoja y luego la divida nuevamente por la mitad haciendo coincidir los otros dos bordes de esta. De manera que se obtienen dos dobleces perpendiculares, de los que se puede deducir que se forman cuatro ángulos que coinciden y por tanto son congruentes.

Tabla 3. Análisis tarea 12

Núcleo 3: Perpendicularidad

Las siguientes cuatro tareas que se propusieron fueron respecto al núcleo temático perpendicularidad. Este conjunto de tareas se diseñó con el propósito de profundizar en la compresión de la definición de perpendicularidad y de reconocer propiedades asociadas.

La primera tarea que se planteó tenía la finalidad de que el estudiante ideara un procedimiento a través del doblado de papel para determinar dos dobleces perpendiculares. De este proceso surge un hecho geométrico propio del uso del medio que indica que, si un doblez se sobrepone sobre sí, se genera otro perpendicular a este.

La siguiente tarea se realiza con el fin de que los estudiantes acudan al hecho geométrico anterior para presentar contraejemplos de perpendicularidad. Es decir, que se cuestionen respecto a las condiciones que deben tener los dobleces solicitados para no ser perpendiculares, confrontando así su construcción con la definición.

La tarea tres, tiene como propósito que el estudiante note una propiedad implícita en la definición de perpendicularidad como lo es el hecho de que todos los ángulos de dobleces perpendiculares tienen la misma medida y por tanto son congruentes.

Y la última tarea que se propuso, en torno a este tema se formula con el fin de dar surgimiento a hechos geométricos de la geometría euclidiana: "Si una recta es perpendicular a dos rectas, estas son paralelas" y si "dos rectas son paralelas entonces cualquier recta perpendicular a una de estas también lo es a la otra". De este núcleo escogimos la tarea 14, que se presenta de manera más detallada a continuación:

<table>
<tr><td>Enunciado tarea 14:</td><td>Uno de los estudiantes debe construir dos dobleces que NO sean perpendiculares. ¿Cómo podrías explicar que los dobleces que hiciste no son perpendiculares?</td></tr>
<tr><td>Tipo de tarea</td><td>Profundización</td></tr>
<tr><td>Def o HG involucrados</td><td>Definición de perpendicularidad.

Hecho gemétrico dobleces perpendiculares.

Definición de ángulos par lineal.

Hecho geométrico par lineal-180°.

Definición de ángulos congruentes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción

El objetivo de esta tarea es que el estudiante explore las condiciones de las definiciones de perpendicularidad y a partir de estas, encuentre las dos configuraciones que deben tener los dobleces para no ser perpendiculares.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estratégias de solución:

Una posible opción es que el estudiante construya dos dobleces cualesquiera que se intersecan en la hoja. Una justificación, atendiendo a los ángulos que se forman, es que los cuatro ángulos no son congruentes porque al sobreponderlos sus lados no coinciden. Una segunda justificación que se puede derivar es que al implementar el hecho geométrico dobleces perpendiculares en la construcción estos no coinciden (Figura 4).</td></tr>
</table>

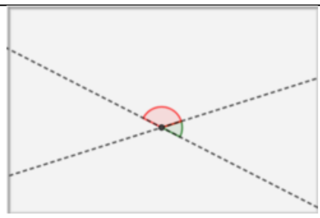


Figura 4. Dobleces cualesquiera que se cruzan en la hoja

Cada una de estas justificaciones implica conceptos matemáticos distintos. La primera justificación contradice la condición de generar un ángulo recto pòr la definición de perpendicularidad. La segunda justificación contradice la condición de que los dos dobleces iniciales sean perpendiculares, al emplear el hecho geométrico de perpendicularidad y probar que por el punto de intersección entre estos dobleces se obtiene uno distinto.

Otra posible justificación al generar dos dobleces que no se intersequen en la hoja consiste en que el estudiante construya dobleces paralelos. Esta situación podría estar respaldada en un aspecto visual en la que los dobleces no se cortan. A partir de esto el estudiante podría aducir que los dobleces no son perpenpendiculares. Este procedimiento puede suscitar por parte del estudiante un procedimiento para obtener dos dobleces paralelos valiéndose de la forma rectangular de la hoja (Figura 5).

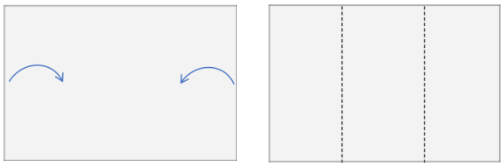


Figura 5. Construcciones a partir de bordes

O bien, trazar un doblez (Figura 6), luego determinar uno perpendicular a este y finalmente, otro perpendicular al último. Generando un doblez paralelo al primero. La justificación aquí se sustenta en la doble aplicación del hecho geométrico de perpendicularidad.

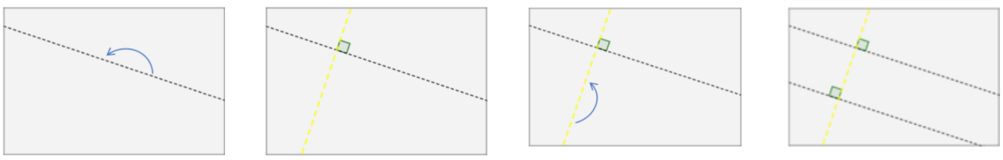


Figura 6. Dobleces a partir del hecho geométrico

Tabla 4. Análisis de la tarea 14

Núcleo 4: Paralelismo

En este núcleo temático se desarrollaron cuatro tareas con el propósito de profundizar en la definición de paralelismo y algunas propiedades asociadas. La primera tarea se planteó con el fin de que el estudiante descubriera un algoritmo para determinar dos dobleces paralelos. En este procedimiento el estudiante podía acudir al conocimiento previo respecto a perpendicularidad o bien no encontrar ninguna relación y por medio de la manipulación del papel hallar una estrategia de solución, involucrando otros contenidos que le permitieran cumplir el objetivo propuesto. La segunda tarea tenía como objetivo que el estudiante pusiera en juego la definición de paralelismo evaluando las condiciones que se deben incluir para que los dobleces dados no cumplieran esta condición. Con la tercera tarea se pretendía que el estudiante se cuestionara respecto a si dos dobleces por no intersecarse en la hoja son paralelos, con el objetivo de que reconocieran que la definición de paralelismo no está determinada por las dimensiones de la hoja sino por la infinitud de los dobleces. La última tarea que se propuso pretendía que el estudiante, a partir de dos dobleces paralelos, intentara construir uno perpendicular a uno de estos, pero no al otro. Esto con el objetivo de que el estudiante acudiera al hecho geométrico paralelos-perpendicualar. A continuación presentamos la estructura de la tarea 18:

<table>
<tr><td>Enunciado tarea 18</td><td>Construye un doblez. Construye ahora un doblez que NO sea paralelo al primero. ¿Cómo podrías asegurar que los dobleces no son paralelos?</td></tr>
<tr><td>Tipo de tarea</td><td>Profundización.</td></tr>
<tr><td>Def o HG involucrados</td><td>Hecho geométrico dobleces perpendiculares.
Definición de paralelismo.
Hecho geométrico perpendicular-paralelos.
Hecho geométrico paralelos-perpendicular.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción
El objetivo de esta tarea es que la estudiante evalúe las condiciones que se deben omitir en la definición de dobleces paralelos para generar un par que no lo sean. Esta tarea pone a prueba la definición de paralelismo, permitiendo profundizar en su comprensión, a partir de no ejemplos de esta.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estratégias de solución:
El estudiante puede emplear la estrategia de construir dos dobleces cualesquiera que se intersequen y justificar que no son paralelos porque no satisface la condición de la no intersección (Figura 7).

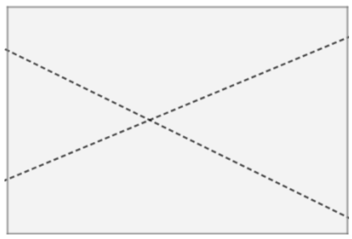



Figura 7. Dobleces cualesquiera que se intesecan
También puede construir dos dobleces perpendiculares y justificar que no son paralelos, porque forman un ángulo de 90° o por el hecho geométrico dobleces perpendiculares (Figura 8).</td></tr>
</table>

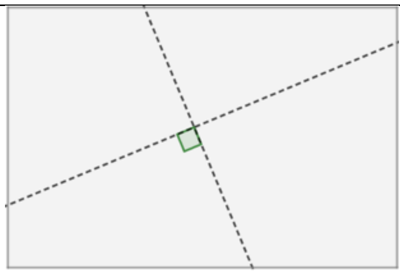


Figura 8. Dobleces perpendiculares por hecho geométrico

Otra manera de resolución es que el estudiante dibuje dos dobleces que no se intersecan en la hoja, pero si fuera de esta, justificando que al prolongar las dimensiones de la hoja los dobleces construidos se intersecan y por tanto no son paralelos (Figura 9).

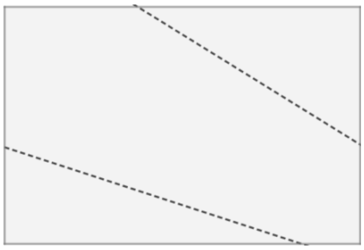


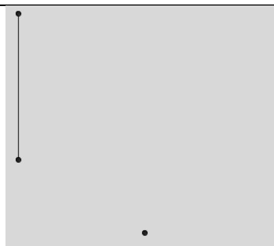
Figura 9. Dobleces que se cruzan fuera de la hoja

Tabla 5. Análisis de la tarea 18

Tarea final

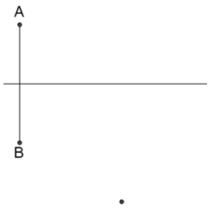
La tarea final tiene como intención que el estudiante acuda a los elementos teóricos de la clase para la elaboración de la construcción solicitada y ponga en juego diferentes definiciones o hechos geométricos para argumentar su construcción. Con esta tarea se da por terminada la implementación de la secuencia a partir de la cual se analizan todas las producciones de los estudiantes. Esta tarea se presenta a continuación:

Enunciado	Construye un hexágono regular por medio de dobleces, señalando puntos en la hoja de papel. La construcción debe incluir el segmento y el punto de la hoja.
Tipo de tarea	Profundización.
Def o HG involucrados	Nociones, definiciones y hechos geométricos del sistema teórico de la clase.
Descripción El objetivo de esta tarea es que el estudiante haga uso de los elementos del sistema teórico de la clase para abordar la solución de esta. Se espera que ellos reconozcan en sus construcciones segmentos y ángulos congruentes; dobleces paralelos y perpendiculares.	
Estrategias de solución: A continuación se detallan dos posibles formas de solución. Además, se mencionan los elementos conceptuales involucrados.	



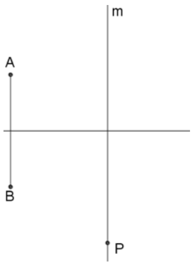
Primera estrategia

Se construye la mediatriz a $\overline{AB}$



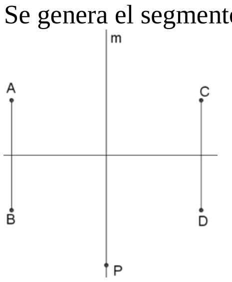
Se sobrepone B en A y se genera un doblez que es mediatriz de $\overline{AB}$.

Se realiza un doblez perpendicular por el punto P a la mediatriz.



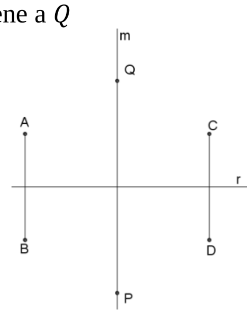
Recurriendo al HG: Dobleces perpendiculares se pliega la mediatriz sobre sí, buscando que el punto P este en el doblez m, que es perpendicular a la mediatriz.

Se genera el segmento CD



Se hace uso del HG: Dobleces perpendiculares, se dobla el papel por m sobreponiendo a la mediatriz sobre sí. Se calca a A y a B y se obtienen a C y D respectivamente, para trazar un doblez por estos y representar el $\overline{CD}$.

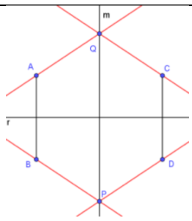
Se obtiene a Q



Se dobla el papel por la mediatriz r, se lleva al doblez m sobre sí. Se calca a P y se obtiene Q.

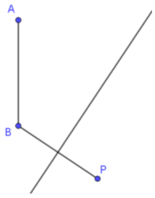
Por medio de dobleces sucesivos se cierra la figura

Se pliega el papel sucesivamente para generar dobleces que permitan determinar el hexágono por medio del trazo de los segmentos: $\overline{QC}, \overline{AQ}, \overline{BP}, \overline{PD}$.



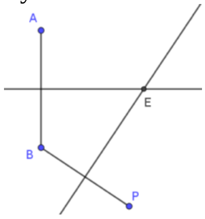
Segunda estratégia

Se construye la mediatriz de $\overline{\mathrm{BP}}$



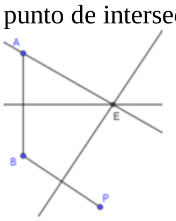
Se realiza el doblez $\overleftrightarrow{BP}$, se sobrepone a B en P y se obtiene la mediatriz de $\overline{\mathrm{BP}}$.

Se construye la mediatriz de $\overline{\mathrm{AB}}$



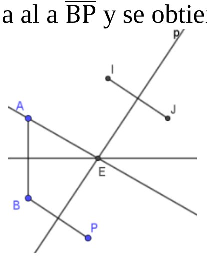
Se sobrepone a A en B para obtener la mediatriz $\overleftrightarrow{AB}$. Se dibuja el punto E de intersección entre las mediatrices.

Se construye la paralela $\overleftrightarrow{AE}$ de $\overleftrightarrow{BP}$ por el punto de intersección



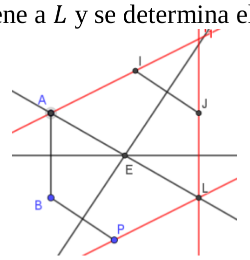
Acudiendo al HG dobleces perpendiculares se sobrepone la mediatriz de $\overleftrightarrow{BP}$ de tal forma que contenga al punto A.

Se refleja al a $\overline{\mathrm{BP}}$ y se obtiene al $\overline{\mathrm{IJ}}$



Usando el HG anterior se pliega el papel por la paralela obtenida y se sobrepone la mediatriz $\overline{\mathrm{BP}}$ para calcar los puntos I y J.

Se obtiene a L y se determina el hexágono.



Se pliega por la mediatriz de $\overline{BP}$ y se obtiene a L calcando a A.

Se tienen los vértices del hexágono regular y se construyen los dobleces correspondientes para obtener los lados faltantes.

Tabla 6. Análisis de la tarea final

ACOPIO DE DATOS

El desarrollo de las clases contó con dos grandes momentos. Un primer momento involucraba trabajo por parejas, donde cada una de estas ofrecía una solución a la tarea propuesta, favoreciendo con ello el intercambio y discusión de ideas. El segundo momento presentaba una puesta en común de los resultados de cada pareja. En este momento el profesor gestionaba la clase e invitaba a los estudiantes a mostrar a sus compañeros sus resultados, lo que favorecería la emergencia de posiciones argumentadas.

Durante el trabajo por parejas los estudiantes se ubicaron en el salón como se muestra en la Figura 10 a. Al realizar la puesta en común, los estudiantes se ubicaban de la misma forma en que se presenta en la Figura 10 b. Esto se realizaba para que cada pareja de estudiantes pudiera observar claramente las producciones y gestos de sus compañeros.

a) En el trabajo grupal

b) En la puesta en común

Figura 10. Configuración del aula de clase

Para la recolección de la información se tuvieron en cuenta registros de audio y video, así como las producciones escritas de los estudiantes. Esto permitiría reconstruir de mejor manera los sucesos acontecidos al momento de analizar la información acopiada. Para el registro de video se utilizaron tres cámaras de vídeo, dos de las cuales grababan a los estudiantes y la otra al profesor que gestionaba la clase, tal como se presentó en la figura 10 a. Para el registro de audio se utilizaron tres grabadoras de sonido ubicadas de acuerdo con lo presentado en la figura 10 b. Esta configuración tenía el fin de contar con un registro lo más completo posible de la interacción sostenida en la clase.

Es pertinente destacar que hubo una pareja de estudiantes que se escogió atendiendo a dos factores: el desempeño y la participación en la clase de matemáticas. A esta pareja se le hizo un seguimiento a lo largo de la implementación de la secuencia. Respecto al primer factor, se seleccionó una pareja de estudiantes con un desempeño medio, que representara el desempeño promedio de la clase. Respecto al segundo factor, se escogió esta pareja de estudiantes que usualmente asumen una postura receptiva en el aula, con el propósito de determinar si el desarrollo de la secuencia favorecía una postura más crítica respecto a su actuar habitual, a través de la producción de argumentos.

ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Una vez finalizado el acopio de información se procedió a generar copias de los registros en audio y video con etiquetas de las fechas y las tareas trabajadas, esto con el fin de garantizar disponibilidad de la información recogida. Posterior a esto, se procedió a seleccionar aquella información en la que evidenciamos argumentos por parte de los estudiantes, para así centrar la atención en su naturaleza. De acuerdo a la información obtenida y teniendo presente el marco de referencia acogido, evaluamos las categorías de análisis a considerar. Finalmente, generamos posibles esquemas para el análisis de los argumentos que se consolidaron en una matriz o arreglo horizontal. A continuación, se presenta cada una de las categorías. Después de esto, se describe el esquema del arreglo.

Las categorías empleadas para la investigación se sustentan en cuatro aspectos: tipo de tarea formulada, uso del medio, tipo de argumento suscitado y tipo de respaldo empleado. La primera categoría surge de acuerdo a las tareas diseñadas en la secuencia, las cuales se diferencian por el proceso que involucra su solución. La segunda categoría está basada en los postulados de Tikhomirov (1981; citado en Borba y Villarreal, 2005) del constructo teórico humanos-con-medios de Borba y Villarreal (2005) y la tercera categoría es tomada de Samper y Toro (2017) y (Triana y Zambrano (2016) respecto a la clasificación de argumentos. Estas categorías se establecieron no solo con el fin de identificar la naturaleza de los argumentos, sino además de reconocer el tipo de tarea a partir del cual se generaron y del nivel de influencia que tuvo el medio en la solución presentada. De esta manera se articulan y reconocen todos los aspectos que intervinieron en el tipo de argumento que surgió. A continuación se presentan cada una de las categorías mencionadas.

De acuerdo con el tipo de tarea

Esta categoría emerge de la necesidad de distinguir las tareas propuestas a los estudiantes en la secuencia implementada. Con el propósito de determinar aquellas en las que tienen mayor presencia los argumentos o bien tienen una estructura más próxima a ser analíticos y completos. Esto porque este tipo de argumentos constituye en una base sólida para el desarrollo del pensamiento deductivo y el estudio posterior de demostraciones formales. Se consideran dos tipos de tareas: descubrimiento y profundización.

Tipo de tarea	Definición	Código
Descubrimiento	Son aquellas cuya solución involucra la construcción o simplemente la manipulación de objetos geométricos, con el propósito de dar lugar al surgimiento de una definición o un hecho geométrico.	**M**
Profundización	Son aquellas en las que su solución requiere involucrar construcciones, nociones, definiciones o hechos geométricos previos, con el propósito de acudir a los elementos del sistema teórico de la clase y validar un resultado.	**L**

Tabla 7. Categorías de las tareas.

De acuerdo con el uso del medio

En cuanto a las categorías del medio, hemos optado por aquellas nos permita identificar la influencia del doblado de papel en los argumentos que surjan. Esta es la suplementación del doblado de papel. Para esto tuvimos en cuenta las ideas de la suplementación del constructo teórico Humanos con medios (Borba y Villarreal, 2005), en la que el medio se reconoce como un suplemento en la actividad intelectual humana. En dicha suplementación se observará el trabajo que el estudiante haga con el doblado de papel, teniendo en cuenta el nivel en que involucre dicho medio en sus producciones.

En cuanto a la substitución, según Tikhomirov (1981; citado en Borba y Villarreal, 2005; Villarreal, 2013), no consideramos viable la idea de que el doblado del papel substituya completamente la actividad intelectual del estudiante. Por otro lado, la reorganización atañe a la modificación de la estructura de la actividad intelectual de quien emplea los medios tecnológicos, en nuestro estudio, el aspecto que señala esta teoría no hace parte del foco de interés. Por lo mencionado, dejaremos de lado estos dos aspectos y centraremos la atención en la suplementación únicamente. Proponemos las siguientes categorías alrededor de la suplementación. Para cada una se presenta una situación que la ejemplifica.

Categoría	Definición	Código
Suplementación Carente	Es cuando el uso dado al papel es el mismo dado a cualquier otro medio.	**C**
Suplementación Parcial	Es cuando el papel adquiere un rol protagónico pero su uso se permea por otros medios.	**P**
Suplementación Total	Es cuando el papel se convierte en único medio en la solución de alguna tarea, pero se hace uso de sus propiedades físicas -forma rectangular o traslucidez-.	**T**

Tabla 8. Subcategorías de la suplementación.

<u>Categoría emergente</u>

En el estudio realizado encontramos que la categoría suplementación total era muy amplia, dadas las producciones de los estudiantes al implementar la secuencia de enseñanza diseñada. Por tal motivo creímos pertinente reconocer la siguiente categoría emergente.

Categoría	Definición	Código
Suplementación Total Única	Es la suplementación del medio donde exclusivamente se aprovecha de los dobleces de papel. En esta se deja de lado las propiedades físicas del medio como su forma geométrica, color, traslucidez, etc.	**U**

Tabla 9. Categoría emergente de la Suplementación.

De acuerdo con la clasificación del argumento.

Esta categoría de análisis se seleccionó de la clasificación de argumentos adaptada por Triana y Zambrano (2016) y de la propuesta de Samper y Toro (2017), la cual permite diferenciar el tipo de razonamiento que establece el estudiante. De acuerdo con la forma de la estructura pueden ser completos o incompletos. De acuerdo con el tipo de garantía que emplee el estudiante el argumento puede estar sustentado en elementos teóricos o empíricos. No obstante, cualquier tipo de garantía que emplee el estudiante no necesariamente implica que sea verídica, a estos argumentos se les conoce como no legítimos, mientras que si la garantía permite relacionar lógicamente los datos y la aserción esta puede ser: empírica o teórica. En ambos casos el argumento es legítimo, pero en el primero pertenece a la categoría sustancial mientras que en el segundo es analítico. Estas categorías permiten comprender la especificidad del argumento que suscitó el estudiante y su forma de proceder.

Para el enfoque de nuestro análisis acogemos únicamente las categorías relativas a la estructura y la garantía del argumento tal como establecen Triana y Zambrano (2016). Sin embargo, en lo que concierne a la forma de la estructura del argumento consideramos una idea más amplia que la de la clasificación binaria entre completo e incompleto. Por ello se determinan aquellos elementos presentes y ausentes. En las siguientes tablas se explica detalladamente cada una de estas categorías, de acuerdo con la estructura del argumento y el tipo de garantía, acompañada de un respectivo ejemplo.

Estructura	**Definición**
Deductivo [D]	En un argumento deductivo la aserción se deduce de los datos y la garantía, elementos previamente determinados. Tiene una forma similar a la de una demostración deductiva a diferencia que esta se sustenta en una teoría matemática mientras que la argumentación deductiva no necesariamente por lo que en ocasiones se llegan a deducciones falsas que son aceptadas.
Inductivo [I]	Un argumento inductivo se basa en la observación de casos particulares o recolección de datos o hechos con el fin de encontrar relaciones para formular una regla general. Algunas de las herramientas de la inducción son la generalización, particularización y la analogía.
Abductivo [A]	Un argumento abductivo parte de la conclusión y busca condiciones que la hagan válida. En el modelo de Toulmin es aquel que dada la aserción halla posibles garantías y datos para esta.

Tabla 10. Tipos de argumento según estructura.

Garantía	**Definición**
Sustancial empírico [E]	Es aquel que se fundamenta en el aspecto visual y la garantía incluye datos numéricos, dibujos o gráficas o en una representación en un medio, ya sea el computador o el papel.
Sustancial no legitimo [N]	Es aquel en el que la garantía no constituye un elemento del sistema teórico de la clase o es aquel en el que no hay correspondencia entre los elementos del argumento. Es decir, o la garantía no relaciona los datos con la aserción, o la aserción no es consecuencia de los datos.

Analítico [A]	Es aquel que su estructura lógica es válida y se sustenta en un sistema teórico aceptado por la comunidad en la que argumenta.

Tabla 11. Tipo de argumento según garantía.

De acuerdo con el tipo de respaldo

La categorización de los respaldos tiene que ver con la clasificación de los sustentos de las gatantias que los estudiantes relacionaron para sus argumentos. En el inicio de este estudio no se tomó en cuenta esta categorización para los respaldos, por lo tanto, esta categoría es emergente. Se pudo reconocer que el respaldo se podía asociar a una de tres categorías: autoritario, en el que el estudiante se apoya en un factor externo para sustentar lo que argumenta, estos a su vez pueden ser autoritario profesor (A1); autoritario compañero (A2); y autoritario enunciado (A3). Perceptual, en este el apoyo es visual, ya sea de un dibujo o alguna representación, estos pueden ser a simple vista (P1), o con apoyo en el doblado de papel (P2). Y teórico, donde el sustento para el argumento refiere a un elemento conceptual, este se categoriza en teórico a simple vista (T1), o teórico con doblado de papel (T2). A continuación detallamos estas categorías en la Tabla 12.

Tipo de respaldo	**Código**	**Definición**
Autoritario	Profesor [A1]	Es aquel que está sustentado en la declaración o construcción hecha por el profesor de la clase.
	Compañero [A2]	Es aquel que está sustentado en la declaración o construcción hecha por un compañero de la clase.
	Enunciado [A3]	Es aquel que está sustentado en el enunciado de la tarea.
Perceptual	A simple vista [P1]	Es aquel que se sustenta de manera visual en representaciones en el papel o en el tablero, sin acudir a referentes conceptuales.
	Con doblado de papel [P2]	Es aquel que se sustenta en el doblado papel, sin acudir a referentes conceptuales.
Teórico	A simple vista [T1]	Es aquel que se sustenta en representaciones en el papel o en el tablero de manera visual, acudiendo a un referente conceptual.
	Con doblado de papel [T2]	Es aquel que se sustenta en el doblado papel, acudiendo a un referente conceptual.

Tabla 12. Tipos de respaldo para argumentos

En la siguiente tabla se presentan todos los factores que se tendrán en cuenta en el análisis de los argumentos, incluyendo el nivel de influencia del medio en estos y el tipo de tarea del que surgen.

Obtención del arreglo

De acuerdo con las categorías descritas anteriormente se configuró un arreglo horizontal en el que se indica en la primera casilla el tipo de argumento según su estructura: deductivo, inductivo o abductivo. En la segunda casilla se especifica el argumento según su garantía: analítico, empírico o no legítimo. En las casillas tres a la ocho se incluye el arreglo que da cuenta de la presencia de los elementos del argumento, esto es dato, garantía, aserción, respaldo, refutador y calificador modal. En este caso, si alguno de estos elementos está presente se denota con uno (1) pero si está ausente se denota con cero (0). Así, un argumento que cuenta con todos los elementos se representa con el arreglo [111111]. No obstante, si por ejemplo el argumento carece de respaldo, en la cuarta casilla irá el número cero y se representa [111011].

Por otro lado, separamos con una coma los elementos del argumento del tipo de respaldo. Para el tipo de respaldo se que requirió dos casillas, la nueve y la diez, pues se indica letra y número. En la casilla once se específica el nivel de suplementación del doblado de papel en el surgimiento del argumento. Finalmente, en la casilla 12 se representa el tipo de tarea formulada. Así, por ejemplo un argumento de tipo abductivo [A], con una garantía empírica [E], sin calificador modal [111110], con un respaldo de tipo perceptual a simple vista [P1] y un nivel de suplementación del medio carente [C], en una tarea de descubrimiento [M], se denota [AE111110, P1CM].

ANÁLISIS

En este capítulo presentamos el análisis realizado a los datos acopiados en la implementación de la secuencia diseñada. Para ello, la información se ha dispuesto de la siguiente forma: cada sesión de clase, en el mismo orden en que se realizó, consta de dos momentos en su desarrollo, a saber: un trabajo en parejas alrededor de las tareas propuestas y un momento posterior en el que se hizo una puesta en común sobre el trabajo realizado en la fase grupal. Respecto al primer momento se tiene en cuenta, del trabajo realizado por Brock y Max, aquellos episodios en los que su interacción permite reconocer argumentos. Respecto al segundo momento, se presenta la discusión en grupo alrededor del desarrollo de la tarea y de esta los argumentos identificados, así como las reacciones a estos por parte del colectivo de la clase, todo esto gestionado por el profesor.

En cada momento se presenta el análisis correspondiente a cada argumento, atendiendo a lo descrito en el capítulo de Metodología. Cuando es requerido, con el fin de dar claridad a las ideas presentadas, los episodios están acompañados de representaciones gráficas que ilustran acciones, gestos o producciones de los participantes. Al final de la presentación del desarrollo y análisis de cada tarea se hace un balance de la presencia del medio en esta, lo que permitirá reconocer de manera longitudinal el impacto del doblado del papel en las producciones de los estudiantes. Los nombres de los estudiantes fueron modificados para proteger sus identidades.

Por motivos de extensión, presentamos el análisis de las tareas que consideramos más representativas de los núcleos 2, 3 y 4, considerando en este punto el modo en que fueron desarrolladas por los estudiantes y las producciones que allí tuvieron lugar. Se presenta también el análisis de la tarea final. El análisis de todas las tareas se encuentra en la sección anexos.

NUCLEO 2: ¿CÓMO CONSTRUIR DOS ÁNGULOS CONGRUENTES?

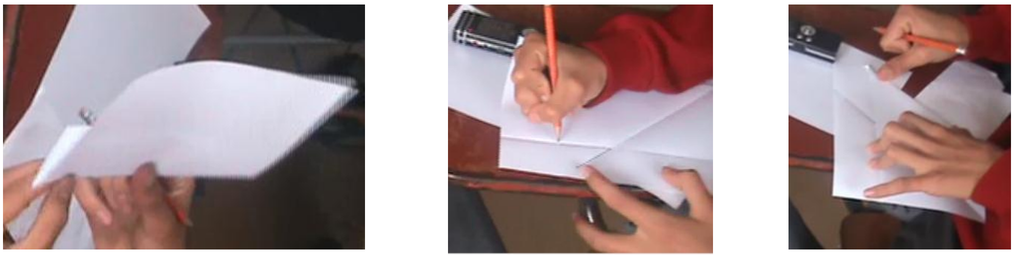
El profesor presenta la siguiente tarea leyendo su enunciado. Esta tarea es de profundización porque requiere que el estudiante acuda a los elementos teóricos abordados hasta ahora, particularmente la idea de que dos ángulos son congruentes si al solaparse coinciden (definición). El enunciado de la tarea es el siguiente:

Tarea 12: Construye dos ángulos que sean congruentes con dobleces. Proponga dos construcciones distintas.

Trabajo grupal

Brock procede a realizar un doblez en su hoja de trabajo paralelo a los bordes más largos de esta, Imagen 71 Brock realiza un doblez que interseca al inicial y delinea con un lápiz uno de los cuatro ángulos que se determinan, Imagen 72, luego hace coincidir uno de los bordes de la hoja con uno de los lados del ángulo que él resaltó y genera con ello un nuevo doblez, Imagen 72.

Por su parte Max en otra hoja, ha construido dos dobleces cualesquiera que se intersecan y también ha marcado uno de los cuatro ángulos generados, al parecer guiado por la construcción de Brock. Max le indica a Brock que debe construir el otro ángulo, el congruente, en la segunda hoja que se le entregó a cada uno. Brock toma la hoja que no ha empleado, procede a realizar allí dos dobleces que se cruzan, de manera similar a como construyó los primeros. Al mismo tiempo Max en su segunda hoja realiza dos dobleces que se cruzan. Brock pregunta a la investigadora si cada ángulo debe ir en una hoja distinta, ante lo que ella aclara que deben ir en la misma hoja y hacer una propuesta distinta en cada una de estas.



(a) (b) (c)

Imagen 1. Doblez generado a partir de hacer coincidir un lado de la hoja con un lado del ángulo.

De este modo Brock toma su hoja original de trabajo y realiza un doblez que interseca al último que había generado, marcando con el lápiz el ángulo que él considera congruente al ya construido. En la siguiente imagen enumeramos los dobleces según el orden en que Brock los fue realizando:

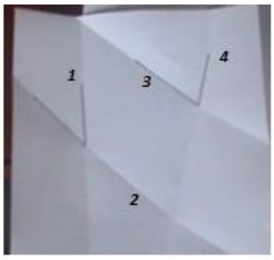


Imagen 2. Dobleces de Brock no congruentes.

Aunque parece a primera vista que los dos ángulos marcados en la hoja tienen la misma medida, una mirada más detallada a las construcciones permite descartar esta hipótesis. Esto porque el último doblez que realizó Brock no es paralelo al doblez del correspondiente lado del primer ángulo. Brock no justifica por qué considera que los ángulos obtenidos son congruentes, tampoco los sobrepone para testar su idea, simplemente sustenta su procedimiento en apoyo visual.

(a) (b) (c)

Imagen 3. Proceso de construcción de Max de dos ángulos congruentes.

Mientras tanto Max vuelve a su construcción de la primera hoja, Imagen 74, y hace coincidir uno de los dobleces sobre sí obteniendo así dos ángulos que tienen en común un doblez remarcándolo con lápiz, como se puede observar en la Imagen 74. Luego de esto Max toma la segunda hoja en la que había construido dos dobleces que se intersecan y realiza un doblez paralelo a los bordes cortos de la hoja, el cual contiene el punto de intersección entre los primeros dobleces, Imagen 75.

Imagen 4. Proceso de construcción de Max.

Brock desarrolla otro procedimiento en el que construye dobleces que se intersequen, plegando papel obtiene de una manera simple los ángulos, que el asume como congruentes (Imagen 76).

Imagen 5. Segunda construcción de Brock.

Los estudiantes, tras terminar sus construcciones voltean la hoja y no intercambian ideas. La investigadora interviene preguntando cómo prueban que cada pareja de ángulos construida cumple lo solicitado. Los estudiantes leen la definición de ángulos congruentes y manifiestan que los ángulos deben coincidir, además mencionan que deben medir lo mismo. Así, Max plantea que para comprobar esto se debe poner un ángulo encima del otro. Brock intenta hacer esto en su última construcción realizando un doblez que correspondería al eje de simetría entre los dos vértices de los ángulos. Como se ilustra en seguida:

Imagen 6. Intentos de Brock por encontrar un doblez para sobreponer los ángulos.

Sin embargo, no logra el objetivo por la dirección de los ángulos. Se le pregunta a Max frente a la justificación de su primera construcción (Imagen 77), pero él no provee explicación alguna aunque reconoce que los ángulos deben tener la misma medida, Brock considera que para justificar que los ángulos tienen la misma medida es necesario emplear la regla pero la investigadora les indica que deben hacerlo sin emplear un elemento externo al papel. Ellos exploran la situación a través de dobleces que no marcan, sin hacer coincidir los ángulos.

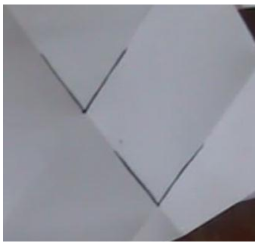


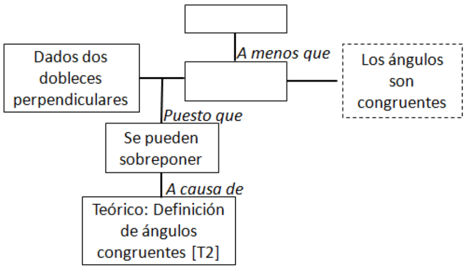
Imagen 7. Ángulos congruentes por Max en su primera construcción

Imagen 8. Dos ángulos congruentes según Brock.

De las construcciones realizadas por Brock y Max hasta el momento se puede decir que sus afirmaciones están apoyadas en la percepción visual, pues ninguno de ellos justifica de alguna forma su construcción. Debido a que no hay una justificación de su hallazgo no se reconocen en estos argumentos. Brock tras la imposibilidad por demostrar que los ángulos construidos eran congruentes, realiza otros dos dobleces perpendiculares por la mitad de la hoja (Imagen 79) y justifica que los dos ángulos que se obtienen son congruentes porque "se puede poner un lado sobre otro", aludiendo con ello a la idea de superposción para verificar que ambos ángulos coinciden.

En esta nueva construcción y su razón para establecer que los ángulos son congruentes encontramos un argumento de tipo deductivo [D]. Brock parte de realizar dos dobleces perpendiculares[2] [dato] para concluir que los ángulos determinados son congruentes [aserción] gracias a que es posible superponerlos [garantía] como se establece en la definición de ángulos congruentes [respaldo]. De este modo, el respaldo es de tipo teórico [T2]. Respecto al calificador modal de este argumento no se puede decir algo porque es posible reconocer que tanto Brock como Max desde un principio no supieron como probar la congruencia y es con las preguntas que hace la investigadora que se ven en la necesidad de hacerlo. Así, este argumento es incompleto [111100].

[2] Los llamamos así pues representan tal propiedad entre rectas en el papel. Sin embargo, este asunto no ha sido discutido con propiedad en clase. Esto ocurrirá en el siguiente núcleo.



Esquema 9. Brock y Max, los ángulos que se pueden sobreponer son congruentes.

Este argumento es analítico [A] porque Brock se apoyó en la definición de ángulos congruentes para reconocer y construir dos dobleces que se pudieran sobreponer. Además, es de suplementación total [T] porque Brock únicamente puede verificar que los ángulos coinciden tras plegar la hoja de papel. En definitiva, este argumento es deductivo, empírico, incompleto, analítico, de suplementación total, de una tarea de profundización [DA111100, T2TL]. En este momento termina la sesión de clase y el profesor recoge las construcciones de cada pareja de trabajo para presentarlas en la siguiente sesión.

En la siguiente sesión de clase el profesor entrega a cada grupo dos hojas para que reporten sus construcciones, teniendo en cuenta lo realizado en la clase anterior. Max lee la indicación de la tarea y Brock realiza dos dobleces perpendiculares, producto de plegar la hoja dos veces por la mitad, proceso que se ilustra en seguida:

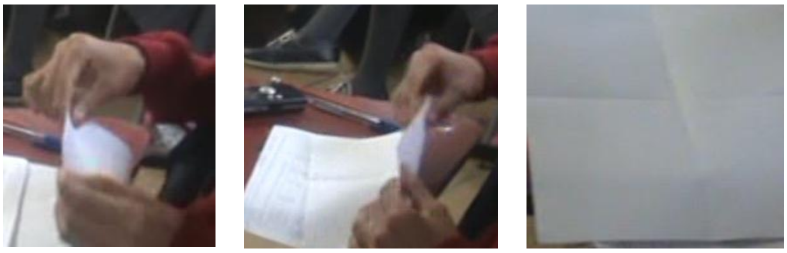
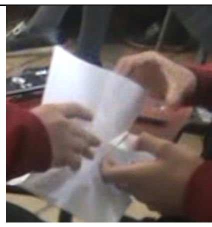
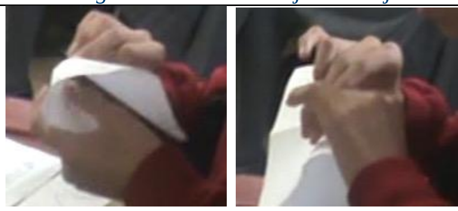


Imagen 9. Proceso de construcción de Brock

Max señala en esta configuración dos ángulos opuestos por el vértice para indicar los ángulos que son congruentes. A partir de esto tiene lugar la siguiente conversación:

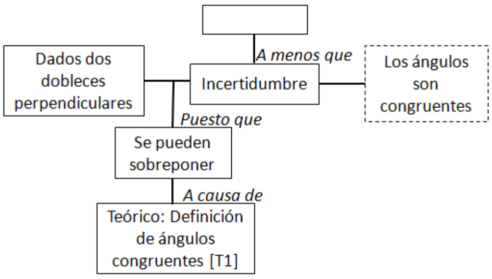
12000	Brock	Y, ¿cómo comprobamos [la congruencia]? ¡Ah! pero espere yo hago estos [ángulos] acá y guardamos esa hoja para hacer [otra propuesta] [Brock repisa con lápiz los dobleces perpendiculares].
12001	Max	[Indica con un esfero los ángulos congruentes. Intenta sobreponer los ángulos]. Así, así [indica con la mano un doblez correspondiente a la bisectriz de los ángulos no marcados. Brock toma la hoja e intenta hacer un doblez, no por donde le indicó Max, sino por la mitad de la hoja  *Imagen 10. Max indica el doblez a realizar.*  *Imagen 11. Brock pliega por la mitad de la hoja*

12002	Max	¡No! [toma la hoja], así [indica el doblez que sería bisectriz de los ángulos no marcados].	 *Imagen 12. Max toma la hoja de trabajo*
12003	Brock	[Toma la hoja] Un doblez diagonal que pase por acá [punto de intersección entre los dobleces. Traza un doblez bisectriz de los ángulos no marcados] ¡Ya! (Imagen 84):	 *Imagen 13. Proceso de verificación de Brock*

El argumento anterior es de tipo deductivo [D] en tanto que los estudiantes parten de la construcción de los ángulos que suponen congruentes (ángulos opuestos por el vértice) [dato] y elaboran un mecanismo que les permite corroborar su sospecha [garantía]. El mecanismo que elaboran los estudiantes consiste en construir un doblez que les permite superponer los ángulos estudiados, este corresponde a la bisectriz de los otros ángulos determinados en la configuración que han representado en la hoja. Este mecanismo se sustenta en la definición de ángulos congruentes [respaldo], pues desde el inicio los estudiantes, al buscar la forma de garantizar la congruencia de dichos ángulos, buscan construir un doblez que permita superponerlos y de ahí establecer una comparación.

Imagen 14. Aceptación de Brock respecto a la idea de Max.

Sin embargo, al revisar detalladamente la construcción hecha por Brock es posible notar una desviación en los dobleces y por tanto no se prueba que los ángulos son congruentes. Por tanto, el respaldo del argumento es de tipo teórico [T1]. El argumento carece de refutador. Las acciones de Max quien orienta a Brock en la búsqueda del doblez demuestran certeza en lo que dice mientras que Brock no se ve muy convencido de seguir el camino de su compañero porque tiene su propia idea (de plegar la hoja por la mitad resultado de la experiencia tras el trabajo en la clase anterior) pero Max le impide desarrollarla, como este es un argumento conjunto podemos decir que hay incertidumbre [calificador modal]. El argumento es incompleto [111101] como se ve a continuación:



Esquema 10. Dos dobleces congruentes se pueden superponer.

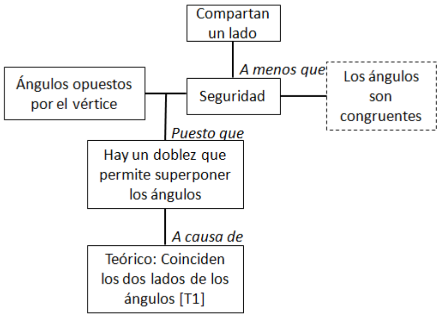
Este argumento es empírico [E] en tanto que los estudiantes se apoyaron en las representaciones plasmadas en papel, para así garantizar que los ángulos quedaban superpuestos. El uso del papel fue determinante para arribar a una conclusión como ya se ha podido ver. Por lo anterior el medio en este problema tiene un uso total [T]. En definitiva, este argumento es de tipo deductivo, empírico, incompleto, con un uso del medio total inmerso en una tarea de profundización [DE111101, T1TL].

La discusión en torno a si la construcción de dobleces perpendiculares y la de ángulos opuestos por el vértice tienen la misma estructura continúa, para Brock son similares mientras que para Max no, como se observa en el siguiente diálogo:

	Brock	[Desdobla la hoja] Entonces, este es parecido a este [muestra a Max la construcción realizada la clase anterior]. Y los doblamos [realiza el doblez por el doblez perpendicular].  *Imagen 15. Explicación de Brock.*
12004	Max	Sí pero ahí [última construcción] están compartiendo sus lados, en esta [señala la construcción realizada la clase anterior] solo están compartiendo un lado [los ángulos].
12005	Brock	¡Por eso!
12006	Max	No dos lados, sólo están compartiendo un lado cada uno tiene sus lados [señala con el dedo los dobleces perpendiculares], su lado, sus lados.
12007	Brock	¡Ah!, o sea que… ¡Ah!
12008	Max	Solo compartiendo un lado [Asiente con la cabeza].
12009	Brock	Ah [mira la construcción conjunta y la instrucción de la tarea] ¿Así? [Muestra construcción].
12010	Max	[Asiente con la cabeza] Pues yo diría que sí, que así. ¡Ya listo!
12011	Brock	Pero entonces, ¿cómo colocaríamos? ¿Cómo ponemos [en la hoja]?

Este argumento es de tipo deductivo [D] en tanto que Max parte de los dobleces perpendiculares y a través de un doblez que es bisectriz de dos de los ángulos opuestos [garantía] establece que son congruentes los otros ángulos opuestos por el vértice [aserción]. De modo que, para ellos basta que exista dicho doblez, auque el que han obtenido no es el que buscaban, ellos manifiestan que han encontrado un doblez que permite superponer los ángulos, pero no prueban si coinciden. Como el argumento es producto de una idea que acogen Brock y Max que no verfican sino asumen como verdadera a simple vista, entonces el respaldo es de tipo teórico [T1].

El calificador modal toma lugar en las palabras de Max, en el momento que Brock le manifiesta y presenta que esta construcción es similar a la que él hizo la clase anterior (formar dos ángulos congruentes a partir de uno llano). Esta construcción no le convence a Max, quien le justifica a Brock (Imagen 85) que estos ángulos solo comparten un lado [1307] (par lineal) mientras que en la construcción conjunta cada ángulo tiene sus lados [1305] (opuestos por el vértice). Lo anterior dejaría ver un refutador sobre el mecanismo de verificación que se está proponiendo. Así, el argumento tiene una estructura completa [111111] que se presenta a continuación:



Esquema 11. Los ángulos no son congruentes porque no coinciden

Este argumento es empírico [E] pues es una externsión del anterior en el que se evidencia un retutador y un cambio en el calificador modal. El argumento es de suplemetación parcial [P] debido a que Brock presentna su idea a Max plegando el papel, pero él le contraargumentó señalando los dobleces construidos. Luego la aserción final es resultado de la explicación de Max. En definitiva, este argumento es de tipo deductivo, empírico, completo, con un uso del medio parcial, inmerso en una tarea de profundización [DE111111, T1TL].

Posterior a esta interacción Brock revisa nuevamente el enunciado de la tarea y le dice a Max que deben realizar dos propuestas distintas, mostrando que sólo tienen una, ante lo cual Max accede ahora si a considerar la de Brock (dobleces perpendiculares) de la clase anterior. Los estudiantes informan a la investigadora que han terminado. Ella les solicita explicar lo que concluyeron y mostrarle la congruencia de los ángulos construidos. La siguiente interacción toma lugar.

12012	Inves	¿Qué concluyeron?
12013	Brock	Que para saber si este mide lo mismo que este [señala dos ángulos opuestos por el vértice] eh… toca hacer un doblez y ahí se sabe pues… o sea ponemos este ángulo sobre este por medio de un doblez y ahí nos damos cuenta de que miden lo mismo.
12014	Inves	A ver muestra.
[Brock pliega la hoja por el doblez que había realizado]		

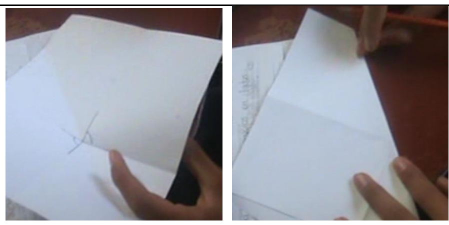


Imagen 16. Proceso de construcción de Brock.

12015	Inves	¡Listo!, y ¿cómo ves que sí miden lo mismo?
12016	Brock	Ahí [despliega y pliega la hoja, intentando ver si los ángulos coinciden].
12017	Max	Porque los está colocando…
12018	Brock	Uno sobre otro, pues sí, pero… [Despliega y pliega la hoja, intentando ver si los ángulos coinciden] pues miden lo mismo. O sea, no se ve… que las líneas sobresalen.
12019	Max	No hay una línea que sobresalga más que la otra.
12020	Inves	¿Cuáles son [las líneas del ángulo]?
12021	Brock	[El grosor de la hoja no deja ver a tras luz los lados de los ángulos] Mire esto, el azul [señala el arco que se forma entre los dos dobleces de uno de los ángulos de partida]… um bueno [desdobla la hoja] estos dos, entonces acá no sobresale ninguna línea [desdobla la hoja y la pliega por este último doblez pero de forma que las representaciones de los ángulos se pueden observar desde fuera,Imagen 88].

Imagen 17. Brock pliega la hoja

[Max Toma la hoja, la desdobla y vuelve a plegar por el doblez realizado entre los dos ángulos dados. De modo, que estos quedan dentro de la hoja]

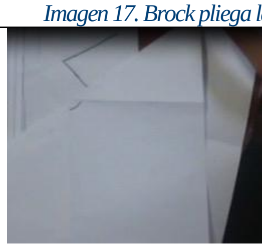


Imagen 18. Max pliega por el lado contrario a Brock.

12022	Brock	¿Cómo?
12023	Max	Déjelo para el otro lado.
12024	Brock	Lo mismo
12025	Max	Sí por eso.

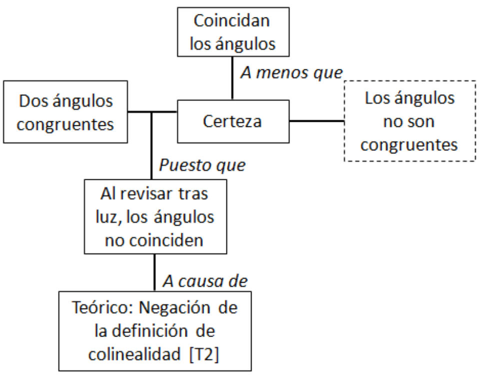
Después de la discusión anterior presentan a la investigadora su idea de forma definitiva y surge el siguiente diálogo:

12026	Brock	¡Ya profe! ¿Así?
12027	Inves	Pero es que cuál es el ángulo, no sé cuál de todos.
[Brock señala los ángulos dados]		
12028	Inves	Sí pero cuando lo doblan cómo hago para saber cuál es, cómo hacen para saber cuál es [el otro ángulo].
12029	Brock	Este, [muestra el arco entre los dos dobleces de la parte exterior de la hoja para indicar el ángulo del que está hablando] ahí se nota que los dos [ángulos] tienen la misma medida (Imagen 89. Max pliega por el lado contrario a Brock.).
12030	Inves	¿Por qué?
12031	Brock	Porque al poner uno sobre el otro por decir no sobra.
12032	Invest	Muestre que no sobra, a ver.
12033	Brock	[Revisa tras luz] uy si sobra, mire.
12034	Max	[Toma la hoja y observa tras luz moviendo ligeramente el doblez] ¿Qué hiciste mal?

12035	Brock	Yo no hice los ángulos.
12036	Max	¿Sí ve?, se le salió este lado [señala con el dedo uno de los lados del ángulo].
12037	Brock	No importa los lados, lo que importa es la medida de los ángulos.
Max pliega la hoja por el doblez, la toma y revisa nuevamente, girándola para todos lados.		
12038	Brock	[Sobresale un poquito el arco de uno de los ángulos que marcó]. Este es más grande. Pero sí, es así, porque nosotros hacemos así [revisa su construcción tras luz] podemos saber si sobresale o no ¿No?
12039	Inves	¡Ah! …Al mirarlo tras luz. ¿Sí es lo que dices?
12040	Brock	Sí señora.
12041	Inves	A ver muestra.
12042	Brock	[Revisa su construcción tras luz] ¿Se ve o no?
12043	Inves	Y con eso entonces, ¿qué compruebas?
12044	Brock	Que los ángulos no tienen la misma medida. ¡Ah!, entonces no son congruentes.

En esta interacción es posible notar que los estudiantes reconocen que para demostrar la congruencia entre los ángulos estos deben coincidir al superponerlos, pero el doblez construido para ello no les permita probar esto. Apoyados en un doblez que realizan con esta finalidad, justifican que los ángulos representados son congruentes. Sin embargo, tras los interrogantes de la investigadora, Brock concluye que los ángulos representados no son congruentes y no que el doblez realizado no era el adecuado. De modo tal que surge un argumento de tipo deductivo [D].

Brock y Max parten de la construcción de dos ángulos [dato] asumidos como congruentes y construyen un doblez que permita sobreponerlos y así corroborar su sospecha [garantía]. Hasta este punto podría verse semejanza con el anterior argumento analizado; sin embargo, al superponer los ángulos en esta oportunidad concluyen que estos no son congruentes [aserción]. Brock nota que el doblez realizado lleva a que los lados de los ángulos no coincidan plenamente. El respaldo en este argumento yace en la definición de ángulos congruentes, el cual en este caso permite afirmar la no congruencia. Por tanto, el respaldo es de tipo teórico [T2].



Esquema 12. Los ángulos representados no son congruentes porque el doblez realizado no los hace coincidir.

El refutador se aprecia cuando Brock expresa "porque al poner uno sobre el otro por decir no sobra" [12030], reconociendo la posibilidad de que los lados del ángulo, al superponerse, no coincidan. El calificador modal es de certeza en intervenciones de Brock, pues al verificar si los ángulos coinciden o no, da respuestas contundentes De acuerdo con lo anterior, este argumento tiene una estructura completa [111111] y se presenta enseguida:

Este argumento es además legítimo [N] porque aun cuando se involucran dobleces para verificar una propiedad por medio de un sustento teórico, se deduce la no congruencia de ángulos lo cual es falso. El uso del medio en este argumento es total [T] pues los estudiantes emplean el papel para construir dobleces y verificar tras luz sus apreciaciones. Por lo expuesto, el argumento es deductivo, no legítimo, completo, con un uso del medio total, en una tarea de profundización. [DN111111, T2PL].

Socialización

El profesor recuerda la definición de ángulos congruentes y el procedimiento a través del cual se determinaba si dos ángulos cumplían tal propiedad. Una estudiante sintetiza esto diciendo que se deben superponer los ángulos y determinar si coinciden sus lados. En seguida el profesor solicita a los estudiantes repisar con marcador los ángulos congruentes construidos en sus construcciones e indica a algunas parejas que muestren a sus compañeros lo realizado. Alexa y Any presentan su propuesta en hojas distintas. A continuación, lo acontecido al respecto.


(a)

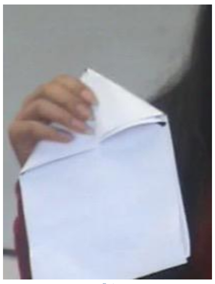

(b)

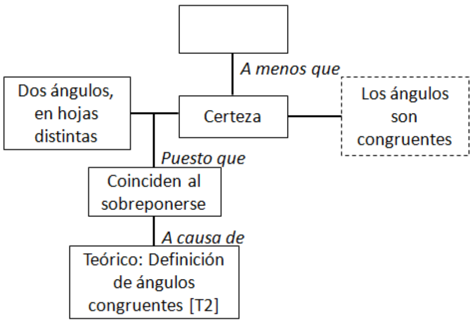
Imagen 19. Alexa comprueba que los ángulos realizados son congruentes

12045	Any	Nosotras hicimos dos dobleces [que se intersecan en el borde de la hoja], entonces pues solo los doblamos así y así [desdoblan y vuelven a plegar la hoja por cada doblez realizado], entonces supuestamente ahí dice [en la cartelera] que los ángulos congruentes, digamos, si se pueden sobreponer pues son congruentes, entonces Alexa y yo pues los sobrepusimos.
12046	P	Bueno y demuéstrenos… ¿Les coincidió?
12047	Any	[Mira a Alexa] ayúdeme.
12048	P	¿Esos dos [ángulos] son congruentes?
12049	Alexa	No.
12050	P	¿Cuáles son los dos que son congruentes?
12051	Any	No pues no, no…
[Alexa toma los ángulos que tiene Any, revisa las representaciones, entrega una pareja de ángulos a Any y se queda con la otra]		
12052	P	Muéstrenos, ¿estos dos son congruentes [se refiere a los ángulos que tiene Any]?
12053	Alexa	Estos [señala los que tiene en la mano].
12054	P	Bueno, dejen… tengan a la mano los dos que son [congruentes].
[Alexa presenta los ángulos a la clase (Imagen 90)].		
12055	P	¿Por qué lo son?
12056	Alexa	Porque… o sea los pusimos los dos uno encima del otro y pues miden lo mismo.

12057	P	Esa fue la manera. ¿Tienen otra? Encontraron la otra manera porque eran dos formas. Esa es una manera, bueno, coinciden, muéstreles a ellos [los demás estudiantes] que coinciden.
[Alexa muestra las dos hojas a las que les realizó los mismos dobleces (Imagen 90)].		
12058	P	¿Encontraron otra manera?
12059	Alexa	No, solamente una.

En la presentación de las estudiantes se reconoce un argumento de tipo deductivo [D] en tanto que ellas parten de la construcción de dos dobleces que se intersecan [dato], procedimiento que aplican en dos hojas, tras sobreponer una en la otra. A partir de esto determinan que dos ángulos son congruentes [aserción]. La garantía de este argumento se aprecia en acciones como la de Any, quien tras revisar en la cartelera las definiciones asegura que si los ángulos se pueden sobreponer entonces son congruentes [1346], acudiendo a la definición de ángulos congruentes [respaldo] aun cuando no la llama por su nombre. Esta idea la complementa Alexa, quien responde al cuestionamiento del profesor explícitando el procedimiento empleado "o sea, los pusimos los dos uno encima del otro y pues miden lo mismo" [garantía], procedimiento que realiza nuevamente (Imagen 90). Por lo tanto, el respaldo es de tipo teórico [T2].

El refutador del argumento está ausente porque ninguna de las dos estudiantes verbalizó alguna situación en la que no se obtuviera la congruencia de los ángulos. El calificativo modal es de certeza, aunque las estudiantes exhiben algo de nervios mientras presentan sus ideas, lo que se entiende ya que están frente a sus compañeros y esta no es una práctica usual en clase. Este argumento tiene una estructura incompleta [111101] como se puede observar a continuación:



Esquema 13. Alexa y Mia dos ángulos congruentes en hojas distintas.

En este caso, la garantía del argumento es analítica [A] debido a que acuden a través de sus acciones a la definición de ángulos congruentes. Por esta razón, el uso del medio jugó un papel importante, hablamos acá de una suplementación total [T]. El argumento expuesto tiene una estructura deductiva, analítica, incompleta, con un uno del medio total, de una tarea de profundización [DA111101, T2TL].

NÚCLEO 3: DOBLECES NO PERPENDICULARES

En esta sesión de clase se inició con el establecimiento de un procedimiento que permitiera construir dobleces perpendiculares. La revisión de algunas estrategias propuestas por los estudiantes permitió reconocer algunas que no cumplían con lo solicitado. De aquellas que sí cumplían con esta tarea se presentó en clase la elaborada por Marcelo (Imagen 97).

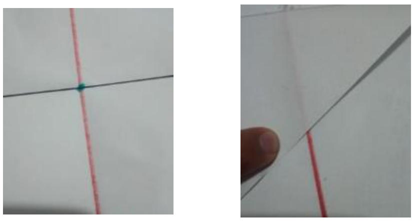


Imagen 20. Construcción de Marcelo

Marcelo construyó un doblez y un punto sobre este, posteriormente plegó ese doblez sobre sí por el punto y obtuvo un segundo doblez, perpendicular al doblez inicial, Imagen 97. A partir de esta construcción se estableció el siguiente hecho geométrico.

HG: Dobleces perpendiculares: Al sobreponer un doblez sobre sí mismo se genera un doblez perpendicular a este.

Los estudiantes se disponen a resolver la siguiente tarea, la cual se muestra como sigue:

Tarea 14: Uno de los estudiantes debe construir dos dobleces que NO sean perpendiculares. ¿Cómo podrías explicar que los dobleces que hiciste no son perpendiculares?

Trabajo grupal

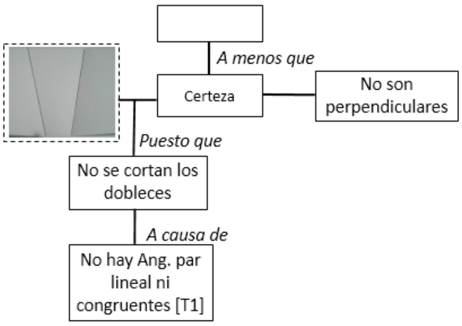
Imagen 21. Construcción uno de Brock y Max, tarea 14

La interacción de Brock y Max dio lugar a algunas ideas que respondían a la tarea. En esta interacción el profesor estuvo eventualmente acompañándolos. Presentamos a continuación lo acontecido.

14001	Max	Pues yo diría que podríamos hacer los dobleces separados.
14002	Brock	Así están separados, porque no se cruzan y al no cruzarse no forman ningún ángulo, y ya [Imagen 98].
14003	Max	¡Fácil!
14004	Brock	No, pero ¿qué más? Pues sí, porque, o sea, así no forma ningún ángulo.
14005	Max	Porque para poder hacer un doblez perpendicular tiene que tener un ángulo par lineal, 180 grados y el otro es un ángulo congruente. Profe [llama].
14006	P	Dígame.
14007	Max	Es que quería decirle, mire, para que no sean perpendiculares, podríamos hacer dos dobleces separados los cuales no se cruzan ni formarían un ángulo congruente ni par lineal, que es lo que se necesita para poder tener un doblez perpendicular.

Brock y Max debían proponer una situación en la que dos dobleces no fueran perpendiculares. Su interacción deja ver un argumento de tipo abductivo [A]. En la construcción de dobleces realizada por Max y Brock (Imagen 98) distinguimos los datos del argumento [14001] ya que es a partir de esta que los estudiantes proponen su aserción. Como garantía reconocemos la condición de no cruzarse en estos dobleces, lo que impediría determinar un ángulo recto entre ellos [14002]. Tal garante yace en la definición de dobleces perpendiculares. La aserción se aprecia en lo requerido por el enunciado de la tarea, proponer dobleces de los que se pudiera afirmar una relación de no perpendicularidad.

Max recurre a un respaldo para su garantía que consta del hecho geométrico par lineal-180 y la definición de ángulos congruentes [14005, 14007], al parecer bajo un esquema como el construido a través de la tarea 13, tal respaldo lo catalogamos como teórico por ser elementos conceptuales [T1]. Elemento refutador no se evidencia en el discurso de Max y Brock ya que no refieren casos donde no se pueda sostener la aserción. Como calificador modal encontramos certeza, dada la seguridad de los estudiantes al proponer los elementos del argumento presentes en sus afirmaciones [14003 y 14004]. Obtenemos un argumento incompleto [111101] cuyo esquema presentamos a continuación.



Esquema 14. Max y Brock, argumento sobre dobleces no perpendiculares 1

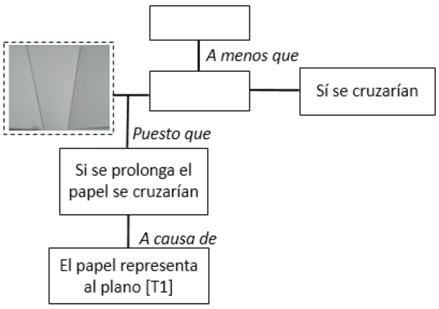
Como se puede apreciar la garantía tiene que ver con un elemento conceptual reconocido en el marco de la clase, esta es la definición de perpendicularidad. Este elemento hace del argumento de Max y Brock uno de tipo analítico [A] a pesar de la apreciación equívoca del dato que dieron los estudiantes, al asegurar que los dobleces y por ello las rectas no son perpendiculares. Lo anterior hace que la suplementación del medio sea total [T], la representación en el papel de los dobleces lleva a los estudiantes a asegurar que estos no se cortarán, lo cual no es verdad a la luz de las nociones de la Geometría del Doblado del Papel. Categorizamos el argumento según lo dicho como abductivo, analítico, incompleto, de suplementación total, en una tarea de profundización [AA111101, T1TL].

Al proseguir con el análisis del trabajo grupal apreciamos el surgimiento del siguiente argumento cuando el profesor intervine y dialoga con Brock y Max.

14008	P	¿Cuáles son los perpendiculares?
14009	Brock	Son los que se tienen que cruzar los dobleces y que los dos ángulos tienen que medir 90 grados.
14010	P	¿Y este [construcción, Imagen 98] no cumple ninguna de las dos condiciones?
14011	Brock	No, no, no porque no forman [ángulos], no se cruzan los dobleces.
14012	P	Y si yo prolongara la hoja. ¿Qué condición dejan de cumplir? ¿Cuántas condiciones tiene la definición de perpendiculares? [El profesor se retira].
14013	Max	(…) Sí se cruzarían.

El segundo argumento de Brock y Max ostenta una estructura abductiva [A], pues a partir de la representación que tiene en el papel [14010] [dato] y la pregunta que el profesor realiza, reconoce una propiedad que los dobleces construidos deben cumplir [14012] [aserción]. El hecho de que los dobleces no se cruzarán en la hoja sostenía la aserción de Brock en al anterior argumento, sin embargo, lo que el profesor menciona parece dejar en desconcierto a Max, quien ahora reconoce que estos dobleces, tras prolongar la hoja, sí se cruzarán [14011]. Tal acción sobre el papel se convierte en la garantía de su argumento.

El respaldo de tal argumento recae en la naturaleza del medio, específicamente en las normas que hay sobre su concepción de infinitud, dado que esta propiedad del papel se reconoce desde lo visual [T1]. Elemento refutador no evidenciamos en lo hablado por el estudiante. En cuanto al calificador modal decimos que es de duda, pues no apreciamos seguridad en las declaraciones que hace Brock. Resulta entonces un argumento incompleto [111100] con la siguiente representación.



Esquema 15. Argumento de Brock, dobleces no perpendiculares 2

Detallamos una garantía empírica [E] en las ideas comunicadas. La suplementación del medio se reconoce como total [T] debido al papel que toma en la construcción de la idea presentada. Conforme a lo analizado catalogamos el argumento como abductivo, empírico, incompleto, de suplementación parcial, en una tarea de profundización [AE111100, T1TL]. Brock propone otra construcción como respuesta a la tarea abordada (Imagen 99). Alrededor de esta se promueve la siguiente interacción.

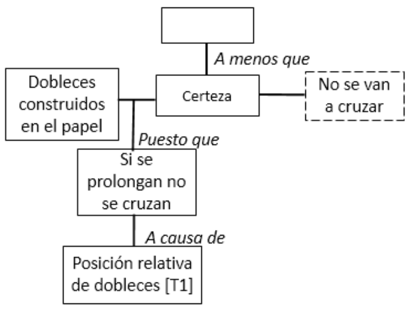
Imagen 22. Construcción dos de Brock y Max, tarea 14

14014	Brock	Ay sí, pero si hiciéramos los dos dobleces, si hiciéramos los dos dobleces así [realiza la construcción, Imagen 99] no se cruzarían acá. Así no se cruzarían.
14015	Max	¡Qué mal!
14016	Brock	Entonces acá sí se harían. ¿Cómo es que dice la pregunta? Porque por más que prolonguemos la hoja los dobleces no se van a cruzar [Imagen 99], pero en cambio en este [Imagen 98]...
14017	Max	¡Sí!
14018	Brock	¡Sí! formarían un ángulo, la única manera de que no…

14019	P	¿Esto te garantiza que nunca se van a cruzar? [se refiere a Imagen 99]
14020	Brock	Sí.
14021	P	¿Cómo podrías garantizar que no se van a cruzar?
14022	Max	Las dos van hacia la misma dirección.

A raíz de la anterior intervención del profesor, en la que desvirtuaba la propuesta de dobleces no perpendiculares por parte de los estudiantes, se hace una nueva propuesta sobre el papel para obtener dobleces que no se crucen. Las ideas de los estudiantes permiten reconocer un argumento deductivo [D] en el que los datos son los dobleces que han construido en el papel. La aserción en este caso corresponde a la propiedad que estos satisfacen, esta es, que no se van a cruzar [14016]. Como garantía Brock señala el hecho de que los dobleces no se cruzarían aun prolongándolos [14016] pues "van hacia la misma dirección" [14022].

El respaldo del argumento yace en la representación de los dobleces, su posición relativa entre ellos [14022], la cual es tomada por Max para asegurar la aserción, cobrando así una naturaleza teórica [T1]. No hay refutador en el discurso de Brock y Max en tanto que ellos no refieren salvedades para la aserción. Como calificador modal encontramos certeza dada la seguridad con que los estudiantes proponen sus ideas [14017, 14018]. El argumento [111101] lo representamos a continuación.



Esquema 16. Argumento de Brock y Max, dobleces no perpendiculares 3

La naturaleza de la garantía es empírica en vista de que se fundamenta en lo visual. Brock y Max proponen este elemento a partir de lo que perciben de los objetos geométricos representados en la construcción [14016, 14019, 14020], lo que traduce en un argumento empírico [E]. La suplementación del medio se hace parcial [P] dado que únicamente se tiene en cuenta para la elaboración de los dobleces, parte inicial del argumento. Catalogamos entonces el argumento como deductivo, empírico, incompleto de suplementación parcial, en una tarea de profundización [DE111101, T1PL].

Socialización

El profesor pide a algunos estudiantes que presenten sus producciones y que expliquen por qué creían que cumplían con lo solicitado, adicionalmente pide a los estudiantes que reaccionen ante estas presentaciones. El primer estudiante en pasar al frente fue Max, quien expuso lo que presentamos en el apartado anterior. A partir de estas propuestas el profesor realiza algunas aclaraciones sobre los dobleces que no se cruzan en la hoja, pero sí al prolongarse. Lo anterior se enfoca en las nociones de la geometría del doblado de papel, especialmente que el papel que representa al plano y los dobleces son infinitos.

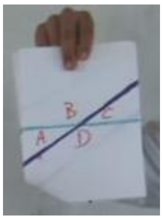


Imagen 23. Construcción de Alexa, tarea 14

El siguiente grupo en presentar sus producciones es el de Alexa y Mía (Imagen 100). Estas estudiantes afirmaban inicialmente que los dobleces allí representados no eran perpendiculares. Alexa y Mía explican sus ideas acudiendo a la construcción elaborada en la anterior tarea, sobre la cual argumentaban que al tener dos dobleces perpendiculares (Imagen 101 a), plegar uno de estos (Imagen 101 b) y luego plegar el segundo doblez, se obtienen dos bordes en el papel que corresponden a los pliegues de los dobleces perpendiculares iniciales (Imagen 101 c).

(a). Dobleces perpendiculares sin plegar.

(b) Dobleces perpendiculares al plegar uno de ellos.

(c) Dobleces perpendiculares al plegar los dos sucesivamente.

Imagen 24. Construcción de Alexa para ejemplificar dobleces perpendiculares

En interacción con Mía y Alexa, el profesor pregunta por qué los dobleces construidos por ellas no eran perpendiculares (Imagen 100). Para esto, él les pidió que consideraran la definición de perpendicularidad. Luego de revisar esta definición, Mía cambió de parecer y aseguró que los dobleces eran perpendiculares ya que se cruzaban. Él profesor pide a Jana que pase al frente y exponga su idea.

(a) Dobleces no perpendiculares sin plegar.

(b) Dobleces no perpendiculares al plegar el papel por uno de ellos.

Imagen 25. Construcción explicativa

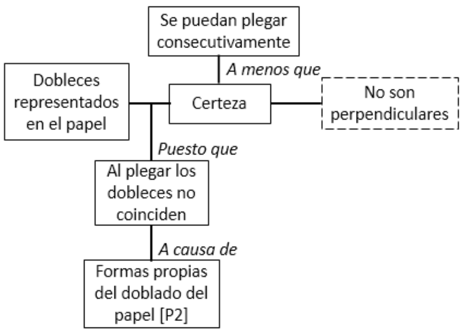
Jana, tras manipular y analizar la construcción de Alexa y Mía, declara que al sobreponer los dobleces no se cumpliría el hecho geométrico que dice que *al sobreponer un doblez sobre sí mismo, se genera un doblez perpendicular a este.* Con el fin de ahondar en la explicación de las estudiantes presentamos una construcción propia (Imagen 102). En dicha construcción mostramos dos dobleces no perpendiculares (a). Cuando se pliega uno de estos dobleces, el resultado es que el otro doblez no coincide sobre sí (b). En lo que sigue se presenta la interacción sostenida por Mía, Alexa, Jana y el profesor al respecto.

Omitimos el análisis de Max [AA111101, T1TL] debido a que explica a la clase el mismo argumento que surgió en el trabajo grupal. La clase continuó con el siguiente diálogo:

14023	P	Muéstrenos bien a todos y díganos porque no son perpendiculares [Imagen 100].
14024	Mía	Porque al sobreponer no, no, no coinciden [mientras pliega uno de los dobleces, Imagen 100].
14025	P	¿Al sobreponer a quiénes?
14026	Mía	Al sobreponer [plegaba el papel] este doblez [de color morado, Imagen 100] no coinciden.
14027	Alexa	Si doblamos este [color morado] no se puede hacer [pliega los dobleces como se ilustra en la Imagen 102 a, b].
14028	P	¿Quiénes deberían coincidir entonces? ¿Quiénes no coinciden?
14029	Mía	Esta línea morada. Digamos, yo hago así, al sobreponer la morada no se puede.
14030	Alexa	O sea, no es como esta [Imagen 101 a, b y c], que yo hago así y se puede.

El tipo de argumento que aquí emerge es deductivo [D] en cuanto las estudiantes parten de una representación y al operar sobre esta por medio del plegado reconocen el cumplimiento de una propiedad. Los datos en esta situación son los dobleces representado en el papel [14023]. La aserción corresponde a la afirmación hecha sobre estos que señala que no son perpendiculares [14023, 14024]. Estas proposiciones están vinculadas por medio de una garantía, la cual consiste en el plegado de papel y la identificación de que un doblez no coincide con sí mismo [14024, 14026, 14027]. Lo anterior deja ver como respaldo el procedimiento establecido a través de la anterior tarea, el cual permite determinar dobleces perpendiculares, solo que en este caso es utilizado como medio de verificación y no de construcción, lo ya dicho permite señalar un respaldo perceptual [P2].

El refutador se reconoce cuando Mía y Alexa exponen condiciones en las que doblando el papel sí serían perpendiculares los dobleces [14030]. Como calificador modal señalamos certeza, en tanto que no se aprecia duda en el discurso de las estudiantes. Obtenemos un argumento con estructura completa [111111] cuyo esquema presentamos a continuación.



Esquema 17. Argumento de Alexa y Mía, dobleces no perpendiculares

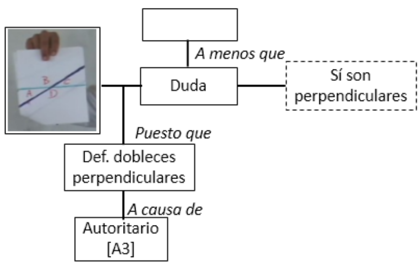
Alexa y Mía sustentan una garantía empírica que consistía en mostrar que los resultados de plegar unos dobleces no correspondían con el plegado de dobleces perpendiculares, lo que determina un argumento empírico [E]. La suplementación del medio se hace total única en el argumento de las estudiantes pues dan razones implementando doblado de papel que no dependen de condiciones físicas de este [U].

Obtenemos un argumento deductivo, empírico, incompleto, de suplementación total [DE111111, P2UL].

Consideremos ahora la siguiente parte de la interacción en clase.

14032	P	Bueno, entonces no son. ¿Concretamente por qué puedo decir que no son perpendiculares? Eso que usted dijo Mía, que le lleva a comprobar.
14033	Mía	Que no son perpendiculares, o sea, ahí dice [busca la definición de perpendicularidad].
14034	P	La definición de perpendiculares es esa que está allá [le señala la definición que se encontraba en una de las carteleras pegadas en el salón].
14035	Mía	[Lee la definición] Ah, entonces sí son perpendiculares.
14036	P	Ah, ¿entonces son perpendiculares?
14037	Mía	Sí, es que ahí dice [lee la definición en voz alta].
14038	P	Bueno, ¿y eso pasa ahí [en la construcción de Imagen 100]?
14039	Alexa	Sí.
14040	P	Muéstranos a todos que eso pasa ahí. ¿Cuáles son los ángulos rectos ahí?
14041	Mía	(…) El B.
14042	P	¿Por qué es recto?
14043	Mía	Porque cuando, es que [lee la definición]. Es que yo no entiendo este con quién va o qué [señala los ángulos A, B, C Y D (Imagen 100)]
14044	P	[Señala los lados correspondientes a cada ángulo a Mía] Si tú dices qué esos dobleces son perpendiculares, se cruzan y forman un ángulo recto. Mi pregunta es: ¿Cuál es ese ángulo recto? El A, el B, el C o el D.
14045	Alexa	El A y el C.
14046	Mía	Es que me confundo con la definición. Es que allá dice [definición de la cartelera].
14047	Alexa	El A no se cruza [señala el ángulo A en la construcción].

Reconocemos un argumento cuya estructura es deductiva [D]. En este se parte de los datos y por medio de una regla general se llega a la aserción. El dato del argumento se aprecia nuevamente en la construcción de los dobleces [14039]. Mía usa como garantía para su argumento la definición de dobleces perpendiculares [14032, 14034, 14036], y luego asegura que los dobleces sí son perpendiculares, opinión respaldada por Alexa. En esta ocasión el respaldo tien una naturaleza de autoritario en vista de lo que Mia interpreta del enunciado de la definición [A3]. El refutador no existe en este argumento. Como calificador modal señalamos duda, Mía muestra inseguridad al declarar su aserción [14042, 14045]. Tenemos así un argumento incompleto [111101].



Esquema 18. Argumento de Mía y Alexa, dobleces sí son perpendiculares.

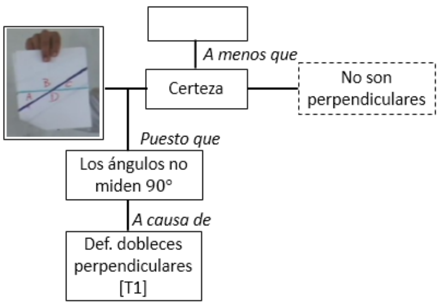
Mía ofrece en su argumento una garantía de tipo conceptual, no obstante, la relación lógica entre los elementos es nula, ya que los dobleces del dato no son perpendiculares, lo que hace ilegítimo al argumento

[N]. La suplementación del medio es carente en vista de que Mía y Alexa no recurren al doblado de papel para sustentar lo afirmado [C]. Obtenemos entonces un argumento deductivo, ilegítimo, incompleto, de suplementación carente [DN111101, A3CL].

Del mismo modo reconocemos la emergencia de otros argumentos al observar el desarrollo de la clase en esta etapa de socialización. Veamos el caso de Ly.

14047	P	¿Está de acuerdo Mónica con lo que dicen? [Pregunta a estudiante del grupo]
14048	Mónica	No.
14049	Mía	Entonces que pase y explique ella.
14050	P	Ya por favor. Lorena, ¿estos dobleces se cruzan?
14051	Lorena	Sí.
14052	P	Ly ¿Para usted estos dobleces son perpendiculares?
14053	Ly	No.
14054	P	¿Por qué no?
14055	Ly	Porque los ángulos no miden 90 grados

En las cortas intervenciones de Ly podemos reconocer un argumento de deductivo [D], en el que el dato es la construcción de los dobleces realizada sobre papel [14050], la aserción corresponde al hecho de que los dobleces no son perpendiculares [14052, 14053] y la garantía que permite hacer este vínculo es expresada por la estudiante como "los ángulos no miden 90 grados" [14055]. Esta garantía parece evocar la definición de dobleces perpendiculares [respaldo], otorgando una naturaleza teórica [T1]. Por otra parte, el refutador está ausente en lo dicho por Ly. El calificador modal es de certeza dada la seguridad en las palabras de la estudiante. Obtenemos entonces la siguiente estructura de elementos [111101] y su correspondiente esquematización.



Esquema 19. Argumento de Ly, los dobleces no son perpendiculares

Ly sustentó un argumento analítico [A] en vista de que la garantía corresponde a la definición aceptada de dobleces perpendiculares. Además, se evidencia entre los elementos una relación lógica donde la garantía se corresponde con los datos y la aserción. Por la no manipulación del doblado de papel distinguimos una suplementación carente [C] del medio, resultando un argumento [DA111101, T1CL]. El profesor retoma la interacción con Alexa y ella aporta algunos elementos a la discusión.

14056	P	[Se dirige a Mía y Alexa] ¿Ustedes qué dicen? de que los ángulos no miden 90 grados.

14057	Alexa	¿Cuáles ángulos?
14058	P	Los cuatro ángulos de aquí… ¿Cómo puedes tú saber que estos dobleces de aquí son perpendiculares?
14059	Alexa	¿Sobreponiéndolo?
14060	P	A ver, sobrepóngalo. ¿Cuál van a sobreponer?
14061	Alexa	El verde [dobla la hoja por este doblez, mas no sobrepone a tal doblez sobre sí mismo, como se observa en Imagen 103].

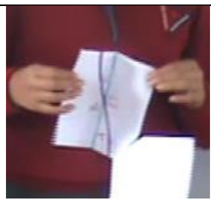
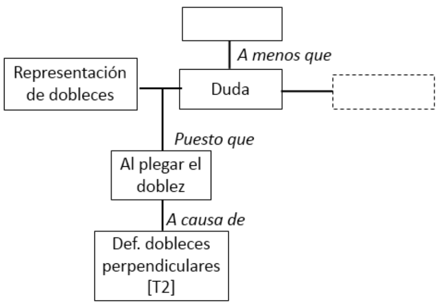


Imagen 26. Alexa sustenta su argumento

Catalogamos este argumento como deductivo [D] dado que Alexa parte de los dobleces y por medio de la acción de plegarlos [garantía], da a entender su respuesta porque no tiene un carácter explicito. Señalamos los datos en la representación de los dos dobleces [14061] pues de estos inició su argumento. Alexa mostró [1406] una acción ligada a la forma de verificar la perpendicularidad distinta a la abordada en clase [garantía], aunque también válida dado el resultado que se quería verificar. Alexa muestra en ese trabajo con el doblado de papel apoyo para la aserción, elemento que emerge de forma implícita y que tiene que ver con señalar los dobleces como perpendiculares, por lo dicho omitimos tal elemento.

La propuesta de Alexa deja ver que se apoya [respaldo] en la definición de dobleces perpendiculares para verificar su resultado. Aunque el respaldo refiere un elemento conceptual este está permeado por la acción del papel lo que lo hace teórico con implementación del medio [T2]. La estudiante no describe una situación en la que su argumento fuera inválido, lo que se traduce como ausencia del refutador. Por último, reconocemos calificador modal de poca certeza, dado que no se aprecia segura al proponer su garantía [14337]. Lo dicho nos resulta un argumento incompleto [110101].



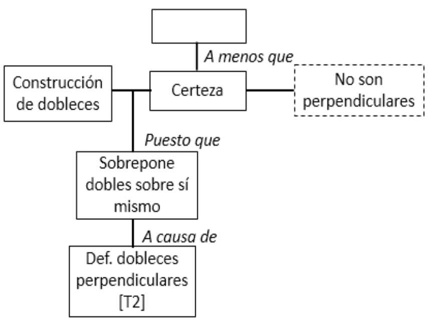
Esquema 20. Argumento de Alexa, de dobleces perpendiculares

Alexa deja ver una garantía de tipo empírica al proponer la acción de sobreponer los dobleces, pero al considerar la relación lógica de los elementos esta no es acertada puesto que la aserción no corresponde al respaldo ni al dato [N]. La suplementación del medio se hace total puesto el mecanismo empleado para testar la hipótesis involucró plenamente este medio [T]. Obtenemos un argumento deductivo, analítico, incompleto, de suplementación total en una tarea de profundización [DN110101, T2TL].

El desarrollo de la clase llevó al profesor a interactuar con Jack, Mónica y Mía. En esta ocasión el profesor posibilita que Mónica aclare algunas ideas erróneas de Alexa y Mía.

14061	P	¿Usted qué opina de eso Jack, eso es sobreponer?
14062	Mac	No.
14063	P	¿Le puedes ayudar a sobreponer?
14064	Mac	Profe no se puede sobreponer el verde.
14065	P	¿Mónica nos quieres colaborar? Ayúdanos a sobreponer el doblez de color verde.
14066	Mónica	Sí [pasa, toma la hoja y sobrepone el doblez verde sobre sí mismo y se la entrega a Alexa].
14067	P	¿Qué pasa con el doblez de color morado si sobrepongo al verde?
14068	Mía	No coinciden [el borde formado al doblar el papel con el doblez de color morado, Imagen 100].
14069	P	¿No coincide?
14070	Mía	No, no, no, espera [manipulan por un momento la construcción].
14071	P	¿Eso qué me indica?
14072	Mía	No son perpendiculares.
14073	P	¿Por qué?
14074	Mía	Porque al sobreponerlos no coinciden.

La anterior intervención deja ver un argumento deductivo [D], en el que se parte de una construcción de dobleces [dato] y se establece una forma de sustentar que estos no son perpendiculares [14072] [aserción]. Como garantía reconocemos la acción de Mónica sobre el papel [14066], ya que esta proveyó sustento a la conclusión dado el comportamiento de los dobleces involucrados. Mía asegura que este procedimiento lleva a decir que los dobleces no son perpendiculares, por lo que reconocemos en esta propuesta de verificación un respaldo relacionado con la definición de dobleces perpendiculares y su procedimiento de construcción, el cual en esta oportunidad nuevamente se usa como medio de verificación, la naturalesa de este elemento por lo tanto es teórica [T2]. Por último, refutador no existe y el calificador modal es de certeza dada la seguridad que les brinda la garantía, resultando así en un argumento incompleto [111101].



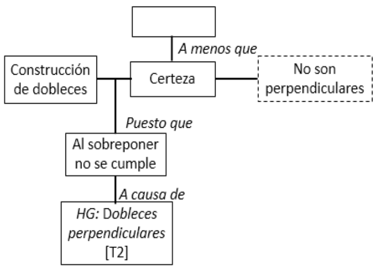
Esquema 21. Argumento de Mía sobre dobleces no perpendiculares

Consideramos que este argumento es de tipo analítico [A]. Por otro lado, evidenciamos que el doblado de papel medió en lo que Mía argumentó, por lo que aquí la suplementación es total [T]. Lo anteriormente mencionado nos permite catalogar el argumento como [DA111101, T2TL].

Por último, tenemos el argumento de Jana, quien se apoya en el hecho geométrico *dobleces perpendiculares* para sustentar su idea. Tras la participación de Alexa y Mía ella pasa al frente e interactúa con el profesor y expone sus ideas como sigue.

14075	P	A ver Jana, ¿Qué opina usted?
14076	Jana	No.
14077	P	¿Por qué no?
14078	Jana	(…) [Pasa al frente toma la construcción y sobrepone uno de los dobleces] este se puede sobreponer sobre sí misma [señala el doblez de color verde].
14079	P	Listo, la pregunta es si los dobleces son perpendiculares.
14080	Jana	[Mira la construcción por un momento]. Entonces no… [Habló en voz muy baja].
14081	P	Habla fuerte por favor [se retira un poco].
14082	Jana	[Mira la construcción] No, porque si se sobrepone esta sobre esta [un doblez sobre otro] no se cumple el hecho geométrico.

Las ideas de Jana permiten reconocer un argumento de orden deductivo [D]. A través de este se espera proveer sustento a que los dobleces construidos [14278, 14079] [dato] no son perpendiculares [14076] [aserción]. Para ello Jana se vale de manipular la construcción en papel [14078] [garantía] y sustentar su conclusión en un hecho geométrico ya conocido por la clase [14082] [respaldo], fruto de lo que observa al interactuar con el medio, otorgando una naturaleza de teórico a este elemento [T2]. No se evidencia algún refutador en este caso, mientras que el calificador modal es de certeza. Obtenemos un argumento incompleto [111101] que esquematizamos a continuación.



Esquema 22. Argumento de Jana, dobleces no perpendiculares

Jana propone una garantía que se apoya en un elemento conceptual de la clase como lo es el *HG dobleces perpendiculares*, además la relación lógica de los elementos es válida, esto traduce en un argumento analítico [A]. Apreciamos que nuevamente la suplementación del medio es total [T] ya que Jana manipuló el papel para sustentar su declaración. Obtenemos la siguiente categorización para el argumento [DA111101, T2TL].

En el anterior análisis se tuvo en cuenta algunos argumentos donde se aprecia el papel característico que jugó el medio en la toma de decisiones, comprobación de resultados y descubrimiento de propiedades. Se reconoce que los argumentos viven en el doblado de papel, tanto así que se evidencia razonamientos alrededor de ideas bastante impregnadas por del medio, como por ejemplo plegar un doblez sobre otro o plegar un doblez sobre sí mismo para corroborar ideas. En este orden, encontramos que el medio incidió de modo particular en aspectos procedimentales y otros de tipo conceptual.

NÚCLEO 4: DOBLECES NO PARALELOS

La segunda tarea del núcleo de paralelismo involucra dobleces no paralelos. Esta tarea es de profundización dado que recurre a definiciones de paralelismo y perpendicularidad, junto con algunos hechos geométricos recientes, los cuales se incorporarán dependiendo de las estrategias de solución de los estudiantes. El espacio del trabajo grupal se realizó en la misma sesión de clase de la tarea 17 y la socialización en la siguiente sesión. Presentamos el enunciado de la tarea.

Tarea 18: Construye un doblez. Construye ahora un doblez que NO sea paralelo al primero. ¿Cómo podrías asegurar que los dobleces no son paralelos?

Trabajo grupal

En este trabajo destacamos la confrontación de ideas de Max y Brock, ambas validas a la luz de las definiciones y conceptos del marco de la clase. Max inicialmente propone dobleces perpendiculares como respuesta a lo solicitado por la tarea (Imagen 125 a), Brock le replica y le presenta dobleces oblicuos que no se cruzaban en la hoja (Imagen 125 b). Ante lo declarado por su compañero Max responde con la construcción de dobleces oblicuos que se cruzaban en la hoja. Veamos la interacción entre estudiantes y profesor.

18001	Brock	[Lee el enunciado] ¿Cómo sería la respuesta?
18002	Max	Bueno, hagamos un doblez acá, el otro doblez… [Construye un doblez y lo sobrepone sobre sí, Imagen 125 a].
18003	Brock	¡No! Paralelo, no perpendicular. Yo diría que así [pliega los dobleces y le explica, Imagen 125 b] porque al prolongar la hoja se cruzan, y la definición de dobleces paralelos es que al prolongar la hoja los dobleces no se cruzan.
18004	P	[Observaba e interviene] ¿Y la tuya, la que ibas a hacer?
18005	Max	La que yo iba a hacer profe era igual a esta [Presenta una construcción distinta, Imagen 125 c]. Ya que al sobreponerlos [quiere decir plegar el doblez, Imagen 125 d] se puede dar cuenta uno que no coinciden.
18006	P	¿O sea, estos dos no son qué? [Señala de la Imagen 125 d, un doblez que no quedaba sobrepuesto].
18007	Max	Eh, perpendiculares ni paralelos.
18008	P	¿No son perpendiculares ni paralelos?
18009	Max	Sí señor.


(a) Propuesta 1 de Max


(b) Propuesta de Brock

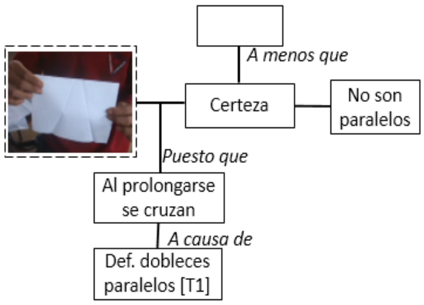

(c) propuesta 2 de Max


(d) Al plegar dobleces no coinciden

Imagen 27. Propuestas de Max y Brock, tarea 18.

Observamos que en el trabajo de Max y Brock emergen dos argumentos de tipo abductivo [A] en vista de que se proponen configuraciones [18003, 18005] [datos] que respondan a la solicitud de la tarea [18003, 18008, 18009] [aserción] por medio de una regla general. El primer argumento es de Brock, quien ofrece como datos la construcción de los dobleces oblicuos que se cruzarían fuera de la hoja [18003]. La garantía de Brock tiene un carácter visual que consistía en afirmar que los dobleces construidos se cruzarán [18003] y por tanto se podía afirmar que tales dobleces no eran paralelos, lo que corresponde a la aserción [18003].

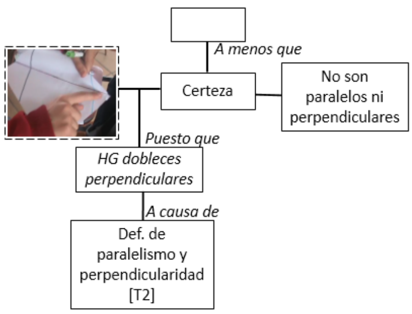
Brock respalda su garantía en la definición de dobleces paralelos, mencionada explícitamente en su discurso [18003], lo que traduce en un respaldo teórico [T1]. El refutador está ausente en el argumento de Brock y el calificador modal es de certeza dada la convicción del estudiante al replicarle a su compañero [18003]. Resulta un argumento incompleto [111101] representado a continuación.



Esquema 23. Argumento de Brock, se cruzan fuera del papel

El tipo de garantía del argumento se reconoce como empírica [E] ya que se basa en lo perceptual de la construcción al establecer que los dobleces se cruzarían a partir de sus prolongaciones. La suplementación del medio se distingue como parcial [P]. Obtenemos un argumento abductivo, empírico, incompleto, de suplementación parcial, en una tarea de profundización [AE111101, T1PL].

En el caso de Max, se aprecia como dato de su argumento la construcción de los dobleces que se cruzan en el papel [18005], configuración sobre la que establece que estos no son perpendiculares o paralelos [18007, 18009]. Max exhibe la garantía al plegar uno de los dobleces (imagen 184 c) y mostrar que el otro doblez, que se asumía como no paralelo, no quedaba sobrepuesto a sí mismo (Imagen 125 d), idea formalizada en el hecho geométrico *Dobleces perpendiculares*, que para entonces era recurrente en el trabajo con doblado de papel de los estudiantes [18005].



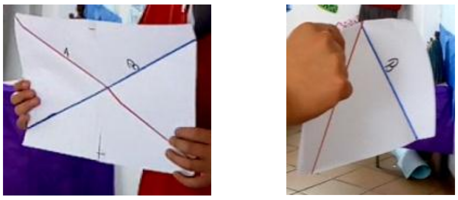
Esquema 24. Argumento de Max, no paralelos ni perpendiculares

El respaldo está presente cuando Max implícitamente recurre a las definiciones de perpendicularidad y paralelismo [18007, 18009] lo que sustentaba los resultados que había obtenido de la manipulación del papel, convirtiendo a este elemento en teórico [T2]. El refutador no se reporta, mientras que el calificador modal es de certeza dada la seguridad que muestra el estudiante en su discurso. Lo anterior resulta en un argumento incompleto [111101] que se representa en su esquema a continuación.

Max acude a una garantía teórica que conforma el conjunto de elementos conceptuales formalizados en clase, que guarda además una relación lógica con los demás elementos, esto permite reconocer un argumento analítico [A]. La suplementación del medio se aprecia como total [T] en vista de que Max la usa para sustentar lo que argumentó. Se obtiene un argumento de categoría [AA111101, T2TL].

Socialización

El trabajo de Marcelo y Ly consistió en hacer inicialmente un par de dobleces a y b que no se cruzaban en la hoja. Posteriormente, para no dar lugar a dudas de que no eran paralelos porque se cruzaban, los estudiantes decidieron hacer las respectivas prolongaciones de a y b en otra hoja que adicionaron a la primera con cinta pegante (Imagen 126). En la segunda hoja Marcelo y Ly representan el cruce de los dobleces (Imagen 126 b). Presentamos la interacción entre estos estudiantes a continuación.



(a) Dobleces a y b (b) Construcción de prolongaciones

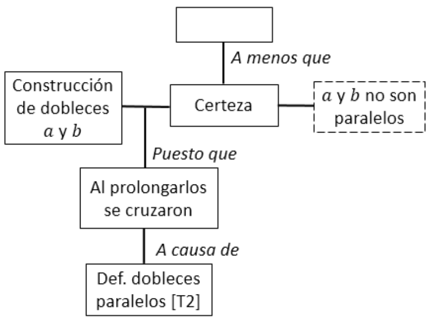
Imagen 28. Construcción de Marcelo y Ly, tarea 18

18010	P	Explícanos por favor.
18011	Ly	La tarea decía que hacer construcciones que no fueran paralelos, ¿sí? Primero construimos el rojo, el a [dobla por a]. Después el azul [b, Imagen 126 a] y pues llegó un punto en el que se unían, hicimos la prolongación y pues sí, ahí donde se unen [señala el punto donde se cruzaban a y b, Imagen 126 b], pues no son paralelos.
18012	P	Ustedes construyeron primero una sola hoja ¿Cierto? [Asienten y muestran la primera hoja de construcción. Toma la construcción de mano de Ly y dobla la hoja, [muestra a los demás la construcción] Ahí no se cruzaban ¿Sí? No se cruzaban [Imagen 126].
18013	Julio	Casi pero no.
18014	P	Entonces para librarse de dudas construyeron la otra y prolongándolos ¿Qué concluyen? Marcelo.
18015	Marcelo	Pues que no son paralelos. Porque, pues en un punto se cruzaron.
18016	P	¿Usted qué opina Rik? ¿Sí lo convence? [Rik asiente] ¿Por qué?
18017	Rik	Porque cuando se sobrepuso se cruzaron.
18018	P	Porque ¿Cuándo qué?
18019	Rik	[Balbucea…] ¡Coincide!
18020	Marcelo	¡Cual que coincide! Mire una acá y la otra acá.
18021	P	¿Qué coincide o a qué se refería? ¿Por qué lo convence esa construcción a usted?
18022	Rik	(…) No sé.
18023	P	No sabe. Mauro explícale ¿Puede?
18024	Mauro	Pues porque la definición de líneas [dobleces] paralelas es que al prolongarse no se cruzan. Y pues ahí se cruzan. Ya, no más con eso.
18025	P	¿Están de acuerdo?

18026	Marcelo	¡Sí!

En las intervenciones de los estudiantes se reconoce un argumento deductivo [D], cuyo dato corresponde a la construcción de los dobleces realizada en la hoja. La garantía se manifiesta en la evidencia que Ly provee para demostrar que efectivamente los dobleces se cruzaban en un punto [18011], la cual es visual [18015]. La aserción es pronunciada por Marcelo [18015] y consiste en asegurar que a y b no son paralelos. Esta aseveración, como ya dijimos, es fruto del trabajo previo con el doblado de papel, puesto que Marcelo la da como respuesta cuando el profesor le pregunta por lo que él podía concluir gracias a la construcción de las prolongaciones de los dobleces [18015].

Por otro lado, el respaldo se aprecia en la definición formal de dobleces paralelos que Mauro evocó [18024], que Marcelo acepta [18026] y que tipifica al elemento como teórico [T2]. La ausencia del refutador se hace evidente en el argumento de Marcelo y Ly, ya que no presentaron una situación que no permita sostener lo expuesto por ellos. El calificador modal es de certeza, en vista de que los estudiantes no evidenciaron duda o inconsistencias en el momento de sustentar sus ideas. Marcelo y Ly se expresan de modo seguro y sin vacilaciones. A continuación ilustramos los elementos del argumento incompleto [111101] en el esquema correspondiente.



Esquema 25. Argumento de Marcelo y Ly, dobleces no paralelos

La estructura lógica del argumento la catalogamos como analítica [A], en tanto que Marcelo y Ly se apoyaron en la definición de dobleces paralelos, elemento teórico disponible en clase, que a su vez relacionaron de modo acertado con la garantía y la conclusión. Por último, la suplementación es parcial [P], dado que en la producción de los estudiantes lo perceptual tiene lugar e incide en lo que finalmente declararon. Podemos decir que el argumento que emergió fue deductivo, analítico, incompleto, de suplementación parcial, en una tarea de profundización [DA111101, T2PL]. Surgieron otros argumentos: Pau y Mónica [DA111101, T2PL] y Jack y Julio [DA111101, T2PL], que ostentan la misma estructura y naturaleza, por tal motivo se tendrán en cuenta en la discusión.

Por su parte Alexa y Mía acuden al *HG Dobleces perpendiculares*[3] para sustentar que los dobleces construidos eran perpendiculares y por lo tanto respondían a lo solicitado por la tarea. En la sustentación participa solamente Alexa quien de manera implícita consideró este *HG*. Alexa parte del doblez p, de color negro y construye ahora al doblez v, de color rojo (Imagen 127). La estudiante explica su construcción partiendo de los dobleces p y v en su hoja. Alexa responde que para hacer el doblez de color rojo dobla dicho doblez sobre el de color negro, explicación que resulta confusa, porque se parte de que el doblez de color rojo no se había construido aún. Lo que Alexa da a entender es que sobrepuso al doblez negro sobre sí y generó al doblez rojo. La interacción acontecida al respecto es la siguiente.

18016	P	¿Cómo lo hicieron?
18017	Alexa	Hicimos primero la negra [doblez p] y de ahí sacamos la roja [doblez v, Imagen 127].
18018	P	¿Cómo sacaron al doblez de color rojo?
18019	Alexa	Doblando la roja encima de la negra [da por hecha la construcción. Plegaron a p sobre sí y se generó v, Imagen 127].
18020	P	[Se dirige a los demás estudiantes] Eso que generó ella ¿Qué son? Al doblar uno sobre sí mismo, ¿Qué da? A ver, Marcelo.
18021	Marcelo	¿Un doblez perpendicular?
18022	P	¿Está de acuerdo Jet?
18023	Jet	Sí.
18024	P	¿Por qué?
18025	Jet	Porque se cruzan.
18026	P	Mi pregunta era ¿Por qué son perpendiculares?
18027	Jet	Porque al sobreponerlos.
18028	P	Ah, porque al sobreponerlo. Listo, gracias.

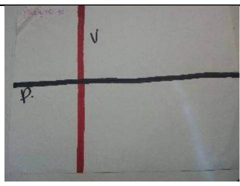
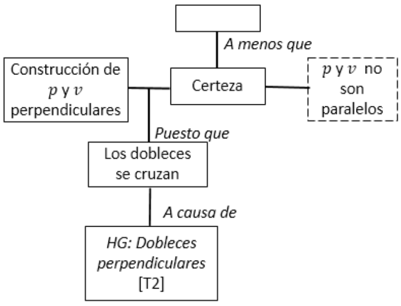


Imagen 29. Construcción Alexa y Mía, tarea 18

Las ideas de los estudiantes permiten reconocer un argumento deductivo [D]. En este caso el dato corresponde a los dobleces perpendiculares representados en la hoja de trabajo. La garantía es que los dobleces se cruzan [18025], lo que conecta la configuración de los dobleces con la aserción de que p y v no eran paralelos, lo cual se distingue entre líneas puesto que no es pronunciada por alguno de los estudiantes expositores, pero sí por Marcelo [18021] y Jet [18027].

[3] HG Dobleces Perpendiculares: Al sobreponer un doblez sobre sí mismo se forma otro doblez perpendicular al primero



Esquema 26. Argumento de Alexa, son perpendiculares, no son paralelos.

Por otro lado, el respaldo del argumento de Alexa lo percibimos de manera no explícita en el *HG dobleces perpendiculares* puesto que la estudiante en el momento de la construcción de p y v evidencia el uso de este elemento teórico reconocido en clase [18026 y 18028], que nos permite señalarlo de naturaleza teórica [T2]. La acción de sobreponer el doblez de color negro sobre sí tiene su razón de ser en el enunciado de este hecho geométrico, brindándole así sustento al trabajo que Alexa realizó con doblado de papel. Con respecto al refutador, decimos que no tiene lugar en lo declarado por los estudiantes. Por último, el calificador modal lo reconocemos como de certeza. Ahora veamos la representación esquemática de los elementos de un argumento incompleto [111101].

El argumento es de tipo analítico [A] en vista de que la garantía se apoya en un hecho geométrico que guarda relación con el dato y la aserción y ha sido reconocido en clase. Para terminar, acerca del medio afirmamos que ostenta suplementación total única [U], considerando que Alexa no implementa otro medio distinto al doblado de papel ni se vale de las condiciones físicas del medio sino de sobreponer dobleces para soportar sus ideas. Es por esto que el argumento se cataloga como deductivo, analítico, incompleto, de suplementación total única, en el marco de una tarea de profundización [DA111101, T2UL]. Por último, el argumento de Jana se categoriza del mismo modo que el anterior de Alexa y Mía, por tanto se tendrá en cuenta para el análisis posterior de resultados [DA111101, T2UL].

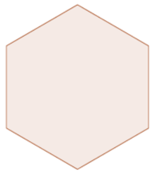
Debemos mencionar que el medio dejó ver modos particulares de proveer sustento a la hora de argumentar. Cuando se explicaron las razones de no paralelismo entre los dobleces en algunos de los casos ya analizados, se observa que los estudiantes respaldan sus explicaciones con modos que involucran el doblado de papel, ejemplo de ello son las construcciones y el sustento para argumentar con el doblado de papel de Brock y Max [18003, 18005] y de Alexa y Jet [18019, 18027]. Lo anterior deja ver una estrecha relación entre las ideas elaboradas por los estudiantes y como el medio las favorece.

TAREA FINAL

Esta clase inicia con la intervención del profesor, quien les solicita a los estudiantes leer la definición de hexágono regular que aparece en la hoja de problemas. Esta definición está acompañada de una representación gráfica y cuatro preguntas que anteceden a la tarea final. La definición de hexágono regular se les proporcionó a los estudiantes con el propósito de que ellos recordaran y tuvieran presentes las propiedades de esta figura geométrica provistas en su definición, para que posteriormente estas pudieran ser involucradas en la construcción de un hexágono regular, momento en el que se esperaría el establecimiento de una conexión entre estas ideas y los elementos formalizados en clase.

Reconociendo que tal vez algunas propiedades del hexágono regular asociadas a congruencias, perpendicularidad y paralelismo no fueran conocidas por los estudiantes, se propusieron cuatro preguntas que permitieran evidenciar algunas de estas y guardasen relación con los cuatro núcleos abordados. La tarea presentada se puede observar a continuación:

Situación previa a la tarea

<table>
<tr><td colspan="2">NOTA: recuerda que un hexágono regular es un polígono convexo de seis lados de igual medida y sus ángulos internos son congruentes.</td></tr>
<tr><td></td><td>Discute con tu compañero las siguientes preguntas:
¿Se podrían identificar segmentos de dobleces paralelos? ¿Cuáles? Señalalos.
¿Se podrían identificar segmentos de dobleces perpendiculares? ¿Cuáles? Señalalos.
¿Se podrían identificar segmentos de dobleces no paralelos, ni perpendiculares? ¿Cuáles? Señalalos.
¿Identificas ángulos congruentes? ¿Cuáles? Señalalos.</td></tr>
</table>

Max y Brock realizan una lectura del enunciado. Como primera medida nombraron cada uno de los puntos de los vértices del hexágono (Imagen 30), posteriormente evocaron la definición de dobleces paralelos para comenzar a responder las preguntas proporcionadas. Max y Brock reconocen los lados opuestos del hexágono como segmentos de dobleces paralelos, ellos reconocen que al prologar los dobleces de cada par de segmentos opuestos no se van a cruzar. En cuanto a la pregunta sobre segmentos de dobleces perpendiculares los estudiantes consignan en la hoja de respuestas que no existen parejas de segmentos que satisfagan esto, mencionando que a pesar de que algunos segmentos se cruzan, estos no formaban ángulos de 90° grados, afirmación que establecen apoyados en el aspecto visual. Al continuar con la tercera pregunta que indagaba sobre la existencia de segmentos de dobleces no paralelos ni perpendiculares, Max y Brock tuvieron en cuenta las respuestas consignadas anteriormente, por lo tanto, aseguraron que no se apreciaba en la Imagen tales tipos de dobleces. Al respecto señalamos que los estudiantes obviaron los dobleces que determinaban los ángulos del hexágono.

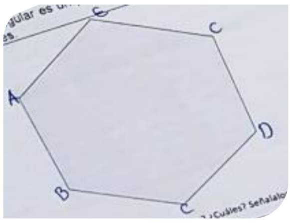


Imagen 30. Hexágono etiquetado por Brock y Max

Finalmente, los estudiantes abordan la pregunta de ángulos congruentes. En ese momento Brock evoca dicha definición. Max le dice a su compañero que si los lados del hexágono son de la misma medida entonces los ángulos también lo son entre sí, Brock admite la idea y de ese modo relacionan las medidas congruentes de los lados de la figura con el hecho de que los ángulos fueran congruentes.

Esta tarea no fue socializada en grupo debido a que profundizamos con detalle en la manera de proceder de cada pareja de trabajo, exigiendo que justificaran su construcción para así evidenciar los elementos que pusieron en juego del sistema axiomático formalizado en la clase, dada la naturaleza de esta con diferentes caminos para abordarla. Aunque reconocemos que hubiera sido interesante realizar la puesta en común, dado que el grupo de Brock y Max no mencionó algunos dobleces paralelos o perpendiculares, que aunque no aparecen en la Imagen brindada, podrían construirse y con ello aportar más herramientas para replicar la construcción solicitada en la tarea final que se presenta a continuación:

Tarea

Inicialmente el profesor solicita a una estudiante leer el enunciado de la tarea y enfatiza en que la construcción del hexágono debía cumplir con su definición por completo. En la situación presentada se provee a los estudiantes de uno de los lados del hexágono y un tercer vértice de este, elementos que deben ser tomados como base para la construcción.

Tarea final.
A partir de lo discutido anteriormente construye un hexágono regular por medio de dobleces, señalando puntos en la hoja de papel. La construcción debe incluir el segmento y el punto de la hoja.

Contesta:
1. *¿Qué puedes decir de los ángulos y los lados del hexágono?*
2. *¿Cómo puedes verificar que es un polígono regular?*
3. *Enumera y describe brevemente los pasos que consideres necesarios para realizar la construcción.*

Brock y Max se disponen a resolver la tarea como sigue. Fragmentamos la interacción entre estos estudiantes teniendo en cuenta momentos principales en este proceso.

1	Max	[Nombra los puntos del segmento dado con las letras A y S] Haríamos primero un doblez que pase por S y P. Para terminarlo [el hexágono] tenemos que ubicar los puntos que estén de la misma medida y todo. Toca unir este punto con este [sobreponer al punto A en S].
2	Brock	¿Para qué así? Al revés ¿No?
3	Max	[Sobrepone al punto A en S] Bueno, al caso [al llevar al punto A sobre S se generó un doblez perpendicular al doblez que contiene $\overline{SA}$, Imagen 31 a] ¿A contraluz se puede notar el punto?
4	Brock	Muestre [toma la hoja de manos de Max y la pone a contraluz].
5	Max	¿Se puede notar el punto [P]? Ahí se puede marcar.
6	Brock	Ahí lo repisamos.
7	Max	[Toma la hoja de manos de Brock, calca el punto P y lo nombra N] Aparentemente la misma medida, pongámosle N. Ahí lo que haríamos es unir A con N con un doblez. Tenemos que hacer lo mismo para sacar A y S [se refiere a realizar el doblez NP y a contraluz obtener las imágenes de A y S]. Entonces aquí lo que haríamos sería...

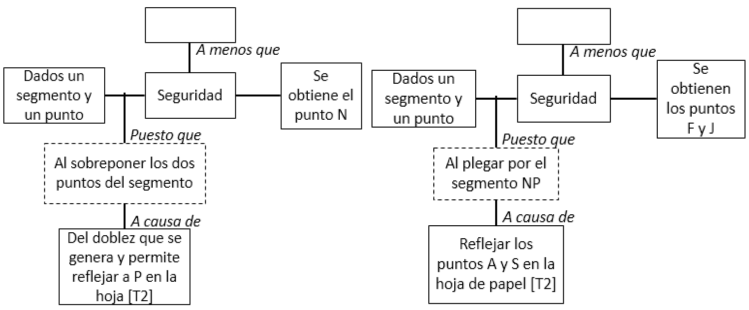
8	Brock	Un doblez que pase por la mitad.
9	Max	Por la mitad, o sea, por P y N [construye el doblez PN, Imagen 31 b].
10	Brock	Ahí.
11	Max	Ponemos a contraluz para poder sacar los puntos restantes [calca los puntos A y S y obtiene a J y F, Imagen 31 c]. (…) Los nombramos.
12	Brock	Póngales J y F.

(a) Doblez generado al llevar a ***S*** sobre ***A*** (b) Doblez que contiene a ***P*** y ***N*** (c) Puntos ***J*** y ***F*** obtenidoa a contraluz

Imagen 31. Construcciones trabajo final Max y Brock

Es posible notar un argumento de tipo inductivo [I] en la forma de proceder de los estudiantes para determinar los vértices restantes del hexágono. Brock y Max parten de lo dado por la tarea es decir del segmento y el punto [datos] y a través de poner la hoja a contra luz [3, 7, 11] [garantía] hallan los vértices del hexágono [7, 12] [aserción], empleando implícitamente ejes de simetría que aunque ellos no refieren con este nombre saben que plegar por determinados dobleces les generara otro puntos y vértices a igual distancia del doblez que calcan y el que emplearon para reflejar la imagen [5, 6, 9] [respaldo], tal acción con el papel corresponde a un respaldo teórico apoyado en el medio [T2].

En esta interacción no se reconoce refutador en el argumento dado que Brock y Max acogen la idea de obtener los vértices tras luz y no mencionan otra manera de hacerlo. Por esta misma razón, se evidencia credibilidad en su forma de proceder, lo que demuestra seguridad [calificador modal] en la obtención de los puntos. Así este argumento es incompleto [111101] como se puede a preciar en seguida. Argumento que consta de dos partes que presentamos en diagramas distintos:



Esquema 27. Brock y Max obtienen los vértices del hexágono por medio de ejes de simetría.

Este argumento es de tipo empírico [E] debido a que los estudiantes se apoyaron en la visualización de los puntos en la hoja para reflejarlos por ejes de simetría, tras luz. Con un uso del medio total [T] debido a que no solamente se apoyaron en la hoja de papel para generar los puntos del hexágono, sino que también acudieron a una manera ingeniosa y propia de las características del uso de este medio como el hecho de duplicar la información dada a través de la trasparencia que se obtiene al observar la hoja plegada a través del reflejo de la luz. Luego, el argumento es inductivo, empírico, incompleto, de suplementación total perteneciente a una tarea de profundización [IE111101, T2TL]. Brock y Max continúan su proceso de construcción del hexágono como sigue:

13	Max	J y F [los nombra así]. Y hacemos tres dobleces para completar este, para (…) completar el hexágono, [construye los dobleces NF, FJ y JP] por FN, JF y por PJ. Ya, podemos contestar las preguntas [Imagen 32]. [Toma la hoja para escribir las respuestas y lee] ¿Qué puedes decir de los ángulos y los lados del hexágono?
14	Brock	Que son congruentes entre sí.
15	Max	Que todos son congruentes entre sí. ¿Y por qué? Porque tiene la misma medida.

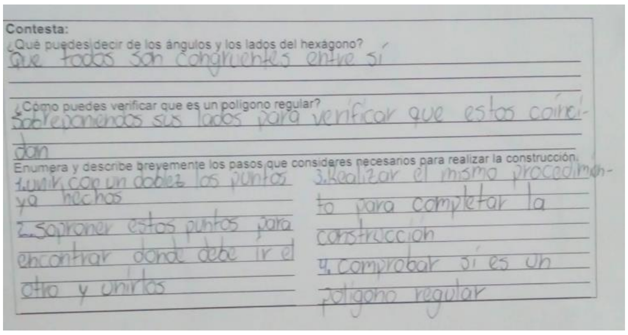
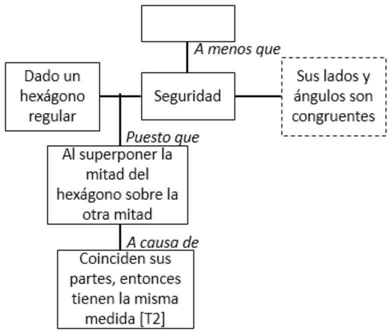


Imagen 32. Respuestas de Brock y Max, tarea final.



Esquema 28. Brock y Max los lados y ángulos del hexágono son congruentes.

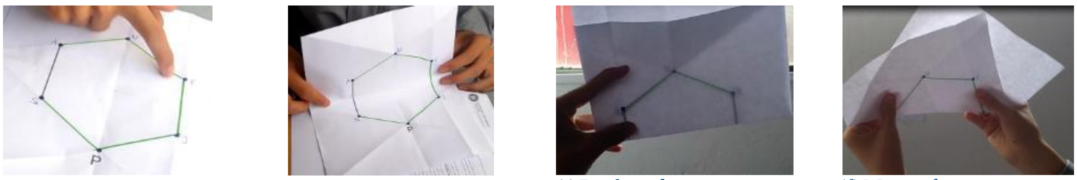
En la intervención de Max es posible reconocer un argumento de tipo deductivo [D] al responder a la primera pregunta de la tarea en tanto que él parte del hexágono construido [datos], para asegurar a través de la superposición de una mitad del hexágono en la otra mitad [13] [garantía] que los lados y ángulos de este tienen la misma medida [14, 15] [aserción]. Max al reconocer que al sobreponerse los lados y ángulos deben coincidir, empleando implícitamente la definición de congruencia de segmentos y de ángulos evidencia el respaldo, que es teórico [T2] al elemento.

En el argumento no se reporta refutador. A partir de la manera como Brock y Max asumen la respuesta a la pregunta se puede decir que están seguros [calificativo modal] de su afirmación pues responden de manera inmediata, comparten su respuesta y la justifican. Por tanto, el argumento es incompleto.

Este argumento es empírico [E] porque los estudiantes hacen coincidir la mitad del hexágono con la otra mitad que prueban que los lados y ángulos son congruentes. Hay suplementación del medio total [T] que se apoya en el reflejo de la luz en el papel plegado para determinar si los lados y ángulos coinciden. Argumento perteneciente a una tarea de profundización [L]. Este argumento es deductivo, empírico, incompleto, con una suplementación total del medio, de una tarea de profundización [DE111101, T2TL]. Brock y Max continúan abordando las preguntas de la tarea y se presenta el siguiente diálogo:

16	Brock	¿Cómo puedes verificar que es un polígono regular? Un polígono regular es que todos tienen la misma medida, entonces pues… tocaría sobreponerlos y si coinciden sería un polígono regular.

		Hacemos un doblez así [se refiere sobreponer los puntos A sobre S y F sobre J respectivamente, Imagen 33 a] y tendría que coincidir este segmento [señala al $\overline{AN}$] y este segmento [señala al $\overline{FN}$] con este segmento [señala al $\overline{PJ}$] y este segmento [señala al $\overline{SP}$. Realiza el doblez, Imagen 33 b]. Ahí se puede dar cuenta que sí coincide [verifica congruencia a contraluz, Imagen 33 c]. Luego esto acá así [alterna el modo de plegar para verificar los otros segmentos: $\overline{SP}$ con $\overline{PJ}$, $\overline{FN}$ con $\overline{AN}$], que tendría que coincidir.
17	Max	Entonces [toma la hoja de manos de Brock] sería doblarlo así [dobla y pone a contraluz, repite lo hecho por su compañero], ya estarían los ángulos congruentes y los lados también. Para poder sacar si estos también son congruentes, $\overline{SP}$ y $\overline{NF}$, entonces sería…
18	Brock	Una diagonal.
19	Max	Trazar un doblez diagonal que pase por A y por J y al ponerlo a contraluz [pone a contraluz, Imagen 33 d].
20	Brock	¡Coincidan!
21	Max	Coincida.
22	Brock	¿Y entonces?
23	Max	Ya descubrimos que $\overline{PS}$ y $\overline{NF}$ son congruentes, ahora haríamos el mismo procedimiento con $\overline{AN}$ y $\overline{PJ}$. Tendríamos que pasar un doblez diagonal que pase por S y F [dobla el papel por S y F, pliega y comprueba a contraluz que eran congruentes]. Bueno ahí da congruente, entonces ya se puede afirmar que es polígono regular.
24	Brock	[Lee la pregunta y responde] entonces ¿Cómo puedes verificar que es un polígono regular? Sobreponiendo todos sus lados o todos sus…
25	Max	Sobreponiendo.
26	Brock	¿Sus segmentos?
27	Max	(…) Yo diría que trazando dobleces de punto a punto [diagonales] para verificar si los, si los, si los demás lados son congruentes.
28	Brock	Pues no [duda de lo dicho por Max e intenta replicarle], porque vea, o ¿Sí?
29	Max	¡Sí! Sería, o bueno, sobreponiéndolos para ver si coinciden y tienen la misma medida.
30	Brock	Sobreponiéndolos [escribe la respuesta que le dicta Max], ¿Sobreponiendo qué? ¿Sus lados?
31	Max	Sus lados, para verificar.
32	Brock	Que estos coinciden.



(a) Brock señala segmentos a sobreponer

(b) Brock construye doblez

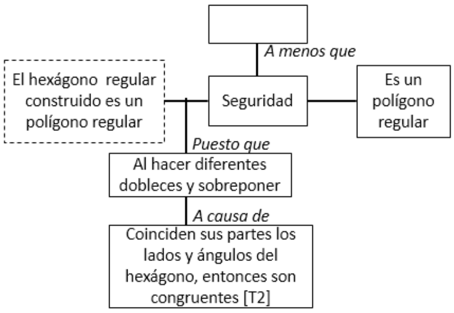
(c) Brock verifiaca conngruencia por medio de contraluz

(d) Max verifica congruencia por medio de contraluz

Imagen 33. Brock y Max comprueban que el hexágono es regular.

En las anteriores líneas de interacción reconocemos que los elementos de argumento que emergieron ostentan un carácter abductivo [A], debido a que Brock y Max cuentan inicialmente con la regla general que es la definición de hexágono regular, además saben que la tarea les solicita obtener por medio de dobleces un hexágono regular. Los estudiantes elaboran un polígono que cumple con la definición, pero ahora deben devolverse en el proceso realizado para probar que el polígono obtenido es regular.

Brock y Max parten del hexágono construido [datos] para mostrar a través de la superposición de lados y ángulos de este [16, 17, 27] [garantía] que su elaboración en efecto es un polígono regular [aserción]. Afirmación apoyada en el hecho que, al sobreponer las partes del hexágono, coincide lo que da evidencia del uso de segmentos y ángulos congruentes [24, 25] [respaldo], lo que traduce en un respaldo teórico avalado por el doblado de papel [T2]. El refutador es un elemento ausente, en tanto que Brock y Max no refieren en su discurso posibles condiciones de la elaboración de dobleces o marcación de puntos del polígono solicitado para hacer de este uno no regular. En otras palabras, los estudiantes no contemplaron posibles excepciones en lo que construyeron para decir que su hexágono no satisfacía las condiciones solicitadas en la tarea. Finalmente, el calificador modal demuestra de certeza dado que tanto Brock como Max evidencian seguridad cuando sustentan las razones de lo que hacen [16, 17, 18, 19 y 20]. El argumento es incompleto [111101] veamos la representación de los elementos descritos:



Esquema 29. Argumento de Brock y Max, el hexágono es regular

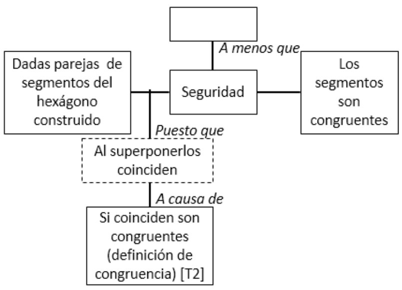
Este argumento es analítico [A] porque los estudiantes deben tener en mente la definición de hexágono regular para asegurar que el polígono realizado cumple con lo solicitado por tanto acuden a probar congruencias a través de superposiciones. Aunque los estudiantes en ningún momento refieren a la definición de hexágono, la tienen presente en su proceso de comprobación. Brock y Max idearon plegar el papel por mediatrices y diagonales de este, para comparar longitudes de segmentos y por ende la congruencia de estos, dándole presencia en varios momentos a los elementos conceptuales de la definición. Por esto mismo, la suplementación del medio fue total [T] además que ellos recurren al doblado de papel y toman en cuenta propiedades de la naturaleza de este como la traslucidez para verificar su construcción que sus lados y ángulos coinciden. Dado lo anteriormente descrito, catalogamos el argumento como abductivo, analítico, incompleto, de suplementación total, en el marco de una tarea de profundización [AA111101, T2TL].

Enseguida el profesor se acerca al grupo y solicita a Brock y Max que expliquen la construcción propuesta. En ese momento el profesor preguntó por la relación entre los elementos teóricos adoptados en clase y la ruta de solución propuesta por ellos.

33	P	¿Este hexágono es regular?
34	Max	Sí [Brock asiente].
35	P	¿Por qué puedo decir que es regular?
36	Max	Porque [lo interrumpe Brock].
37	Brock	Porque al sobreponer sus lados, sus dobleces, todos coinciden y sus ángulos también.

38	P	A ver, ¿Cómo puedo demostrar yo que este $\overline{AS}$ [señala el segmento en la hoja, Imagen 34] es congruente con los otros?	 *Imagen 34. Profesor pregunta por la congruencia de $\overline{AS}$ respecto a los demás.*
39	Max	Pues tendría que ser congruente con $\overline{FJ}$, entonces nosotros lo que hicimos fue hacer un doblez que pase por N y P la cual es la mitad y al sobreponerlos [realiza lo que dice] y ponerlos contraluz se puede notar que coinciden.	
40	P	¿Pero solamente con $\overline{FJ}$ debe ser congruente? O con los demás ¿Qué relación debe tener?	
41	Brock	Se supone que si es un polígono regular todos sus lados tienen la misma medida.	
42	P	¿Entonces yo puedo también verificar si es congruente con $\overline{JP}$?	
43	Brock	Entonces sería este con este [refiere a los lados opuestos en el polígono, Imagen 33 a].	
44	P	¿Cómo lo haría?	
45	Brock	Los sobreponemos así [dobla y lleva el $\overline{AS}$ sobre $\overline{FJ}$, manteniéndolos sobrepuestos, dobla y los sobrepone a $\overline{JP}$].	
46	P	¿De esa misma manera puede hacer con los otros?	
47	Max	Sí.	

En el dialogo de los estudiantes con el profesor notamos un argumento de tipo inductivo [I] puesto que Brock y Max concluyen la regla general que todos los lados del hexágono son congruentes [aserción] a través de probar inicialmente superponiendo dos segmentos de dobleces paralelos [garantía], que luego a solicitud del profesor complementan mostrando que también coinciden los lados no consecutivos del hexágono. Determinando que pueden proceder de la misma manera para cualquier pareja de segmentos y con esto obtener la congruencia de todos los segmentos.



Esquema 30. Los lados de un hexágono regular son congruentes.

El dato en este argumento son las parejas de segmentos del hexágono. Brock y Max no aportan otra manera de verificar que los segmentos son congruentes, pero reconocen que, si al sobreponer un objeto geométrico en otro de la misma naturaleza coinciden, entonces son congruentes, lo que da evidencia del uso implícito del de la definición de segmentos congruentes [respaldo]. En vista de que se involucra implícitamente la definición de paralelismo se atribuye un carácter teórico al respaldo [T2]. En este caso no se aprecia refutador y el calificador modal es de seguridad cuando le demuestran y sostienen al profesor que los segmentos que él señala también son congruentes [45 y 47]. El argumento es incompleto [111101].

Este argumento es empírico [E] debido a que se sustenta en la superposición de segmentos que se verifica de manera visual al comprobar los resultados obtenidos tras luz. Es de suplementación total [T] dado que la garantía se sustenta en el doblado de papel. Inmerso en una tarea de profundización [L]. Este argumento es inductivo, empírico, incompleto, de suplementación total en una tarea de profundización [IE111101, T2TL]. El profesor continúa realizando preguntas frente a la construcción de Brock y Max y se presenta el siguiente dialogo:

48	P	Ahora mi pregunta es ¿Cómo inició la construcción del hexágono?
49	Max	Pues la construcción…
50	Brock	¡Yo la hago! [Toma una hoja limpia e inicia de nuevo la construcción, nombran los puntos del hexágono de otro modo al que ya habían hecho].
51	Max	Nosotros empezamos primero nombrando los puntos e hicimos un doblez que pase por B y P. [Toma la hoja de manos de Brock] y después lo que hicimos fue coger y tratar de sobreponer el punto B con el punto A [dobla la hoja para llevar al punto B sobre A, Imagen 35 a].

(a) Punto ***B*** sobre ***A*** (b) Obtención del punto ***S*** (c) Hexágono obtenido

Imagen 35. Proceso de construcción de Max.

52	P	¿Se valieron de la contraluz?
53	Max	Sí señor. (…) Después de eso, lo que hicimos fue coger el punto P y en este mismo doblez y a contraluz también, mirar y ahí se puede ver el punto P [llevar a B sobre A tenía como fin calcar a P y generar a S, Imagen 35 b] y pues nombrarlo, pongámosle S. Después unimos los puntos que estaban desunidos [construye un doblez por los puntos A y S]. Aquí lo que hicimos fue el mismo procedimiento para sacar este lado del de acá [refiere a la mitad que faltaba construir del hexágono], un doblez que pase por P y S, y al ponerlo a contraluz ahí se puede observar el punto A y el punto B [pone a contraluz y al calcar los puntos A y B, obtiene a los puntos D y E]. Y como todos los anteriores, cerramos el hexágono [realiza dobleces por los puntos para formar el hexágono y repisa con un color, Imagen 35 c].
54	P	Vale. ¿Cómo podría verificar que los ángulos son congruentes? Para poder decir que ese hexágono es regular.
55	Brock	Vemos que este a contraluz, coincide.
56	P	Coloquemos números a los ángulos por favor.
57	Brock	[Coloca números] uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis, Imagen 36.

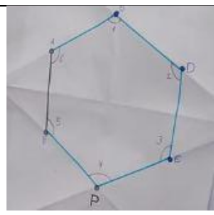


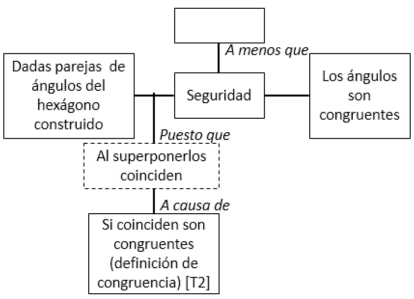
Imagen 36. Ángulos enumerados

58	P	Listo. ¿Cómo puedo demostrar con doblado de papel la congruencia de esos ángulos para decir que ese hexágono es regular?

59	Max	Pues sería lo mismo que hicimos con este [toma la hoja de manos de Brock].
60	Brock	Coincidirlos, o sea, para [hacer] coincidir este [ángulo 6] con este [ángulo 3] tendríamos que hacer un doblez diagonal.
61	Max	Pues ya no tendríamos que hacer otro doblez porque podemos usar el mismo de referencia que hicimos [se refieren al doblez hecho al llevar a A sobre B, Imagen 35 a].
62	P	Y ahí se ve ¿Qué? [Max pone a contraluz luego de haber plegado. De esa manera muestra la congruencia de los ángulos 5 y 6; 3y 2; 4y 1 respectivamente]. ¿Y así yo puedo comprobar que los ángulos 5 y 3 son congruentes?
63	Brock	Así sin la diagonal.
64	Max	Así [pliega la hoja por el doblez de los puntos P y S, Imagen 36, sobreponiendo al ángulo 5 sobre el ángulo 3, luego pone a contraluz], y ahí se podría ver que el 5 y el 3.
65	P	¿Con todos puedo hacer lo mismo?
66	Max	Sí señor.

En este argumento también se reconoce una estructura de tipo inductiva [I], de manera similar al argumento anterior en la que se probó la congruencia de segmentos, pues aquí ahora los estudiantes parten de tomar diferentes parejas de ángulos del hexágono [datos] y sobreponerlos para determinar que coinciden, tras luz [garantía]. A partir de lo que encuentran la regla general "los ángulos de un hexágono regular son congruentes" [aserción]. El respaldo se hace evidente en el momento que Max señala [59] que deben hacer lo mismo que hicieron para probar la congruencia de segmentos con la primera construcción y Brock añade que se "deben hacer coincidir" con lo que demuestran el uso implícito de la definición de ángulos congruentes, correspondiendo a un respaldo teórico [T2]. No se reporta refutador.

En este argumento es preciso notar acciones determinísticas en los estudiantes, especialmente en Brock cuando al preguntárseles frente a la manera como construyeron el hexágono, no acude a la construcción realizada, sino que hace una nueva construcción que va justificando al profesor, ninguno de los dos demuestra duda y complementan sus opiniones que concuerdan con las apreciaciones y afirmaciones realizadas en los diálogos antes de la intervención del profesor. Así el calificador modal es de seguridad. Por tanto, se tiene un argumento incompleto como se ve a continuación:



Esquema 31. Los ángulos de un hexágono regular son congruentes.

El argumento es empírico [E] debido a que se sustenta en la superposición de ángulos que se verifica de manera visual al comprobar los resultados obtenidos tras luz. Es de suplementación total [T] porque está soportado en el doblado de papel, inmerso en una tarea de profundización [IE111101, T2TL]. El profesor realiza otras preguntas a la pareja de trabajo en la que presenta el siguiente dialogo:

67	P	Otras preguntas ¿ahí hay dobleces que contienen segmentos paralelos?
68	Max	¿Cómo así? Que comprobara que SA y EP ¿Son paralelos?
69	P	Sí, por ejemplo ¿Qué dobleces hay paralelos ahí que contengan segmentos paralelos?
70	Brock	Este [señala al $\overline{DE}$] y este [señala al $\overline{AB}$].
71	P	¿Cómo podría demostrar que los que usted señaló son paralelos?
72	Brock	Pues ya tenemos acá el doblez del segmento [se refiere al doblez del $\overline{AB}$, pliega la hoja por tal doblez] y este [se refiere al doblez del $\overline{DE}$, pliega la hoja por tal doblez también], entonces para comprobar que son paralelos sobreponemos estos [sobrepone cada doblez sobre sí mismo de manera simultánea].
73	Max	Ah vea [toma la hoja de manos de Brock y termina de realizar el doblado].
74	Brock	Eso por el hecho geométrico [no aclara el hecho geométrico al que está acudiendo].
75	P	Describa lo que está haciendo [le dice a Max].
76	Brock	Sobreponemos estos dos dobleces que decimos que son paralelos [en tanto Max manipula la hoja] y tienen que formar un doblez perpendicular a ellos dos para comprobar si son paralelos [se refiere al *HG 6: paralelas perpendicular: Si tengo 2 dobleces paralelos, al sobreponerlos sobre sí mismos, se genera un doblez perpendicular*]. O sea, si coinciden [se refiere a que se pueden sobreponer sobre sí mismo cada doblez y generar un solo doblez perpendicular a ambos].
77	P	¿Bueno y qué pasa?
78	Brock	Se formó este doblez que es un doblez perpendicular a estos dos dobleces [perpendicular a los dobleces de los $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ respectivamente, Imagen 37].

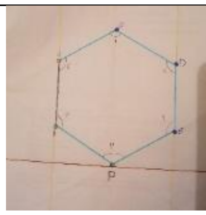
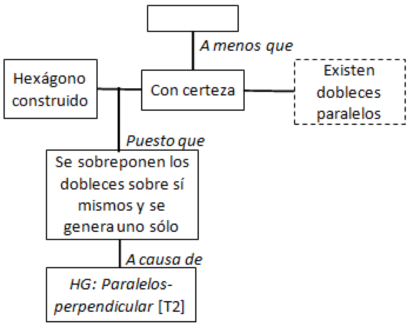


Imagen 37. Segmentos de dobleces paralelos con HG 6

Por último, apreciamos un argumento que involucra el paralelismo de los dobleces que contenían segmentos del hexágono regular. Al analizar la forma en que se relacionan los elementos de dicho argumento encontramos que es de tipo deductivo [D], puesto que Brock y Max cuentan con un dato que toman como punto de partida y por medio de una regla general como el hecho geométrico seis arriban a una conclusión. El dato del argumento se distingue en la construcción del hexágono regular de Brock y Max dado que la pregunta del profesor fue precisamente alrededor de tal objeto geométrico [67 y 69]. Los estudiantes en ese momento de la pregunta ven la necesidad de demostrar que efectivamente existían dobleces paralelos (Imagen 37) [68], tal situación descrita es el punto de partida para elaborar el argumento. La garantía por su parte se reconoce en el trabajo inicial de Brock de retomar los dobleces que contenían a los $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ respectivamente [70], y tratar de sobreponer cada doblez sobre sí para verificar que se formaría un solo doblez perpendicular a los primeros [72], el trabajo fue completado por Max [73], sustentado por Brock [75 y 76] y constituye el puente entre el dato y la conclusión. Esta constó en declarar que los dobleces que contenían a los $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ eran paralelos, tal afirmación les permitió llegar el trabajo de sobreponer los dobleces y obtener a su vez un único doblez [76]. En este orden de ideas el respaldo es de naturaleza teórica [T2] y se evidencia en el hecho geométrico *paralelos-perpendicular* [74] evocado por Brock e implementado por él mismo. El refutador está ausente en el discurso de Brock y Max dado que no refieren casos o construyen con el doblado de papel situaciones o ejemplos que desvirtúen lo que ellos habían ya aducido sobre la presencia de dobleces paralelos en el hexágono. El calificador modal es de certidumbre, no se reconoce en la interacción de los estudiantes duda o inconsistencia en lo que afirmaron. Presentamos el esquema del argumento [111101].



Esquema 32. Argumento de Brock y Max sobre dobleces paralelos

La garantía del argumento se fundamenta en un respaldo que hace parte del marco conceptual formalizado en clase, además existe una conexión lógica entre el dato, la garantía y la aserción, luego es analítico [A]. La suplementación del medio fue total única [U] porque Brock recurrió al doblado de papel de manera exclusiva, es decir, no se valió de propiedades físicas de la hoja sino de sobreponer dobleces y plegar. Así el argumento es deductivo, analítico, incompleto, de suplementación total única, en una tarea de profundización [DA111101, T2UL].

En esta tarea los estudiantes acudieron a calcar puntos por medio del reflejo de la luz en los pliegues de la hoja para construir el hexágono regular, situación que denota una manera auténtica de proceder que no necesariamente se presenta al trabajar con otras herramientas, sino que es una característica única de la manipulación y trabajo con papel. Así el medio toma forma en el conocimiento que se construye. Las afirmaciones y maneras de proceder para presentar los argumentos se expresan de modo físico y verbal recurriendo al uso de propiedades del doblado de papel, que dejan ver un saber permeado por la implementación de tal recurso involucrado para el aprendizaje, permitiendo caracterizar los objetos geométricos de estudio de maneras distintas a la geometría euclideana. Reconocemos entonces la incidencia del medio en el aprendizaje logrado por los estudiantes cuando estos exhiben sus argumentos.

DISCUSIÓN

En este capítulo interpretamos el análisis presentado anteriormente, atendiendo al objetivo de estudio de este documento. La discusión que se presenta a continuación versa sobre cuatro aspectos, a saber: i) secuencia de tareas y presencia de argumentos; ii) suplementación del medio y su relación con las tareas, momento de la clase y tipo de argumento; iii) la argumentación y la interacción social; y iv) la incidencia del medio en las producciones de los estudiantes. A través de la consideración de estos aspectos queremos caracterizar la naturaleza de los argumentos mediados por el doblado de papel.

SECUENCIA DE TAREAS

¿Se promovieron argumentos?

En este primer análisis queremos observar la presencia de argumentos a lo largo de la implementación de la secuencia para cada momento de la clase (trabajo grupal y socialización). Al realizar este ejercicio se reconoce la emergencia de argumentos por parte de los estudiantes.

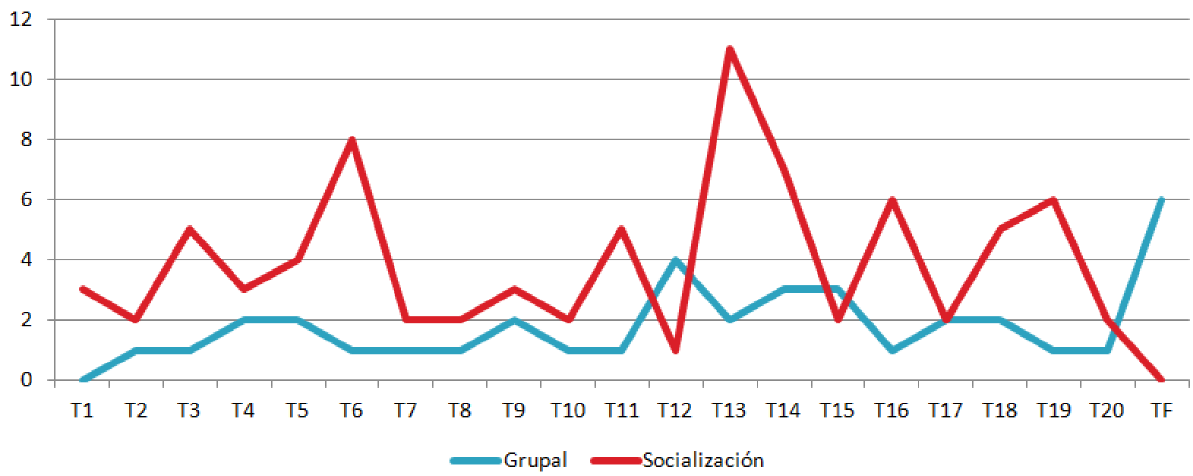


Diagrama 4. Argumentos promovidos por las tareas.

Lo presentado en el Diagrama 4 permite asegurar que la presencia de argumentos es permanente en el trabajo grupal y en la socialización, con una única excepción en la primera tarea, donde no se evidencia argumento durante el trabajo grupal dada su naturaleza instruccional. Puede observarse que, en términos generales, la presencia de argumentos durante la socialización es mayor a la observada durante el trabajo grupal, lo que es entendible porque para este momento de la clase se destinó mayor tiempo y la gestión del profesor, a través de la confrontación de propuestas de solución a cada tarea, incentivó que las participaciones de los estudiantes versaran sobre aspectos como la defensa de sus estrategias de solución o replica frente a las expuestas por sus compañeros. La presencia de argumentos se hace más notoria a partir de la mitad de la secuencia implementada, tanto para el trabajo grupal como para la socialización de la clase. Esto puede tener explicación en la conformación de un conjunto de elementos teóricos que para aquel momento era amplío y que a través de las tareas propuestas incentivaba su uso.

Tipos de argumentos según el tipo de tarea y momentos de clase

Queremos ahora hablar sobre el tipo de argumentos identificados de acuerdo con los momentos de clase. Para ello presentamos en el Diagrama 5 la frecuencia de argumentos observados a lo largo de la secuencia, discriminando estos en atención al momento de la clase en que tuvieron lugar.

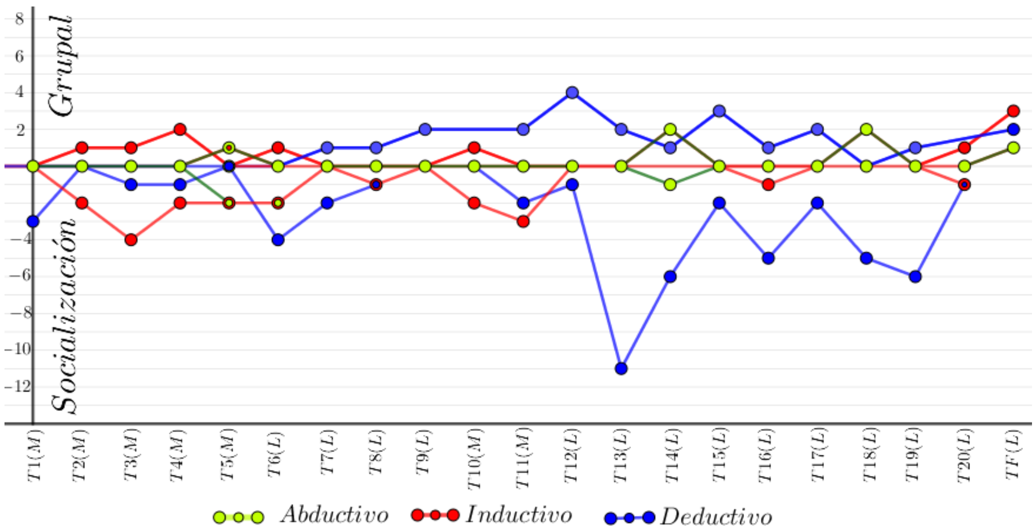


Diagrama 5. Tipo de argumentos de acuerdo con el momento de la clase y tarea

Como anteriormente se dijo, se puede asegurar la presencia de argumentos en cada tarea. Sin embargo, al discriminar los argumentos de acuerdo con su naturaleza, se reconocen comportamientos llamativos en estos por su alta presencia o por su inexistencia. Los argumentos de tipo deductivo gozaron de mayor presencia, tanto en el trabajo de Brock y Max, como en la socialización. Estos fueron incrementándose con el pasar del tiempo, aun cuando no de manera constante, por el crecimiento del sistema teórico que se iba configurando al interior de la clase y porque desde la tarea 12 las situaciones presentadas fueron exclusivamente de profundización. Lo anterior deja ver que los estudiantes se apropiaron de normas de la clase referidas al uso de elementos teóricos para soportar sus ideas. Este comportamiento aporta evidencia a las ideas de Santa y Jaramillo (2013), quienes señalan que el trabajo con este medio favorece justificaciones que se apoyan en un sistema axiomático configurado alrededor del plegado de papel.

Los argumentos abductivos no gozaron de una presencia notable, asunto que tiene explicación en el tipo de tareas diseñadas, pues estas principalmente atendían al descubrimiento de propiedades y a su justificación. Cabe destacar que estos argumentos tienen mayor presencia en tareas de profundización, asunto que puede deberse a que en ocasiones los estudiantes buscaban formas de arribar a configuraciones particulares (v.g. construir dobleces paralelos) y este ejercicio los llevaba a pensar hacia atrás, buscando elementos y relaciones que les permitieran obtener tal resultado (siguiendo el anterior ejemplo, se requerían dos dobleces perpendiculares a un tercero).

Los argumentos inductivos tienen presencia notable en tareas de descubrimiento y en algunas pocas de profundización. La presencia de los argumentos inductivos no fue tan alta en comparación a la reportada por los deductivos, lo que tiene sentido al considerar que las tareas de descubrimiento apuntaban al establecimiento de una única regla (la que se convertiría en hecho geométrico) y las aproximaciones a esta eran similares dada la situación propuesta (v.g. cuántos dobleces contienen a dos puntos). En estos casos el profesor tenía en cuenta algunas intervenciones de los estudiantes en la fase grupal y al ver que estas eran repetitivas, no abordaba otras soluciones, pues se reconocía ya el resultado de la tarea.

La mayor presencia de argumentos deductivos en tareas de profundización con respecto a las de descubrimiento contrasta lo reportado por Triana y Zambrano (2016), quienes mencionan que las tareas no abiertas posibilitan el surgimiento de mayor número de argumentos de corte deductivo, contrario a lo sucedido en este estudio al equiparar las tareas que las autoras llaman no abiertas con las que aquí denominamos de descubrimiento, las cuales se caracterizan por tener un tipo de solución específico. Creemos que las tareas de profundización son las de mayor cantidad de argumentos deductivos por el sistema teórico que se implementó desde el principio de la secuencia y los conocimientos que se habían adquirido al momento de proponer estas tareas. Estos aspectos brindaron herramientas para resolver un problema de diversas formas. Veamos los tipos de argumentos según el momento de clase:

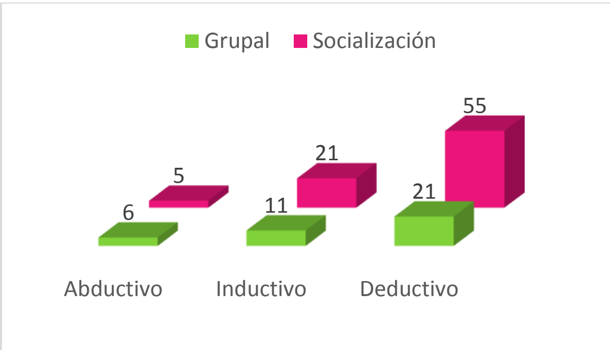


Diagrama 6. Tipos de argumentos vs momentos de la clase

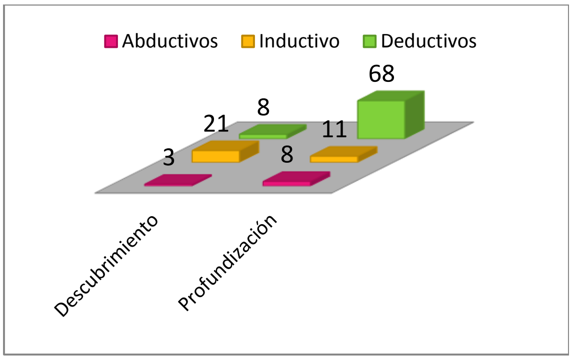


Diagrama 7. Tipo de argumento según las tareas.

En el diagrama anterior se puede apreciar que la mayor cantidad de argumentos deductivos e inductivos tuvieron lugar en los momentos de socialización, salvo en el caso de los argumentos abductivos, donde estos se manifestaron de manera similar en la fase grupal y en la socialización. Lo primero tiene sentido si se considera la dinámica de los momentos de socialización, pues en estos se posibilitó un mayor flujo de ideas por parte de los estudiantes, lo que dio lugar a la confrontación de los argumentos allí expuestos y por tanto más presencia de estos. La presencia de argumentos en la fase grupal, aun cuando reducida, es relevante si se considera que se rastreó un único grupo a lo largo de la implementación de las tareas.

Lo anterior nos lleva a pensar que la presencia de argumentos se ve afectada por el momento de la clase donde estos tienen lugar. Si bien es cierto que el trabajo grupal favorece surgimiento de argumentos, asunto que se deriva de las consideraciones anteriormente hechas, es en la puesta en común en gran grupo que estos pueden tener mayor protagonismo. Sin embargo, esto demanda por parte del profesor una gestión específica, que invite a los estudiantes a participar y exponer sus producciones, así como a que reaccionen a las propuestas de sus compañeros.

¿Qué tan completos son los argumentos observados?

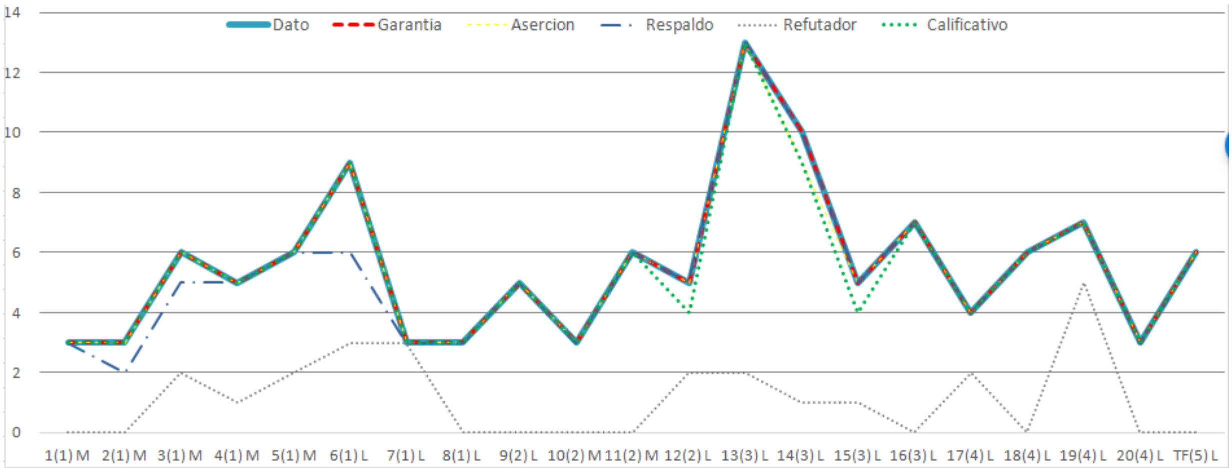


Diagrama 8. Presencia de los elementos del argumento

Al analizar la completitud de los argumentos tuvimos en cuenta sus seis elementos constitutivos, aun cuando autores como Samper y Toro (2017) mencionan que un argumento es completo cuando en este son explícitos el dato, la garantía y la aserción. Esta elección obedeció a las consideraciones de Inglis y Mejia-Ramos (2005) sobre la importancia de considerar el esquema completo de Toulmin dada la perspectiva no absolutista de las matemáticas, la cual en el contexto de la GDP tiene presencia por aspectos como las limitaciones y propiedades de la hoja de papel y la motricidad empleada en las construcciones realizadas, por mencionar algunas observadas en el estudio. El Diagrama 8 muestra el comportamiento de la presencia de cada elemento del argumento a lo largo de la secuencia de tareas. No interesa en este punto enfocarse en la alta o baja frecuencia de los argumentos. Lo que resulta interesante es analizar la convergencia de las líneas poligonales que representa cada elemento al avanzar en las tareas propuestas, pues esto deja ver que en momentos finales el discurso de los estudiantes involucraba varios de los elementos que conforman los argumentos.

En todos los argumentos se reconoció por parte de los estudiantes el dato y aserción, es decir, cada argumento expresado por ellos tenía por lo menos estos dos elementos, lo cual se sustenta en que en el análisis realizado en el capítulo anterior esto pudo observarse como aspecto común en cada argumento identificado. Este resultado guarda relación con las ideas de Chamizo (2007), quien señala que en la observación de los argumentos, bajo la estructura de Toulmin, los datos y aserción por lo general tienen un carácter explícito, mientras que la garantía tiene un carácter implícito.

En este estudio la garantía siempre tuvo presencia, asunto que podría ser llamativo a primera vista, sin embargo, como pudo advertirse en el análisis realizado en el anterior capítulo, la presencia de este elemento se debe al cuestionamiento del profesor constante hacia los estudiantes cuando ellos no expresaban garantía alguna en sus intervenciones de forma explícita. Dada esta consideración, corresponde analizar el comportamiento de este elemento de manera separada. Este asunto se atiende en la sección 1.4. El respaldo es un elemento que se manifiesta en la gran mayoría de los argumentos, particularmente al final de estos tiene siempre presencia. Dada la naturaleza con la que se le caracterizó en este estudio podemos apreciar tal comportamiento. Más adelante, en la sección 1.5, al igual que ocurre con la garantía, hablaremos de la presencia de este de acuerdo con la caracterización dada, pues merece un tratamiento detallado.

El calificativo modal es otro elemento que en algunos casos no se hace explícito de la misma forma que el dato y la aserción, aun cuando la diferencia con estos no es marcada. En el análisis de los argumentos este elemento se valoraba a través de expresiones de los estudiantes que permitieran reconocer seguridad o duda en sus intervenciones, se incluía también la entonación de la voz y si hablaba de seguido o realizaba pausas. Por lo anterior, la ausencia de este elemento se debió a intervenciones cortas sobre las que no se podía adoptar alguna postura. Por su parte, el refutador exhibió frecuencias nulas o muy cercanas a esta. Esto significa que los estudiantes en su discurso no reconocían salvedades a las declaraciones realizadas, bien porque no tenían presencia y sus ideas eran irrefutables o porque no las reconocían en el desarrollo de su trabajo.

En síntesis, puede señalarse que la GDP se convirtió en un medio que propició de buena manera la presencia de los elementos de los argumentos. Pero debe advertirse que esto no es un resultado instantáneo. Respaldando las ideas de González y Vargas (2000), lo ilustrado es un proceso que demanda tiempo y situaciones cuidadosamente diseñadas que favorezcan, en la interacción entre los estudiantes, un discurso cada vez más elaborado y completo.

Naturaleza de la garantía durante secuencia de tareas

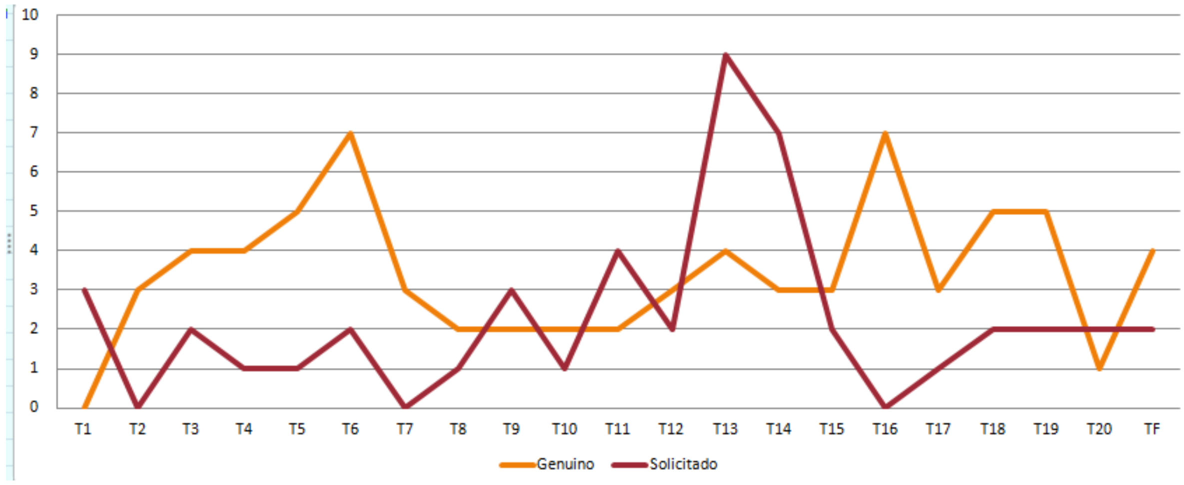


Diagrama 9. Garantías durante la secuencia de tareas.

Como se vio en el apartado anterior, la garantía tuvo presencia constante, al parecer, por acciones deliberadas del profesor. En este apartado realizamos un análisis de este elemento de los argumentos en aras de reconocer su naturaleza a la luz de la gestión del profesor y la presencia de la GDP. En primer lugar, queremos estudiar la presencia auténtica de la garantía, para ello hemos rastreado en cada argumento observado si este elemento se dio de manera genuina en el discurso de los estudiantes, o si este apareció por las preguntas del profesor que solicitaban el porqué de las ideas expresadas.

A partir del anterior diagrama es posible notar que en las primeras tareas y en las últimas las garantías de los argumentos surgen principalmente de manera genuina por parte de los estudiantes, mientras que en el intervalo de la mitad de la secuencia entre las tareas 9 y 15 las justificaciones a las aserciones dadas por los estudiantes son solicitadas por el profesor. Se puede observar que la mayor parte de garantías son genuinas, situación que consideramos se pudo haber presentado por la manera como se estructuraron las tareas, de modo que siempre se le solicitaba una justificación al estudiante por medio de la expresión "explica tu respuesta" o se le cuestionaba acerca de la certeza de su conclusión a través de "cómo puedes asegurar tu hallazgo", preguntas permanentes que consideramos influyeron en la verbalización de las ideas de los estudiantes. Consideramos que de las tareas 2 a la 8, principalmente tareas de descubrimiento para las cuales apenas se consolidaba un sistema teórico, se delegó la responsabilidad a los estudiantes de establecer su conjetura y probarla a través de la exploración en el papel, aun cuando este sustento se mantuviera en un nivel empírico. Las tareas 9 a 15 fueron en su mayoría de profundización, pero consideramos que los estudiantes no conectaban sus resultados con los elementos teóricos, por lo que era necesario la intervención del profesor para indagar por este elemento del argumento. En la tarea 16 en adelante, tareas exclusivamente de profundización, los estudiantes tenían herramientas suficientes para sustentar sus ideas. La metodología de la clase al parecer permeó sus formas de comunicar ideas, por lo que la garantía se expresaba de manera genuina.

Otro de los aspectos analizados en cada argumento identificado fue la naturaleza de este según su garantía (Samper y Toro, 2017). En lo que sigue mostramos el comportamiento de la naturaleza de la garantía, con lo que queremos reconocer si esta se vio favorecida por la presencia del medio a lo largo de la secuencia (Diagrama 10).

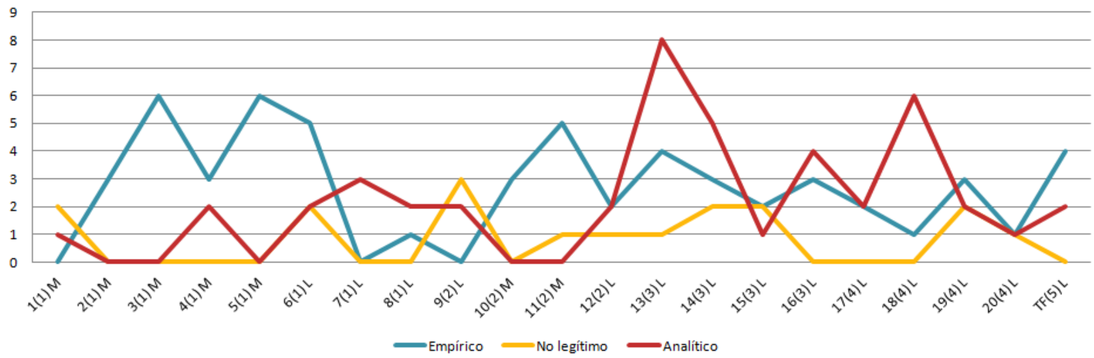


Diagrama 10. Naturaleza de la garantía vs tarea.

Puede observarse que las garantías empíricas tuvieron presencia en todo momento, excepto dos tareas (T7 -colinealidad de tres puntos- y T9 -reconocimiento de ángulos par lineal y opuestos por el vértice-). En la primera de estas se podía predecir que las garantías de los argumentos no serían empíricas, dado que se pretendía que los estudiantes acudieran a la definición de colinealidad, por lo que se esperaba un sustento teórico y con ello argumentos analíticos. En la tarea 9 se esperaba que los estudiantes a partir de la construcción de tres dobleces que se intersecan en un punto identificaran ángulos par lineal y opuestos, situación para la que requerían evaluar las definiciones incluidas en la hoja de trabajo. Por lo tanto, estas dos tareas demandaban el uso de elementos teóricos.

Los argumentos no legítimos tuvieron poca presencia a lo largo del desarrollo de las tareas, prácticamente por debajo de los empíricos y los analíticos en frecuencia. Estos se destacan en las tareas 1, 6, 9, 14, 15 y 19, como vemos a continuación. De la tarea 1 es importante recordar que se dieron instrucciones de notación, así como la definición de segmento, las cuales fueron interpretadas erróneamente por Brock. En la tarea 6 Marcelo propone un argumento que se apoya en lo que le manifiesta otro compañero, pero sin explicar el motivo de ello; además está el argumento propuesto por Jack y Jana, quienes excluyen la colinealidad para dos puntos porque la definición no los contempla. En la tarea 9 la solicitud del enunciado fue confusa para los estudiantes respecto a las definiciones establecidas, pues en estas se hablaba de dos dobleces mientras que en la tarea se requerían tres dobleces. La tarea 14 involucraba dobleces perpendiculares, los argumentos no legítimos tuvieron lugar dado que los estudiantes omitían alguna de las dos condiciones para que se diera la perpendicularidad de la definición. En la tarea 15 los dos argumentos no legítimos que se presentaron estuvieron a cargo de Brock y Max, quienes para generar dos dobleces perpendiculares tuvieron en cuenta inicialmente en el trabajo grupal solo la condición de que estos se cruzacen omitiendo que formaran un ángulo recto, por lo que para ellos las medidas de los ángulos determinados por estos eran distintas, posteriormente en la socialización ellos presentan otra construcción que corresponde a dobleces perpendiculares pero no brindan herramientas suficientes en las que se evidencie la conexión entre datos y aserción. Finalmente, en la tarea 19 emergieron dos argumentos no legítimos por parte de Jana y Emilio que aludían a dos dobleces oblicuos que no se cruzaban en la hoja asumiéndolos como paralelos.

Los argumentos analíticos tienen mayor presencia que los empíricos y no legítimos a partir de la tarea 12, aunque no tienen un comportamiento regular. En las primeras cinco tareas estos no se observan prácticamente, lo cual es comprensible dado que en estas tareas apenas se configuraba el sistema teórico. Los argumentos analíticos tampoco están presentes en las tareas 10 y 11, las cuales son de descubrimiento e introducen a hechos geométricos asociados a ángulos opuestos por el vértice y par lineal. Los argumentos analíticos tuvieron mayor presencia en las tareas 13 y 18, tareas donde se solicitaba la construcción de dobleces que cumplieran alguna condición, a saber: ser perpendiculares (13) o no ser paralelo a otro (18). Este aspecto movilizó en los estudiantes la necesidad de proveer sustento a sus construcciones, de cara a mostrar a sus compañeros la validez de sus construcciones.

Puede advertirse también que los argumentos empíricos exhiben un comportamiento tendiente a la baja, aun cuando no monótono, en contraposición a los argumentos analíticos, quienes tienen poca presencia en las tareas iniciales y de la mitad de la secuencia en adelante se destacan notablemente, superando en muchas oportunidades a los argumentos empíricos y no legítimos. Este comportamiento podría asociarse al hecho que las tareas en sus momentos finales gozaban de diversos elementos teóricos para su solución, así como de una manipulación más amplia del medio involucrado.

Finalmente, estudiamos la relación entre la garantía y la suplementación del medio. Con ello pretendemos identificar si el nivel de suplementación del medio guarda relación con el tipo de garantía, lo que llevaría a reconocer la contribución del doblado de papel en este aspecto. Apoyados en el diagrama de abajo podemos señalar que los argumentos empíricos se favorecen principalmente por una suplementación total mientras que no legítimos por una suplementación carente. Los argumentos analíticos se ven favorecidos por un suplementación carente y total.

El resultado frente a los argumentos empíricos se puede entender porque el doblado de papel dota de una experiencia al estudiante a partir de las construcciones obtenidas que se justifica en la misma manipulación del papel o en la visualización de los resultados hallados, este último proceso matemático se presenta cuando los estudiantes se involucran por primera vez en el proceso de argumentar (Sowder y Harel, 1998), dejándo de lado el rigor lógico. Las garantías basadas en un uso exclusivo del papel se presentaron en las tareas iniciales en las que no se contaba con soporte teórico para sustentarlas. Además, algunos estudiantes no encontraron la necesidad de validar sus argumentos a partir del doblado de papel sino de la visualización, lo que bastaba para dar credibilidad a sus ideas.

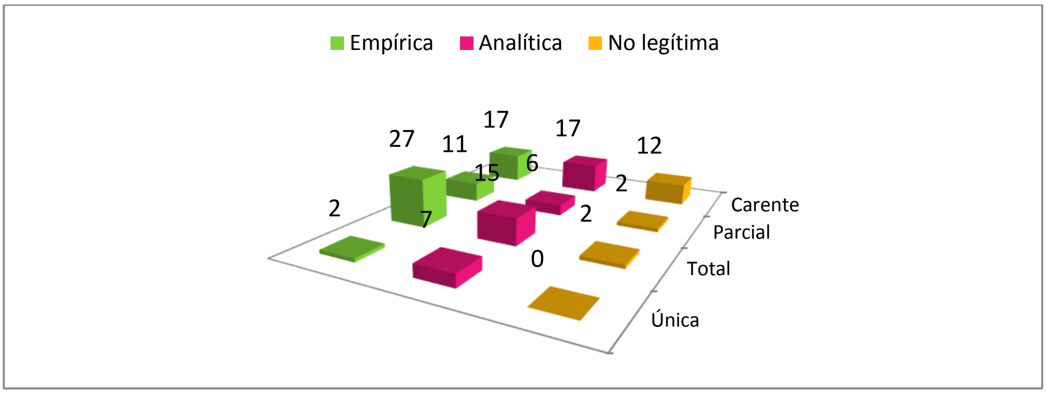


Diagrama 11. Suplementación vs tipo de garantía

Por otro lado, la suplementación única aporta de manera destacada el surgimiento de argumentos analíticos, situación favorable porque el hecho de que se use el medio de manera exclusiva, en el que las relaciones entre los objetos geométricos son independientes de las propiedades del papel, permite obtener asertividad frente a la relación lógica entre los datos y conclusión de un argumento.

Podemos concluir que la GDP promueve argumentos tanto empíricos como analíticos, pero aun se requiere de esfuerzos mayores para que los sustentos de los estudiantes tiendan a ser teóricos. En la misma vía que Crespo (2014) señala, reconocemos que este es un proceso complejo que hay que cultivar desde niveles iniciales en la escuela. Además, reconocemos que, si bien una suplementación única favorece argumentos analíticos, las maneras de proceder que de allí se derivan requieren de gran capacidad de abstracción en tanto que los estudiantes no se pueden apoyar en los bordes de la hoja para sustentar sus construcciones sino solo en las acciones de plegar en sí mismas.

Naturaleza del respaldo durante la secuencia de tareas

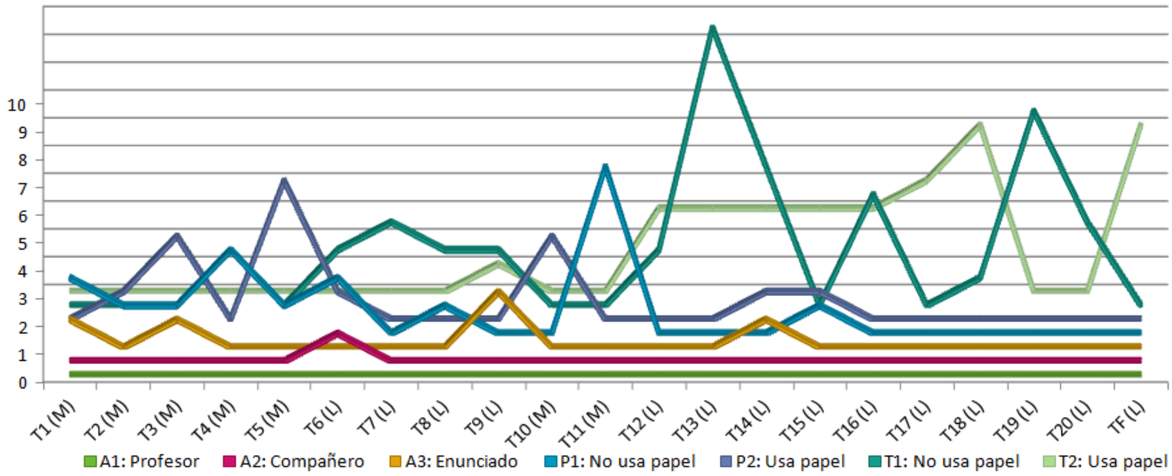


Diagrama 12. Respaldos usados durante la argumentación de los estudiantes

De la misma forma que se analizó la naturaleza de la garantía, el respaldo de los argumentos se asumió bajo una caracterización particular, una en la que se reconocía este elemento a la luz de tres categorías:

autoritario [A], perceptual [P] o teórico [T]. Por este motivo realizamos un estudio diferenciado de este elemento. A partir de lo mencionado queremos mostrar la evolución de los argumentos durante el transcurso de las tareas y reconocer posibles relaciones con el tipo de tareas que den cuenta y razón de este comportamiento.

En el Diagrama 12 se puede evidenciar el comportamiento de los tres tipos de respaldo a lo largo de la implementación de la secuencia. De esta representación puede mencionarse, en términos generales, que el desarrollo de las primeras tareas se caracterizó por la presencia de respaldos cuya naturaleza era principalmente perceptual, con o sin ayuda del doblado del papel (v.g. "… mire, acá se puede dibujar muchos puntos sobre este doblez"). A partir de la tarea 12 este tipo de respaldo disminuyó drásticamente, dando lugar a la aparición y presencia notable de respaldos de corte teórico.

Los respaldos A1 (apoyados en la autoridad del profesor) fueron consideramos en el análisis, aunque no tuvieron presencia, esto significa que los estudiantes no se apoyaron en las declaraciones del profesor durante la clase para sustentar sus ideas. Por su parte, los respaldos A2 y A3 tuvieron una presencia escasa y solo se evidenciaron durante el desarrollo de cinco tareas a lo sumo, la mayoría de estas ubicadas al inicio de la secuencia. Recordemos que en estos momentos iniciales el sistema teórico apenas se empezaba a consolidar y las tareas eran principalmente de descubrimiento. Por ello los estudiantes disponían de pocos referentes teóricos para argumentar y cuando esto se requería, muchas veces se acudía al enunciado de la tarea como recurso de validación o replica frente a las acciones realizadas por sus compañeros.

En lo que refiere a los respaldos perceptuales, vemos que estos tienen lugar desde momentos tempranos de la secuencia y que su presencia es sobresaliente en las tareas de descubrimiento. Las tareas dos y tres buscaban determinar el número de dobleces que se podían construir por cierta cantidad de puntos, dando lugar a los hechos geométricos *un punto-infinitos dobleces* y *dos puntos un doblez*. Las tareas cuatro a seis propendían por el establecimiento del hecho geométrico *un doblez-infinitos puntos* y la definición de colinealidad. En tales tareas se apelaba a la percepción visual para argumentar sobre lo que se hacía con el doblado de papel. Del mismo modo, en la tarea diez se pretendía que los estudiantes sobrepusieran ángulos para definir su congruencia y en la tarea once debían determinar que al unir dos ángulos que formaban par lineal la suma de sus medidas era de 180 grados. Lo dicho sustenta la presencia de los respaldos perceptuales en estas tareas.

Los respaldos teóricos emergen de las tareas de profundización principalmente, de hecho, tienen un crecimiento notable a partir de la tarea 12, al tiempo que los argumentos perceptuales decaen hasta el punto de ser nulos. Es en el núcleo de perpendicularidad donde los estudiantes acuden al hecho geométrico *par lineal-180* y la definición de perpendicularidad, además cabe mencionar que los hechos geométricos *dobleces perpendiculares*, *perpendiculares-paralelo* y *paralelos-perpendicular*, surgen al final de este núcleo y son, junto con la definición de paralelismo, los que dan sustento a gran parte de los argumentos posteriores hasta finalizar las tareas. Esto es razonable debido a que en el diseño de estas tareas se contemplaba recurrir a estos elementos teóricos para fundamentar las ideas expuestas. Esta panorámica mantiene sintonía con lo expresado por Arellano (2013) respecto a la argumentación de los estudiantes de bachillerato, de quienes asegura que sus argumentos se vuelven cada vez más analíticos, a medida que disponen de más elementos teóricos en su repertorio conceptual.

SUPLEMENTACIÓN DEL MEDIO

Suplementación durante la secuencia de tareas

En este apartado analizamos el papel del medio (GDP) en los argumentos observados. En cada argumento identificado se caracterizó el nivel de suplementación, con lo que se pretendía dar una apreciación sobre la forma en que este medio se involucraba al resolver la tarea y cómo este fue evolucionando a lo largo de la secuencia implementada. En el Diagrama 13 se muestra el comportamiento de las etiquetas dadas a la suplementación a lo largo de las tareas propuestas.

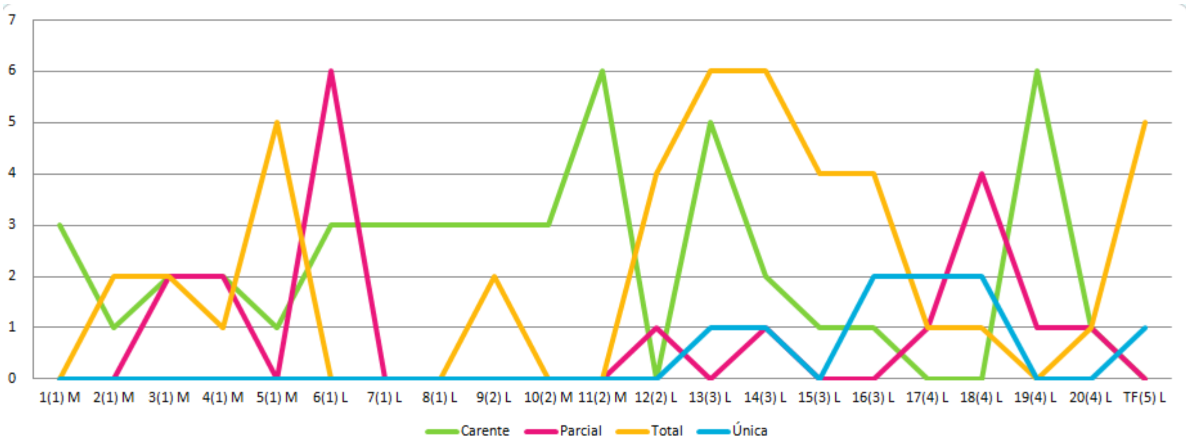


Diagrama 13. Suplementación del medio

Respecto a la suplementación carente puede reconocerse que hasta la tarea 11 esta exhibe una presencia notable, en adelante esta inicia a reducirse y se manifiesta de manera significativa en apenas dos tareas posteriores. Lo anterior tiene explicación en la naturaleza de las tareas donde esta suplementación es elevada. Las primeras tareas apenas involucraban relaciones de colinealidad, en las que el medio no era relevante, pues las representaciones de dobleces y puntos podía realizarse en otros medios (v.g. lápiz y papel) y aun así se arribaba al mismo resultado. En las otras tareas donde esta presencia es alta es en la 13 y 19, en ambos casos era común denominador que las discusiones se apoyaran en representaciones ya hechas, por lo que el papel no se manipuló de alguna forma. La suplementación parcial tuvo muy poca presencia y solo en algunos casos esta fue notable. En estas tareas se reconoció una presencia relevante de este nivel de suplementación debido a que en las producciones de los estudiantes se acude a la representación de objetos geométricos en el papel, pero adicionalmente se involucran otros recursos que hacen que el papel no se utilice con exclusividad.

La suplementación total es más representativa y aunque al inicio exhibe presencia no tan notable, sobre el final este nivel de suplementación es considerablemente notorio. A lo largo de la secuencia se pudo observar que los estudiantes se apropiaban del uso del papel no solo para realizar construcciones de acuerdo con lo solicitado en el enunciado de la tarea, sino que además buscaban, gracias a los elementos teóricos incorporados, formas de utilizar estos procedimientos para soportar o controvertir sus ideas (v.g. verificar si dos dobleces eran paralelos al construir uno perpendicular a uno de estos y ver lo que ocurría entre este y el segundo doblez paralelo), promoviendo así nuevas relaciones geométricas que amplificaban su bagaje conceptual (Santa y Jaramillo, 2013). En la mayoría de los casos la forma en que se involucró el papel recurrió a otros aspectos característicos del medio (v.g. bordes paralelos y perpendiculares). La suplementación en este caso no se pudo catalogar como única dado que la GDP no contempla el uso de estas particularidades del medio. Todas estas formas de proceder tuvieron lugar por iniciativa propia de los estudiantes, quienes en las hojas rectangulares reconocieron y se valieron de propiedades no explícitas en clase.

Finalmente, la suplementación única, aun cuando escasa en su presencia, se logró evidenciar a partir de la tarea 13, donde tuvo un ligero protagonismo en algunas tareas de profundización. Consideramos que haber solicitado a los estudiantes que no se acudiera a las propiedades físicas del papel hubiera llevado a que esta suplementación hubiera tenido mayor presencia.

Suplementación y naturaleza del respaldo

Al comparar el tipo de respaldo y la suplementación del medio pudimos reconocer que algunos tipos de suplementación tenían mayor presencia a partir de determinados tipos de respaldo. El Diagrama 13 permite señalar que el nivel de suplementación carente guarda una estrecha relación con los tipos de respaldo en que el papel no se manipula (T1 y P1), asunto que es natural si consideramos que estas dos dimensiones hacen alusión a un uso nulo de este medio. Por otro lado, la suplementación total se ve gratamente favorecida por los dos tipos de respaldo teórico, así como por un respaldo perceptual en que el papel se usa con propiedad. Esto deja ver que afrontar tareas en las que el papel se use de manera exclusiva, aun cuando esto demande involucrar sus propiedades físicas, favorece en gran medida la incorporación de elementos teóricos asociados a esta geometría, evidenciándose así que el doblado de papel es un medio apropiado para la producción de argumentos como lo señalan Santa y Jaramillo (2010). Este aspecto sugiere asuntos a considerar en el diseño de tareas en futuras intervenciones.

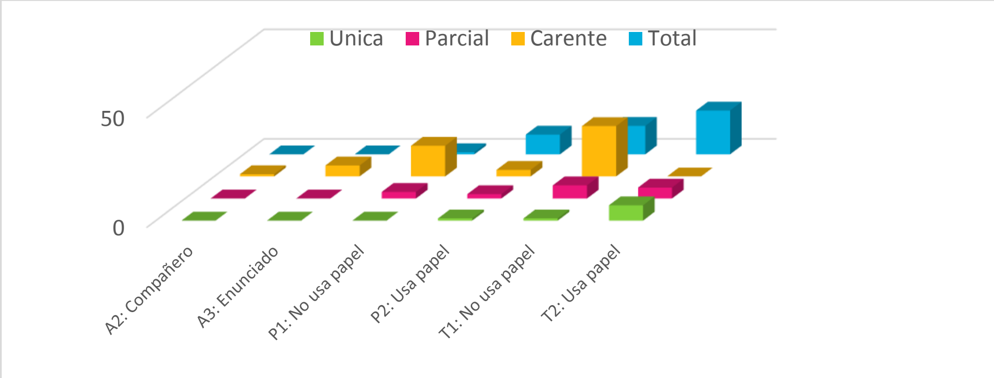


Diagrama 14. Suplementación vs tipo de respaldo

La suplementación parcial, aun cuando goza de poca presencia, involucra tipos de respaldo tanto teóricos como perceptuales. Esto es natural dada la caracterización de este nivel de suplementación. Recordemos que para este tipo de suplementación el manejo de papel puede involucrar otros recursos sin que esto signifique que se dejen de lado elementos teóricos al comunicar ideas. Finalmente, la suplementación única se da principalmente bajo respaldos teóricos en que se involucra el papel, aunque también tiene ligera presencia bajo el respaldo teórico que no involucra papel y el perceptual en que este medio se involucra; este asunto se sustenta de igual forma que en la suplementación total.

ACERCA DE LA ARGUMENTACIÓN Y LA INTERACCIÓN SOCIAL

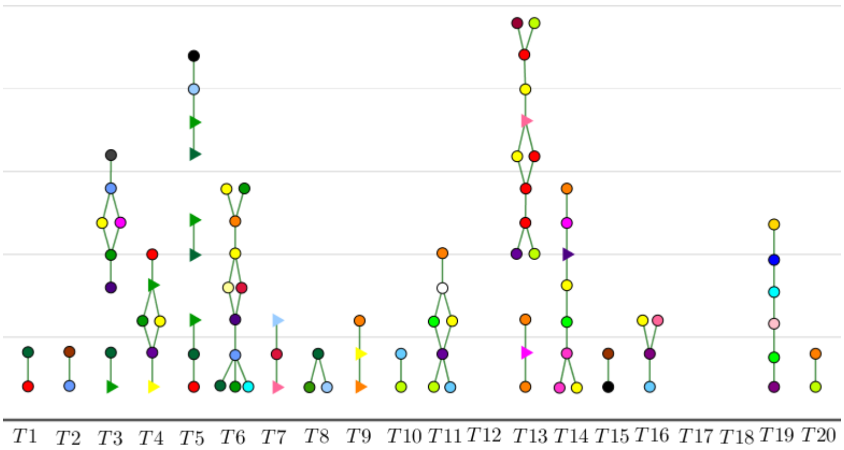


Diagrama 15. Argumentos producto de las intervenciones de estudiantes

Queremos realizar un comentario sobre los argumentos evidenciados en la socialización en gran grupo, enfocándonos en aquellos que eran producto de intervenciones de algunos estudiantes. Lo anterior tiene el fin de reconocer qué tanto la GDP favoreció ambientes de argumentación colectiva (Krummheuer, 1995). Para esto presentamos en el Diagrama 15 los argumentos en cadena que se promovieron a partir de algunas tareas. En este el primer punto representa el argumento propuesto por un estudiante frente a una tarea y los puntos superiores los argumentos réplica a tal argumento. Los triángulos representan ideas que sucitaron argumentos; los puntos en un mismo nivel horizontal significan que fue más de una persona quien promovió un mismo argumento; además los colores, por tarea y no durante toda la secuencia, representan una misma persona.

Un ejemplo de las intervenciónes e interacciones que representa una de estas cadenas se presenta en la tarea 7, en la que inicialemente Pau (triángulo color rosado) responde a la pregunta del profesor sobre si tres puntos siempre son colineales, expresando su idea de que tales puntos no siempre son colineales. En este punto, como reacción a lo dicho por Pau, surge un argumento por parte de Ly (punto de color rojo), quien justifica que dependiendo de la ubicación de los tres puntos pueden estos pueden ser colineales o no. Posterior a esto, Marcelo (triángulo color azul) apoya el sustento expuesto por Ly con una afirmación en la que deja ver que este lo convence.

Del Diagrama 15 podemos asegurar que existen cadenas de argumentos particularmente extensas como las de las tareas 3, 6, 11, 13 y 14 donde los temas abordados posibilitaban confrontar varios puntos de vista, en estos los estudiantes exhibían múltiples respuestas que llevaban a la confrontación de opiniones. En otros momentos estas cadenas fueron cortas, principalmente por la naturaleza de las soluciones, pues uno o más estudiantes emitían sus propuestas y los otros le apoyaban o refutaban, llegándose así a respuestas unánimes. Podemos ver entonces que los estudiantes en sus intervenciones tenían en cuenta lo que decían sus compañeros, ya sea para apoyarlo, complementarlo o refutarlo, lo que dio lugar a interlocuciones entre los estudiantes y el profesor.

Según lo anterior, tal cuadro del desarrollo de una clase dista de lo que sucede en clases regulares o convencionales donde los estudiantes emiten ideas por su cuenta y poco se considera la opinión del otro, en esos ambientes el estudiante pretende ser escuchado por el profesor, quien se encarga de focalizar las ideas para el desarrollo de la clase. Lo presentado hasta este momento en este apartado nos permite mencionar que los ambientes de clase a la luz del uso del doblado de papel hacen posible proveer una interacción donde los argumentos surgen para respaldar o para refutar las ideas de los otros, con la finalidad de convencer a los demás de lo que se dice. La interacción de la naturaleza que aquí se presenta no fue del todo constante debido a que el profesor en ocasiones cortaba las ideas para mantener el rumbo de los argumentos o para dar la oportunidad a otras propuestas donde emergían otro conjunto de argumentos sobre el tema.

EFECTO DEL MEDIO

En este apartado queremos destacar algunas bondades y limitaciones encontradas al implementar la secuencia con doblado de papel. Durante el desarrollo de algunas tareas los estudiantes se valieron de las propiedades físicas de la hoja para sustentar sus ideas. Estas propiedades del medio favorecieron en algunas oportunidades el trabajo de los estudiantes, pero en otros casos provocaron dificultades o errores en las ideas construidas.

BONDADES DEL MEDIO

Consideramos como bondades del medio las características de este que facilitaron el trabajo de los estudiantes en la solución de las tareas. Estas se clasifican en dos grupos: bordes de la hoja y simetría - traslucidez del papel.

Bordes de la hoja

Los bordes de la hoja de papel, dada su forma rectangular, proveían perpendicularidad y paralelismo. Un ejemplo de uso del papel, en que esta propiedad física tuvo presencia implícitamente, se dio en el marco de las tareas que solicitaban construir dobleces perpendiculares. En esta oportunidad se hacían coincidir los bordes opuestos de la hoja de papel, obteniendo como resultado los dobleces solicitados (Imagen 38 a). Otro escenario en que se observó este uso particular de la hoja de papel tuvo presencia al solicitar construir dos dobleces paralelos. En este caso se juntaban los bordes opuestos de las hojas (Imagen 38 b) y se realizaban los dobleces correspondientes, obteniendo lo solicitado en la tarea.

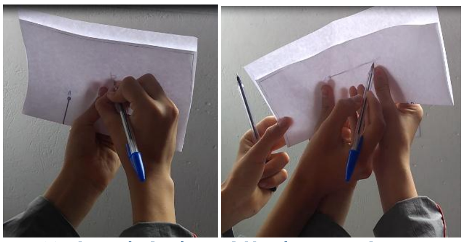
(a) Dobleces Perpendiculares de Emilio *(b) Dobleces paralelos de Lorena*

Imagen 38. Dobleces obtenidos a partir de los bordes del papel

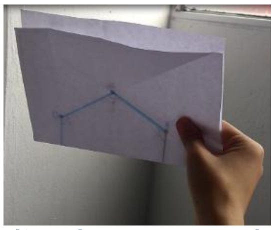
En ambos casos mencionados el resultado obtenido satisfacía las propiedades solicitadas y esto se garantiza por la forma física del papel. Las estrategias surgieron de forma espontánea por parte de los estudiantes, pues el profesor nunca mostró estas posibilidades. Sin embargo, no se destinó un momento de la clase a sustentar por qué estas construcciones particulares funcionaban, asunto que hubiera llevado a involucrar propiedades entre rectas perpendiculares y paralelas. Como hemos mencionado en anteriores oportunidades, podría considerarse la posibilidad de trabajar con papel sin forma rectangular, lo que favorecería una suplementación única en su uso.

La simetría y la traslucidez

En el desarrollo de la tarea final, así como otras anteriores a esta, se acudió a propiedades del medio como la simetría y la traslucidez. Ejemplo de ello es el procedimiento propuesto por Brock y Max al construir el hexágono regular en la tarea final (Imagen 39). En este caso tanto la construcción de los vértices restantes, como la justificación de que los segmentos y ángulos determinados eran congruentes, se dieron en el marco de la superposición y verificación tras luz. Esta estrategia implícitamente involucraba aspectos de la simetría axial, los cuales no fueron abordados en clase en algún momento.



(a) Obtención de vértices del hexágono, Brock y Max



(b) Max demuestra congruencia de segmentos y de ángulos

Imagen 39. Simetría y traslucidez en tarea final

En la tarea 14 se indagó por un método para verificar que dos dobleces no eran perpendiculares, para lo cual Alexa encontró que al plegar por uno de los dos dobleces hechos el doblez restante no quedaba sobre sí, lo cual verificó gracias a la transparencia del medio. Estas dos propuestas son exclusivas de este medio, dejan ver acciones o formas de proceder exclusivas de la GDP, contribuyendo a la generación de un conocimiento geométrico permeado por el medio (Borba y Villarreal, 2005). Este es distinto del trabajo con regla y compás o con software de geometría dinámica, constituyéndose en una manera distinta de aproximase a nociones y conceptos geométricos.

Las tareas correspondientes al núcleo de perpendicularidad y parte de las del núcleo de paralelismo dejaron ver, en la obtención de dobleces perpendiculares, la simetría axial. Esto ocurrió cuando a partir de un doblez los estudiantes sobreponían este sobre sí mismo y obtenían un segundo doblez perpendicular al primero (Imagen 40). De lo anterior se concluye que esta relación de simetría cobra relevancia y vive al involucrar este medio en el diseño de tareas. Esta surge de manera intuitiva, por lo que puede considerarse como una oportunidad para aproximarse a este concepto geométrico.

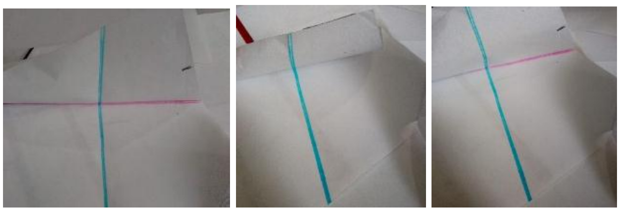


Imagen 40. Dobleces perpendiculares de L y construidos con simetría.

LIMITANTES DEL MEDIO

Entendemos como limitantes del medio las propiedades del papel que condujeron a ideas erróneas a partir de su uso. En la tarea 2 varios estudiantes encontraron que por un punto podían construir una cantidad determinada de dobleces, sin lograr abstraer la idea de que estos eran infinitos porque a medida que construían sus dobleces, el espacio para construir disminuía. Tal fue el caso de Brock y Max quienes concluyeron que se podían hacer 8 dobleces, seguido del caso de Marcelo, para quien la ubicación del punto en la hoja determinaba una cantidad distinta de dobleces a obtener. Esto se presentó por dos factores: el primero corresponde a la motricidad fina (García, 2009) para poder generar dobleces entre los ya construidos, el segundo tiene que ver con la manipulación recurrente del papel, que hace que este pierda rigidez, haciendo más difícil conseguir la representación de dobleces deseada. Igualmente, si el punto se ubicaba en las vecindades de alguna de las esquinas de la hoja la tarea de construir los dobleces se complejizaba. Esto en algunos casos los hacía desistir de representar dobleces y aventurarse a dar un valor tentativo sobre la cantidad de dobleces que creían se podían obtener.

En la tarea 4 se presentaron limitantes que influyeron en las ideas de algunos estudiantes, para quienes la cantidad de puntos que se podían representar en un doblez dependía del tamaño de la hoja. Entre más grande fuese la hoja, mayor longitud tendría el doblez y por tanto más cantidad de puntos se podrían dibujar. En esta tarea influyó considerablemente el aspecto visual, además que la hoja es un material con un tamaño determinado. Otro aspecto a tener en cuenta en el desarrollo de esta tarea es el grosor de los puntos dibujados y su ubicación seguido uno de otro en un doblez, sin considerar la existencia de puntos entre los dibujados, situación que no se da en otros ambientes (v.g. geometría dinámica a través del zoom).

CONCLUSIONES Y PROYECCIONES

CONCLUSIONES

Presentamos los resultados obtenidos del estudio. Recordemos que a través de este se buscaba caracterizar los argumentos con el apoyo de la GDP. Los resultados que presentamos se organizan en dos grandes grupos: i) Secuencia de tareas y argumentos provocados y ii) el rol que desempeñó el papel.

Secuencia de tareas y argumentos provocados

Al involucrar una secuencia apoyada en la geometría del doblado del papel en la clase de geometría se apoyó la emergencia de argumentos por parte de los estudiantes. Estos tuvieron presencia al interior del trabajo grupal (Brock y Max) y en la puesta en común en gran grupo. Aunque se reconocen argumentos de distinto tipo, los de naturaleza deductiva predominaron a lo largo del desarrollo de la secuencia. Lo anterior puede deberse a la naturaleza de las tareas, las cuales solicitaban realizar construcciones de objetos geométricos y proveer justificación sobre sus propiedades, y a la configuración de un sistema teórico cada vez más robusto al que se podía acudir para sustentar las ideas comunicadas. Los argumentos inductivos también tuvieron presencia notable en el desarrollo de las tareas propuestas, aunque esta fue menor a la presencia de los argumentos deductivos. Estos acontecieron principalmente en el desarrollo de tareas destinadas a establecer alguna relación de dependencia o una definición.

Sobre los argumentos elaborados por los estudiantes puede mencionarse que la geometría del doblado de papel favorece que su estructura contemple varios de sus elementos constitutivos. A lo largo del desarrollo de la secuencia los argumentos expresados por los estudiantes incluían mayor cantidad de elementos, llegando a ser casi completos en el discurso de los estudiantes. Sin embargo, esto no fue una constante en todos los casos, ejemplo de ello es el refutador, el cual tuvo poca presencia en todo momento. Esto podría deberse a que los estudiantes expresaban resultados de forma general, sin considerar salvedades o excepciones en los que estos no fueran verdaderos. Al respecto, podría contemplarse la posibilidad de proponer tareas en que los resultados a los que se arribe no sean categóricos y dependan en gran medida de configuraciones especiales entre los objetos geométricos involucrados.

En relación con los elementos presentes en los argumentos, dos de estos tuvieron una presencia marcada de acuerdo con la forma en que se caracterizaron, a saber: garantía y respaldo. Sobre el primero debe señalarse que, aunque tuvo una presencia constante, en varias oportunidades este se dio por solicitud del profesor ante las intervenciones de los estudiantes. En otros casos su presencia pudo deberse a la solicitud que se daba a través de los enunciados de las tareas. Independiente de esta consideración, se pudo reconocer que la naturaleza de la garantía expresada por los estudiantes fue principalmente analítica y empírica, siendo la primera protagonista sobre el final de las tareas y la segunda predominante en las primeras tareas. Lo anterior deja ver que el acceso a un sistema teórico cada vez más robusto favorece que la garantía a la que se acude, genuina o solicitada por el profesor, sea de corte teórico principalmente y que las acciones realizadas sobre el papel en tareas de descubrimiento, cuando este sistema no es amplio, lleva a los estudiantes a valerse de mecanismos como la percepción y la visualización como forma de proveer sustento a sus resultados. El manejo de este medio lleva, por lo tanto, a buscar formas de sustentar las acciones realizadas sobre él y cuando se cuenta con elementos teóricos, se busca aquel que permita garantizar la forma en que se manipula el papel.

Respecto al respaldo, elemento presente prácticamente en todo argumento expresado por los estudiantes, el análisis de su naturaleza permite asegurar que el trabajo con doblado de papel favorece que esta sea de tipo teórico cuando se cuenta con una experiencia amplia con este recurso manipulable. En etapas tempranas del trabajo con papel se puede esperar que predomine un respaldo de naturaleza empírica. Por lo tanto, el trabajo con el papel, a favor de la conformación de un sistema teórico y un conjunto de mecanismos para realizar construcciones de objetos geométricos, promueve, aun cuando a largo plazo, la presencia de respaldos de tipo teórico. El hecho de que no se reportaran respaldos autoritarios altos en el estudio realizado, deja ver que este medio promueve en los estudiantes la necesidad de buscar por su cuenta formas de sustentar sus ideas y convencer con ello a sus compañeros, dejando de lado la autoridad que el profesor o libros de texto pueden proveer.

El "papel" del papel

A través de las ideas del constructo Humanos con Medios analizamos la forma en que el papel se involucró en el desarrollo de las tareas propuestas. El trabajo de los estudiantes con este medio dejo ver que en momentos inciales de la secuencia este se involucraba de manera superficial, es decir, de la misma forma en que se utilizaría una representación gráfica en tablero o en la pantalla de un computador. Esto puede deberse a la inexperiencia de los estudiantes al trabajar con este medio y a las tareas propuestas, las cuales no demandaban un uso exclusivo de este medio. Sin embargo, en la segunda mitad de la secuencia se pudo reconocer que la forma en que este medio se utilizó fue de tal naturaleza, que las respuestas dadas por los estudiantes a cada tarea propuesta y la forma en que se arribaba a estas hacían no pudieran ser alcanzadas en otros ambientes de trabajo (regla y compás, geometría dinámica o representaciones en superficies estáticas como el tablero).

Para esta segunda mitad de la secuencia se reconocieron distintas formas de incorporar el papel en la producción de resultados (niveles de suplementación). Algunos de estos no involucraban acciones sobre el papel como realizar dobleces (suplementación carente), dado que se solicitaba apenas adoptar alguna posición argumentada sobre construcciones ya realizadas en el papel. En los casos en que la suplementación del medio fue alta (total y única) se pudieron reconocer formas de manipular este medio ingeniosas, en las que se valían de propiedades físicas del papel que nunca fueron comunicadas por el profesor. Esto deja ver que este medio provee oportunidades para que la creatividad del estudiante se favorezca y que se busquen formas no presupuestadas por el profesor para dar solución a una tarea. Propiedades físicas como la transparencia apoyaron la emergencia de estrategias de construcción y validación que no habían sido contempladas por los investigadores, las cuales, en términos geométricos, brindaban una oportunidad afortunada para introducir objetos geométrios como la simetría axial, propia de este medio.

Otras propiedades físicas del papel como la perpendicularidad y el paralelismo, abrieron una discusión sobre la pertinencia de trabajar con hojas de papel con forma rectangular. Qué cambiaría en las producciones de los estudiantes si el medio empleado no tuviera esta forma, es una pregunta que merece la pena formularse ahora. Posiblemente, distinto a lo ocurrido en este estudio, haber introducido de manera decidida esta propiedad del medio como elemento teórico, hubiera permitido reconocer nuevas formas de justificar las construcciones realizadas. O, en caso contrario, haber trabajado con hojas de pepel con forma no convencional (v.g. circular) hubiera llevado a optimizar el uso de los elementos teóricos disponibles en aras de proveer una justificación de los resultados encontrados. Este es un asunto para explorar en futuros estudios en esta vía.

Una reflexión

Realizar un estudio alrededor de la argumentación en la clase de geometría en el nivel escolar, en el que el medio involucrado fuera el papel fue un riesgo que decidimos tomar. Dentro de nuestras consideraciones y motivaciones, como profesores en ejercicio, estaba el hecho de reconocer que en las clases de geometría convencionales no es usual usar recursos tecnológicos digitales, porque poco se tienen en cuenta en el diseño de las metodologías de clase, o por la falta de formación del profesor sobre su uso. El estudio acá reportado se convierte entonces en evidencia de las oportunidades que trae consigo este material, la naturaleza de los argumentos en las producciones de los estudiantes, el favorecimiento de la creatividad y recursividad que los estudiantes pueden ofrecer ante tareas cuidadosamente diseñadas y el rol tan relevante que adquiere el profesor en consecuencia.

Este resultado, como lo señalamos en nuestra perspectiva investigativa, no pretende ser presentado como algo definitivo o universal. Consideramos que se requiere realizar nuevos estudios en configuraciones distintas, incluyendo las consideraciones que en líneas anteriores hemos mencionado, que permitan comprender las bondades y limitaciones de la geometría del doblado de papel, cuando se usa de manera decidida, en la argumentación de los estudiantes.

Apoyados en la revisión literaria que se realizó alrededor de la geometría dinámica y sus bondades en la educación matemática y de los resultados derivados del estudio presentado en este documento, consideramos como una elección afortunada la integración de recursos digitales y no digitales en la clase de geometría. Tal integración permitiría aportar de mejor manera a la construcción de significados. Sin embargo, este es un asunto que merece ser estudiado de manera cuidadosa en futuros trabajos.

Cerramos este estudio copiando dos valoraciones dadas por miembros del Comité Científico del Simposio SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática), quienes evaluaron y aprobaron la presentación de este estudio en este evento académico a realizarse en Valladolid (España) en septiembre del 2019. El fin de estas es poner en relieve el potencial de seguir realizando estudios en esta vía.

- *Me parece una propuesta relevante y un tema que merece atención.*
- *Dado que el uso de la papiroflexia no suele vincularse a la argumentación en tareas de geometría, y a que se trata de un recurso del que se puede disponer en cualquier aula (cosa que no ocurre en el caso del software de geometría dinámica), considero que es una posibilidad para la enseñanza sobre la que merece la pena investigar.*

REFERENCIAS

Arellano, C. (2013). *La argumentación de alumnos de bachillerato al resolver problemas matemáticos*. Universidad Aotónoma de Querétaro.

Arici, S., y Aslan-Tutak, F. (2013). Using Origami To Enhance Geometric Reasoning and Achievement. *In Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8)*. Antalya, Turkey.

AuthorMapper - Scientific Research and Author Locations Globally. (n.d.). Retrieved April 7, 2019, from https://www.authormapper.com/

Avilés, P. (2016). *Uso de la didáctica del plegado de papel, como herramienta de apoyo en la enseñanza de los contenidos de la geometría para estudiantes del 10º año de educación general básica, de la unidad educativa Best del Cantón Vinces* (Pontificia Universidad Católica del Ecuador; Vol. 3). https://doi.org/https://doi.org/10.3929/ethz-b-000238666

Beltran, D., Duque, K., Fernández, C., y Suárez, B. (2016). El proceso de generalización a partir de pliegues de papel. *3 Encuentro Distrital de Educación Matemática*, 198–205. Bogotá, Colombia.

Blanco, L., y Barrantes, M. (2003). Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=199520330051. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *6*(2), 107–132.

Boakes, N. (2008). Origami-Mathematics Lessons: Paper Folding as a Teaching Tool. *Mathitudes*, *1*(1), 1–9. Retrieved from http://www.coe.fau.edu/centersandprograms/mathitudes/documents/20080901bMathitudesOct08revisionFinalVersionforpublicationOct242008.pdf

Boakes, N. (2009). Origami Instruction in the Middle School Mathematics Classroom: Its Impact on Spatial Visualization and Geometry Knowledge of Students. *RMLE Online*, *32*(7), 1–12. https://doi.org/10.1080/19404476.2009.11462060

Borba, M., y Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. https://doi.org/10.1007/b105001

Brady, K. (2008). Using Paper-folding in the Primary Years to Promote Student Engagement in Mathematical Learning. *31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 77–83. Retrieved from https://dspace.flinders.edu.au/jspui/handle/2328/12191

Çakmak, S. (2009). *An Investigation of the Effect of Origami-Based Intruction on Elementary Students Spatial Ability in Mathematics* (Middle east Technical University, Turquia). Retrieved from http://www.albayan.ae

Camargo, L., Perry, P., Samper, C., Molina, O., y Echeverry, A. (2007). Geometría y lineamientos curriculares: una experiencia en la formación inicial de profesores. *Memorias 9º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 207–215. Bogotá, Colombia.

Cardona, A., Gómez, J., y Santa, M. (2015). La simetría y su comprensión a través del doblado de papel en el marco de la Enseñanza para la Comprensión. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *1*, 218–223.

Chamizo, J. (2007). Las Aportaciones de Toulmin a la Enseñanza de las Ciencias Historia y Epistemología de las Ciencias. *Enseñanza de Las Ciencias*, *25*(1), 133–146.

Chico, J. (2014). *Impacto de la interacción en grupo en la construcción de argumentación colectiva en clase de matemáticas*. Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona.

Crespo, C. (2014). La importancia de la argumentación matemática en el aula. *Premisa*, *24*(July), 23–29. Retrieved from http://www.soarem.org.ar/Documentos/24 Crespo.pdf

Escorcia, L., y Jaimes, C. (2015). Tendencias de uso de las TIC en el contexto escolar a partir de las experiencias de los docentes. *Educación Y Educadores*, *18*(1), 137–152. https://doi.org/10.5294/edu.2015.18.1.8

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica (Tesis doctoral)*. Universidad de València, Valencia.

Fortuny, J. M., Iranzo, N., y Morera, L. (2010). Geometría y tecnología. In T. Mar, M.; Estrada, A.; Sierra (Ed.), *SEIEM* (Vol. 14, pp. 69–85). Granada.

García, T. A. (2009). La psicomotricidad en educación infantil. *Innovacion Y Experiencias Educativas, 16*, 1–10. https://doi.org/19886047

Gómez-Chacon, M. (2010). Educacion matematica y ciudadania. In M. Callejo y J. Goñi (Eds.), *Educacion matematica y ciudadania* (pp. 59–85). Barcelona: Editorial GRAÓ, Dde IRIF, S.L.

González, F., y Vargas, J. (2000). Geometría del Papel: una experiencia de uso de materiales matemáticamente potentes. *NÚMEROS. Revista Didáctica de Las Matemáticas*, *42*, 3–10.

Goñi, J. (2010). La aspiración a la ciudadanía y el desarrollo de la competencia matemática. In M. Callejo y J. Goñi (Eds.), *Educacion matematica y ciudadania* (pp. 11–58). Barcelona, España: Editorial GRAÓ, Dde IRIF, S.L.

Gutiérrez, A. (2009). Aspectos Metodológicos de la Investigación Sobre Aprendizaje de la Demostración Mediante Exploraciones con Software de Geometría Dinámica. *Colección Digital, Eudoxus*, *1*, 1–18.

Harada, E. (2009). Algunas Aclaraciones Sobre el "modelo" Argumentativo de Toulmin. *Contactos*, *73*(1978), 45–56.

Hernández, O. G., Jurado, H. D., y David, Y. (2014). Análisis de publicaciones hispanoamericanas sobre TIC en escuelas y zonas rurales. *Revista Colombiana de Educación*, *66*, 103–126.

Horacio, S., y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de lacompetencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *30*(56), 1092–1112. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a13

Inglis, M., y Mejia-Ramos, J. (2005). La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación en matemáticas. *Revista EMA*, *10*(2), 328–353.

Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. In P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning* (Primera, p. 317). https://doi.org/10.4324/9780203053140

Laiton, E. V., Gómez, S. E., Sarmiento, R. E., y Mejía, C. (2017). Competencia de Prácticas Inclusivas: Las TIC y la Educación inclusiva en el desarrollo profesional docente. *Sophia*, *13*(2), 82–95. https://doi.org/10.18634/sophiaj.13v.2i.502

Leal, C., Suárez, G., Fernández, M., y Moreno, H. (2010). *El plegado en la Geometría. Lineas notables del triángulo*. Bogotá, Colombia.

Mateus, L., Fajardo, N., Rossmajer, G., Andres, G., Luis, V., y Del Pilar, R. (2009). Propuesta metodológica para la enseñanza de la geometría a través de la papiroflexia. *10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Nariño.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares en matemáticas del Ministerio de Educación Nacional*. Retrieved from https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf.pdf

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. In *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá, Colombia.

Meza, P. (2009). Aproximación al modelo argumentativo de Stephen Toulmin mediante su aplicación a cartas de opinión. *Simpósio Internacional de Estudos de Generos Textuais*, 1–29. Caxias do Sul, Brasil.

Molina, M., y Padilla, C. (2012). Argumentar en las disciplinas : una aproximación desde la perspectiva toulminiana. *V Congreso Internacional de Letras. Transformaciones Culturales*, 1–9. Buenos Aires.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 23–41. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x

Pérez, R. (2014). Enfoques Teóricos en Investigación Para la Integración de la Tecnología Digital en la Educación Matemática. https://doi.org/10.4151/07189729-Vol.53-Iss.2-Art.200

Pinochet, J. (2015). El modelo argumentativo de Toulmin y la educación en ciencias: una revisión argumentada. *Ciência y Educação (Bauru), 21*(2), 307–327. https://doi.org/10.1590/1516-731320150020004

Pulido, D. C., Nájar, O., y Guesguan, L. G. (2016). Vivamos la innovación de la inclusión de dispositivos móviles en la educación. *Praxis y Saber, 7*(14), 115–130. https://doi.org/10.19053/22160159.5220

Ramos, M., Sánchez, W., y Huapaya, E. (2014). Argumentación lógica como herramienta para la formación ciudadana en estudiantes de 3ro de secundaria: una propuesta didáctica. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. Lima, Perú*, 1235–1241.

Royo, J. (2002). Matemçticas Y Papiroflexia. *Sigma, 21*, 175–192.

Samper, C., y Toro, J. (2017). Un experimento de enseñanza en grado octavo sobre la argumentación en un ambiente de geometría dinámica. *REVISTA VIRTUAL Universidad Catolica Del Norte, 50*, 367–382.

Santa, M. (2011). *La Elipse Como Lugar Geométrico a Través de la Geometría del Doblado de Papel en el Contexto de Van Hiele*. Universidad de Antioquia.

Santa, M., y Jaramillo, C. (n.d.). La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel enel contexto de Van Hiele. *12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 813–821. Quindio, Colombia.

Santa, M., y Jaramillo, C. (2010). Aplicaciones de la geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual Universidad Católica Del Norte, 1*(31), 338–362.

Santa, M., y Jaramillo, C. (2013). Producción de conocimiento geométrico a través de la visualización de construcciones con doblado de papel. *I CEMACYC*, 1–10. Santo Domingo.

Soto, J., Franco, M., y Giraldo, J. (2014). Desarrollo de una metodología para integrar las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) en las IE (Instituciones Educativas) de Montería. *Zona Próxima, 21*, 34–51.

Sowder, L., y Harel, G. (1998). Types of students Justifications. *The Mathematics Techer, 91*(8), 670–675.

Toulmin. (1958). The Uses of Argument. In *Cambridge, Cambridge University Press* (Primera). Retrieved from http://bilder.buecher.de/zusatz/22/22199/22199087_vorw_1.pdf

Toulmin, Rieke, R., y Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning* (Segunda; M. P. Company, Ed.). New York: Macmillan Publishing Company.

Triana, J., y Zambrano, J. (2016). *Tareas que promueven el uso experto de un elemento teórico en la argumentación matemática* (Universidad Pedagógica Nacional). https://doi.org/https://doi.org/10.3929/ethz-b-000238666

Valero, P. (2012). Educación Matemática Como Una Red. In P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica: una visión socio-política del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 299–326). Bogotá, Colombia: Ediciones Uniandes.

Villa-Ochoa, J., y Borba, M. C. (2011). Humans-with-Media en la producción de conocimiento matemático. El caso de Geogebra. *12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 667–683. Quindio, Colombia: Encuentro colombiano de matemática educativa.

Villareal, M. (2013). Humanos-con-medios: un marco para comprender la producción matemática y repensar prácticas educativas. In U. N. de Córdoba (Ed.), *Formación de profesores, Currículum, sujetos y Prácticas Educativas* (Primera, pp. 85–122). Córdoba.

Weber, K., Maher, C., Powell, A., y Hollylynne, S. (2008). Learning opportunities from group discussions: Warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics, 68*(3), 247–261. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9114-8

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 423–440. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00143-8

ANEXOS

ANEXO 1. ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN PARA LAS TAREAS.

<table>
<tr><td>Núcleo 1</td><td>Notación, punto, segmento, recta, plano.</td></tr>
<tr><td>Enunciado</td><td>Tarea 1 (Instrucciones de notación).

1. Dibuja un punto en la hoja de papel. Nómbralo con una letra mayúscula.

2. Construye un doblez.

3. Dibuja un punto sobre el doblez y nómbralo P.

4. Dibuja otro punto sobre el mismo doblez y nómbralo Q.

Observación 1: El doblez que contiene los puntos P y Q se denomina recta PQ y se simboliza $\overleftrightarrow{PQ}$ o $\overleftrightarrow{QP}$.

Observación 2: Todos los puntos del doblez entre $P\ y\ Q$, incluidos estos dos puntos, se denominan en adelante segmento PQ y se simbolizará: $\overline{PQ}\,o\ \overline{QP}$.

5. Repisa el $\overline{PQ}$ con cualquier color.

6. Dibuja otro segmento y llámalo como desees (repitiendo el procedimiento anterior).

7. ¿Qué diferencia encuentras entre lo que representa cada uno de los siguientes símbolos $\overleftrightarrow{PQ}$ o $\overline{PQ}$?</td></tr>
<tr><td>Tipo de tarea</td><td>Descubrimiento</td></tr>
<tr><td>Def o HG involucrados</td><td>Empleo de la notación correspondiente a los objetos geométricos.

Nociones de punto, recta y plano

Def. de segmento: Conjunto de puntos entre $P\ y\ Q$, incluidos estos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción:

Con esta primera tarea se pretende que los estudiantes empleen la notación correspondiente a los objetos primitivos en geometría además de tener una noción respecto a estos. Y se les posibilite establecer una diferenciación entre segmento y recta.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estratégia o forma de resolver:

La construcción esperada al seguir el algoritmo indicado en el numeral del 1 al 5 se muestra a continuación:

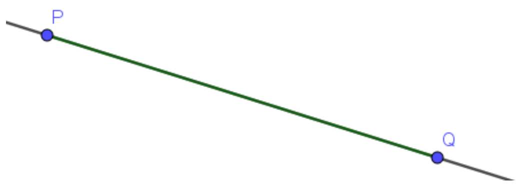


Figura 11. Representación de una recta determinada por dos puntos y un segmento cuyos extremos son los mismos puntos.
Para el numeral 6 se puede hacer una construcción análoga a la anterior con nombres distintos para los puntos.

A la pregunta del numeral 7 hay dos posibles opciones de respuestas o bien que no encuentre diferencia alguna entre la representación de ambos símbolos o que noten que $\overline{PQ}$ está contenido en el doblez $\overleftrightarrow{PQ}$ y aunque comparten los puntos $P\ y\ Q$ no representan el mismo conjunto de puntos ni tampoco se nombran igual.</td></tr>
</table>

Núcleo 1	**Puntos y rectas**
Enunciado	**Tarea 2.** Sobre la hoja de papel dibuja un punto P ¿Cuántos dobleces que pasen por el punto puedes hacer? Constrúyelo(s) Repite el ejercicio con un punto distinto ¿A qué conclusión llegaste? Explica.
Tipo de tarea	Descubrimiento
Def o HG involucrados	**HG. Punto – Infinitos dobleces:** Por un punto se pueden realizar infinitos dobleces distintos.

Descripción:

Se espera que los estudiantes a partir de la discusión respecto a la cantidad de dobleces que obtienen lleguen a la idea de infinidad. Esto a través de comparar la cantidad de dobleces obtenida con las de sus compañeros y con ayuda de preguntas orientadoras por parte del maestro, que cuestionen la existencia de otro doblez frente a una cantidad determinada.

Estratégia o forma de resolver:

Una posible respuesta a la pregunta planteada es que los estudiantes den un número determinado de dobleces, entendiendo que no se les pregunto por la máxima cantidad de dobleces que se pueden hacer sino solamente por el número de dobleces que cada uno de ellos puede realizar.

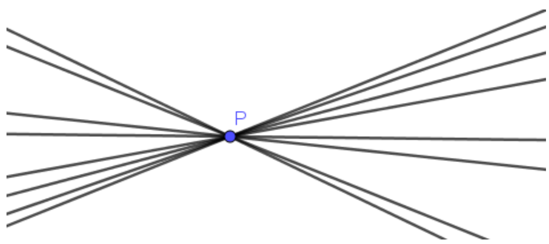


Figura 12. Cantidad de dobleces especifica por el punto $\boldsymbol{P}$.

Otra respuesta a esta pregunta es similar a la anterior pero con una justificación distinta, atendiendo al espacio de la hoja.

La tercera respuesta que se puede presentar es que los estudiantes abstraigan la idea de que aun cuando les resulta imposible representar todos los dobleces en la hoja, hay infinitos.

Núcleo 1	**Puntos y rectas**
Enunciado	**Tarea 3.** Dibuja dos puntos $P\ y\ Q$. ¿Podrías realizar un doblez que pase por ambos puntos? ¿Podrías ahora realizar dos dobleces distintos que pasen por estos mismos puntos? Explica tu respuesta.
Tipo de tarea	Descubrimiento
Def o HG involucrados	**HG. Dos puntos – un doblez:** Dos puntos determinan un doblez.

Descripción:

Con esta tarea se busca que los estudiantes ante la manipulación del medio den por sentado la imposibilidad de generar más de dos dobleces por dos puntos dados, de manera natural. Sin embargo, se prevé que se pueda llegar a otras conclusiones dependiendo de la representación de los puntos sobre la hoja de papel. Es decir, si el tamaño de los puntos no es suficientemente pequeño el objetivo de este tarea puede ir en otra dirección. Para evitar que suceda esto, en caso de presentarse, se confrontará esta respuesta con las de diferentes parejas de trabajo buscando evocar la representación del punto en la hoja de papel como la intersección entre dos dobleces. La cual se ha convenido previamente.

Estratégia o forma de resolver:

Si los estudiantes dibujan los puntos con un grosor mayor al que se estableció como convenio para representarlos, de manera inmediata pueden construir más de un doblez por los puntos dados. Como se ve,

Figura 13. Más de dos dobleces por dos puntos con dimensiones.

Por el contrario, si la representación de los puntos atiende a la idea de que son a-dimensionales se pueden también presentar respuestas distintas a la esperada, al dar una interpretación errada del enunciado. Entendiéndose como dos dobleces distintos por los puntos de manera no simultánea. Como por ejemplo, construir dobleces por P y Q de manera independiente. Así:

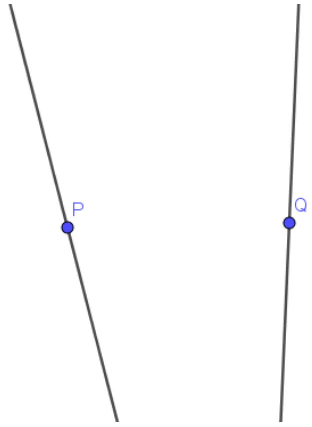


Figura 14. Representación de dos dobleces distintas. Una pasa por $\boldsymbol{P}$ y el otro por $\boldsymbol{Q}$.

Una respuesta derivada de la anterior puede ser que por cada punto se construya más de un doblez. El estudiante puede entender que se le está preguntando acerca de todos los dobleces que pasan por el punto P además de todos los dobleces que pasan por Q. Aun cuando aquí se puede decir que son infinitos dobleces los que pasan por cada punto acudiendo **HG. Punto – Infinitos dobleces** cabe resaltar que quizá no se reconozca el doblez que contiene a ambos puntos al tiempo.

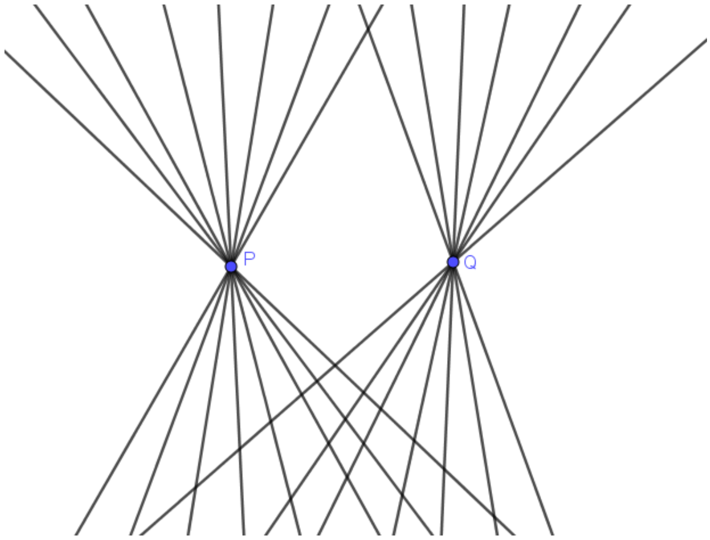


Figura 15. Representación de los dobleces que pasan por $\boldsymbol{P}$ y además por $\boldsymbol{Q}$.

Una tercera respuesta es que el papel como medio empleado posibilite encontrar el único doblez que cumple la condición que satisface el cuestionamiento planteado.

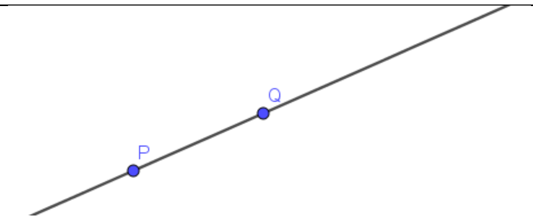


Figura 16. Representación de un doblez por dos puntos dados.

Núcleo 1	**Puntos y rectas**
Enunciado	**Tarea 4.** Construye un doblez. ¿Cuántos puntos puedes dibujar sobre este doblez? Explica
Tipo de tarea	Descubrimiento
Def o HG involucrados	**HG. Un doblez-Infinitos puntos:** Un doblez contiene infinitos puntos.
Descripción: Con este interrogante se espera que el estudiante reconozca que una recta está conformada por infinitos puntos. A partir de dibujar algunos puntos sobre un doblez y confrontándolo con la idea de que estos tan solo son representaciones de objetos que no se ven.	
Estratégia o forma de resolver: Aquí se esperan cuatro posibles respuestas. La primera es que respondan que pueden dibujar un sólo punto en el doblez acudiendo a la mínima cantidad de puntos. También que pueden dibujar una cantidad predeterminada de puntos justificando su respuesta en el tamaño de la hoja o de la punta del lápiz, las cuales se corresponderían con la segunda y tercer respuesta. La cuarta respuesta es que manifiesten que es posible dibujar infinitos puntos en el doblez, aun cuando no sea posible demostrar esto en la geometría del doblado de papel.	

Núcleo 1	**Colinealidad**
Enunciado	**Tarea 5.** Dibuja tres puntos distintos y llámalos P, Q y R. Realiza un doblez que pase por los puntos P y Q a. ¿Este doblez contiene al punto R? Explica b. ¿Es posible ubicar los puntos de tal forma que un mismo doblez los contenga a todos? Explica c. ¿Es posible ubicar los puntos de tal forma que el doblez que contiene a los puntos P y Q no contenga a R? E
Tipo de tarea	Profundización.
Def o HG involucrados	**HG. Dos puntos – un doblez** **Def. colinealidad:** Cuando tres o más puntos están en un mismo doblez se les denomina puntos colineales.
Descripción	

En este tarea se espera que los estudiantes empiecen a sustentar sus ideas apoyándose en la teoría estudiada hasta el momento, particularmente el **HG. Dos puntos – un doblez.** Además se espera que reconozcan que las palabras de orientación habitual como: arriba, abajo, izquierda y derecha no tienen sentido en la geometría del doblado de papel, por lo que se hace necesario usar terminología apropiada sobre la ubicación de puntos en la hoja, empleando únicamente la idea de si los puntos están en un mismo doblez o no, lo que conduce a introducir la definición de colinealidad.

Estratégia o forma de resolver:

Las preguntas en los tres literales propuestos buscan que el estudiante perciba que la colinealidad depende de la ubicación de uno de los puntos con respecto a los otros dos.

Las respuestas a cada uno de los literales se derivan de la representación inicial que haya hecho el estudiante en la hoja. Sin embargo, cada pregunta pretende cuestionar al estudiante frente a la configuración de los puntos de la que partió.

Respuestas al literal a.

La respuesta del estudiante a este literal depende de la configuración de los puntos que él dibujó.

Sí. (Si los puntos que dibujó están alineados).

No. (Si los puntos que dibujó no están alineados).

Respuestas al literal b.

La respuesta a este literal puede estar influenciada por la representación realizada en el primero. Sin embargo no necesariamente sucede esto. Como se presenta:

Sí, es posible que un doblez contenga a todos los puntos P, Q y R. (Si los puntos que dibujó están alineados).

No, no es posible que un doblez contenga a todos los puntos P, Q y R. (Si los puntos que dibujó están alineados).

Depende de la ubicación de los puntos. (Si, independientemente de la representación de los puntos en la hoja, el estudiante reconoce otra forma de ubicarlos).

Respuestas al literal c.

La respuesta que el estudiante de a este literal tampoco depende necesariamente de la representación inicial. Por lo tanto, se pueden esperar las siguientes respuestas:

Si los puntos están alineados:

Si los puntos están alineados se pueden presentar dos posibilidades de responder:

Sí, es posible hacer un doblez que contenga a P y Q pero no a R al realizar el doblez solamente entre los puntos P y Q. Al interpretar el doblez como un segmento. A continuación se presenta la representación:

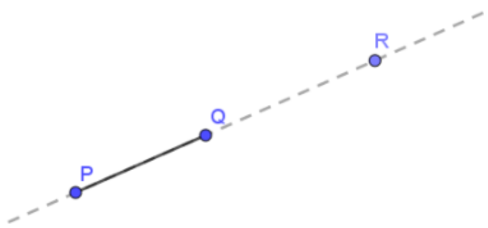


Figura 17. Representación de un doblez solamente por $\overline{\boldsymbol{PQ}}$.

No, porque si el doblez contiene dos puntos de estos, necesariamente va a contener al tercero. A continuación se presenta la representación:

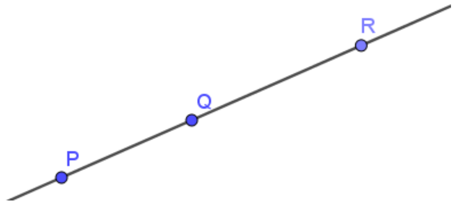


Figura 18. Representación de un doblez por $\overleftrightarrow{PQ}$.

Si los puntos no están alineados:

Sí, existe un doblez que contiene a P y Q pero no a R. Porque el punto R no está alineado con los otros dos.

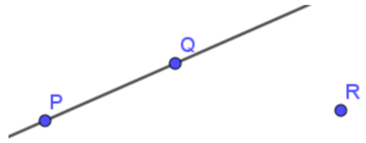


Figura 19. Representación de tres puntos no colineales.

Si el estudiante es consciente que la repuesta varía de acuerdo a la ubicación de R:

La respuesta a los literales b y c podría sustentarse en elementos teóricos para fundamentar su explicación. Así sería:

Depende de la ubicación de R, porque por el **HG dos puntos - un doblez.** Existe un doblez por P y Q pero no necesariamente por R.

Núcleo 1	**Colinealidad**
Enunciado	**Tarea 7.** Dibuja tres puntos O, P y Q. ¿Siempre son colineales? Explica
Tipo de tarea	Profundización.
Def o HG involucrados	Def. colinealidad.

Descripción

El planteamiento aquí formulado ya no pretende, como en la tarea 5, explorar la situación realizando diferentes configuraciones para los tres puntos sino evocar la definición de colinealidad para justificar que no siempre tres puntos son colineales y por eso se definen a partir de esa cantidad.

Estratégia o forma de resolver:

Con esta pregunta se espera especialmente que los estudiantes hagan uso de la definición de colinealidad. Para argumentar las respuestas, se consideran las siguientes posibilidades:

Sí, tres puntos siempre son colineales porque como dos siempre lo son, entonces se puede realizar el doblez que los contiene a ambos puntos y luego sobre éste dibujamos el tercer punto.

No, no siempre tres puntos son colineales porque depende de la ubicación de los puntos sobre la hoja de papel.

Pero si no se considera la definición, se pueden presentar las siguientes respuestas:

Sí, tres puntos siempre son colineales porque puedo dibujar "seguidos" y un doblez los contiene al tiempo.

No, no siempre tres puntos son colineales porque puedo dibujar un punto en otro lugar distinto al doblez donde están P y Q. En este caso el estudiante sabe que dos puntos determinan un doblez y acude a este hecho geométrico aunque no necesariamente a la definición de colinealidad.

Núcleo 1.	**Colinealidad y noción de triángulo**
Enunciado	**Tarea 8.** Dibuja los puntos $A\ y\ B$. ¿En qué lugar de la hoja puedes dibujar un punto C para que la figura que forman los puntos $A, B\ y\ C$ determinen un triángulo? Explica tu respuesta
Tipo de tarea	Profundización.
Def o HG involucrados	Def. colinealidad. **Def. Triángulo:** Dados tres puntos no colineales, un triángulo es la unión de los segmentos cuyos extremos son dichos puntos.

Descripción

Esta pregunta se plantea con el objetivo de que los estudiantes consideren los dos posibles opciones de ubicación de los tres puntos (colineales o no) y se cuestionen respecto a las restricciones que debe tener el punto C para que el triángulo exista. Además, reconozcan que cuando los tres puntos dados son no colineales, hay múltiples opciones de generar un triángulo de modo que amplíen su noción respecto a la imagen asociada que usualmente se tiene de esta figura.

Estratégia o forma de resolver:

Al ubicar los tres puntos de manera no colineal se considera que pueden surgir imágenes que representan triángulos escalenos, equiláteros e isósceles. Por lo tanto, se puede esperar que el estudiante o bien responda que es posible ubicar el punto C en cualquier parte de la hoja, pensando en triángulos escalenos, y quizá no percatarse que si este punto está en el doblez determinado por $A\ y\ B$ no es posible formar el triángulo. O si notan esta restricción, pueden manifestar que el punto C tiene la posibilidad de ir en cualquier parte de la hoja, excepto en el doblez determinado por $A\ y\ B$.

Si la imagen figural que el estudiante tiene de triángulo es la de un equilátero en la posición que se muestra a continuación:

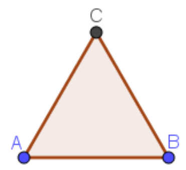


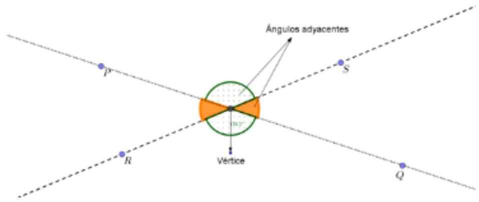
Figura 20. Imagen figural de triángulo

Se puede esperar que exprese que el punto C debe estar en un único lugar, que cumpla la condición de estar en la recta perpendicular, por el punto medio de $\overline{AB}$, de modo que las medidas de $\overline{CA}, \overline{CB}\ y\ \overline{AB}$ sean iguales.

Pero si la imagen que tiene el estudiante no es tan restringida como la de un equilátero, sino como la de un isósceles, se puede esperar que el estudiante exprese que el punto C debe estar en un único lugar, que cumpla la condición de estar en la recta perpendicular, por el punto medio de $\overline{AB}$, de modo que las medidas de $\overline{CA}\ y\ \overline{CB}$ sean iguales.

Esta tarea es de profundización en tanto se espera que el estudiante acuda a un elemento teórico abordado, como lo es la definición de colinealidad para justificar su respuesta.

<table>
<tr><td>Núcleo 2.</td><td>Ángulos</td></tr>
<tr><td>Enunciado</td><td>A continuación observa algunos tipos de ángulos:



Ángulos par lineal. Dados dos dobleces que se cruzan, dos ángulos son par lineal si comparten un lado.

Ángulos opuestos. Dados dos dobleces que se cruzan, dos ángulos son opuestos si comparten únicamente el vértice.

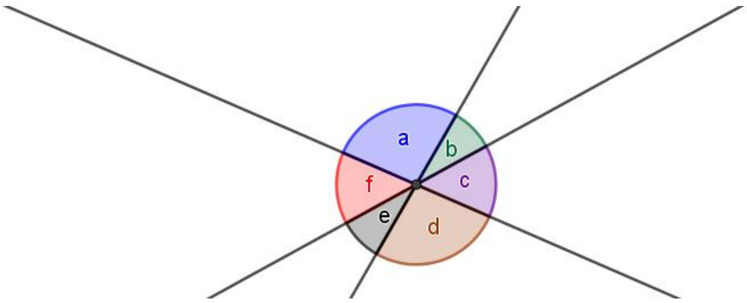
Tarea 9

Construye tres dobleces que se crucen en un mismo punto ¿Hay ángulos que no son par lineal ni opuestos? Sí o no ___

Si tu respuesta es sí márcalos con color y explica por qué. Si tu respuesta es no explica por qué.</td></tr>
<tr><td>Tipo de tarea</td><td>Profundización</td></tr>
<tr><td>Def o HG involucrados</td><td>Ángulos par lineal y ángulos opuestos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción

Con esta tarea se pretende que los estudiantes empleen las definiciones dadas y diferencien entre distintos tipos de ángulos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estratégia o forma de resolver:

Los estudiantes pueden realizar los tres dobleces como lo indica la tarea con una configuración similar a la que se ve a continuación:



De la construcción obtenida, al confrontarla con las definiciones propuestas pueden surgir dos respuestas “Los ángulos que se generan de estos tres dobleces no son opuestos, pero tampoco par lineal” ó “Los ángulos que se generan de estos tres dobleces pueden ser opuestos o par lineal”

La primera respuesta puede indicar que, aunque el estudiante comprende las definiciones dadas para dos dobleces, le resulta difícil abstraer la idea global de cada una de estas, para aplicarla a tres dobleces. La segunda afirmación indica que el estudiante reconoce uno de los tipos de ángulos o inclusive ambos, de aquí se derivan múltiples respuestas como se muestra:

Para ángulos par lineal se pueden tener las siguientes declaraciones:

Todos los ángulos consecutivos son par lineal porque tienen lados en común. Es decir, los $\angle a, \angle b, \angle c, \angle d, \angle e\ y\ \angle f$.</td></tr>
</table>

Cada par de ángulos consecutivos son par lineal porque comparten un lado y además la definición indica que se aplica únicamente para dos dobleces. Ejemplo de esto es el $\angle a$ y $\angle b$. **Para ángulos opuestos por el vértice se pueden tener las siguientes declaraciones:** Todos los ángulos son opuestos por el vértice porque comparten un sólo punto. Como $\angle a, \angle b, \angle c, \angle d, \angle e$ y $\angle f$ Dos ángulos consecutivos son opuestos por el vértice porque comparten un punto. Ejemplo de esto es el $\angle c$ y $\angle d$. **Otra forma equivalente de entender los ángulos opuestos por el vértice puede ser describiéndolos como sigue:** Solo los ángulos que forman una cruz son opuestos por el vértice. Solo los ángulos que están uno en frente del otro son opuestos por el vértice. Son opuestos por el vértice los ángulos que están formados por dos dobleces únicamente. Algunas de las afirmaciones presentadas tanto para ángulos par lineal como opuestos son erradas. Por esto el profesor, solicitará a los estudiantes que analicen las condiciones de cada una de las definiciones y hará énfasis en preguntar cuántos dobleces incluye cada una de estas, para solventar la dificultad que se pueda presentar de considerar a los ángulos par lineal únicamente como los que comparten un lado y los opuestos como aquellos que comparten únicamente el vértice. Lo cual, no se satisface para más de dos dobleces.

Núcleo 2.	**Ángulos**
Enunciado	**Tarea 10.** Toma la bolsa en la que vas a encontrar varios ángulos dibujados, intenta formar parejas teniendo en cuenta que los ángulos tengan la misma medida. Explica qué criterio utilizaste para saber si los ángulos tenían la misma medida.
Tipo de tarea	Descubrimiento
Def o HG involucrados	**Def. de congruencia de ángulos**: dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida. **Def. Ángulos congruentes:** Dos ángulos son congruentes si al sobreponerlos coinciden los lados.
Descripción Esta tarea se propone con el objetivo de que los estudiantes a través de la manipulación de los ángulos elaborados en cartón, de manera autónoma descubran parejas de ángulos que tienen la misma medida, a través de la comparación de estos, y formulen conjeturas que les permitan garantizar si dos ángulos dados son congruentes.	
Estrategia o forma de resolver: Si el estudiante compara los ángulos sobreponiéndolos dos a dos, de manera que coincidan el vértice y uno de los lados, notará que únicamente coincidirán los lados restantes, para aquellos que tienen la misma medida.	

Sin embargo, si el estudiante no compara cada pareja de ángulos sino que parte de manipular los que sabe que tienen la misma medida, buscando alguna relación, quizá puede decir que son congruentes aquellos que se pueden ubicar de manera tal que los lados de cada uno de los ángulos quedan determinados solamente por dos dobleces. Como se muestra a continuación:

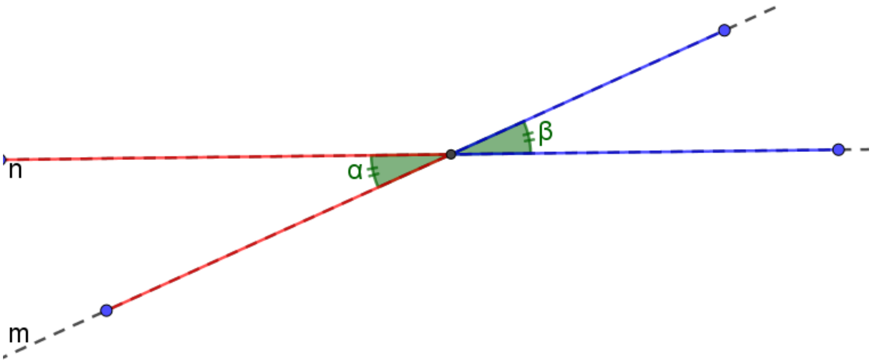


Figura 21. Los ángulos α y β son congruentes porque están determinados por dos dobleces.

Otra posible forma, que se puede presentar al manipular los ángulos con material concreto, es que el estudiante los ubique de manera tal que forme un paralelogramo, y exprese que siempre que dos ángulos son congruentes se puede formar el paralelogramo. Razonamiento válido por parte del estudiante al estar apoyado en el material. Sin embargo, la intervención del profesor aquí es necesaria para recordar que los lados de los ángulos son rayos y por tanto son objetos infinitos, sin límites, a diferencia de los ángulos en cartón que son representaciones de éstos.

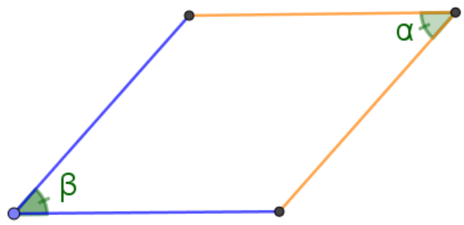


Figura 22. Ángulos α y β son congruentes porque forman un paralelogramo.

Otras respuestas que quizá se puedan presentar, no valida, porque no se apoyan únicamente en la manipulación del material dado o porque hay errores conceptuales. Se evidencian a continuación, junto con las posibles preguntas por parte del profesor para facilitar la reorientación del objetivo de la tarea:

Los medí con el transportador y agrupé los que tenían la misma medida.

Preguntas del maestro:

Posible respuesta 1:¿Existe alguna otra manera de hacerlo, sin usar el transportador? Intenta encontrar otro método, recuerda que estamos trabajando únicamente con doblado de papel.

Posible respuesta 2: Varios son de la misma medida porque tienen el mismo largo.

Preguntas del maestro:

El maestro dibuja un ángulo en el tablero y pregunta al estudiante ¿Los lados de un ángulo tienen un valor fijo determinado? ¿La medida de un ángulo se puede obtener al medir la longitud de sus lados? ¿Por qué?

Posible respuesta 4: Los puse uno sobre otro y así los agrupé. Los que tienen la misma abertura.

Preguntas del maestro:

¿Por qué estás seguro que así es correcto? ¿Puedes compartir tu idea?

<table>
<tr><td>Núcleo 2.</td><td>Ángulos</td></tr>
<tr><td>Enunciado</td><td>Tarea 11.

A cada pareja de trabajo se le ha entregado una bolsa con ángulos, con las etiquetas de sus correspondientes medidas.

Completa la siguiente tabla con las parejas de ángulos que midan 180º

<table>
<tr><td>Medida del ángulo 1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Medida del ángulo 2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
¿Hay alguna relación entre las parejas de ángulos cuyas medidas dieron 180°?</td></tr>
<tr><td>Tipo de tarea</td><td>Descubrimiento</td></tr>
<tr><td>Def o HG involucrados</td><td>Ángulos par lineal.

HG. Par lineal-180°: Dos ángulos que son par lineal suman 180°.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción

El objetivo es dar lugar al HG. Par lineal-180° a partir del reconocimiento de que los ángulos par lineal, son suplementarios. Es decir, que la suma de sus medidas es de 180°. Esto a su vez con el fin de proveer referentes teóricos para que el estudiante argumente en la tarea 13 sobre la perpendicularidad de dos dobleces.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estratégia o forma de resolver:

Ante la pregunta planteada el estudiante puede notar la relación esperada, como no notar ninguna relación. Si el estudiante ubica los ángulos formando un ángulo llano, puede evidenciar que todas las parejas de ángulos par lineal miden 180°. Sin embargo, si el estudiante no ubica los ángulos formando un ángulo llano sino que los sobrepone o los ubica de cualquier otra manera, no notará que estos siempre miden 180°.

Ahora bien, puede que el estudiante ubique los ángulos formando un ángulo llano pero establezca una proposición recíproca a la esperada. Así, si los ángulos suman 180°, entonces son par lineal. La cual no es una proposición verdadera. Además, de manera general se conoce que $p \to q \neq q \to p$. Luego, el profesor reorientará la discusión a que los estudiantes evidencien por medio de ejemplos que estas implicaciones no son equivalentes y propongan el hecho geométrico correspondiente a la tarea propuesta.</td></tr>
<tr><td>Núcleo 3.</td><td>Perpendicularidad</td></tr>
<tr><td>Enunciado</td><td>Tarea 13.

Construye un doblez y trázale un doblez perpendicular. ¿Por qué puedes decir que los dos dobleces construidos son perpendiculares?</td></tr>
<tr><td>Tipo de tarea</td><td>Profundización</td></tr>
<tr><td>Def o HG involucrados</td><td>Definición de perpendicularidad.

Definición de ángulos par lineal.</td></tr>
</table>

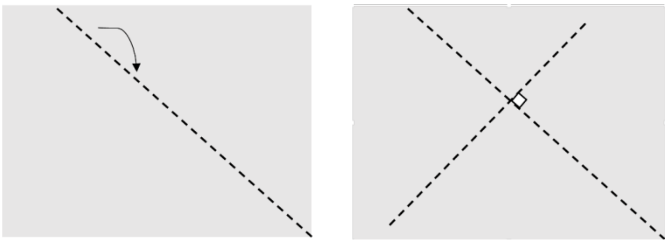
	Hecho geométrico Par lineal-180°. **Definición de ángulos congruentes.** **Definición de ángulos congruentes 2.**

Descripción

El objetivo de esta tarea es que emerja un hecho geométrico entorno a la perpendicularidad, propia de la geometría trabajada, para que sin acudir a un recurso distinto al papel, se pueda tener la garantía que los dobleces son perpendiculares. Lo anterior, teniendo en cuenta que no se tenía un método para conocer la medida de los ángulos.

Estratégia o forma de resolver:

- Una posible estrategia es que el estudiante construya un doblez cualquiera en la hoja de papel y note que al doblarlo sobre sí, obtiene el doblez buscado (Figura 23). Para justificar su hallazgo puede valerse en primera medida del hecho geométrico Par lineal-180 y señalar la presencia de este tipo de ángulos en su construcción. En segunda medida puede acudir a la definición de congruencia entre ángulos para decir que la medida de todos es la misma y como se tienen ángulos par lineal, se deduce que cada uno de los ángulos mide 90°. Por lo tanto, se tiene al menos un ángulo recto.

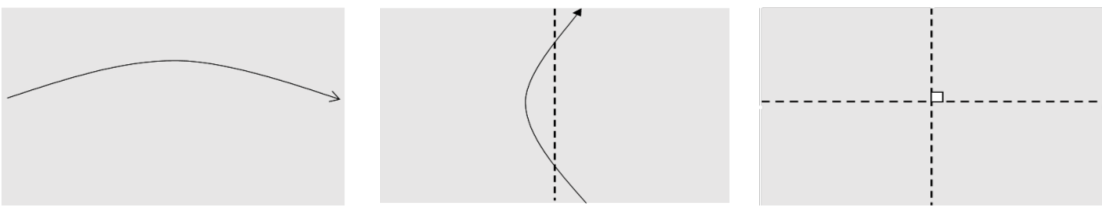


(a) (b)

Figura 23. Construcción por medio del doblado exclusivamente

Presentamos otras posibles soluciones a continuación:

- Se podría generar un doblez perpendicular a otro por medio de los bordes perpendiculares contiguos de la hoja. El primer paso es construir el primer doblez al hacer coincidir los bordes no consecutivos de la hoja sobre sí (Figura 24 a). El segundo paso es que el estudiante repita el procedimiento anterior con los otros bordes no consecutivos (Figura 24 b). Este proceder implican contenidos matemáticos diferentes en los que se evoca ideas de paralelismo y de perpendicularidad, para lograr un par de dobleces perpendiculares (Figura 24 c).



(a) (b) (c)

Figura 24. Construcción mediada por bordes

- Otra posible manera en la que el estudiante puede abordar la tarea es partiendo de construir un doblez y luego hacer coincidir uno de los lados, de cualquiera de los ángulos de las esquinas, sobre este. Sin desdoblar, determinar el doblez a partir del lado restante del ángulo de la esquina.
- Una justificación que puede emerger de cualquiera de las estrategias de solución es que el estudiante se valga de una de las esquinas de la hoja e intente hacerla coincidir con uno de los ángulos formados por los dos dobleces perpendiculares. Con lo que garantiza que se tiene un ángulo recto.
- Por último, es probable que el estudiante se vea imposibilitado de resolver la tarea, al acudir a la noción previa de dobleces perpendiculares, en la que se requiere un ángulo recto, y por tanto un ángulo cuya medida sea de 90°. Al no poder usar una herramienta de medida considere que la tarea no tiene solución.

Núcleo 3.	**Perpendicularidad**
Enunciado	**Tarea 15** Si tienes dos dobleces perpendiculares ¿Los ángulos que se forman de estos dobleces pueden tener medidas distintas? ¿Por qué?
Tipo de tarea	Profundización
Def o HG involucrados	**Definición de perpendicularidad.** **Definición de ángulos par lineal.** **Hecho geométrico Par lineal-180°.** **Definición de ángulos congruentes.** **Hecho geométrico dobleces perpendiculares.**

Descripción

Esta tarea se propuso con el objetivo de profundizar en la propiedad de los ángulos de los dobleces perpendiculares y explorar las condiciones en que esta se da.

Estratégia o forma de resolver:

La estrategia de solución a esta tarea demanda emplear el Hecho geométrico dobleces perpendiculares para garantizar la construcción de los dobleces solicitados. De esta construcción se pueden derivar distintos tipos de justificación.

(a) (b)

Figura 25. Dobleces perpendiculares y su ángulo

- Los ángulos no se pueden solapar con ninguna de las esquinas de la hoja.
- Los ángulos no pueden tener medidas distintas porque los cuatro ángulos no coincidirían.
- Los dobleces no pueden tener medidas distintas porque la medida de unos ángulos es mayor que la de los otros.

Si el estudiante se apoya en los conocimientos o datos que tiene respecto a los bordes de la hoja:

- Los dobleces no pueden tener medidas distintas porque son perpendiculares a los respectivos bordes contiguos de la hoja.
- Los dobleces no pueden tener medidas distintas porque no son paralelos a los bordes contiguos de la hoja.

Núcleo 3.	**Perpendicularidad**
Enunciado	**Tarea 16**

<table>
<tr><td></td><td>Construye dos dobleces l y m que se crucen. ¿Es posible construir un doblez perpendicular a l y m? Explica tu respuesta</td></tr>
<tr><td>Tipo de tarea</td><td>Profundización.</td></tr>
<tr><td>Def o HG involucrados</td><td>Definición de perpendicularidad.
Hecho geométrico dobleces perpendiculares.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción
El objetivo de esta tarea es notar que la construcción pedida es imposible de realizar, y por tanto a partir de la pregunta formulada el estudiante pueda construir sus propios argumentos. También, se vislumbra generar otros hechos geométricos que permitan establecer una relación entre dobleces oblicuos y perpendicularidad.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estratégia o forma de resolver:
• No es posible construir un doblez perpendicular a los dos dados porque si es perpendicular a uno de estos, no es perpendicular con el otro.

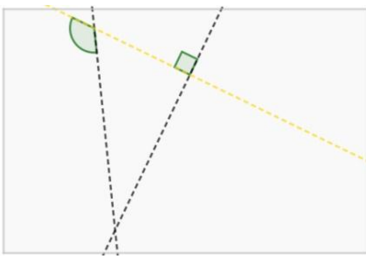



Figura 26. Imposibilidad de lo solicitado por la tarea
• Ona segunda posibilidad tiene que ver con la construcción de dos dobleces perpendiculares. Para esa configuración se obtendría que el tercer doblez es paralelo a uno de los iniciales dados.

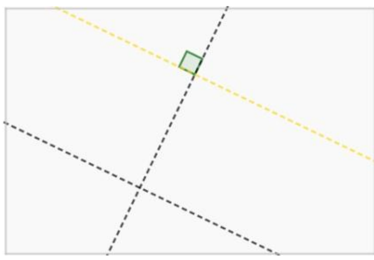
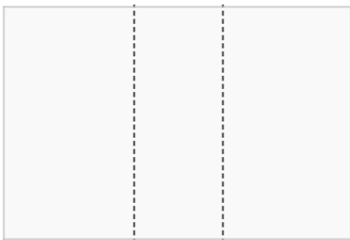
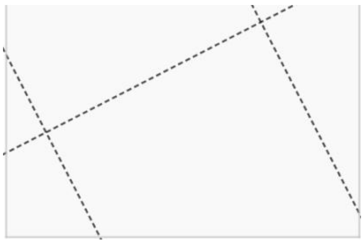



Figura 27. Otra forma de construir.</td></tr>
<tr><td>Núcleo 4.</td><td>Paralelismo</td></tr>
<tr><td>Enunciado</td><td>Tarea 17
Construye un doblez. Construye ahora un doblez que sea paralelo al primero. ¿Cómo podrías asegurar que los dobleces son paralelos?</td></tr>
<tr><td>Tipo de tarea</td><td>Descubrimiento-Profundización.</td></tr>
<tr><td>Def o HG involucrados</td><td>Definición de perpendicularidad.
Definición de paralelismo.
Hecho geométrico paralelos-perpendicular.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción</td></tr>
</table>

El objetivo de esta tarea es que el estudiante explore procedimientos para determinar dobleces paralelos y construir una definición que permita siempre reconocer a través de pliegues que se tienen dobleces paralelos.
Estratégia o forma de resolver: Las posibles soluciones que se podrían presentar en esta tarea, se describieron en la tarea 15 en el que se requería una justificación para un par de dobleces no perpendiculares. Así que omitiremos el procedimiento de las estrategias ya descritas e incluiremos otras posibles formas de abordar la tarea. • Una manera de construir dobleces paralelos es valiendoce de las propiedades presentes en la forma rectángular del papel. Para esto se junta y alinea un mismo borde y se dobla el papel en distintos puntos del papel como dobleces se quieran generar.  *Figura 28. Paralelos por medio de bordes del papel* • Otra posibilidad es partir de un doblez cualquiera y valiendoce del hecho geométrico dobleces perpendiculares construir un segundo doblez perpendicular, posteriormente se repite este proceso sobre este último doblez y se obtiene untercer doblez paralelo al primero.  *Figura 29. Paralelos por HG: dobleces perpendiculares* Una forma similar a la descrita es realizar un doblez cualquiera, y mantener el pliegue. Luego, hacer coincidir el doblez sobre sí, desde los dos extremos del segmento determinado por el borde de la hoja. Sin desdoblar, finalmente, se sobreponen los dos dobleces obtenidos, sobre sí. Al desdoblar la hoja, se obtienen dos pares de dobleces paralelos, cuyo resultado corresponde al de la figura anterior.

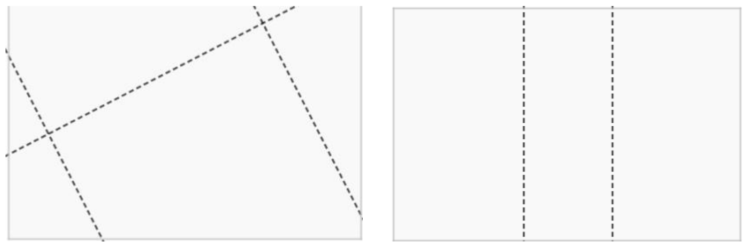
Núcleo 4.	Paralelismo
Enunciado	**Tarea 19** Un estudiante de la clase manifiesta que dos dobleces son paralelos si no hay un punto sobre la hoja de papel en el que se encuentren. Realiza varias construcciones para ilustrar si lo que dice tu compañero de clase es cierto o no y explica.
Tipo de tarea	Profundización.
Def o HG involucrados	**Definición de paralelismo.** **Definición de perpendicularidad.**

<table>
<tr><td></td><td>Hecho geométrico dobleces perpendiculares.

Hecho geométrico perpendiculares-paralelos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción

El objetivo de esta tarea es llevar a que los estudiantes reconozcan las implicaciones de la definición de paralelismo. Además que la visualización no es un parámetro confiable para determinar la relación de paralelismo entre dos dobleces.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estratégia o forma de resolver:

• Se espera que el estudiante realice construcciones de dobleces paralelos valiéndose del hecho geométrico perpendiculares-paralelos. En tal situación se construye un doblez cualquiera, posteriormente un doblez perpendicular al primero y finalmente un doblez perpendicular a este último (Figura 30 a). Otra opción es que se valga de los bordes del papel (Figura 30 b). Con esta construcción el estudiante puede aducir que es cierto lo que se afirma en el enunciado de la tarea.


(a) (b)
Figura 30. Construcción de dobleces paralelos.
• Otra posibilidad es que el estudiante construya dos dobleces oblicuos, es decir, dos que no se crucen en la hoja (Figura 1). En tal caso existen dos opciones a saber: i) argumentar que es cierta la afirmación porque en la hoja no se cortan, en otras palabras, que los dobleces efectivamente son paralelos ya que no se reconoce punto de cruce entre ellos; o ii) argumentar que no son paralelos, pues a pesar de que no se cruzan en la hoja, existe un punto en la prolongación de estos donde se crucen.

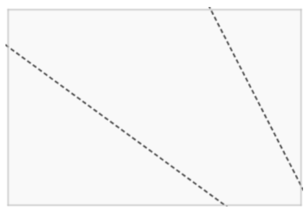


Figura 31. Dobleces oblicuos</td></tr>
</table>

Núcleo 4.	**Paralelismo**
Enunciado	**Tarea 20** Dados dos dobleces $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{MN}$ paralelos. ¿Es posible construir un doblez que sea perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ y que NO sea perpendicular a $\overleftrightarrow{MN}$? Explica tu respuesta.
Tipo de tarea	Profundización.

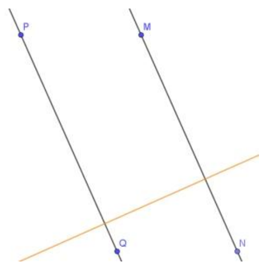
<table>
<tr><td>Def o HG involucrados</td><td>Definición de perpendicularidad.
Definición de paralelismo.
Hecho geométrico dobleces perpendiculares.
Hecho geométrico paralelos-perpendicular</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción
El objetivo de esta tarea es notar que la construcción pedida es imposible de realizar, y por tanto a partir de la pregunta formulada el estudiante pueda concluir de manera que exhiba argumentos, con la posibilidad de proponer otros hechos geométricos que relacionen dobleces paralelos con la perpendicularidad.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estratégia o forma de resolver:
• El estudiante parte de la construcción de dobleces paralelos y se da a la tarea de hacer coincidir únicamente uno de los dos dobleces sobre sí por medio del hecho geométrico dobleces perpendiculares. Por la propia manipulación del papel podrá notar la imposibilidad de que esto suceda (Figura 32), para esto podría recurrir al hecho geométrico paralelos-perpendicular.


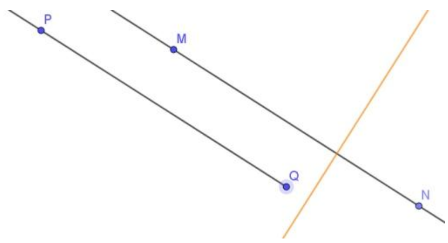
Figura 32. Opción de construcción 1
• Otra opción puede ser la que lleve al estudiante a construir solo una parte de uno de los dobleces solicitados en la hoja, y luego construya uno perpendicular al otro doblez, de tal modo que este no interseque al primero (Figura 33).


Figura 33. Opción de construcción 2
De esta manera el estudiante puede obviar que los dobleces son infinitos, lo que daría pie para argumentos no legítimos.</td></tr>
</table>

ANEXO 2: ANALISIS DE LAS TAREAS

NÚCLEO 1: NOTACIÓN Y COLINEALIDAD

Ideas iniciales

A continuación describimos el momento de la primera sesión de clase que precedió la primera tarea de la secuencia, en el que las nociones previas sobre geometría del doblado de papel fueron presentadas a los estudiantes. La primera noción expuesta fue la del doblez del papel como representación de una recta, para ello se le dio a cada estudiante una hoja en blanco en la que debían construir un doblez. Posterior a esto, se explicó que se adoptaría la idea de punto como la marca mínima que deja el lápiz sobre el papel, hecho que llevaron a cabo los estudiantes usando un lápiz o un color. Finalmente, se les dijo que la hoja de papel se reconocería como el plano. Cabe mencionar, que se les indicó a los estudiantes que la hoja y el doblez en esta, representan objetos geométricos infinitos a pesar de que tienen dimensiones determinadas.

Acuerdos de notación

La primera tarea es de descubrimiento (M) conformada por una serie de instrucciones en busca de establecer acuerdos sobre el lenguaje y la notación que en adelante se utilizaría. A continuación presentamos el enunciado de la primera tarea.

Tarea 1
Dibuja un punto en la hoja de papel. Nómbralo con una letra mayúscula.
Construye un doblez.
Dibuja un punto sobre el doblez y nómbralo P.
Dibuja otro punto sobre el mismo doblez y nómbralo Q.

Observación 1: El doblez que contiene los puntos P y Q se denomina recta y se simboliza $\overleftrightarrow{PQ}$ o $\overleftrightarrow{QP}$.

Observación 2: Todos los puntos del doblez entre P y Q, incluidos estos dos puntos, se denominan en adelante segmento PQ y se simbolizará $\overline{PQ}$ o $\overline{QP}$.

Repisa el $\overline{PQ}$ con cualquier color.
Dibuja otro segmento y llámalo como desees (repitiendo el procedimiento anterior).
¿Qué diferencia encuentras entre lo que representa cada uno de los siguientes símbolos: $\overline{PQ}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$?

Trabajo grupal

Brock y Max desarrollaron esta tarea, la cual tenía un carácter instruccional a fin de reconocer símbolos, convenciones de notación y representación de las ideas iniciales (doblez, segmento y punto) a tener en cuenta en las tareas posteriores. En lo hecho por los estudiantes no se evidencian argumentos, lo cual es entendible por la naturaleza de esta tarea.

Socialización

En el momento de la socialización el profesor pide a algunos estudiantes que por voluntad propia pasen al tablero, realicen la representación de un punto y lo nombren, según lo indicado en el numeral uno de esta. El docente pregunta a los estudiantes sobre la forma en que se representaron los puntos en el tablero. La interacción entre el profesor y Brock, quien responde a su pregunta, se presenta a continuación:

Imagen 41. Representación de puntos en tablero

1300	P	¿Están de acuerdo que todos los puntos que se representaron acá [señala algunos puntos en el tablero], están bien anotados?
1301	Brock	Sí [contestó junto con varios compañeros].
1302	P	¿Este? [Señala un punto cuyo nombre es s – en minúscula-], ¿este? [Señala otro punto].
1303	Brock	¡No!
1304	P	¿Por qué no?, escuchemos, ¿por qué no?
1305	Brock	Porque se tiene que representar los puntos con una letra mayúscula.
1306	P	Y ¿cuál sería la corrección de lo que estás diciendo? De este [señala el punto en el tablero que dice Brock está mal etiquetado].
1307	Brock	Ah [Toma el marcador, pasa al tablero, borra la letra minúscula que representaba el punto y escribe la correspondiente letra mayúscula].

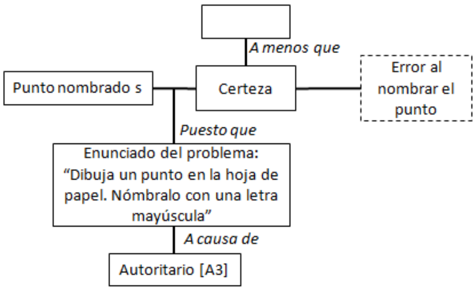
Brock parte de lo que estaba representado en el tablero y apoyado en la información suministrada en el enunciado[4] de la tarea, concluye que es incorrecta la forma en que se nombró uno de los puntos. Por lo tanto, decimos que la estructura del argumento es de tipo deductivo [D]. En esta, la representación en el tablero es el dato, mientras que la información de la tarea se asume como regla general, que permite reaccionar frente a lo presentado en el tablero.

Señalamos la información del numeral 1 de la tarea propuesta como la garantía (*1. Dibuja un punto en la hoja de papel. Nómbralo con una letra mayúscula.*), ya que basado en la información que allí se proporcionó, el estudiante soporta su conclusión alrededor de la pregunta hecha por el profesor sobre el punto en el tablero. En cuanto a la aserción, esta se puede apreciar cuando Brock desaprueba la manera como se representó el punto [1303]. Así, el respaldo de este agumento es autoritario [A3] en tanto que

[4]Dibuja un punto en la hoja de papel. Nómbralo con una letra mayúscula.

Brock acude a la norma establecida en la clase para nombrar puntos en geometría evocando la manera validada para hacerlo; por el contrario en el refutador, no se distingue una declaración que represente excepción de lo argumentado por el estudiante, es decir, no se habló de otras posibles maneras de etiquetar los puntos. Finalmente, debido a que Brock está convencido en su afirmación cuando manifiesta su desacuerdo [1303], podemos identificar un calificador modal de plena certidumbre. De acuerdo a lo mencionado en las anteriores líneas tenemos un argumento incompleto [111101].

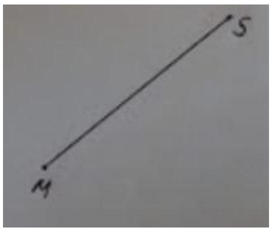
La garantía del argumento tiene validez en lo declarado por el estudiante en cuanto a su estructura lógica, ya que él acude a lo propuesto dentro de la clase para hacer su afirmación. Lo anterior corresponde a un argumento de tipo analítico [A]. A partir de la manera en que se produjo el argumento de Brock, sin intervención del medio, podemos decir que la suplementación del doblado de papel fue carente [C]. Por lo ya expuesto anteriormente, concluimos que el argumento es deductivo, analítico, incompleto, con una suplementación carente del medio en el marco de una tarea de descubrimiento [DA111100, A3CM].



Esquema 33. Argumento de Brock, representación de un punto.

Lo que sigue tiene que ver con los resultados del numeral 6 de la tarea[5]. El profesor pide a Jack que comparta lo desarrollado en torno a este numeral. Jack toma el marcador y representa en el tablero su construcción (Imagen 42 a). A partir de esa construcción el profesor hace algunas preguntas, lo que llevó a la siguiente interacción con Brock y Luciana.

[5] Numeral 6 de la tarea: Dibuja otro segmento y llámalo como desees (repitiendo el procedimiento anterior).



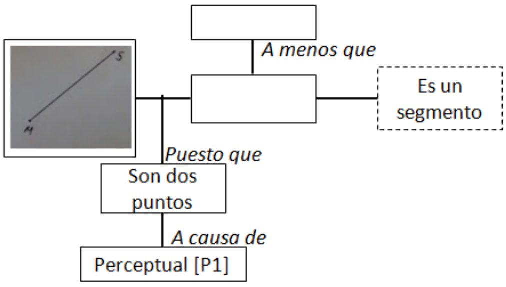
(a) Representación de lo que estaba en el tablero

(b) Movimiento de manos de Brock

Imagen 42. Argumento en torno al numeral 6

1308	P	A ver Brock, ¿Este es un segmento? ¿Esta es la representación de un segmento? [Señala en el tablero el segmento dibujado].
1309	Brock	Sí.
1310	P	¿Por qué?
1311	Brock	Porque son dos puntos [usa los dedos de las manos para ilustrar lo que habla y explicar su idea, Imagen 42. Argumento en torno al numeral 6].
1312	P	¿Y qué más? ¿Qué compone un segmento?
1313	Brock	Una recta.
1314	P	Un segmento lo compone una recta. [Mira entre los estudiantes para dirigirle la pregunta uno de ellos] ¿Usted está de acuerdo Luciana? ¿Un segmento lo compone una recta?
1315	Luciana	Sí.
1316	P	¿Por qué?
1317	Luciana	Porque tenemos dos segmentos [refiriéndose a puntos en vez de segmentos] y para unirlos necesitamos una recta.

Este argumento es de tipo deductivo [D] porque Brock provee una conclusión apoyado en los datos y una garantía. En esta interacción de Brock y Luciana reconocemos el dato en lo declarado por ambos estudiantes en la construcción realizada en el tablero, ya que a partir de esto hacen sus afirmaciones. En el caso de Brock se reconoce una garantía implícita en el hecho de que existan dos puntos [1311] para apoyar su idea de que había un segmento representado en el tablero, la cual fue su conclusión. Así el respaldo es perceptual [P1] en el sentido que Brock no explicitó que acudió a la noción de recta. Respecto al refutador, no se identifica en el discurso del estudiante la exposición de un caso en el que la representación en el tablero no fuera un segmento. Por otro lado, en Brock se evidencia plena certeza de lo que dijo [calificador modal], esto lo podemos asegurar por el movimiento de sus manos al momento de expresarse [1311]. De este modo, se obtiene un argumento incompleto [111101]. A continuación presentamos los elementos de este argumento:



Esquema 34. Argumento de Brock, representación de un segmento.

De la estructura lógica aducimos que no hay concordancia en lo declarado por Brock con respecto a lo establecido en el marco de definiciones de la clase, puesto que en lo definido como segmento se relacionan los puntos extremos y los puntos que están entre esos puntos extremos, podemos decir entonces que el argumento no es legítimo [N]. Por otra parte, en lo que tiene que ver con el medio, evidenciamos una suplementación carente [C], el doblado de papel no es involucrado por el estudiante para desarrollar su argumento. Resumimos el argumento de Brock como incompleto, deductivo, no legítimo, de suplementación carente, en el marco de una tarea de descubrimiento [DN111101, P1CM].

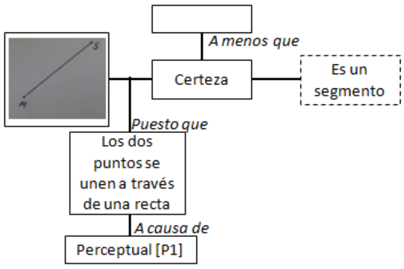
Por otra parte, esta el argumento de Luciana quien arribó a la conclusión apoyada en el dato provisto y la garantía, dando lugar a un argumento de tipo deductivo [D]. La estudiante adoptó la representación del $\overline{MS}$ y el hecho de que se dibujaron los puntos M y S para concluir que era un segmento.

Acerca de los elementos, al igual que Brock, Luciana parte de la información representada en el tablero para realizar su afirmación, por lo que identificamos dicha información como dato (Imagen 42). En cuanto a la garantía, esta se reconoce en la representación hecha en el tablero junto con la observación dos[6] ofrecida en el enunciado de la tarea, debido a que la estudiante en su declaración, cuando se refiere a los puntos como segmentos, asegura que es la recta lo que compone un segmento y con base en ello declara su conclusión. El respaldo de este argumento se apoya en la visualización de los puntos en el tablero por esto perceptual [P1] no se conoce si ella tiene la noción de recta pues Luciana no menciona explícitamente el hecho que haya usado la observación 1 de la tarea, además hasta el momento solo se cuenta con la nociones primitivas de punto, recta y plano, la idea que refiere ella se implementa posteriormente. No se reporta refutador en tanto que no describe una situación en la que se invalide su argumento. En lo que

[6] Observación 2 del enunciado de la tarea: Todos los puntos del doblez entre $P\ y\ Q$, incluidos estos dos puntos, se denominan en adelante segmento PQ y se simbolizará: $\overline{PQ}\ o\ \overline{QP}$.

respecta al calificador modal, se puede catalogar este elemento de su argumento como certero, lo que nos da pie para afirmar que el argumento es incompleto [111101].

La afirmación de Luciana deja ver una desconexión de los elementos declarados en su argumento, por lo que queda de lado el sentido teórico de la definición presentada en el enunciado de la tarea. En consecuencia, tenemos un argumento no legítimo [N]. Respecto al medio, al igual que el argumento anterior, el uso de este es carente [C], porque para esos momentos iniciales de la secuencia de enseñanza la manipulación del doblado de papel era insipiente. Con base en las características se tiene el siguiente esquema:



Esquema 35. Argumento de Luciana, representación de un segmento.

Para el caso del argumento de Luciana reconocemos la siguiente categorización: deductivo, no legítimo, incompleto, de suplementación carente, en un marco de tarea de descubrimiento [DN111101, P1CM].

Para finalizar, queremos sintetizar el rol que jugó el doblado de papel en el desarrollo de la tarea. Por la naturaleza de esta apreciamos que el plegado de papel no imprime un sello distintivo en las ideas que comunican los estudiantes, ya que la suplementación del medio aquí fue carente. Lo anterior se refleja en lo expresado por Brock y Luciana, al referir elementos de las construcciones que bien se hubiesen podido representar en cualquier otro medio, arrojando resultados similares.

Por un punto pasan muchos dobleces

La segunda tarea se enmarca en la modalidad de descubrimiento. Con esta se pretendía establecer el primer hecho geométrico de la secuencia diseñada y así iniciar la construcción de un sistema teórico que proveyera sustento a los estudiantes en la formulación de argumentos en la clase. En una sesión de clase solo se logró abordar el trabajo en parejas. En la siguiente sesión se realizó la socialización en gran grupo.

El enunciado de este problema contemplaba dos etapas de trabajo. La primera solicitaba la construcción de dobleces que pasaran por un mismo punto y cuestionaba al estudiante sobre el número de dobleces que se podían construir bajo esta condición. La segunda etapa pedía al estudiante repetir lo solicitado anteriormente con otro punto y formular una conclusión sobre los resultados. Lo anterior tenía la finalidad de posibilitar al estudiante apreciar que es válido, para cualquier punto que se considere en la hoja, construir infinitos dobleces que lo contengan. Presentamos el enunciado de la tarea:

Tarea 2
Sobre la hoja de papel dibuja un punto P ¿Cuántos dobleces que pasen por el punto puedes hacer? Constrúyelo(s)
Repite el ejercicio con un punto distinto ¿A qué conclusión llegaste? Explica.

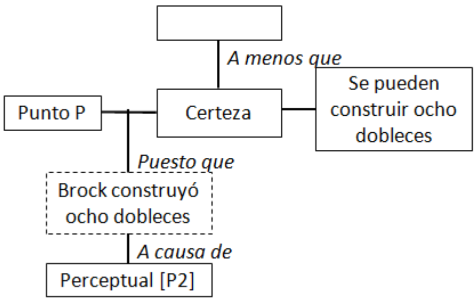
Trabajo grupal

En el trabajo por parejas apreciamos que ambos estudiantes abordaron la primera etapa haciendo dobleces sobre el punto que representaron en la hoja de papel y tanto Brock como Max coincidieron en que se podían hacer cinco dobleces que pasasen por este. Luego, en el momento de repetir el ejercicio con un punto distinto, discutieron acerca del número de dobleces, ya que descubrieron que se podía hacer una mayor cantidad. A continuación la interacción de los estudiantes alrededor del episodio mencionado.

2000	Brock	Cinco y ya [responde al mirar la hoja que Max le mostraba].
2001	Max	[Le entrega la hoja a Brock y la mira] Aunque yo creo que son más [número de dobleces que se pueden hacer por el punto], porque mire, se pueden hacer aquí así [toma la hoja, la despliega y con un bolígrafo señala y enumera posibles dobleces que se podría hacer entre otros ya realizados, Imagen 43. Max señala otros posibles dobleces entre los construidos.], cinco, este aquí así, seis; aquí siete; este aquí, ocho [luego comienza a construir los dobleces previamente señalados].
2002	Brock	Entonces serían más de ocho, porque después se puede hacer así, así, sobre esta, sobre esta [toma la hoja y señala en esta con un lápiz los espacios entre los dobleces ya hechos].
2003	Max	Por eso, venga [toma la hoja y hace un conteo de los dobleces hechos, señalándolos con la ayuda de un bolígrafo], aquí vamos cuatro, ¿cierto?
2004	Brock	Sí.
2005	Max	Un, dos, tres y cuatro; más cinco, más seis, más ocho, más nueve con este, diez, once y doce. Entonces dejémoslo en ocho.

Imagen 43. Max señala otros posibles dobleces entre los construidos.

La estructura del argumento es de tipo inductivo [I], dado que a partir del punto dibujado en el papel y la manipulación del medio para proveer varios ejemplos se arriba a una regla general. Brock y Max, luego de representar un punto en el papel y tras considerar que eran varios los dobleces que se podían construir por dicho punto [2002-2005], afirman que por un punto pasan ocho dobleces [2005]. En lo declarado por Brock y Max distinguimos como dato del argumento la representación del punto P en el papel. Lo construido por Max [2001] en la hoja es un apoyo para que él exprese una regla general, pues esta les permitió determinar [aserción] la cantidad de dobleces que se podían hacer por el punto P [2002]. Observamos entonces que cuando los estudiantes reconocen varios posibles dobleces por el punto enuncian como resultado de su trabajo, que se pueden construir ocho dobleces [garantía]. El respaldo de este argumento es de tipo perceptual [P2] debido a que es partir de plegar el papel que los estudiantes establecen que por un punto se pueden dibujar ocho dobleces. El refutador no se evidencia en este argumento dado que los estudiantes acuerdan su resultado. Aunque Max menciona un número mayor de dobleces [2005], él omite su descubrimiento y opta anotar el resultado que encontró Brock, ocho dobleces. Sobre el calificador podemos asegurar que dada la manera en que Max se convence a sí mismo por medio de lo que construyó, reconocemos la presencia de este elemento con certeza plena. Obtenemos por lo ya expuesto, un argumento incompleto [111101]:



Esquema 36. Argumento de Brock y Max, número dobleces por un punto.

Con respecto al carácter de la garantía, catalogamos el argumento como empírico [E], lo cual se sustenta en que los estudiantes se apoyaron en la experiencia a partir del doblado del papel; es decir, fueron los dobleces elaborados los que dieron fundamento a Brock y Max para formular su conclusión. Por último, podemos decir que el plegado de papel ostenta una suplementación parcial [P] en vista de que es involucrado junto con el uso de elementos como lápiz y bolígrafo para hacer un bosquejo previo a la construcción de los dobleces. En definitiva, señalamos un argumento inductivo, empírico, incompleto, de suplementación parcial del medio, en una tarea de descubrimiento [IE111101, P2TM].

Socialización

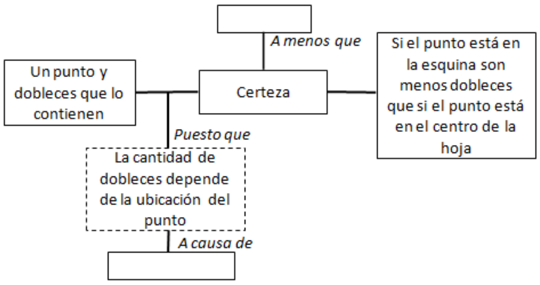
En un primer momento el profesor pide a Mía que lea el enunciado de la tarea y comente su respuesta. Del mismo modo solicita las respuestas de Lorena, Gohan y otros. Destacamos lo dicho por Marcelo pues su idea abrió paso a una réplica por parte de Jet. Para Marcelo el número de dobleces que se podían construir por un punto guarda relación con la posición de este en la hoja. Es decir, si el punto se representa en el centro de la hoja se podrían hacer más dobleces que pasasen sobre este que si el punto se ubica en una esquina. Para Jet la posición del punto en la hoja no incidía en la cantidad de dobleces que por este se pudieran construir. A continuación presentamos la interacción del episodio entre los estudiantes.

2006	Mía	[Lee la tarea] ¿Cuántos dobleces que pasen por el punto puedes hacer? Constrúyelos
2007	P	¿Cuántos pudo construir usted?
2008	Mía	Tres… no, cuatro.
2009	P	¿Quién construyó más de cuatro? A ver acá, Lorena [señala al grupo de Lorena].
2010	Lorena	Nueve.
2011	P	¿Quién más de nueve?
2012	Gohan	Nueve.
2013	Tell	Doce.
2014	Rik	Catorce.
2015	Mac	Doce.
2016	Julio	Catorce.
2017	Luciana	Cuatro.
2018	P	¿De qué depende el número de dobleces que se puede construir? A ver Marcelo.
2019	Marcelo	Depende de la parte de la hoja donde esté el punto.
2020	P	Por ejemplo, muéstrenos lo que usted hizo.
2021	Marcelo	No profe, yo lo tengo en la otra hoja. Pero yo, digamos…, si uno lo coloca [el punto] en toda esta esquina [de la hoja de papel] solo se van a poder menos veces que si uno la coloca en el centro [de la hoja].

Consideramos que lo dicho por Marcelo representa un argumento inductivo [I]. Para él, si el punto está en una esquina de la hoja varía respecto a si está centrado en la hoja de papel. Lo anterior le llevó a concluir como regla general una dependencia [2021]. Apartir de la consideración de dos casos Marcelo establece que el número de dobleces varía dependiendo de la posición del punto en la hoja.

En la construcción del punto y los dobleces reconocemos los datos del argumento, puesto que es el punto de partida del estudiante para declarar su afirmación. El estudiante asegura que el número de dobleces que se podían construir era mayor si el punto estaba en el centro de la hoja, respecto a si este estaba en una esquina [2019, 2021], para enunciar la regla general. De lo anterior resulta que la posición del punto en la hoja determina el número de dobleces a construir, lo que reconocemos como la garantía determinada por Marcelo gracias a su trabajo. Sin embargo Marcelo no presentó su hoja por lo que no sabemos si realiza esta deducción a partir de la contrucción de dobleces o de dibujar líneas por los puntos a los que refiere. Por lo tanto, el respaldo de este argumento es de tipo perceptual aunque este no se puede catalogar.

El argumento carece de refutador puesto que no se menciona una situación en la que se invalide la relación que él establece a pesar de ser una idea errónea matemáticamente. Acerca del calificador modal, la respuesta inicial de Marcelo a la pregunta del profesor fue categórica, lo que posibilita evidenciar certeza y seguridad en esta [2021]. Lo anterior da pie para señalar en lo afirmado por el estudiante un argumento incompleto [111001]. A continuación presentamos los elementos de este argumento.



Esquema 37. Argumento de Marcelo. Número de dobleces por un punto.

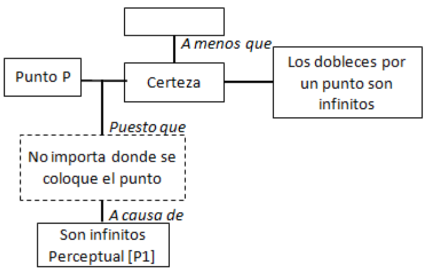
En vista de que Marcelo se apoya en representaciones gráficas para formular su respuesta reconocemos un argumento empírico [E]. El doblado de papel como medio para propiciar el argumento del estudiante ostenta una suplementación total [T], puesto que valiéndose de lo que identifica por medio del doblado de la hoja arriba a su conclusión. En definitiva, el argumento de Marcelo se puede categorizar como: inductivo, empírico, incompleto, de suplementación total, en el marco de una tarea de descubrimiento [IE111001, 00TM]. La conversación entre profesor y estudiantes sigue como se ve a continuación.

2022	P	¿Usted qué opina Jack?
2023	Jack	Si usted la coloca en el centro van a haber por dos dobleces, porque está… bueno van a haber por dos.
2024	P	Jet, ¿usted está de acuerdo con lo que dice Jack?
2025	Jet	Porque los dobleces son infinitos, no importa donde se coloca el punto.
2026	P	No importa dónde se coloca el punto.
2027	Jet	No importa.
2028	P	¿No importa? ¿Siempre se van a poder hacer infinitos [dobleces] según usted? ¿Quién está de acuerdo con Jet?
2029	Iván	[Levanta la mano] Sí.
2030	P	¿De acuerdo con Jet?
2031	Iván	Sí.
2032	P	¿Alguien no está de acuerdo con lo que él [Jet] dice? (…) Entonces ¿qué podemos concluir? ¿Por un punto cuántos dobleces se pueden hacer?
2033	Lorena	¿Se pueden hacer infinitos?
2034	P	¿Infinitos? ¿Segura? Natalie, ¿Cuántos se pueden hacer? ¿Estás de acuerdo con Lorena?
2035	Natalie	Sí.

2036	P	¿Todos están de acuerdo que son infinitos? [algunos estudiantes responden sí y otros asienten con la cabeza]

En el desarrollo de la conversación interviene Jet, quien esboza una idea que permite reconocer un argumento de tipo inductivo [I] en el que se establece una regla general. Lo declarado por Jack [2023] es confrontado con la opinión de Jet mediante la pregunta del profesor [2024], momento en el cual Jet expone sus ideas. El punto de partida de Jet para hacer su afirmación son los dos puntos en la hoja de papel. La aserción de Jet la apreciamos cuando declara que la cantidad de dobleces que se pueden construir es infinita [2025]. La expresión de Jet "*no importa donde se coloca el punto*" [2025, 2027] se reconoce como la regla general que él infiere, siendo tal regla la garantía. Hay que mencionar además que el respaldo se evidencia cuando el estudiante dice *"porque son infinitos"* [2025], declaración de tipo perceptual [P1] en tanto que proviene de una noción de Jet tras su exploración y trabajo en esta tarea, estableciendo su conjetura que en este caso tampoco podemos asegurar si surgió del doblado de papel.

Debemos mencionar la ausencia del refutador en este caso. La manera contundente como el estudiante declara su afirmación permite reconocer certeza en lo que dijo, esto da pie para asegurar que existe un calificador modal de plena certeza. Lo anterior resulta entonces en un argumento incompleto [111101]. La naturaleza de la garantía es empírica [E], puesto que esta la propone Jet gracias a su experiencia al realizar la tarea. El doblado de papel tuvo una suplementación carente [C] pues no se reconocen formas a través de las cuales se viera un rol relevante o protagónico en el uso de este. Lo anterior permite categorizar el argumento como inductivo, empírico, incompleto, con una suplementación carente, en el contexto de una tarea de descubrimiento [IE111101, P1CM].



Esquema 38. Argumento de Jet sobre infinitos dobleces por un punto.

En el desarrollo de esta tarea por parte de los estudiantes encontramos, al igual que en la primera, una incidencia escasa del doblado de papel en la construcción de conocimiento. Lo anterior lo podemos explicar en tanto que lo hecho por los estudiantes en cada momento descrito no es una actividad que privilegie exclusivamente el doblado de papel, pues se hubiera podido ejecutar en otros entornos (v.g. regla y compás, geometría dinámica). Evidencia de ello es la forma en que los estudiantes [2002, 2003] usaron el bolígrafo para señalar dobleces que se podían construir y convencerse entre ellos sin tener que ejecutar estas acciones.

Por dos puntos pasa un solo doblez

La segunda sesión de clase inició con la puesta en común de los resultados de la tarea 2 dado que no se culminó en la anterior sesión. Como resultado se estableció el primer hecho geométrico, presentado a continuación:

HG Un punto-Infinitos dobleces. Por un punto se pueden construir infinitos dobleces.

Ahora corresponde resolver la tarea 3, la cual es una tarea de descubrimiento. El enunciado de la tarea se presenta a continuación:

Tarea 3
Dibuja dos puntos P y Q.
¿Podrías realizar un doblez que pase por ambos puntos?
¿Podrías ahora realizar dos dobleces distintos que pasen por estos mismos puntos? Explica tu respuesta.

Trabajo grupal

Julio lee el enunciado de la tarea y dibuja los puntos P y Q en la hoja de papel, enseguida construye un doblez que contiene ambos puntos y junto con Brock concuerdan que es posible realizar uno. Sin embargo, al dar respuesta al segundo interrogante se generó la siguiente conversación.

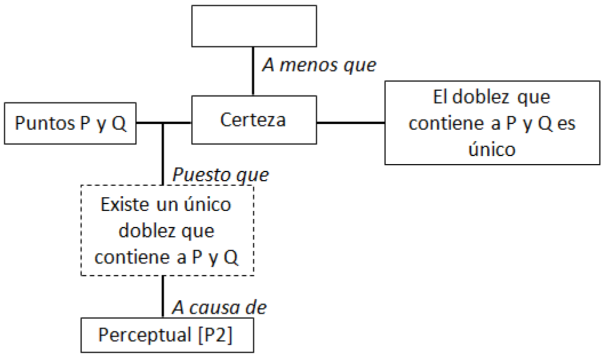
3000	Julio	[Lee el enunciado de la tarea] ¿Podrías ahora realizar dos dobleces distintos que pasen por estos mismos puntos? Explica tu respuesta.
3001	Brock	[Manipula la hoja intentando buscar otro doblez empleando esos dos puntos] No. Obvio no.
[Julio toma la hoja y la manipula intentando hallar un doblez distinto al realizado sin éxito].		
3002	Brock	¿Si ve?
[Julio continúa manipulando la hoja y hace coincidir a P y Q sin marcar el doblez].		
3003	Brock	¡No! porque tiene que pasar por los dos puntos. [Toma la hoja y la manipula buscando un segundo doblez que contenga a P y Q] ¿Entonces cómo ponemos? [Respuesta a la pregunta dada].
3004	Julio	Pero espere... si digamos, hacemos otros dos puntos en otro lado [de la hoja] entonces sí se puede [construir otro doblez].
3005	Brock	No... no porque es lo mismo.
3006	Julio	No, porque es diferente, la posición de los puntos.
3007	Brock	Pero si por ejemplo hacemos un punto acá [dibuja un punto, en la misma hoja de trabajo, distinto a los puntos P y Q] y otro punto acá [dibuja otro punto], P [nombra al primer punto que dibujó], Q [nombra al segundo punto que dibujó] pues el doblez va a pasar por acá [construye el doblez que pasa por los nuevos puntos P y Q] y ¿de qué otra manera se pudiera trazar [un doblez]? ¡Ninguno!

[Julio manipula el papel intentando construir otro doblez por ambos puntos].		
3008	Brock	[Manipula la hoja con su compañero y obtienen el mismo doblez] Si ve, es lo mismo [refiriéndose a la unicidad del doblez] ¿Cómo ponemos? Físicamente es imposible, es imposible.
3009	Julio	Sí.
[Brock consigna en la hoja de respuestas que es imposible realizar más de un doblez].		
3010	Julio	Y ahora tenemos que poner un por qué [a la respuesta dada].
3011	Brock	¡Ay! [Continúa consignado la respuesta: es imposible realizar más de un doblez] porque sólo hay una…, o sea, solo hay una forma de que dos puntos se unan. ¡Sólo hay una forma de que dos puntos se unan! [vuelve a plegar el papel por el doblez hecho con los dos últimos puntos dibujados] Porque solo se puede... porque solo se puede... o sea unir dos puntos por una línea [escribe].

A Brock le resulta imposible generar un doblez distinto al inicial que pase por los dos puntos dados. Aun cuando su compañero le manifiesta que si estos se ubicaran de otra manera se podría encontrar otro doblez [3004], Brock reconoce que la configuración de los puntos no influye en este resultado. Él identifica una propiedad que se satisface siempre para un par de puntos y tiene la noción de que por estos solo se puede trazar un doblez [3011], lo cual expresa en un lenguaje natural, dado que se refiere al doblez con la expresión línea. La línea a la que se refiere Brock tiene la misma connotación que la de recta y deja de lado otras líneas como las curvas.

La estructura de este argumento es de tipo inductivo [I] en tanto que Brock procedió en primera instancia a dibujar los puntos en el papel, apoyado en su manipulación evidenció la imposibilidad de hacer otro doblez distinto al inicial [aserción] que contuviera dichos puntos, lo que lo condujo a derivar la unicidad de este [garantía]. Esta situación se reafirma en el momento que Brock dibuja otros dos puntos por petición de Julio para probar su resultado. De modo tal que bastó abordar dos ejemplos para dar fiabilidad a la idea que tenía Brock.

El papel y el tamaño de los puntos dibujados [datos] fue determinante en la conclusión que estableció Brock, pues si hubiera dibujado puntos con un grosor mayor quizá no hubiera sido inmediato el resultado, además la tarea cuestionaba la opción de poder construir más de un doblez por dos puntos y en tal caso el resultado obtenido podría haber cambiado. Las ideas de Brock para convencer a Julio dejan ver un argumento en el cual la garantía es de tipo empírico [3008] en tanto que se apoya en el mismo medio [papel] para afirmar que “solo se pueden unir dos puntos con una línea” [3011] e intentar convencer así a su compañero. El respaldo es de tipo perceptual [P2] debido a que la maniobra de plegar el papel permite establecer la conjetura a Brokc. En este caso, la negación de su compañero, aun cuando es falsa, permitió que saliera a la luz el calificador modal en el que se evidencia total seguridad de Brock frente a su idea [3008, 3011]. Lo anterior permite distinguir una certeza categórica de este argumento.



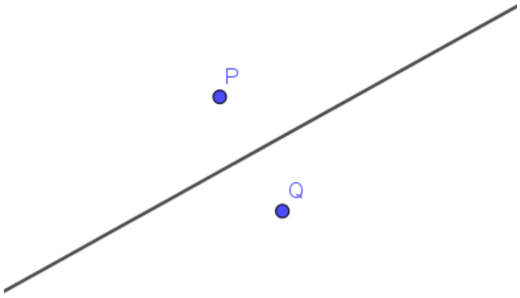
Esquema 39. Argumento de Brock: dos puntos solo se pueden unir por una línea.

En el esquema anterior es posible ver una casislla en blanco que corresponden al refutador, de abajo hacia arriba en el esquema, por lo que según la estructura de Toulmin es incompleto [111101]. La ausencia de este elemento del argumento se da por la imposibilidad de reconocer en la interacción indicios de dichos elemento. Este argumento está totalmente fundamentado en las representaciones plasmadas en el papel, por lo que es un argumento de tipo empírico [E]. El uso del doblado de papel da lugar a una suplementación total [T]. En conclusión, se tiene un argumento inductivo, empírico e incompleto con un nivel del uso del medio total, en el marco de una tarea de descubrimiento [IE111001, P2TM].

Socialización

Luego del trabajo en grupo se procede a realizar la socialización correspondiente. Para esto el profesor solicita a Any presentar su solución, pero ella no acepta su invitación pues considera que su procedimiento está mal. El docente replica en una hoja nueva la construcción que ella había realizado, la cual consiste en construir un doblez entre los puntos P y Q, resultado de sobreponer estos puntos. Esta acción determina el doblez conocido como el eje de simetría entre los puntos $P\ y\ Q$ (Imagen 44).

(a)



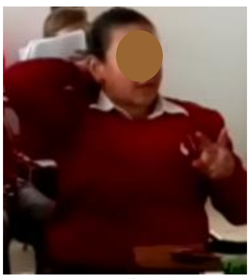
(b)

Imagen 44. Representación de la construcción de Any hecha por el profesor.

El profesor pregunta a sus estudiantes si alguno de ellos hizo una construcción distinta. Jack pasa al frente para presentar su construcción, la cual consiste en un doblez que contiene a los dos puntos. Esta última construcción fue la que realizaron la mayoría de los estudiantes, por lo que el profesor pone en discusión la propuesta de construcción de Any e Isabella inicialmente. El profesor solicita a una de las estudiantes de este grupo leer nuevamente el enunciado de la tarea, luego presenta la representación de Any en el papel y pregunta si el doblez que está allí pasa por los dos puntos. Solicita la opinión de Lorena, otra estudiante, quien manifiesta su desacuerdo, como sigue:

3012	P	¿Tú qué dices? [Otorga la palabra a Lorena].
3013	Lorena	¡Qué no! [Se refiere a que no está de acuerdo con la representación de Any].
3014	P	¿Por qué?
3015	Lorena	Porque es un doblez que atraviese los dos puntos, no que solamente cada punto esté al lado del doblez. [Representa los dos puntos con los dedos (Imagen 45 b) mientras que el doblez con un desplazamiento de la mano de manera horizontal (Imagen 45. Explicación de Lorena respecto a la de Any.) Para indicar que este debía contener los puntos y vertical (Imagen 45. Explicación de Lorena respecto a la de Any.) para indicar que este no los contiene]

(a) Representación de un doblez que contiene los dos puntos



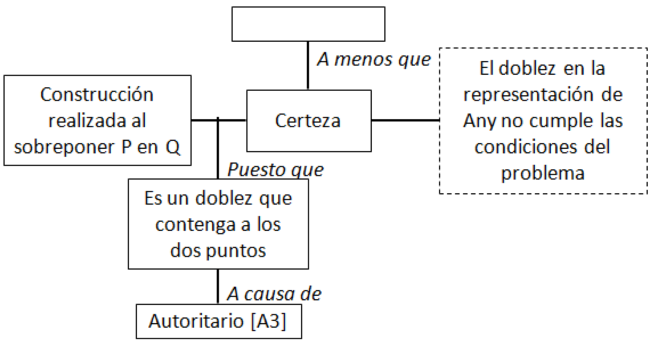
(b) Representación de los puntos

(c) Representación del doblez que pasa por la mitad de los dos puntos.

Imagen 45. Explicación de Lorena respecto a la de Any.

En el momento inicial de la socialización encontramos el argumento de Lorena. Podemos decir que este argumento es deductivo [D] pues se reconoce que ella parte de la representación de Any [datos] y apoyada en el enunciado de la tarea [garantía] encuentra sustento para expresar su conclusión, la cual consistió en decir que la representación realizada por Any no satisfacía los requerimientos la tarea [aserción].

Las acciones de Lorena al expresar su negación [3013] frente a la representación de la construcción de Any son determinantes, lo que exhibe seguridad [calificador modal] en ella al hacer su afirmación. La corporeidad de Lorena toma relevancia en este argumento pues da fuerza a lo que verbaliza. Lorena demuestra claridad en las afirmaciones que realiza, representando con sus manos los objetos geométricos de los que habla [3015]. De esta forma Lorena apoya su discurso en registros corporales, asociando a sus dedos la representación de los puntos (Imagen 45. Explicación de Lorena respecto a la de Any.), al desplazamiento horizontal de la mano el doblez que los contiene (Imagen 45. Explicación de Lorena respecto a la de Any.), y al desplazamiento vertical el doblez que refiere Any (Imagen 7c). Aunque Lorena expresa "no que solamente cada punto esté al lado del doblez", ella únicamente aclara que la interpretación de Any es errada contrastándola con los datos de la tarea, no aporta más evidencia a su argumento. Lorena realiza un razonamiento que le permite inducir que la idea de Any es incorrecta luego el respaldo es de tipo autoritario [A3] pues Lorena se apoya en el propio enunciado de la tarea para mostrar que Any hizo una interpretación errada de este. El otro elemento que establece el modelo de Toulmin está ausente pues no hay casos en los que la idea de Lorena esta no tenga validez [refutador]. El argumento analizado es incompleto [111101] y se presenta, a continuación:



Esquema 40. Respuesta de Lorena frente a la de Any.

Este argumento se soporta en el enunciado de la tarea, Lorena contrasta lo que exige el enunciado frente a lo que hizo Any. Por tanto, la naturaleza de la garantía es de tipo empírica [E]. Reconocemos que la suplementación es en este caso carente [C] pues el apoyo en el papel es casi nulo. En resumen, este argumento es de la forma [DE111101, A3CM].

Continuando con la clase, el profesor presenta la construcción del grupo de Lorena dado que esta, según ellas, se diferenciaba a las demás. Hasta el momento Lorena no había presentado su construcción, tan sólo se había referido a la de Any.

El grupo de Lorena no explica la manera cómo realizó su construcción, tan solo presenta el resultado. De este se puede inferir que partieron de doblar la hoja por la mitad y posteriormente en este doblez representaron los puntos $P\ y\ Q$. El profesor cuestiona si esta es una solución distinta a la de Jack, quien había aportado su construcción al profesor para mostrar que él había hecho su construcción distinta a la de Any, por lo que muestra las dos propuestas en paralelo a todos los estudiantes. Es preciso añadir que el profesor no se enfocó en el proceso de construcción del grupo de Lorena sino que asumió que ellas tomaron convenientemente dos puntos en la mitad de la hoja y por allí trazaron el doblez. Por lo tanto, para él las dos construcciones eran equivalentes puesto que, independientemente de la ubicación de los objetos geométricos en juego, ambas construcciones partieron de la representación de los dos puntos para marcar el doblez. Es decir, que el profesor asumió que los estudiantes tomaron como punto de partida los datos de la tarea.

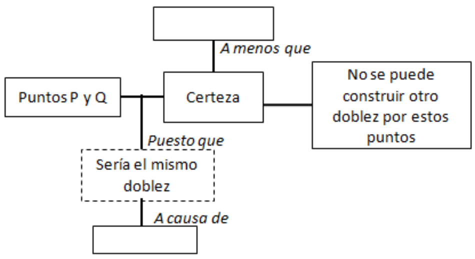
Sin embargo, queda la posibilidad de que las estudiantes se referían a que su construcción era distinta no por el producto de la misma sino por el proceso de construcción involucrado. Esto lo inferimos porque la acción de ubicar dos puntos en la mitad de la hoja, sin usar otro instrumento distinto al papel, de manera visual no resulta ser algo tan preciso como ocurrió aquí. Por tanto, es pertinente mencionar que si fuese así tenían razón, dada la diferencia si se construye primero el doblez y de este se extraen los puntos. De este último caso se obtiene una afirmación recíproca a la que se esperaría establecer, pero no se profundizó en esta situación porque se asumió que los datos, es decir los dos puntos, eran la base de las construcciones presentadas. Así, observar las configuraciones de las dos propuestas de construcción llevó a reconocer que eran equivalentes bajo la consideración realizada. El proceso de construcción de Lorena no se puede precisar debido a que ella paso al frente a presentarla pero no hablo acerca de la manera como la obtuvo.

Luego de esta discusión el profesor solicita a Any leer la siguiente pregunta de la tarea estudiada, aquella que indagaba por la posibilidad de construir más de un doblez por dos puntos. Además, él pide a Any que presente la solución a esta pregunta. Any nuevamente considera errónea su propuesta dado que interpretó mal la pregunta. Ante esto, el profesor solicita a toda la clase presentar una respuesta. Dado que ningún estudiante compartió su solución, el profesor pide a Mauro que presente la de él. La siguiente interacción toma lugar:

3016	Mauro	¡Que no se puede [construir otro doblez] porque sería el mismo doblez! [Acompaña su justificación con gestos de negación].
3017	P	¿No se puede [construir otro doblez] porque sería el mismo doblez? ¿Tú dices que sí [dirigiéndose a Mía]? ¿Por qué?
3018	Mía	Porque nosotras lo intentamos hacer [otro doblez] y se puede uno solo.
3019	P	¿Se puede uno solo?
3020	Mía	Sí.
3021	P	¿Alguien halló algo distinto? Ellas dicen [Alexa y Mía] que no se puede, porque se obtiene el mismo doblez ¿Alguien encontró otro? ¿Quién halló lo mismo?
[Algunos estudiantes levantan la mano]		
3022	P	¿Alguien halló algo distinto?
3023	Mía	Porque nosotras con Alexa tratamos… o sea hicimos los puntos P y Q e hicimos el doblez y solamente se puede por un lado y ya lo buscamos.
3024	Alexa	Y así sea que se ponga el P en otra parte no se puede.
3025	P	¿Puedo preguntar algo? ¿Siempre va a ocurrir así? [refiriéndose a la unicidad del doblez] ¿Habrá algún caso en el que se puede hacer? [Determinar dos dobleces que contengan a los puntos].
3026	Mía	¡No!
3027	Alexa	¡Sí!
3028	Mía	¡Depende!
3029	P	¿Cuál sería el otro caso?
3030	Alexa	Solamente un punto.
3031	P	No, pero teniendo dos puntos.
3032	Alexa	¡Ah no!

En torno al diálogo anterior se despliegan dos argumentos: el de Mauro; y Mía y Alexa en conjunto. De la intervención de Mauro es posible notar que evoca una regla general, la cual corresponde al hecho geométrico que se espera establecer gracias a la tarea, por lo tanto el argumento es inductivo [I]. Suponemos que Mauro partió de los puntos P y Q aunque no lo manifestó, pues era algo común al iniciar la discusión dada la pregunta del profesor [dato]. En la intervención de Mauro [3016] él asegura que no se puede construir otro doblez por dos puntos [aserción], de lo que se evidencia la regla general cuando él manifiesta: “hacer otro doblez correspondería al ya hecho” [garantía].

La intervención de Mauro es una oración que muestra decisión, en tanto que refleja claridad y seguridad respecto a lo que comunica [calificador modal]. Es un argumento incompleto [111001] del que no se conoce si es legítimo o empírico porque su intervención no proporciona evidencia del soporte de su afirmación. Sin embargo, podemos atrevernos a decir que es empírico [E] en tanto que su idea es producto de su construcción y denota experticia en su solución, basada en la experiencia. Lo anterior permitiría decir además que su respaldo es de tipo perceptual. Aun así, no hay evidencia del proceso de razonamiento del estudiante de modo que omitimos incluir este elemento en el diagrama. Por lo mismo, no conocemos el nivel de suplementación que se pudo haber presentado pero de acuerdo a lo que verbalizó consideramos una suplementación carente [C], en tanto que no deja entrever de qué manera exploró formas de hacer otro doblez por los puntos dados (si sucedió) para luego garantizar la unicidad de este [IE111001, 00CM].



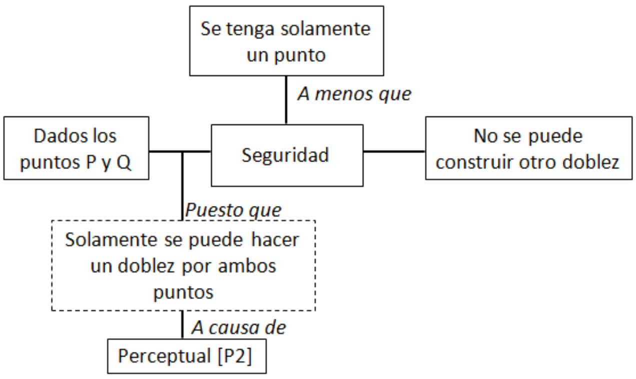
Esquema 41. Argumento de Mauro.

En esta conversación también intervienen Mía y Alexa, quienes procedieron de forma similar a la de Brock (Imagen 46. Construcción de Alexa y Mía.). Ellas partieron de los puntos P y Q [datos] como lo expresa Mía [3023] e intentaron marcar otro doblez por los mismos pero esto les resultó imposible [aserción] [3018, 3023]. Así, el argumento de Mía y Alexa es inductivo [I], pero a diferencia del argumento de Brock, aunque intentaron realizar otros dobleces, no se apoyaron en otros casos (puntos) para testar su conjetura.

Imagen 46. Construcción de Alexa y Mía.

En el momento que el maestro pregunta si siempre se va obtener el resultado que ellas proponen, Mía y Alexa se contradicen al responder casi de manera simultánea "¡No!" "¡Sí!" "¡Depende!" [3026, 3028] porque ellas están pensando en el refutador, expresado por Alexa cuando manifiesta que se tendría otro resultado con "solamente un punto" [3030] al reconocer que entonces sería posible construir más de un doblez por dicho punto. Así se evidencia seguridad en las afirmaciones que ellas establecen [calificador modal].

Este argumento es empírico [E] dado que su garantía es producto de la manipulación de la hoja. Lo que se evidencia cuando Mía expresa "intentamos hacer" [3018] otro doblez. El respaldo en este argumento es de tipo perceptual [P2] porque demuestra una acción asociada a la manipulación del papel, la construcción de un doblez y su imposibilidad de marcar otro por los puntos dados. Así, este argumento es completo [111111].



Esquema 42. Argumento de Alexa y Mía.

Alexa y Mía reflejan que depositan su confianza en la misma herramienta, lo que a su vez, hace que este argumento sea de suplementación total [T]. En definitiva el argumento es inductivo, empírico, incompleto, con un uso del medio en un nivel total e inmerso en una tarea de descubrimiento [IE111111, P2TM].

La conversación entre el profesor y los estudiantes alrededor de este asunto sigue como se presenta a continuación:

3033	P	Usted qué opina Marcelo. ¿Cuántos dobleces pudo construir usted? ¿Uno?
3034	Marcelo	Sí [asiente con la cabeza].
3035	P	¿Y habrá algún caso en el que tenga dos puntos y pueda construir [encontrar] otro resultado al doblar?
3036	Marcelo	No porque digamos… son dos puntos y por los dos puntos siempre va a pasar solo un doblez.
3037	P	¿Y por qué dice eso?
3038	Marcelo	Porque digamos, acá no se puede hacer otro doblez que pase por los dos [muestra su construcción,Imagen 47].

Este argumento corresponde a la intervención de Marcelo. Es inductivo [I] y difiere de la estructura del argumento de Mía y Alexa, aunque tienen los mismos datos y conclusión. Para Marcelo "son dos puntos y por los dos puntos siempre va a pasar solo un doblez" [3036]. Este estudiante parte de los puntos dados [dato] y establece que sólo se puede hacer un doblez que contenga dichos puntos [garantía]. Cuando el profesor indaga sobre la respuesta que plantea Marcelo, él aporta más evidencia a su argumento sustentándola en su construcción como sigue: "Porque digamos, acá no se puede hacer otro doblez que pase por los dos" [respaldo, Imagen 47. Evidencia de Marcelo.] [3038]. Este respaldo que aporta Marcelo a su argumento es de tipo perceptual [P2] debido a que se sustenta en su propia construcción como se puede observar:

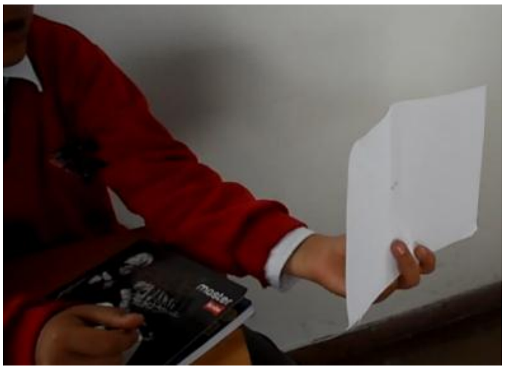
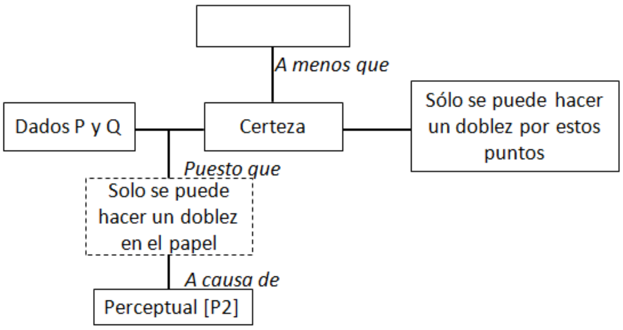


Imagen 47. Evidencia de Marcelo.

En este argumento no se reporta refutador. Marcelo explica tranquilamente su idea, mostrando su representación de la tarea, por ello el calificador modal esboza certeza. El apoyo en la construcción realizada se cataloga como empírico [E]. De lo anterior se deriva un argumento deductivo, empírico e incompleto [111101], de suplementación parcial [P] puesto que se fundamenta en los procedimientos hechos en la hoja, e inmerso en una tarea de descubrimiento [IE111101, P2PM].

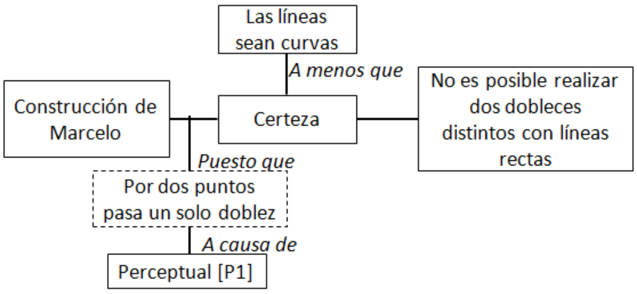


Esquema 43. Argumento de Marcelo.

El profesor pretende indagar más respecto al conocimiento geométrico tras de las afirmaciones de Marcelo pero en ese momento Emilio pide la palabra y se presenta el siguiente diálogo, tras el que se da por finalizada la sesión de clase:

3039	P	¿Y por qué razón justifica eso aparte de lo que ya hizo? ¿Podremos apoyarnos en otra cosa que hayamos visto ya? ¿Qué va a decir Emilio? ¿Qué nos va a compartir?
3040	Emilio	¡Que el caso sería diferente si la línea es curva!
3041	P	¿Si fuese curva?
3042	Emilio	¡Sí! [Asiente con la cabeza].
3043	P	¿Pero en rectas? ¿En líneas rectas?
3044	Emilio	¡No! [Mueve su cabeza en actitud de rechazo].
3045	P	¿No? ¿No es posible?
3046	Emilio	¡Con dos puntos no!

Emilio afirma que no es posible realizar dobleces distintos por dos puntos con líneas rectas [aserción], salvo que estas sean curvas [refutador]. Lo anterior exhibe una interpretación del doblez como línea y no como recta. Este argumento es inductivo [I] porque Emilio parece haber explorado con los puntos dados para discernir el resultado entre líneas curvas y rectas. La idea de Emilio se apoya en la construcción de su compañero, el doblez que contiene a los dos puntos [dato], pues él solo hace una aclaración sobre la cantidad de dobleces que podrían determinarse. Se evidencia firmeza en lo que expresa, con gestos de afirmación [3042] y negación [3043] de manera tranquila, como respuesta a las continuas preguntas del profesor. Por tanto el calificador modal es de certeza. Por tratarse de una justificación basada en la construcción de Marcelo, este argumento tendría una garantía de tipo empírico [E], a su vez un respaldo de tipo perceptual [P1] pues se apoya en la representación gráfica de la construcción de su compañero. Así se tiene un argumento completo [111111].



Esquema 44. Argumento de Emilio.

El argumento expresado por Emilio es de suplementación total [T] en tanto que se deriva de su propia experiencia tras aboradar la tarea en papel junto con la manera de proceder de Marcelo. Luego, es un argumento inductivo, no legítimo, incompleto, de suplementación parcial, en el marco de una tarea de descubrimiento [IE111111, P1PM].

La discusión llevada a cabo y presentada en el anterior apartado permite establecer el segundo hecho geométrico. Este se enuncia con la ayuda de Emilio como sigue:

HG 2 puntos-Un doblez. Si hay dos puntos solamente se puede realizar un doblez por estos.

Los argumentos anteriormente presentados permiten entrever que el uso del doblado de papel fue necesario para el establecimiento de una regla. Esto por la naturaleza misma de la pregunta que indagaba acerca de la posibilidad de construir dos o más dobleces por dos puntos dados, situación que inmediatamente conllevó a la representación de los puntos en la hoja de papel y demandó por parte del estudiante realizar pliegues para su exploración. De esta manera, el medio fue indispensable en la solución de este problema gracias a la noción de doblez que permitía descartar por sí solo a las líneas curvas.

Hay infinitos puntos en un doblez

La tarea 4 corresponde a una tarea de descubrimiento. A través de su desarrollo se pretende introducir un nuevo hecho geométrico que indica que un doblez contiene infinitos puntos.

Tarea 4
Construye un doblez ¿Cuántos puntos puedes dibujar sobre este doblez? Explica

Trabajo grupal

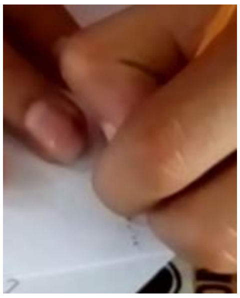
En la solución de este problema Julio construye un doblez por la mitad de la hoja, dibuja 5 puntos sobre este y al parecer le resulta inoficioso continuar dibujando puntos ya que pausa esta labor. De manera inmediata su compañero manifiesta que hay infinitos puntos y se evidencia un acuerdo.

4000	Brock	[Ve que su compañero construye un doblez por la mitad de la hoja (Imagen 48. Proceso realizado por Julio.Imagen 48) y dibuja cinco puntos sobre este] ¡Infinitos!

4001	Julio	¡Sí!… Depende de lo largo que sea la línea…
4002	Brock	No porque si la línea...
4003	Julio	¡Depende de lo largo que sea la línea! [Interrumpe].
4004	Brock	Por eso la línea… si es paralela nunca acaba [se refiere a si la línea es paralela a los bordes de la hoja].
4005	Julio	Ah bueno pues sí…, infinitos.

(a) Julio construye un doblez por la mitad de la hoja.

(b) Julio despliega la hoja que queda divida en dos partes del mismo tamaño.



(c) Julio dibuja cinco puntos en el doblez.

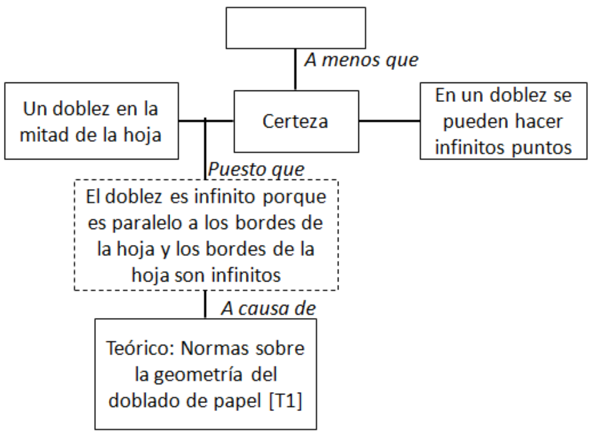
(d) Julio pone las manos sobre la hoja dando por terminada su construcción.

Imagen 48. Proceso realizado por Julio.

Del diálogo anterior se infiere que en un primer momento para Brock el doblez representa una recta, cargada con la idea de infinitud, mientras que para Julio esta representa un objeto geométrico en la que los puntos son un conjunto finito, de ahí que considere que la cantidad de puntos en esta dependerá de su extensión. Como los dos estudiantes están hablando de objetos geométricos distintos y van en diferentes vías, no es posible agrupar sus justificaciones en un solo argumento. Así se tienen dos argumentos inductivos [I] distintos: el primero a cargo de Brock, en el que se llega a la regla que hay infinitos puntos en un doblez; el segundo, a cargo de Julio quien relaciona la extensión de la hoja con el del doblez.

Brock, a partir de la construcción de su compañero, manifiesta que los puntos del doblez son infinitos [aserción], asociando al doblez las mismas propiedades que a los bordes de la hoja. Él tiene la noción de que los bordes de la hoja son ilimitados y por tanto los asocia a objetos infinitos [4004], esta idea puede provenir porque en la primera sesión de clase se indicó que la hoja de papel era una representación del plano y aunque esta tenía límites se debía asumir que era ilimitada. Brock, apoyado en que Julio construyó un doblez paralelo a los bordes del lado ancho de la hoja [dato], asoció tal construcción con el hecho de que, si los bordes se extienden de manera indefinida, el doblez también lo hace, por lo que los puntos que puedan dibujarse sobre este son infinitos [garantía].

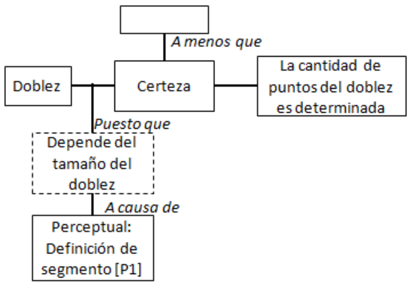
En este argumento no hay presencia de un refutador pues Brock no hace explícito el resultado que se obtendría al construir un doblez en la hoja de papel no paralelo a los bordes de la hoja como sucedió aquí. El respaldo de esta afirmación yace en los acuerdos establecidos sobre la infinitud de los objetos geométricos representados en este medio, luego es de tipo teórico [T1] en tanto que Brock presenta una afirmación justificada en nociones previas para establecer una conjetura. El argumento de Brock denota certeza [calificador modal]. Así este argumento es incompleto [111101] como se presenta a continuación:



Esquema 45. Argumento de Brock un doblez tiene infinitos puntos.

La noción de Brock sobre la infinitud de los bordes de la hoja y el doblez allí construido permiten decir que el argumento es analítico [A]. El nivel de intervención del medio es de suplementación parcial [P], en tanto que en un principio se valió de la representación de su compañero pero no fue esta la que cobró importancia en el argumento sino la idea retomada por Brock. En suma, se tiene un argumento, inductivo, analítico, incompleto, con una intervención del medio parcial y de una tarea de descubrimiento [IA111101, T1PM].

En el caso de Julio reconocemos un argumento inductivo [I] dado que él llega a la formulación de una regla general a partir de sus observaciones sobre el trabajo realizado. Para él la cantidad de puntos contenidos en el doblez depende del tamaño de este [4001, 4003] [aserción], afirmación que deja ver que no exhibe nociones de infinidad de los objetos representados en la hoja de papel. Para él, en los segmentos la cantidad de puntos contenida es finita [garantía], de ahí que realice las afirmaciones que expresa a Brock. Julio parte de los puntos que dibujó sobre el doblez [dato], sin embargo se detiene gracias a la intervención de Brock y asegura que este resultado dependerá de "lo largo que sea la línea" [4001, 4003]. Como Julio se apoya en una idea de él para establecer su conjetura se puede decir que el respaldo de este argumento perceptual [P1], independientemente de que estas ideas no correspondan con la teória matemática Julio se fundamenta en su comprensión de segmento. Esto demuestra certeza [calificador modal] en su idea inicial. Sin embargo, en su afirmación final Julio acepta la idea de Brock pero no se sabe si realmente fue persuadido por él, o más aún, si comprendió lo que su compañero señalaba. Así, no tenemos suficiente información para expresar el calificador modal. El refutador esta ausente en este su argumento. Por tanto, se tiene un argumento incompleto [111101], como se presenta a continuación:



Esquema 46. Argumento de Julio un doblez tiene determinados puntos.

Este argumento es empírico [E] pues se apoyó en la acción de representar los puntos sobre el doblez, además el uso del medio es parcial [P] pues para Julio era necesario dibujar los puntos en el doblez y así descubrir en estos la cantidad de puntos contenida. Todo lo anterior ocurrió en una tarea de descubrimiento [M]. Así, este argumento es inductivo, empírico, incompleto, con una intervención del medio parcial, en una tarea de descubrimiento [IE111101, P1PM].

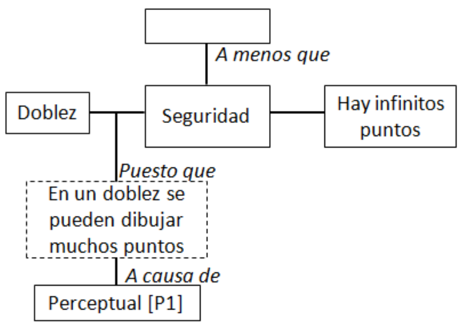
Socialización

En la socialización de la tarea el profesor solicita a Alexa leer el enunciado y expresar su respuesta. El siguiente diálogo toma lugar:

4006	P	¿Cuántos [puntos] puede dibujar? ¿Cuál fue su respuesta?
4007	Alexa	Eh... la respuesta fue que eran infinitos.
4008	P	¡Infinitos! Eh... Jana está de acuerdo, que son infinitos ¿Por qué? ¿Cuál fue su respuesta?
4009	Jana	¡Sí! [Asiente] Profe porque vea...
4010	P	Ven, ven, nos explicas acá a todos [solicita que pase frente a sus compañeros].
4011	Jana	No...
4012	P	Lo que ibas a explicar allá lo dices acá para todos. Mira, ella [Alexa] dice infinitos [puntos]. ¿Por qué dice usted que [se pueden dibujar] infinitos [puntos]? [Habla] Para todos...
4013	Jana	Pues porque acá en esta línea se pueden ubicar artos puntos [señala el doblez construido].
4014	P	¿Artos puntos?

4015	Jana	Son muchos, sí.

En el diálogo anterior se evidencia un argumento por parte de Jana de tipo inductivo [I] sustentado en la representación de varios puntos en el doblez de su hoja. Jana expresa "acá en esta línea se pueden ubicar artos puntos" [aserción]. Ella, a partir de un caso donde ve la cantidad de puntos que puede representar, establece como regla que son muchos los puntos que se pueden representar en un doblez [garantía], inclusive comparte la idea de Alexa, quien asevera que estos son infinitos. De esta manera Any se convence a sí misma y pretende convencer a los demás ejemplificando con su construcción que en un doblez se pueden dibujar infinitos puntos por tanto el respaldo es de tipo perceptual [P1]. Esta frase nos permite pensar que el procedimiento que realizó Jana inició con la construcción del doblez [dato] sobre el cual dibujó puntos para llegar así a la misma conclusión dada por Alexa [4007]. Para Jana la cantidad de puntos en el doblez no depende del tamaño de la hoja. En su intervención no reporta refutador porque su idea sólo contempla que un doblez tiene infinitos puntos. Es un argumento incompleto [111101] y se presenta como se ve en el siguiente esquema.



Esquema 47. Argumento de Jana en un doblez se pueden dibujar infinitos puntos.

La garantía de este argumento es de tipo empírico [E] porque incluye como sustento los puntos dibujados en el doblez y el proceso llevado a cabo para determinarlos. Este argumento es de suplementación carente [C] porque el rol del medio no fue relevante. Por tanto, su estructura es [IE111101, P1CM].

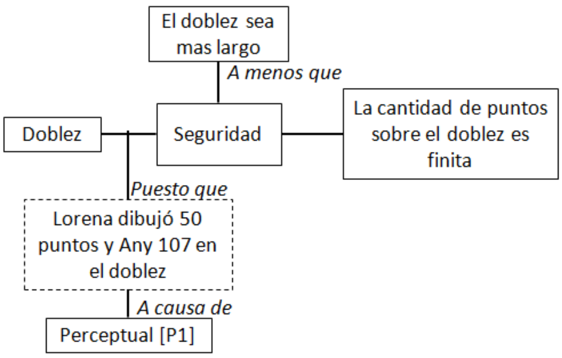
El profesor ahora averigua si algún estudiante encontró una respuesta distinta a la de Jana. Lorena contesta que ha logrado dibujar 50 puntos mientras que Any ha hecho 107. El maestro les propone pasar al frente a presentar los puntos dibujados en la hoja y explicar sus respuestas, ante lo cual se da la siguiente interacción.

4016	Lorena	Yo opino, que uno termina porque el doblez llega hasta ahí [se refiere a las dimensiones de la hoja] pero si el doblez fuera más largo [extiende su brazo hacia arriba] se podrían dibujar más [puntos].
4017	Any	Depende [del tamaño] de la hoja.

4018	P	O sea, depende [del tamaño] de la hoja. ¿Si esta hoja fuera más grande se pueden hacer más [puntos]?
[Lorena asiente]		

En la intervención de Lorena y Any surge un argumento inductivo [I] que se apoya en las dimensiones de la hoja para concluir que la cantidad de puntos que se puede dibujar es finita [aserción] y depende de estas [garantía] ("uno termina porque el doblez llega hasta ahí" [4016]). Any y Lorena parten de la construcción del doblez [dato], lo que se evidencia en expresiones como "si el doblez fuera más largo se podrían dibujar más puntos" [4016]. Por lo tanto, para ellas la cantidad de puntos del doblez depende del tamaño de la hoja [refutador]. En este fragmento podemos observar que Any y Lorena incurren en una interpretación similar a la de Julio respecto a los límites de la hoja y su relación con la prolongación de los objetos representados en esta. Consideramos esta concepción como un refutador porque se expresa una relación directa entre la cantidad de puntos que se pueden dibujar y el tamaño de la hoja.

A pesar de esta concepción inadecuada, ellas manifiestan su respuesta con total seguridad frente a la clase [calificador modal]. El respaldo tiene lugar aquí a partir de los puntos que ellas presentan para justificar su idea de finitud del doblez luego este se categoriza como perceptual [P1]. Así, se tiene un argumento completo de la forma [111111]. El argumento se presenta a continuación:



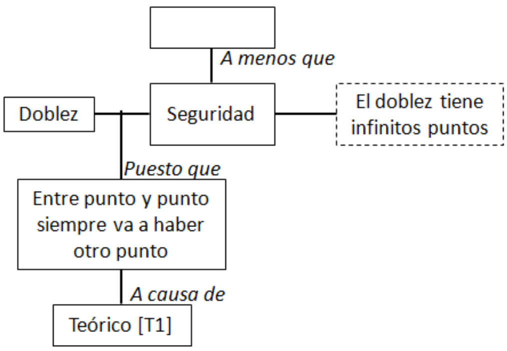
Esquema 48. Argumento de Any y Lorena un doblez tiene finitos puntos.

En lo presentado la conclusión emerge de la experiencia al dibujar 50 y 107 puntos en el papel respectivamente, por lo que es un argumento de tipo empírico [E]. Como esta respuesta está sustentada completamente en el medio es de suplementación total [T] y surge en el marco de una tarea de descubrimiento [IE111111, P1TM].

Después de esto el maestro pone en consideración la analogía del microscopio para así hacer ver a los estudiantes vacíos entre punto y punto. Se concluye que siempre se encontrarán espacios entre dos puntos y por tanto la infinidad de estos no depende del tamaño de la hoja. Finalmente, se procede a concretar a partir de esta discusión el tercer hecho geométrico. Para esto el maestro solicita a los estudiantes verbalizar la relación de dependencia observada. Se evidencian dificultades para lograr su formulación y, apoyados en la hoja de trabajo, se genera la siguiente discusión:

4019	Any	Entre más largo el doblez, más infinito.
4020	P	Entre más largo el doblez...
4021	Marcelo	Depende del tamaño de la hoja.
4022	P	¿Depende del tamaño de la hoja? ¿Sí? Mauro, ¿usted qué opina?, ¿depende del tamaño de la hoja?
4023	Mauro	¡No! Eh... siempre que haya un doblez van a haber puntos infinitos porque entre punto y punto va a haber otro punto.

De la anterior interacción es posible notar la dificultad de los estudiantes al formular hechos geométricos bajo una estructura condicional. Aun cuando se había expuesto la idea de que un doblez tiene infinitos puntos, ellos no logran expresarla en correspondencia con esto. Mauro por su parte interviene y señala que siempre van a encontrarse infinitos puntos en este, sin importar el tamaño de la hoja. Las ideas de él conforman un argumento deductivo [D] en el que el dato corresponde a "siempre que haya un doblez", la garantía a "entre punto y punto va a haber otro punto" y la aserción a "van a haber infinitos puntos". De acuerdo a la garantía anterior el respaldo de este argumento es de tipo teórico [T1] porque se sustenta en ideas válidas que se han abordado en la clase, como la que implementó el maestro con el ejemplo del uso del microscopio pero sin dar evidencia de plegar el papel. No se reconoce refutador en su argumento, expresa sus ideas con seguridad [calificador modal]. Por tanto, el argumento es incompleto [111101] como se puede ver en seguida:



Esquema 49. Argumento de Mauro, infinitos puntos.

Este argumento es analítico [A] pues Mauro trae a colación nociones de los puntos en objetos geómetricos. Como el uso de papel no intervino en la conclusión establecida es de suplementación carente [C]. El argumento está inmerso en una tarea de descubrimiento [M]. Luego el argumento es deductivo, analítico, incompleto, de suplementación carente, en una tarea de descubrimiento [DA111101, T1CM].

A través de este problema se esperaba formular una conjetura respecto a la cantidad de puntos contenidos en un doblez. De acuerdo a la manera como la clase asumió la solución de la tarea podemos decir que el uso del recurso tuvo un papel secundario debido a que el objetivo de la tarea se podía conseguir sin necesidad de plegar el papel o inclusive sin necesidad de representar puntos en este. Sin embargo, reconocemos que el papel, dadas sus dimensiones, permeó muchas respuestas a la tarea dada. Los estudiantes emplearon el papel para construir el dato de la tarea y así determinar la cantidad de puntos contenidos en el doblez, aunque las conclusiones que hallaron no fueron resultado de plegar el papel sino de representar algunos puntos allí.

De este problema y la puesta en común se estableció un hecho geométrico que se consignó de la siguiente manera:

HG Un doblez-infinitos puntos. Si tengo un doblez se pueden dibujar infinitos puntos en este.

¿Tres puntos están en un doblez?

Los estudiantes trabajan por parejas la tarea 5. A través de esta se involucra la manipulación del papel y el uso de los hechos geométricos formulados hasta el momento, todo esto con el propósito de favorecer el tránsito de argumentos empíricos a teóricos. La noción de colinealidad se introduce con el fin de referirse a diferentes configuraciones entre tres o más puntos, sin necesidad de acudir a referentes espaciales usuales como derecha, izquierda, arriba, abajo, etc. El enunciado de la tarea es el siguiente:

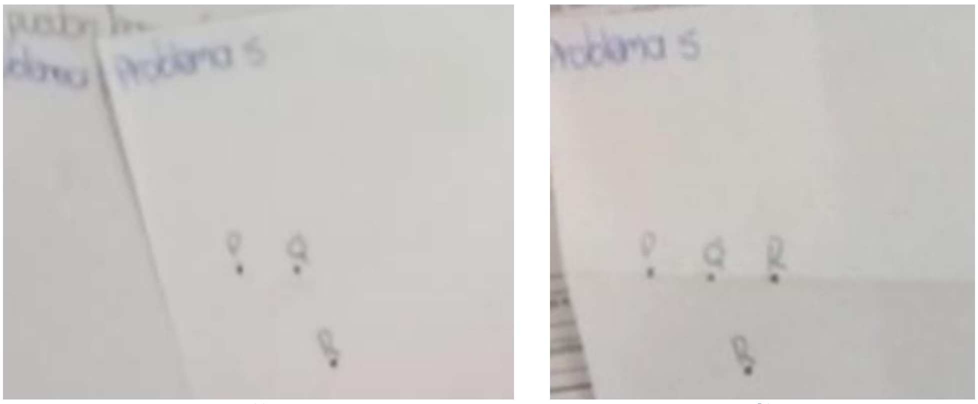
Tarea 5
Dibuja tres puntos distintos y llámalos P.Q y R.
Realiza un doblez que pase por los puntos P y Q.
¿Este doblez contiene al punto R? Explica.
¿Es posible ubicar los puntos de tal forma que un mismo doblez los contenga a todos? Explica.
¿Es posible ubicar los puntos de tal forma que el doblez que contiene a los puntos P y Q no contenga a R? Explica.

Trabajo grupal

Brock dibuja tres puntos de manera no colineal sobre la hoja de papel, nombrándolos como se indicó en el enunciado. Posteriormente procede a abordar la primera pregunta, para esto construye un doblez por los puntos P y Q y nota que el punto de R no pertenece al doblez construido. De esta forma se da cuenta que dependiendo de la ubicación del punto R, este puede estar o no contenido en el doblez. A continuación se muestra la explicación que da a su compañero alrededor de la primera pregunta:

5000	Brock	Acá tenemos este doblez [construye el doblez por P y Q] entonces sólo se puede… ¿Cómo es la pregunta? [Revisa la pregunta] (…) ¡Sólo se puede hacer si el punto R se ubica en otro ángulo! O sea que no esté en la misma dirección que el punto P y Q [refiriendo que los puntos sean no colineales], porque si lo hacemos acá [doblez] obviamente el doblez va a pasar por el punto R, pero si lo hacemos acá [señala a R], no. [Brock consigna la siguiente respuesta] Sólo se puede hacer si ubicamos el punto R en distinta trayectoria en la que están los puntos P y Q.

Notamos que Brock, al explicar a Julio su idea, expone un argumento de tipo inductivo [I] pues se apoya en diferentes lugares de la hoja donde podría estar al punto R para reconocer una propiedad [garantía] (Imagen 49). Brock parte de los puntos dados [datos] para llegar a su conclusión. En este caso, a diferencia de los argumentos anteriores, Brock construye su argumento para convencer a Julio a la vez que a sí mismo con respecto a lo que piensa, pues expresa duda al comunicar su idea inicialmente. Brock no expresa su idea de manera continua, sino que la va produciendo y comunicando a su compañero. Esta forma de expresarse no necesariamente indica que tenga inseguridad frente a lo que concluye. Por el contrario, presenta pausas porque verbaliza su idea a la vez que determina la solución. Lo que hace Brock es dibujar el punto R de manera no colineal con respecto a los otros dos y razona de acuerdo a esta configuración, reconociendo que el punto R podría tener otra ubicación y en consecuencia dar lugar a otra respuesta.



(a) (b)

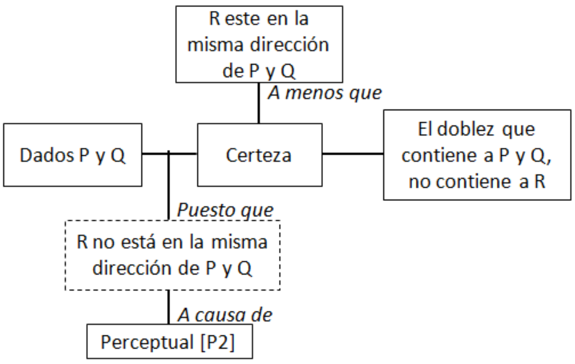
Imagen 49. Representaciones de Brock.

Las anteriores ilustraciones permiten ver que las afirmaciones de Brock emergen de su proceso de construcción en la hoja. Así, Brock en principio aborda la tarea dibujando los tres puntos y, luego de hacer el doblez por P y Q, lee nuevamente el enunciado de la tarea, reconociendo otra posible ubicación para R en el doblez determinado por P y Q.

Para expresar su conclusión Brock se vale de la noción de ángulo y dirección. Él reconoce dos posibles opciones de ubicar el punto R: colineal o no respecto a los otros dos puntos, ideas expresadas por él en términos de “ángulo” y “dirección”. Brock sabe que los tres puntos no necesariamente están en el mismo doblez cuando manifiesta: “¡Solo se puede hacer [que los puntos sean no colineales] si el punto R se ubica en otro ángulo!” [aserción], refiriéndose con ello a la colinealidad.

Aunque Brock no expresa certeza desde el inicio de su argumento es notorio un incremento en su propio nivel de convicción con respecto a la veracidad de su respuesta. Así, es posible vislumbrar duda en su primera representación de modo tal que no se le facilita expresar su idea, pero a medida que la desarrolla él cree en lo que dice y lo asume como verdadero. Inferimos certeza en su afirmación final [calificador modal]. La respuesta de Brock contempla las dos posibles configuraciones para los puntos, a la pregunta formulada. Sin embargo, su conclusión la refiere únicamente a cuando los tres puntos son no colineales al expresar "¡Sólo se puede hacer si el punto R se ubica en otro ángulo! O sea que no esté en la misma dirección que el punto P y Q" de lo que se podría decir que este argumento tiene un refutador que surge cuando Brock considera si el punto R está en el doblez de P y Q.

Brock emplea la expresión ángulo para referirse a la no colinealidad, que le sirve para darse a entender empleando un lenguaje desde sus nociones previas, pero no emplea esta noción para soportar su afirmación de modo tal, que el respaldo en este argumento es de tipo perceptual [P2] pues la tesis de Brock se apoya en las dos representaciones de los puntos que hizo sobre el papel, en una de las cuales emplea el plegado, a partir de lo que establece su conjetura. Así, este es un argumento completo de la forma [111111] y se presenta enseguida (Esquema 50Esquema 50. Argumento de Brock: Ubicación del punto R.):



Esquema 50. Argumento de Brock: Ubicación del punto R.

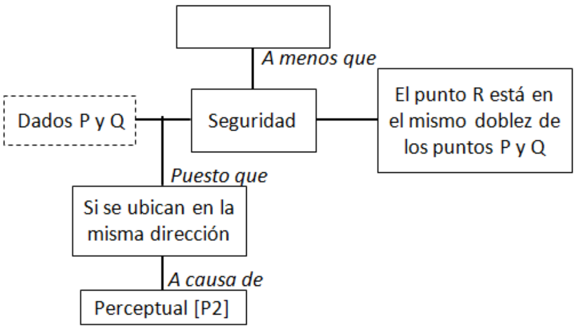
Este argumento es empírico [E] porque se apoya en las dos representaciones hechas sobre el papel. A su vez, es de suplementación total [T] debido a que el doblez por P y Q se emplea para ubicar el punto R, e identificar las dos posibles configuraciones de los tres puntos. Así, el argumento expuesto es inductivo, empírico, completo, con una intervención total del medio, en una tarea de descubrimiento. El argumento expuesto es: [IE111111, P2TM].

Al segundo interrogante respecto a este problema Brock responde lo siguiente:

5001	Brock	¡Sí! Pues haciendo los puntos todos en una sola trayectoria [dibujarlos en un mismo doblez]. Sí porque vea acá lo que yo hice [muestra a Julio los tres puntos dibujados anteriormente sobre un mismo doblez]. Entonces los puntos todos están en una misma trayectoria [señala con el dedo los tres puntos] y hacemos un doblez [replica el doblez], pues el doblez va a contener a todos los puntos.

Brock se apoya en la construcción ya elaborada y establece que los puntos pueden estar en un mismo doblez [aserción], en tanto estos estén en una misma dirección [garantía]. Este argumento es abductivo [A] pues Brock busca una configuración de puntos que le permita responder afirmativamente a la pregunta de la tarea [dato] y para ello se apoya en una regla que ha establecido a partir de su experiencia al resolver la tarea. Estas ideas las ha alcanzado a través del desarrollo de tareas previas y, además para este caso se ha apoyado de marcar el doblez con el fin de presentar y convencer a su compañero respecto a su afirmación, ejemplificando la situación de la colinealidad de los puntos por tanto el respaldo de este argumento es de tipo procedimental [P2].

Brock repisa el doblez para soportar con ello su afirmación. El calificador modal es de seguridad plena pues Brock se apoya en su experiencia previa, expresando de manera inmediata a su compañero su respuesta. No hay refutador en este argumento, aun cuando Brock es consciente de que el punto R puede tener otra ubicación respecto a los puntos P y Q, tal como lo mencionó para el primer literal de la tarea más no en esta oportunidad. Se tiene una vez más un argumento incompleto de la forma [111101].



Esquema 51. Argumento de Brock. El punto R puede estar en el mismo doblez de P y Q.

Por la forma de proceder de Brock el argumento es empírico, pues se basó únicamente en la representación del punto R en el doblez. En este caso la suplementación es total [T] pues Brock emplea el papel para mostrarle a Julio su idea, al tiempo que le manifiesta: "y hacemos un doblez, pues el doblez va a contener a todos los puntos". El argumento expuesto es abductivo, empírico, incompleto, de suplementación total en una tarea de descubrimiento [AE111101, P2TM].

Al responder a la última pregunta los estudiantes no utilizaron el papel debido a que en la primera pregunta habían dado una explicación que contemplaba las posibilidades de la ubicación del punto R. Por ello no se registra nueva información.

Socialización

El profesor cuestiona a los estudiantes por la forma en que respondieron la pregunta del literal a. Para esto, le indica a Lorena que lea el enunciado y solicita a Emilio que presente su explicación, como se observa en la siguiente transcripción:

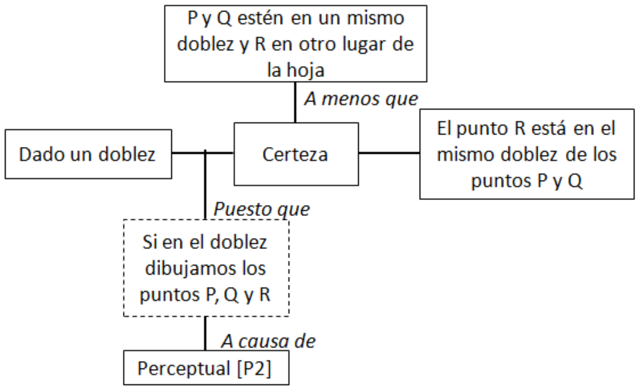
5002	P	Emilio, en la construcción que ustedes hicieron el doblez contenía el punto R, ¿Sí o no?

5003	Emilio	¿R?
5004	P	¡R! ¡Sí!
5005	Emilio	¡Sí! Sí porque... sí porque digamos... si los tres puntos el P el Q y el R se encuentran en una línea recta pues... si en un doblez colocamos los tres puntos encima de él pues quedan todos en la misma línea pero si digamos solo el [punto] P y el [punto] Q están ahí [en el doblez] y el [punto] R está, digamos, en otra parte de la hoja pues ahí ya no se podría [decir que el doblez contiene al punto R].

De acuerdo a la explicación de Emilio, es factible reconocer que él parte del doblez [datos] sobre el cual dibuja los tres puntos, distinto a como se solicitaba en la tarea. Por tanto, Emilio encuentra que el doblez contiene al punto R [aserción]. A pesar de que Emilio no parte de los datos de la tarea obtiene una conclusión acertada de este, en la que contempla las dos posibilidades para la ubicación de los tres puntos dados. El argumento es inductivo [I] porque se llega al establecimiento de una regla general a partir de la consideración de configuraciones de puntos. La garantía de este argumento es de tipo empírico en tanto que Emilio se apoya en su procedimiento sobre el papel, al dibujar los tres puntos en un doblez, para determinar que estos sí pueden pertenecer al mismo. Esta idea es evidente cuando Emilio expresa: "si en un doblez colocamos los tres puntos encima de él pues quedan todos en la misma línea", lo que atribuye sustento a la construcción. La declaración de Emilio carece de sustento teórico, asunto natural, pues con este problema se buscaba introducir la definición de colinealidad apenas, así el respaldo en este argumento es de tipo perceptual [P2].

Cuando Emilio emplea el conector "pero" [5005] en el establecimiento de su idea presenta condiciones específicas para las cuales su respuesta al problema sería distinta. Él reconoce otra posible configuración para los puntos al manifestar que estos no quedarían en un mismo doblez, si sólo P y Q están en este y R está en otro lugar de la hoja. Es decir, que frente a su respuesta inicial el reconocimiento de otra configuración de los puntos se convierte en el refutador de este argumento.

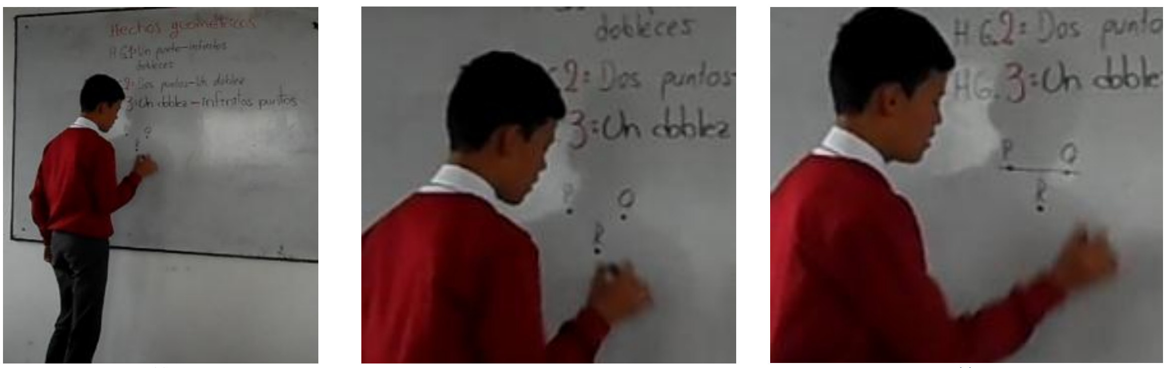
Emilio se expresa de manera pausada. Esta situación parece estar asociada a que no sabe cómo verbalizar su idea. Aunque está seguro de su respuesta porque responde reiterativamente de manera afirmativa "¡Sí! Sí porque... sí porque…", se toma el tiempo necesario para hacerse entender y habla con calma hasta finalizar su idea. Así, apreciamos que el estudiante tiene certeza [calificador modal] de su hallazgo. El argumento es completo [111111] y se presenta en el siguiente diagrama:



Esquema 52. Emilio afirma que el punto R está en el mismo doblez que P y Q.

El argumento es empírico en tanto que su garantía se fundamenta en la representación de los puntos en el papel. Por esta misma razón es de suplementación total, pues Emilio garantiza la colinealidad de los tres puntos a través del doblez que realiza en el que los ubica. Argumento inmerso en una tarea de descubrimiento [M]. Luego, este argumento es inductivo, empírico, completo, de suplementación total y de una tarea de descubrimiento [IE111111, P2TM].

La clase continúa y ahora el profesor solicita a otro estudiante presentar la respuesta que dio a este mismo literal de la tarea. Brock lee: “Sólo se puede hacer [el doblez que no contenga a R] si ubicamos el punto R en distinta trayectoria [doblez] en la que está en el punto P y Q”. Adicionalmente, él hace una representación en el tablero como se observa en las siguientes imágenes:



(a) (b) (c)

Imagen 50. Representación de la construcción de Brock.

La interacción entre Brock y el profesor es la que sigue:

5006	Brock	Acá dibujé el punto P, acá dibujé el punto Q, acá dibujé el punto R, entonces yo hice un doblez así [señala una recta determinada por P y Q] que atravesó sólo el punto P y Q. ¡Y ya!
5007	P	¿O sea… qué concluiste?
5008	Brock	Que sólo para que el punto R no esté en el mismo doblez que el [los] punto[s] P y Q no se tiene que ubicar al lado [de los puntos] si no arriba o abajo [del doblez].

5009	P	¿Arriba o abajo del doblez?
5010	Brock	¡Sí!

De la anterior interacción es posible notar que Brock utiliza un lenguaje distinto al que originalmente había empleado en la explicación de su idea durante el trabajo grupal. Sin embargo, no se analiza nuevamente su intervención porque ya se estudió detalladamente en ese momento. Vale la pena rescatar que las expresiones que él introdujo como: "al lado", "arriba", "abajo" le permitieron al profesor aprovechar este momento para intervenir con algunas aclaraciones de orden teórico. El profesor plantea una situación hipotética a los estudiantes en la que les interroga acerca de lo que sucedería con los puntos representados en el tablero, si le diera un giro a este. Alexa responde que el punto R quedaría al lado del doblez, suponiendo un giro de 90°. Cuanto el profesor considera un giro de 180° Jack manifiesta que el punto R quedaría arriba del doblez. La intención del profesor era hacer notar que los puntos tienen la misma configuración, independientemente de su ubicación en el tablero o los giros que se puedan hacer a este. Al preguntar si la representación de los puntos es la misma al girar el tablero los estudiantes responden al unísono de manera afirmativa.

Lorena pasa al tablero y expone que los tres puntos pueden pertenecer a un mismo doblez. Para ilustrar su idea ella representa tres puntos no colineales (Imagen 51). La siguiente interacción toma lugar:

Imagen 51. Lorena realiza en el tablero tres puntos no colineales

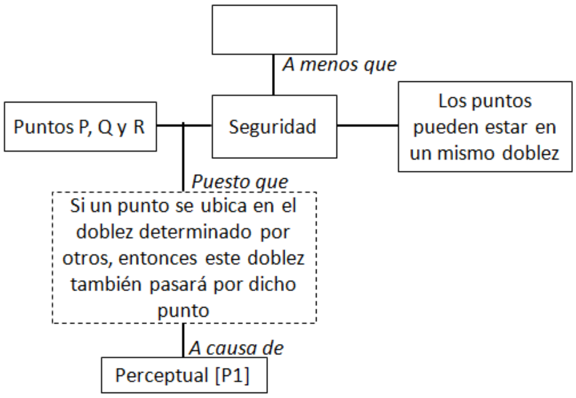
5011	Lorena	Porque si digamos… si los puntos de P, Q y R se hubieran puesto todos en la misma dirección [doblez por P y Q] entonces el doblez también hubiera pasado por R [demuestra con un movimiento en sus manos una línea de P a Q].
5012	P	¿Si los hubiera puesto en una misma dirección, dice usted, entonces el doblez hubiera pasado por él [punto R]?
5013	Lorena	Sí.

Alrededor de las ideas provistas por Lorena notamos un argumento de tipo inductivo [I] dado que se llega al establecimiento de una propiedad. Ella comparte con Brock que el punto R puede estar fuera del doblez determinado por P y Q. Retoma además lo representado en el tablero para mostrar su acuerdo con Brock, pero añade que el punto R puede estar en el doblez por P y Q, situación que explica a la clase al expresar "si los puntos de P, Q y R se hubieran puesto todos en la misma dirección entonces el doblez también hubiera pasado por R”, en paralelo dibuja el punto que satisface lo que ella dice (Imagen 52Imagen 52. Lorena representa en el tablero dos posibles configuraciones para tres puntos.).

Imagen 52. Lorena representa en el tablero dos posibles configuraciones para tres puntos.

De acuerdo al procedimiento presentado por Lorena en el tablero es posible ver que ella en los dos casos que representa parte de dibujar los puntos P, Q y R [dato]. Ella ilustra el caso específico al que refiere ubicando el punto R (que no nombra) convenientemente para obtener la colinealidad de este con respecto a los puntos P y Q, o lo que es igual, para mostrar que todos estos pueden pertenecer a un mismo doblez. Así, la garantía del argumento de Lorena es empírica y tiene un respaldo de tipo perceptual [P1] debido a que es a partir de sus representaciones en el tablero que presenta sus ideas. La repuesta de Lorena considera dos posibles configuraciones para tres puntos, aunque se enfoca en el caso en que hay colinealidad. Como ya se mencionó, la idea que defiende Lorena [aserción] corresponde a la posibilidad de que los puntos puedan estar en un mismo doblez.

El argumento de Lorena no denota respaldo pues se apoyó únicamente en una representación gráfica tanto en su hoja como en el tablero. Este también es semejante al que construyó Brock en el trabajo grupal, pues como se presentó anteriormente Brock también reconoció las dos posibles maneras de ubicar al punto R respecto al doblez por P y Q. Sin embargo, cuando el profesor le preguntó a Brock acerca de su respuesta, él se valió únicamente de la respuesta que consignó en la hoja de papel, restringida a un caso, por tanto se interpretó que la respuesta de Brock difería de la de Lorena. De todas formas, se reconoce que ambos notaron las dos posibles configuraciones de los puntos al abordar la tarea [garantía]. Lorena es contundente con sus gestos, lo que denota seguridad en su explicación [calificador modal]. Así se tiene un argumento incompleto [111101], como puede observarse:



Esquema 53. Lorena afirma que depende de donde se ubiquen los puntos

De la respuesta de Lorena no reconocemos en su discurso indicios sobre el uso dado al papel, para así poder asegurar algo sobre la presencia del medio en su trabajo, por tanto señalamos que en su argumento habría suplementación carente [C]. El argumento es empírico [E] porque se apoya en las representaciones hechas en el tablero, inscrito en una tarea de descubrimiento [M]. Este argumento es inductivo, incompleto con un uso del medio carente resultado de una tarea de descubrimiento [IE111101, P1CM].

Dos estudiantes más presentan sus soluciones y surge una discusión respecto a si estas son similares a las ya presentadas. Ante una representación en la que los puntos están alineados, los estudiantes determinan que es similar a la que está en el tablero y frente a una en la que los puntos no están alineados los estudiantes manifiestan que el punto R está fuera del doblez. Ante estas representaciones Any concluye:

5014	Any	Se pueden ubicar de distintas maneras..., el doblez y no pasa por R o sea ubicando los puntos de distinta manera.
5015	P	¿Se pueden hacer de distintas maneras y el doblez no pasa por R? ¿Siempre va a pasar por cuántos?
5016	Any	Por P y Q.

Al someter a discusión el literal B de la tarea los estudiantes responden afirmativamente y la siguiente interacción tiene lugar:

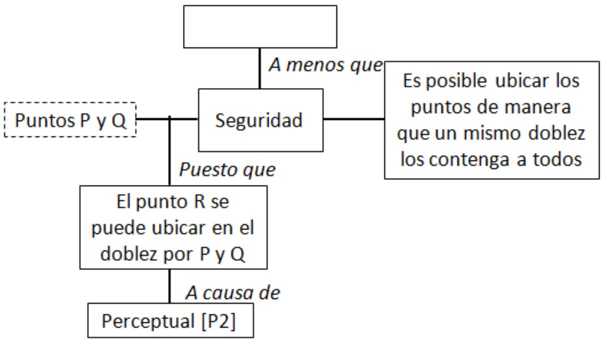
5017	P	¿Es posible ubicar los puntos de tal forma que un mismo doblez los contenga a todos?
5018	Lorena	¡Sí! Sí es posible.
5019	P	¿De qué depende?
5020	Any	De cómo se ubiquen los puntos.
5021	Gohan	¡Sí es posible, si, por ejemplo, yo pongo el punto R en el mismo doblez que el punto P y Q.
5022	P	Iván usted está de acuerdo con lo que dice su compañero ¿Por qué?

5023	Iván	Si se ponen los puntos seguidos uno… le hace el doblez en [por] los tres puntos, van a quedar seguidos [los puntos] en el mismo doblez.
5024	P	¿Qué es para usted seguidos?
5025	Iván	Rectos [hace un desplazamiento con la mano de manera horizontal].
5026	P	¿Rectos? ¿Cómo podríamos nombrarlo de otra manera?
5027	Iván	En una línea.
5028	P	¿En una línea? ¿En una línea, dices? ¿Cómo le llamamos a esa línea acá [en la clase]?
5029	Iván	Doblez.

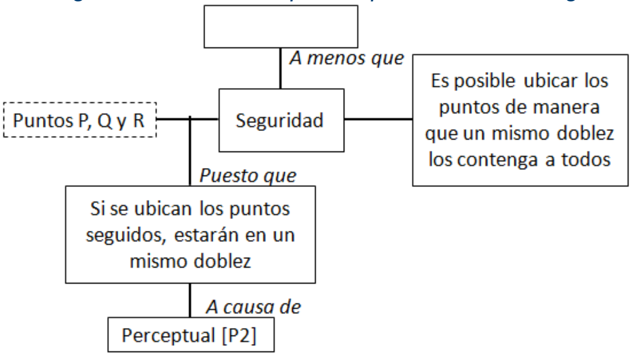
De esta interacción reconocemos dos argumentos: el de Gohan y el de Iván. Ambos son incompletos y de naturaleza semejante, pues emergen al responder a la pregunta del profesor, tratando de anticipar las condiciones de los puntos para que un mismo doblez los contenga. Lo anterior permite ver que estos argumentos son abductivos [A].

Para Gohan la respuesta a la pregunta del profesor es afirmativa, para él es posible ubicar los tres puntos de manera que un mismo doblez los contenga a todos. Este consiste en dibujar los puntos P y Q y realizar el doblez que determinan estos dos puntos [dato] para finalmente, de manera conveniente, ubicar el punto R en este doblez [garantía]. Así, su conclusión es que es posible ubicar los tres puntos en un mismo doblez [aserción]. Iván está de acuerdo con la afirmación de Gohan pero la sustenta desde un procedimiento distinto en el que parte de los puntos [dato] y los ubica de manera colineal "seguidos" [garantía], haciendo finalmente el doblez, lo que lo lleva a obtener su resultado [aserción].

Ninguno de los argumentos reporta refutador. No hay un soporte teórico por parte de los estudiantes, la respuesta de ellos se limita a responder el por qué los puntos están en el mismo doblez desde la experiencia obtenida tras trabajar en el papel entonces, la garantía es de tipo empírico [E] y el respaldo es de tipo perceptual [P2]. Ambos estudiantes expresan claridad y seguridad al responder la pregunta [calificador modal]. El argumento de Gohan es de la forma [111101], caso similar al de Iván [111101], aunque algunos elementos cambian, como se ilustra en los siguientes diagramas:



Esquema 54. Argumento de Gohan es posible que un doblez contenga tres puntos.



Esquema 55. Argumento de Iván es posible que un doblez contenga tres puntos.

Ambos argumentos son empíricos [E] porque se apoyan en un dibujo en el primer caso y en la visualización de una configuración especial en el segundo. Así mismo, son de suplementación total [T] por tratarse de garantías basadas en el trabajo en la hoja de papel pues ambos estudiantes tuvieron que recurrir a plegar para precisar su conclusión: en el primer caso Gohan pliega por P y Q para ubicar a R en este doblez en el segundo caso Iván ubica los tres puntos alineados y ratifica que pertenecen a un mismo doblez haciendo el pliegue por los tres puntos. Estos argumentos surgen de una tarea de descubrimiento [M]. Sus arreglos respectivamente son [AE111101, P2TM] para el argumento de Gohan y [AE111101, P2TM] para el argumento de Iván.

Para finalizar el profesor cuestiona a los estudiantes respecto a literal C de la tarea. Ellos responden afirmativamente de manera colectiva. Como producto final de la tarea se procede a establecer la definición de colinealidad, aprovechando la naturaleza la tarea propuesta y con ello evitar ambigüedades con expresiones como: arriba, abajo, al lado, a la derecha o a la izquierda, para referirse a la ubicación relativa de puntos. Para ello el profesor señala la representación en el tablero hecha por Victoria, donde los tres puntos son colineales y pregunta a la clase qué tienen en común estos puntos. Los estudiantes dicen que están alineados, están en una misma recta o están en un mismo doblez. El profesor retoma esta lluvia de ideas para presentar la primera definición de la clase.

Definición de colinealidad: Tres o más puntos son colineales si están en un mismo doblez.

En lo que se ha presentado de esta tarea se reconoce el uso del medio como parcial, puesto que en las dos maneras de abordar la tarea observadas los estudiantes iniciaron realizando el doblez y sobre este dibujaron los puntos (Emilio) o empezaron por dibujar los puntos y luego hacer el doblez por estos, ya fuera partiendo de los tres puntos (Brock, Emilio, Lorena e Iván), o solo de dos P y Q para convenientemente ubicar a R (Gohan). En ambas maneras de proceder el estudiante se tiene que valer del doblez para determinar si pertenecen todos los puntos a este o no. Se requiere plegar el papel para responder a las preguntas establecidas. Sin embargo, es preciso resaltar que puede que el estudiante se limite apenas a observar los puntos para dar respuesta a las preguntas, lo cual no implicaría necesariamente el uso del medio o quizás se puede valer de otras herramientas como la regla para probar la colinealidad. Luego, el uso del medio en esta tarea no es indispensable.

¿Dos puntos están en un doblez?

La siguiente tarea es de profundización. Se espera que los estudiantes acudan al hecho geométrico *Dos puntos - un doblez* para determinar que dos puntos siempre están en un doblez y por tanto siempre son colineales.

Tarea 6
Dibuja dos puntos P y Q ¿Siempre son colineales? Explica

Trabajo grupal

Julio lee el enunciado de la tarea mientras Brock dibuja los puntos P y Q y sin realizar algún doblez concluye que siempre van a ser colineales, independientemente donde se dibujen, verbalizando su explicación como sigue:

6000	Brock	El punto P [lo dibuja] y el punto Q [lo dibuja] siempre van a ser colineales porque depende… o sea si ubicamos el punto acá [dibuja otro punto que nombra P] y el punto acá [realiza otro punto que nombra Q] se van a cruzar igualmente… ¿Entonces cómo ponemos? Si son… si sólo… si sólo son dos puntos… llegan a ser colineales ¿Sí? Si solo son dos puntos llegan a ser colineales sino no.
6001	Julio	¡Sí!, sí, sí… pero eso depende del doblez que uno haga.
6002	Brock	O sea, me refiero a que vea… Si usted hace el punto acá [señala el punto P que dibujó inicialmente] mire, cruzo con este [se refiere al punto Q que dibujó primero] si usted hace el punto acá [señala nuevamente el punto P] cruzo con este [escoge el otro punto que nombró Q] ¿Sí? [Indica una línea desde el segundo punto que nombró P hasta el segundo que nombró Q] Cruzo con este [se refiere a que existe la línea por P y Q] siempre va a ser pues… [Que independientemente de la configuración de dos puntos siempre hay una línea que pasa por estos].

Aunque Brock no concreta su idea verbalmente quiere dar a entender que siempre que se tengan sólo dos puntos, son colineales. Esta respuesta es la que consigna en su hoja tal como se ve:

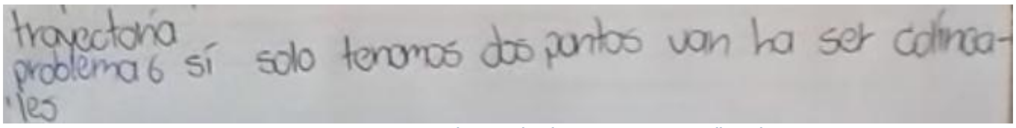


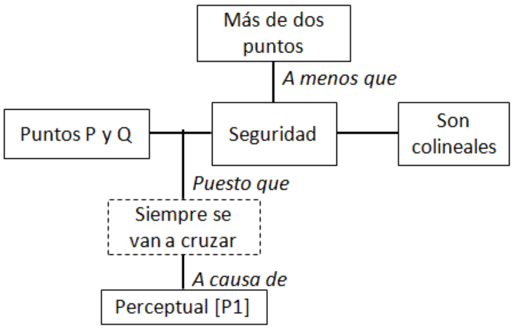
Imagen 53. Respuesta de Brock: dos puntos son colineales.

El argumento es inductivo [I] pues Brock se basó en dos casos que exploró con representaciones en el papel para enunciar su respuesta: dos puntos son colineales [garantía]. Brock dibuja los puntos dados P y Q y luego dibuja otro par de puntos [datos] para explicarle a Julio lo que para él resulta evidente, sin necesidad de hacer el doblez. Por tanto, se vale de la nueva pareja de puntos que nombra con las mismas etiquetas de la tarea para mostrarle a Julio que no importa donde se ubiquen estos en la hoja de papel siempre va a suceder lo mismo, son colineales [aserción]. Para acentuar su idea, Brock hace diferentes combinaciones, dos a dos, entre los cuatro puntos dibujados, señalando con el lápiz que siempre un doblez los contiene cuando dice que dos puntos "se cruzan" [6002].

El resultado del argumento de Brock no es propiamente del trabajo en el papel, su idea surgió inmediatamente después de dibujarlos. Esto podría deberse a encarar situaciones similares previas. Así, este argumento no es teórico porque no hay evidencia explícita de que evoque el hecho geométrico: dos puntos-un doblez. Solo subyace en él la idea de que dos puntos siempre se "cruzan" [respaldo] pero no se reconoce que su idea provenga de otra fuente.

Cuando Julio expresa estar de acuerdo con Brock hace la salvedad "pero eso depende del doblez que uno haga". Parece referirse con ello a que puede haber un doblez que contenga a uno de los puntos pero no al otro. Es decir, el calificativo "siempre" la tarea es interpretada por Julio como una situación para todo doblez realizado en la hoja y para él no basta con que exista un doblez que contenga ambos puntos para ser colineales Para Julio dependiendo del doblez que se trace puede que a veces este contenga a ambos como puede que no. Desde esta perspectiva la intervención de Julio tiene sentido pero no refuta el argumento de Brock. Julio asocia la colinealidad de dos puntos al doblez determinado por estos.

El refutador de este argumento lo expresa el mismo Brock al comunicar "Si solo son dos puntos llegan a ser colineales sino no". La forma en que Brock expone sus ideas a Julio deja ver un esfuerzo adicional para presentar su justificación. Él tiene, entonces, seguridad en la tesis que plantea, pero no en su sustento. Como el calificador modal "especifica la fuerza de la aserción" (Inglis y Mejia-Ramos, 2005, p. 3), concluimos que Brock tiene certeza en su argumento. Así el argumento es completo [111111]:



Esquema 56. Brock afirma que dos puntos siempre son colineales

El argumento es empírico [E] porque se apoya en la experiencia que adquiere Brock en el trabajo desarrollado en clases. Es de suplementación carente [C] en tanto que el argumento no surgió del dibujo sino de la noción expuesta por Brock. Está inmerso en una tarea de profundización [L]. Así podemos decir que ostenta la siguiente estructura: [IE111111, P1CL].

Socialización

El profesor pregunta a los estudiantes los hallazgos encontrados respecto a la tarea y la siguiente interacción ocurre:

6003	Lorena	Depende donde se ponga el punto, de cualquier forma se va a alinear.
6004	P	¿Depende de cualquier punto de todas formas se va a alinear?
6005	Lorena	¡Sí!, ¡sí!
6006	P	Sí Bueno. ¿Qué opina usted de lo que ella dice?
6007	Any	Sí porque se puede realizar la recta [desplaza la mano de manera horizontal]… o sea, depende de cómo usted acomode los puntos ¿Si me entiende?, de cómo acomode los puntos usted puede realizar cualquier línea.
6008	Lorena	[Levanta la mano] ¿Le puedo hacer un ejemplo en el tablero?
6009	P	[El profesor continúa indagando la idea de Any] Cuando usted dice: "depende" a qué se refiere, depende qué, o sea, hay un modo en que yo pueda ubicar los puntos y no puedan ser colineales.
6010	Any	Sí.
6011	P	¿Qué opina usted Victoria?
6012	Victoria	¿Qué?
6013	P	De lo que dice ella [Any] depende de lo puntos.
6014	Victoria	No porque usted puede poner un punto en cualquier lugar [desplaza las manos de manera horizontal para representar un doblez] e igualmente va a ser colineal [con respecto a otro punto].

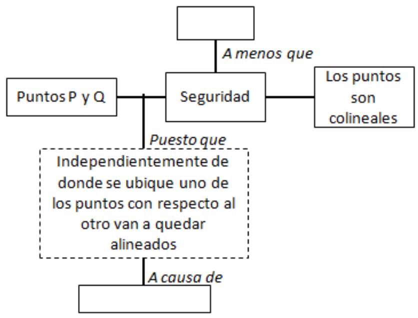
La idea de Lorena permite entrever que ella en su razonamiento deja un punto fijo mientras que al otro punto lo ubica en distintos lugares de la hoja. Esto se puede inferir del movimiento que realiza con la mano a partir de la cual parece indicar diferentes dobleces al hacer varios movimientos verticales (Imagen 54. Explicación de Lorena). Lorena considera que de "cualquier forma" este último está alineado con el primero. Esta frase permite inferir que el procedimiento de Lorena consistió en dibujar un punto fijo en la hoja, que comparó con otros puntos, para concluir así que siempre obtiene el mismo resultado, por lo que este argumento es inductivo [I], pues a partir de la multiplicidad de casos obtiene que dos puntos son colineales.

(a) (b) (c)

Imagen 54. Explicación de Lorena

Lorena identifica que la ubicación de un punto con respecto al otro no importa [dato] porque siempre van a ser colineales [aserción]. En el argumento de Lorena no encontramos una justificación de lo que dice, aun así, es posible inferir que procedió de manera inductiva al ubicar un punto en distintos lugares con respecto al otro para evidenciar la propiedad de colinealidad. Es posible reconocer que el procedimiento de Lorena para llegar a su conclusión es empírico [E], pero no se conoce qué hizo para saber que los puntos "se alinean" (v.g. apoyarse en visualización, realizar dobleces). Así, el respaldo de este argumento es de tipo perceptual pero no lo podemos categorizar.

Any expresa acuerdo con Lorena: "depende de cómo usted acomode los puntos [...] usted puede realizar cualquier línea". Ella está considerando diferentes parejas de puntos y reconoce que indistintamente de su ubicación existirá un doblez por estos. Lorena, como es recurrente en sus intervenciones, habla con seguridad e incluso desea pasar al tablero a presentar un ejemplo, pero en ese momento el profesor no la tiene en cuenta, él está concentrado en profundizar en la idea propuesta por Any. Lorena demuestra seguridad en sus ideas [calificador modal] con sus acciones. El argumento es incompleto [111001], como se presenta a continuación.



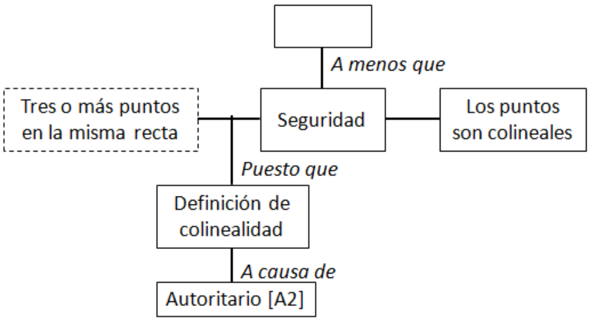
Esquema 57. Argumento de Lorena, Any y Victoria, dos puntos colineales.

El argumento analizado es empírico [E] pues el origen de su garantía podría ser unir los puntos por medio de dobleces o únicamente acudir a visualizar diferentes configuraciones de estos. Sabemos que las dos posibles formas de proceder forman parte de un proceso basado en una vivencia específica al interactuar con el medio. Por esta razón, es de suplementación parcial [P], pues no necesariamente se involucra el medio en la resolución de la tarea [IE111001, 00PL]. El argumento presentado por Victoria es similar al presentado por Lorena, aunque utiliza otros términos para referirse a la relación descrita. Por lo tanto su análisis se omite [IE111001, 00PL]. El siguiente estudiante en intervenir es Marcelo.

6015	Marcelo	Profe, por lo que a mí me explicaron dicen que para que sean colineales tienen que ser los tres puntos en la misma línea, en la misma recta.
6016	P	¿Tienen que estar tres [puntos] en la misma recta? ¿Usted qué opina Mauro?
6017	Mauro	Depende de la ubicación de los puntos va a ser la misma...
6018	P	Pero con respecto a lo que dijo él, disculpe [se refiera a Marcelo].
6019	Mauro	¿Qué fue lo que dijo él profe?
6020	P	Él dijo que tenían que ser tres [puntos].
6021	Mauro	Por eso, estamos hablando de sólo dos puntos.
6022	P	Por eso, cuando se habla de dos [puntos] ¿Usted qué opina?
6023	Mauro	Que no importa la ubicación, siempre vamos a poder trazar un doblez sobre los puntos [expresa su idea con total naturalidad].

Marcelo afirma “profe por lo que a mí me explicaron, dicen que para que sean colineales tienen que ser los tres puntos en la misma línea, en la misma recta” [6015]. Este argumento es de naturaleza abductiva [A] en tanto que se considera lo que debería ocurrir para que los puntos sean colineales. Podría decirse que Marcelo quiere señalar el hecho de que no es posible tomar postura respecto a esta pregunta, dado que la definición de colinealidad [garantía] involucra tres puntos o más y en este caso solo se cuenta con dos. Sin embargo no hay suficiente evidencia de ello ya que Marcelo no interviene en lo que sigue.

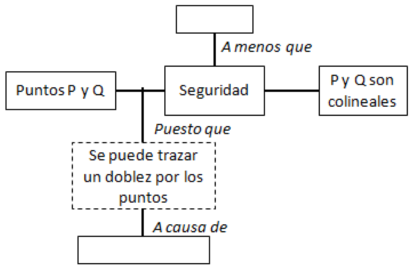
La justificación de este argumento yace en un elemento del sistema teórico construido en la clase, particularmente la definición de colinealidad. No se reconoce algún refutador de acuerdo a lo expresado por Marcelo, pero sí se ve seguridad [calificativo modal] en su expresión, pues él deposita su confianza en quien le compartió la idea. Por esta razón, este argumento tiene un respaldo de tipo autoritario [A2]. El argumento es incompleto de la forma [111101]:



Esquema 58. Argumento propuesto por Marcelo.

El argumento se sustenta en la definición de colinealidad, elemento teórico de la clase, pero no podemos decir que este es legítimo [N] dado que no provee sustento para adoptar postura respecto a lo solicitado en la tarea. En este caso no se hace uso del papel para solucionar la tarea. Su aserción surge de la definición establecida hasta ese momento de la clase. Por lo tanto el argumento es de suplementación carente [C], inmerso en una tarea de profundización [AN111101, A2CL].

Mauro también toma partida en esta interacción. Para él dos puntos [dato] siempre son colineales [aserción]. Este argumento es inductivo [I] pues se establece como resultado que los puntos siempre serán colineales. Para Mauro "no importa la ubicación" de estos siempre se puede trazar un doblez" por "los puntos" [6023]. Por lo tanto, él siempre reconoce posible realizar un doblez por dos puntos [garantía], en su intervención no presenta su construcción ni es posible rastrear de dónde provenga su justificación por lo que consideramos inexistencia de respaldo. Este argumento argumento además carece de refutador. Por lo tanto, el argumento es incompleto [111001]:



Esquema 59. Argumento propuesto por Mauro.

Este argumento es analítico [A] porque la garantía se apoya en la idea de la existencia de un doblez por dos puntos, idea aceptada en la clase con el hecho geométrico dos puntos - un doblez, aunque los estudiantes no presentan tal doblez, porque todas sus ideas se dan en el marco de una discusión frente la propuesta de otro compañero. Suponemos que esta garantía este soportada o bien en la experiencia previa del trabajo con papel o de realizar dicho doblez, por tanto es de suplementación parcial [P]. Así el argumento es deductivo, analítico, incompleto, de suplementación parcial, de una tarea de profundización [A111001, 00PL]. La conversación entre profesor y estudiantes sigue como se puede notar a continuación:

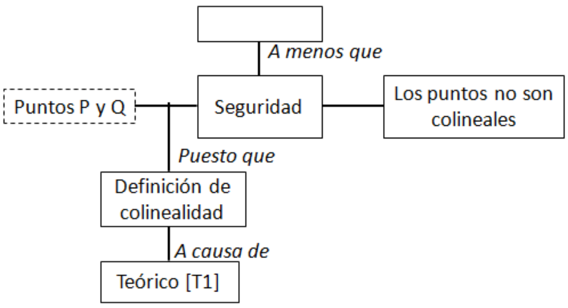
6024	P	O sea que si los dos puntos están en el doblez son colineales, en un mismo doblez ¿Usted qué opina Jack?
6025	Jack	No porque los puntos colineales son cuando hay tres [puntos] o más en el mismo doblez [lee la definición de colinealidad] Y ahí sólo hay dos.
6026	P	O sea, porque son dos…
6027	Jana	Son no colineales.
6028	P	Depende… ¿Alex usted qué le diría a él? ¿Usted está de acuerdo? Él dice que aunque se puedan hacer los dos [puntos]… se pueden hacer los dos sobre el mismo doblez no se pueden llamar colineales porque tienen que ser tres.
6029	Alex	No. No necesariamente salvo que fuera uno [un punto], uno sí, ya dos no.
6030	P	¿No necesariamente salvo que fuera uno?
6031	Alex	¡Sí!
6032	P	¿Y por qué podemos decir que si?
6033	Alex	Porque dos puntos se pueden unir mientras que un punto no se puede unir con sí mismo.
6034	P	¿A qué se refiere unir? ¿Cuándo dice unir a qué se refiere?
6035	Alex	Pues… con una recta se pueden unir los dos mientras que uno no se puede unir a sí mismo dos o más ya sí se pueden [unir].

6036	P	¿Le convence lo que él le dice, Mac? El compañero está diciendo que desde que se puedan hacer sobre un mismo doblez son colineales.
6037	Jack	No porque tienen que haber tres puntos.
6038	P	¿Tienen que haber tres [puntos]?
6039	Estudiantes	No.
6040	P	¿Qué opina usted [Jana]?
6041	Jana	[Contesta con enfado] Es que en la definición que usted nos dio puntos colineales son tres o más que tienen que estar en un mismo doblez. Ahí sólo hay dos.
6042	P	Pero la pregunta es ¿Dos siempre son colineales? Haber los tres que decíamos colineales ¿Por qué se llamaban colineales? ¿Por qué? Porque estaban en un mismo doblez ¿Si? Ahora pregunto: ¿estos dos puntos P y Q están en el mismo doblez? ¿Sí o no? la pregunta es dos puntos siempre son colineales, yo le traduzco esa pregunta: ¿dos puntos siempre están en un mismo doblez?
6043	Alexa	Sí.
6044	P	¿Por qué sí? ¿Qué hemos visto que podamos decir sí, de lo que hemos trabajado hoy, de lo que hemos desarrollado en esta secuencia?
[Lorena levanta la mano]		
6045	Alexa	Porque se puede hacer un doblez [mueve la mano horizontalmente] con dos puntos o más.
6046	P	¿Por qué se puede hacer un doblez con dos puntos o más?

Es posible notar dos posturas distintas en las intervenciones de los estudiantes. En primer lugar, están quienes expresan que dos puntos no son colineales y acuden a la definición de colinealidad que involucra tres puntos o más. En otra vía están los estudiantes que manifiestan que dos o más puntos son colineales porque hay un doblez que los contiene. Agrupamos las afirmaciones de Jack y Jana para presentar un solo argumento, dado que sus intervenciones reflejan una postura común defendida por ellos a favor de que dos puntos no son colineales. Por otro lado, presentamos un argumento que recoge las ideas de Alexa, quien manifiesta que los puntos son colineales. En esta misma postura consideramos un tercer argumento expuesto por Alex, quien adicional a lo señalado por Alexa, hace explícita una consideración sobre la discusión que circula en la clase.

Respecto a la primera postura, defendida por Jack y Jana, a través de la definición de colinealidad (sin hacer uso de su nombre) se reconoce que la situación analizada no permite establecer tal relación por la insuficiencia de condiciones necesarias, según lo comentan estos estudiantes. Jack y Jana contrastan lo que está establecido en la definición de colinealidad, que refiere explícitamente a tres puntos o más, con los datos de la tarea, considerando que dos puntos no están incluidos en dicha definición y, por tanto, esto conduce a la idea que estos no son colineales [aserción]. De esta forma el sustento de este argumento se involucra en un elemento del sistema teórico construido en la clase [garantía], particularmente la definición de colinealidad. Podría asegurarse que la definición es utilizada correctamente para decir que no permite tomar postura frente a la colinealidad o no de dos puntos, pues esta se enuncia parta tres o más, sin embargo, no es correcto asegurar que el no cumplimiento de las condiciones de dicho enunciado lleva a aseverar que los puntos no son colineales. Esto se suma al hecho de que dos puntos, independientemente de su ubicación, siempre son colineales.

Este argumento es de naturaleza abductiva [A] en tanto que se considera lo que debería ocurrir para que los puntos sean colineales. El argumento no tiene refutador pues se apoya únicamente en la definición de colinealidad. Las ideas expresadas por estos estudiantes demuestran seguridad [calificador modal] a pesar de la interpretación que hacen de la definición. El argumento es incompleto de la forma [111101]:



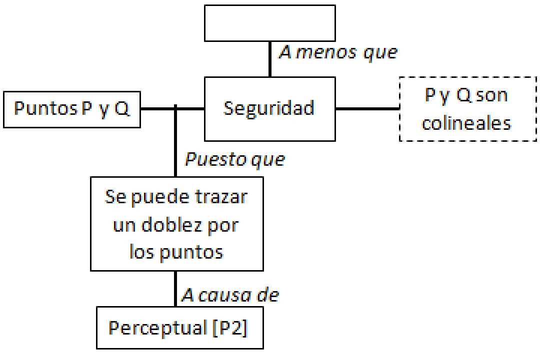
Esquema 60. Argumento propuesto por Jack y Jana.

Aunque el argumento se apoya en la definición de colinealidad, elemento teórico de la clase, este no es legítimo [N] porque no representa sustento para establecer la aserción. En este caso los estudiantes no hacen uso del papel para solucionar la tarea. Por lo tanto, el argumento es de suplementación carente [C], inmerso en una tarea de profundización [L], lo que determina el siguiente arreglo [AN111101, T1CL].

La segunda postura que se reconoce en esta discusión agrupa las ideas de Alexa. A través de esta postura dos puntos [dato] siempre son colineales [aserción]. Este argumento es deductivo [D] pues se establece como resultado la colinealidad entre los puntos a través de un doblez, según lo expresado por ella "se puede hacer un doblez con dos puntos o más" [6045]. De lo anterior se entrevé que ella reconoce la posibilidad de hacer un doblez por dos puntos siempre [garantía], aunque no adhiere su sustento a algún elemento teórico. A diferencia de la primera postura presentada, Alexa aquí no valida sus ideas a la luz de la definición de colinealidad. De modo que el respaldo es de tipo peceptual [P2].

Este argumento carece de refutador pues involucra la construcción de dobleces para verificar la colinealidad y no para reconocer casos en los que esta relación no se cumpla.

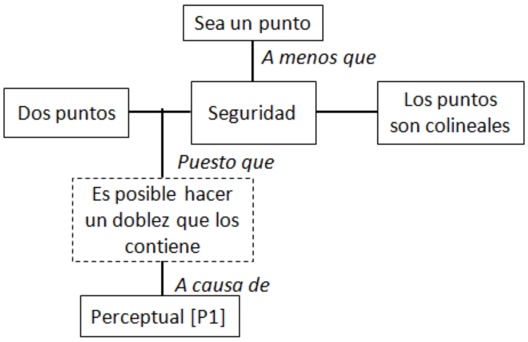
Las ideas expresadas por ella en este argumento se presentan con seguridad, aun cuando son contrarias a las de sus compañeros [6023, 6045]. El argumento es incompleto [111101]:



Esquema 61. Argumento propuesto por Alexa.

Este argumento además es empiríco [E] porque la garantía se apoya en la idea de la existencia de un doblez por dos puntos, idea aceptada en la clase con el hecho geométrico dos puntos - un doblez, aunque este no se nombra explícitamente. Consideramos que esta garantía este soportada o bien en la experiencia previa del trabajo con papel o de realizar dicho doblez, por tanto es de suplementación parcial [P]. Así el argumento es deductivo, empírico, incompleto, de suplementación parcial, de una tarea de profundización [DE111101, P2PL].

La tercera propuesta que se reconoce en esta interacción contempla las ideas de Alex, quien expresa que dos o más puntos [dato] se pueden unir con una recta [garantía] [6035]. Con lo que concluye que dos puntos son colineales [aserción]. Alex presenta un refutador al argumento de Mauro y Alexa al especificar unas condiciones en las que no se podría hablar de colinealidad. Cambiando los datos de la tarea Alex ya no se refiere a dos puntos sino a uno. Para él la colinealidad tiene presencia a partir de dos puntos porque se pueden "unir" por medio de un doblez, mientras que con un solo punto no sucede lo mismo porque "un punto no se puede unir con sí mismo" [refutador] [6033,6035]. Bajo esta consideración, Alex pudo haberle dado más peso a su afirmación valiéndose de hechos geométricos implícitos, como un "punto-infinitos dobleces" y "dos puntos un doblez" para sustentar su afirmación, sin embargo no fue lo que ocurrió. Así el tipo de respaldo de este argumento es perceptual [P1] pues interviene únicamente respecto a la idea expuesta por Alexa. En todo caso, su afirmación refleja seguridad [calificador modal], presentamos el esquema de estructura completa [111111] en el siguiente diagrama:



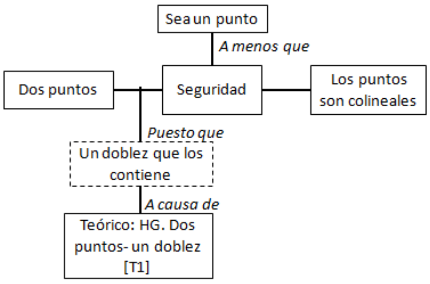
Esquema 62. Alex aporta un refutadora un argumento.

Este argumento está conformado por los mismos elementos ya presentados en el caso de Alexa, salvo que contempla también el refutador y cambia la categoría perceptual de P2 a P1 porque Alexa no se apoya en dobleces para presentar su justificación [DE111111, P1PL].

Continuando con el desarrollo de la clase el profesor pregunta a los estudiantes si están de acuerdo con la última afirmación de Alexa. Ningún estudiante participa, por lo que él retoma la idea de Alexa y la siguiente interacción toma lugar:

6047	P	Alexa está diciendo algo que es lo siguiente: dos puntos siempre son colineales porque siempre por dos puntos puedo hacer un doblez ¿Si? ¿Están de acuerdo con eso o no? ¿Hay algo que nos permita garantizar que siempre por dos puntos hay un doblez? ¿Si tengo dos puntos tengo un doblez?
6048	Alexa	¡Sí!
6049	P	¿Qué nos permite garantizar eso?
6050	Any	Lo acabamos de hacer.
6051	P	¿Lo acabamos de hacer? ¿En qué ejercicio, en qué problema [tarea]?
6052	Alexa	En la tarea 2 [tarea 2].
6053	P	¿Cuando vimos cuál hecho geométrico?
6054	Alexa	Dos puntos-un doblez [indica los puntos con los dedos de la mano y el doblez con un movimiento lineal del dedo].
6055	P	Cuando vimos el hecho geométrico dos puntos-un doblez ¿Están de acuerdo con eso o no están de acuerdo con eso?
6056	Lorena	¡Sí!

La afirmación de Alexa “dos puntos-un doblez” desemboca de los argumentos presentados anteriormente, por lo que constituye el respaldo de las afirmaciones iniciales de Alexa. Es decir, Alexa junto con Any [6050] logran identificar, gracias a la pregunta del profesor, un soporte teórico a la afirmación que previamente habían formulado por esto el respaldo es de tipo teórico [T1]. De esa forma, tenemos un argumento completo [111111]:



Esquema 63. Alexa y Any aportan un respaldo al argumento de Alexa.

Los demás aspectos de este argumento no se analizan acá porque ya se describieron en los análisis anteriores. Luego el argumento tiene una evolución y su estructura es [DA111111, T1PL].

El doblado de papel en este problema es esencial porque es a través de este que los estudiantes pueden probar si su conjetura es errada o no, al confrontarla con lo que establece la definición. Sin embargo, para dar solución a este problema no es indispensable este medio pues por su naturaleza se pudo abordar con otras herramientas.

Después del diálogo anterior el profesor aclara que un hecho geométrico es una proposición que se cumple siempre y por tanto no se puede contradecir. Él resume que siempre que se tengan dos puntos por el hecho geométrico se tiene el doblez y si están en un doblez, entonces son colineales.

¿Tres puntos siempre son colineales?

Para finalizar esta sesión de clase se da un tiempo a los estudiantes con el fin de que resuelvan la siguiente tarea con su grupo de trabajo. Esta tarea involucra nuevamente la relación colinealidad. El enunciado se encuentra a continuación:

Tarea 7
Dibuja tres puntos O, P y Q. ¿Siempre son colineales? Explica

Trabajo grupal

La tarea 7 lo resuelve Brock dibujando tres puntos sobre la hoja de papel y argumentando que no es posible trazar siempre un doblez dados tres puntos. El estudiante dibuja los puntos de manera inmediata y evoca la respuesta de la tarea 5 para decir que no siempre se va a satisfacer esta condición, como se ve en el siguiente argumento:

7000	Brock	Si hacemos un punto acá, otro punto acá y otro punto acá [dibuja tres puntos no colineales en la hoja] sería como en la tarea 5 que es P, Q y R. No hay manera de que estos [traza una línea de P a Q]… si hacemos un doblez por acá [desplaza el dedo de R a Q y hace una señalización con el esfero]. No hay manera de que este esté conectado con estos [no hay manera de que el punto R pertenezca al doblez determinado por P y Q]. Entonces no siempre van a ser colineales, es dependiendo de la ubicación del punto de R, bueno del punto Q.

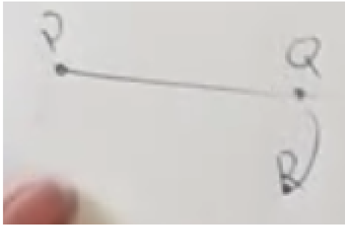
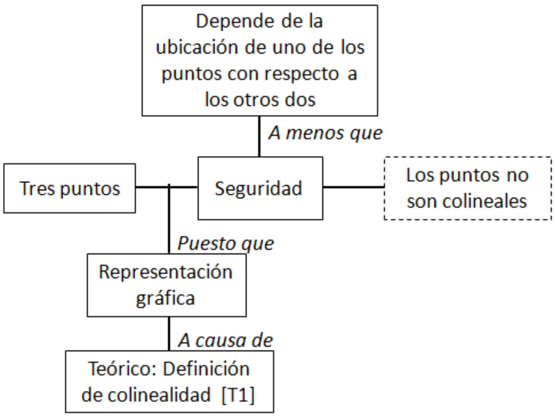


Imagen 55. Representación de Brock de los tres puntos de la tarea.

Este argumento es deductivo [D] en tanto que Brock partió de la representación de los tres puntos y se apoyó en la experiencia que obtuvo de la tarea 5 para rememorar a través de los trazos en la hoja su conclusión. Brock nuevamente resuelve esta tarea sin la intervención de Julio, él se toma la palabra para explicarle a su compañero, pero esta vez no acude a plegar el papel, tan solo dibuja los tres puntos no colineales [dato] y evoca el resultado en aquella tarea gracias a una representación gráfica [garantía]. De esta forma concluye que los tres puntos no siempre van a ser colineales [aserción]. Para él, si los puntos están ubicados como los representó, no hay manera alguna de que el doblez determinado por P y Q contenga a R. Brock reconoce que si los tres puntos no pertenecen a un mismo doblez no son colineales, empleando la definición de colinealidad [respaldo] aunque no menciona que la emplee, entonces este respaldo es de tipo teórico [T1]. Además, la garantía empleada por Brock es visual y no se sustenta en el medio. Esta es producto de una experiencia previa con el papel, por lo que pudo haber omitido emplearlo en esta oportunidad dado que ya había realizado dobleces al resolver la tarea 5. En este argumento el refutador está presente cuando al final de su intervención expresa que los puntos no siempre van a ser colineales e identifica que esta propiedad depende de la ubicación de uno de estos con respecto a los otros dos. Es posible notar el calificador modal a través de su respuesta inmediata, lo que demuestra seguridad frente a su idea. De esta manera los elementos que conforman el argumento expuesto se representan en el siguiente diagrama, cuya estructura es completa [111111]:



Esquema 64. Argumento por Brock. Tres puntos no siempre son colineales.

Este argumento es analítico [A] pues tuvo dos facetas: una empírica y una teórica, de modo que la representación inicial de la tarea sirvió de apoyo para sustentar su idea, recurriendo a la experiencia previa de la tarea 5 y atendiendo a la definición de colinealidad aunque sin explicitar que la empleó. El recurso no tuvo incidencia de acuerdo a la presentado, así que es de suplementación carente [C], inmerso en un problema de profundización [L] en el que se esperaba el uso de la definición de colinealidad, tal como sucedió. Así el argumento es [DA111111, T1CL].

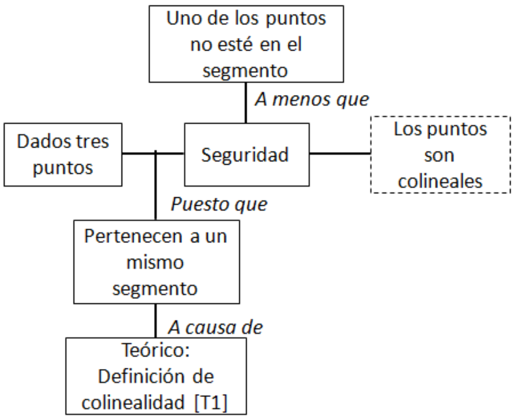
Socialización

El profesor solicita a una estudiante compartir su respuesta pero es su compañera quien pasa al tablero y esboza su idea, a través de la cual menciona que no necesariamente los tres puntos van a ser colineales:

7001	P	Leamos la tarea 7 ¿Quién lo lee?
7002	Pau	Dibuja tres puntos O, P y Q ¿Siempre son colineales? Explica.
7003	P	¿Qué dice usted siempre son colineales?
[Pau diciente con la cabeza]		
7004	Ly	Eh. [interviene] No, es dependiendo de donde se ubiquen los tres… si digamos P y Q son colineales y O no y O está…
7005	P	Dibuja tu caso [le entrega el marcador a Ly].
7006	Ly	[Pasa al tablero y dibuja un segmento sobre el cual ubica tres puntos] digamos en este caso sí porque todos [los puntos] están en el mismo segmento, pero [dibuja un punto fuera del segmento] acá no porque o sea estos dos sí [son colineales] y dejan a este por fuera o podrían ser el otro o el otro [que quedan por fuera de acuerdo al doblez que se trace]. De todas maneras, algo [un punto] nos queda por fuera…
7007	P	Entonces ¿depende de qué?
7008	Ly	Depende de la ubicación de los puntos.
7009	P	¿Alguien encontró algo distinto a lo que dijo la compañera o ella dijo todo?
7010	Marcelo	Sí porque… [Los compañeros lo interrumpen].
7011	Estudiantes	Dijo todo.
7012	P	A ver, corrobore [se dirige a Marcelo] ¿Sí? ¿Está de acuerdo?
7013	Marcelo	Sí porque, si digamos, si todos [los puntos] están en línea recta van a ser colineales pero si digamos cualquier otro punto está en otra parte de la hoja y no en la recta no son colineales.

En el diálogo anterior es posible reconocer dos argumentos, uno a cargo de Ly y otro a cargo de Marcelo, quien apoya el de Ly pero con sus propias palabras. El argumento de Ly es deductivo [D] en tanto que ella halló las posibles configuraciones de los puntos a partir del dato de la tarea, es decir, partió de los tres puntos y se apoyó en el resultado del trabajo grupal en el papel y en su noción de colinealidad, para concluir que si dibuja los puntos no colineales siempre va a quedar uno por fuera de un doblez. El dato en este argumento son los tres puntos que representa Ly en el tablero para ilustrar su idea. Su idea se apoya en la representación en el tablero, proveniente de lo realizado en el papel [garantía].

Ella reconoce que los puntos pueden ser colineales [aserción], explicando esto gracias a la noción de colinealidad. Aunque no utiliza este término específicamente cuando pasa al tablero sí acude a ideas asociadas a que los puntos están o no en un mismo segmento, lo cual aporta elementos para decir que tiene presencia un refutador. Además, es posible notar que Ly refiere a la idea de colinealidad, antes de pasar al tablero, cuando intenta explicar su idea "si digamos P y Q son colineales y O no…" [respaldo]. Este respaldo es de tipo teórico [T1]. El calificador modal se determina a partir de la iniciativa de Ly al expresar su idea. Así, el argumento es completo de la forma [111111] como se muestra a continuación:



Esquema 65. Argumento de Ly frente a la ubicación de tres puntos.

La garantía del argumento expuesto es en princio empírica [E] puesto que Ly, a partir de la configuración de los puntos en el tablero, explicó lo que allí se reconocía. Aun cuando Ly habla de segmento y no de doblez captura la idea de colinealidad que subyace en su explicación, por lo que es un argumento analítico [A]. El argumento es de suplementación carente [C] pues no denota el uso de dobleces. Además está inmerso en una tarea de profundización [L] en la que se esperaba que el estudiante empleara la definición de colinealidad [DA111111, T1CL].

En el caso de Marcelo se reconoce, como ya se dijo, un argumento. Su discurso guarda mucha semejanza con las ideas expresadas por Ly, por lo que no realizamos un análisis de este [DA111111, T1CL].

El medio no jugó un papel determinante en este problema pues la experiencia dada por las anteriores tareas brindaba elementos para responder a la pregunta de esta nueva situación. Por lo anterior, este problema no involucraba al estudiante en la actividad de doblar papel.

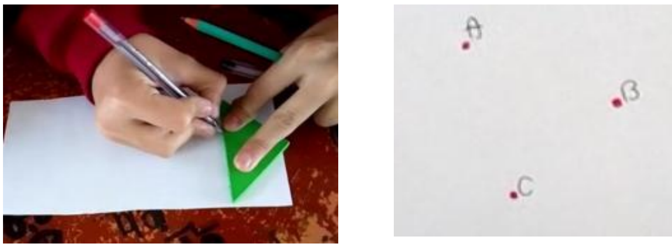
Definición de colinealidad

La siguiente tarea propuesta a los estudiantes es de descubrimiento y profundización; a través de esta se buscaba afianzar la definición de colinealidad proponiendo una situación en la que el estudiante era cuestionado por la posibilidad de construir un triángulo y las condiciones bajo las cuales esto podría ocurrir. A continuación presentamos el enunciado de la tarea y el trabajo realizado por Brock y Max.

Tarea 8
Dibuja los puntos A y B.
¿En qué lugar de la hoja puedes dibujar un punto C para que la figura que forman los puntos A, B y C determine un triángulo? Explica tu respuesta.

<u>Trabajo grupal</u>

Los estudiantes inician la tarea representando los puntos A y B solicitados en el enunciado. Mientras Max representa los puntos en la hoja Brock lee el enunciado y le sugiere a su compañero dónde hacer tales puntos. Luego de realizar la representación de los tres puntos los estudiantes intercambian ideas sobre el porqué dichos puntos configuraban un triángulo, dando lugar así a la emergencia de argumentos. Presentamos ahora el episodio de Max y Brock.



(a) Implemento usado por Max (b) Puntos representados

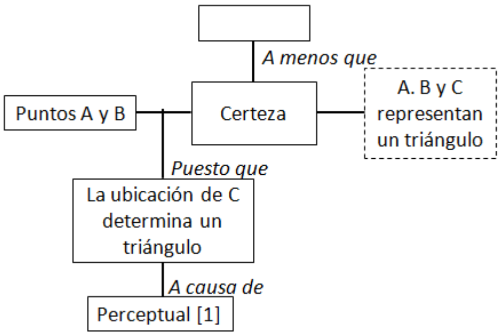
Imagen 56. Max representa puntos para triángulo

8000	Brock	[Lee el enunciado de la tarea] No tenemos regla.
8001	Max	No importa [dibuja puntos valiéndose de un implemento, Imagen 56a].
8002	Brock	A, B y C [sugiere los nombres de los puntos].
8003	Max	Mire compañero ¡Eso! [Nombra los puntos, Imagen 56b]
8004	Brock	¿Ya?
8005	Max	Ya.
8006	Brock	Eso es un triángulo. Ahora toca… [Interrumpe Max].
8007	Max	¿Y por qué?
8008	Brock	¿Por qué?
8009	Max	Porque los tres puntos están formando un triángulo ¿Pues por qué?

8010	Brock	Pues porque (...), porque, ¿qué se utilizaba en vez de arriba o abajo?
8011	Max	Ash.
8012	Brock	No, colinealidad.
8013	Max	¡Ah ya! Ahí está, forman un triángulo
8014	Brock	Pues sí, pero tenemos que responder acá [le muestra la hoja del enunciado de la tarea].
8015	Max	¡Mire! [Lee el enunciado para su compañero] ¿Por qué cuando pongo el punto C forman un triángulo?
8016	Brock	Porque así era.
8017	Max	Porque sí, mire ya, un triángulo y listo [señala el triángulo en la hoja mientras habla].
8018	Brock	¿Cómo vamos a escribir entonces?
8019	Max	Es que los tres puntos forman una imagen geométrica que es el triángulo. ¡Y ya! [Comienza a escribir].
8020	Brock	Que al unirse los tres puntos [lee lo que Max llevaba escrito], forman un triángulo [se lo dice, para que complementara lo que escribía].
8021	Max	¡Eso! [Mientras este aun escribe].
8022	Brock	¿Listo?
8023	Max	Ya.

Iniciamos este análisis señalando el carácter deductivo [D] del argumento en la interacción entre Brock y Max, en vista de que ellos cuentan con una representación gráfica [dato] y buscan proveer sustento al hecho de que esta representa un triángulo [aserción]. La representación inicial de los puntos A y B [8000-8004] llevó a Brock y Max a representar a C de manera tal que la posición de los tres puntos determinaran un triángulo. La garantía la reconocemos en el intento de caracterizar a C para que el resultado correspondiera con un triángulo, momento en que se involucra la noción de colinealidad [garantía]. Sin embargo, no es apartir de esta que los estudiantes aseguran que la figura realizada en efecto, es un triángulo sino a partir de la imagen figural que cada uno de ellos tiene asociada de este objeto por esto el respaldo de este argumento es de tipo perceptual [P1].

De acuerdo al argumento de Brock y Max no se reporta un refutador, los estudiantes en su interacción no refieren posibles casos en los que la ubicación de los puntos A, B y C no determinen un triángulo. Finalmente, el calificador modal es de certeza ya que emergen expresiones que denotan convencimiento en el discurso de Max [8013, 8019, 8022] y que parecen persuadir a Brock cuando él objetaba [8010, 8011, 8012]. El argumento es incompleto [111101] como se puede apreciar:

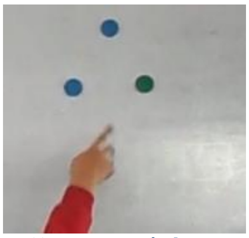


Esquema 66. Max y Brock, ahí representan un triángulo

El argumento presentado es de tipo empírico [E] pues priman acciones sobre las representaciones gráficas frente a otras de índole teórico. Finalmente, la suplementación del medio es carente [C], en tanto que no hay construcción de dobleces, además que lo elaborado por Brock y Max no requería el doblado de papel para realizarse. Obtenemos entonces la siguiente categorización del argumento: deductivo, empírico, incompleto, de suplementación carente, en una tarea de profundización [DE111101, P1CL].

Socialización

El profesor pide a Any y a Gohan que pasen al tablero para que representen y expliquen su solución. Los dos estudiantes simultáneamente pasan y ubican en distintos lugares del tablero tres puntos no colineales (Imagen 57 a y b), los cuales se habían elaborado en fomi. El profesor formula a los estudiantes preguntas con el fin de conocer lo que se tuvo en cuenta al representar los tres puntos y de esta manera confrontar sus explicaciones con la opinión de los demás compañeros.


(a) Representación de Any

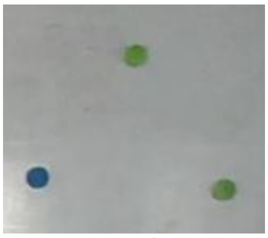

(b) Representación de Gohan

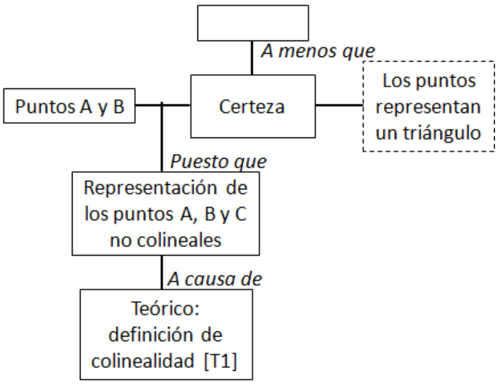
Imagen 57. Representaciones de los estudiantes al tablero

Presentamos a continuación la intervención de Lorena. La estudiante señala colinealidad entre cada par de puntos de los triángulos representados, lo que es respaldado por Ly cuando le dice que dos puntos siempre son colineales. Veamos el episodio de interacción:

8024	P	¿Se cumple el objetivo de la tarea? [Pregunta a Any] ¿Por qué?
8025	Any	Porque, digamos, el punto A, el punto B y el punto C poniéndolo, formarán un triángulo [señala los puntos del tablero aun cuando no tenían nombre, Imagen 57.
8026	P	¿Están de acuerdo? ¿Y usted? [Mira a Gohan].
8027	Gohan	Lo mismo, o sea, si ponemos los puntos A y el B…, y el C arriba pues, y hacemos los dobleces así y así [señala los puntos], pues va a quedar un triángulo.

8028	P	¿Seguro? ¿Qué característica tienen cada una de las construcciones que ustedes hicieron?
8029	Gohan	¡Que no tienen que ser colineales! [Any asiente].

En esta primera parte de la interacción con Any y Gohan apreciamos un argumento de tipo inductivo [I]. Los estudiantes cuentan con las representaciones de los puntos en el tablero [8025] [dato], las cuales a su vez determinan triángulos [8025, 8027] [aserción]. Los estudiantes se apoyan en la forma de representar los puntos para proponer una garantía al hecho de que tales representaciones corresponden a triángulos. En lo que respecta al respaldo, este corresponde a la noción de colinealidad ya que Gohan menciona tal propiedad para formar un triángulo [8029], sustento que se evoca a partir de las preguntas del profesor. Por tanto, el respaldo es de tipo teórico [T1]. El refutador no tiene presencia en el discurso de Any y Gohan dado que no se mencionan salvedades que desvirtuen la conclusión. Por último, encontramos el calificador modal en la respuesta contundente de Gohan sobre la no colinealidad como característica de los triángulos [8028, 8029]. A continuación presentamos el esquema del argumento [111101].



Esquema 67. Gohan y Any, los puntos de un triángulo deben ser no colineales

La garantía cuenta con un respaldo de tipo conceptual. Aunque Any y Gohan se apoyan en un registro gráfico para establecer la conclusión de su argumento, recurren a la no colinealidad para sustentar lo realizado en el tablero, lo que traduce entonces en un argumento de tipo analítico [A] teniendo en cuenta la relación lógica entre el dato, la aserción y la garantía. Por último decimos que la suplementación del medio es carente [C], pues los estudiantes no acudieron al doblado de papel para proponer su argumento. Este argumento es inductivo, analítico, incompleto, de suplementación carente en una tarea de profundización [IA111101, T1CL].

Consideremos ahora lo declarado por Lorena, quien expone su solución y esta replicaba ideas de Any, Gohan y gran parte del grupo. La Imagen 58 ilustra un momento de la participación de Lorena y un fragmento de la interacción sostenida entre algunos estudiantes y el profesor.

Imagen 58. Lorena señala colinealidad entre pares de puntos

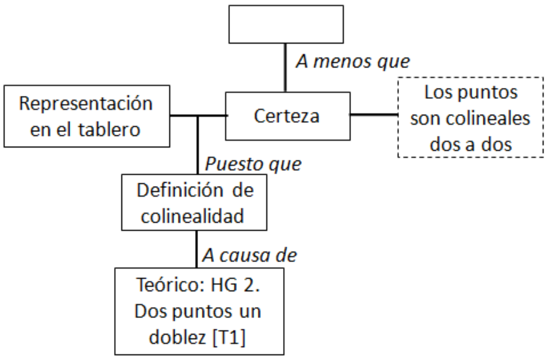
8030	P	¿Alguien opina algo distinto? ¿Escucharon lo que ellos dijeron? [Se dirige al resto de estudiantes] Que tienen que ser no colineales. ¿Están de acuerdo con eso?
8031	Unísono	¡Sí!
8032	Lorena	No.
8033	P	¿No? ¿Por qué no?
8034	Lorena	Sí, es colineal porque, digamos los dos de abajo ya son uno. El de arriba con uno del de abajo ya es otro y el de arriba con otro del de abajo ya es otro [cada dos puntos son colineales, Imagen 58].
8035	P	Recordemos la pregunta, ¿qué pedía?
8036	Lorena	Que, en qué lugar de la hoja se puede ubicar el C para que al juntarlo con el A y el B se determine un triángulo. Entonces, si es arriba, pues ahí ya se utiliza un triángulo y son tres dobleces, tres rectas. Si C no estuviera no se formaría triángulo.
8037	P	No se formaría un triángulo, o sea, tú estás de acuerdo de cierta manera con ellos [Any y a Gohan].
8038	Lorena	No. No porque ellos están diciendo que no son colineales.
8039	P	Porque tú los ves de dos en dos [ella toma cada par de puntos y dice que son colineales]. ¿Sí?
8040	Lorena	Sí.
8041	P	¿Qué dijimos de dos [puntos]? ¿Y qué le respondería Ly a ella?
8042	Ly	Eh, que siempre dos puntos van a ser colineales.

Lorena se apoya en la representación gráfica de Any y Gohan en el tablero para señalar que lo dicho por ellos (los puntos A, B y C no son colineales) no es verdadero. Por lo tanto, señalamos que la estructura del argumento de Lorena es de tipo deductivo [D]. En esta distinguimos como dato la representación gráfica en el tablero, en la que cada trío de puntos es no colineal [8034]. La garantía de Lorena yace en la definición de colinealidad al asegurar que cada dos puntos se cumple tal relación, aunque no nombra esta relación por su nombre [8034]. De lo anterior la estudiante concluye que los puntos son colineales [8034, 8039] [aserción], aunque ella ve esta relación por parejas y la coloca en contraposición a la afirmación de Any y Gohan quienes aseguraban que los tres puntos no eran colineales.

El respaldo se reconoce de modo implícito en el hecho geométrico dos[7] cuando Lorena menciona que cada par de puntos de los tres representados en el tablero eran colineales [8034, 8039 y 8040].

[7] Hecho geométrico dos: dos puntos - un doblez.

Distinguimos que este elemento conceptual provee sustento a la garantía del argumento. Así el tipo de respaldo de este argumento es teórico [T1]. Por otro lado, el refutador no es mencionado por Lorena, la estudiante no declara salvedades para su conclusión. Finalmente describimos un calificador modal de certeza, pese a que su opinión contradecía a la del grupo [8030-8032]. El argumento es incompleto [111101] y se presenta a continuación:



Esquema 68. Argumento de Lorena los puntos de un triangulo son colineales dos a dos.

La garantía de este argumento se sustenta en un elemento conceptual validado previamente en el marco de la clase, además se identifica una relación lógica entre el respaldo y la aserción, lo que nos lleva a catalogar el argumento como analítico [A]. Por último se aprecia que la suplementación del medio es carente [C] porque no se evidencia el uso del doblado de papel para proponer la garantía del argumento. Categorizamos el argumento según lo ya dicho como deductivo, analítico, incompleto, de suplementación carente, en una tarea de profundización [DA111101, T1CL].

Al involucrar el doblado de papel como medio en el desarrollo de esta tarea podemos observar que este no jugó un rol particular en la solución del mismo. Evidencia de ello es que de los estudiantes que se reporta su interacción en este apartado no se reconoce una incorporación relevante de este medio.

NÚCLEO 2: ÁNGULOS

¿Qué ángulos forman tres dobleces que se intersecan?

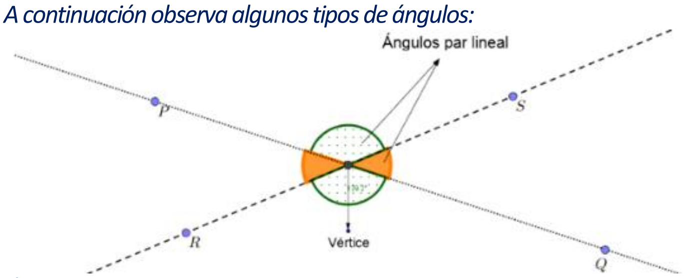
En esta sesión de clase se resolvió la tarea 9. A través de esta se involucraban las definiciones de ángulos par lineal y ángulos opuestos por el vértice. Al presentar el enunciado de la tarea se establecieron las definiciones de estos objetos geométricos[8]. La tarea propuesta es de profundización, a continuación presentamos su enunciado.

Tarea 9
Construye tres dobleces que se crucen en un mismo punto ¿Hay ángulos que no son par lineal ni opuestos? Sí o no ___
Si tu respuesta es sí márcalos con color y explica por qué. Si tu respuesta es no explica por qué.

<u>Trabajo grupal</u>

Max inicialmente aborda la tarea leyendo el enunciado, ante lo cual Brock le solicita que lea primero las definiciones de ángulos par lineal y opuestos. Max accede dando lectura a las definiciones, las cuales se presentan a continuación.

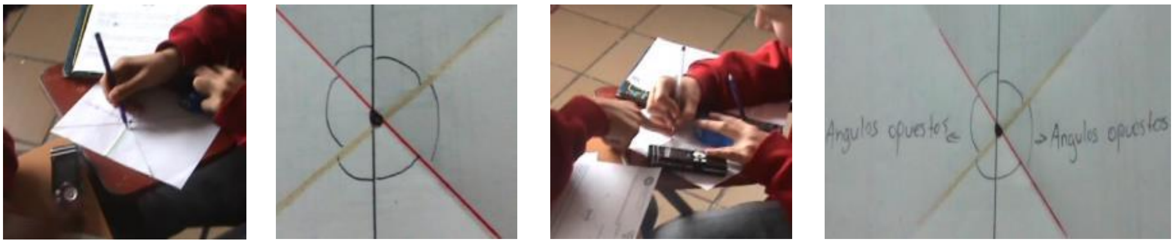
A continuación observa algunos tipos de ángulos:



Ángulos par lineal. Dados dos dobleces que se cruzan, dos ángulos son par lineal si comparten un lado.
Ángulos opuestos. Dados dos dobleces que se cruzan, dos ángulos son opuestos si comparten únicamente el vértice.

Brock y Max discuten sobre lo que cada uno comprendió respecto a estas definiciones. Luego inician el desarrollo de la tarea dibujando un punto, construyendo tres dobleces que contengan ese punto y marcando con un color diferente cada doblez para distinguirlos fácilmente. Max lee la pregunta nuevamente, piensa por un momento y después asegura que sí hay ángulos par lineal y opuestos, respuesta cuestionada por Brock, por lo que Max procede a explicarle su razonamiento apoyándose en las construcciones realizadas (Imagen 59). Para Max y Brock, todos los ángulos determinados por los tres dobleces construidos son par lineal y además existen ángulos opuestos por el vértice, lo que consignan como respuesta. Presentamos la interacción de los estudiantes en el episodio mencionado anteriormente.

[8] Las definiciones fueron adaptadas de la geometría usual al contexto de la Geometría del Doblado del Papel.



(a) ángulos entre dobleces (b) ángulos par lineal (c) (d)

Imagen 59. Ángulos par lineal y opuestos según Max

9000	Brock	Lea la pregunta. ¿No?
9001	Max	[Lee la pregunta] No, ¿Entonces? ¿Qué hago? [Está indeciso frente a la pregunta].
9002	Brock	No porque, o son opuestos o son par lineal pero siempre va a ser de una de las dos.
9003	Max	¿Entonces no? [Observa los dobleces] ¡No! [Lee la pregunta nuevamente] A ver, ¿Por qué?
9004	Brock	No porque..., uy no sé, no porque en los doblez, eh, un ángulo, por lo menos un ángulo siempre va a compartir, ¡no!, un doblez siempre va a compartir dos ángulos [cualquier doblez siempre contenía un lado de dos ángulos, Imagen 59 b].
9005	Max	A mí me queda así. Era así porque mire, si uno le hace aquí una línea, acá, otra acá, otra acá, otra acá y otra acá [realiza trazos de ángulos entre cada uno de los tres dobleces, Imagen 59 a y b].
9006	Brock	Ahí son par lineal.
9007	Max	Y los...
9008	Brock	Opuestos.
9009	Max	Opuestos.
9010	Brock	Están ahí, véalos [Imagen 59 c, d].
9011	Max	Por eso.
9012	Brock	Por eso.
9013	Max	Y si hay, estos de acá, (...) Esto de acá, son los...
9014	Brock	Son los par lineal.
9015	Max	Son los ángulos par lineal [Imagen 59 b].
9016	Brock	Por eso.
9017	Max	Y aquí, estos que se están cruzando acá…
9018	Brock	Son los opuestos [escribe, Imagen 59 d].
9019	Max	Supongo yo que son los opuestos [Imagen 59 c]. Entonces sí hay ángulos par lineal y sí hay opuestos.
9020	Brock	No, es que la pregunta no dice eso, sino la pregunta es, ¿Hay ángulos que no son par lineal ni opuestos? Pero hay que poner por qué.
9021	Max	No porque, no porque en realidad si hay ángulos.
9022	Brock	No, porque si dos dobleces se cruzan, siempre van a compartir dos ángulos, ¿no?
9023	Max	No, usted está hablando de otra cosa.
9024	Brock	Yo estoy hablando de la… ayudándome con la definición de par lineal vea, [lee la definición de ángulos par lineal].
9025	Max	Pero está hablando de opuestos.
9026	Brock	Pues sí, pero la pregunta es de los dos, par lineal y opuestos.
9027	Max	Por eso, ahí están diciendo si, si hay o no hay, ángulos que sean par lineal ni opuestos.
9028	Brock	No.
9029	Max	Que sí.
9030	Brock	Que no.

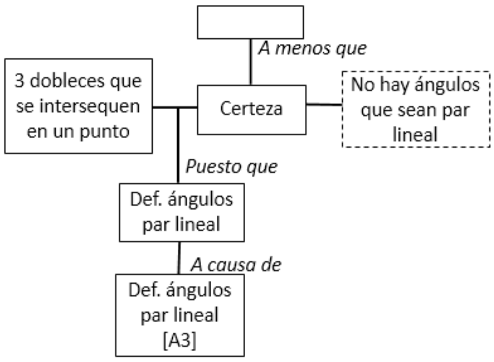
9031	Max	Que sí hay ángulos par lineal y...
9032	Brock	¿Cuáles?
9033	Max	¡Ya le expliqué!, acá hombre.
9034	Brock	No porque vea [señala el enunciado], están hablando de que un ángulo ni es par lineal ni es opuesto. ¿Si ve?
9035	Max	¿Dónde dice?
9036	Brock	Vea, vea, [retoma el enunciado de la tarea] aquí dice hay ángulos que no son par lineal ni opuestos.
9037	Max	Entonces no ¿Y por qué?
9038	Brock	Porque los dobleces, los dobleces que hicimos, o sea los dobleces, se van a cruzar por un punto, que ahí está el opuesto, el ángulo opuesto y van a compartir un ángulo [se refería a compartir el punto]. ¿Sí? ¿No? Porque vea, ahí dice la definición de opuestos es, si comparten [lee la definición]…
9039	Max	Pregúntele al profe. Entonces pasemos al otro punto. Ya lo dejo ahí.

En la discusión entre Brock y Max se reconoce una interpretación distinta de las definiciones propuestas. Las definiciones de ángulos par lineal y opuestos involucran la condición "dos dobleces", dejada de lado por los estudiantes a lo largo de su discusión. Para los estudiantes la configuración con la que se cuenta en el papel deja ver ángulos par lineal y opuestos, aun cuando algunos de estos no correspondan a ángulos de este tipo realmente.

Iniciaremos el análisis destacando la emergencia de dos argumentos, uno sobre la existencia de ángulos par lineal y otro sobre ángulos opuestos. Estos comparten una estructura deductiva [D] debido a que Brock y Max concluyen que no existen ángulos que no son par lineal u opuestos a partir de los dobleces construidos. En el episodio descrito podemos señalar como elementos previamente determinados [dato] los dobleces en la hoja y las definiciones de ángulos par lineal y ángulos opuestos como garantía, para llegar así a la conclusión.

Damos lugar al análisis del argumento sobre ángulos par lineal. Encontramos que en el diálogo de Brock y Max se observa como dato la representación de los tres dobleces. La garantía corresponde a la definición de ángulos par lineal propuesta en la tarea. Brock y Max, al discutir sobre lo que observaban en sus construcciones [9004, 9005, 9006] se cuestionaban uno al otro sobre lo interpretado de la situación y la definición, lo que los llevó a establecer la misma respuesta frente al interrogante de la tarea [aserción]. Esta consiste en afirmar que en la configuración de los dobleces en el papel, no existían ángulos que no fueran par lineal [9004, 9013, 9014] dado el reconocimiento de parejas que satisfacían tal propiedad.

El respaldo se evidencia cuando Brock, en dialogo con Max, acude a las definición de ángulos par lineal y le hace ver a su compañero que se apoya en esta [9024]. No obstante, como mencionamos líneas arriba, tanto Brock como Max interpretan la definición de ángulos par lineal y opuestos sin tener en cuenta una de las condiciones. Este respaldo es autoritario [A3] ya que Max se apoya en parte de lo referido por el enunciado de la definición provista. Por otro lado, al mencionar el refutador evidenciamos ausencia de este, ya que no se aprecia en la interacción de los estudiantes un momento en donde se señalen parejas de ángulos que no cumplirían tal propiedad, asunto que en este caso era el esperado de acuerdo al enunciado de la tarea. Finalmente, en lo que respecta al calificador modal, reconocemos certeza cuando Max menciona su aserción, pues el estudiante persiste en sostener lo que había afirmado [9027]. Según lo anterior, obtenemos entonces un argumento incompleto [111101].

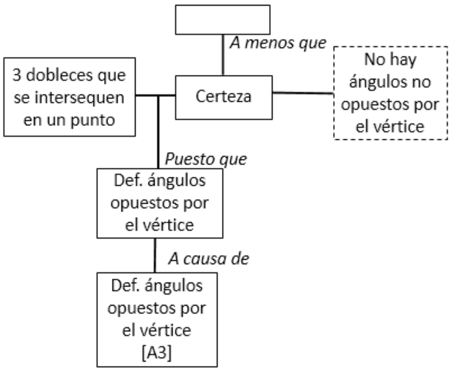


Esquema 69. Argumento de Brock y Max, ángulos par lineal

Sobre la relación de correspondencia lógica de los elementos del argumento es pertinente señalar, en primer lugar, que el respaldo, a la luz de lo definido en el sistema teórico de clase, no guarda relación con lo que Brock y Max asumieron de la garantía, pues dejaron de lado parte de la definición (*dados dos dobleces*). Lo anterior da pie para calificar el argumento como no legítimo [N]. En cuanto al medio, es evidente una suplementación carente [C] en vista de que sólo Max y Brock acuden al doblado de papel para representar los dobleces más no se argumenta propiamente doblando papel para dar cuenta y razón de su aserción. En definitiva, obtenemos un argumento deductivo, no legítimo, incompleto, con suplementación carente, en una tarea de profundización [DN111101, A3CL].

A continuación damos lugar al argumento sobre ángulos opuestos por el vértice. En este argumento se distingue el dato, al igual que el anterior, en la representación en papel de los tres dobleces. La garantía por su parte corresponde a la definición de ángulos opuestos por el vértice, dada en el enunciado de la tarea. Posteriormente encontramos que la aserción se manifiesta cuando los estudiantes afirman que no había en su construcción ángulos que no fueran opuestos [9003, 9039], dado que el hecho de que se cruzaran dos dobleces determinaba ya ángulos opuestos.

Al continuar con este análisis señalamos el respaldo como autoritario [A3] en vista de que Brock se ampara en el enunciado de la definición de ángulos opuestos por el vértice sin discernir las propiedades que allí se declaraban. Brock recurre a tal definición [9039] para sustentar la idea de que no existían ángulos no opuestos por el vértice, y los que no fueran opuestos serían par lineal [9003], por lo que no podían responder a la tarea de forma afirmativa. El refutador, al igual que en el anterior argumento, no tiene presencia en el discurso de los estudiantes. Por último, como calificador modal reconocemos certeza en lo que afirmaban los estudiantes, en vista de que en la interacción no se evidencia dudas e inseguridad. Lo que traduce en un argumento [111101].



Esquema 70. Brock y Max, ángulos opuestos por el vértice

Al analizar ahora la relación lógica de los elementos encontramos que a la luz de la definición de ángulos opuestos por el vértice no hay una correspondencia con la aserción. El argumento de Brock y Max sobre este tipo de ángulos, al igual que en el anterior se hace ilegítimo [N] debido a la condición obviada en la definición. Aunque en el trabajo parecieran reconocer los ángulos opuestos al representar adecuadamente un ejemplo de estos, como se ve en la Imagen 59 d, las ideas expuestas en la interacción no guardan relación con tal definición, ya que existen en la construcción de los estudiantes ángulos no opuestos por el vértice y ángulos que no son par lineal. En cuanto a la suplementación del medio, como expusimos del argumento anterior, esta es carente [C]. Obtenemos entonces un argumento deductivo, no legítimo, incompleto de suplementación carente en una tarea de profundización [DN111101, A3CL].

Socialización

Durante la socialización de las producciones de los estudiantes se evidenciaron algunas apreciaciones equivocadas de las definiciones de ángulos par lineal y ángulos opuestos. Algunos estudiantes, a solicitud del profesor, pasaban al frente de sus compañeros y mostraban dobleces que se cruzaban en un punto, aunque al igual que Brock y Max se pudo observar en sus presentaciones que dejaban de lado la condición de los dos dobleces presente en la definición. Tal es el caso de Isabela, para quien los ángulos marcados en su construcción son par lineal porque comparten un lado (Imagen 60 a). Marcelo y Jet asumieron que compartir un lado equivalía a compartir un doblez y por tanto para ellos los ángulos mostrados en la Imagen 60 b eran ángulos par lineal.

(a) Construcción de Isabela

(b) Construcción de Marcelo

Imagen 60. Construcciones alrededor de la tarea 9

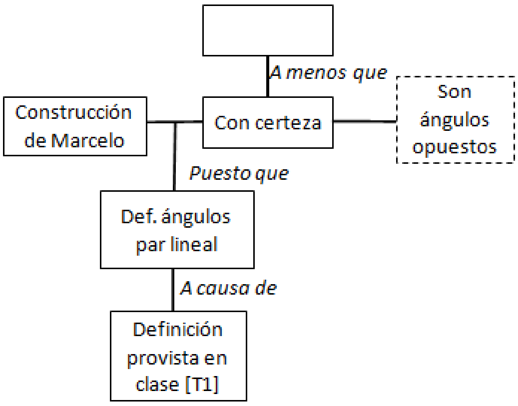
Por lo anterior el profesor confronta las construcciones de Marcelo, Isabela y otros estudiantes con las definiciones presentadas en clase, con el fin de hacer aclaraciones sobre estas. Inicialmente el profesor toma la construcción realizada por Marcelo (Imagen 60 b), la presenta a todos y comienza a hacer preguntas orientadas a determinar la aceptación frente a esta. A continuación presentamos la interacción respectiva.

9040	P	¿Cumplen la definición? Eh, Jet, dime, ¿estos dos ángulos no son par lineal? O ¿sí son par lineal?
9041	Jet	Par lineal.
9042	P	¿Por qué son par lineal?
9043	Jet	Porque comparten un mismo lado.
9044	P	¿Cuál es el lado que comparten? (…) ¿Cuál es el lado que comparten?
9045	Jet	Comparten un... ¿Entonces comparten el vértice? [Muestra duda].
9046	P	¿Pero qué tienen que compartir para que sean par lineal entonces?
9047	Alexa	Son opuestos.
9048	Jet	Los lados.
9049	P	¿Entonces son par lineal o no?
9050	Jet	¡Son opuestos!

Jet presenta un argumento alrededor de la pregunta que le hace el profesor sobre la construcción de Marcelo [9040]. Al considerar la estructura del argumento reconocemos una de tipo deductivo [D] en vista de que a partir de los elementos previamente determinados (construcción de Marcelo [dato]) y la interpretación de la definición de ángulos par lineal, se obtiene la conclusión de que los ángulos formados eran par lineal [aserción] [10302], aunque luego asegura que son opuestos.

Al dar lugar a los elementos distinguimos como dato la construcción de Marcelo, ya que el profesor confronta a Jet con la representación de los dobleces preguntándole su opinión sobre esta [9040] (Imagen 60 b). A partir de allí el estudiante propone su aserción, la cual consiste en afirmar que los ángulos eran opuestos [9050]. Por otra parte, la garantía se aprecia de modo explícito en las definiciones de ángulos par lineal [9043], aun cuando no es posible afirmar que la comprensión lograda de estas sea acertada ya que en realidad los ángulos que se representaban eran opuestos por el vértice.

En el argumento analizado observamos que el respaldo tiene lugar al involucrar en algún grado las definiciones provistas por la tarea, de modo que su naturaleza es teórico [T1]. No se reconoce refutador, pues no observamos en lo hablado por Jet alguna referencia a un caso en el que exponga excepciones a su aserción. Respecto al calificador modal, este se puede señalar como de certeza, puesto que en ese instante el estudiante no se comunica con duda [9050]. A pesar de que al inicio se muestra inseguro [9045], su respuesta final fue contundente. Presentamos el esquema del argumento incompleto [111101].



Esquema 71. Argumento de Jet sobre ángulos opuestos y par lineal.

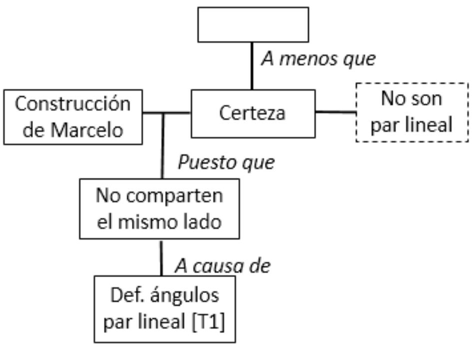
Ahora bien, de acuerdo al tipo de garantía y su relación con los demás elementos señalamos un argumento no legítimo [N] pues da una razón no valida para decir que son opuestos los ángulos. Señalamos que Jet reconsidera lo que primero había dicho [9041] tras las preguntas del profesor, reformulando así su aserción [9045] y concluyendo que los ángulos eran opuestos, lo cual no se relacionaba lógicamente con la garantía y el dato. Por otro lado, la suplementación del doblado de papel se hace carente [C] puesto que el estudiante no recurre propiamente al doblado de papel para proponer y sustentar su argumento. Finalmente obtenemos un argumento deductivo, analítico, incompleto, de suplementación carente, en una tarea de profundización [DN111101, T1CL]. La conversación sigue como se muestra a continuación.

9051	P	¿Por qué son opuestos? Aunque estamos tratando lo de par lineal, pero ya que se da el caso… [Gohan pide la palabra] ¿Está de acuerdo con él? ¿Sí o no?
9052	Gohan	Sí señor.
9053	P	¿Por qué está de acuerdo con él?
9054	Gohan	Porque comparten el mismo vértice.
9055	P	¿Lo mismo que dijo él?
9056	Gohan	Y que para ser par lineal tienen que compartir el mismo lado y no comparten el mismo lado.
9057	P	Bueno, comparten el mismo vértice. ¿Solamente por eso? O ¿Cómo dice la definición?
9058	Gohan	Pues que… [Lee la definición de ángulos par lineal].
9059	P	Tú puedes señalarme aquí los dos dobleces que se cruzan para que se formen esos dos ángulos, ven por favor. ¿Cuáles son esos dos dobleces que se cruzan para formar esos dos ángulos?
9060	Gohan	Este [señala en la hoja que el profesor sostenía uno de los dobleces].

9061	P	Toma la hoja y dóblalos delante de ellos [Gohan la recibe e indica, doblando nuevamente cada doblez a los que se refería] uno [contaba los dobleces a medida que Gohan doblaba] ¿Cuál otro?
9062	Gohan	Este [dobla por segunda vez otro doblez].
9063	P	Listo, pregunto, esos son los dos dobleces, ¿cierto? [habla mirando a Gohan] Listo, y ya cumplen una condición según la definición, ¿cierto?
9064	Gohan	Sí.
9065	P	¿Y para que sean opuestos, cuál otra es?
9066	Gohan	Que compartan un vértice.

Las ideas expresadas por Gohan articulan dos argumentos de tipo deductivo [D] uno dirigido a señalar que la construcción de Marcelo no representa ángulos par lineal y otro dirigido a explicar por qué esos mismos ángulos son opuestos por el vértice.

En el primer argumento la representación de Marcelo son los datos [9051], Gohan declara que propiedades de la definición no cumplía tal construcción para ser par lineal [9056] [garantía]. En esa idea Gohan se apoya para asumir la aserción que es entiende de modo implícito, los ángulos señalados no son par lineal [9051]. En la definición de ángulos par lineal se sustenta el respaldo del estudiante, parte de la cual refiere en su discurso [9056], lo que nos lleva a catalogar el respaldo como teórico [T1]. Por otro lado refutador no se reconoce en este argumento, en cambio calificador modal tiene lugar en la manera segura de Gohan de expresar su postura [9052-9056]. Presentamos el esquema del argumento incompleto [111101] a continuación.

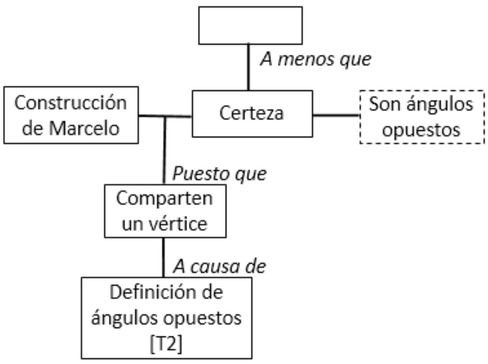


Esquema 72. Gohan, los ángulos no son par lineal

Gohan conecta el dato y la aserción por medio de una propiedad de la definición de ángulos par lineal, por lo tanto el argumento se cataloga como analítico [A], ya que se recurre en cierto grado a un elemento conceptual provisto en la tarea. La suplementación del medio se carente en vista de que Gohan no dobla papel para explicar su idea [C]. Categorizamos el argumento como deductivo, analítico, incompleto, de suplementación carente en una tarea de profundización [DA111101, T1CL].

Por su parte, en el segundo argumento, el dato corresponde a la construcción elaborada por Marcelo en la hoja de papel y los ángulos allí marcados. Partiendo de esta construcción Gohan llega a concluir que los ángulos son opuestos por el vértice (aserción) [9052]. El puente usado para declarar la garantía fue una de las dos condiciones de la definición de ángulos opuestos que se debía cumplir para dichos ángulos (compartir un vértice) [9054]. Evidenciamos en lo argumentado por Gohan un respaldo dado por la definición establecida sobre ángulos opuestos. El estudiante utiliza condiciones de esta definición [9054, 9056, 9066], por lo que reconocemos el sustento de la garantía [respaldo]. En vista de que Gohan se apoya en tal elemento conceptual este elemento es teórico [T2].

Por otra parte, el refutador no se evidencia en tanto que Gohan no describe condiciones para que los ángulos, aun cuando compartieran el vértice y estuvieran determinados por dos dobleces, no fueran opuestos. Por otro lado, observamos en el discurso de Gohan certeza al expresar su punto de vista sobre la situación expuesta por el profesor. Obtenemos entonces una estructura de los elementos incompleta [111101] para este argumento que se presenta a continuación.



Esquema 73. Argumento de Gohan sobre ángulos opuestos.

En este argumento la garantía empleada se relaciona de manera lógica con la definición de ángulos opuestos. Además de compartir un vértice, los ángulos representados estaban determinados por dos dobleces. Por lo anterior calificamos el argumento como analítico [A]. En cuanto al medio, se reconoce una suplementación total de este en el momento que Gohan explica su idea [10322], el estudiante sustenta sus declaraciones empleando dobleces en la hoja que el profesor le proveyó [T]. Obtenemos entonces, un argumento deductivo analítico, incompleto, de suplementación total, en el marco de una tarea de profundización [DA111101, T2TL].

Para concluir este análisis alrededor de la tarea nos referimos a la incidencia del medio en la naturaleza de las ideas construidas. Teniendo en cuenta la exposición de los argumentos y su caracterización, reconocemos que el doblado de papel permeó poco en el aprendizaje de los estudiantes dado que lo realizado a través del medio no afectó la naturaleza de este, lo hecho por parte de los estudiantes pudo haberse implementado en otros ambientes distintos al doblado de papel.

Ángulos con la misma medida

En el desarrollo de la sesión se propuso una tarea alrededor de ángulos congruentes. El desarrollo de esta tarea no involucró doblado de papel, pues se esperaba apenas realizar una aproximación a la idea de congruencia de ángulos a través de la superposición y comparación de parejas de ángulos dadas a los estudiantes (Imagen 61). De esta manera se pretendía reconocer un mecanismo que permitiera determinar ángulos congruentes en la geometría del doblado de papel. La tarea, en consecuencia, promovía el establecimiento de la definición de ángulos congruentes, por lo que esta se cataloga de descubrimiento.

Tarea 10
Toma la bolsa en la que vas a encontrar varios ángulos recortados, intenta formar parejas teniendo en cuenta que los ángulos tengan la misma medida.
Explica qué criterio utilizaste para saber si los ángulos tenían la misma medida.

Imagen 61. Ángulos provistos a los estudiantes

A los estudiantes se les proveyó de ángulos recortados en cartón con diferentes medidas y dimensiones, aunque las medidas no aparecían en estos. Los estudiantes debían comparar los ángulos sin acudir al uso de implementos como regla o transportador. Algunos estudiantes no tenían claro cuáles eran los elementos a tener en cuenta para determinar si un ángulo tenía la misma medida que otro (v.g. algunos comparaban la medida de los lados). Algunos estudiantes compararon los ángulos sobreponiéndolos para ver si los lados y vértice de cada uno coincidían.

Trabajo grupal

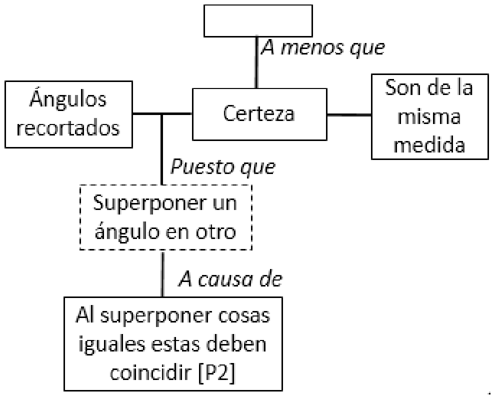
Por motivos de fallas en los dispositivos de registro de video, no es posible contar con registro gráfico como evidencia del trabajo realizado por Brock y Max. Por tal motivo hacemos una descripción desde lo que se registró en audio.

En el momento de dar solución a la tarea planteada por la tarea Brock propone a su compañero saber sobre la medida de los ángulos para poder clasificar los que tenían medida similar, no obstante Max se había dado a la tarea de comparar las medidas de los ángulos al poner uno sobre otro y determinar así aquellos ángulos de igual medida para proveer una respuesta al problema. Ante lo que hacía su compañero, Brock optó por involucrarse y de esa manera ambos estudiantes agruparon los ángulos según solicitaba el enunciado. En el momento de explicar el criterio tenido en cuenta Brock declara "colocando una figura sobre otra". Este fue el modo como los estudiantes procedieron para determinar si existían ángulos con la misma medida en la bolsa que recibieron.

10000	Max	Aquí encontré a otros dos. (…) aquí hay otro.
10001	Brock	¿Este sí?
11002	Max	Y este es otro.
11003	Brock	(…) Bueno, la pregunta es ¿Explica que criterios utilizaste para saber si los ángulos tienen la misma medida? Colocando una figura sobre otra ¿No?
11004	Max	[Lee nuevamente] ¿Explica que criterios utilizaste para saber si los ángulos tienen la misma medida?
11005	Brock	Nosotros, fue colocar un ángulo sobre otro ¿Sí?
11006	Max	O sea lo que hicimos fue [comienza a escribir], colocar un ángulo sobre otro…
11007	Brock	Para saber su medida.
11008	Max	¡No! Para saber su medida no. (…) Bueno sí, para saber su medida [consigna su respuesta].

De manera usual comenzamos describiendo el tipo de argumento en cuanto a su estructura, la cual es de tipo inductivo [I]. Max y Brock establecen a partir de unos datos una regla general de tipo procedimental con la cual determinar si dos o más ángulos tienen la misma medida. Apreciamos entonces que establecen un criterio para determinar la congruencia entre ángulos recortados a partir de la necesidad de distinguir cuáles tienen la misma medida.

Al detallar los elementos del argumento que emergió en la anterior interacción reconocemos el dato en los ángulos recortados [10003, 10004]. Como garantía se aprecia el criterio establecido por los estudiantes para determinar si dos ángulos tenían la misma medida, este fue la regla general propuesta por Max y Brock [10005, 10006]. La aserción la señalamos en el hecho de relacionar ángulos con la misma medida [10000-10002]. Como respaldo reconocemos una noción intuitiva asociada a la medida de ángulo, la cual se pone en juego a través de la superposición como vía para comparar y determinar igualdad en sus medidas. Tal respaldo lo catalogamos como perceptual [P2] ya que consiste en comparar ángulos sobreponiendolos. Reconocemos la ausencia de un refutador para el argumento, dado que no se señala excepciones para la aserción manteniendo el criterio de sobreponer ángulos como garantía. Por último, como calificador modal, reconocemos certeza, pues no se aprecia inseguridad en lo que decían Max y Brock al dar razones de lo que hacían. A continuación presentamos el esquema con los elementos del argumento incompleto [111101].



Esquema 74. Max y Brock, ángulos con la misma medida

En cuanto al tipo de garantía y su relación lógica con la aserción y los datos señalamos un argumento empírico [E]. La garantía se obtiene desde un reconocimiento visual, por lo que es no analítica, además no se evidencian elementos teóricos que le brinden sustento. La suplementación del doblado de papel es carente [C], dada la naturaleza de la tarea propuesta, no obstante, destacamos la incidencia del papel en la generación de ideas, aspecto que detallaremos más adelante. Categorizamos el argumento de acuerdo a lo ya dicho [IE111101, P2CM].

Socialización

El profesor pidió a algunos estudiantes pasar al frente y comentar a los compañeros las estrategias empleadas para determinar si dos ángulos tenían la misma medida. Las parejas conformadas por Jack y Julio y por Blanca y Luis mencionaron que habían usado transportador. Jack utilizó esta herramienta frente a sus compañeros para medir un par de ángulos y mostrar así que tenían la misma medida. Frente a esto el profesor preguntó a los estudiantes si alguna pareja había considerado otra manera de conformar parejas de ángulos de acuerdo a la instrucción dada, ante lo cual los grupos de Alex y Gohan y de Brock y Max expresaron que superpusieron parejas de ángulos para reconocer en qué casos se cumplía la igualdad de medidas. A solicitud del profesor pasa Alex y Gohan al frente de sus compañeros para explicar el procedimiento empleado y con ello que no era necesario utilizar el transportador. La interacción de este episodio la presentamos a continuación.

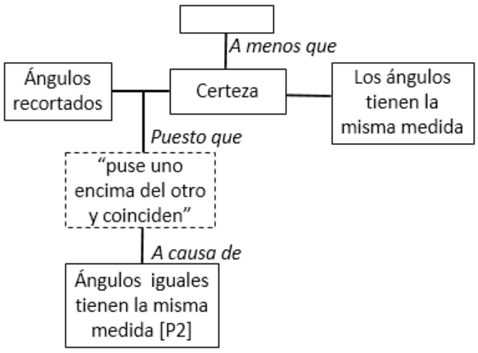
10009	P	Alex, por favor inicia.
10010	Alex	Estos dos ángulos [son congruentes] porque puse uno encima del otro y me di cuenta que eran iguales. Como son iguales, tienen la misma medida.
10011	P	Tienen la misma medida ¿Nos puedes especificar? [Alex colocó un ángulo sobre otro] ¿No sobra nada?
10012	Alex	No señor.
10013	P	¿Y encontraste otros que de pronto no son de la misma medida?
10014	Alex	No señor.

10015	P	O sea, todos los que te di ¿Tienen la misma medida?
10016	Alex	Pues estos son los únicos que encontramos que son iguales.
10017	P	Y sin usar transportador.
10018	Alex	Sí, señor
10019	P	Yo quiero que nos muestre unos que no tienen la misma medida según ustedes.
10020	Gohan	Si ponemos este encima del otro [ángulo], el ángulo no va a medir igual y la imagen tampoco es igual.
10021	P	¿Y otro caso? ¿Pero por qué decías que no?
10022	Gohan	Pues porque mira, estos ángulos no parecen igual, pero sobra un pedazo [coloca un ángulo encima de otro].

En esta interacción se reconoce un argumento inductivo [I] ya que ellos adoptan como regla general la acción de sobreponer ángulos y verificar si los bordes coincidían para luego concluir qué ángulos tenían o no medidas iguales. Lo solicitado por la tarea llevó a los estudiantes a proponer una garantía que conectara el dato con la aserción.

En este argumento no se involucra el doblado de papel como medio, pues este se sustituye por los ángulos en cartón, los cuales se convierten en dato. La garantía se evidencia cuando Alex explica que sobrepuso un ángulo sobre otro para saber si tenían estos la misma medida [10010, 10011] y de esta manera arribar a la aserción que consistió en señalar qué ángulos medían igual [10010, 10016].

Para este argumento Alex y Gohan ofrecen como respaldo a sus acciones la idea de ser igual implica tener la misma medida [10010]. Por lo anteriormente dicho atribuimos un respaldo perceptual, por las mismas razones del anterior [P2] El refutador es un elemento ausente en este argumento en vista de que Gohan no declara salvedades a la garantía o al respaldo, que en este caso correspondería a la acción de poner un ángulo encima de otro y que aunque coincidieran, no fueran congruentes. En todo momento Alex y Gohan se expresan con seguridad, por lo que se reconoce un calificador modal de certeza. Presentamos el esquema del argumento incompleto [111101] como sigue.



Esquema 75. Alex y Gohan ángulos con igual medida al sobreponerlos

Como se señaló, el tipo de garantía aquí es empírica dada la aproximación de los estudiantes [E]. La suplementación es carente [C] ya que no se recurre al doblado de papel para solucionar la tarea [IE111101, P2CM].

Posterior a esta propuesta se escuchó al grupo de Any y Luciana, quienes señalaron lo que se debía tener en cuenta a la hora de comparar ángulos con diferente longitud y misma abertura para conocer si tenían la misma medida. Veamos parte del episodio de la socialización en la que ellas intervienen.

10024	P	Miren lo que está mostrando Any [Imagen 62 a]. ¿Por qué podemos decir que tienen la misma medida?
10025	Any	Porque tiene el mismo, o sea ¿Cómo me explico? O sea lo que cuenta es esta parte [señala de los ángulos que tenía, Imagen 62 b, la parte que coincidía], y no esto [Imagen 62 c].
10026	P	Muéstralo nuevamente por favor ¿Qué decías?
10027	Any	Que pueden ser congruentes si se puede sobreponer esta parte [muestra aparte el ángulo de menor longitud, Imagen 62 a], lo de arriba no es necesario, lo que importa es el ángulo [se refiere a la abertura]

(a) Ángulos sobrepuestos, de diferente longitud

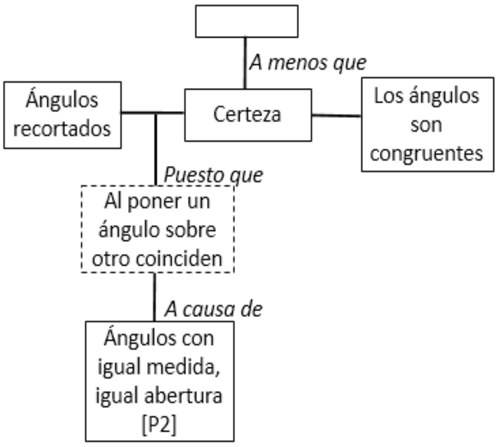
(b) Any señalando lo que importa para comparar ángulos

(c) Lo que no importa para comparar ángulos

Imagen 62. Any y Luciana argumentan sobre ángulos de igual medida

Obtenemos un argumento muy similar al anterior en cuanto a que este es inductivo [I], empírico [E] y la suplementación del medio es carente [C]. Sin embargo explicamos algunos detalles particulares a continuación.

Al analizar los elementos encontramos que el dato de este argumento corresponde a los dos ángulos (Imagen 62a) que presentó, ya que alrededor de ellos propone su aserción. La garantía es la misma que estableció Gohan en el argumento anterior, la de sobreponer los ángulos para verificar si sus lados coinciden [10024]. Con tal garantía Any conecta el dato con la aserción que constó en afirmar que los ángulos son de la misma medida [10024] no importa el largo de sus lados sino el ancho de este [10026]. El respaldo se reconoce en la idea que moviliza su forma de proceder, esta es la necesidad de comparar la abertura de los ángulos como medio para determinar su congruencia, lo cual a su vez lo hace de naturaleza perceptual [P2] y que tiene que ver con un proceder con el medio netamente. Se evidencia una ausencia de refutador en tanto que Any no refiere situaciones en las que la garantía no sea válida. Finalmente distinguimos un calificador modal de certeza, la estudiante expone sin lugar a dudas su punto de vista ante sus compañeros. Veamos el esquema incompleto [111101] de este argumento a continuación.



Esquema 76. Argumento de Any, ángulos congruentes, lo que importa es el ancho

Según lo anterior obtenemos un argumento inductivo, empírico, incompleto, de suplementación carente en el marco de una tarea de exploración [IE111101, P2CM].

Durante la socialización se pudieron observar algunas ideas erradas sobre lo que determinaba si dos ángulos tenían la misma medida, ya que algunos estudiantes comparaban la longitud de los lados de los ángulos para tal fin. Con el ánimo de superar este inconveniente el profesor tomó dos ángulos que se consideraran de la misma medida, así como con la misma longitud en los lados que los determinaban, los sobrepuso y posteriormente corto por la mitad uno de ellos, dejándolo desigual la longitud de su lado correspondiente. Luego, el profesor preguntó a los estudiantes si el ángulo al que le había cortado parte de la longitud de sus lados continuaba teniendo la misma media que el otro. Ante este interrogante los estudiantes respondieron que seguían siendo de la misma medida.

Al considerar la naturaleza de esta tarea se distingue que a pesar de que el doblado de papel no tuvo presencia en el proceder de los estudiantes para resolver la tarea, es decir, no acudieron al doblado de papel para establecer sus maneras de definir ángulos congruentes, si se puede evidenciar que la manipulación y la superposición dada al medio son propios de este. Cabe señalar entonces que el medio provee una forma particular aquí de abordar la solución de la tarea ya que exhibió un modo único de dar respuesta a lo solicitado por el enunciado de la tarea. Concluimos entonces que el papel imprime sobre el conocimiento generado por los estudiantes un modo distintivo en su naturaleza.

Ángulos par lineal y ángulos congruentes

Esta sesión de clase inicia con el establecimiento de la definición de ángulos congruentes. Para esto, el profesor pregunta a los estudiantes cómo definirían ángulos congruentes y recalca el hecho de observar lo que sucede al sobreponer dos ángulos. Iván manifiesta que se tenía en cuenta que tuvieran la misma medida, mientras que Mónica expresa que se tenía en cuenta que al sobreponerlos debían ser iguales y no debía sobrar nada a los lados. El profesor aclara que siempre que suceda esto se va a hablar de ángulos que coinciden. Así, en conjunto formulan la segunda definición que se enuncia como sigue:

Definición de ángulos congruentes: son ángulos que al sobreponerlos sus lados coinciden.

Posteriormente cada estudiante consigna está definición en sus cuadernos y por parejas se disponen a resolver la tarea 11. Esta tarea está apoyada en la manipulación de ángulos en cartón y tiene como objetivo que los estudiantes reconozcan que los ángulos que son par lineal son también suplementarios. En esta oportunidad los ángulos incluyen sus medidas.

Tarea 11

A cada pareja de trabajo se le ha entregado una bolsa con ángulos con las etiquetas de sus medidas.

Completa la siguiente tabla con las parejas de ángulos que midan 180°

Medida del ángulo 1					
Medida del ángulo 2					

¿Hay alguna relación entre las parejas de ángulos cuyas medidas dieron 180°?

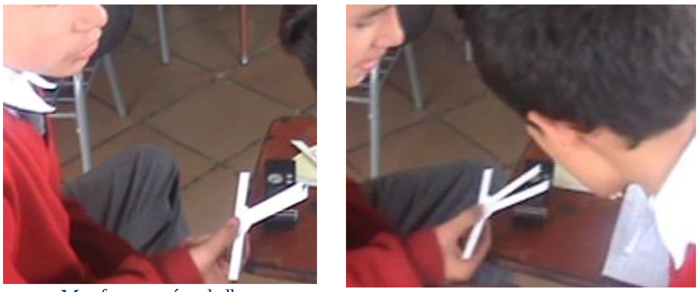
Trabajo grupal

Max lee el enunciado de la tarea mientras que Brock toma algunos ángulos y observa la medida que tienen consignada. Brock encuentra la primera pareja de ángulos que cumple la condición de la tarea y se la presenta a Max, aunque él duda de lo que dice su compañero y hace las cuentas por sí mismo. Después de que Max acepta este resultado ambos proceden a consignar en la tabla la primera pareja de ángulos encontrada, esta es 85° y 95°. Ellos encuentran la siguiente pareja de ángulos que satisface lo solicitado (63° y 117°). Max verifica nuevamente el resultado haciendo cuentas con los dedos y con ello consignan la nueva pareja encontrada en la tabla proporcionada. Max encuentra una pareja más (33° y 147°). Se esperaba que los estudiantes ensamblaran ángulos par lineal con ayuda de las parejas que descubrían, no obstante los estudiantes acoplaron los ángulos del modo que se presenta en la Imagen 63. En esta se muestra que Brock coloca el ángulo de menor medida en el interior del ángulo que tenía mayor medida.

Imagen 63. Relación que Brock da a los ángulos de la bolsa.

A pesar de lo realizado por Brock, Max ensambla los dos ángulos de modo tal que estos determinan un par lineal. Max, sin embargo, pasa por alto la relación geométrica que allí tenía lugar, pues no se detiene a considerar lo que había hecho. Max no mantiene los ángulos ensamblados de modo fijo sino que los mueve sin algún criterio Imagen 63).

A continuación responden a la pregunta de la tarea escribiendo "sí, porque al sumar cada par de ángulos, el resultado de su suma es de 180". Por lo anterior se aprecia que la relación expresada por los estudiantes es la misma que se suministró en el enunciado de la tarea para conformar las parejas de ángulos. Consideramos que el hecho de que los estudiantes no conservaran las configuraciones de ángulos previamente obtenidas no apoyó a la determinación de una propiedad distinta a la presentada.



Max forma un ángulo llano — Max no se fija de la propiedad

Imagen 64. Max ensambla los ángulos

El profesor nota que el grupo de trabajo se ha desviado del objetivo de la tarea pues él pretende con esta que los estudiantes identifiquen la propiedad "la suma de las medidas de todos las parejas de ángulos que forman par lineal, es de 180°". Dado el resultado expresado por los estudiantes, el profesor guía la discusión en aras de que se reconozca lo que inicialmente se tenía presupuestado. Para ello él sugiere a los estudiantes que den cuenta y razón de que las parejas de ángulos permiten arribar al 180° declarado en su respuesta. Los estudiantes responden que esto se da por la suma de sus medidas. El profesor, en conversación con los estudiantes, indaga por alguna representación familiar para ellos de un ángulo de 180°, a lo que ellos rápidamente evocan el ángulo llano, acompañando esto de un movimiento horizontal con sus manos (Imagen 65).

Imagen 65. Representación de un ángulo llano, con desplazamientos de las manos.

El profesor ahora cuestiona por la posibilidad de explicar por qué las parejas de ángulos conformadas dan lugar a un ángulo llano (esperando posiblemente que ellos conformaran con estos ángulos par lineal y de ahí reconocieran la propiedad “dos lados de estos ángulos conforman una recta, un doblez”). Los intentos y respuestas provisionales de los estudiantes dejan ver que están muy lejos de alcanzar esta relación. La manipulación de los ángulos no les favorece tal descubrimiento (v.g. Imagen 66).

Imagen 66. Brock ubica dos ángulos formando una línea recta.

De la interacción sostenida es posible notar que los estudiantes no identificaron la relación esperada entre las parejas de ángulos a pesar de las preguntas del profesor. Posiblemente, haber dejado las parejas de ángulos bajo una configuración similar en el escritorio hubiera apoyado el reconocimiento de alguna propiedad. Los estudiantes descartaban cada hallazgo para encontrar un nuevo resultado (Imagen 67).

Imagen 67. Manipulación de los ángulos por Max.

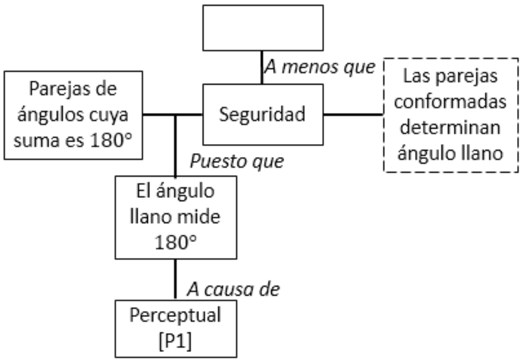
El profesor continúa supervisando el trabajo de cada pareja de estudiantes. Al acercarse al grupo de Brock y Max observa que no han realizado algo distinto a lo que anteriormente le comentaron. Por lo tanto, él les sugiere ubicar cada pareja de ángulos cuya suma de sus medidas es 180°, sobre el pupitre (Imagen 68). Cuando los estudiantes realizan esto él los cuestiona respecto a la relación entre estas.

Imagen 68. Parejas de ángulos que cumplen la condición de la tarea.

11001	P	¿Qué forman tienen [las parejas de ángulos]? ¿Un ángulo qué?
11002	Max	Llano.
11003	P	Y entonces con lo que ustedes ven ahí físicamente, ¡físicamente! ¿Qué relación tienen esas cinco parejas [de ángulos]?
11004	Max	Que todas forman el mismo ángulo.
11005	P	Todas forman el mismo ángulo...bueno eso ya se sabe ahí... ¿qué más? Ya lo habían dicho... Observen, observen allá [parejas de ángulos, Brock y Max observan]. A ver, ¿qué ve ahí?, físicamente ¿qué relación tienen?, ¿qué tienen en común [las parejas de ángulos]?
11006	Brock	Sí.
11007	Max	Que al unirlas todas [las parejas de ángulos] forman el mismo ángulo llano.
11008	Brock	Que al unirlas todas [las parejas de ángulos] forman el mismo ángulo.
11009	P	Ah esa es la relación, ¿usted está de acuerdo [se dirige a Max]?
11010	Max	Sí.
11011	P	¿Por qué no dijo? Adicionen ahí [en la hoja que consignaron la respuesta].

Con base en la interacción que los estudiantes han sostenido hasta ahora, en este diálogo es posible reconocer un argumento de tipo deductivo [D] dado que los estudiantes recogen la idea dada por el profesor referida a que el ángulo llano mide 180° y la incorporan a los resultados que la tarea les permitió obtener, reformulando así tal propiedad y expresándola como "Que al unirlas todas forman el mismo ángulo llano" [11007].

En este argumento se reconoce como dato el conjunto de parejas de ángulos cuyas suma de medidas es 180°. Por su parte la garantía corresponde a la noción (idea no formal en clase) de que el ángulo llano mide 180°. La aserción en consecuencia es que las parejas de ángulos conformadas determinan un ángulo llano. El respaldo es de tipo perceptual [P1], Brock y Max perciben las características del ensamble de los ángulos de carton al visualizar siempre un ángulo llano. El refutador está ausente en este argumento. El primero porque se llega a la conclusión únicamente a través de la visualización de la configuración de los ángulos y el segundo porque no se menciona alguna salvedad a la idea expresada. El calificador modal en este caso representa confianza y seguridad en la tesis que sostienen tanto Brock como Max [11007, 11008], aunque en principio no fue la conclusión que establecieron. Así, este nuevo argumento que se genera es incompleto [111101] como se puede apreciar:



Esquema 77. Brock y Max, los ángulos que forman uno llano suman 180°

Este argumento es de tipo empírico [E] porque se apoya en la visualización de la configuración de los ángulos para establecer la conclusión. Se cuenta con un uso de medio carente [C], relativo a una tarea de descubrimiento [M]. Así el argumento expuesto es inductivo, empírico, incompleto, con un uso del medio carente, perteneciente a una tarea de descubrimiento [DE111101, P1CM].

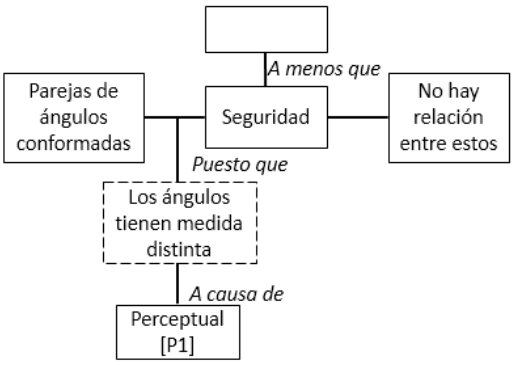
Socialización

El profesor pregunta a diferentes grupos por la relación que encontraron en las parejas de ángulos conformadas. Una pareja expresó: no hay relación porque todos los ángulos tienen medida diferente, mientras que otros grupos expresaron que estas parejas cumplían la condición de determinar un ángulo llano o una recta. Esta última idea es la misma propuesta por Brock y Max. A continuación presentamos una interacción al respecto.

11012	P	El primer grupo aquí ¡eh!, Alex y Gohan ¿qué encontraron?
11013	Alex	Solo uno [pareja de ángulos] no da 180°.
11014	Gohan	Cinco dan 180°, son 6 parejas y solo uno no da 180°.
11015	P	¡Cinco dan 180°!,
[Alex y Gohan asienten con la cabeza]		
11016	P	¿Y qué respondieron a la pregunta de la relación que preguntaba...?
11017	Gohan	[Interrumpe] Eh, no porque todos los ángulos tienen una medida diferente.
11018	P	¡Tienen una medida diferente!
[Gohan asiente con la cabeza]		
11019	P	¿Qué más encontró Gohan?
11020	Gohan	No, pues lo mismo, que los ángulos tienen unas medidas diferentes entonces pues no tienen ninguna relación.

En la interacción anterior es posible reconocer que Alex y Gohan no se encontraron la propiedad esperada por enfocarse en las medidas de cada uno de los ángulos. Reconocemos un argumento inductivo [I] donde los estudiantes parten de las parejas de ángulos conformadas [11013] [dato] y determinan que no hay relación alguna entre estos [11017, 11020] [aserción]. Todo lo anterior se da porque cada uno de los ángulos involucrados tenía una medida distinta a los demás [11017, 11020] [garantía].

El respaldo que se reconoce aquí es de tipo perceptual [P1] en tanto que los estudiantes se fijan en las medidas de los ángulos provistos. Alex y Gohan no reportan refutador porque su idea es producto del trabajo en equipo por tanto expresan la misma idea. Así el calificador modal refleja seguridad y complemento entre sus ideas. Este argumento es incompleto [111101] como se puede observar en el diagrama:



Esquema 78. Alex y Gohan, los ángulos no tienen relación

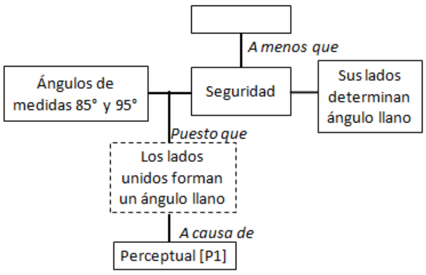
Este argumento es empírico [E] porque los estudiantes se fundamentan en la suma de las medidas de las etiquetas de los ángulos. El uso del doblado de papel es carente [C] y todo ocurre en el marco de una tarea de descubrimiento [M]. Entonces el argumento presentado es inductivo, empírico, incompleto, con una suplementación del medio carente, en una tarea de descubrimiento [IE111101, P1CM].

La discusión continuó con la intervención de Max y Brock como sigue:

11021	P	¿Qué encontró el grupo de Brock y Max, qué respondieron a la pregunta?
11022	Max	[Lee la respuesta consignada] Que al unir los lados de los ángulos forman un ángulo llano.
11023	P	Y ¿me puede mostrar una de esas parejas y explicar lo que está escrito, lo que escribió ahí?, para todos, desde allá [desde el puesto] puede ser.
[Max busca una pareja que cumpla la condición de la tarea]		
11024	P	Todos tengan a la mano una pareja de las que ustedes encontraron [que suma 180°].
11025	Max	El de 85°…
11026	P	[Interrumpe] ¿Puede mostrarlas así [levanta los brazos] para todos desde allá? Alzar las manos.
11027	Max	Unirlas así [forma con los dos ángulos un par lineal].
11028	P	Ajá.
11029	Max	Para que nos dé el ángulo llano [indica con el dedo el ángulo llano] (Imagen 69).

Imagen 69. Ilustración de Max, dos ángulos que suman 180° forman un ángulo llano.

En la intervención de Max es posible observar que lo que este grupo de trabajo dedujo con ayuda del profesor en la fase grupal coincidió con lo que los estudiantes consignaron en su hoja de respuestas e ilustran a sus compañeros con una pareja de ángulos. La forma en que los estudiantes expresan sus ideas da lugar a reconocer un argumento inductivo [I] en el que se parte de las parejas de ángulos que cumplen la propiedad [11023, 11025] [dato], se concluye que sus lados determinan un ángulo llano [aserción] [11022] y esto da lugar al reconocimiento público de una regla "Que al unir los lados de los ángulos forman un ángulo llano" [11027, 11029] [garantía]. En la intervención del estudiantes se reconoce un respaldo de tipo perceptual [P1] que involucra el uso del medio para ese momento que son los ángulos provistos, ya que Max exhibe un ejemplar de ángulos ensamblados para sostener la aserción de su argumento [11027]. En el discurso no reconocemos refutador. El calificador modal es e certeza. Así este argumento es inductivo, empírico, incompleto, con un uso del medio carente en una tarea de descubrimiento [IE111101, P1CM].



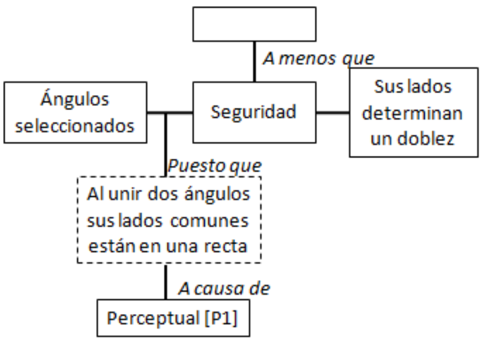
Esquema 79. Argumento de Max los ángulos unidos forman un ángulo llano.

La clase continúa con la intervención del profesor, quien ahora pregunta si alguien más llegó a la misma conclusión que Brock y Max.

11030	P	¿Quién más lo hizo así? Por ejemplo, Jana ¿Cómo lo encontró usted? Cómo… o de otra manera, no importa.
[Jana presenta una de las parejas de ángulos que encontró y la ubica del mismo modo que Max]		
11031	P	¿Qué relación física ve usted ahí?
11032	Jana	Forman un doblez.
11033	P	¿Cuál sería ese doblez que representan?
[Jana señala con el dedo el lado que comparten los dos ángulos]		
11034	P	¿Ese [doblez]? Mauro qué opina usted de lo que dice ella. ¿Encontró algo parecido qué opina?

11035	Mauro	Sí, que tiene razón [toma una pareja de ángulos y señala el ángulo llano con el dedo].
11036	P	¿Qué pasa con eso... que pasa usted el dedo?
11037	Mauro	Eh pues es una recta [vuelve y muestra el ángulo llano con el dedo].
11038	P	¿Eso es una recta?
11039	Mauro	Si señor [asiente con la cabeza].
11040	P	Sí, ¿eso es una recta?
11041	Mauro	Sí señor [asiente con la cabeza] sí, vea [vuelve a delinear con el dedo el ángulo llano].
11042	P	¿O la representación de una recta?
11043	Mauro	La representación de una recta.

De la interacción anterior es posible ver que Jana y Mauro expresan un argumento de tipo inductivo [I], en el que no refieren a ángulos llanos como en el caso de Brock y Max sino a dobleces. Jana afirma que a partir de una pareja de ángulos que selecciona [dato], bajo una configuración idéntica a la que presentó Brock, sus lados comunes determinan un doblez [11032] [aserción]. Mauro recoge la idea de Jana tomando una pareja de ángulos con las condiciones de la tarea y señalando con el dedo que se forma una recta a partir de los lados no comunes de estos [11037, 11043] [garantía]. El argumento de los estudiantes se apoya en hacer evidente su hallazgo en su exploración por medio de un ejemplar que mostraron [P1], lo que señalamos como respaldo. No se reconoce refutador porque tanto Jana como Mauro obtuvieron una idea similar al trabajo de Brock y Max. El calificador modal se hace evidente en la interacción sostenida, uno de seguridad al comunicar sus ideas. El argumento es incompleto [111101] y se presenta enseguida.



Esquema 80. Jana y Mauro, ángulos que determinan un doblez miden 180°.

Este argumento es empírico [E] porque se apoya en la manipulación de los ángulos de cartón, es de suplementación carente [C], en una tarea de descubrimiento [M]. Se resume así inductivo, empírico, incompleto, de suplementación carente en una tarea de descubrimiento [IE111101, P1CM].

Posteriormente, el profesor pregunta al grupo de Alexa y Mía por su respuesta, ellas responden que los ángulos suman 180° y obtuvieron este resultado sumando las etiquetas de los ángulos. El profesor solicita a Mía disponer de una pareja de ángulos cuya suma es 180° y otra cuya suma no lo es. Ellos presentan en el tablero ambas parejas ubicándolas de manera que compartan uno de sus lados (Imagen 70). Luego de esto el profesor indica a Iván expresar la diferencia entre la forma de cada pareja de ángulos, a lo que él establece que la pareja cuya suma es 180° “están rectos en la parte inferior”. El profesor designa esta configuración como ángulo llano.

Imagen 70. Ubicación de dos parejas de ángulos en el tablero.

El profesor solicita ahora a los estudiantes observar una de las parejas cuya suma es 180° y pregunta por lo que es común a cada pareja de ángulos. Max contesta que lo común es que comparten un lado, sus compañeros aprueban esta idea. El profesor recuerda que estos ángulos fueron nombrados par lineal.

El profesor recuerda la naturaleza de los hechos geométricos para inducir así a los estudiantes a formular uno a partir de la relación observada a través de esta tarea. Max manifiesta que dos ángulos que suman 180° forman un ángulo llano. Sin embargo, debe señalarse que esto no es verdadero en general. Por ello el profesor representa gráficamente dos ángulos en el tablero cuyas medidas suman 180° pero no son par lineal, como se muestra a continuación:

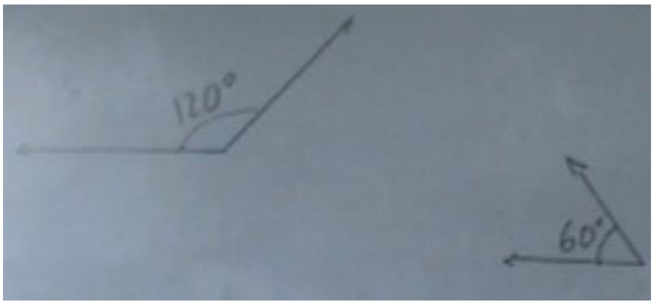
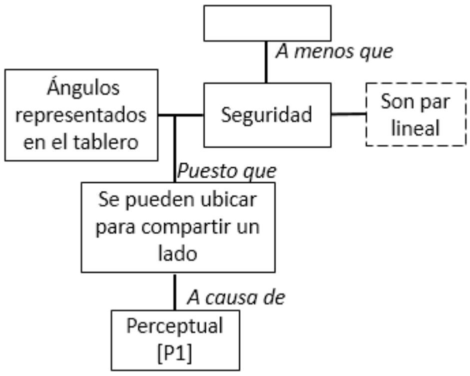


Imagen 71. Representación de ángulos cuya medida es 180° pero no forman para lineal.

Los estudiantes, debido a su experiencia con el material tangible, expresan que basta con trasladar uno de estos ángulos hacia el otro para formar un par lineal. El profesor para aclarar esta idea, cuestiona a los estudiantes respecto a lo que son ángulos par lineal, los estudiantes reconocen que son los que comparten un lado e insisten que los representados en el tablero son par lineal porque se pueden ubicar de manera que dos de sus lados coincidan.

En el anterior apartado evidenciamos un argumento deductivo [D] que emerge del diálogo entre los estudiantes y profesor. El dato es la representación en el tablero, Imagen 71, la garantía se reconoce en la declaración de que los ángulos se podían ubicar para que compartieran un lado. La aserción es la afirmación “son par lineal” declarada por los estudiantes. El elemento respaldo se aprecia desde lo visual [P1]. El refutador está ausente en este argumento. Como calificador modal se distingue certeza. Presentamos el esquema de este argumento incompleto [111101].

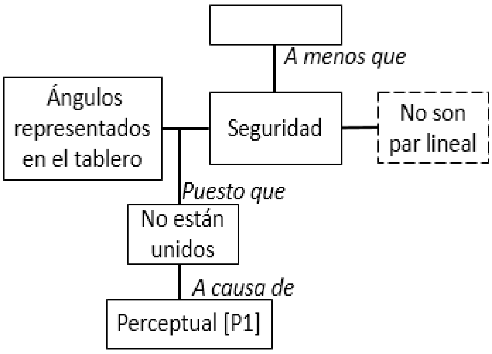


Esquema 81. Argumento grupal en la socialización

Sobre la garantía decimos que es empírica [E] en tanto que se da desde lo visual de la representación de los ángulos en el tablero, no obstante la relación lógica de los elementos no es válida dado que los ángulos par lineal están determinados por dos rectas y allí no se aprecia tal configuración para los ángulos, por lo que el argumento es no legítimo [N]. El doblado de papel es carente [C]. Lo anterior resulta en un argumento deductivo, no legítimo, incompleto, de suplementación carente, en el marco de una tarea de exploración [DN111101, P1CM].

El profesor cuestiona a los estudiantes respecto a si los ángulos son par lineal tal y como aparecen representados en el tablero (sin trasladarlos), Emilio responde que estos ángulos así como están ubicados no son par lineal porque no “están unidos”.

Ahora vemos emerger un segundo argumento deductivo [D]. En el que el dato es la representación en el tablero, la garantía se enuncia en palabras de Emilio cuando dice “porque no están unidos”, idea en la que se apoya para declarar que no son par lineal [aserción]. El respaldo nuevamente es perceptual [P1], dado que se da desde lo que se visualizaba en el tablero. El refutador es elemento ausente, no así el calificador modal, que se aprecia como de certeza. Obtenemos un argumento incompleto [111101] cuyo esquema presentamos a continuación.



Esquema 82. Emilio, los ángulos no son par lineal

De la garantía señalamos una de tipo visual, es desde lo perceptual que Emilio reconoce en la representación del tablero, por lo que el argumento es empírico [E]. La suplementación del medio es carente [C], por lo que categorizamos el argumento como [DE111101, P1CM].

Luego, el profesor solicita a los estudiantes disponer en el puesto de una pareja de ángulos cuya suma es de 180° y solicita observarlos e indicar qué deben cumplir los ángulos que tienen armados para que la suma de 180°, de lo que concluyen que deben ser par lineal. El profesor reformula la pregunta partiendo del antecedente del hecho geométrico que se quiere deducir de aquí, así que expresa: ¿qué se obtiene si los ángulos son par lineal? Los estudiantes responden que su suma debe medir 180° y con ello finalmente el profesor enuncia el siguiente hecho geométrico:

HG par lineal-180°: si dos ángulos forman par lineal sus medidas suman 180°.

En la solución de esta tarea es posible evidenciar que el trabajo con el material constituyó una dificultad, en tanto que para los estudiantes cualquier par de ángulos cuya suma fuese 180° era para lineal, pues siempre se podrían hacer coincidir dos de sus lados trasladándolos. El doblado de papel en esta tarea no se empleó porque se acudió a otra herramienta para que los estudiantes pudieran descubrir el hecho geométrico *par - lineal-180* por medio de la exploración con algunas parejas de ángulos que satisfacían esta propiedad.

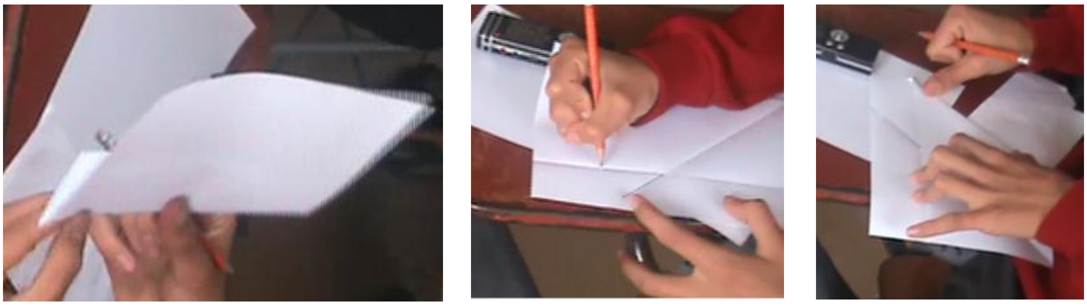
¿Cómo construir dos ángulos congruentes?

El profesor presenta la siguiente tarea leyendo su enunciado. Esta tarea es de profundización porque requiere que el estudiante acuda a los elementos teóricos abordados hasta ahora, particularmente la idea de que dos ángulos son congruentes si al solaparse coinciden (definición). El enunciado de la tarea es el siguiente:

Tarea 12
Construye dos ángulos que sean congruentes con dobleces. Propon dos construcciones distintas.

Trabajo grupal

Brock procede a realizar un doblez en su hoja de trabajo paralelo a los bordes más largos de esta, Imagen 71 Brock realiza un doblez que interseca al inicial y delinea con un lápiz uno de los cuatro ángulos que se determinan, Imagen 72, luego hace coincidir uno de los bordes de la hoja con uno de los lados del ángulo que él resaltó y genera con ello un nuevo doblez, Imagen 72.



(a) (b) (c)

Imagen 72. Doblez generado a partir de hacer coincidir un lado de la hoja con un lado del ángulo.

Por su parte Max en otra hoja, ha construido dos dobleces cualesquiera que se intersecan y también ha marcado uno de los cuatro ángulos generados, al parecer guiado por la construcción de Brock. Max le indica a Brock que debe construir el otro ángulo, el congruente, en la segunda hoja que se les entregó a cada uno. Brock toma la hoja que no ha empleado, procede a realizar allí dos dobleces que se cruzan, de manera similar a como construyó los primeros. Al mismo tiempo Max en su segunda hoja realiza dos dobleces que se cruzan. Brock pregunta a la investigadora si cada ángulo debe ir en una hoja distinta, ante lo que ella aclara que deben ir en la misma hoja y hacer una propuesta distinta en cada una de estas.

De este modo Brock toma su hoja original de trabajo y realiza un doblez que interseca al último que había generado, marcando con el lápiz el ángulo que él considera congruente al ya construido. En la siguiente imagen enumeramos los dobleces según el orden en que Brock los fue realizando:

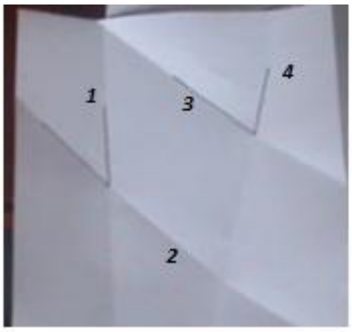
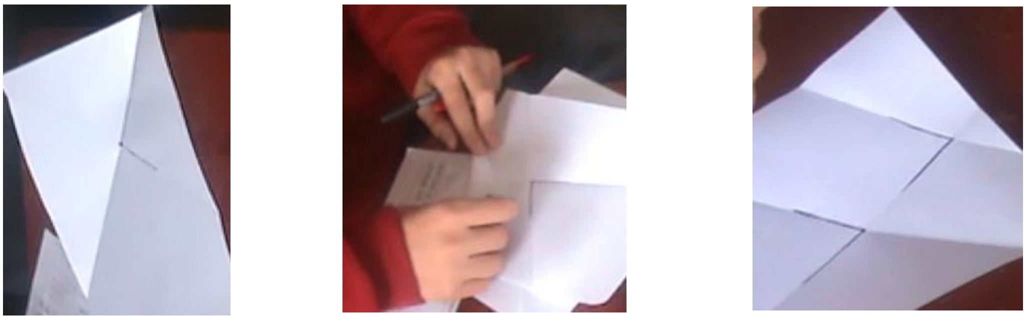


Imagen 73. Dobleces de Brock no congruentes.

Aunque parece a primera vista que los dos ángulos marcados en la hoja tienen la misma medida, una mirada más detallada a las construcciones permite descartar esta hipótesis. Esto porque el último doblez que realizó Brock no es paralelo al doblez del correspondiente lado del primer ángulo. Brock no justifica por qué considera que los ángulos obtenidos son congruentes, tampoco los sobrepone para testar su idea, simplemente sustenta su procedimiento en apoyo visual.

Mientras tanto Max vuelve a su construcción de la primera hoja, Imagen 74, y hace coincidir uno de los dobleces sobre sí obteniendo así dos ángulos que tienen en común un doblez remarcándolo con lápiz, como se puede observar en la Imagen 74:



(b) (c)

(a)

Imagen 74. Proceso de construcción de Max de dos ángulos congruentes.

Luego de esto Max toma la segunda hoja en la que había construido dos dobleces que se intersecan y realiza un doblez paralelo a los bordes cortos de la hoja, el cual contiene el punto de intersección entre los primeros dobleces, Imagen 75.

Imagen 75. Proceso de construcción de Max.

Brock desarrolla otro procedimiento a partir del cual construye dobleces que se intersequen entre sí, plegando papel obtiene de una manera simple los ángulos, que el asume como congruentes, Imagen 76.

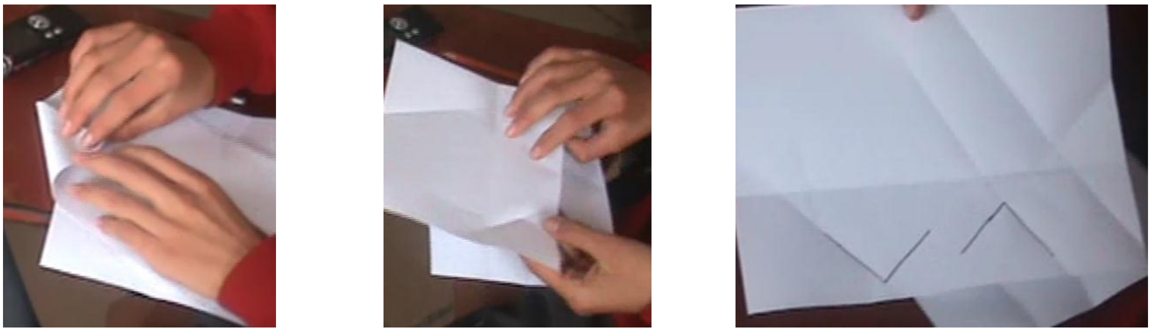


Imagen 76. Segunda construcción de Brock.

Los estudiantes, tras terminar sus construcciones voltean la hoja y no intercambian ideas. La investigadora interviene preguntando cómo prueban que cada pareja de ángulos construida cumple lo solicitado. Los estudiantes leen la definición de ángulos congruentes y manifiestan que los ángulos deben coincidir, además mencionan que deben medir lo mismo. Así, Max plantea que para comprobar esto se debe poner un ángulo encima del otro. Brock intenta hacer esto en su última construcción realizando un doblez que correspondería al eje de simetría entre los dos vértices de los ángulos. Como se ilustra en seguida:

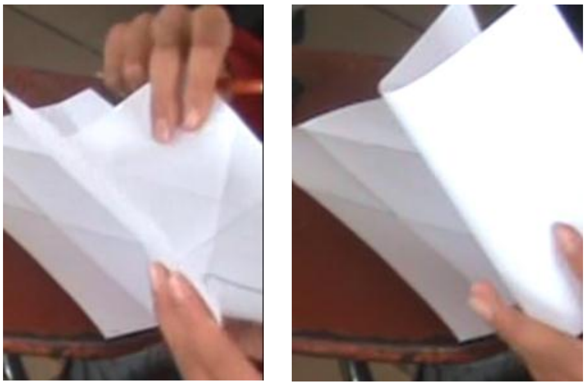


Imagen 77. Intentos de Brock por encontrar un doblez para sobreponer los ángulos.

Sin embargo, no logra el objetivo por la dirección de los ángulos. Se le pregunta a Max frente a la justificación de su primera construcción (Imagen 77), pero él no provee explicación alguna aunque reconoce que los ángulos deben tener la misma medida, Brock considera que para justificar que los ángulos tienen la misma medida es necesario emplear la regla pero la investigadora les indica que deben hacerlo sin emplear un elemento externo al papel. Ellos exploran la situación a través de dobleces que no marcan, sin lograr hacer coincidir los ángulos.

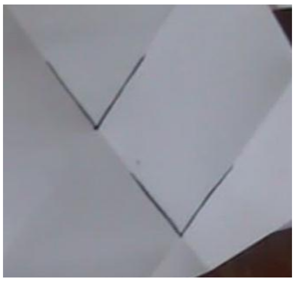


Imagen 78. Ángulos congruentes por Max en su primera construcción

De las construcciones realizadas por Brock y Max hasta el momento se puede decir que sus afirmaciones están apoyadas en la percepción visual, pues ninguno de ellos justifica de alguna forma su construcción. Debido a que no hay una justificación de su hallazgo no se reconocen en estos argumentos.

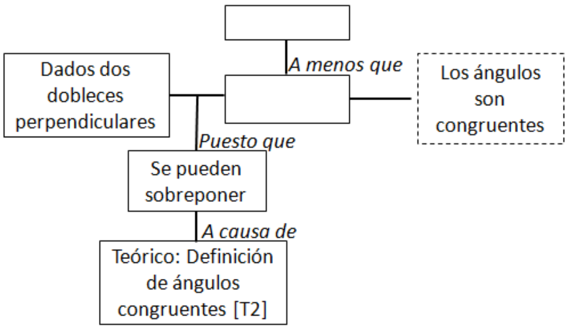
Brock tras la imposibilidad por demostrar que los ángulos construidos eran congruentes, realiza otros dos dobleces perpendiculares por la mitad de la hoja (Imagen 79) y justifica que los dos ángulos que se obtienen son congruentes porque "se puede poner un lado sobre otro", aludiendo con ello a la idea de superposción para verificar que ambos ángulos coinciden.

Imagen 79. Dos ángulos congruentes según Brock.

En esta nueva construcción y su razón para establecer que los ángulos son congruentes encontramos un argumento de tipo deductivo [D]. Brock parte de realizar dos dobleces perpendiculares[9] [dato] para concluir que los ángulos determinados son congruentes [aserción] gracias a que es posible superponerlos [garantía] como se establece en la definición de ángulos congruentes [respaldo]. De este modo, el respaldo es de tipo teórico [T2]. Respecto al calificador modal de este argumento no se puede decir algo porque es posible reconocer que tanto Brock como Max desde un principio no supieron como probar la congruencia

[9] Los llamamos así pues representan tal propiedad entre rectas en el papel. Sin embargo, este asunto no ha sido discutido con propiedad en clase. Esto ocurrirá en el siguiente núcleo.

y es con las preguntas que hace la investigadora que se ven en la necesidad de hacerlo. Así, este argumento es incompleto [111100].



Esquema 83. Brock y Max, los ángulos que se pueden sobreponer son congruentes.

Este argumento es analítico [A] porque Brock se apoyó en la definición de ángulos congruentes para reconocer y construir dos dobleces que se pudieran sobreponer. Además, es de suplementación total [T] porque Brock únicamente puede verificar que los ángulos coinciden tras plegar la hoja de papel. En definitiva este argumento es deductivo, empírico, incompleto, analítico, de suplementación total, de una tarea de profundización [DA111100, T2TL].

En este momento termina la sesión de clase y el profesor recoge las construcciones de cada pareja de trabajo para presentarlas en la siguiente sesión.

En la siguiente sesión de clase el profesor entrega a cada grupo dos hojas para que reporten sus construcciones, teniendo en cuenta lo realizado en la clase anterior. Max lee la indicación de la tarea y Brock realiza dos dobleces perpendiculares, producto de plegar la hoja dos veces por la mitad, proceso que se ilustra en seguida:

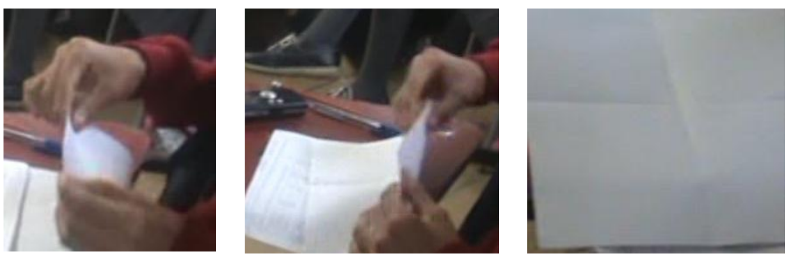


Imagen 80. Proceso de construcción de Brock

Max señala en esta configuración dos ángulos opuestos por el vértice para indicar los ángulos que son congruentes. A partir de esto tiene lugar la siguiente conversación:

12000	Brock	Y, ¿cómo comprobamos [la congruencia]? ¡Ah! pero espere yo hago estos [ángulos] acá y guardamos esa hoja para hacer [otra propuesta] [Brock repisa con lápiz los dobleces perpendiculares].
12001	Max	[Indica con un esfero los ángulos congruentes. Intenta sobreponer los ángulos]. Así, así [indica con la mano un doblez correspondiente a la bisectriz de los ángulos no marcados. Brock toma la hoja e intenta hacer un doblez, no por donde le indicó Max, sino por la mitad de la hoja

Imagen 81. Max indica el doblez a realizar. Imagen 82. Brock pliega por la mitad de la hoja

12002	Max	¡No! [toma la hoja], así [indica el doblez que sería bisectriz de los ángulos no marcados].

Imagen 83. Max toma la hoja de trabajo

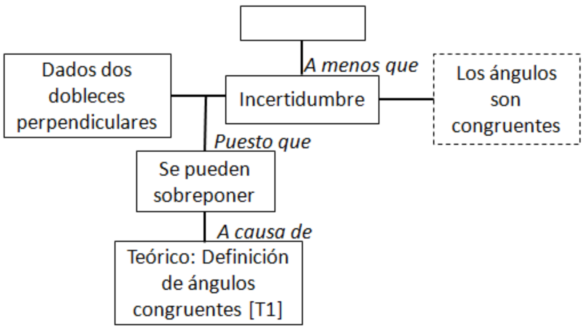
12003	Brock	[Toma la hoja] Un doblez diagonal que pase por acá [punto de intersección entre los dobleces. Traza un doblez bisectriz de los ángulos no marcados] ¡Ya! (Imagen 84):

Imagen 84. Proceso de verificación de Brock

El argumento anterior es de tipo deductivo [D] en tanto que los estudiantes parten de la construcción de los ángulos que suponen congruentes (ángulos opuestos por el vértice) [dato] y elaboran un mecanismo que les permite corroborar su sospecha [garantía]. El mecanismo que elaboran los estudiantes consiste en construir un doblez que les permite superponer los ángulos estudiados, este corresponde a la bisectriz de los otros ángulos determinados en la configuración que han representado en la hoja. Este mecanismo se sustenta en la definición de ángulos congruentes [respaldo], pues desde el inicio los estudiantes, al buscar la forma de garantizar la congruencia de dichos ángulos, buscan construir un doblez que permita superponerlos y de ahí establecer una comparación.

Imagen 85. Aceptación de Brock respecto a la idea de Max.

Sin embargo, al revisar detalladamente la construcción hecha por Brock es posible notar una desviación en los dobleces y por tanto no se prueba que los ángulos son congruentes. Por tanto, el respaldo del argumento es de tipo teórico [T1]. El argumento carece de refutador. Las acciones de Max quien orienta a Brock en la búsqueda del doblez demuestran certeza en lo que dice mientras que Brock no se ve muy convencido de seguir el camino de su compañero porque tiene su propia idea (de plegar la hoja por la mitad resultado de la experiencia tras el trabajo en la clase anterior) pero Max le impide desarrollarla, como este es un argumento conjunto podemos decir que hay incertidumbre [calificador modal]. El argumento es incompleto [111101] como se ve a continuación:



Esquema 84. Dos dobleces congruentes se pueden superponer.

Este argumento es empírico [E] en tanto que los estudiantes se apoyaron en las representaciones plasmadas en papel, para así garantizar que los ángulos quedaban superpuestos. El uso del papel fue determinante para arribar a una conclusión como ya se ha podido ver. Por lo anterior el medio en este problema tiene un uso total [T]. En definitiva este argumento es de tipo deductivo, empírico, incompleto, con un uso del medio total inmerso en una tarea de profundización [DE111101, T1TL].

La discusión en torno a si la construcción de dobleces perpendiculares y la de ángulos opuestos por el vértice tienen la misma estructura continúa, para Brock son similares mientras que para Max no, como se observa en el siguiente diálogo:

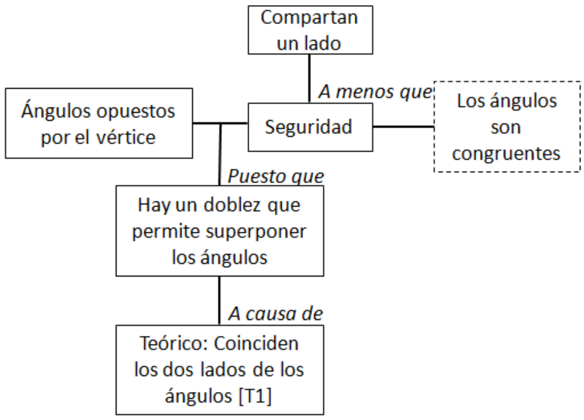
[Desdobla la hoja] Entonces, este es parecido a este [muestra a Max la construcción realizada la clase anterior]. Y los doblamos [realiza el doblez por el doblez perpendicular].

Imagen 86. Explicación de Brock.

12004	Max	Sí pero ahí [última construcción] están compartiendo sus lados, en esta [señala la construcción realizada la clase anterior] solo están compartiendo un lado [los ángulos].
12005	Brock	¡Por eso!
12006	Max	No dos lados, sólo están compartiendo un lado cada uno tiene sus lados [señala con el dedo los dobleces perpendiculares], su lado, sus lados.
12007	Brock	¡Ah!, o sea que… ¡Ah!
12008	Max	Solo compartiendo un lado [Asiente con la cabeza].
12009	Brock	Ah [mira la construcción conjunta y la instrucción de la tarea] ¿Así? [Muestra construcción].
12010	Max	[Asiente con la cabeza] Pues yo diría que sí, que así. ¡Ya listo!
12011	Brock	Pero entonces, ¿cómo colocaríamos? ¿Cómo ponemos [en la hoja]?

Este argumento es de tipo deductivo [D] en tanto que Max parte de los dobleces perpendiculares y a través de un doblez que es bisectriz de dos de los ángulos opuestos [garantía] establece que son congruentes los otros ángulos opuestos por el vértice [asersión]. De modo que, para ellos basta que exista dicho doblez, auque el que han obtenido no es el que buscaban, ellos manifiestan que han encontrado un doblez que permite superponer los ángulos pero no prueban si coinciden. Como el argumento es producto de una idea que acogen Brock y Max que no verfican sino asumen como verdadera a simple vista, entonces el respaldo es de tipo teórico [T1].

El calificador modal toma lugar en las palabras de Max, en el momento que Brock le manifiesta y presenta que esta construcción es similar a la que él hizo la clase anterior (formar dos ángulos congruentes a partir de uno llano). Esta construcción no le convence a Max, quien le justifica a Brock (Imagen 85) que estos ángulos solo comparten un lado [1307] (par lineal) mientras que en la construcción conjunta cada ángulo tiene sus lados [1305] (opuestos por el vértice). Lo anterior dejaría ver un refutador sobre el mecanismo de verificación que se está proponiendo. Así, el argumento tiene una estructura completa [111111] que se presenta a continuación:



Esquema 85. Los ángulos no son congruentes porque no coinciden

Este argumento es empírico [E] pues es una externsión del anterior en el que se evidencia un retutador y un cambio en el calificador modal. El argumento es de suplemetación parcial [P] debido a que Brock presentna su idea a Max plegando el papel pero él le contraargumento señalando los dobleces construidos. Luego la aserción final es resultado de la explicación de Max. En definitiva este argumento es de tipo deductivo, empírico, completo, con un uso del medio parcial, inmerso en una tarea de profundización [DE111111, T1TL].

Posterior a esta interacción Brock revisa nuevamente el enunciado de la tarea y le dice a Max que deben realizar dos propuestas distintas, mostrando que sólo tienen una, ante lo cual Max accede ahora si a considerar la de Brock (dobleces perpendiculares) de la clase anterior. Los estudiantes informan a la investigadora que han terminado. Ella les solicita explicar lo que concluyeron y mostrarle la congruencia de los ángulos construidos. La siguiente interacción toma lugar.

12012	Inves	¿Qué concluyeron?
12013	Brock	Que para saber si este mide lo mismo que este [señala dos ángulos opuestos por el vértice] eh... toca hacer un doblez y ahí se sabe pues... o sea ponemos este ángulo sobre este por medio de un doblez y ahí nos damos cuenta de que miden lo mismo.
12014	Inves	A ver muestra.

[Brock pliega la hoja por el doblez que había realizado]

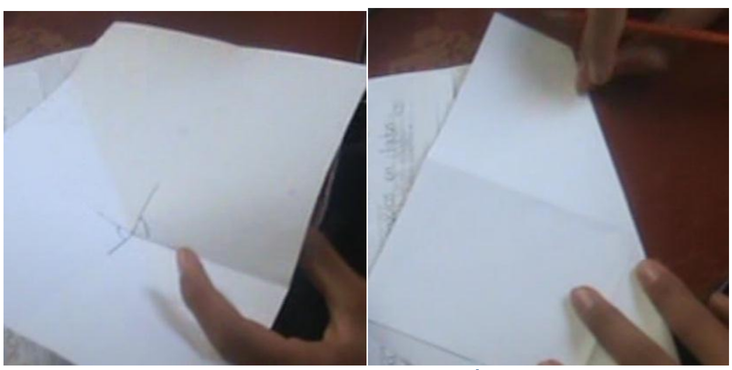


Imagen 87. Proceso de construcción de Brock.

12015	Inves	¡Listo!, y ¿cómo ves que sí miden lo mismo?

12016	Brock	Ahí [despliega y pliega la hoja, intentando ver si los ángulos coinciden].
12017	Max	Porque los está colocando…
12018	Brock	Uno sobre otro, pues sí, pero… [Despliega y pliega la hoja, intentando ver si los ángulos coinciden] pues miden lo mismo. O sea, no se ve… que las líneas sobresalen.
12019	Max	No hay una línea que sobresalga más que la otra.
12020	Inves	¿Cuáles son [las líneas del ángulo]?
12021	Brock	[El grosor de la hoja no deja ver a tras luz los lados de los ángulos] Mire esto, el azul [señala el arco que se forma entre los dos dobleces de uno de los ángulos de partida]… um bueno [desdobla la hoja] estos dos, entonces acá no sobresale ninguna línea [desdobla la hoja y la pliega por este último doblez pero de forma que las representaciones de los ángulos se pueden observar desde fuera,Imagen 88].

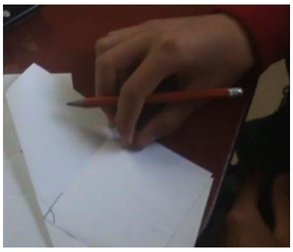


Imagen 88. Brock pliega la hoja

[Max Toma la hoja, la desdobla y vuelve a plegar por el doblez realizado entre los dos ángulos dados. De modo, que estos quedan dentro de la hoja]

Imagen 89. Max pliega por el lado contrario a Brock.

12022	Brock	¿Cómo?
12023	Max	Déjelo para el otro lado.
12024	Brock	Lo mismo
12025	Max	Sí por eso.

Después de la discusión anterior presentan a la investigadora su idea de forma definitiva y surge el siguiente diálogo:

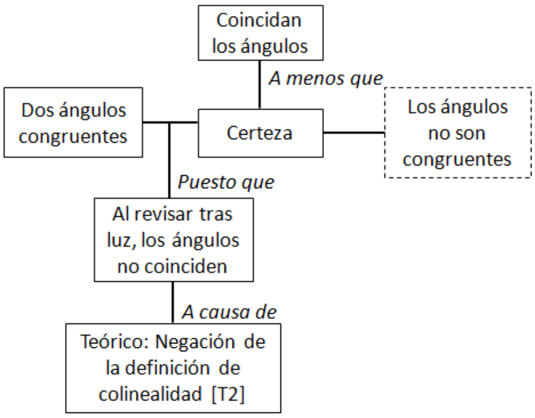
12026	Brock	¡Ya profe! ¿Así?
12027	Inves	Pero es que cuál es el ángulo, no sé cuál de todos.
[Brock señala los ángulos dados]		
12028	Inves	Sí pero cuando lo doblan cómo hago para saber cuál es, cómo hacen para saber cuál es [el otro ángulo].
12029	Brock	Este, [muestra el arco entre los dos dobleces de la parte exterior de la hoja para indicar el ángulo del que está hablando] ahí se nota que los dos [ángulos] tienen la misma medida (Imagen 89. Max pliega por el lado contrario a Brock.).
12030	Inves	¿Por qué?
12031	Brock	Porque al poner uno sobre el otro por decir no sobra.
12032	Invest	Muestre que no sobra, a ver.
12033	Brock	[Revisa tras luz] uy si sobra, mire.
12034	Max	[Toma la hoja y observa tras luz moviendo ligeramente el doblez] ¿Qué hiciste mal?

12035	Brock	Yo no hice los ángulos.
12036	Max	¿Sí ve?, se le salió este lado [señala con el dedo uno de los lados del ángulo].
12037	Brock	No importa los lados, lo que importa es la medida de los ángulos.
Max pliega la hoja por el doblez, la toma y revisa nuevamente, girándola para todos lados.		
12038	Brock	[Sobresale un poquito el arco de uno de los ángulos que marcó]. Este es más grande. Pero sí, es así, porque nosotros hacemos así [revisa su construcción tras luz] podemos saber si sobresale o no ¿No?
12039	Inves	¡Ah! …Al mirarlo tras luz. ¿Sí es lo que dices?
12040	Brock	Sí señora.
12041	Inves	A ver muestra.
12042	Brock	[Revisa su construcción tras luz] ¿Se ve o no?
12043	Inves	Y con eso entonces, ¿qué compruebas?
12044	Brock	Que los ángulos no tienen la misma medida. ¡Ah!, entonces no son congruentes.

En esta interacción es posible notar que los estudiantes reconocen que para demostrar la congruencia entre los ángulos estos deben coincidir al superponerlos, pero el doblez construido para ello no les permita probar esto. Apoyados en un doblez que realizan con esta finalidad, justifican que los ángulos representados son congruentes. Sin embargo, tras los interrogantes de la investigadora, Brock concluye que los ángulos representados no son congruentes y no que el doblez realizado no era el adecuado. De modo tal que surge un argumento de tipo deductivo [D].

Brock y Max parten de la construcción de dos ángulos [dato] asumidos como congruentes y construyen un doblez que permita sobreponerlos y así corroborar su sospecha [garantía]. Hasta este punto podría verse semejanza con el anterior argumento analizado; sin embargo, al superponer los ángulos en esta oportunidad concluyen que estos no son congruentes [aserción]. Brock nota que el doblez realizado lleva a que los lados de los ángulos no coincidan plenamente. El respaldo en este argumento yace en la definición de ángulos congruentes, el cual en este caso permite afirmar la no congruencia. Por tanto, el respaldo es de tipo teórico [T2].

El refutador se aprecia cuando Brock expresa “porque al poner uno sobre el otro por decir no sobra” [12030], reconociendo la posibilidad de que los lados del ángulo, al superponerse, no coincidan. El calificador modal es de certeza en intervenciones de Brock, pues al verificar si los ángulos coinciden o no, da respuestas contundentes De acuerdo a lo anterior, este argumento tiene una estructura completa [111111] y se presenta enseguida:



Esquema 86. Los ángulos representados no son congruentes porque el doblez realizado no los hace coincidir.

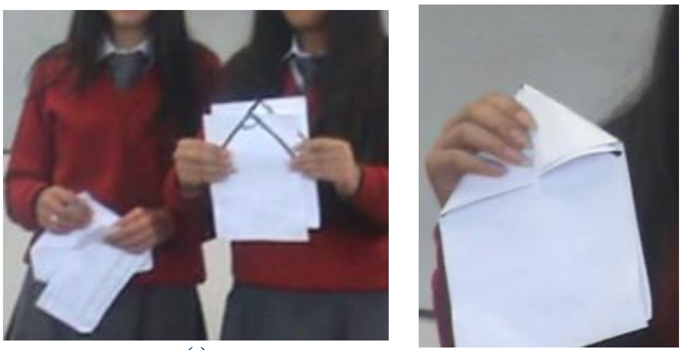
Este argumento es además legítimo [N] porque aun cuando se involucran dobleces para verificar una propiedad por medio de un sustento teórico, se deduce la no congruencia de ángulos lo cual es falso. El uso del medio en este argumento es total [T] pues los estudiantes emplean el papel para construir dobleces y verificar tras luz sus apreciaciones. Por lo expuesto, el argumento es deductivo, no legítimo, completo, con un uso del medio total, en una tarea de profundización. [DN111111, T2PL].

Socialización

El profesor recuerda la definición de ángulos congruentes y el procedimiento a través del cual se determinaba si dos ángulos cumplían tal propiedad. Una estudiante sintetiza esto diciendo que se deben superponer los ángulos y determinar si coinciden sus lados. En seguida el profesor solicita a los estudiantes repisar con marcador los ángulos congruentes construidos en sus construcciones e indica a algunas parejas que muestren a sus compañeros lo realizado. Alexa y Any presentan su propuesta en hojas distintas. A continuación, lo acontecido al respecto.

12045	Any	Nosotras hicimos dos dobleces [que se intersecan en el borde de la hoja], entonces pues solo los doblamos así y así [desdoblan y vuelven a plegar la hoja por cada doblez realizado], entonces supuestamente ahí dice [en la cartelera] que los ángulos congruentes, digamos, si se pueden sobreponer pues son congruentes, entonces Alexa y yo pues los sobrepusimos.
12046	P	Bueno y demuéstrenos… ¿Les coincidió?
12047	Any	[Mira a Alexa] ayúdeme.
12048	P	¿Esos dos [ángulos] son congruentes?
12049	Alexa	No.
12050	P	¿Cuáles son los dos que son congruentes?
12051	Any	No pues no, no…
[Alexa toma los ángulos que tiene Any, revisa las representaciones, entrega una pareja de ángulos a Any y se queda con la otra]		
12052	P	Muéstrenos, ¿estos dos son congruentes [se refiere a los ángulos que tiene Any]?
12053	Alexa	Estos [señala los que tiene en la mano].
12054	P	Bueno, dejen… tengan a la mano los dos que son [congruentes].

[Alexa presenta los ángulos a la clase (Imagen 90)].		
12055	P	¿Por qué lo son?
12056	Alexa	Porque... o sea los pusimos los dos uno encima del otro y pues miden lo mismo.
12057	P	Esa fue la manera. ¿Tienen otra? Encontraron la otra manera porque eran dos formas. Esa es una manera, bueno, coinciden, muéstreles a ellos [los demás estudiantes] que coinciden.
[Alexa muestra las dos hojas a las que les realizó los mismos dobleces (Imagen 90)].		
12058	P	¿Encontraron otra manera?
12059	Alexa	No, solamente una.

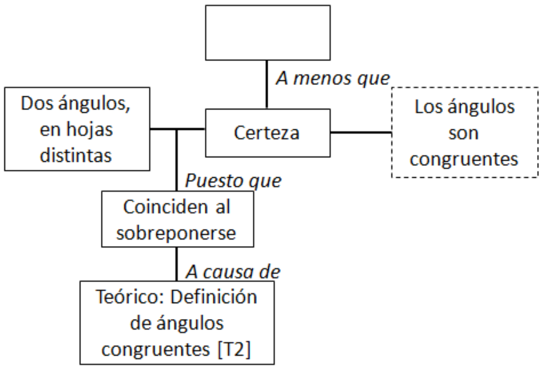


(a) (b)

Imagen 90. Alexa comprueba que los ángulos realizados son congruentes

En la presentación de las estudiantes se reconoce un argumento de tipo deductivo [D] en tanto que ellas parten de la construcción de dos dobleces que se intersecan [dato], procedimiento que aplican en dos hojas, tras sobreponer una en la otra. A partir de esto determinan que dos ángulos son congruentes [aserción]. La garantía de este argumento se aprecia en acciones como la de Any, quien tras revisar en la cartelera las definiciones asegura que si los ángulos se pueden sobreponer entonces son congruentes [1346], acudiendo a la definición de ángulos congruentes [respaldo] aun cuando no la llama por su nombre. Esta idea la complementa Alexa, quien responde al cuestionamiento del profesor explícitando el procedimiento empleado “o sea, los pusimos los dos uno encima del otro y pues miden lo mismo” [garantía], procedimiento que realiza nuevamente (Imagen 90). Por lo tanto, el respaldo es de tipo teórico [T2].

El refutador del argumento está ausente porque ninguna de las dos estudiantes verbalizó alguna situación en la que no se obtuviera la congruencia de los ángulos. El calificativo modal es de certeza aunque las estudiantes exhiben algo de nervios mientras presentan sus ideas, lo que se entiende ya que están frente a sus compañeros y esta no es una práctica usual en clase. Este argumento tiene una estructura incompleta [111101] como se puede observar a continuación:



Esquema 87. Alexa y Mia dos ángulos congruentes en hojas distintas.

En este caso, la garantía del argumento es analítica [A] debido a que acuden a través de sus acciones a la definición de ángulos congruentes. Por esta razón, el uso del medio jugó un papel importante, hablamos acá de una suplementación total [T]. El argumento expuesto tiene una estructura deductiva, analítica, incompleta, con un uno del medio total, de una tarea de profundización [DA111101, T2TL].

NÚCLEO 3: PERPENDICULARIDAD

Hasta este momento no se ha abordado la perpendicular desde la geometría del doblado de papel. Las tareas 13, 14, 15 y 16 abordan esta relación geométrica y permiten construir algunos hechos geométricos asociados. Particularmente, la tarea 14 introduce la definición de dobleces perpendiculares. Para su desarrollo se requieren los elementos teóricos involucrados hasta ahora, así como las habilidades de manipulación del papel que se han favorecido.

Construir un doblez perpendicular

La tarea 13 está propuesta como tarea de profundización. Como ya se mencionó, la finalidad de esta tarea era establecer una definición de dobleces perpendiculares.

Tarea 13
Construye un doblez y trázale un doblez perpendicular. ¿Por qué puedes decir que los dos dobleces construidos son perpendiculares?

Trabajo grupal

Brock trabajó con Mónica debido a que su compañero usual no asistió a clase. Brock inicia leyendo el enunciado de la tarea para él y su compañera. El profesor en ese momento interviene para recordarles a los estudiantes la definición de perpendicularidad de la que disponían los estudiantes gracias a sus clases de geometría regulares. Esta definición señalaba que las rectas perpendiculares son rectas que al cruzarse forman un ángulo recto.

(a) Dobleces construidos

(b) Reconocimiento de ángulo de $90°$

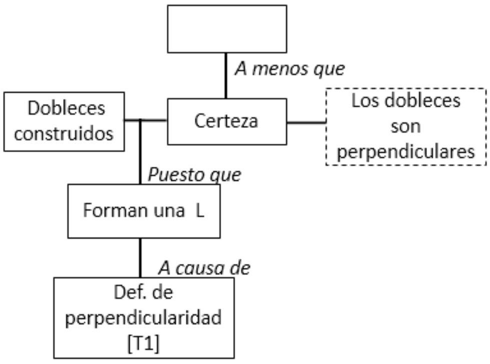
Imagen 91. Construcciones de Mónica y Brock tarea 13

Brock y Mónica trabajaron inicialmente cada uno por su cuenta. Brock hace coincidir los bordes opuestos de la hoja, valiéndose de la forma rectangular de esta, lo que la lleva a determinar dos dobleces cuya intersección coincide con el centro de la hoja. Mónica dobla de modo similar su hoja y obtiene un resultado semejante al de su compañero (Imagen 91). Mónica lee nuevamente el enunciado y la pregunta, en esta se solicitaba que brindaran razones de la validez de sus construcciones. La respuesta de Brock a la pregunta y lo que esto ocasiona se presenta a continuación.

13000	Brock	[Lee la pregunta del enunciado de la tarea y responde] Porque forman un ángulo de 90 grados.
13001	Mónica	Sí, porque forman un ángulo de 90 grados. Qué puede ser este, este, este de acá, este. [Señala cada uno de los cuatro ángulos, Imagen 91] Porque construyó...
13002	Brock	Porque construyen un ángulo de 90 grados.
13003	Mónica	¡Ya!, hicimos el 13.
13004	Brock	¿Profe hacemos el 14? [13 y 14 representan las tareas]

La conversación de los estudiantes exhibe un argumento deductivo [D]. Este tiene lugar cuando Brock y Mónica construyen en papel los que consideran son dobleces perpendiculares de acuerdo al procedimiento descrito anteriormente [13001] [dato]. Ambos estudiantes se apoyan en la percepción visual y la asociación del ángulo recto con la letra Ele mayúscula “L” (Imagen 91 b) para asegurar que los dobleces construidos satisfacían la relación solicitada [13002] [garantía]. La aserción se vislumbra en la afirmación que realizan los estudiantes al señalar que los dobleces al cruzarse “construyen un ángulo de 90º” [13000-13002].

El respaldo de este argumento corresponde a la definición acordada en clase sobre perpendicularidad, lo cual se reconoce en las intervenciones de los estudiantes al intentar proveer sustento a su resultado [13001 y 13002]. Por lo declado del respaldo le atribuimos una naturaleza de teórico [T1]. No se reconoce refutador en lo declarado por los estudiantes. Por otro lado, la forma de declarar la aserción por parte de Brock y Mónica nos lleva a determinar un calificador modal de plena certidumbre. Los estudiantes hasta ese momento se veían seguros sobre su justificación. Lo anterior resulta en un argumento [111101].



Esquema 88. Argumento de Brock y Mónica, porqué los dobleces son perpendiculares

El tipo de garantía nos lleva a afirmar que el argumento es empírico [E]. A pesar de que Brock y Mónica mencionan una garantía de tipo conceptual [13000, 13001], esta ostenta un apoyo empírico que es declarado posteriormente al referir que eran perpendiculares por la forma de letra ele mayúscula que se observaba en lo construido. La solución de la tarea se aborda con un uso pleno del doblado de papel, lo cual permite señalar una suplementación total del medio [T]. Obtenemos así un argumento deductivo, empírico, incompleto, con implementación total en el marco de una tarea de profundización [DE111101, T1TL]. El profesor interactúa ahora con los estudiantes y la siguiente conversación tiene lugar.

13005	P	¿Cómo sabes que mide 90?
13006	Mónica	Porque un ángulo de 90 grados es recto. Eso mide 90.
13007	P	¿Por qué saben que mide 90 sin usar transportador? ¿Cómo están seguros de que mide 90? ¿Qué tal al usar el transportador mida 80 y algo, 75? ¿Cómo hacen para garantizar?
13008	Brock	Y, ¡profe!, je je. ¿Cómo sabemos que forman un ángulo de 90?
13009	Mónica	Sé que es de 90, pero no sé cómo explicarlo (...) Porque las líneas son rectas, je je.
13010	Brock	¿Cómo hacemos para saber que forma un ángulo de 90 grados?
13011	Mónica	(...) ¿Qué es un ángulo recto?
13012	Brock	Un ángulo de 90 grados.
13013	Mónica	Pues la única solución que yo le puedo decir para uno saber que es de 90 grados, es que es un ángulo recto y el ángulo recto es el que es así [señala la forma L del ángulo donde construyó sus dobleces y repisa con color los dobleces buscando resaltar uno de los ángulos, Imagen 92 a]. (...) Listo, es un ángulo de 90º porque es un ángulo recto, es decir que, o sea es como dice, de 90º. Recto es que sea así, [señala uno de los dobleces que había repisado, Imagen 92 b] y no puede correrse ni para allá, ni para acá, sino recto [se refiere a que los dobleces no determinan un ángulo agudo u obtuso]. Eso es lo que yo opino, dime lo que tú opinas.

(a) *(b)*

Imagen 92. Construcciones de Mónica, tarea 13

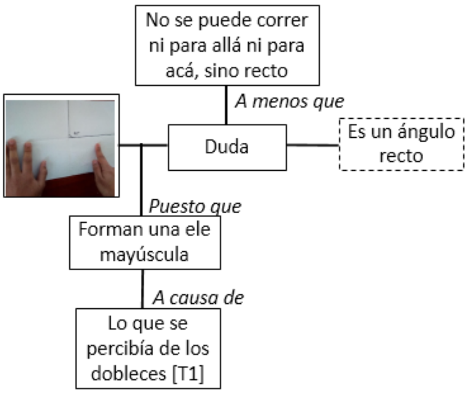
13014	P	[Representa un ángulo con dobleces que no es recto] Mira, esto es recto para mí [Brock y Mónica observan] ¿Cómo me dices que no?
13015	Mónica	¡Ayude¡

13016	Brock	¿Cómo voy a saber que es un ángulo de 90º? [Se pregunta a sí mismo].
13017	P	¿Cómo garantiza esto? Mira, yo estoy afirmando esto [que mide 90] y mira [con una escuadra les muestra que no es un ángulo recto].
13018	Brock	¡Ush!
13019	Mónica	Me están corchando.
13020	Brock	O sea, es que… o sea, je je [se muestra consternado] ¿Cómo hacer que…el ángulo mida 90 grados? [se dirige al profesor] ¿Sin transportador?
13021	P	[Asiente] ¿Ahora dígame este porque vale 90?
13022	Brock	Porque todo ángulo recto ¿mide 90?
13023	Mónica	¿Y porque todo ángulo recto mide 90 grados?
13024	Brock	(…) [Comentan algunas ideas repetidas]. Un ángulo recto es como, ah, o sea como, como estilo de una ele, como forma de ele.
13025	Mónica	Ele recta.
13026	Brock	Exacto, entonces, (…) y todo ángulo recto mide 90 grados.

El siguiente argumento es de naturaleza deductiva [D] y tiene lugar cuando Brock y Mónica presentan su construcción y justificación al profesor. Los estudiantes se apoyan en la construcción realizada para asegurar que el ángulo determinado por los dobleces era de 90º [13013] [aserción]. La garantía se reconoce desde lo empírico cuando Mónica y Brock declaran que la forma de ele mayúscula provista por los dobleces sustenta al ángulo recto [13024, 13025].

Brock, al cuestionarse en más de una ocasión sobre el porqué los ángulos entre los dobleces era de 90º [13008, 13010, 13016, 13020], encuentra en su noción sobre ángulo recto fundamento suficiente para establecer la aserción del argumento, esto es, el ángulo formado por los dobleces es recto y mide 90 [respaldo]. El cuestionamiento constante de Brock y Mónica acerca de por qué los dobleces determinaban un ángulo recto o de 90º se reconoce como la búsqueda de tal respaldo para su argumento, elemento al que procuran reconocer desde lo visual, lo que lo hace teórico [T1]. Al respecto, la tarea pretendía que los estudiantes recurrieran a las definiciones y hechos geométricos abordados en las tareas 10, 11 y 12 para explicar que en la construcción había ángulos que formaban un par lineal, por lo que la suma de sus medidas era 180, así que al sobreponerlos eran congruentes, por tanto eran de 90º.

En lo dicho por Mónica [13013] reconocemos el refutador para este argumento. Cuando la estudiante le explica que “no se puede correr ni para allá ni para acá, sino recto”, expone una situación particular donde sería inválido su argumento pues si se corre un doblez se alteraría la forma de L, configurando en ese caso un ángulo agudo u obtuso. Finalmente, en cuanto a los elementos del argumento, apreciamos duda constante en lo declarado por los estudiantes. Esto se evidencia en las constantes pausas en su discurso y en las preguntas enunciadas para sí mismos sin respuesta [13018-13020, 13022]. A continuación presentamos el esquema del argumento completo [111111].



Esquema 89. Mónica y Brock, porqué el ángulo es recto

El tipo de garantía empleada por los estudiantes da pie a considerar este argumento como empírico. El doblado de papel exhibe una suplementación total al igual que en el primer argumento expuesto. Por lo descrito anteriormente, este argumento es [DE111111, T1TL].

Socialización

El momento de la socialización inició con la puesta en común de las producciones hechas por Jet y Alex. Este grupo construyó los dobleces perpendiculares valiéndose de los bordes de la hoja. Para ello, realizaron los dobleces haciendo coincidir los bordes opuestos de esta, obteniendo dos dobleces que se cruzan en el centro de papel, similar a lo hecho por Brock y Mónica (Imagen 93). El profesor pregunta a Jet sobre la forma cómo hizo su construcción para saber que modalidad tuvo en cuenta, el estudiante le describe la forma como elaboró tal construcción. Él aseguró que tras construir un doblez valiéndose de hacer coincidir los bordes de la hoja, ubicó un punto en el centro del doblez obtenido y nuevamente construyó otro doblez, como se aprecia en la Imagen 93. Julio retoma las ideas de Jet y menciona que, si en los ángulos determinados por los dobleces en la construcción propuesta por Jet el punto de intersección no fuera el centro del doblez, sino otro, entonces los ángulos no serían de 90º.

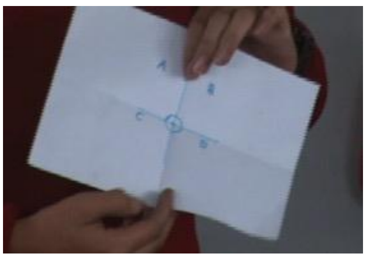


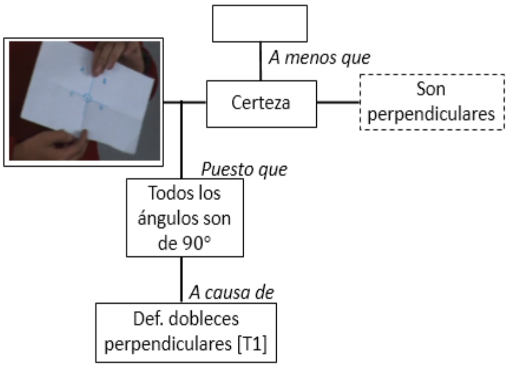
Imagen 93. Construcción de Jet a la tarea 13

La interacción con el grupo de Jet y Alex abrió paso a otras intervenciones a cargo de los estudiantes. Consideramos un primer episodio en el que participan Jet, Julio y Pau. Este se presenta a continuación.

13027	Jet	Trazamos un doblez por la mitad [de la hoja]. Trazamos un punto por el doblez [lo dibujó en la mitad del doblez], trazamos el otro doblez [hizo coincidir el otro par de bordes opuestos de la hoja]. Así podíamos saber que está por la mitad del otro doblez, entonces con eso ya sabemos que cada uno va a tener 90 grados. Porque una línea [doblez] equivale a 180 grados.
13028	P	Bueno y ¿El punto te ayudó para qué?
13029	Jet	Para saber dónde iba a quedar la mitad [del doblez].
13030	P	O sea, ¿si el punto estuviese más corrido hacia allá, a un lado u otro [sobre el mismo doblez] afecta la construcción?
13031	Jet	¡No!
13032	P	¿Lo hiciste sólo para que quedara centrado? Ahora mi pregunta es: ¿Cuál es la definición de dobleces [rectas] perpendiculares? [pregunta a Jet y luego a los demás estudiantes] ¿Quién la recuerda?
13033	Mía	Son aquellos que al cruzarse forman un ángulo recto [interviene para todo el grupo].
13034	P	[Se dirige a Jet] ¿Esos son perpendiculares según tú?
13035	Jet	Sí.
13036	P	¿Cuál sería el ángulo recto?
13037	Jet	Todos [responde enseguida].
13038	P	¿Todos? ¿Por qué todos?
13039	Jet	Cada uno tiene la medida de 90 grados.
13040	P	¿Qué te garantiza que cada uno mide 90 grados?
13041	Jet	Cada línea recta mide 180 y al partirla tiene 90 grados [relaciona la mitad de los dobleces con la congruencia de los ángulos representados en su construcción]. O también se pueden sobreponer.
13042	P	¿Qué pasa cuando se sobreponen? ¿A ver?
13043	Jet	Que las líneas van a coincidir.
13044	P	Y el hecho de que coincida ¿Qué significa?
13045	Jet	Que tienen la misma medida.
13046	P	¿Cuál es la medida entonces?
13047	Jet	90 grados.

Reconocemos la emergencia de dos argumentos en la interacción anterior. El primero, de naturaleza deductiva [D], surge cuando Jet expone su construcción de dobleces perpendiculares. En este, el dato es la construcción de los dobleces que mostró [13027]. Jet declara que al trazar un doblez por la mitad del primer doblez que construyó [13027] se determinaban cuatro ángulos de 90º, lo cual le permitía sustentar su respuesta frente a lo solicitado por la tarea [garantía]. La aserción corresponde entonces a asegurar que los dobleces que construyó eran perpendiculares [13034, 13035].

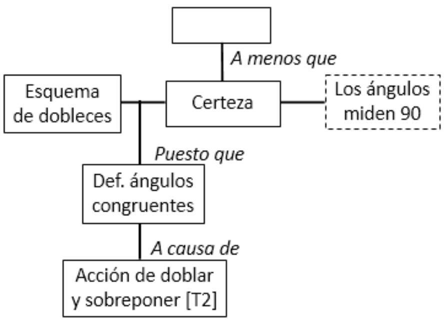
Cuando el profesor pregunta por lo que se entiende por dobleces perpendiculares, Mía aporta la definición de estos, respuesta recogida por Jet para dar sustento a su declaración [respaldo], lo que convierte al argumento en teórico [T1]. No se evidencia un refutador dado que el estudiante no expone situaciones donde no sea sostenible su argumento. Como calificador modal encontramos plena certeza ya que Jet no muestra inseguridad al declarar sus ideas. Presentamos a continuación el esquema del argumento incompleto [111101].



Esquema 90. Argumento de Jet, perpendicularidad por congruencia de ángulos

La naturaleza de la garantía del argumento es de tipo analítico [A]. Jet recurre a la idea de que se requieren ángulos de 90 para poder hablar de rectas perpendiculares y esto guarda relación lógica con el dato y la aserción. Por último, observamos que el medio ostenta una suplementación total [T], Jet acude al doblado de papel para proveer el respaldo de su argumento [13042, 13043]. Categorizamos el argumento como deductivo, analítico, incompleto, de suplementación total, en una tarea de profundización [DA111101, T1TL].

Respecto al segundo argumento, también de naturaleza deductiva [D], este tiene lugar cuando el profesor cuestiona a Jet por la seguridad frente al hecho de que los ángulos determinados por los dobleces en su construcción son rectos. El dato consta de la construcción de dobleces en hoja bajo esquema presentado [13040]. La garantía es la definición de ángulos congruentes [13042, 13043], apoyo para declarar la aserción de que los ángulos miden 90 grados [13047]. El respaldo al que acude Jet es la acción de doblar para sobreponer los ángulos [13041], que cataloga al elemento como teórico [T2]. Por su parte el refutador no se reporta, en cambio el calificador modal es de certeza. Veamos el esquema del argumento incompleto [111101].



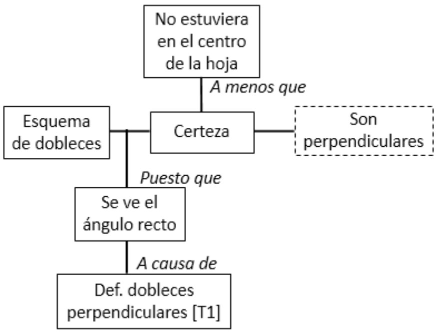
Esquema 91. Argumento de Jet, los ángulos congruentes

La garantía a la que acude Jet da al argumento un carácter analítico [A] puesto que es una definición formalizada en clase. Él usa la idea de que el doblez representa 180 y que al realizar el otro doblez se determinan ángulos congruentes, pues se pueden sobreponer y se verifica que miden lo mismo, por eso cada uno mide 90. La suplementación se hace total [T] por debido al sustento que provee el doblado de papel para sustentar el argumento. Por lo ya mencionado tenemos un argumento deductivo, analítico, incompleto de suplementación total en una tarea de profundización [DA111101, T2TL].

Después de la intervención de Jet el profesor interactúa con Julio como se muestra a continuación.

13048	P	¿Qué opina usted Julio?
13049	Julio	Que sí. Porque la definición de perpendiculares dice que si dos se cruzan forman un ángulo recto y ahí hay un ángulo recto.
13050	P	Y la explicación que él te da, para decir que mide 90 grados ¿Te convence?
13051	Julio	Sí.
13052	P	¿Y por qué te convence?
13053	Julio	Porque está en la mitad de las dos [de los dos dobleces], en la mitad de la hoja.
13054	P	O sea, si estuviesen [los dobleces] en otro lugar ¿No serían rectos?
13055	Julio	No.
13056		¿Qué tiene que ver que quede en la mitad o hacia un lado de la hoja?
13057	Julio	Los grados.
13058	P	¿Los grados? ¿O sea que si corro hacia un lado u otro los ángulos ya no tienen los mismos grados? ¿No tienen la misma medida?
13059	Julio	No.

El argumento propuesto por Julio es de tipo deductivo [D]. El dato se reconoce en la configuración de los dobleces [13053] y a partir de allí proponer señalar visualizar ángulos rectos [13049], "ahí hay ángulos rectos" [garantía]. Atribuir la propiedad de perpendicularidad a los dobleces constituye la aserción [13049]. Como respaldo Julio asume la definición de dobleces perpendiculares que atribuye a los dobleces del dato [13049, 13057-13059], dado que el estudiante es explicito al mencionar el respaldo este es teórico [T1]. Cuando Julio refiere que los dobleces al cambiar de posición del centro de la hoja dejan de ser perpendiculares debido a que el ángulo ya no tendría la medida de 90 se reconoce el refutador [13053-13055]. El calificador modal es de certeza, Julio no evidencia duda al hablar. Lo anterior traduce en un argumento completo [111111], cuyo esquema presentamos a continuación.



Esquema 92. Argumento de Julio, está en el centro, es recto

Julio presenta una garantía sustentada en lo perceptual, de lo que observa en la representación de los dobleces. Por otro lado al considerar la relación lógica de la garantía, el respaldo y el refutador encontramos que no es válida a la luz de los elementos conceptuales de la clase dado que la posición de los dobleces en la hoja es indiferente, lo que resulta en un argumento no legítimo [N]. Julio no implementa el doblado de papel para sostener este argumento por lo que la suplementación es carente [C]. La categorización para este argumento es deductivo, no legítimo, completo, de suplementación carente [DN111111, T1CL].

Posterior a la participación de jet, el profesor pide a otras parejas de estudiantes que expongan sus producciones teniendo en cuenta lo observado en sus trabajos grupales. Consideramos lo presentado por la pareja de Mauro y Emilio, así como la conformada por Brock y Mónica. La primera pareja es la de Emilio, él muestra la forma de construir los dobleces perpendiculares. Esta consiste en plegar dos veces consecutivas el papel, apoyándose en los bordes de la hoja (primer doblez, Imagen 94 b) y el segundo doblez obtenido (Imagen 94 c). Mauro y Emilio involucran la idea de ángulo llano y asumen que al bisecarse este se determinan dos ángulos de 90º.

(a) (b) (c)

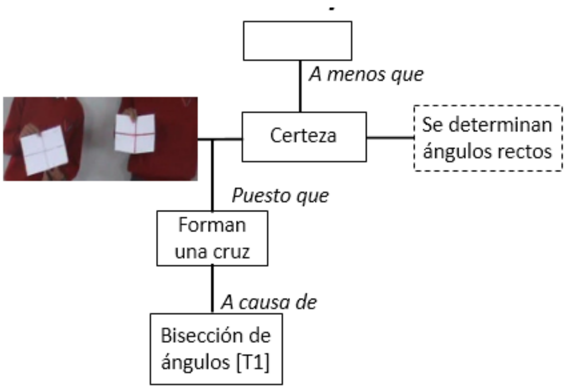
Imagen 94. Construcción de Mauro y Emilio, tarea 13.

13060	P	Mauro, cuéntanos, ¿Qué hizo?
13061	Mauro	Pues que, al cruzarse, como en una cruz, pues los ángulos van a medir 90 grados y van a ser rectos [Imagen 94 a].
13062	P	¿Y por qué está seguro de que, al cruzar y formar una cruz, son de 90 grados? ¿Qué te garantiza eso? ¿Cómo nos puedes asegurar eso?
13063	Mauro	Espera profe mientras me acuerdo.
13064	P	Bueno Emilio, usted.
13065	Emilio	Bueno que, sabiendo que un doblez solo mide 180 grados [doblez como ángulo llano], entonces si trazamos otra línea que sea igual al ángulo recto, la trazamos de manera vertical.

13066	P	¿Y cómo trazaste el segundo doblez? ¿Cómo lo hiciste? Haber, reprodúcelo.
13067	Emilio	[Sobrepone bordes opuestos de la hoja y hace un doblez y sin desdoblar repite la acción, Imagen 94 b y c]. Así quedaría dos dobleces.
13068	P	Ahora, ¿Cómo garantizar o por qué crees? ¿Cómo nos puedes asegurar, que ahí se formó un ángulo recto por lo menos?
13069	Emilio	Porque conociendo que la línea recta tendría como ángulo 180 grados, entonces si el otro doblez está en la mitad crearía cuatro ángulos. Esos tendrían como grado 90.
13070	P	Como grado 90. ¿Y por qué no 89 o 91?
13071	Mauro	Esto es un ángulo llano o algo así [habla señalando uno de los dobleces de su construcción]. Entonces, pues si se parte así [señala el punto de cruce de los dobleces], por la mitad, va a quedar de 90 grados.
13072	P	¿Y cómo garantizas que esa es la mitad? ¿Por dónde pasa ese doblez?
13073	Mauro	Se puede hacer más corrido, lo que importa es que se haga, eh… [con la hoja abierta realiza una señal con su mano, indicando que el segundo doblez con respecto al primero no debía ser oblicuo]
13074	P	Sí, la mitad del ángulo llano. ¿Cómo garantizas que es la mitad del ángulo llano?
13075	Mauro	No, que traspase el ángulo llano. Y ya, ahí forma un ángulo de 90 grados y recto.

Reconocemos que el argumento presente en la interacción es deductivo [D]. El dato de este lo apreciamos en las construcciones hechas por los estudiantes (Imagen 94 a), con base en ellas plantean la garantía y la aserción. Emilio reconoce desde lo perceptual la forma de “cruz” con la que asocia la idea de perpendicularidad [13065, 13069], reconocemos aquí la garantía. Cuando Mauro y Emilio afirman que dado el modo de construir los dobleces se obtenían ángulos rectos determinados por estos, se aprecia la aserción [13065, 13069, 13073, 13075, 13079].

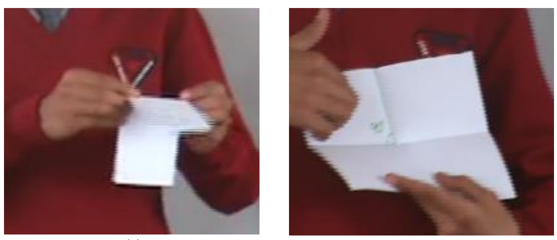
Como respaldo distinguimos la noción de bisección de ángulos [13075]. Emilio y Mauro declaran que al trazar un doblez por la mitad del otro doblez, que representaba un ángulo llano [13069], se obtendrían ángulos de 90º [13073], esta idea no explicita de bisección hace del argumento uno teórico [T1]. Por otro lado, el refutador es un elemento ausente en el argumento de los estudiantes. El calificador modal es de certeza plena puesto que no apreciamos duda en lo que dijeron Mauro y Emilio, resultando entonces un argumento incompleto [111101], presentamos ahora el esquema de los elementos.



Esquema 93. Argumento Mauro y Emilio, forman cruz, los ángulos son rectos

Mauro y Emilio proponen una garantía de tipo empírica [E] ya que esta se reconoce cuando ellos visualizan los dobleces y Mauro menciona que en la configuración de estos se reconoce una cruz, el cual determinaba un ángulo de 90º. En lo que respecta a la suplementación del medio distinguimos una de tipo total [T], Emilio y mauro hacen dobleces y ofrecen razones a partir de lo que hacían con el papel. Obtenemos entonces un argumento deductivo, empírico, incompleto, de suplementación total, en una tarea de profundización [DE111101, T1TL]. El profesor solicita ahora a Mónica y Brock que expresen su sentir respecto a esta propuesta. Ellos señalan en sus construcciones propiedades de ángulos par lineal y ángulos congruentes, lo que dio paso a una justificación a la luz del sistema teórico conformado al porqué los dobleces eran perpendiculares. En el trabajo con el papel prevalece la construcción de dobleces valiéndose de los bordes del papel dada su forma rectangular. A continuación presentamos la interacción correspondiente.

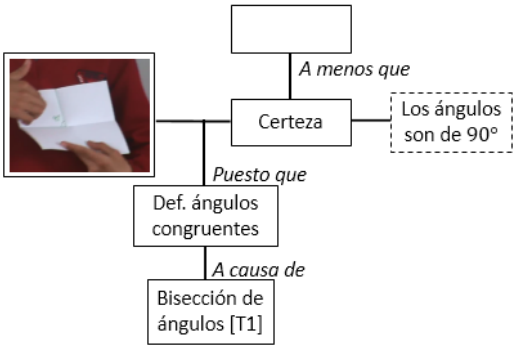
13076	P	Ustedes Mónica y Brock, ¿Están de acuerdo, sí o no? ¿Por qué?
13077	Brock	Pues sí… Pues al sobreponer los dobleces [lados de los ángulos] tienen que coincidir, pues por eso cada doblez [ángulo] nos tiene que dar de 90 grados.
13078	P	Vamos a pasarlos por acá a ustedes y nos explican. [Brock y Mónica pasan al frente] Bueno, ¿Cómo inició usted su construcción?
13079	Brock	Hicimos un doblez que pasara por la mitad de la hoja [reproduce lo que explica, mientras habla, Imagen 95 a y b] y luego pues eh, hicimos otro que cruzara por el otro doblez, que pasara por la mitad del otro doblez. Entonces nos dio un ángulo de 90 grados, bueno, todos los ángulos de acá miden 90 grados [señala su construcción, Imagen 95 b].
13080	P	¿Todos miden 90 grados? [Brock asiente] ¿Y cómo garantizas que ese que señaló ahí es de 90?
13081	Brock	Porque, o sea, un doblez mide 180 grados, si lo partimos por la mitad pues es lógico que la mitad va ser de 90 grados.



(a) (b)

Imagen 95. Construcciones de Brock dos, tarea 13

En la interacción entre Brock y el profesor emerge un argumento que tiene como dato la construcción de los dobleces [13077] bajo el mismo formato que ya se ha presentado, de allí inicia su discurso para plantear garantía y aserción. Brock después de considerar su construcción recurre a lo que hemos visto en argumentos anteriores, la congruencia de ángulos [13077, 13079] que se aprecia como garantía. La aserción en el discurso del estudiante la reconocemos cuando asegura que los ángulos allí eran rectos, implicando la perpendicularidad de los dobleces [13079]. Como respaldo distinguimos la idea de bisección de ángulos que provee sustento a lo que había dicho sobre la congruencia de los ángulos presentados (Imagen 95 b), específicamente, para Brock es evidente que dividir un ángulo de 180 (doblez) por la mitad (doblez por la mitad del otro) lleva a obtener un ángulo de 90 grados. Similarmente al argumento anterior el respaldo se hace teórico [T1]. Refutador no se reporta en lo declarado por Brock en tanto que él no expone salvedades para lo que había propuesto con su garantía. El estudiante se aprecia convencido de lo que habla [13081], no deja ver dudas en su afirmación, lo que traduce en un calificador modal de certeza. Veamos el argumento incompleto [111101] en su esquema de a continuación.

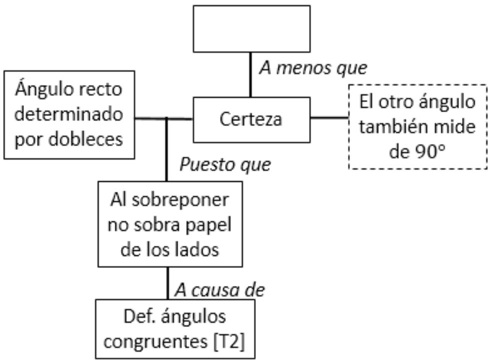


Esquema 94. Argumento de Brock, ángulos de 90º por congruencia

Como hemos descrito, Brock propone una garantía que corresponde a una definición formalizada en clases anteriores, lo que hace de este un elemento de tipo analítico [A]. Por su parte la suplementación del medio es total [T] ya que en la sustentación de su argumento Brock implementa el doblado de papel. Obtenemos entonces la siguiente categorización [DA111101, T1TL]. Observemos ahora un segundo argumento de Brock en el mismo episodio, detallado en las siguientes dos líneas.

13082	P	Y ¿Qué puedes decir de ese ángulo [el resaltado en la Imagen 95 b] y el que está al lado?
13083	Brock	Que, al sobreponerlos, el doblez no va a sobrar, por decirlo así, papel de los lados. Pues mide también 90 grados.

El argumento que acá se reconoce se apoya en un ángulo recto, determinado por los dobleces construidos [dato]. Como garantía se reconoce la congruencia de ángulos, cuando el estudiante menciona “no va a sobrar papel de los lados” [13082]. La aserción consta en afirmar que el ángulo no resaltado mide 90º también [13083]. El respaldo corresponde a la definición de ángulos congruentes, además tiene una naturaleza procedimental [T2] en vista de que Brock realiza un trabajo con el papel. Refutador no se aprecia. Por último el calificador modal es de certeza, pues Brock muestra seguridad al expresarse. Veamos seguidamente el esquema de los elementos del argumento incompleto [111101].

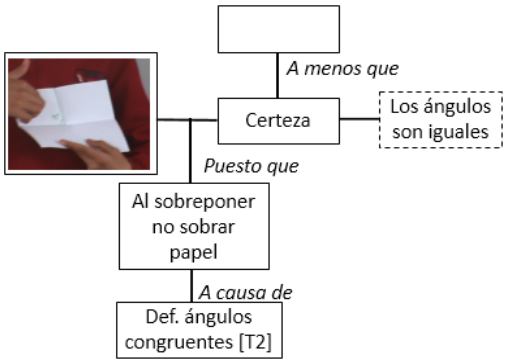


Esquema 95. Argumento de Brock, ángulo congruente

Brock reconoce nuevamente congruencia de ángulos, implícitamente acude a su definición, lo que hace al argumento de tipo analítico [A]. La suplementación del medio se hace total [T] en vista que este se implementa para mostrar el argumento. Obtenemos un argumento [DA111101, T2TL]. La conversación sigue y ahora tiene lugar la siguiente interacción.

13084	P	Entonces cuando no sobra papel de los lados, cuando se sobrepone, ¿Cómo se llama?
13085	Brock	Congruentes
13086	P	Bueno, y si esos son congruentes [Imagen 95 c], ¿qué pasa con las medidas?
13087	Bock	Son iguales.
13088	P	Hable usted, complemente lo que él dice [se dirige a Mónica, al ver su intención decir algo].
13084	Mónica	Que son iguales.
13085	P	¿Por qué son iguales?
13086	Brock	Porque al sobreponerlos no tiene que sobrar ningún papel [los lados de los ángulos coinciden uno sobre otro].

Emerge un tercer argumento expuesto por Brock en el que el dato corresponde a los dos ángulos que en su anterior intervención involucró para explicar por qué eran rectos. La garantía aquí se evidencia en el hecho de que no sobre papel cuando se sobreponen los ángulos de las construcciones, Imagen 95. La aserción se aprecia en la afirmación tanto de Mónica como Brock de que los ángulos son iguales [13087, 13089]. De modo similar al anterior argumento el respaldo ostenta una naturaleza teórica [T2] que corresponde a la definición de ángulos congruentes [13084,13085], asunto que moviliza la garantía brindada por los estudiantes. Nuevamente el refutador es un elemento ausente. Por su parte el calificador modal se evidencia como de certeza, puesto que no reconocemos dudas o inseguridad en lo que afirmaron los estudiantes. Presentamos a continuación los elementos no completos [111101] en su correspondiente esquema.

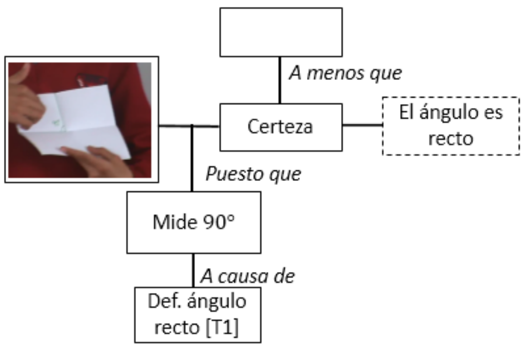


Esquema 96. Argumento de Brock, ángulos iguales por congruencia

Brock presenta una garantía empírica [E] que consiste en sobreponer los ángulos y notar que estos coinciden. La suplementación del medio se hace total única [U] debido a la actividad del estudiante de plegar el papel teniendo en cuenta sólo los dobleces cuando propone su argumento [DE111101, T2UL]. El profesor continuo formulando preguntas a estos estudiantes como se ve a continuación.

13087	P	Yo les hago la misma pregunta que les hice a ellos [Mauro y Emilio], ¿por qué no valdría ese que usted señaló de 90, 92 por ejemplo?
13088	Brock	Porque es un ángulo recto.
13089	P	Bueno, ¿por qué es recto entonces...?
13090	Mónica	Porque mide 90 grados.

Presentamos un argumento que parte de uno de los ángulos determinados por los dobleces [dato]. En este la aserción corresponde a la declaración de que el ángulo es recto [13086], afirmación que se sustenta en el hecho de que este mide 90 [garantía]. Como respaldo a la garantía Mónica evoca la definición de ángulo recto [13090], la naturaleza de este elemento es teórica [T1]. El elemento refutador no tiene lugar en lo declarado por los estudiantes en vista de que no se expresan salvedades para la aserción. Como calificador modal se reconoce plena certeza en sus palabras. Obtenemos un argumento [111101] cuyo esquema es el siguiente.



Esquema 97. Argumento de Brock y Mónica, ángulo recto.

Brock provee una razón para su argumento [13088] que respalda con la definición de ángulo recto [13090], lo que le da un carácter analítico [A]. La suplementación medio se hace carente [C] puesto que

Brock y Mónica no recurren al doblado de papel para sustentar lo que argumentaron. Obtenemos un argumento [DA111101, T1CL]. Del episodio que se describirá a continuación destacamos la comprensión de los hechos geométricos y definiciones por parte de Mónica, en vista de las ideas que formula.

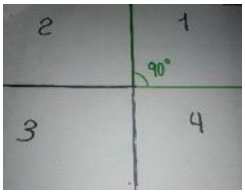
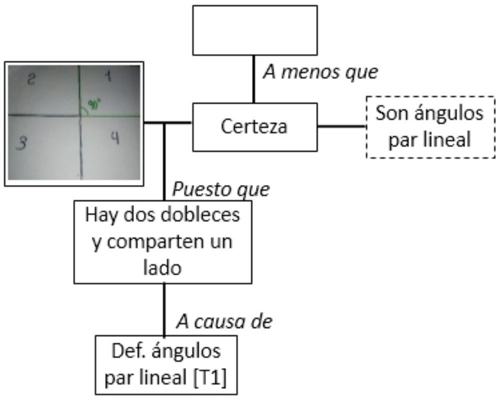


Imagen 96. Construcción de Mónica dos, tarea 13

13091	P	Estamos en lo mismo ¿Entonces por qué mide 90 grados? ¿Hay algo que hayamos visto que nos ayude a asegurar eso? [Se dirige hacia los demás estudiantes] a ver, eh…Ly, ¿hay algo de lo que hayamos visto que le permita asegurar que estos ángulos son rectos?
13092	Ly	Eh, pues…
13093	P	¿Tú estás de acuerdo con lo que ellos dicen? ¿Por qué?
13094	Ly	Porque se divide el ángulo por la mitad y después se vuelve a dividir, ahí se parte en cuatro, y pues los ángulos miden 90, todos.
13095	P	¿Y qué te garantiza que sean de 90 todos? [Ly no responde] ¿No pueden medir 98 y 98 los otros dos, diferente o algo así? ¿Por qué 90?
13096	Ly	Eh…
13097	P	[Se dirige a Mónica] ¿Tienes otra idea? ¿Puedes reproducir el proceso que hiciste antes con tu compañero?
13098	Mónica	Voy a hacer un doblez, sobreponerlo [dobla una vez y sin desdoblar vuelve a doblar, tal como lo había hecho Emilio anteriormente, Imagen 94] y que al quitarlo forma un ángulo de 90 grados [Imagen 96].
13099	P	¿Esos ángulos tienen otra característica, entre ellos mismos?
13100	Mónica	Son par lineal y congruentes.
13101	P	Por ejemplo ¿Cuáles son par lineal? Muéstranos por favor.
13102	Mónica	Este de acá y este de acá [señala los ángulos 1 y 2, Imagen 96].
13103	P	¿Por qué son par lineal uno y dos?
13104	Mónica	Porque comparten el lado.
13105	P	¿Cuál lado comparten? [señala el lado correspondiente, acertadamente] ¿Qué más puedo decir de ellos, si comparten un lado y son par lineal?
13106	Mónica	Están compuestos por dos dobleces.

En la interacción entre el profesor y Mónica emerge un argumento que parte de los dobleces construidos por ella [13098, 13102], en esa construcción se aprecia el dato. La garantía la distinguimos cuando Mónica se apoya en la definición de ángulos par lineal (compartir un lado y estar compuestos por dos dobleces) [13104, 13106] para declarar que los ángulos eran par lineal [13100] [aserción].

Mónica implícitamente sustenta la garantía en la definición de ángulos par lineal, de la cual expone sus dos elementos, dos dobleces que se cruzan y comparten un lado [13104,13106], siendo esto el respaldo del argumento que obedece a una naturaleza teórica [T1]. No se evidencia refutador en el discurso de la estudiante. Por último, el calificador modal es de certeza, obteniendo entonces [111101].

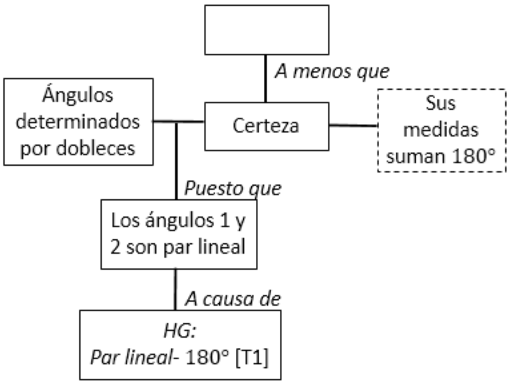


Esquema 98. Argumento de Mónica, ángulos par lineal

Mónica propone un argumento cuya garantía reposa en el marco de elementos conceptuales de la clase, lo que hace de su argumento analítico [A]. La suplementación del medio se hace carente [C], pues del papel solo utiliza una representación plasmada en este medio. Esto traduce en un argumento deductivo, analítico, incompleto, de suplementación carente, en una tarea de profundización [DA111101, T1CL]. La conversación entre profesor y estudiantes sigue como se muestra.

13107	P	¿Qué más puedo decir de ellos si son par lineal?
13108	Brock	[Mónica se toma el mentón, mira la hoja y dirige su mirada a Brock] La suma de los dos da 180 grados.
13109	P	Eso ¿qué es?
13110	Brock	Par lineal-180 grados [hecho geométrico formalizado anteriormente].

Las ideas expresadas por los estudiantes dan lugar a un argumento cuyo dato corresponde a los ángulos determinados por los dobleces, sobre los cuales ya se sabe que son par lineal [13107] [garantía], de acuerdo a Mónica, Imagen 96. La aserción es expresada por Brock cuando asegura que la suma de sus medidas corresponde a 180º [13110], afirmación sustentada en el *hecho geométrico par lineal-180º*. En tal argumento no apreciamos refutador. Sin embargo, el respaldo tiene lugar a través del uso del hecho geométrico, lo que cataloga al respaldo como teórico [T1]. Como calificador modal se reconoce certeza, dada la seguridad en lo que dijo Brock. Obtenemos entonces una estructura de elementos [111101] que se representa a continuación.



Esquema 99. Argumento de Brock, ángulos par lineal-180º

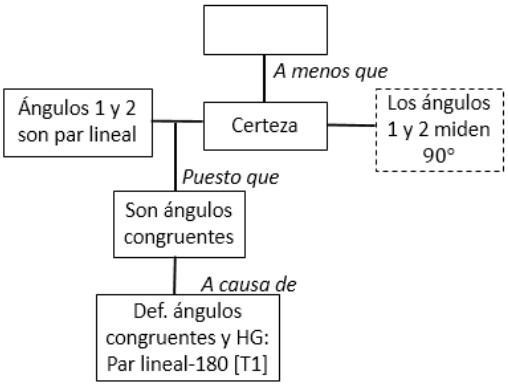
Detallamos un argumento analítico [A] puesto que la garantía que expone Brock pertenece al marco de los elementos conceptuales formalizados en clase previamente. En cuanto la suplementación del medio reconocemos una de tipo carente [C], el doblado de papel no se implementó para sustentar el argumento [DA111101, T1CL].

Luego de la intervención de Brock y Mónica encontramos nuevamente la participación de Mauro y Emilio, quienes terminan la idea iniciada por Mónica. El argumento declarado por Mauro concluye lo que Brock y Mónica habían empezado a exponer.

13111	P	¿Y qué más son? Son par lineal, son congruentes. [Se dirige a los demás estudiantes] ¿Qué puedo decir, a ver? ¿A qué me lleva eso? ¿Me lleva a asegurar algo?
13112	Mauro	(…) Profe, que miden 90 grados.
13113	P	¿Por qué mide 90 grados?
13114	Mauro	Porque para ser par lineal tienen que medir 180 y para ser congruentes tienen que tener la misma medida.
13115	P	¿Usted qué piensa de eso Emilio?
13116	Emilio	Sí, porque así formarían el ángulo recto.

La intervención de Mauro recoge lo que se ha presentado hasta ahora, a saber: la idea sobre la congruencia de ángulos y la que guarda relación con el par lineal. Mauro se apoya en los ángulos que se han denominado como par lineal [13111] [dato] e involucra la idea de que estos ángulos por ser par lineal exhiben la propiedad del 180, lo cual, sumado al hecho de que son congruentes [13114] [garantía], lo lleva a decir que cada uno debe medir 90 [13112] [aserción].

Por otro lado, el respaldo del argumento se distingue de modo implícito en la definición de ángulos congruentes y el hecho geométrico del par lineal. Aunque no son mencionados explícitamente por Mauro, al tomar en cuenta el hilo argumental del discurso global de los estudiantes, evidenciamos que las ideas de las definiciones ya mencionadas permeaban el ambiente de clase [13088, 13086, 13099-13106], que a su vez le da una naturaleza de teórico pues se apoya en elementos conceptuales [T1]. En este argumento no se distingue refutador en tanto que no se expresan salvedades para la aserción con respecto a la garantía. Como calificador modal se aprecia certeza dado que no se reconoce duda o inseguridad cuando Mauro se expresa. Obtenemos un argumento incompleto [111101] que representamos a continuación.



Esquema 100. Argumento de Mauro, los ángulos miden 90º

Como hemos visto, Mauro provee una garantía que cataloga al argumento como analítico [A]. Los elementos de tal garantía hacen parte del sistema conceptual de la clase. El uso del medio en este punto de la argumentación es ausente, lo que traduce en una suplementación carente [C]. Categorizamos así el argumento como deductivo, analítico, incompleto, de suplementación carente, en una tarea de profundización [DA111101, T1CL].

Durante el desarrollo de la tarea 13 reconocemos un rol particular por parte del medio durante cada uno de los momentos aquí analizados. Distinguimos que el doblado de papel proveyó modos particulares de argumentar. Bajo una perspectiva general, el desarrollo de la tarea acudió al doblado de papel directa o indirectamente. Podemos entonces asegurar que las ideas descubiertas y formalizadas se vieron favorecidas por el medio.

Dobleces no perpendiculares

En esta sesión de clase se inició con el establecimiento de un procedimiento que permitiera construir dobleces perpendiculares. La revisión de algunas estrategias propuestas por los estudiantes permitió reconocer algunas que no cumplían con lo solicitado. De aquellas que sí cumplían con esta tarea se presentó en clase la elaborada por Marcelo (Imagen 97).

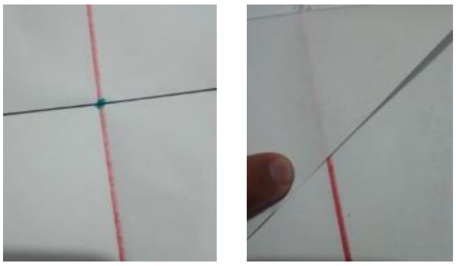


Imagen 97. Construcción de Marcelo

Marcelo construyó un doblez y un punto sobre este, posteriormente plegó ese doblez sobre sí por el punto y obtuvo un segundo doblez, perpendicular al doblez inicial, Imagen 97. A partir de esta construcción se estableció el siguiente hecho geométrico.

HG: Dobleces perpendiculares: Al sobreponer un doblez sobre sí mismo se genera un doblez perpendicular a este.

Los estudiantes se disponen a resolver la siguiente tarea, la cual se muestra como sigue:

Tarea 14
Uno de los estudiantes debe construir dos dobleces que NO sean perpendiculares. ¿Cómo podrías explicar que los dobleces que hiciste no son perpendiculares?

Trabajo grupal

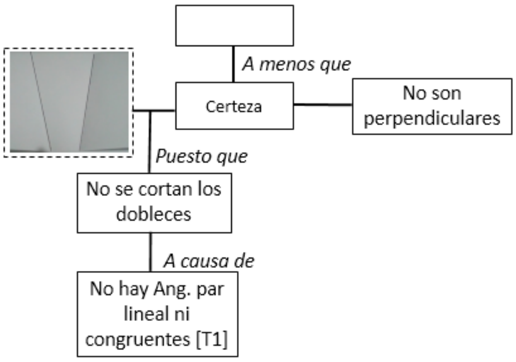
Imagen 98. Construcción uno de Brock y Max, tarea 14

La interacción de Brock y Max dio lugar al surgimiento de algunas ideas que respondían a la tarea. En esta interacción el profesor estuvo eventualmente acompañándolos. Presentamos a continuación lo acontecido.

14001	Max	Pues yo diría que podríamos hacer los dobleces separados.
14002	Brock	Así están separados, porque no se cruzan y al no cruzarse no forman ningún ángulo, y ya [Imagen 98].
14003	Max	¡Fácil!
14004	Brock	No, pero ¿qué más? Pues sí, porque, o sea, así no forma ningún ángulo.
14005	Max	Porque para poder hacer un doblez perpendicular tiene que tener un ángulo par lineal, 180 grados y el otro es un ángulo congruente. Profe [llama].
14006	P	Dígame.
14007	Max	Es que quería decirle, mire, para que no sean perpendiculares, podríamos hacer dos dobleces separados los cuales no se cruzan ni formarían un ángulo congruente ni par lineal, que es lo que se necesita para poder tener un doblez perpendicular.

Brock y Max debían proponer una situación en la que dos dobleces no fueran perpendiculares. Su interacción deja ver un argumento de tipo abductivo [A]. En la construcción de dobleces realizada por Max y Brock (Imagen 98) distinguimos los datos del argumento [14001] ya que es a partir de esta que los estudiantes proponen su aserción. Como garantía reconocemos la condición de no cruzarse en estos dobleces, lo que impediría determinar un ángulo recto entre ellos [14002]. Tal garante yace en la definición de dobleces perpendiculares. La aserción se aprecia en lo requerido por el enunciado de la tarea, proponer dobleces de los que se pudiera afirmar una relación de no perpendicularidad.

Max recurre a un respaldo para su garantía que consta del hecho geométrico par lineal-180 y la definición de ángulos congruentes [14005, 14007], al parecer bajo un esquema como el construido a través de la tarea 13, tal respaldo lo catalogamos como teórico por ser elementos conceptuales [T1]. Elemento refutador no se evidencia en el discurso de Max y Brock ya que no refieren casos donde no se pueda sostener la aserción. Como calificador modal encontramos certeza, dada la seguridad de los estudiantes al proponer los elementos del argumento presentes en sus afirmaciones [14003 y 14004]. Obtenemos un argumento incompleto [111101] cuyo esquema presentamos a continuación.



Esquema 101. Max y Brock, argumento sobre dobleces no perpendiculares 1

Como se puede apreciar la garantía tiene que ver con un elemento conceptual reconocido en el marco de la clase, esta es la definición de perpendicularidad. Este elemento hace del argumento de Max y Brock uno de tipo analítico [A] a pesar de la apreciación equívoca del dato que dieron los estudiantes, al asegurar que los dobleces y por ello las rectas no son perpendiculares. Lo anterior hace que la suplementación del medio sea total [T], la representación en el papel de los dobleces lleva a los estudiantes a asegurar que estos no se cortarán, lo cual no es verdad a la luz de las nociones de la Geometría del Doblado del Papel. Categorizamos el argumento según lo dicho como abductivo, analítico, incompleto, de suplementación total, en una tarea de profundización [AA111101, T1TL].

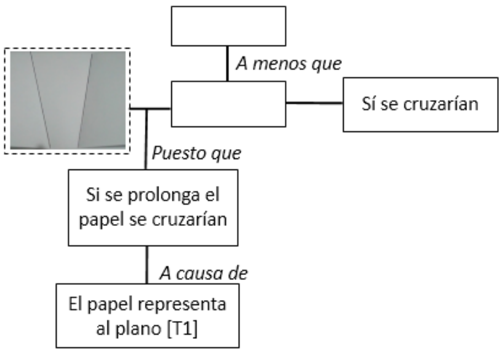
Al proseguir con el análisis del trabajo grupal apreciamos el surgimiento del siguiente argumento cuando el profesor intervine y dialoga con Brock y Max.

14008	P	¿Cuáles son los perpendiculares?
14009	Brock	Son los que se tienen que cruzar los dobleces y que los dos ángulos tienen que medir 90 grados.

14010	P	¿Y este [construcción, Imagen 98] no cumple ninguna de las dos condiciones?
14011	Brock	No, no, no porque no forman [ángulos], no se cruzan los dobleces.
14012	P	Y si yo prolongara la hoja. ¿Qué condición dejan de cumplir? ¿Cuántas condiciones tiene la definición de perpendiculares? [El profesor se retira].
14013	Max	(...) Sí se cruzarían.

El segundo argumento de Brock y Max ostenta una estructura abductiva [A], pues a partir de la representación que tiene en el papel [14010] [dato] y la pregunta que el profesor realiza, reconoce una propiedad que los dobleces construidos deben cumplir [14012] [aserción]. El hecho de que los dobleces no se cruzaran en la hoja sostenía la aserción de Brock en al anterior argumento, sin embargo lo que el profesor menciona parece dejar en desconcierto a Max, quien ahora reconoce que estos dobleces, tras prolongar la hoja, sí se cruzarán [14011]. Tal acción sobre el papel se convierte en la garantía de su argumento.

El respaldo de tal argumento recae en la naturaleza del medio, específicamente en las normas que hay sobre su concepción de infinitud, dado que esta propiedad del papel se reconoce desde lo visual [T1]. Elemento refutador no evidenciamos en lo hablado por el estudiante. En cuanto al calificador modal decimos que es de duda, pues no apreciamos seguridad en las declaraciones que hace Brock. Resulta entonces un argumento incompleto [111100] con la siguiente representación.



Esquema 102. Argumento de Brock, dobleces no perpendiculares 2

Detallamos una garantía empírica [E] en las ideas comunicadas. La suplementación del medio se reconoce como total [T] debido al papel que toma en la construcción de la idea presentada. Conforme a lo analizado catalogamos el argumento como abductivo, empírico, incompleto, de suplementación parcial, en una tarea de profundización [AE111100, T1TL].

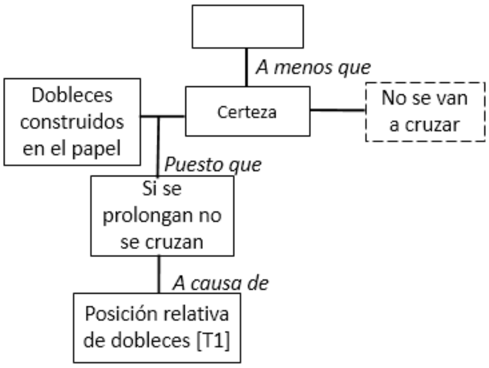
Brock propone otra construcción como respuesta a la tarea abordada (Imagen 99). Alrededor de esta se promueve la siguiente interacción.

Imagen 99. Construcción dos de Brock y Max, tarea 14

14014	Brock	Ay sí, pero si hiciéramos los dos dobleces, si hiciéramos los dos dobleces así [realiza la construcción, Imagen 99] no se cruzarían acá. Así no se cruzarían.
14015	Max	¡Qué mal!
14016	Brock	Entonces acá sí se harían. ¿Cómo es que dice la pregunta? Porque por más que prolonguemos la hoja los dobleces no se van a cruzar [Imagen 99], pero en cambio en este [Imagen 98]...
14017	Max	¡Sí!
14018	Brock	¡Sí! formarían un ángulo, la única manera de que no...
14019	P	¿Esto te garantiza que nunca se van a cruzar? [se refiere a Imagen 99]
14020	Brock	Sí.
14021	P	¿Cómo podrías garantizar que no se van a cruzar?
14022	Max	Las dos van hacia la misma dirección.

A raíz de la anterior intervención del profesor, en la que desvirtuaba la propuesta de dobleces no perpendiculares por parte de los estudiantes, se hace una nueva propuesta sobre el papel para obtener dobleces que no se crucen. Las ideas de los estudiantes permiten reconocer un argumento deductivo [D] en el que los datos son los dobleces que han construido en el papel. La aserción en este caso corresponde a la propiedad que estos satisfacen, esta es, que no se van a cruzar [14016]. Como garantía Brock señala el hecho de que los dobleces no se cruzarían aun prolongándolos [14016] pues "van hacia la misma dirección" [14022].

El respaldo del argumento yace en la representación de los dobleces, su posición relativa entre ellos [14022], la cual es tomada por Max para asegurar la aserción, cobrando así una naturaleza teórica [T1]. No se reporta refutador en el discurso de Brock y Max en tanto que ellos no refieren salvedades para la aserción. Por último, como calificador modal encontramos certeza dada la seguridad con que los estudiantes proponen sus ideas [14017, 14018]. El argumento incompleto [111101] lo representamos a continuación.



Esquema 103. Argumento de Brock y Max, dobleces no perpendiculares 3

La naturaleza de la garantía es empírica en vista de que se fundamenta en lo visual. Brock y Max proponen este elemento a partir de lo que perciben de los objetos geométricos representados en la construcción [14016, 14019, 14020], lo que traduce en un argumento empírico [E]. La suplementación del medio se hace parcial [P] en este argumento dado que únicamente se tiene en cuenta para la elaboración de los dobleces, parte inicial del argumento. Catalogamos entonces el argumento como deductivo, empírico, incompleto de suplementación parcial, en una tarea de profundización [DE111101, T1PL].

Socialización

El profesor pide a algunos estudiantes que presenten sus producciones y que expliquen por qué creían que cumplían con lo solicitado, adicionalmente él pide a los demás estudiantes que reaccionen ante estas presentaciones. El primer estudiante en pasar al frente fue Max, quien expuso lo que presentamos en el apartado anterior. A partir de estas propuestas el profesor realiza algunas aclaraciones sobre los dobleces que no se cruzan en la hoja, pero sí al prolongarse. Lo anterior se enfoca en las nociones iniciales de la geometría del doblado de papel, especialmente que el papel que representa al plano y los dobleces son infinitos.

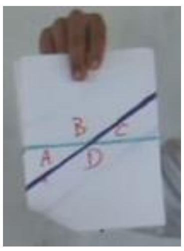


Imagen 100. Construcción de Alexa, tarea 14

El siguiente grupo en presentar sus producciones es el de Alexa y Mía (Imagen 100). Estas estudiantes afirmaban inicialmente que los dobleces allí representados no eran perpendiculares. Alexa y Mía explican sus ideas acudiendo a la construcción elaborada en la anterior tarea, sobre la cual argumentaban que al tener dos dobleces perpendiculares (Imagen 101 a), plegar uno de estos (Imagen 101 b) y luego plegar el segundo doblez, se obtienen dos bordes en el papel que corresponden a los pliegues de los dobleces perpendiculares iniciales (Imagen 101 c).

(a). Dobleces perpendiculares sin plegar.

(b) Dobleces perpendiculares al plegar uno de ellos.

(c) Dobleces perpendiculares al plegar los dos sucesivamente.

Imagen 101. Construcción de Alexa para ejemplificar dobleces perpendiculares

En interacción con Mía y Alexa, el profesor pregunta por qué los dobleces construidos por ellas no eran perpendiculares (Imagen 100). Para esto, él les pidió que consideraran la definición de perpendicularidad. Luego de revisar esta definición Mía cambió de parecer y aseguró que los dobleces sí eran perpendiculares ya que estos se cruzaban. Él profesor pide a Jana que pase al frente y exponga su punto de vista.

Jana, tras manipular y analizar la construcción de Alexa y Mía, declara que al sobreponer los dobleces no se cumpliría el hecho geométrico que dice que *al sobreponer un doblez sobre sí mismo, se genera un doblez perpendicular a este.* Con el fin de ahondar en la explicación de las estudiantes presentamos una construcción propia (Imagen 102). En dicha construcción mostramos dos dobleces no perpendiculares (a). Cuando se pliega uno de estos dobleces, el resultado es que el otro doblez no coincide sobre sí (b). En lo que sigue se presenta la interacción sostenida por Mía, Alexa, Jana y el profesor al respecto.

(a) Dobleces no perpendiculares sin plegar.

(b) Dobleces no perpendiculares al plegar el papel por uno de ellos.

Imagen 102. Construcción explicativa

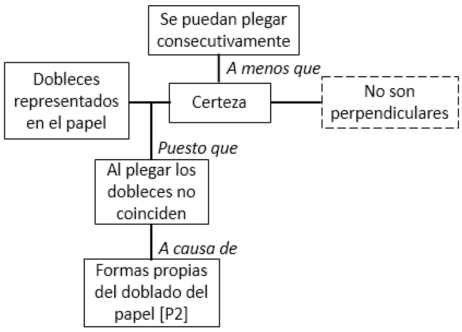
Omitimos el análisis de Max [AA111101, T1TL] debido a que explica a la clase el mismo argumento que surgió en el trabajo grupal. La clase continuó con el siguiente diálogo:

14023	P	Muéstrenos bien a todos y díganos porque no son perpendiculares [Imagen 100].
14024	Mía	Porque al sobreponer no, no, no coinciden [mientras pliega uno de los dobleces, Imagen 100].
14025	P	¿Al sobreponer a quiénes?
14026	Mía	Al sobreponer [plegaba el papel] este doblez [de color morado, Imagen 100] no coinciden.
14027	Alexa	Si doblamos este [color morado] no se puede hacer [pliega los dobleces como se ilustra en la Imagen 102 a, b].
14028	P	¿Quiénes deberían coincidir entonces? ¿Quiénes no coinciden?

14029	Mía	Esta línea morada. Digamos, yo hago así, al sobreponer la morada no se puede.
14030	Alexa	O sea, no es como esta [Imagen 101 a, b y c], que yo hago así y se puede.

El tipo de argumento que aquí emerge es deductivo [D] en cuanto las estudiantes parten de una representación y al operar sobre esta por medio del plegado reconocen el cumplimiento de una propiedad. Los datos en esta situación son los dobleces representado en el papel [14023]. La aserción corresponde a la afirmación hecha sobre estos que señala que no son perpendiculares [14023, 14024]. Estas proposiciones están vinculadas por medio de una garantía, la cual consiste en el plegado de papel y la identificación de que un doblez no coincide con sí mismo [14024, 14026, 14027]. Lo anterior deja ver como respaldo el procedimiento establecido a través de la anterior tarea, el cual permite determinar dobleces perpendiculares, solo que en este caso es utilizado como medio de verificación y no de construcción, lo ya dicho permite señalar un respaldo perceptual [P2].

El refutador se reconoce cuando Mía y Alexa exponen condiciones en las que doblando el papel sí serían perpendiculares los dobleces [14030]. Como calificador modal señalamos certeza, en tanto que no se aprecia duda en el discurso de las estudiantes. Obtenemos un argumento con estructura completa [111111] cuyo esquema presentamos a continuación.



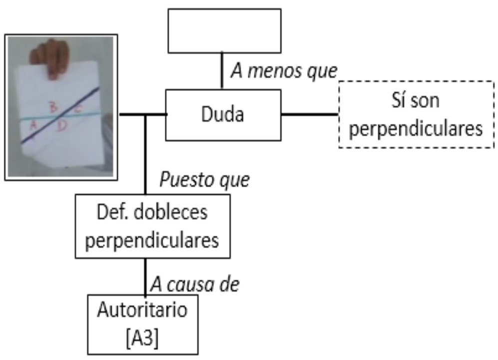
Esquema 104. Argumento de Alexa y Mía, dobleces no perpendiculares

Alexa y Mía sustentan una garantía empírica que consistía en mostrar que los resultados de plegar unos dobleces, no correspondían con el plegado de dobleces perpendiculares, lo que determina un argumento empírico [E]. La suplementación del medio se hace total única en el argumento de las estudiantes pues dan razones implementando doblado de papel que no dependen de condiciones físicas de este [U]. Obtenemos un argumento deductivo, empírico, incompleto, de suplementación total [DE111111, P2UL]. Consideremos ahora la siguiente parte de la interacción en clase.

14032	P	Bueno, entonces no son. ¿Concretamente por qué puedo decir que no son perpendiculares? Eso que usted dijo Mía, que le lleva a comprobar.
14033	Mía	Que no son perpendiculares, o sea, ahí dice [busca la definición de perpendicularidad].
14034	P	La definición de perpendiculares es esa que está allá [le señala la definición que se encontraba en una de las carteleras pegadas en el salón].

14035	Mía	[Lee la definición] Ah, entonces sí son perpendiculares.
14036	P	Ah, ¿entonces son perpendiculares?
14037	Mía	Sí, es que ahí dice [lee la definición en voz alta].
14038	P	Bueno, ¿y eso pasa ahí [en la construcción de Imagen 100]?
14039	Alexa	Sí.
14040	P	Muéstranos a todos que eso pasa ahí. ¿Cuáles son los ángulos rectos ahí?
14041	Mía	(...) El B.
14042	P	¿Por qué es recto?
14043	Mía	Porque cuando, es que [lee la definición]. Es que yo no entiendo este con quién va o qué [señala los ángulos A, B, C Y D (Imagen 100)]
14044	P	[Señala los lados correspondientes a cada ángulo a Mía] Si tú dices qué esos dobleces son perpendiculares, se cruzan y forman un ángulo recto. Mi pregunta es: ¿Cuál es ese ángulo recto? El A, el B, el C o el D.
14045	Alexa	El A y el C.
14046	Mía	Es que me confundo con la definición. Es que allá dice [definición de la cartelera].
14047	Alexa	El A no se cruza [señala el ángulo A en la construcción].

Reconocemos un argumento cuya estructura es deductiva [D]. En este se parte de los datos y por medio de una regla general se llega a la aserción. El dato del argumento se aprecia nuevamente en la construcción de los dobleces [14039]. Mía usa como garantía para su argumento la definición de dobleces perpendiculares [14032, 14034, 14036], y luego asegura que los dobleces sí son perpendiculares, opinión respaldada por Alexa. En esta ocasión el respaldo tien una naturaleza de autoritario en vista de lo que Mia interpreta del enunciado de la definición [A3]. El refutador no existe en este argumento. Como calificador modal señalamos duda, Mía muestra inseguridad al declarar su aserción [14042, 14045]. Tenemos así un argumento incompleto [111101].



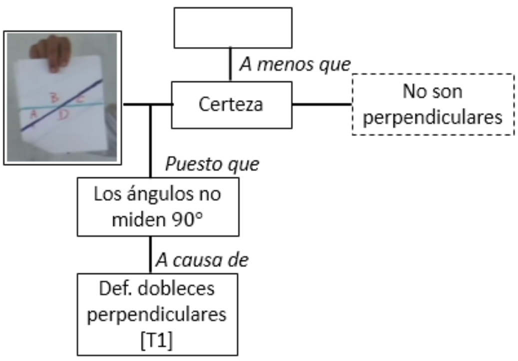
Esquema 105. Argumento de Mía y Alexa, dobleces sí son perpendiculares.

Mía ofrece en su argumento una garantía de tipo conceptual, no obstante la relación lógica entre los elementos es nula, ya que los dobleces del dato no son perpendiculares, lo que hace ilegítimo al argumento [N]. La suplementación del medio es carente en vista de que Mía y Alexa no recurren al doblado de papel para sustentar lo afirmado [C]. Obtenemos entonces un argumento deductivo, ilegítimo, incompleto, de suplementación carente [DN111101, A3CL].

Del mismo modo reconocemos la emergencia de otros argumentos al observar el desarrollo de la clase en esta etapa de socialización. Veamos el caso de Ly.

14047	P	¿Está de acuerdo Mónica con lo que dicen? [Pregunta a estudiante del grupo]
14048	Mónica	No.
14049	Mía	Entonces que pase y explique ella.
14050	P	Ya por favor. Lorena, ¿estos dobleces se cruzan?
14051	Lorena	Sí.
14052	P	Ly ¿Para usted estos dobleces son perpendiculares?
14053	Ly	No.
14054	P	¿Por qué no?
14055	Ly	Porque los ángulos no miden 90 grados

En las cortas intervenciones de Ly podemos reconocer un argumento de deductivo [D], en el que el dato es la construcción de los dobleces realizada sobre papel [14050], la aserción corresponde al hecho de que los dobleces no son perpendiculares [14052, 14053] y la garantía que permite hacer este vínculo es expresada por la estudiante como "los ángulos no miden 90 grados" [14055]. Esta garantía parece evocar la definición de dobleces perpendiculares [respaldo], otorgando una naturaleza teórica [T1]. Por otra parte, el refutador está ausente en lo dicho por Ly. El calificador modal es de certeza dada la seguridad en las palabras de la estudiante. Obtenemos entonces la siguiente estructura de elementos [111101] y su correspondiente esquematización.



Esquema 106. Argumento de Ly, los dobleces no son perpendiculares

Ly sustentó un argumento analítico [A] en vista de que la garantía corresponde a la definición aceptada de dobleces perpendiculares. Además se evidencia entre los elementos una relación lógica donde la garantía se corresponde con los datos y la aserción. Por la no manipulación del doblado de papel distinguimos una suplementación carente [C] del medio, resultando entonces un argumento [DA111101, T1CL]. El profesor retoma la interacción con Alexa y ella aporta algunos elementos a la discusión.

14056	P	[Se dirige a Mía y Alexa] ¿Ustedes qué dicen? de que los ángulos no miden 90 grados.

14057	Alexa	¿Cuáles ángulos?
14058	P	Los cuatro ángulos de aquí… ¿Cómo puedes tú saber que estos dobleces de aquí son perpendiculares?
14059	Alexa	¿Sobreponiéndolo?
14060	P	A ver, sobrepóngalo. ¿Cuál van a sobreponer?
14061	Alexa	El verde [dobla la hoja por el doblez verde, mas no sobrepone a tal doblez sobre sí mismo como se observa en Imagen 103].

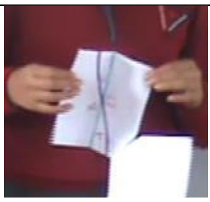
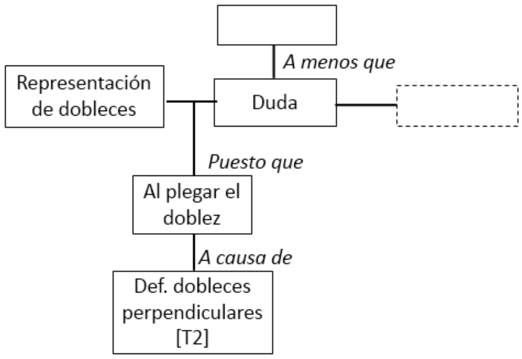


Imagen 103. Alexa sustenta su argumento

Catalogamos este argumento como deductivo [D] dado que Alexa parte de los dobleces y por medio de la acción de plegarlos [garantía], da a entender su respuesta porque no tiene un carácter explicito. Señalamos los datos en la representación de los dos dobleces [14061] pues de estos inició su argumento. Alexa mostró [1406] una acción ligada a la forma de verificar la perpendicularidad distinta a la abordada en clase [garantía], aunque también válida dado el resultado que se quería verificar. Alexa muestra en ese trabajo con el doblado de papel apoyo para la aserción, elemento que emerge de forma implícita y que tiene que ver con señalar los dobleces como perpendiculares, por lo dicho omitimos tal elemento.

La propuesta de Alexa deja ver que se apoya [respaldo] en la definición de dobleces perpendiculares para verificar su resultado. Aunque el respaldo refiere un elemento conceptual este está permeado por la acción del papel lo que lo hace teórico con implementación del medio [T2]. La estudiante no describe una situación en la que su argumento fuera invalido lo que se traduce como ausencia del refutador. Por último, reconocemos un calificador modal de poca certeza, dado que no se aprecia segura al proponer su garantía [14337]. Lo dicho nos resulta un argumento incompleto [110101] cuyo esquema observamos a continuación.



Esquema 107. Argumento de Alexa, de dobleces perpendiculares

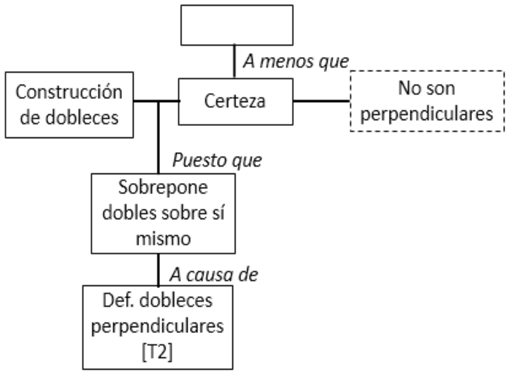
Alexa deja ver una garantía de tipo empírica al proponer la acción de sobreponer los dobleces, pero al considerar la relación lógica de los elementos esta no es acertada puesto que la aserción no corresponde al respaldo ni al dato [N]. La suplementación del medio se hace total puesto el mecanismo empleado para testar la hipótesis involucró plenamente este medio [T]. Obtenemos un argumento deductivo, analítico, incompleto, de suplementación total en una tarea de profundización [DN110101, T2TL].

El desarrollo de la clase llevó al profesor a interactuar con Jack, Mónica y Mía. En esta ocasión el profesor posibilita que Mónica aclare algunas ideas erróneas de Alexa y Mía.

14061	P	¿Usted qué opina de eso Jack, eso es sobreponer?
14062	Mac	No.
14063	P	¿Le puedes ayudar a sobreponer?
14064	Mac	Profe no se puede sobreponer el verde.
14065	P	¿Mónica nos quieres colaborar? Ayúdanos a sobreponer el doblez de color verde.
14066	Mónica	Sí [pasa, toma la hoja y sobrepone el doblez verde sobre sí mismo y se la entrega a Alexa].
14067	P	¿Qué pasa con el doblez de color morado si sobrepongo al verde?
14068	Mía	No coinciden [el borde formado al doblar el papel con el doblez de color morado, Imagen 100].
14069	P	¿No coincide?
14070	Mía	No, no, no, espera [manipulan por un momento la construcción].
14071	P	¿Eso qué me indica?
14072	Mía	No son perpendiculares.
14073	P	¿Por qué?
14074	Mía	Porque al sobreponerlos no coinciden.

La anterior intervención deja ver un argumento deductivo [D], en el que se parte de una construcción de dobleces [dato] y se establece una forma de sustentar que estos no son perpendiculares [14072] [aserción]. Como garantía reconocemos la acción de Mónica sobre el papel [14066], ya que esta proveyó sustento a la conclusión dado el comportamiento de los dobleces involucrados. Mía asegura que este procedimiento lleva a decir que los dobleces no son perpendiculares, por lo que reconocemos en esta propuesta de verificación un respaldo relacionado con la definición de dobleces perpendiculares y su procedimiento de construcción, el cual en esta oportunidad nuevamente se usa como medio de verificación, la naturalesa de este elemento por lo tanto es teórica [T2]. Por último, refutador no existe y el calificador modal es de certeza dada la seguridad que les brinda la garantía, resultando así en un argumento incompleto [111101].

Consideramos que este argumento es de tipo analítico [A]. Por otro lado evidenciamos que el doblado de papel medió en lo que Mía argumentó, por lo que aquí la suplementación es total [T]. Lo anteriormente mencionado nos permite catalogar el argumento como [DA111101, T2TL].

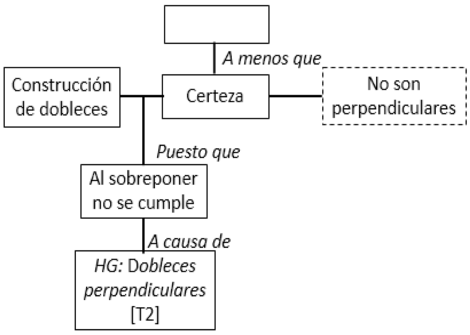


Esquema 108. Argumento de Mía sobre dobleces no perpendiculares

Por último tenemos el argumento de Jana, quien se apoya en el hecho geométrico *dobleces perpendiculares* para sustentar su idea. Tras la participación de Alexa y Mía ella pasa al frente e interactúa con el profesor y expone sus ideas como sigue.

14075	P	A ver Jana, ¿Qué opina usted?
14076	Jana	No.
14077	P	¿Por qué no?
14078	Jana	(…) [Pasa al frente toma la construcción y sobrepone uno de los dobleces] este se puede sobreponer sobre sí misma [señala el doblez de color verde].
14079	P	Listo, la pregunta es si los dobleces son perpendiculares.
14080	Jana	[Mira la construcción por un momento]. Entonces no… [Habló en voz muy baja].
14081	P	Habla fuerte por favor [se retira un poco].
14082	Jana	[Mira la construcción] No, porque si se sobrepone esta sobre esta [un doblez sobre otro] no se cumple el hecho geométrico.

Las ideas de Jana permiten reconocer un argumento de orden deductivo [D]. A través de este se espera proveer sustento a que los dobleces construidos [14278, 14079] [dato] no son perpendiculares [14076] [aserción]. Para ello Jana se vale de manipular la construcción en papel [14078] [garantía] y sustentar su conclusión en un hecho geométrico ya conocido por la clase [14082] [respaldo], fruto de lo que observa al interactuar con el medio, otorgando una naturaleza de teórico a este elemento [T2]. No se evidencia algún refutador en este caso, mientras que el calificador modal es de certeza. Obtenemos un argumento incompleto [111101] que esquematizamos a continuación.



Esquema 109. Argumento de Jana, dobleces no perpendiculares

Jana propone una garantía que se apoya en un elemento conceptual de la clase como lo es el *HG dobleces perpendiculares*, además la relación lógica de los elementos es válida, esto traduce en un argumento analítico [A]. Apreciamos que nuevamente la suplementación del medio es total [T] ya que Jana manipuló el papel para sustentar su declaración. Obtenemos la siguiente categorización para el argumento [DA111101, T2TL].

En el anterior análisis se tuvo en cuenta algunos argumentos donde se aprecia el papel característico que jugó el medio en la toma de decisiones, comprobación de resultados y descubrimiento de propiedades. Se reconoce que los argumentos viven en el doblado de papel, tanto así que se evidencia razonamientos alrededor de ideas bastante impregnadas por del medio, como por ejemplo plegar un doblez sobre otro o plegar un doblez sobre sí mismo para corroborar ideas. En este orden, encontramos que el medio incidió de modo particular en aspectos procedimentales y otros de tipo conceptual.

¿Siempre son rectos?

Al inicio de esta clase se aclaró la idea expuesta por Max, quien consideraba que al representar dos dobleces que no se cruzan en la hoja se podía justificar que estos no eran perpendiculares. El profesor indica a Max unir tantas hojas como requiera para mostrar si en algún lugar estos se cruzan o no. Max reconoce que los dobleces se cruzan al realizar esto. Con la siguiente tarea se pretende profundizar en la definición de dobleces perpendiculares. El siguiente es su enunciado:

Tarea 15
Si tienes dos dobleces perpendiculares ¿Los ángulos que se forman de estos dobleces pueden tener medidas distintas? ¿Por qué?

Trabajo grupal

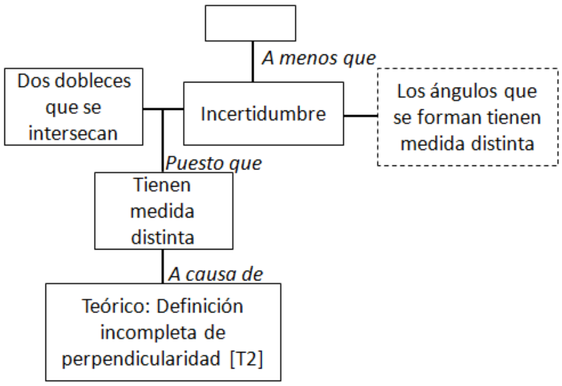
Brock y Max proceden a resolver la tarea. Max lee el enunciado de esta y solicita ayuda al profesor respecto al significado de dobleces perpendiculares de lo que surge la siguiente interacción:

15000	Brock	Necesitamos una hoja, pues para hacer los dobleces [Brock va por dos hojas].
15001	Max	¿Cómo es [la pregunta]?
15002	Brock	Dos dobleces perpendiculares. Hagamos los dos dobleces perpendiculares.
15003	Max	[Realiza un doblez] ¿Perpendiculares?, ¿o sea que se cruzan?
15004	Brock	No. Haga un doblez sobre sí mismo, sobre este mismo [refiere al doblez hecho por Max].
15005	Max	Los dobleces perpendiculares, o sea se cruzan [realiza otro doblez que interseca al construido] [lee nuevamente la pregunta de la tarea] ¿Los ángulos que se forman de estos dobleces pueden tener medidas distintas?  *Imagen 104. Representación de dos dobleces oblícuos.*
15006	P	(…) ¿Cómo están trabajando?
15007	Max	Eh… Profe, es que aquí mi amigo tiene una duda.
15008	Brock	No, los dos. ¿El ángulo es este [señala uno de los cuatro ángulos que se formó]?
15009	P	¿Ahí se forman cuántos ángulos?
15010	Brock	Dos, tres, cuatro.
15011	P	¿Cuál es la duda?
15012	Max	Si todos [los ángulos] tienen la misma…Cierto que… Aquí dice [lee la tarea] ¿Los ángulos que se forman de estos dobleces pueden tener medidas distintas?
15013	P	Esa es la pregunta, ¿no?, ¡yo no sé!
15014	Max	Pues sí, pero… yo digo que sí porque pues aquí este está...
15016	Brock	¡La abertura!

15017	Max	La abertura está más abiertica que esta [indica dos ángulos par lineal].

En esta interacción es posible notar que en principio Brock y Max no tenían clara la definición de dobleces perpendiculares, especialmente Max quien omitió la información que aportó Brock, por lo que le bastó realizar dos que se intersecaran. Así, para ellos los dobleces formaban ángulos con distinta medida, idea que comunican al profesor al comparar la medida de dos ángulos par lineal y referir que "la abertura" de uno "está más abiertica" que la del otro [15016, 15017]. En estas primeras intervenciones se tiene un argumento no legítimo [N] de tipo deductivo [D]. Esto porque la conclusión a la que llegan los estudiantes omite una de las dos condiciones que se satisfacen para los dobleces perpendiculares, a saber: formar un ángulo recto. De lo anterior se despliega una idea errónea como la que se presentó, que los ángulos pueden tener medidas distintas [aserción].

El respaldo en este argumento es la definición incompleta que tienen los estudiantes de dobleces perpendiculares. Este respaldo es de tipo teórico [T2] pues independientemente del uso que hacen los estudiantes de esta acuden a un hecho geométrico estudiado en la clase y además, se apoyan en la generación de dichos dobleces para presentar que uno de los ángulos tiene mayor medida que el otro, el refutador está ausente porque hasta allí nadie ha expresado una condición para que los dobleces no sean perpendiculares. Respecto al calificador modal no se puede establecer un nivel de la credibilidad de las afirmaciones de Brock y Max porque Max no está seguro de que los dobleces perpendiculares sean los que se cruzan y aunque Brock reconoce que son los que resultan de sobreponerse sobre sí, Max impone su idea por esto, se infiere incertidumbre. Entonces el argumento es incompleto [111101]. Así,



Esquema 110. Dos dobleces perpendiculares generas ángulos con distintas medidas.

El respaldo se apoya en una idea teórica pero incompleta por lo que el argumento es no legitimo [N], con un uso del medio total [T] porque a partir de allí y de la definición de dobleces perpendiculares, Brok y Max representan en el papel los dos dobleces y concluyen que las medidas de los ángulos que forman estos son distintas [DN111101, T2TL].

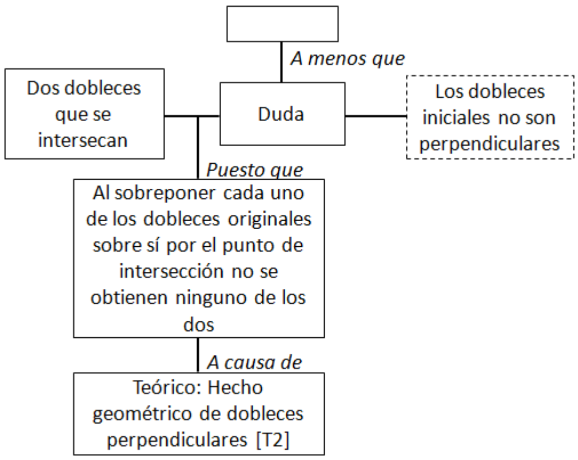
Posterior a esto, el profesor pregunta a Brock y Max si los dobleces que hicieron son perpendiculares [15018, 10519] haciendo que acudan a un sustento teórico. De este modo, ellos caen en cuenta que su construcción no está relacionada con este hecho. Sobreponen cada uno de los dos dobleces realizados sobre sí para generar los respectivos dobleces perpendiculares a estos, situación que se puede apreciar en seguida:

15018	P	Pero la pregunta es… si tienes dos dobleces, ¿no?, eh, ¿qué?, ¿dos dobleces qué?
15019	Brock y Max	Perpendiculares.
15020	P	¿Esos son perpendiculares [señala los dobleces naranja y café]?
15021	Brock	No.
15022	P	¿Ese [doblez] marrón y ese naranja son perpendiculares?... ¿Sí?
15023	Brock	[Disiente con la cabeza, toma la hoja y sobrepone el doblez café sobre sí] Mire, [se genera un nuevo doblez] este doblez es perpendicular con el café.
15024	Max	Por eso.
15025	Brock	[Sobrepone el doblez de color naranja sobre sí] Y este… y este doblez… y este doblez es perpendicular con el naranja.
15026	Max	Entonces sí pueden tener medidas distintas.
15027	Brock	Por eso, pero es que estos dos [dobleces iniciales] no son perpendiculares entre sí porque… no sé.
15028	Max	Obviamente si pueden tener medidas distintas.
15029	Brock	A ver, ¿por qué?... No, no, no. Este doblez [último] es perpendicular con… el naranja.
15030	Max	Y este [penúltimo doblez] con el café.
15031	Brock	Y este [penúltimo] doblez de acá es perpendicular con el café. Ahora toca mirar las medidas de los ángulos (...).
15032	Invest	Tomen otra hojita para que no se confundan, solo hagan los dos [dobleces] que son perpendiculares ¿estos dos [señala los dos dobleces hechos por Max inicialmente] son perpendiculares?
15033	Brock	No.
15034	Invest	¿Por qué si o por qué no?
15035	Brock	¿Usted qué dice?
15036	Max	No si profe… si

15037	Brock	No, yo digo que no
15038	Max	Me equivoqué, me enrede, me enrede.
15039	Invest	¿Por qué?
15040	Brock	Porque… o sea… no, no son.
15038	Invest	¿Qué dice el hecho geométrico?
15039	Brock	Que al sobreponer un doblez sobre sí mismo forma un doblez perpendicular.
15040	Invest	Y al sobreponer ese [doblez café] sobre sí mismo se forma el otro.
15041	Max	Sí señora, si se sobreponen el café con el café se forma este [penúltimo doblez] y si sobrepone el naranja con el…
15042	Invest	O sea, sobrepusiste el naranja sobre el naranja y se formó este [último doblez], ¿sí?
[Max asiente]		
15043	Invest	Entonces ¿cuál es el perpendicular al naranja?
15044	Max	Este [último doblez].
15045	Brock	Y el perpendicular al café es este [doblez penúltimo]
15046	Invest	Entonces háganlo en otra hoja solamente [los dos dobleces que son perpendiculares].
15047	Brock	¿Solo dos perpendiculares?
[Invest Asiente. Brock realiza otra vez los dos dobleces en una hoja nueva y los remarca con colores distintos]		

En esta interacción es posible notar que gracias a la intervención del profesor los estudiantes evidencian que los dobleces construidos inicialmente no son perpendiculares al comparar su construcción con lo que establece el hecho geométrico de dobleces perpendiculares. De modo que replantean su manera de proceder y de abordar la tarea. Así el argumento que se presenta es deductivo [D] porque Brock y Max parten de estos dobleces que se intersecan y que consideran perpendiculares [dato], para luego al revisar el hecho geométrico [garantía] y concluir que no lo eran [aserción]. Situación que comprueban al hacer coincidir cada uno de los dobleces por el punto de intersección y obtener otros que no corresponden con los iniciales [respaldo]. El respaldo es de tipo teórico [T2].

Aunque la intervención del profesor influye en las ideas y afirmaciones de Brock y Max transformando la conclusión establecida, no se constituye en un refutador del argumento porque no considera los datos tal como ellos lo proponen sino que los modifica al ampliar la información que ellos tienen respecto a dobleces perpendiculares, no solo como aquellos que se intersecan, sino que lo hacen de una manera determinada, siendo uno resultado de sobreponer el otro sobre sí. Respecto al calificador modal, no se puede asegurar que los estudiantes tengan seguridad frente al nuevo hallazgo porque no saben cómo justificarlo. Es decir, que tanto Brock como Max son capaces de realizar dos dobleces perpendiculares o no perpendiculares pero a la hora de comprobar esto no acuden a algún hecho geométrico. Esto se evidencia con expresiones tales como: "no sé" [15027] o justificaciones cíclicas, como por ejemplo, cuándo se les preguntó acerca de por qué los dobleces iniciales no son perpendiculares Brock respondió: "porque o sea… no, no son" [15040]. Lo que demuestra que Brock y Max aun no tienen certeza sobre la forma de justificar este resultado. Por lo tanto, el calificador modal es de duda. Así este argumento es incompleto [111101].



Esquema 111. Dos dobleces que se intersecan no necesariamente son perpendiculares

Este argumento es analítico [A] porque se fundamentó en un elemento conceptual de la clase -hecho geométrico de dobleces perpendiculares-, además tiene una estructura lógica que permite arribar a la conclusión de manera deductiva y legítima apoyada en los elementos validados en la clase. El argumento es de suplementación total [T] porque los estudiantes tienen que acudir a plegar el papel para probar que en efecto los dobleces realizados no son perpendiculares, argumento perteneciente a una tarea de profundización [L]. En definitiva es deductivo, analítico, incompleto, de suplementación total en una tarea de profundización [DA111101, T2TL]. La discusión frente a esta tarea continúa como sigue:

15043	Invest	Bueno, ahora sí, explíquense entre ustedes la pregunta, ya tienen dos dobleces perpendiculares ¿cuál es la pregunta?
15044	Max	Eh…
15045	Brock	¿Si los ángulos tienen la misma medida?

15046	Max	¿Si los ángulos pueden tener medidas distintas?
15047	Brock	¿Cómo dice la pregunta? Lea [Max].
15048	Max	[Lee la pregunta] ¿Los ángulos que se forman de estos dobleces pueden tener medidas distintas? ¿Por qué?
15049	Brock	Yo digo que no, o sea, primero tocaría probar sobreponiéndolos para ver si tienen la misma medida, espere los marcamos porque es que me pierdo.
15050	Max	[Max marca los ángulos con las letras A, B, C y D] Sí, sí, si todos tienen la misma medida…
15051	Brock	¿Por qué?
15052	Max	Porque mire [pliega por uno de los dobleces].
15053	Brock	¡Ah!
15054	Max	Si usted los sobrepone así [pliega entre el doblez azul y morado (Imagen 105)] el azul y el morado tienen la misma medida.  *Imagen 105. Doblez entre los dobleces azul y morado.*
15055	Brock	¡No! [observa el proceso que realiza Max] ¡Ah!
15056	Max	Si usted los sobrepone de este lado [repite el doblez] el azul y el morado tienen la misma medida. Sí, todos tienen la misma medida…
15057	Brock	Todos tienen la misma medida, o sea, todo doblez perpendicular [a otro] forman ángulos que tienen la misma medida.
15058	Max	Espere yo copio, ¿cómo es?
15059	Brock	Eh que… no con lápiz, con lápiz. Todo doblez… ¿Cómo va a poner?
15060	Max	Como usted me dicte.
15061	Brock	No, porque todo doblez perpendicular forma ángulos congruentes.
[Max escribe en la hoja de respuestas lo que su compañero le dicta]		
15062	Brock	Pero… cómo hacemos la comprobación de si los ángulos tienen la misma medida se formaría un doblez perpendicular (…).
15063	Invest	Si quieren háganle marquitas a los que van viendo con la misma medida.
[Max pliega la hoja]		

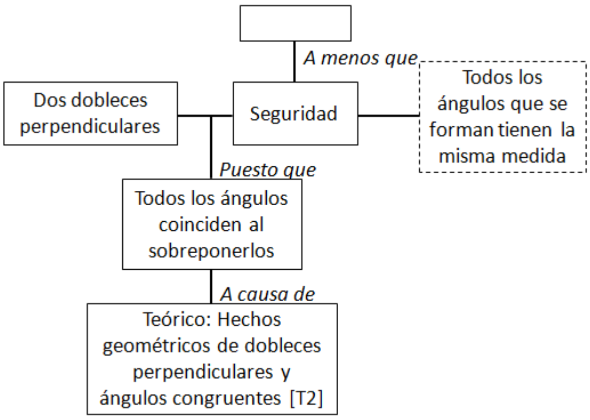
15064	Invest	Cuando haces esto [plegar por uno de los dobleces], ¿este es cuál?
15065	Brock	El D.
15066	Invest	Este tiene la misma medida, o sea igual ¿Con cuál?
15067	Max	Con este [con el B].
15068	Brock	Con el B.
15069	Max	Con el B.
15070	Brock	Y ya.
15071	Max	Sí estos dos tienen la misma medida.
15072	Invest	Y ahora este con este, este con este, ¿este tendría la misma medida que este? [refiere a dos ángulos opuestos por el vértice]
15073	Brock	Sí.
15074	Invest	¿Este con este? [refiere a los otros dos ángulos opuestos por el vértice] ¿O sea todos tendrían la misma medida?
15075	Max	O sea que todos los dobleces perpendiculares forman ángulos congruentes.
15076	Brock	Y todos los ángulos son congruentes, es decir, este es congruente con este, con este, con este, o sea todos son congruentes entre sí [señala uno de los ángulos y los relaciona con los tres restantes].

El trabajo de los estudiantes los lleva a establecer una propiedad a través de un razonamiento deductivo [D], pues proveen sustento teórico a una idea que inicialmente contemplan. En primer lugar, los estudiantes realizan dos dobleces perpendiculares [dato] pero no saben cómo justificar que los ángulos determinados tienen la misma medida, por lo que la investigadora realiza preguntas orientadoras para que ellos arriben a esta aserción. Los estudiantes pliegan la hoja por cada uno de los dobleces hechos (no simultáneamente) para ilustrar que pueden superponer los ángulos [garantía] y de ahí arribar a la aserción planteada respecto a los ángulos par lineal.

Posteriormente Max recurre a generar un doblez que le permita superponer una pareja de ángulos opuestos (Imagen 106), lo que les permite evidenciar que los ángulos coinciden y por tanto también son congruentes, en palabras de ellos, que tienen la misma medida [aserción]. Esto les permite dar una respuesta más amplia respecto a la inicial. De lo anterior concluyen que todos los ángulos determinados por dobleces perpendiculares tienen la misma medida.

Imagen 106. Max suporpone dos angulos opuestos por el vértice.

En este argumento el respaldo recae en los hechos geométricos involucrados a través de la manipulación del papel. Ellos en su procedimiento sobreponen dobleces y verifican que cada pareja de ángulos opuestos y par lineal satisface la congruencia, entonces el respaldo es de tipo teórico [T2]. Este argumento carece de refutador porque los estudiantes no expresan una situación en la que los ángulos de dobleces perpendiculares no midan lo mismo, de hecho no existe, a menos que los datos fuesen dobleces no perpendiculares (como lo evidenciaron Brock y Max en el momento inicial cuando abordaron la tarea). Sin embargo, no hicieron explícita esta intervención en esta última interacción. El calificador modal para este argumento es de certeza pues Max [15050] asegura que los ángulos que se generan de los dobleces tienen la misma medida, afirmación que acoge Brock, al ser persuadido por el procedimiento de Max. Este argumento es incompleto [111101] como se puede apreciar en seguida:

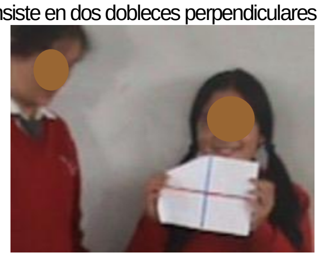


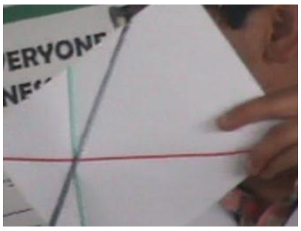
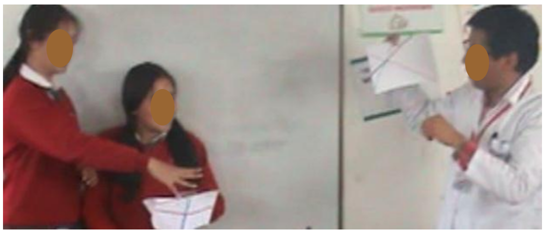
Esquema 112. Brock y Max los ángulos tienen la misma medida.

Este argumento es analítico [A] debido a que la superposición de ángulos se soporta en elementos conceptuales ya estudiados (hechos geométricos), con un uso total del medio [T], pues aquí la conclusión surge de esta superposición. El argumento es deductivo, empírico, incompleto, de suplementación total en una tarea de profundización [DE111101, T2TL]. Es preciso añadir que a lo largo de las interacciones que se presentaron Brock y Max fueron modificando sus ideas originales, guiados por las intervenciones tanto del profesor como de la investigadora. De manera similar, hay un cambio en el nivel de certeza que adquirieron en cada una de las afirmaciones que fueron estableciendo, avanzando de algunas con incertidumbre a otras cargadas de gran seguridad.

Socialización

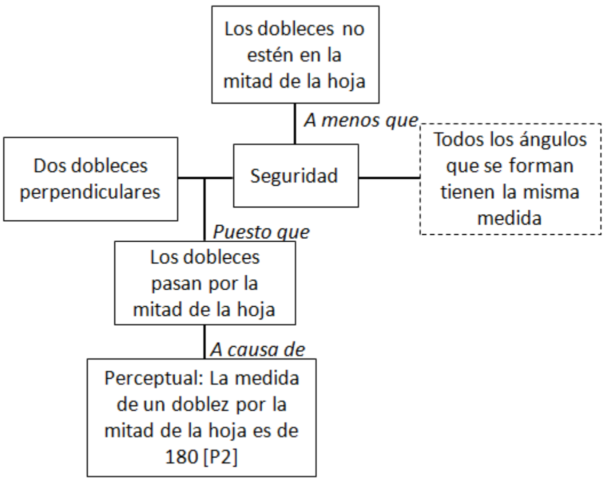
El profesor inicia la socialización leyendo el enunciado de la tarea e indicándole a Victoria y Vale que pasen al frente a presentar sus resultados. De allí surge la siguiente interacción:

15077	P	Díganos, ¿qué encontraron?, ¿sí o no?, ¿qué hicieron?
[Victoria presenta su construcción a la clase que consiste en dos dobleces perpendiculares por la mitad de la hoja (Imagen 107)]  *Imagen 107. Victoria presenta a la clase dos dobleces.*		
15078	P	Ajá, hicieron dos dobleces. ¡Listo! ¿Qué opinan? ¿Qué opinan de esa pregunta? ¿Sí? ¿No? ¿Por qué?
15079	Vale	Porque en este caso [señala la construcción que tiene su compañera y ejemplifica con movimientos en las manos (y (b)] todos los ángulos medían igual, o sea todos medían noventa porque estamos dividiendo la hoja [Victoria asiente con la cabeza].  (a) (b) *Imagen 108. Representacióny explicación de los dobleces hechos.*
15080	P	O sea, todos miden noventa porque están dividiendo la hoja [Victoria asiente con la cabeza]. ¿Cómo así dividiendo la hoja?, ¿a qué se refieren?
15081	Victoria	Por la mitad [ilustra el doblez por la mitad replicándolo] ((a e (b)).  *(a)* *(b)* *Imagen 109. Ilustración del doblez hecho*
15082	P	Por la mitad. [Toma una construcción hecha previamente (Imagen 110)] Pregunto, aquí en esta hoja que yo hice, ¿Cuáles [dobleces] son perpendiculares acá? Que dijimos antes ¿Qué colores?

		 Imagen 110. Construcción previa del profesor.
15083	Vale	El verde y el… negro.
15084	P	¡El verde y el negro! ¿Sí? [Victoria asiente con la cabeza] ¿El verde y el negro? [pliega por el doblez rojo para mostrar que el verde queda sobrepuesto sobre sí] ¡El verde y el rojo [corrige]! O sea, esto que yo hice acá [los dobleces] a un lado de la hoja (Imagen 111. Al plegar por el doblez de color rojo el doblez verde coincide sobre sí.), ¿le puedo aplicar eso [señala la construcción de Victoria y Vale]?, ¿o no porque no está[n] en la mitad de la hoja? ¿Eso tiene algo que ver [la posición de los dobleces en la hoja]? ¿Sí o no?  Imagen 111. Al plegar por el doblez de color rojo el doblez verde coincide sobre sí.
[Victoria asiente con la cabeza mientras que Vale disiente]		
15085	Vale	Sí, sí porque si este [doblez] está en la mitad [señala su construcción] suponemos que este va a medir 180 y la mitad sería 90.  Imagen 112. Vale justifica que la posición de la hoja.
15086	P	O sea que aquí este [doblez] rojo no mide 180 porque no está en la mitad [de la hoja].
15087	Vale	No.

Las respuestas de Victoria y Vale permiten reconocer un argumento deductivo [D] en tanto que ellas parten de construir dos dobleces perpendiculares [dato], resultado de plegar la hoja por la mitad dos veces haciendo coincidir sus bordes, y aseveran que los ángulos determinados por estos medirán lo mismo [aserción]. De esta construcción y de sus ideas respecto a que cada uno de los dobleces construidos tiene una medida de 180º [garantía], establecen su resultado. Vale presenta a la clase su construcción, apoyándose en el movimiento de sus manos para ilustrar sus ideas, juntando las palmas para indicar que plegaron la hoja por la mitad (Imagen 108).

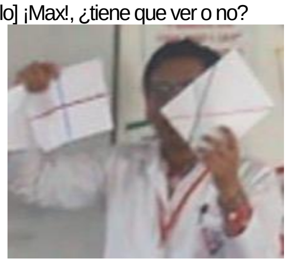
Después de esta explicación el profesor las cuestiona frente a la veracidad de su propuesta, presentando para ello otra construcción, una en la que el doblez de color rojo y el de color verde son perpendiculares pero ninguno de estos se construyó de la forma en que ellas lo hicieron en su propuesta (Imagen 112). La respuesta de Vale deja ver que para ella otro tipo de dobleces perpendiculares no satisface la propiedad "los ángulos determinados miden lo mismo", por lo que acá se reconoce un refutador. Para ella, al parecer, aquellos dobleces que no son resultado de hacer coincidir los bordes opuestos de la hoja no miden 180º. En todo momento ella exhibe seguridad en su afirmación [calificativo modal]. De lo anterior se observa que el respaldo de su argumento yace en una idea asociada a la posición de los dobleces en la hoja por tanto el respaldo es de tipo perceptual [P2]. La garantía en este caso se apoya en su noción previa de ángulos, específicamente la de ángulo llano pero ellas no emplean esta definición sino que se apoyan en la visualización de su construcción de sus dobleces por esto no encontramos que aquí exista un sustento teórico. Ellas tampoco corroboran su aserción sobreponiendo los ángulos, lo que hubiera llevado a involucrar la definición de dobleces congruentes. Este argumento es completo [111111] y cada uno de sus elementos se presenta a continuación.



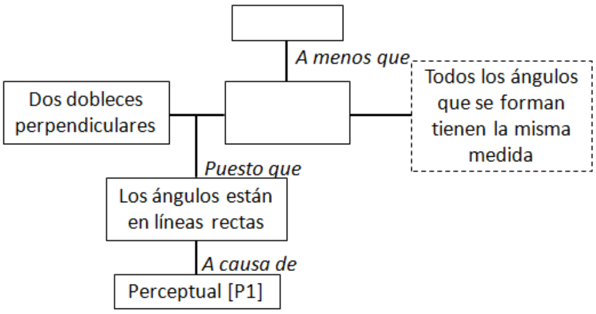
Esquema 113. Vale los ángulos de dobleces perpendiculares tienen la misma medida.

El argumento es empírico [E] pues la idea expuesta recae en su experiencia tras realizar los dos dobleces por la mitad de la hoja al punto que otra configuración de dobleces perpendiculares para ellas no es equivalente con la presentada. Por tanto, el uso del medio es total [T], en tanto que sirvió para formular una conclusión parcial frente a la tarea propuesta. Este argumento es deductivo, empírico, completo, de suplementación total e inmerso en una tarea de profundización [DE111111, P2TL].

Frente a la situación presentada el profesor consulta la opinión de algunos estudiantes quienes no justifican su postura, tan solo establecen una afirmación, salvo Max que se confunde al intentar dar una explicación.

15088	P	Ustedes qué opinan. A ver… Emilio. Ah espera, allá [Max] alzó la mano, ya te doy la palabra [Emilio]. ¿Tú qué opinas [Max]? [Toma la construcción de Victoria y Vale] ¿Qué pasa? ¿Qué ibas a decir [Max]?
15089	Max	Pues yo opino que si mide 180° porque cuando es esto [realiza un movimiento horizontal con la mano] cuando son ángulos rectos [líneas rectas]… no me confundí.
15090	P	[Presenta las dos construcciones en paralelo] ¡Max!, ¿tiene que ver o no?  *Imagen 113. Dobleces perpendiculares en diferentes posiciones de la hoja.*
15091	Max	No.
15092	P	Brock, ¿es lo mismo [la configuración de los dobleces en cada hoja] o no?
15093	Brock	Sí.
15094	P	¿Es diferente Emilio? ¿Qué la construcción este a un lado a que esté en el centro?
15095	Emilio	¡Es lo mismo!
15096	P	¿Mauro?
15097	Mauro	¡Es lo mismo!
15098	P	Eh… ¿Nataly? ¿Es lo mismo?
15099	Nataly	Sí.
15100	P	¿Sí? ¡Bueno!

En esta interacción es posible reconocer un argumento en la intervención de Max [15090] de carácter deductivo [D] porque para él la posición de los dobleces perpendiculares en la hoja de papel no influye en el hecho que los ángulos que se forman tengan medida distinta, particularmente, que esto incida en que la medida del ángulo determinado por un único doblez sea 180°. Para Max, Brock, Emilio y Mauro la configuración de los dobleces es la misma en ambas construcciones [dato]. Por tanto, para Max cada doblez mide 180° por el hecho de pertenecer a líneas rectas [garantía]. Como la opinión de Max está apoyada en la construcción de Vale y Victoria quienes concluyeron que las medidas de los ángulos son iguales y además, él considera esta construcción equivalente a la del profesor, se puede decir que para él los ángulos en la construcción del profesor tienen la misma medida [aserción]. No se conoce más acerca de los demás elementos del argumento debido a que Max se sintió confundido y se abstuvo de concretar su idea. Por tanto, el respaldo, refutador y calificador modal no se encuentran presentes en este argumento. Sin embargo, la garantía que emplea Max tuvo que estar apoyada en nociones previas (que no verbalizó) pues no basta con que los ángulos estén en dos dobleces o líneas rectas porque puede darse el caso que sean oblicuos, de lo cual no necesariamente se concluye que se formen ángulos que sean de igual medida. De acuerdo a esto parecería que Max se apoyó en las nociones de ángulo llano y ángulos congruentes pero no se tiene la certeza de esto. Por lo anterior, el argumento es de tipo perceptual [P1]. Luego el argumento es incompleto [111100] como sigue:



Esquema 114. Max, los ángulos tienen la misma medida.

La garantía del argumento es conceptual pues no se apoya en algún resultado de su trabajo en el papel sino en una noción de ángulo llano que no explícita. Sin embargo es no legítimo [N] porque Max no aporta suficiente evidencia para establecer su conclusión, de modo que no hay un vínculo lógico entre datos, garantía y aserción. Es de suplementación carente [C] porque Max no acudió al uso del papel para justificar su idea, perteneciente a una tarea de profundización [L]. En resumen este argumento es deductivo, no legitimo, incompleto, de suplementación carente y de una tarea de profundización [DN111100, P1CL].

El uso del medio en particular en este problema es fundamental puesto que para garantizar que los ángulos determinados por dobleces perpendiculares tienen la misma medida, se hace necesario superponerlos y con esto acudir a la la definición de ángulos congruentes y algunos hechos geométricos asociados. La única manera de probar si los ángulos generados son congruentes requieren del medio, al determinar si estos coinciden o no.

¿Cuántos dobleces perpendiculares hay a dos que se cruzan?

Esta tarea se enmarca en la modalidad profundización [P] pues se esperaba que los estudiantes a través de sus producciones pusieran en juego la definición de perpendicularidad. Presentamos el enunciado de la tarea.

Tarea 16
Construye dos dobleces l y m que se crucen. ¿Es posible construir un doblez perpendicular a l y m? Explica tu respuesta.

Trabajo grupal

Brock y Max desarrollan la tarea mientras comunican sus puntos de vista. Los estudiantes construyen dos dobleces que se intersecan pero no son perpendiculares (Imagen 114 a) y repisan con color verde y rojo cada uno de estos. Posteriormente Max indica a su compañero dónde construir un doblez perpendicular a uno de estos (Imagen 114 b). Brock se muestra pesimista de que dicho doblez resulte perpendicular a ambos. Max pliega el doblez rojo sobre sí mismo y obtiene un doblez perpendicular a este.

Posteriormente Brock le recuerda a Max que el tercer doblez debe ser perpendicular a los otros dos, por lo que Max verifica el cumplimiento de esto a través del doblado de papel. Max le indica a Brock una posible configuración en la hoja en la que el tercer doblez pasaría por el punto de corte de los otros dos (Imagen 114 c), lo que le lleva a percatarse que solo es perpendicular al rojo (Imagen 114 d). Brock específica a su compañero que el tercer doblez debería determinar ángulos rectos con los otros dos, por lo que Max intenta verificar la presencia de dichos ángulos en su construcción y al ver la imposibilidad de tal resultado desiste y hace a un lado la construcción. Presentamos la interacción de manera detallada a continuación:

(a) (b) © (d)

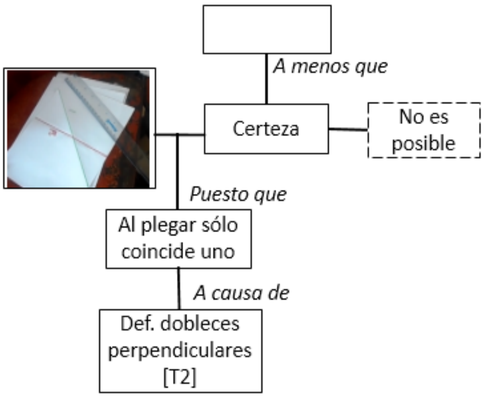
Imagen 114. Construcción de Max y Brock sobre la tarea 16

16000	Brock	Construya dos dobleces primero.
16001	Max	[Construye dos dobleces oblicuos que repisa con color rojo y verde]. Mire, m y l [nombra los dobleces, Imagen 114 a].
16002	Brock	Un doblez que sea perpendicular a esos dos.
16003	Max	Sí [Señala en la hoja la posible construcción de un doblez, Imagen 114 b].
16004	Brock	Jum [desaprueba con gesto en la cara].
16005	Max	¡Sí! obvio [Toma la hoja y pliega a m sobre sí mismo].
16006	Brock	Hágalo.
16007	Max	¿No?
16008	Brock	Pues hágalo, no sé.
16009	Max	Yo tampoco sé.
16010	Brock	Pues ahorita toca comprobar (...) Tiene que formar un ángulo recto.
16011	Max	Pues mira [le muestra el doblez resultante, los tres dobleces resultaron concurrentes, Imagen 114 d].

16012	Brock	¡Pues sí! [Se ve convencido de la construcción] porque vea, si… [Toma la construcción y verifica al plegar los dobleces m y l]. Ay, este con este [dice al percatarse de que el doblez hecho solo es perpendicular a m].
16013	Max	[Toma la construcción y pliega el último doblez construido, Imagen 114 c] El único que coincide es…
16014	Brock	[Interrumpe] Tiene que ser perpendicular a los dos.
16015	Max	[Pliega los dobleces construidos nuevamente] ¿Entonces no?
16016	Brock	Es que no sé.
16017	Max	Yo tampoco sé. Ya que, hagámoslo así.
16018	Brock	Tiene que formar un ángulo recto [Max pliega el tercer doblez]. ¡El ángulo recto!
16019	Max	¡Ah! El ángulo recto.
16020	Brock	¿No se acuerda como era el ángulo recto? El ángulo recto es [dibuja sobre la hoja de la construcción la letra T invertida] dos ángulos que forman, dos ángulos que forman un ángulo.
16021	Max	Complicado, tómalo [le entrega la hoja de la construcción]. Hágale, que yo ya hice eso.
16022	Brock	[Toma la construcción y analiza] no porque no forma ningún ángulo recto.
16023	Max	¿Entonces?
16024	Brock	No, porque no forman ningún ángulo recto [con el doblez l].

De lo declarado por Brock y Max reconocemos los datos de un argumento deductivo [D], dado que a partir de los dobleces oblicuos construido por Max (Imagen 114 a) se establece como resultado, gracias al trabajo con el doblado de papel [16024], que no era posible construir un doblez que fuera perpendicular a los dos dobleces oblicuos [aserción]. Su trabajo se sustentó en variados momentos en que plegaron sin éxito alguno (Imagen 114 c) lo que los llevó a convencerse que no era posible la construcción solicitada por la tarea [garantía] [16012, 16013 y 16015].

El respaldo de este argumento se evidencia en lo expuesto por Brock de que el tercer doblez debía determinar ángulos rectos con los dos primeros [16010, 16018, 16010, 16012, 16014], idea que tiene apoyo implícito en la definición de dobleces perpendiculares, por lo tanto el elemento tiene una naturaleza teórica [T2]. En cuanto al refutador, decimos que este no tiene presencia en este argumento. Por último, dada la seguridad de los estudiantes sobre su construcción respecto a lo solicitado por la tarea, podemos decir que el calificador modal es de certeza. Obtenemos entonces un argumento incompleto [111101] que representamos de la siguiente manera.



Esquema 115. Max y Brock, el doblez no es perpendicular a ambos

Se puede señalar que este argumento involucra algunas definiciones en clase, siendo así un argumento analítico [A]. Max y Brock relacionan la definición de dobleces perpendiculares para determinar y verificar su respuesta en la manipulación del papel usando solo dobleces, por lo que la suplementación del medio en este apartado es total única [U]. Obtenemos finalmente un argumento deductivo, analítico, incompleto, de suplementación total única en una tarea de profundización [DA111101, T2UL].

Socialización

Alex y Gohan, así como Mónica y Blanca, presentaron construcciones y explicaciones similares. Destacamos de estos dos grupos la participación de Alex y Gohan. Ellos construyeron los dobleces l y m perpendiculares y el tercer doblez (rojo) no perpendicular a alguno de los dos, de tal forma que todos eran congruentes. Por medio de su construcción (Imagen 115) explicaron que el tercer doblez no era perpendicular a l y m. Alex, para sustentar que no era posible la construcción solicitada, aludía de modo implícito al *HG Dobleces perpendiculares* ya que al sobreponer un doblez sobre sí mismo se genera un doblez perpendicular a este, lo cual no correspondía a lo obtenido en su construcción. Presentamos a continuación la interacción entre Alex y Gohan con el profesor.

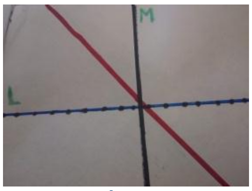


Imagen 115. Construcción de Alex y Gohan, tarea 16

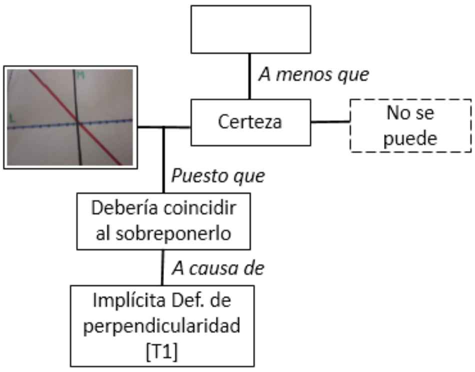
16026	P	Alex, explícanos ¿Qué respuesta da usted a la pregunta de la tarea?
16027	Alex	Que no se puede.
16028	P	¿Por qué no es posible?
16029	Alex	Para que sean perpendiculares tienen que…
16030	Gohan	El ángulo tiene que medir 90 grados y tiene que hacer dos dobleces perpendiculares.

16031	P	¿Cuál fue el doblez l y m que usted hizo?
16032	Alex	El azul y el negro (Imagen 115).
16033	P	¿Y el rojo con respecto al l y m qué pasa?
16034	Alex	No.
16035	P	No cumple. [Muestra la construcción de Alex a los estudiantes] ¿Qué opina usted Vale de la construcción de Alex?
16036	Vale	Que no son perpendiculares [se refiere al doblez construido respecto a los otros].
16037	P	¿Y qué evidencia física, al doblar papel, podemos encontrar de que no son perpendiculares el rojo con el negro?
16038	Alex	Que ninguno se sobrepone, o sea… [Al sobreponer el doblez rojo el doblez que se genera no coincide con l o m].
16039	Gohan	O sea, entre el l y m sí [son perpendiculares].
16040	P	¿Pero el rojo con el l? ¿Qué pasa si yo pliego, si fueran perpendiculares, qué debería pasar?
16041	Gohan	Debería coincidir al sobreponerlo [l sería resultado de sobreponer el doblez rojo].

Al analizar la relación de los elementos del argumento, notamos una de tipo deductiva [D]. Alex y Gohan parten de que l y m se cruzan y de la definición de perpendicularidad como regla general que les permite concluir que no es posible construir un tercer doblez perpendicular a l y m simultaneamente. En este argumento los datos corresponden a la construcción de los dobleces perpendiculares [16032]. La garantía se puede apreciar cuando Gohan sustenta el resultado de lo realizado con el doblado de papel [16033, 16034, 16041], es decir, la imposibilidad de hacer el tercer doblez de modo que determinara un ángulo recto con l y con m simultáneamente. Con base en lo que hicieron los estudiantes declararon como aserción que no era posible hacer la construcción requerida por la tarea [16027].

El respaldo de lo afirmado por los estudiantes se percibe en las razones ofrecidas [16029, 16030] para su conclusión, sus ideas se apoyaban implícitamente en la definición de dobleces perpendiculares, lo que hace de este elemento uno de tipo semiteórico [T1]. El refutador no tiene presencia en el argumento de Alex y Gohan, en tanto que los estudiantes no describen o realizan una posible construcción de los dobleces que contradijera lo que ellos habían concluido. Finalmente, percibimos seguridad en el momento en que Alex y Gohan expresan sus ideas, lo que representa un calificador modal de certeza. Obtenemos un argumento incompleto [111101].

En lo que refiere a la estructura lógica, aseguramos que esta se cataloga como analítica [A] en tanto que el respaldo del argumento se sustenta en una definición y hecho geométrico establecidos en el marco de clases anteriores [16030, 16041]. La suplementación del doblado de papel en este apartado es total única [U] dado que estuvo presente en la construcción y la explicación ofrecida en cada uno de los momentos de interacción de Alex y Gohan y no tuvo en cuenta propiedades o condiciones físicas del papel. Obtenemos entonces, un argumento deductivo, analítico, incompleto, de suplementación total única, en una tarea de profundización [DA111101, T1UL].



Esquema 116. Alex y Gohan, no se puede construir doblez

Los siguientes estudiantes en presentar su propuesta son Marcelo, Pau y Jack. Marcelo presentó una construcción distinta a las anteriores (Imagen 116). Él realiza dos dobleces l y m perpendiculares entre sí y un tercer doblez, de color azul, perpendicular a l. La definición de paralelismo se había tenido en cuenta solamente en sesiones de clase previas al desarrollo de la secuencia de enseñanza con geometría del doblado de papel. Presentamos la interacción sostenida entre estos estudiantes y el profesor.

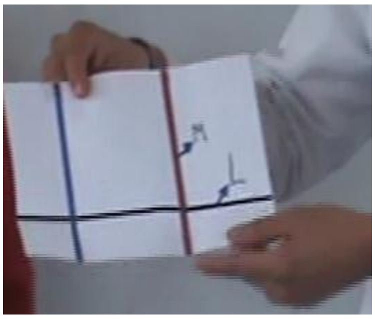
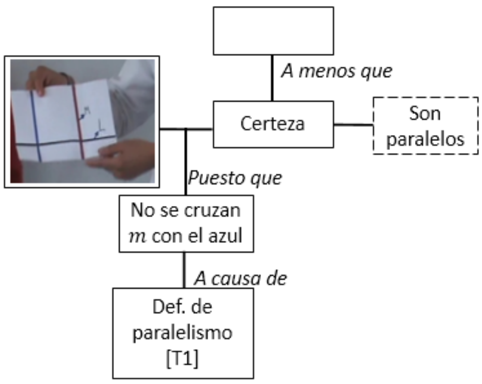


Imagen 116. Construcción de Marcelo, tarea 16

16042	P	Bueno, explícanos la construcción.
16043	Marcelo	Pues que en el punto [de la tarea] nos piden que se crucen dos. Nosotros hicimos esta opción porque, es que si doblamos l, queda m y el azul perpendiculares [a l, Imagen 116]. l Es perpendicular con m y con el azul. Pero digamos el azul no es perpendicular con m porque son...
16044	Jack	Paralelos.
16045	Marcelo	Paralelos.
16046	P	¿Y qué podemos decir del m y el azul? ¿Qué característica tienen?
16047	Jack	Son paralelos.
16048	P	[Se dirige a todos] ¿Son paralelos? [Varios estudiantes dijeron sí] ¿Por qué sí?
16049	Jack	¡Porque no se cruzan! [Dijo con voz fuerte por encima de lo que decían otros].
16050	P	¿Porque no se cruzan? ¿Esa es la única condición? ¿Cuál es la definición de paralelos?
16051	Pau	Que cuando se prolongan [los dobleces] no se van a cruzar.
16052	P	[Se dirige a Marcelo] ¿Del azul y el m estás de acuerdo con lo que dice Mac?
16053	Marcelo	Sí, porque como son paralelos nunca se van a cruzar.
16054	Jack	Y si no se cruzan no van a coincidir las tres [dobleces].

En esta oportunidad se reconocen dos argumentos deductivos [D]. El primero de estos aboga por el hecho de que los dobleces azul y m son paralelos, el segundo permite establecer que estos mismos dobleces no son perpendiculares. A continuación el análisis del primer argumento.

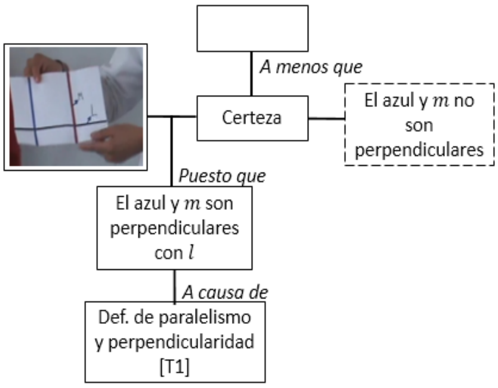
En el primer caso los datos del argumento corresponden a la construcción realizada, en la que dos dobleces distintos son perpendiculares a un tercero [16043]. La garantía se reconoce desde la percepción visual cuando Marcelo asegura que el doblez m y el azul no se cruzarán aun cuando estos se prolonguen [16043], idea que le permitió declarar como aserción que tales dobleces eran paralelos [16044, 16045, 16047]. El respaldo se aprecia en las intervenciones de Jack y Pau cuando declaran la definición de paralelismo [16051], que da apoyo a lo que Marcelo explicó sobre su construcción [16053], otorgando un naturaleza teórica a este elemento [T1]. No se reconoce refutador en el argumento en tanto que los estudiantes no describen situaciones o condiciones distintas de la construcción que lleven a pensar que el doblez m y el azul se crucen. Finalmente, el calificador modal es de certeza, en vista de la seguridad con que Marcelo y Jack comunican sus ideas [16044, 16045, 16049]. Reconocemos un argumento incompleto [111101].



Esquema 117. Argumento de paralelismo de Marcelo, Jack y Pau

La naturaleza de la garantía es empírica [E] puesto que se reconoce desde lo perceptual, según lo observado en los estudiantes al declarar su argumento. Por último, reconocemos una suplementación total [T] del medio porque se aprecia que la garantía en la que se apoya Marcelo se sustenta en el doblado de papel [16043]. Distinguimos la estructura de un argumento deductivo, empírico, incompleto, de suplementación total en el marco de una tarea de profundización [DE111101, T1TL].

Respecto al segundo argumento, este comparte la construcción propuesta en el papel como dato. Consideramos como dato la configuración del doblez m y el tercer doblez con respecto a l, de donde parte Marcelo para proponer su idea. El estudiante usa como garantía el hecho de que los dobleces m y el "azul" eran perpendiculares a l [16043] y que por tal motivo m y el "azul" no serían perpendiculares entre sí [aserción] [16043]. El respaldo, al igual que el anterior argumento, recae en la definición de paralelismo, pues se asegura que estos dobleces no se cruzarán debido a que son paralelos y por ello no habrá perpendicularidad, por ende de naturaleza teórica [T1]. Lo anterior deja ver que en su discurso se alude también a la noción de perpendicularidad, pues se reconoce que la no intersección hace que no se cumpla parte de la definición de perpendicularidad. No se reporta refutador en el argumento y el calificador modal es de certeza. Obtenemos un argumento incompleto [111101] cuyo esquema es el siguiente.



Esquema 118. Argumento de no perpendicularidad de Marcelo

La garantía usada por Marcelo tiene un carácter conceptual que atañe a las definiciones de paralelismo y perpendicularidad simultáneamente, por lo que el argumento se hace analítico [A]. La suplementación del medio es carente [C] dado que Marcelo no dobla papel para proveer razones de lo que argumentaba. Apreciamos la estructura de [DA111101, T1CL].

El profesor pide ahora a cada grupo replicar la construcción de Marcelo en hojas de papel con el objetivo de encontrar características de los objetos geométricos allí representados. Fruto de ese espacio surgieron las producciones de Lorena (Imagen 117); Alexa y Mía (Imagen 119).

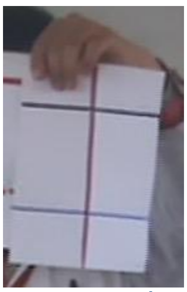


Imagen 117. Construcción de Lorena.

Lorena inicia con la construcción de los dobleces paralelos. Para ello manipula los bordes de la hoja (Imagen 118 a), los junta en el centro del papel y luego pliega este. Lorena pliega sobre sí los dobleces obtenidos para lograr un tercer doblez perpendicular a ambos (Imagen 118 b). Presentamos a continuación su explicación.

(a) Doblado para obtener paralelos

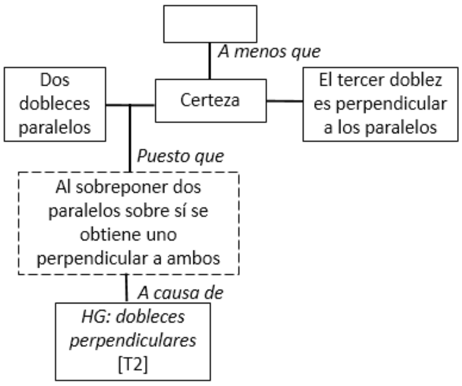
(b) Doblado para obtener perpendicular

Imagen 118. Lorena en la construcción para obtener dobleces paralelos

16055	P	Lorena, explícanos ¿Cuáles construyó primero?
16056	Lorena	Los paralelos.
16057	P	¿Y cómo hizo?
16058	Lorena	[Replica el procedimiento señalado líneas atrás, Imagen 118] ¿Sí? Y al sobreponerlos [los paralelos] se creó el doblez perpendicular.
16059	P	[Al notar falta de claridad en lo explicado] ¿Cómo hizo para que los dos fueran paralelos?
16060	Lorena	A lo que yo me refiero, es que si son paralelos también pueden ser perpendiculares, al sobreponerlos [los paralelos] se va a crear el doblez perpendicular.
16061	P	Repite por favor, toma una hoja.
16062	Lorena	[Toma la hoja] Me guie de las dos puntas [bordes opuestos] a todo el centro [Imagen 118 a], y hasta donde llegaba hice el doblez.
16063	P	(...) ¿Y después?
16064	Lorena	Yo los sobrepuse [pliega los dobleces sobre sí mismos por el centro de la hoja, Imagen 118 b].
16065	P	¿Qué puedes decir de ese doblez? [tercer doblez]
16066	Lorena	Que al sobreponerlo se generó el doblez perpendicular.

Distinguimos en la participación de Lorena un argumento inductivo [I]. La estudiante parte de los dobleces paralelos y considerando la configuración de la Imagen 117, socializada previamente, propone una regla general, detallamos a continuación sus elementos. La construcción de dos dobleces paralelos la reconocemos como los datos del argumento [16055, 16056]. La aserción de este consiste en la declaración que hace Lorena sobre el hecho de que el doblez generado al sobreponer los dobleces paralelos sobre sí mismos es perpendicular a estos [16066]. La garantía, por ser la regla obtenida, consiste en establecer que a partir de dos dobleces paralelos se obtiene uno perpendicular a ambos a través de sobreponer los paralelos sobre sí mismo.

El respaldo ostenta una naturaleza procedimental ya que se evidencia un trabajo permanente con el papel apoyado en el *hecho geométrico dobleces perpendiculares*, [T2]. El refutador está ausente en el argumento de Lorena. Como calificador modal señalamos certeza, puesto que no se evidencia duda en el discurso de la estudiante. Presentamos el esquema de los elementos de este argumento incompleto [111101] a continuación.



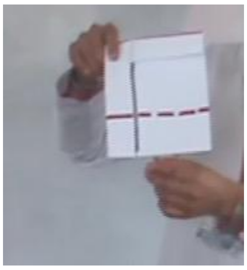
Esquema 119. Argumento de Lorena, Hecho Geométrico 6

La garantía se aprecia como empírica en tanto que Lorena se apoya desde en el trabajo con doblado de papel, su proceder se enmarca en lo procedimental, por lo tanto este argumento es empírico [E]. La suplementación del medio se aprecia como total [T] dada la implementación del medio que muestra Lorena para proponer su argumento. Obtenemos un argumento categorizado como inductivo, empírico, incompleto, de suplementación total en una tarea de profundización [IE111101, T2TL]. Lo anterior posibilitó al profesor introducir un nuevo hecho geométrico. Este se enuncia a continuación:

HG Paralelos-Perpendicular: Si tengo 2 dobleces paralelos, al sobreponerlos sobre sí mismos, se genera un doblez perpendicular.

Imagen 119. Construcción de Alexa y Mía, hecho geométrico 7

Es el turno de Alexa y Mía para comunicar su propuesta (Imagen 119). Alexa parte de la construcción del doblez de color negro y hace uno perpendicular a este (color rojo continuo) plegando el doblez de color negro sobre sí (Imagen 120 a). De manera similar reproduce esta acción en el otro extremo del mismo doblez negro y obtiene el doblez de color rojo discontinuo (Imagen 120 b, c). Detallamos que la estudiante a partir de un par de dobleces perpendiculares llega a la misma configuración de Lorena, no obstante lo reportado difiere.



(a)

(b)

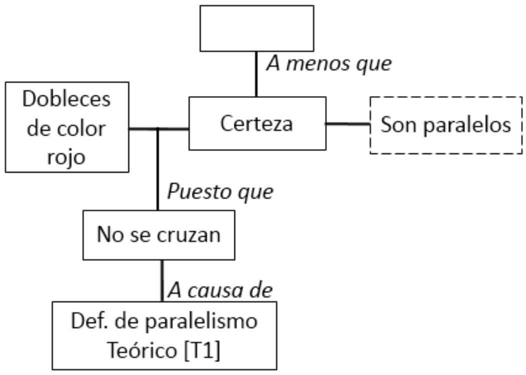
(c) Demostración

Imagen 120. Alexa en la construcción de doblez paralelo

16067	P	¿Díganos cuál hizo primero?
16068	Alexa	El negro y el rojo [señala construcción, Imagen 120].
16069	P	Que son perpendiculares [dobla la hoja por el doblez rojo, Imagen 120 a]. Bueno y después.
16070	Alexa	Ese [Señala doblez rojo discontinuo, Imagen 120].
16071	P	¿Qué tiene que decir de ese?
16072	Alexa	Pues que estos son paralelos porque no se cruzan [los de color rojo].
16073	P	¿Cómo hizo el doblez discontinuo? ¿Puede repetir cómo hizo el discontinuo?
16074	Alexa	O sea, puse que estos dos se unieran [los bordes opuestos del papel unidos, Imagen 120b]
16075	P	¿Qué puedes decir del rojo discontinuo y el negro?
16076	Alexa	Que son per... [Mira a Mía].
16077	Mía	Perpendicular.
16078	P	¿Cómo lo demostramos?
16079	Alexa	Porque, eh..., sobreponiendo [sobrepone el doblez negro sobre sí, para que quede plegado el de color rojo discontinuo, Imagen 120c].
16080	P	¿Sí? ¿Están de acuerdo? [a los estudiantes] ¿Entonces qué concluyen? [Preguntó a Alexa y Mía].
16081	Alexa	Que, aunque estos sean paralelos [dobleces rojos], el negro es perpendicular a esos dos.

En la interacción observamos la presencia de dos argumentos de tipo deductivo [D]. El primero de estos permite establecer que los dobleces rojos son paralelos, el segundo por su parte permite rectificar la perpendicularidad entre los dobleces negro y rojos.

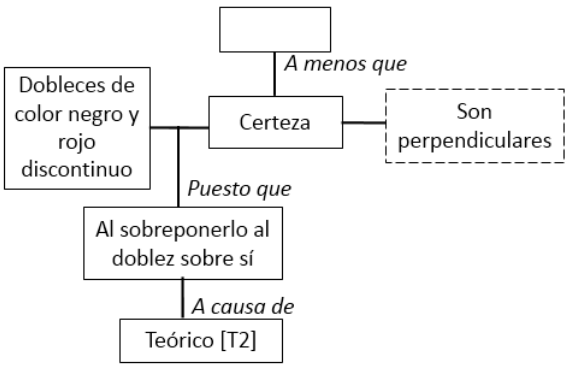
En el primer argumento se reconocen como datos la representación de los dobleces en el papel [16070, 16071]. Como garantía señalamos la percepción visual sobre los dobleces rojos, lo que permitió a Alexa declarar la aserción del argumento, esta es, que los dobleces eran paralelos [16072]. Como respaldo vislumbramos la definición de paralelismo [16072], que lo hace un elemento teórico [T1]. El refutador está ausente en lo dicho por Alexa y el calificador modal se aprecia como de certeza. Obtenemos entonces un argumento incompleto [111101].



Esquema 120. Argumento uno de Alexa, paralelismo

Alexa presenta una garantía apoyada en el reconocimiento visual de propiedades sobre la construcción, por lo tanto el argumento resulta empírico [E]. La relación lógica de los elementos es válida en tanto que la garantía conecta los datos con la aserción. La suplementación del medio es total [T] pues provee apoyo para que Alexa sustente su argumento [DE111101, T1TL].

El segundo argumento tiene como datos la construcción de los dobleces negro y rojo discontinuo [16075], Alexa y Mía señala que estos son perpendiculares [aserción] al apoyarse en la acción de sobreponer el de color negro y evidenciar que su pliegue corresponde al de color rojo discontinuo [garantía], acudiendo así a un hecho geométrico [16079]. La definición de perpendicularidad fundamenta el *HG: Dobleces perpendiculares*, por lo tanto reconocemos un respaldo a lo que dijo Alexa de carácter teórico [T2]. No se reconoce refutador en este argumento. El calificador modal es de certeza en tanto que Alexa se nota segura en lo que declaraba. Lo anteriormente dicho nos resulta en un argumento incompleto [111101] que se representa a continuación.



Esquema 121. Argumento de Alexa y Mía, perpendicularidad

Detallamos que la garantía que muestra Alexa hace parte del sistema conceptual establecido en clase, además se aprecia una relación lógica acertada entre los elementos del argumento lo que hacen de este uno de tipo analítico [A]. La suplementación del medio es total [T], lo que resulta en un argumento [DA111101, T2TL].

La propuesta de Alexa y Mía tiene diferencias frente a la ya presentada por Lorena, aun cuando la configuración es similar. Esto se debe a la forma de realizar la construcción de los dobleces involucrados. El profesor aprovecha esto y establece un nuevo hecho geométrico.

HG 7: PERPENDICULARES-PARALELOS: Si tengo dos dobleces perpendiculares, al sobreponer uno de ellos, se generan dos paralelos.

De esta tarea notamos que el doblado de papel, aparte de tener una suplementación total en las producciones de los estudiantes, imprime características muy particulares en las ideas que circulan en clase. Ejemplo de ello son las maneras de validar la perpendicularidad [16064-16061; 16069-16071] o el paralelismo [16061-16062] entre dobleces, las cuales son propias del uso de este medio. Caso similar acontece con el lenguaje utilizado al comunicar las ideas alrededor de los objetos geométricos estudiados [16060, 16078-16079].

NÚCLEO 4: PARALELISMO

Este núcleo tiene sus orígenes en el trabajo realizado alrededor de la tarea 16. En primer lugar, se adopta una definición de dobleces paralelos en la geometría del doblado de papel. Esta caracteriza a estos como *dobleces que al prolongarse no se cruzan.* Esta definición se tuvo en cuenta para el planteamiento de las siguientes cuatro tareas.

¿Existen los dobleces paralelos?

En este apartado analizaremos la actividad de los estudiantes en torno a la tarea 17, clasificada como profundización. En las soluciones propuestas por los estudiantes se espera el afianzamiento de las definiciones de perpendicularidad y paralelismo, así como de los hechos geométricos del sistema teórico ya incorporados.

Tarea 17
Construye un doblez. Construye ahora un doblez que sea paralelo al primero. ¿Cómo podrías asegurar que los dobleces son paralelos?

Trabajo grupal

Brock aborda la tarea evocando ideas presentadas en la discusión de la anterior tarea. Él toma la iniciativa al abordar la solución, Max observa e interviene poco. El estudiante inicia su construcción mencionando el *HG perpendiculares-paralelos,* aunque se vale en primera instancia de los bordes opuestos del papel, los cuales junta y sobrepone para obtener el doblez n (Imagen 121 a). Posterior a ello pliega el papel sobreponiendo a n sobre sí mismo y generar con ello a m (Imagen 121 b). Él asume a m y n como perpendiculares. Luego, repite el procedimiento y construye a l de modo similar que a m al sobreponer nuevamente a n (Imagen 121 c). Brock se sustenta en el último hecho geométrico establecido para asegurar que su construcción responde a lo solicitado por la tarea. A continuación presentamos la interacción de los estudiantes y el profesor.

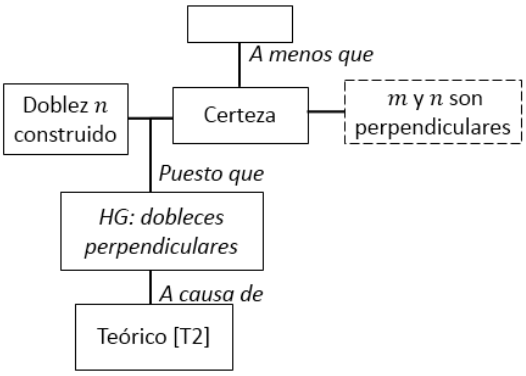
(a) Construcción de $\boldsymbol{n}$ (b) Construcción de $\boldsymbol{m}$ (c) Construcción de $\boldsymbol{l}$ (d) Construcción final

Imagen 121. Pasos de construcción de Brock y Max, tarea 17

17001	Brock	[Lee el enunciado] Ah, pues con el hecho geométrico. Sí, vea, perpendiculares-paralelos.
17002	Max	[Lee el HG: Perpendiculares-paralelos] Si tengo dos dobleces perpendiculares…
17003	Brock	Al sobreponerlos ellos generan dos paralelos. O sea [toma la hoja, une y alinea dos bordes y pliega, generando a n en el centro, Imagen 121 a] (…) Y lo sobrepongo sobre sí [sobrepone el doblez n y obtiene el doblez m, Imagen 121 b], tengo dos dobleces perpendiculares [muestra a Max su construcción]. Y después dice…
17004	Max	Al sobreponer uno de ellos genera un paralelo [HG: Perpendiculares-Paralelos].
17005	Brock	¿Al sobreponerlo? [Mira con incertidumbre lo que había construido].
17006	Max	Sería…
17007	Brock	Ah pues este [n], lo sobreponemos [sobrepone con Max a n nuevamente y generan a l, Imagen 121 c]. Dos paralelos y uno perpendicular [Imagen 121 d]. Haga su construcción y muéstraselo al profe.
17008	P	¿Cómo decía la tarea niños? [Brock lee el enunciado] ¿Entonces cuál fue el primer doblez que hicieron?
17009	Max	Este [señala a n].
17010	P	¿Y el segundo? [Max señala a l]. ¿Esos dos son paralelos [l y m]?
17011	Brock	Pues compruébelo [le dice a Max]. Este fue el primer doblez [dobla el papel por n], luego hicimos uno [m] que fuera paralelo a ese [quiere decir perpendicular], sobreponiéndolo sobre el mismo.
17012	P	¿Uno paralelo?
17013	Brock	Sí, Ah, perpendicular, sobreponiéndolo sobre sí mismo. Y luego sobrepusimos otra vez este doblez [n], sobre sí mismo. Nos formó otro doblez [l, Imagen 121 d] que era perpendicular a este [señala el doblez n] y paralelo con este [señala el doblez m] y eso lo dice el hecho geométrico perpendiculares-paralelos, nos basamos en ese hecho geométrico.

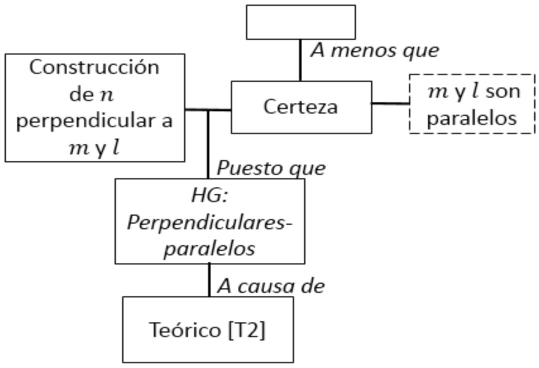
En el trabajo propuesto por Brock y Max se distinguen dos argumentos de tipo deductivo [D]. El primero de ellos permite sustentar la perpendicularidad y el segundo el paralelismo. Respecto al primero, detallamos los datos del argumento en la construcción de los dobleces m y n, ya que se aprecia en estos el punto de partida para que Brock argumente la relación entre estos [17003, 17007]. La garantía la señalamos en el hecho geométrico *dobleces perpendiculares* que se implementó, pues Brock se vale de este para construir a m y a l, cuando dice "y lo sobrepongo sobre sí" [17003, 17007]. El estudiante da razón de la perpendicularidad entre m y n cuando explica como obtuvo a m [17011, 17013]. En consecuencia la aserción corresponde a declarar que el doblez m es perpendicular a n [17011].

El respaldo de este argumento yace en el hecho geométrico involucrado, del que se reconoce su validez dada la forma de involucrarlo al construir el doblez perpendicular [17003]. En este caso el respaldo es teórico teniendo en cuenta que consta de un elemento conceptual [T2]. El calificador modal es de plena certeza en las palabras de Brock pues no se reconoce inseguridad. Brock presenta como garantía un elemento conceptual de la clase, el hecho geométrico *Dobleces perpendiculares*, lo que hace del argumento de categoría analítica [A]. La suplementación del medio se hace total única [U] en vista de que Brock obtiene a m plegando el papel sin tener en cuenta la forma física del papel. Lo ya dicho nos lleva a catalogar el argumento como deductivo, analítico, incompleto, de suplementación total única, en el marco de una tarea de profundización [DA111101, T2UL].



Esquema 122. Argumento de Brock, perpendicularidad de $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$

El segundo argumento tiene como punto de partida la construcción de los dobleces m, n y l, bajo una configuración particular, por lo que vemos en ellos el dato. La garantía es el hecho geométrico *Perpendiculares-paralelos* en vista de que Brock sustenta cada acción del doblado de papel apoyándose en ese elemento conceptual [17001-17004]. La aserción emerge cuando Brock declara que los dobleces l y m son paralelos entre sí [17013]. El respaldo se distingue con una naturaleza teórica puesto que a partir de lo realizado con el doblado de papel materializa la garantía [T2].El refutador en este segundo argumento de Brock no se reconoce. Como calificador modal encontramos certeza, el estudiante se aprecia convencido de lo que expone. El resultado es un argumento incompleto [111101] cuyo esquema presentamos a continuación.

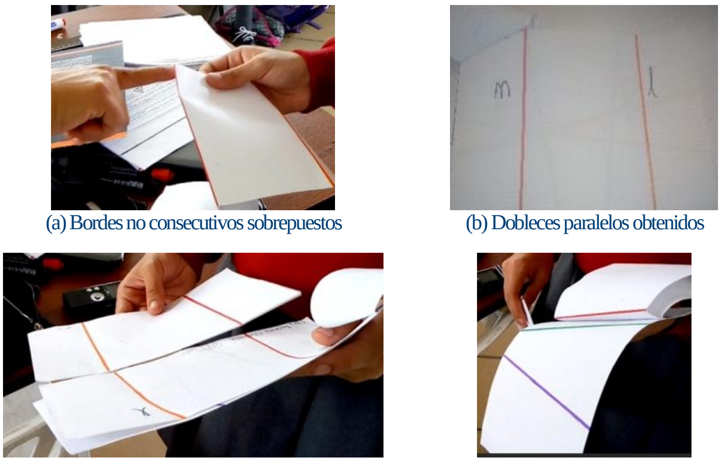


Esquema 123. Argumento de Brock. Paralelismo entre m y l

El tipo de garantía es un elemento conceptual del marco de clase, cuya relación con los demás elementos del argumento es lógica, por lo tanto el argumento es de tipo analítico [A]. La suplementación es total única [U] por el motivo descrito en el anterior análisis. Obtenemos entonces un argumento categorizado como [DA111101, T2UL].

Socialización

El profesor solicita que algunos estudiantes presenten sus propuestas voluntariamente. Pau, Jack y Julio aceptan esta invitación. La primera en pasar fue Pau, quien aseguraba de una manera particular que sus dobleces eran paralelos (Imagen 122 b). Pau sobrepone un borde de la hoja sobre sí mismo en dos ocasiones, teniendo en cuenta que queden alineados, determinando así los dobleces m y l (Imagen 122 a).



(a) Bordes no consecutivos sobrepuestos

(b) Dobleces paralelos obtenidos

(c) Prolongación de m y l en otra hoja

(d) Dobleces no paralelos

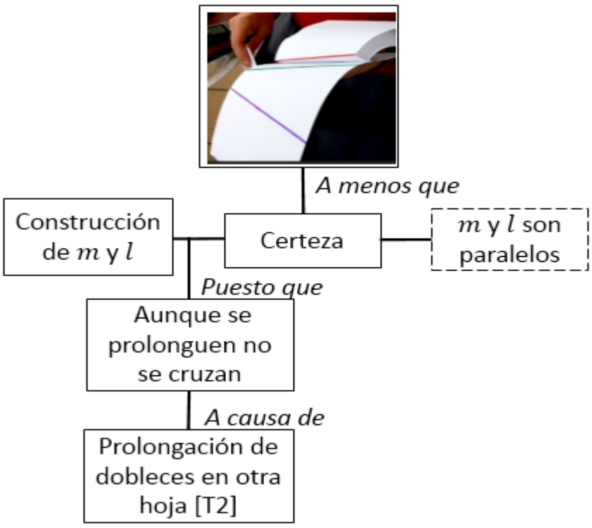
Imagen 122. Construcciones de Pau, tarea 17

Con el fin de sustentar el paralelismo entre m y l Pau elabora una prolongación de esos dobleces, la estudiante quería evidenciar de ese modo que los dobleces no se cruzaban (Imagen 122 c). Pau además de sustentar su propuesta de esta forma recurrió a lo que sería un ejemplo de dobleces no paralelos (Imagen 122 d). Presentamos la interacción de Pau y el profesor al respecto.

17014	P	¿Cómo resolvió la tarea?
17015	Pau	Pues para saber que los dobleces son paralelos es porque aun así se prolonguen, nunca se van a cruzar.
17016	P	(...) Bueno ¿Cuál doblez hizo primero? Muéstralo.
17017	Pau	Primero hice a m y después a l [pliega a m teniendo en cuenta juntar bordes no consecutivos, Imagen 122 a].
17018	P	¿Cómo hizo a m? ¿qué fue el primero? [Pau dobla la hoja por m] ¿De qué se valió para que fueran paralelos?
17019	Pau	De que no se crucen.
17020	P	[Toma la hoja y la muestra a los estudiantes] ¿Ustedes qué opinan, estos dobleces son paralelos? Si son paralelos, ¿qué tiene que cumplirse?
17021	Pau	Que cuando se prolonguen no se crucen.
17022	P	Si no lo podemos prolongar ¿Qué podemos hacer en esa hoja para que conste que esos dos dobleces son paralelos?
17023	Pau	Pues que son como rectos [señala a m y l, se refiere a la dirección de los dobleces, que sean rectos significa en la misma dirección].
17024	P	Bueno y si son paralelos ¿Qué tiene que cumplirse?
17025	Mauro	Que al prolongarse no se cruce.
17026	P	Bueno, aparte de que al prolongarse no se crucen. ¿Qué tiene que cumplirse? ¿Cómo garantiza que no se van a cruzar?
17027	Pau	Porque en otra hoja hice esta [muestra otra hoja con prolongación de m y l, ver prolongación, Imagen 122 c].
17028	P	¡Ah!, usted hizo la prolongación [de m y l]. ¿Y cuántas prolongaciones hizo?
17029	Pau	Una.
17030	P	¿Y dentro de unas 20.000 hojas [de prolongación] no se van a cruzar?
17031	Pau	No.
17032	P	¿Por qué estás tan segura?
17033	Pau	Pues, cuando se cruzan tienen que estar acá así [muestra construcción de dos dobleces no paralelos, Imagen 122 d], la línea tiene que estar como ¿Doblada? [Oblicua].
17034	P	¿Cómo hizo o de qué se valió usted para hacer m? Dígame paso a paso como hizo m.
17035	Pau	Pues cogí esto.
17036	P	¿Qué tuvo en cuenta?
17037	Pau	Que fuera recto.
17038	P	Y, ¿de qué se valió?
17039	Pau	Pues de que acá la hoja quedara bien [señala los bordes de la hoja unidos, Imagen 122 a].

Las palabras de Pau exhiben un argumento deductivo [D]. Como dato se reconoce la construcción de los dobleces m y l [17017] bajo el procedimiento ya mencionado. La garantía emerge cuando Pau asegura que los dobleces, aunque se prolonguen, no se cruzan [17027, 17028], además de que verifica este hecho construyendo prolongaciones de m y l. Con base en lo anterior Pau asegura que los dobleces presentados son paralelos [17017].

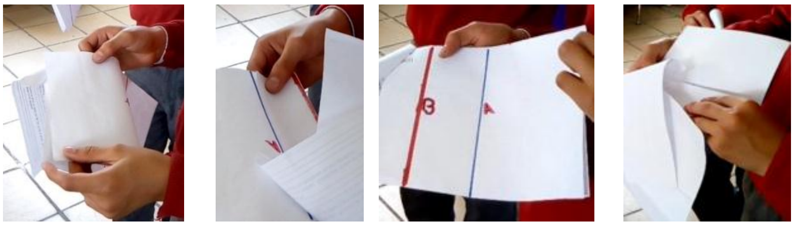
El respaldo de su argumento recae en las construcciones adicionales que realiza, donde muestra la prolongación de los dobleces construidos y así intenta convencer al profesor de la validez de su propuesta, elemento de naturaleza teórico [T2]. El refutador lo podemos reconocer en la construcción de dobleces no paralelos presentada por Pau [17033]. La estudiante expone una construcción en la que su argumento de dobleces paralelos no tendría validez. Por último, el calificador modal lo catalogamos de plena certeza, dado que la estudiante evidencia ante el profesor y sus compañeros seguridad de lo que decía. Presentamos el esquema de los elementos del argumento completo [111111] a continuación.



Esquema 124. Pau, justifica dobleces paralelos

La estructura del argumento es empírica en tanto que la garantía se fundamenta en el aspecto visual, aun cuando intenta involucrar elementos adicionales como la prolongación de los dobleces en otras hojas. Como se explicó líneas arriba, Pau señalaba la estrategia que adoptó para construir dobleces paralelos como razón válida para afirmar que sus dobleces nunca se cruzarían [E]. Por último, nos referimos al medio, el cual jugó un papel de suplementación parcial. A diferencia del argumento de Brock y Max, donde el doblado de papel fue implementado permanentemente en la producción de los estudiantes, Pau hace uso de los bordes de la hoja para iniciar su construcción con dobleces. En definitiva, obtenemos un argumento deductivo, empírico, completo, de suplementación parcial, en una tarea de profundización [DE111111, T2PL].

Ahora corresponde a Jack y Julio presentar su propuesta. Los estudiantes presentaron una estrategia para construir dobleces paralelos similar a la anterior, apoyándose para ello en los bordes del papel. Sin embargo, en esta ocasión era el borde lo que se sobreponía a un doblez ya hecho en la hoja para generar dobleces paralelos (Imagen 123 d). Julio y Jack hicieron dos construcciones idénticas, en la que evocan la definición de dobleces paralelos. Julio y Jack iniciaron la construcción generando al doblez a, para ello juntaron las esquinas de la hoja y doblaron el papel (Imagen 123 a). Tras la construcción del doblez a se sobreponía uno de estos bordes de la hoja sobre a (Imagen 123 b) y al doblar el papel se generaba el doblez b (Imagen 123 c). Veamos la interacción entre los estudiantes y el profesor.



a b c d

Imagen 123. Construcción de Julio y Jack, tarea 17

17040	Julio	Pues nosotros lo tenemos así [Imagen 123].
17041	P	Bueno ¿Qué garantiza que el doblez a y b son paralelos?
17042	Julio	Porque digamos esta es la mitad de la hoja [dobla la hoja por a].
17043	P	¿Qué tuvo en cuenta para hacer ese doblez?
17044	Julio	Que esté en la mitad.
17045	P	¿Qué más tuvo en cuenta?
17046	Jack	Que no se cruzaran.
17047	Julio	Que no fuera diagonal.
17048	P	Aparte de eso ¿Tuvo en cuenta otra cosa más?
17049	Julio	Que coincidieran estas dos esquinas [dobla el papel por a y señala dos esquinas juntas, Imagen 123 a].
17050	P	¡Ah! Listo, tuvo en cuenta eso, generó el doblez a ¿Y qué paso?
17051	Julio	Y luego de esta mitad, puse la mitad acá [sobrepone un borde de la hoja sobre a] o sea, doblé la mitad de la mitad [dobla la hoja y genera a b, Imagen 123 b].
17052	P	¿Y qué tuvo en cuenta para doblar la mitad de la mitad?
17053	Julio	Que esto quedara sobre la línea [que el borde fuera sobrepuesto al doblez a].
17054	Jack	Así [reproduce lo de su compañero en su hoja].
17055	P	¿Y que coincidiera este borde con el doblez azul?
17056	Jack	Sí.

Las ideas de Jack y Julio permiten identificar un argumento deductivo [D]. Como dato de este argumento reconocemos los dobleces [17040]. La garantía reposa en el modo en que Julio y Jack construyen los dobleces a y b [17042, 17046, 17047, 17049, 17051, 17053], puesto que los estudiantes contemplaron que las esquinas estuvieran sobrepuestas y alineadas [17049] para proveer un doblez a en el centro de la hoja paralelo a los bordes de esta [17044] y a su vez, bajo un esquema similar, generar a b, paralelo a a [17051-17054]. Con base en esto Julio y Jack asumieron que a y b eran paralelos [aserción].

El respaldo de este argumento se evidencia cuando Jack declara que los dobleces no debían cruzarse [17046], en esta ocasión este elemento es de caracter teórico [T2] que alude a un referente conceptual y sustenta lo hecho con el doblado de papel. Esta declaración acude a la definición de dobleces paralelos, que al parecer fue tenida en cuenta por Julio y Jack para realizar la construcción de los dobleces. En lo argumentado por Julio y Jack se reconoce como refutador la necesidad que el segundo doblez no sea diagonal [17047] dada la construcción del primero. Finalmente, el calificador modal se cataloga de certeza, dado que los estudiantes no se observan con dudas o inseguridad al exponer sus ideas. Presentamos el esquema del argumento, que es completo [111111], a continuación.

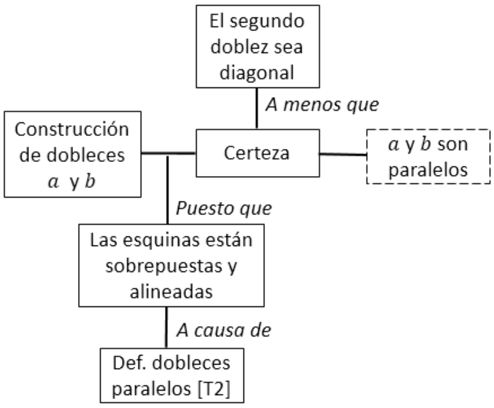


Imagen 124. Julio y Jack, dobleces paralelos.

Al referirnos a la estructura lógica señalamos una de tipo empírico [E], en tanto que la garantía está determinada por apreciaciones de los estudiantes sobre la construcción que dejan de lado elementos teóricos reconocidos en clase. Por último, la suplementación del doblado de papel es total [T], en tanto que Julio y Jack acompañaron los dobleces de papel con el recurso de hacer coincidir las esquinas de la hoja para hacer a y b, acciones posibles dada la naturaleza del medio. Como resultado de lo ya descrito se obtiene un argumento deductivo, empírico, incompleto, de suplementación total en una tarea de profundización [DE111111, T2TL].

Reconocemos que el doblado de papel en esta tarea proveyó modos específicos para que los estudiantes generaran argumentos. En el análisis de los argumentos anteriores destacamos el surgimiento de maneras particulares que involucraban al medio, para dar razones de lo que se establecía. Por lo tanto, distinguimos una configuración particular del conocimiento alrededor del paralelismo, definido por la naturaleza del doblado de papel principalmente.

Dobleces no paralelos

La segunda tarea del núcleo de paralelismo involucra dobleces no paralelos. Esta tarea es de profundización dado que recurre a definiciones de paralelismo y perpendicularidad, junto con algunos hechos geométricos recientes, los cuales se incorporarán dependiendo de las estrategias de solución de los estudiantes. El espacio del trabajo grupal se realizó en la misma sesión de clase de la tarea 17 y la socialización en la siguiente sesión. Presentamos el enunciado de la tarea.

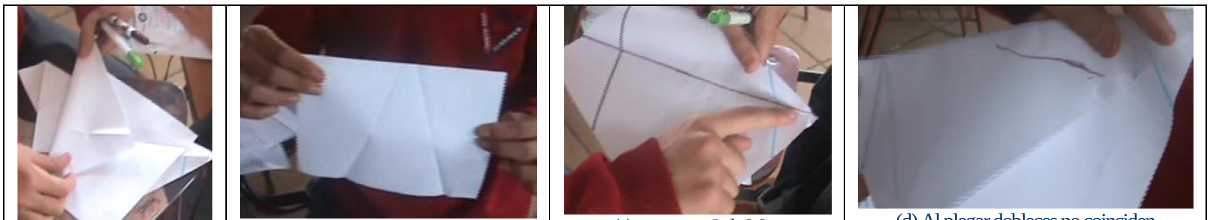
Tarea 18

Construye un doblez. Construye ahora un doblez que NO sea paralelo al primero. ¿Cómo podrías asegurar que los dobleces no son paralelos?

Trabajo grupal

En este trabajo destacamos la confrontación de ideas de Max y Brock, ambas validas a la luz de las definiciones y conceptos del marco de la clase. Max inicialmente propone dobleces perpendiculares como respuesta a lo solicitado por la tarea (Imagen 125 a), Brock le replica y le presenta dobleces oblicuos que no se cruzaban en la hoja (Imagen 125 b). Ante lo declarado por su compañero Max responde con la construcción de dobleces oblicuos que se cruzaban en la hoja. Veamos la interacción entre estudiantes y profesor.

18001	Brock	[Lee el enunciado] ¿Cómo sería la respuesta?
18002	Max	Bueno, hagamos un doblez acá, el otro doblez… [Construye un doblez y lo sobrepone sobre sí, Imagen 125 a].
18003	Brock	¡No! Paralelo, no perpendicular. Yo diría que así [pliega los dobleces y le explica, Imagen 125 b] porque al prolongar la hoja se cruzan, y la definición de dobleces paralelos es que al prolongar la hoja los dobleces no se cruzan.
18004	P	[Observaba e interviene] ¿Y la tuya, la que ibas a hacer?
18005	Max	La que yo iba a hacer profe era igual a esta [Presenta una construcción distinta, Imagen 125 c]. Ya que al sobreponerlos [quiere decir plegar el doblez, Imagen 125 d] se puede dar cuenta uno que no coinciden.
18006	P	¿O sea, estos dos no son qué? [Señala de la Imagen 125 d, un doblez que no quedaba sobrepuesto].
18007	Max	Eh, perpendiculares ni paralelos.
18008	P	¿No son perpendiculares ni paralelos?
18009	Max	Sí señor.



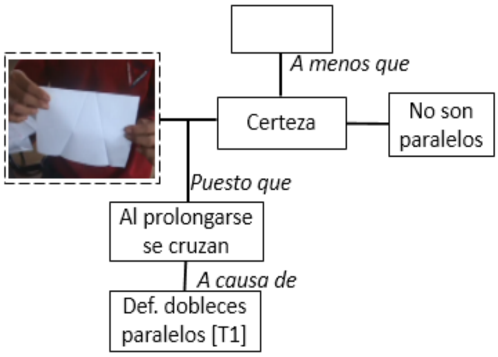
(a) Propuesta 1 de Max (b) Propuesta de Brock (c) propuesta 2 de Max (d) Al plegar dobleces no coinciden

Imagen 125. Propuestas de Max y Brock, tarea 18.

Observamos que en el trabajo de Max y Brock emergen dos argumentos de tipo abductivo [A] en vista de que se proponen configuraciones [18003, 18005] [datos] que respondan a la solicitud de la tarea [18003, 18008, 18009] [aserción] por medio de una regla general. El primer argumento es de Brock, quien ofrece como datos la construcción de los dobleces oblicuos que se cruzarían fuera de la hoja [18003]. La garantía de Brock tiene un carácter visual que consistía en afirmar que los dobleces construidos se cruzarán [18003] y por tanto se podía afirmar que tales dobleces no eran paralelos, lo que corresponde a la aserción [18003].

Brock respalda su garantía en la definición de dobleces paralelos, mencionada explícitamente en su discurso [18003], lo que traduce en un respaldo teórico [T1]. El refutador está ausente en el argumento de

Brock y el calificador modal es de certeza dada la convicción del estudiante al replicarle a su compañero [18003]. Según lo referido resulta un argumento incompleto [111101] representado a continuación.

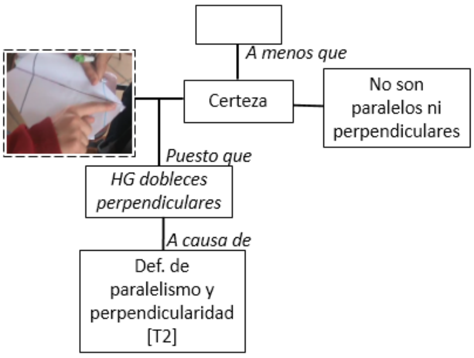


Esquema 125. Argumento de Brock, se cruzan fuera del papel

El tipo de garantía del argumento se reconoce como empírica [E] ya que se basa en lo perceptual de la construcción al establecer que los dobleces se cruzarían a partir de sus prolongaciones. La suplementación del medio se distingue como parcial [P]. Obtenemos un argumento categorizado como abductivo, empírico, incompleto, de suplementación parcial, en una tarea de profundización [AE111101, T1PL].

En el caso de Max se aprecia como dato de su argumento la construcción de los dobleces que se cruzan en el papel [18005], configuración sobre la que establece que estos no son perpendiculares o paralelos [18007, 18009]. Max exhibe la garantía al plegar uno de los dobleces (imagen 184 c) y mostrar que el otro doblez, que se asumía como no paralelo, no quedaba sobrepuesto a sí mismo (Imagen 125 d), idea formalizada en el hecho geométrico *Dobleces perpendiculares*, que para entonces era recurrente en el trabajo con doblado de papel de los estudiantes [18005].

El respaldo está presente cuando Max implícitamente recurre a las definiciones de perpendicularidad y paralelismo [18007, 18009] lo que sustentaba los resultados que había obtenido de la manipulación del papel, convirtiendo a este elemento en teórico [T2]. El refutador no se reporta en el argumento de Max, mientras que el calificador modal se reconoce como de certeza dada la seguridad que muestra el estudiante en su discurso. Lo anterior resulta en un argumento incompleto [111101] que se representa en su esquema a continuación.

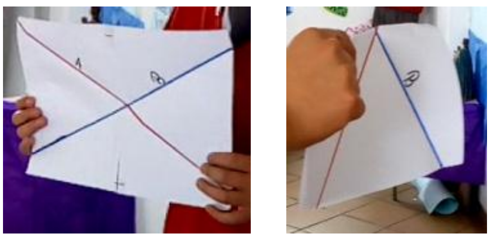


Esquema 126. Argumento de Max, no paralelos ni perpendiculares

Max acude a una garantía teórica que conforma el conjunto de elementos conceptuales formalizados en clase, que guarda además una relación lógica con los demás elementos, esto permite reconocer un argumento analítico [A]. Por otro lado la suplementación del medio se aprecia como total [T] en vista de que Max la usa para sustentar lo que argumentó. Lo anteriormente dicho resulta en un argumento de categoría [AA111101, T2TL].

Socialización

El trabajo de Marcelo y Ly consistió en hacer inicialmente un par de dobleces a y b que no se cruzaban en la hoja. Posteriormente, para no dar lugar a dudas de que no eran paralelos porque se cruzaban, los estudiantes decidieron hacer las respectivas prolongaciones de a y b en otra hoja que adicionaron a la primera con cinta pegante (Imagen 126). En la segunda hoja Marcelo y Ly representaban el cruce de los dobleces a y b, como se muestra en la Imagen 126 b. Presentamos la interacción entre estos estudiantes a continuación.



(a) Dobleces $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ (b) Construcción de prolongaciones

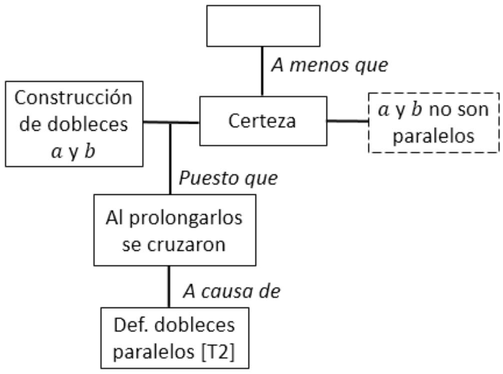
Imagen 126. Construcción de Marcelo y Ly, tarea 18

18010	P	Explícanos por favor.
18011	Ly	La tarea decía que hacer construcciones que no fueran paralelos, ¿sí? Primero construimos el rojo, el a [dobla por a]. Después el azul [b, Imagen 126 a] y pues llegó un punto en el que se unían, hicimos la prolongación y pues sí, ahí donde se unen [señala el punto donde se cruzaban a y b, Imagen 126 b], pues no son paralelos.
18012	P	Ustedes construyeron primero una sola hoja ¿Cierto? [Asienten y muestran la primera hoja de construcción. Toma la construcción de mano de Ly y dobla la hoja, [muestra a los demás la construcción] Ahí no se cruzaban ¿Sí? No se cruzaban [Imagen 126].
18013	Julio	Casi pero no.

18014	P	Entonces para librarse de dudas construyeron la otra y prolongándolos ¿Qué concluyen? Marcelo.
18015	Marcelo	Pues que no son paralelos. Porque, pues en un punto se cruzaron.
18016	P	¿Usted qué opina Rik? ¿Sí lo convence? [Rik asiente] ¿Por qué?
18017	Rik	Porque cuando se sobrepuso se cruzaron.
18018	P	Porque ¿Cuándo qué?
18019	Rik	[Balbucea…] ¡Coincide!
18020	Marcelo	¡Cual que coincide! Mire una acá y la otra acá.
18021	P	¿Qué coincide o a qué se refería? ¿Por qué lo convence esa construcción a usted?
18022	Rik	(…) No sé.
18023	P	No sabe. Mauro explícale ¿Puede?
18024	Mauro	Pues porque la definición de líneas [dobleces] paralelas es que al prolongarse no se cruzan. Y pues ahí se cruzan. Ya, no más con eso.
18025	P	¿Están de acuerdo?
18026	Marcelo	¡Sí!

En las intervenciones de los estudiantes se reconoce un argumento deductivo [D], cuyo dato corresponde a la construcción de los dobleces realizada en la hoja. La garantía se manifiesta en la evidencia que Ly provee para demostrar que efectivamente los dobleces se cruzaban en un punto [18011], la cual es de carácter visual [18015]. La aserción es pronunciada por Marcelo [18015] y consiste en asegurar que a y b no son paralelos. Esta aseveración, como ya dijimos, es fruto del trabajo previo con el doblado de papel, puesto que Marcelo la da como respuesta cuando el profesor le pregunta por lo que él podía concluir gracias a la construcción de las prolongaciones de los dobleces en una segunda hoja [18015].

Por otro lado, el respaldo se aprecia en la definición formal de dobleces paralelos que Mauro evocó [18024], que Marcelo acepta [18026] y que tipifica al elemento como teórico [T2]. La ausencia del refutador se hace evidente en el argumento de Marcelo y Ly, ya que no presentaron una situación que no permita sostener lo expuesto por ellos. El calificador modal es de certeza, en vista de que los estudiantes no evidenciaron duda o inconsistencias en el momento de sustentar sus ideas. Marcelo y Ly se expresan de modo seguro y sin vacilaciones. A continuación ilustramos los elementos del argumento incompleto [111101] en el esquema correspondiente.



Esquema 127. Argumento de Marcelo y Ly, dobleces no paralelos

La estructura lógica del argumento la catalogamos como analítica [A], en tanto que Marcelo y Ly se apoyaron en la definición de dobleces paralelos, elemento teórico disponible en clase, que a su vez relacionaron de modo acertado con la garantía y la conclusión. Por último, la suplementación es parcial [P], dado que en la producción de los estudiantes lo perceptual tiene lugar e incide en lo que finalmente declararon. Podemos decir que el argumento que emergió fue deductivo, analítico, incompleto, de suplementación parcial, en una tarea de profundización [DA111101, T2PL]. Surgieron otros argumentos como los de Pau y Mónica [DA111101, T2PL]; Jack y Julio [DA111101, T2PL] que ostentan la misma estructura y categorización argumental, por tal motivo se tendrán en cuenta para el análisis de resultados.

Por su parte Alexa y Mía acuden al *HG Dobleces perpendiculares*[10] para sustentar que los dobleces construidos eran perpendiculares y por lo tanto respondían a lo solicitado por la tarea. En la sustentación participa solamente Alexa quien de manera implícita consideró este *HG*.

Alexa parte del doblez p, de color negro y construye ahora al doblez v, de color rojo (Imagen 127). La estudiante explica su construcción partiendo de los dobleces p y v en su hoja. Alexa responde que para hacer el doblez de color rojo dobla a dicho doblez sobre el de color negro, explicación que resulta confusa, porque se parte de que el doblez de color rojo no se había construido aún. Lo que Alexa da a entender es que sobrepuso al doblez negro sobre sí y generó al doblez color rojo. Presentamos la interacción de Alexa, Marcelo, Jet y el Profesor.

18016	P	¿Cómo lo hicieron?
18017	Alexa	Hicimos primero la negra [doblez p] y de ahí sacamos la roja [doblez v, Imagen 127].
18018	P	¿Cómo sacaron al doblez de color rojo?

[10] HG Dobleces Perpendiculares: Al sobreponer un doblez sobre sí mismo se forma otro doblez perpendicular al primero

18019	Alexa	Doblando la roja encima de la negra [da por hecha la construcción. Plegaron a p sobre sí y se generó v, Imagen 127].
18020	P	[Se dirige a los demás estudiantes] Eso que generó ella ¿Qué son? Al doblar uno sobre sí mismo, ¿Qué da? A ver, Marcelo.
18021	Marcelo	¿Un doblez perpendicular?
18022	P	¿Está de acuerdo Jet?
18023	Jet	Sí.
18024	P	¿Por qué?
18025	Jet	Porque se cruzan.
18026	P	Mi pregunta era ¿Por qué son perpendiculares?
18027	Jet	Porque al sobreponerlos.
18028	P	Ah, porque al sobreponerlo. Listo, gracias.

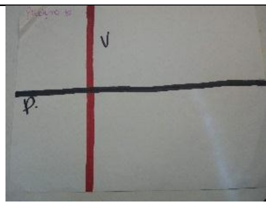
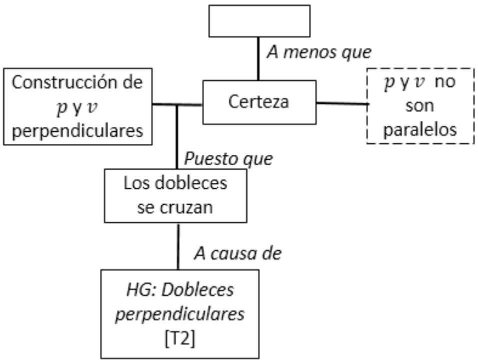


Imagen 127. Construcción Alexa y Mía, tarea 18

Las ideas de los estudiantes permiten reconocer un argumento deductivo [D]. En este caso el dato corresponde a los dobleces perpendiculares representados en la hoja de trabajo. La garantía es que los dobleces se cruzan [18025], lo que conecta la configuración de los dobleces con la aserción de que p y v no eran paralelos, lo cual se distingue entre líneas puesto que no es pronunciada por alguno de los estudiantes expositores, pero sí por Marcelo [18021] y Jet [18027].

Por otro lado, el respaldo del argumento de Alexa lo percibimos de manera no explícita en el *HG dobleces perpendiculares* puesto que la estudiante en el momento de la construcción de p y v evidencia el uso de este elemento teórico reconocido en clase [18026 y 18028], que nos permite señalarlo de naturaleza teórica [T2]. La acción de sobreponer el doblez de color negro sobre sí tiene su razón de ser en el enunciado de este hecho geométrico, brindándole así sustento al trabajo que Alexa realizó con doblado de papel. Con respecto al refutador, decimos que no tiene lugar en lo declarado por los estudiantes. Por último, el calificador modal lo reconocemos como de certeza. Ahora veamos la representación esquemática de los elementos de un argumento incompleto [111101].



Esquema 128. Argumento de Alexa, son perpendiculares, no son paralelos.

El argumento es de tipo analítico [A] en vista de que la garantía se apoya en un hecho geométrico que guarda relación con el dato y la aserción y ha sido reconocido en clase. Para terminar, acerca del medio afirmamos que ostenta suplementación total única [U], considerando que Alexa no implementa otro medio distinto al doblado de papel ni se vale de las condiciones físicas del medio sino de sobreponer dobleces para soportar sus ideas. Es por esto que el argumento se cataloga como deductivo, analítico, incompleto, de suplementación total única, en el marco de una tarea de profundización [DA111101, T2UL]. Por último el argumento de Jana se categoriza del mismo modo que el anterior de Alexa y Mía, por tanto se tendrá en cuenta para el análisis posterior de resultados [DA111101, T2UL].

Debemos mencionar que el medio dejó ver modos particulares de proveer sustento a la hora de argumentar. Cuando se explicaron las razones de no paralelismo entre los dobleces en algunos de los casos ya analizados, se observa que los estudiantes respaldan sus explicaciones con modos que involucran el doblado de papel, ejemplo de ello son las construcciones y el sustento para argumentar con el doblado de papel de Brock y Max [18003, 18005] y de Alexa y Jet [18019, 18027]. Lo anterior deja ver una estrecha relación entre las ideas elaboradas por los estudiantes y la forma en que el medio las favorece.

Particularidades de dobleces paralelos

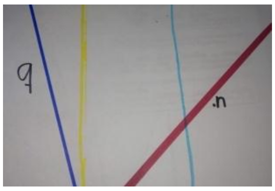
En el desarrollo de la tarea 18 se evidenciaron respuestas erróneas por parte de los estudiantes. Esta tarea era de profundización porque requería que los estudiantes acudieran a las definiciones de dobleces paralelos, dobleces perpendiculares, *HG paralelos–perpendicular* y *HG dobleces perpendiculares*, entre otros, para abordar su solución. En la sustentación de lo realizado en la tarea se reconocen argumentos en los que el medio se involucra de manera propia según su naturaleza para corroborar el no paralelismo. En algunos casos se manipula el papel y se evidencia que la construcción satisfacía los requerimientos de la tarea, en otras palabras se doblo papel para sustentar las explicaciones, lo que deja ver acciones únicas para argumentar gracias al medio.

Tarea 19

Un estudiante de la clase manifiesta que dos dobleces son paralelos si no hay un punto sobre la hoja de papel en el que se encuentren. Realiza varias construcciones para ilustrar si lo que dice tu compañero de clase es cierto o no y explica.

Trabajo grupal

Brock y Max abordan la tarea discutiendo las posibilidades que tienen de responder y explicar la situación planteada en la tarea. Brock inicialmente propone hacer dobleces que se cruzaran en un punto fuera de la hoja al ser prolongados. Max replica indicando que dependiendo de la dirección de los dobleces podría ser cierto o no lo que se afirmaba en el enunciado. Para ilustrar su idea construye dos dobleces no paralelos q y n que no se cruzan en la hoja (Imagen 128). Al intentar explicar a Brock su idea este le dice que lo solicitado por la tarea eran dobleces paralelos, dando a entender así a Max que su propuesta no era válida. Los estudiantes realizaron dos construcciones, de las cuales la primera es la de Max que ya mencionamos, en la que adicionalmente se realizaron dos dobleces paralelos. La segunda construcción es la de los dobleces p y m paralelos, realizada en otra hoja por Brock para sustentar su idea de que los dobleces debían ser paralelos (Imagen 128).



Construcción de Max

Dobleces paralelos, Brock

Imagen 128. Construcciones de Max y Brock, problema 19

Cuando el profesor se acerca al grupo y pregunta a Max por su propuesta, los estudiantes retoman el enunciado en busca de comprender lo que planteaba el mismo. Max asegura que la propiedad se cumple de acuerdo a la dirección de los dobleces cuando se construyen en la hoja, propuesta que es aceptada por Brock finalmente. Veamos ahora parte de la interacción de los estudiantes.

19001	Brock	Lo que dice tiene razón, ¿No?
19002	Max	Lo que dice el compañero es cierto [refiere al estudiante mencionado en el enunciado de la tarea].
19003	Brock	Es cierto, porque si se cruzaran serían no paralelos.
19004	Max	Escribamos [la respuesta].
19005	P	[El profesor observa sus construcciones] ¿Y la que hiciste ahorita? [construcción de q y n, Imagen 128] Esos no se cruzan sobre la hoja.
19006	Max	Ve.
19007	Brock	¡Ah, sí!
19008	P	Entonces el estudiante podría decir que esos son paralelos ¿Si es verdad eso?
19009	Max	[Medita un instante] ¡No! Porque si se alarga la hoja [señala a q y a n en la construcción, Imagen 128], profe, se cruzarían en algún punto.
19010	P	¿Entonces qué pasa?

19011	Brock	Que no es cierto.
19012	Max	Que no es cierto, ve, yo le dije. (…) Que no es cierto porque…
19013	P	¿Cierto? ¿No es cierto? ¿Depende? ¿Depende de Qué?
19014	Max	Depende de cómo estén ubicados los dobleces.
19015	Brock	No, depende de…
19016	Max	Depende hacia qué dirección vayan los dobleces.
19017	Brock	No.
19018	Max	[Toma la construcción, Imagen 128] Porque si los dobleces van así [señala a q y n], en algún momento se encuentran. En cambio, si van así [señala los dobleces paralelos, Imagen 128] nunca se encuentran.

En primera medida se puede señalar que el argumento es deductivo [D], pues se valen de representaciones gráficas y una definición establecida previamente para determinar el cumplimiento de una propiedad. En la representación de los dobleces en el papel reconocemos el dato [19005], como garantía señalamos la situación posible en la que las hojas se alarguen [19009], permitiendo corroborar la idea que se pretende defender. La aserción consta de afirmar que los dobleces q y n no son paralelos [19008, 19009]. Brock y Max apoyan su garantía [respaldo] en la definición de dobleces paralelos, evocada de manera implícita, según esta los dobleces no se deben cruzar ni aun prolongándolos [19018], otorgando de esta manera una naturaleza semiteórica al respaldo [T1].

El elemento refutador es percibido en la situación explicada por Max [19018], en la que hace alusión a las condiciones que posibilitaban asegurar que los dobleces a pesar de que no se cruzaran en la hoja, no serían paralelos. Dicha situación es una salvedad al argumento, para la cual el respaldo no tiene validez. No obstante de que Brock no muestra seguridad, Max, quien expone la mayor parte del argumento, deja ver certeza en sus palabras [19011, 19012]. Además, Max es insistente en mantener y declarar su postura, de tal modo que convence a Brock, quien finalmente consigna la misma respuesta de su compañero, tal como se aprecia en la Imagen 129. Presentamos la representación esquemática del argumento completo [111111] a continuación.

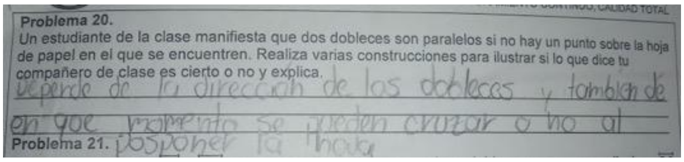
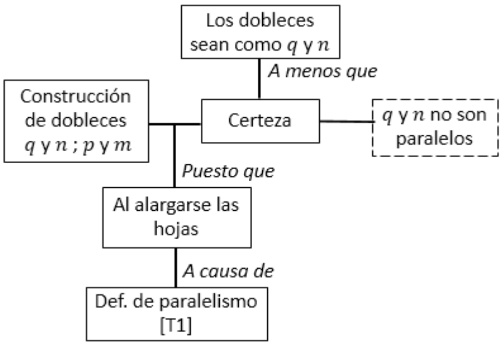


Imagen 129. Respuesta de Brock consignada



Esquema 129. Argumento de Max y Brock, enunciado falso

Max y Brock presentan una garantía empírica que involucra la prolongación indefinida de los dobleces, la cual hace catalogar el argumento como empírico [E]. La suplementación del medio la reconocemos como parcial [P] en tanto que Max y Brock sustentan sus ideas más desde lo perceptual que de lo procedimental con doblado de papel. Obtenemos un argumento deductivo, empírico, completo, de suplementación parcial en una tarea de profundización [DE111111, T1PL].

<u>Socialización</u>

En este espacio se contó con la participación de algunos estudiantes y la orientación del profesor a través de preguntas que fomentaron el análisis de las propuestas presentadas. Se reconocieron tres posturas en las intervenciones de los estudiantes, las cuales se resumen como sigue:

i. *Sí y no*. Sí, porque al ser paralelos el enunciado de la tarea sería verdadero y no, porque al ser dobleces no paralelos, se cruzarían al prolongar la hoja.

ii. *Sí, es cierto*. Si los dobleces cumplen la condición de no cruzarse en la hoja son paralelos.

iii. *No es cierto.* Aunque algunos dobleces no se crucen en la hoja, al prolongar esta se cruzaran, por lo tanto no son paralelos.

La primera postura fue presentada por Max y Brock y defendida por gran parte de los estudiantes, de los que destacamos aDanay Emilio, a quienes presentaremos en detalle más adelante. La segunda postura fue promovida por Jana, Anny y Mauro. Jana insistió al decir que el enunciado de la tarea se refería solamente a la hoja, por ende era verdadero. Por último encontramos a Mónica y Marcelo quienes con sus aportes orientados al objetivo de la tarea facilitaron concluir de manera acertada la socialización de la ideas en torno a la tarea.

Veamos a continuación la interacción de los estudiantes de modo detallado.

19019	P	¿Usted qué opina Jana? ¿Qué le respondería al estudiante de la tarea, que tiene razón o no?
19020	Jana	Sí.
19021	P	O sea, ¿Cada vez que pase eso son paralelos? [Muestra construcciones de Imagen 130].
19022	Jana	Sí, desde que no se crucen en la hoja son paralelos.
19023	P	¿Qué opinas Dana de lo que dice tu compañera? ¿Eso es verdad?
19024	Dana	Sí.
19025	P	¿Por qué es verdad?
19026	Dana	Porque en la hoja no se cruzan, pero si se prolongan...
19027	Jana	Es que los paralelos dice que al prolongarse no tienen que cruzarse, pero acá [refiere al enunciado de la tarea] sólo dice en la hoja.
19028	Jack	Profe si hacemos una prolongación se van a cruzar.
19029	P	¿Usted está de acuerdo con eso Dana? Creo que, al oírla hablar, usted está en desacuerdo. Habla por favor.
19030	Dana	Si son paralelos, si se prolongan no se tienen que cruzar, y ahí si se prolongan se van a cruzar.
19031	P	¿Entonces tiene razón el estudiante de la hoja? ¿Sí o no? Usted está contradiciendo a Jana. Jana ¿Usted qué le responde a ella? La está contradiciendo.
19032	Jana	Profe yo ya di mi opinión.
19033	P	¿Pero qué le dices a ella?
19034	Jana	Yo sigo con lo que dije.

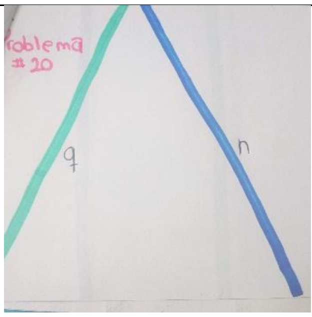
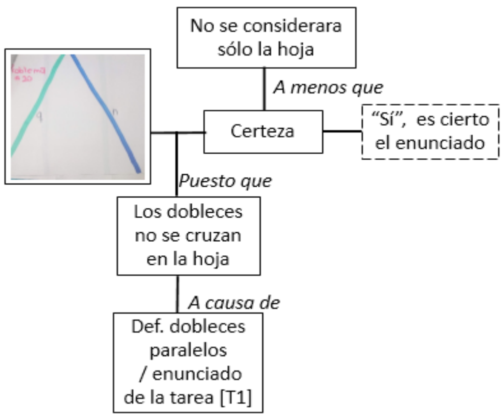


Imagen 130. Dobleces no paralelos.

Presentamos el análisis de los argumentos en orden cronológico. Analizaremos en primera medida el argumento de Jana, el cual podemos catalogar como deductivo [D], al igual que todos los demás argumentos surgidos en la socialización de la tarea, dado que en lo dicho por los estudiantes se identifica que a partir de una construcción o una declaración de otro estudiante se acude a la definición de dobleces paralelos para proveer una conclusión. Habría que decir también que la suplementación del medio fue carente [C] en general ya que los estudiantes no acudieron al doblado de papel para sustentar argumentos sino que se apoyaron apenas en representaciones gráficas.

En lo dicho por Jana se aprecia el dato del argumento en la construcción que el profesor le presenta de los dobleces q y n [19022] (Imagen 130). La garantía en el discurso de Jana corresponde al hecho de que los dobleces q y n no se cruzaban en la hoja [19027] y al enunciado mismo de la tarea que restringía la situación a una hoja de papel, lo cual le permitió aseverar que los dobleces eran paralelos y declarar por tanto al enunciado de la tarea como cierto [19020]. La aserción se reconoce entonces cuando la estudiante afirma que los dobleces q y n eran paralelos, basada en lo que observó en la construcción (Imagen 130). Así mismo, como respaldo encontramos la definición de dobleces paralelos [19027], pues Jana tiene en cuenta la condición de que los dobleces paralelos no se cruzan para fundamentar lo que había dicho. Lo anterior nos permite reconocer una naturaleza teórica [T1] pues refiere explícitamente la deficnión.

El refutador de este argumento se aprecia cuando ella expresa que esto se debe considerar solo en la hoja [19022], aun cuando al prolongar los dobleces q y n estos se cruzarían. Finalmente, el calificador modal es de certeza en tanto que Jana declara su opinión y a pesar de las preguntas del profesor y la postura de sus compañeras decide sostener lo que había afirmado [19032, 19034]. Obtenemos un argumento completo [111111], que representamos a continuación.



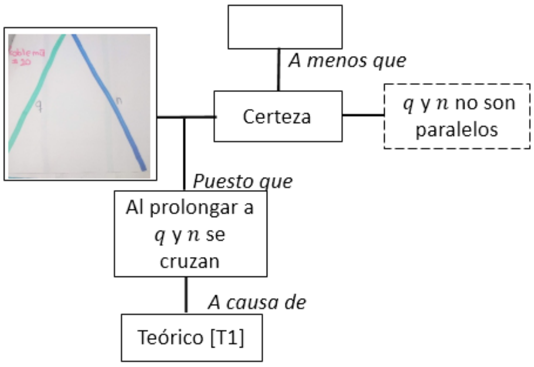
Esquema 130. Argumento de Jana, tarea 19.

A la luz de los conceptos validados en clase es posible reconocer que Jana deja de lado la condición que establece que los dobleces paralelos son aquellos que no se cruzan al prolongarse [19022, 19027]. La estudiante toma en cuenta solo la porción del plano que representa la hoja y omite que la definición de paralelos implica la prolongación de tales dobleces, por lo que el argumento se hace no legítimo [N]. De tal modo categorizamos este argumento como deductivo, no legítimo, completo, de suplementación carente en el marco de una tarea de profundización [DN111111, T1CL].

Ahora damos lugar a lo dicho por Dana quien parte igualmente de la representación de los dobleces q y n y asume que estos no son paralelos. Reconocemos en la representación gráfica el dato del argumento.

La garantía la identificamos en el hecho de que los dobleces q y n al prolongarse se cruzarían, lo que le permitió relacionar el dato con su aserción que consistió en asegurar que los dobleces q y n no eran paralelos [19030], lo que conllevaba a señalar como falsa la afirmación del enunciado.

El respaldo lo reconocemos en la definición de dobleces paralelos [19030], ya que provee sustento a la garantía de Dana, que a su vez nos lleva a señalarlo como teórico [T1]. El refutador no tiene presencia en el argumento de la estudiante, no hace salvedades a la garantía en lo que declaró. Por último, apreciamos un calificador modal de certeza puesto que no evidenciamos en el discurso deDanadudas o inseguridad de lo declarado. Obtenemos entonces un argumento incompleto [111101] cuya representación es el siguiente esquema.



Esquema 131. Argumento de Dana, tarea 19

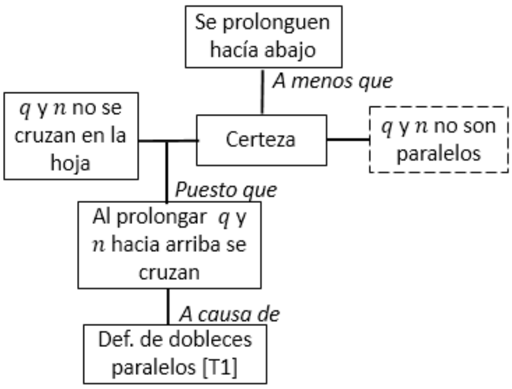
Catalogamos el tipo de garantía como empírica [E] dado que el sustento deDanafue tener en cuenta que los dobleces q y n al ser prolongados se cruzarían fuera de la hoja [19030], lo que refleja un apoyo en la percepción visual. Obtenemos según lo anteriormente dicho una categorización para el argumento como deductivo, empírico, incompleto, de suplementación carente en el marco de una tarea de profundización [DE111101, T1CL].

Al continuar con la interacción nos encontramos con el argumento de Any y Mauro, el cual es una extensión de la propuesta de Jana, según palabras de estos estudiantes. Consideremos el episodio y posterior análisis.

19035	P	Tú sostienes eso. Anny ¿Usted qué opina? ¿Está de acuerdo con Dana o con Jana? ¿Para ti estos qué son?
19036	Anny	En la hoja son paralelos porque no se cruzan. Pero si hay otra hoja y se prolongaran…
19037	Luciana	Si hubiera otra hoja más, ahí se cruzarían.
19038	Anny	Si van para arriba sí, si van para abajo no.
19039	P	Entonces ¿Estos son paralelos? ¿Estás de acuerdo con el estudiante?
19040	Anny	En la hoja sí.

19041	P	Estás de acuerdo entonces con Jana. ¿Mauro eso es verdad?
19042	Mauro	Sí, porque no se cruzan en la hoja.
19043	P	¿Cómo dice la definición de paralelos? ¿Quién la enuncia?
19044	Anny	Que la prolongarse no se cruza.
19045	P	¿Esa definición se cumple aquí? Si se prolonga el q y el n ¿Qué pasa?
19046	Anny	Se cruzan.
19047	P	Entonces esa definición que usted enuncia, con respecto a esto [construcción], ¿qué le sugiere? Mauro.
19048	Mauro	Es que ahí dice [lee en voz alta el enunciado de la tarea para todos] o sea que el estudiante [de la tarea] tiene razón porque dos dobleces son paralelos si al prolongarse no se cruzan, y ahí dice eso. Lo que dice el estudiante [de la situación del enunciado] de problema tiene razón.

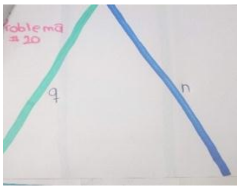
En esta interacción reconocemos un argumento deductivo [D]. El dato del argumento es la representación de los dobleces con la que el profesor apoya las preguntas hechas a los estudiantes [19035]. La garantía de Any se aprecia en el hecho de que los dobleces al prolongarse se cruzan fuera de la hoja [19036], por lo tanto no son paralelos [aserción] [19041] y por consiguiente la afirmación del enunciado era verdadera también. El respaldo se aprecia en la definición de dobleces paralelos [19043-19046], elemento conceptual que se evoca explícitamente, lo que le otorga un carácter teórico [T1]. Como refutador se evidencia el sentido de prolongación de los dobleces, hacia arriba o hacia abajo [19038]. El calificador modal es de certeza dada la seguridad de Any para expresar su argumento. Obtenemos un argumento completo [111111] que se representa como sigue.



Esquema 132. Argumento de Any, los dobleces no son paralelos

Por lo que ya hemos detallado y aclarado en el análisis de los argumentos anteriores similares a este, señalamos la siguiente categoría para este: deductivo, empírico, completo, de suplementación carente, en una tarea de profundización [DE111111, T1CL].

El profesor involucra a otros estudiantes, buscando traer a colación ideas distintas. Para ello involucra a Mónica y le formula algunas preguntas con el fin de destacar las características de cada una de las construcciones presentadas (Imagen 131). En estas se mostraban dobleces que tenían en común que no se cruzaban en la hoja, pero solamente en algunos se cumplía el paralelismo. Observemos la interacción entre estudiantes y profesor.



(a) Dobleces no paralelos que no se cruzan en la hoja

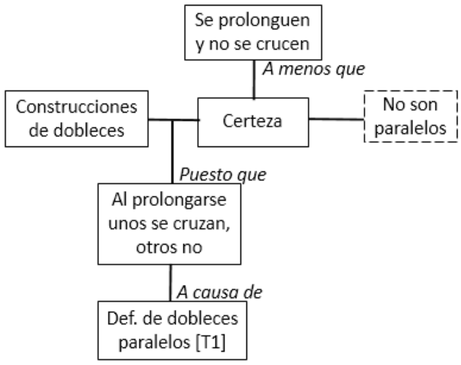
(b) Dobleces paralelos

Imagen 131. Construcciones para comparación

19049	P	¿Qué opinan ustedes de estas dos construcciones Mauro, Anny y Jana [Imagen 131 a y b]? ¿Qué tienen en común?
19050	Marcelo	Que en la hoja no se cruzan.
19051	P	No se cruzan en la hoja. ¿Qué tipo de dobleces son estos?
19052	Todos	Paralelos.
19053	P	Entonces, estos son paralelos. ¿Estos qué son? [Refiere a los dobleces de la construcción de q y n]. Tienen en común que no se cruzan en ningún punto de la hoja.
19054	Mónica	Es que si se prolongan se cruzan.
19055	P	Ah bueno ¿Entonces qué le responden al estudiante [del enunciado]? A ver Mónica.
19056	Mónica	Que es verdad porque mientras no se crucen serán paralelos, pero si en las hojas no se cruzan toca prolongar para verificar que estos no se crucen porque puede haber un lugar o punto en la prolongación donde se crucen [Lee de una hoja].

Este grupo de estudiantes en conversación elabora un argumento deductivo [D]. Percibimos el dato en las construcciones presentadas por el profesor [19049]. Posteriormente encontramos que Mónica considera dos posibilidades de dobleces que no se cruzan en la hoja, las construcciones de p y m dobleces paralelos que al prolongarse no se cruzan, junto con q y n [19049, 19053] que al prolongarse se cruzan, los cuales son el apoyo para asegurar su conclusión [garantía]. La aserción tiene lugar cuando Mónica afirma que los dobleces se cruzan [19056].

Por otro lado, el respaldo se identifica en la definición de dobleces paralelos involucrada, es decir, dobleces que se prolongan y que no se cruzan [19056], con esta se proveyó sustento a lo referido sobre los dobleces paralelos y no paralelos de los datos, lo cual deja ver un respaldo teórico [T1]. En este orden de ideas encontramos que el refutador lo expone Mónica de modo explícito cuando hace la objeción a lo que había declarado "pero si en la hoja no se cruzan toca prolongar" [19056], describiendo así una salvedad para su argumento dado que la garantía en tal caso no tendría validez. Finalmente, el calificador modal es de certeza, dado que en su discurso no se evidencia inseguridad al expresar su punto de vista. Ahora presentamos la representación esquemática de estos elementos [111111].



Esquema 133. Argumento de Mónica, paralelos a menos que se crucen

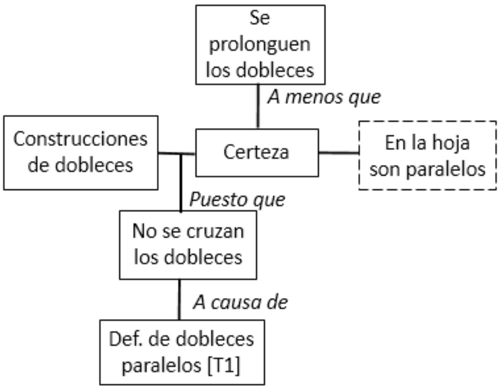
Mónica presenta una garantía determinada por la definición de paralelismo, ya que en su discurso deja ver las condiciones para que cualquier par de dobleces sean paralelos [A]. La suplementación del medio es carente [C]. Obtenemos entonces la siguiente categorización para este argumento: deductivo, analítico, completo, de suplementación carente, en una tarea de profundización [DA111111, T1CL].

Ahora corresponde a Emilio presentar su postura. Emilio se apoya de la construcción de dobleces paralelos presentadas por el profesor (Imagen 131 b). Consideremos los detalles de la interacción.

19057	P	¿Entonces qué le respondería usted al estudiante? ¿Un sí o un no?
19058	Mónica	Los dos.
19059	P	O sea ¿En ambos? Confróntenlo con la definición. Entonces tiene o no la razón el estudiante. Él [estudiante] está diciendo que estos así o así son paralelos [muestra las dos construcciones], cualquiera de los dos casos.
19060	Mauro	No profe, él está diciendo "si no hay un punto".
19061	P	¡Si no hay un punto! ¿Aquí hay un punto? [Muestra construcción de p y m] ¿Aquí hay un punto? [Muestra la otra q y n].
19062	Todos	¡No!
19063	Emilio	Más o menos.
19064	P	¿Por qué?
19065	Emilio	Él [estudiante del enunciado] está diciendo que si no hay un punto donde se crucen los dos dobleces, son paralelos. Pero la definición de paralelos es que, si se prolongan, si se cruzan, no son paralelos. Entonces prolongando la hoja va a haber un punto donde si se van a cruzar. En parte tiene razón porque en la hoja no hay donde se crucen, pero si se prolongan sí se van a cruzar.

El argumento que emerge de la anterior interacción es deductivo [D]. El dato se evidencia nuevamente en las representaciones de los dobleces presentados por el profesor [19061]. Como garantía señalamos la condición de que los dobleces no se cruzan [19065], apoyo para que Emilio declare su aserción, que se distingue cuando dice "en parte tiene razón" [19063, 19065], dando a entender que sin la existencia de un punto de cruce de los dobleces en la hoja se determina el paralelismo entre tales dobleces.

El respaldo reposa en la definición de paralelismo que le da un carácter teórico [T1] por tratarse de un elemento conceptula. En cuanto al refutador, este tiene presencia cuando Emilio menciona la excepción que tendría su argumento en el caso que se tome en cuenta la prolongación de los dobleces y estos se crucen [19065]. El calificador modal se reconoce como de certeza, sin dudas en su discurso. Obtenemos entonces un argumento completo [111111] cuyo esquema de elementos presentamos.



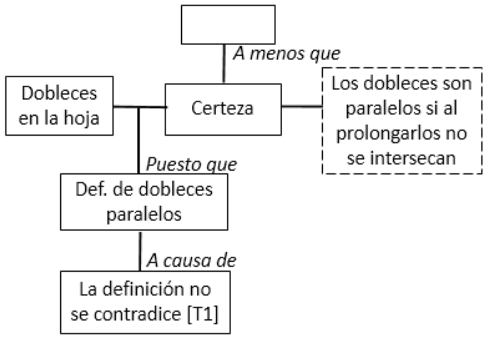
Esquema 134. Argumento de Emilio, pueden o no ser paralelos

Al pasar ahora a analizar el tipo de garantía y su relación con los demás elementos, reconocemos que el argumento es no legítimo [N]. Emilio establece: "porque en la hoja no hay donde se crucen", aduciendo que si los dobleces no se cruzan en la hoja se determina paralelismo entre estos. Esta declaración del estudiante deja de lado el caso de los dobleces q y n que no se cruzan en la hoja pero que tampoco son paralelos. Categorizamos el argumento de Emilio como deductivo, no legítimo, completo, de suplementación carente, en una tarea de profundización [DN111111, T1CL].

En último lugar presentamos la interacción de Marcelo con el profesor. El aporte del estudiante a la discusión de la clase fue determinante para concluir la socialización de las ideas en torno a la tarea 19. Marcelo deja ver un matiz de absolutismo de las ideas matemáticas involucradas en la clase, al ostentar ante sus compañeros una postura que parece apropiada de los elementos teóricos impartidos y establecidos para propiciar el desarrollo de argumentos alrededor de las tareas propuestas. Veamos el episodio y su posterior análisis.

19066	P	No podemos decir un más o menos, debemos decir sí o no.
19067	Marcelo	Profe ese niño está confundido.
19068	P	¿Quién está confundido?
19069	Marcelo	El niño de la definición.
19070	P	¿Qué me diría si yo fuera el niño?
19071	Marcelo	¿Sabe yo que le diría?
19072	P	Dígame.
19073	Marcelo	Que el día que dijimos la definición de paralelas no vino. Porque está contemplado en la definición y lo que está en la definición no se puede contradecir.
19074	P	¿Qué opinan de lo que dice Marcelo?
19075	Varios	¡Que sí!

Como los anteriores, encontramos un argumento de tipo deductivo [D]. El dato en esta oportunidad es la situación descrita en el enunciado de la tarea, puesto que a partir de esta Marcelo toma una postura. Él acude a la definición de paralelismo [19073] [garantía] y sustentado en ella da a entender que lo planteado en la tarea depende de lo que pase al prolongar los dobleces, más no de lo que suceda en la hoja, la definición tiene en cuenta la relación de los dobleces entre sí, no con el papel [19073] [aserción]. El respaldo de naturaleza teórica [T1] para Marcelo se reconoce en el carácter formal y absoluto que él da a entender de la definición, que no admite contradicciones ni ambigüedades. El refutador está ausente en este argumento de Marcelo y el calificador modal es de certeza plena, su declaración así lo advierte. Obtenemos un argumento incompleto [111101] que se representa a continuación.



Esquema 135. Argumento de Marcelo, la definición no se contradice

En cuanto a la relación lógica de los elementos del argumento evidenciamos una de tipo analítico [A]. Marcelo a la luz de la definición de dobleces paralelos discierne que lo determinante es lo que sucede con los dobleces al prolongarlos, mas no lo que suceda en el papel. Según lo anterior podemos reconocer una relación válida entre la aserción y la garantía. Catalogamos entonces el anterior argumento como deductivo, analítico, incompleto, de suplementación carente, en una tarea de profundización [DA111101, T1CL].

En el desarrollo de las tareas reconocemos una suplementación escasa del medio dados los argumentos promovidos con estas. Detallamos que el medio no jugó ni tuvo un rol particular en el surgimiento de los argumentos propuestos por los estudiantes. La actividad de cada uno de ellos resulto poco impregnada de las particularidades de la naturaleza del doblado de papel e incidencia limitada en las ideas promovidas.

¿Existen dobleces perpendiculares a dos paralelos?

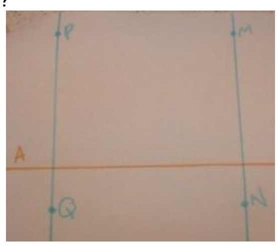
La tarea 20 es una tarea de profundización en la que se espera que los estudiantes acudan a las definiciones y hechos geométricos relacionados con dobleces perpendiculares y paralelos.

Tarea 20

Dados dos dobleces $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{MN}$ paralelos. ¿Es posible construir un doblez que sea perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ y que NO sea perpendicular a $\overleftrightarrow{MN}$? Explica tu respuesta.

<u>Trabajo grupal</u>

La interacción entre Brock y Max se desarrolla de la siguiente manera, posterior a la lectura del enunciado.

20001	Brock	Hagamos dos dobleces… ¿Cómo hacemos los dobleces perpendiculares?
20002	Max	¡Hagamos uno hermano!, ¿cuál perpendiculares?, ¡paralelos!
20003	Brock	Pues yo diría que con el hecho geométrico…
20004	Max	Paralelos, son dobleces paralelos. Pues yo diría que es imposible.
20005	Brock	Con el hecho geométrico. Lo doblo así para que quede fijo [hace dos dobleces paralelos a los bordes de la hoja].
20006	Max	Yo diría que es imposible, se supone que ahí, así como está tenemos dos paralelos o ¿no?
20007	Brock	Sí.
20008	Max	Y para que sea perpendicular toca trazar uno [doblez] por el medio [que atraviesa los dos dobleces realizados].
20009	Brock	¿Qué?
20010	Max	Para que sea perpendicular toca trazar uno por el medio [que atraviesa los dos dobleces realizados]. Y ¿la regla? bueno a pulso tocó [realiza los dobleces, Imagen 132].
20011	Brock	No, con el lápiz.
20012	Max	Ah bueno. Mire para que sean paralelos, perpendiculares ¿cuáles son los perpendiculares? Estos no [refiere a los dos dobleces realizados], ¿estoy en lo correcto o no estoy en lo correcto?
20013	Brock	Sí
20014	Max	Bueno. Digamos que este de acá es PQ, este de acá es MN, se supone que este de acá, espere, présteme otro color. [Brock le pasa un color a su compañero] Bueno, se supone que este es el perpendicular [doblez A] y estos [dobleces en color azul] son paralelos, ¿cierto?, ¿estoy en lo correcto?  *Imagen 132. Dobleces paralelos, no se puede hacer perpendicular a uno sólo*
20015	Brock	Sí.

20016	Max	Se supone que aquí, que como dice la pregunta, ¿Sigo?
20017	P	Dejamos ahí [se dirige a todos los estudiantes de la clase].
20018	Max	¿Sigo?
20019	Invest	Sigue y ya.
20020	Brock	Siga.
20021	Max	[Lee rápidamente la pregunta] ¿Es posible trazar otro doblez que sea perpendicular a PQ y que no sea perpendicular a PN [MN]? O sea, solamente tiene que pasar por PQ y no por MN.
20022	Brock	Y no se puede.
20023	Max	Entonces nunca se va a poder.
20024	Brock	En la otra [hora de clase] miramos a ver qué formas hay.

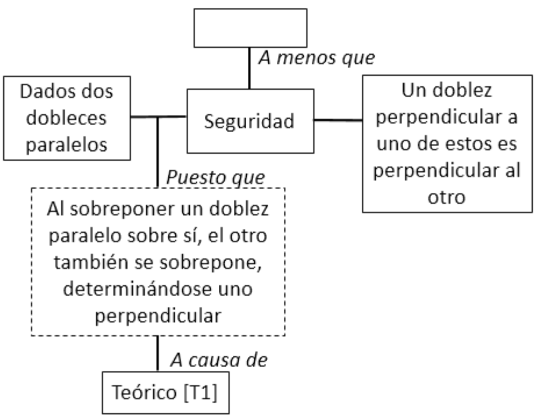
Los estudiantes salen a descanso y al regresar a clase el diálogo continuo como sigue:

20025	Brock	Íbamos en que al hacer un doblez perpendicular a PQ.
20026	Max	¿A PQ?
20027	Brock	A PQ o sea a este [señala el doblez]. Siempre el doblez perpendicular va a pasar también por el otro.
20028	Invest	¿Al pasar por este [doblez MN] también es perpendicular o no?
20029	Max	Uy no sé.
20030	Brock	¿Cuál fue la pregunta que le hizo [ella]?
20031	Max	Que si al pasar por este [PQ] también es perpendicular o no es perpendicular [a MN].
20032	Brock	¿Cómo así?
20033	Max	No sé. ¿Qué si este [doblez] es perpendicular a este [MN]? (…)
20034	Brock	Pues si porque se hizo el doblez [café]… [De manera que] se sobrepusieron los dos [dobleces de color azul y coincidieron sobre sí].
20035	Max	Por eso ahí la respuesta sería…
20036	Invest	Espérate que no se escucha.
20037	Brock	¿Yo? [Invest asiente con la cabeza]. Si porque sobrepusimos los dos dobleces entonces se creó este [doblez] el [de color] café que es perpendicular a los dos, a los dos azules [PQ y MN].

20038	Max	Entonces la respuesta sería no porque al trazar un doblez perpendicular a PQ, al doblez PQ siempre va a pasar por MN, al mismo tiempo.

Del diálogo anterior es posible reconocer un argumento de tipo inductivo [I] en tanto que los estudiantes, a partir de generar los dos dobleces paralelos propuestos en la tarea y construir uno perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ [20001] [dato], reconocen que este debe cruzarse y ser perpendicular con el doblez $\overleftrightarrow{MN}$ [20010, 20034, 20037] [garantía]. Este doblez perpendicular es obtenido al superponer uno de los dos paralelos sobre sí mismo, que a su vez lleva a que el segundo doblez paralelo se superponga sobre sí mismo, asunto que aporta evidencia a su conclusión [20027, 20038]. Con base en esto, la conclusión que establecen los estudiantes es que no es posible generar un doblez perpendicular a uno solo de los dobleces porque este doblez va a pasar al tiempo por ambos [20027, 20038] [aserción].

Reconocemos como respaldo las ideas expresadas por los estudiantes en torno a lo que veían en la construcción de los dobleces, involucrando la idea de perpendicularidad [20037, 20038], lo que da un carácter teórico a este elemento [T1]. No se evidencia refutador, debido a que no se explicitan condiciones o excepciones sobre la conclusión. El calificador modal demuestra duda inicialmente, pues aunque los estudiantes reconocen que si hacen un doblez perpendicular a PQ, este va a intersecar a MN, no expresan que estos últimos también sean perpendiculares [21029]. Posteriormente añaden que el último doblez hecho va a ser perpendicular a los dos dobleces paralelos porque su construcción se apoyó en sobreponer los dos sobre sí, afirmación en la que muestran seguridad [calificador modal] al replantear lo dicho a través de la garantía que sustentan. De esta manera el argumento expuesto es incompleto [111101].



Esquema 136. Brock y Max: no existe doblez perpendicular a solo un paralelo.

El argumento es empírico [E] debido a que la conclusión es resultado del doblez que generan los estudiantes por los dobleces paralelos. Por la misma razón, es de suplementación total [T] inmerso en una tarea de profundización [L]. Así el argumento es inductivo, incompleto, empírico, con un uso del medio total, enmarcado en una tarea de profundización [IE111101, T1TL].

Socialización

El profesor da inicio a la socialización leyendo el enunciado de la tarea e indicándole a Alex que presente y justifique su resultado, frente a lo cual se da el siguiente diálogo:

20039	P	[Lee el enunciado de la tarea] vamos a pedirle a Alex que pase por aquí y por favor nos diga que concluyeron, los demás prestamos atención, ¿cierto?...
[Estudiantes asienten con la cabeza]		
20040	P	Miramos acá por favor ¡Mauro!
[Mauro se dispone a la clase]		
20041	P	La construcción del estudiante Alex, [la presenta a la clase, Imagen 133], bueno díganos, ¿qué encontró? ¿Qué responde?
20042	Alex	Yo digo que un doblez que es paralelo a PQ no puede ser también paralelo a MN, eh perpendicular.
20043	P	Si es paralelo a… si perpendicular a uno... ¿Por qué lo dice?
20044	Alex	Porque al prolongarse [el doblez de color rojo, Imagen 133] también se cruzan [con el doblez $\overleftrightarrow{MN}$].
20045	P	Al prologarse también se cruzan [el de color rojo con $\overleftrightarrow{MN}$].
20046	Alex	Se pueden cruzar.

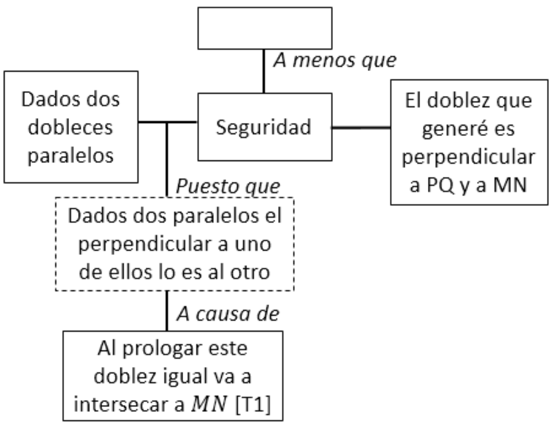
Alex no materializó correctamente las condiciones de la tarea pues él se concentró en hacer un doblez (rojo) que intersecara a $\overleftrightarrow{PQ}$ pero no a $\overleftrightarrow{MN}$ y olvidó que este debía también cumplir la condición de ser perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ como se puede observar en la Imagen 133. En todo caso, es posible notar que Alex no distingue claramente los dobleces perpendiculares de los paralelos, pues confunde estas expresiones y su idea no es fácilmente comprensible [20042].

Imagen 133. Construcción de Alex.

Reconocemos el dato de un argumento en la construcción que el estudiante exhibe al grupo [20041]. En principio podemos suponer que Alex considera que el doblez que hizo es perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ a partir de la expresión “Yo digo que un doblez que es paralelo a $\overleftrightarrow{PQ}$ no puede ser también paralelo a $\overleftrightarrow{MN}$ [corrige] eh perpendicular.”. Esto se suma a otra idea que expresa: “Porque al prolongarse también se cruzan” refiriéndose al último doblez generado y $\overleftrightarrow{MN}$. En definitiva, Alex manifiesta que no es posible hacer un doblez que sea perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ y no a $\overleftrightarrow{MN}$ [20042] porque igual este doblez va a cruzar a $\overleftrightarrow{MN}$, de lo que se percibe una idea asociada a que la intersección implica la perpendicularidad.

Por tal razón, consideramos este como un argumento inductivo [I] no legítimo [N]. En este el dato son los dos dobleces paralelos, la aserción corresponde a la imposibilidad de que un doblez perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a $\overleftrightarrow{MN}$, con $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{MN}$ son paralelos [20042]. La garantía es la regla que se reconoce, a saber, dados dos dobleces paralelos y uno perpendicular a uno de estos, entonces este debe cruzar al otro doblez paralelo [20044].

No hay evidencia de refutador en su discurso pero se reconoce que él se expresa con seguridad [calificador modal] al no dudar frente a sus ideas. Alex, al expresar que $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{MN}$ no son perpendiculares al doblez de color rojo porque al prologar este doblez que interseca a $\overleftrightarrow{PQ}$ va a cruzar a $\overleftrightarrow{MN}$, declaró el respaldo que ostenta un carácter teórico [T1]. A pesar de que la construcción de Alex no corresponde con el marco matemático de la clase para él expresa su idea con seguridad [calificador modal]. No se reporta refutador, por lo tanto el argumento es incompleto [111101].

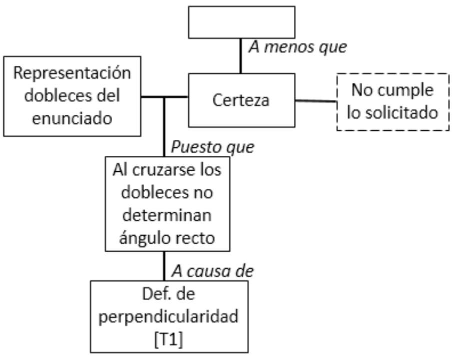


Esquema 137. Argumento de Alex, no existe doblez perpendicular a dos paralelos

En este argumento el uso del medio tuvo una presencia parcial [P] en tanto que Alex en su representación se apoyó en el doblez que generó para indicar que este intersecaba a $\overleftrightarrow{PQ}$ y no a $\overleftrightarrow{MN}$, complementando su idea con la noción abstracta (no a partir de lo que está en el papel) de que al prologar dicho doblez iba a intersecar a $\overleftrightarrow{MN}$. Este argumento es inductivo, no legítimo, incompleto con una suplementación del medio parcial inmerso en una tarea de profundización [IN111101, T1PL]. La conversación entre el profesor y estudiantes sigue como se presenta a continuación.

20047	P	Se pueden cruzar con el otro. ¿Usted qué opina de esto eh…Jet? ¿Qué opina de lo que él está diciendo?
20048	Jet	Que [el doblez de color rojo, Imagen 133] no cumple [que sea perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$], porque tiene que ser un ángulo recto.
20049	P	Que no cumple [la condición de la tarea] porque tiene que ser un ángulo recto… este de acá [el doblez de color rojo] no cumple [ser perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$].
20050	Unísono	¡No! [Expresan Los Estudiantes]
20051	P	¿Por qué es ángulo recto?
20052	Jet	Tiene que ser un ángulo recto.
20053	P	Tiene que ser un ángulo recto. ¿Sí? O sea, a qué te refieres con que tiene que ser un ángulo recto [presenta la construcción] ¿Este doblez no es perpendicular? el de color rojo [a $\overleftrightarrow{PQ}$].
20054	Mónica	¡No!

Vemos la emergencia de un segundo argumento de tipo deductivo [D] en el que el dato es la construcción de Alex [21048]. La garantía se reconoce desde lo visual, ya que se evidenciaba en la representación de los dobleces que el ángulo que determinaba el tercer dobles con $\overleftrightarrow{PQ}$ no era recto [21048, 21052], lo que llevo a Jet a declarar que la construcción no cumplía con lo solicitado [21048] [aserción]. En la definición de perpendicularidad se sustenta la garantía de Jet [respaldo], que está implícita en su discurso [T1]. Por otro lado no se aprecia refutador para lo que Jet había aducido, en cambio la seguridad de Jet permite señalar un calificador modal de certeza. Obtenemos un argumento incompleto [111101] que se esquematiza a continuación.



Esquema 138. Argumento de Jet, la construcción no cumple

Jet presenta una garantía que tiene sustento conceptual en la definición de perpendicularidad, por tal motivo el argumento se es analítico [A]. El doblado de papel muestra una suplementación carente ya que

Jet no acude al uso del medio para proveer sustento a su argumento, lo ya dicho nos resulta en un argumento [DA111101, T1CL].

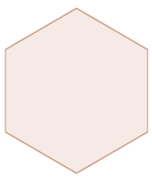
La tarea propuesto exige una suplementación del medio total en tanto que a partir de dos dobleces paralelos, la única manera de comprobar si existe un doblez perpendicular a uno pero no al otro es a partir de la construcción de un doblez sobre $\overleftrightarrow{PQ}$ (en este caso) que al superponerlo coincida con sí mismo, situación que evidenciará de manera inmediata que con $\overleftrightarrow{MN}$ va a ocurrir lo mismo, algo similar a superponer simultáneamente ambos dobleces paralelos. Esto llevaría a establecer una postura negativa a la pregunta formulada, dado que si existe un doblez perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ también los será a $\overleftrightarrow{MN}$. No es de suplementación única porque esta situación es posible resolverla con distintos elementos en otros medios de trabajo.

TAREA FINAL

Esta clase inicia con la intervención del profesor, quien les solicita a los estudiantes leer la definición de hexágono regular que aparece en la hoja de problemas. Esta definición está acompañada de una representación gráfica y cuatro preguntas que anteceden a la tarea final. La definición de hexágono regular se les proporcionó a los estudiantes con el propósito de que ellos recordaran y tuvieran presentes las propiedades de esta figura geométrica provistas en su definición, para que posteriormente estas pudieran ser involucradas en la construcción de un hexágono regular, momento en el que se esperaría el establecimiento de una conexión entre estas ideas y los elementos formalizados en clase.

Reconociendo que tal vez algunas propiedades del hexágono regular asociadas a congruencias, perpendicularidad y paralelismo no fueran conocidas por los estudiantes, se propusieron cuatro preguntas que permitieran evidenciar algunas de estas y guardasen relación con los cuatro núcleos abordados. La tarea presentada se puede observar a continuación:

Situación previa a la tarea

<table>
<tr><td colspan="2">NOTA: recuerda que un hexágono regular es un polígono convexo de seis lados de igual medida y sus ángulos internos son congruentes.</td></tr>
<tr><td></td><td>Discute con tu compañero las siguientes preguntas:
¿Se podrían identificar segmentos de dobleces paralelos? ¿Cuáles? Señalalos.
¿Se podrían identificar segmentos de dobleces perpendiculares? ¿Cuáles? Señalalos.
¿Se podrían identificar segmentos de dobleces no paralelos, ni perpendiculares? ¿Cuáles? Señalalos.
¿Identificas ángulos congruentes? ¿Cuáles? Señalalos.</td></tr>
</table>

Max y Brock realizan una lectura del enunciado. Como primera medida nombraron cada uno de los puntos de los vértices del hexágono (Imagen 30), posteriormente evocaron la definición de dobleces paralelos para comenzar a responder las preguntas proporcionadas. Max y Brock reconocen los lados opuestos del hexágono como segmentos de dobleces paralelos, ellos reconocen que al prologar los dobleces de cada par de segmentos opuestos no se van a cruzar. En cuanto a la pregunta sobre segmentos de dobleces perpendiculares los estudiantes consignan en la hoja de respuestas que no existen parejas de segmentos que satisfagan esto, mencionando que a pesar de que algunos segmentos se cruzan, estos no formaban ángulos de 90° grados, afirmación que establecen apoyados en el aspecto visual. Al continuar con la tercera pregunta que indagaba sobre la existencia de segmentos de dobleces no paralelos ni perpendiculares, Max y Brock tuvieron en cuenta las respuestas consignadas anteriormente, por lo tanto, aseguraron que no se apreciaba en la Imagen tales tipos de dobleces. Al respecto señalamos que los estudiantes obviaron los dobleces que determinaban los ángulos del hexágono.

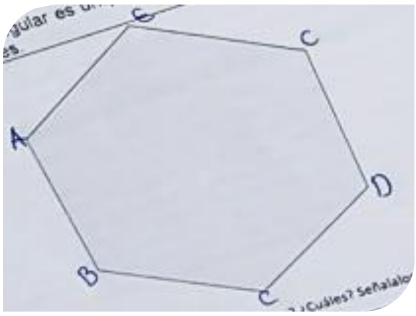


Imagen 134. Hexágono etiquetado por Brock y Max

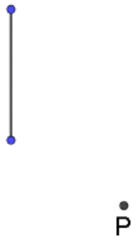
Finalmente, los estudiantes abordan la pregunta de ángulos congruentes. En ese momento Brock evoca dicha definición. Max le dice a su compañero que si los lados del hexágono son de la misma medida entonces los ángulos también lo son entre sí, Brock admite la idea y de ese modo relacionan las medidas congruentes de los lados de la figura con el hecho de que los ángulos fueran congruentes.

Esta tarea no fue socializada en grupo debido a que profundizamos con detalle en la manera de proceder de cada pareja de trabajo, exigiendo que justificaran su construcción para así evidenciar los elementos que pusieron en juego del sistema axiomático formalizado en la clase, dada la naturaleza de la misma con diferentes caminos para abordarla. Aunque reconocemos que hubiera sido interesante realizar la puesta en común, dado que el grupo de Brock y Max no mencionó algunos dobleces paralelos o perpendiculares, que aunque no aparecen en la Imagen brindada, podrían construirse y con ello aportar más herramientas para replicar la construcción solicitada en la tarea final que se presenta a continuación:

Tarea

Inicialmente el profesor solicita a una estudiante leer el enunciado de la tarea y enfatiza en que la construcción del hexágono debía cumplir con su definición por completo. En la situación presentada se provee a los estudiantes de uno de los lados del hexágono y un tercer vértice de este, elementos que deben ser tomados como base para la construcción.

Tarea final.
A partir de lo discutido anteriormente construye un hexágono regular por medio de dobleces, señalando puntos en la hoja de papel. La construcción debe incluir el segmento y el punto de la hoja.



Contesta:

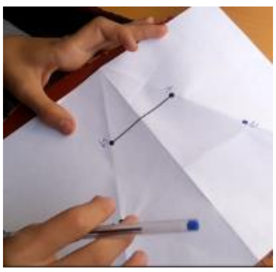
4. ¿Qué puedes decir de los ángulos y los lados del hexágono?

5. ¿Cómo puedes verificar que es un polígono regular?

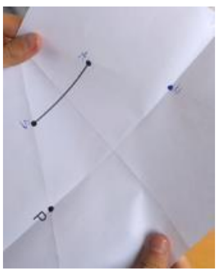
3. Enumera y describe brevemente los pasos que consideres necesarios para realizar la construcción.

Brock y Max se disponen a resolver la tarea como sigue. Fragmentamos la interacción entre estos estudiantes teniendo en cuenta momentos principales en este proceso.

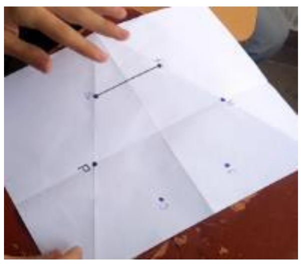
1	Max	[Nombra los puntos del segmento dado con las letras A y S] Haríamos primero un doblez que pase por S y P. Para terminarlo [el hexágono] tenemos que ubicar los puntos que estén de la misma medida y todo. Toca unir este punto con este [sobreponer al punto A en S].
2	Brock	¿Para qué así? Al revés ¿No?
3	Max	[Sobrepone al punto A en S] Bueno, al caso [al llevar al punto A sobre S se generó un doblez perpendicular al doblez que contiene $\overline{SA}$, Imagen 31 a] ¿A contraluz se puede notar el punto?
4	Brock	Muestre [toma la hoja de manos de Max y la pone a contraluz].
5	Max	¿Se puede notar el punto [P]? Ahí se puede marcar.
6	Brock	Ahí lo repisamos.
7	Max	[Toma la hoja de manos de Brock, calca el punto P y lo nombra N] Aparentemente la misma medida, pongámosle N. Ahí lo que haríamos es unir A con N con un doblez. Tenemos que hacer lo mismo para sacar A y S [se refiere a realizar el doblez NP y a contraluz obtener las imágenes de A y S]. Entonces aquí lo que haríamos sería...
8	Brock	Un doblez que pase por la mitad.
9	Max	Por la mitad, o sea, por P y N [construye el doblez PN, Imagen 31 b].
10	Brock	Ahí.
11	Max	Ponemos a contraluz para poder sacar los puntos restantes [calca los puntos A y S y obtiene a J y F, Imagen 31 c]. (...) Los nombramos.
12	Brock	Póngales J y F.



(a) Doblez generado al llevar a ***S*** sobre ***A***



(b) Doblez que contiene a ***P*** y ***N***

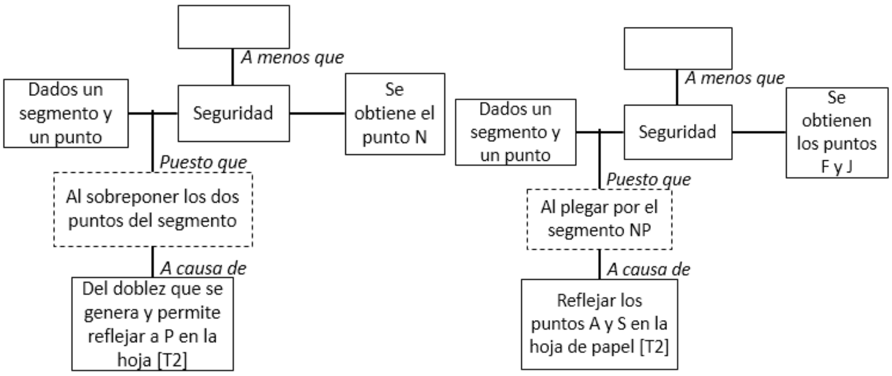


(c) Puntos ***J*** y ***F*** obtenidoa a contraluz

Imagen 135. Construcciones trabajo final Max y Brock

De esta primera parte de la interacción es posible notar un argumento de tipo inductivo [I] en la forma de proceder de los estudiantes para determinar los vértices restantes del hexágono. Brock y Max parten de lo dado por la tarea es decir del segmento y el punto [datos] y a través de poner la hoja a contra luz [3, 7, 11] [garantía] hallan los vértices del hexágono [7, 12] [aserción], empleando implícitamente ejes de simetría que aunque ellos no refieren con este nombre saben que plegar por determinados dobleces les generara otro puntos y vértices a igual distancia del doblez que calcan y el que emplearon para reflejar la imagen [5, 6, 9] [respaldo], tal acción con el papel corresponde a un respaldo teórico apoyado en el medio [T2].

En esta interacción no se reconoce refutador en el argumento dado que Brock y Max acogen la idea de obtener los vértices tras luz y no mencionan otra manera de hacerlo. Por esta misma razón, se evidencia credibilidad en su forma de proceder, lo que demuestra seguridad [calificador modal] en la obtención de los puntos. Así este argumento es incompleto [111101] como se puede a preciar en seguida. Argumento que consta de dos partes que presentamos en diagramas distintos:



Esquema 139. Brock y Max obtienen los vértices del hexágono por medio de ejes de simetría.

Este argumento es de tipo empírico [E] debido a que los estudiantes se apoyaron en la visualización de los puntos en la hoja para reflejarlos por ejes de simetría, tras luz. Con un uso del medio total [T] debido a que no solamente se apoyaron en la hoja de papel para generar los puntos del hexágono, sino que también acudieron a una manera ingeniosa y propia de las características del uso de este medio como el hecho de duplicar la información dada a través de la trasparencia que se obtiene al observar la hoja plegada a través del reflejo de la luz. Inmerso en una tarea de profundización. Luego, el argumento es inductivo, empírico, incompleto, de suplementación total perteneciente a una tarea de profundización [IE111101, T2TL].

Brock y Max continúan su proceso de construcción del hexágono como sigue:

13	Max	J y F [los nombra así]. Y hacemos tres dobleces para completar este, para (...) completar el hexágono, [construye los dobleces NF, FJ y JP] por FN, JF y por PJ. Ya, podemos contestar las preguntas [Imagen 32]. [Toma la hoja para escribir las respuestas y lee] ¿Qué puedes decir de los ángulos y los lados del hexágono?
14	Brock	Que son congruentes entre sí.
15	Max	Que todos son congruentes entre sí. ¿Y por qué? Porque tiene la misma medida.

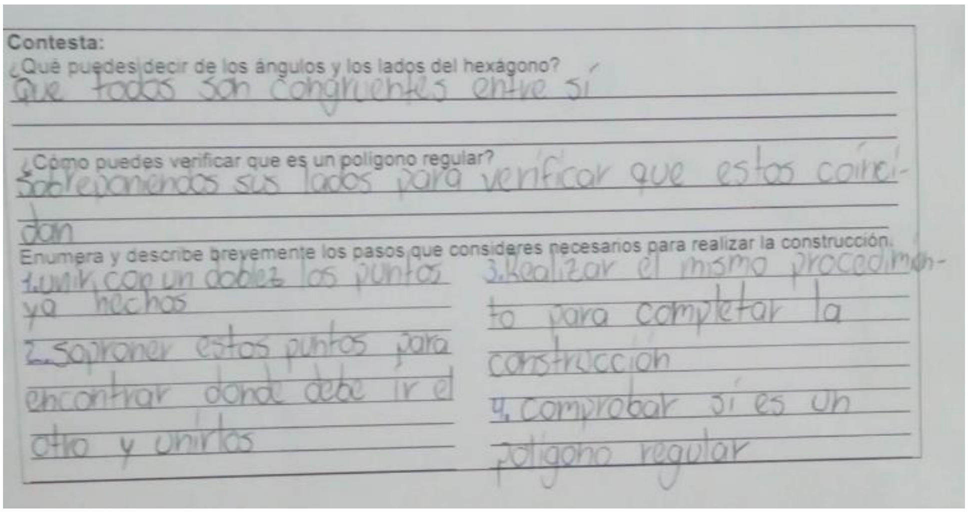
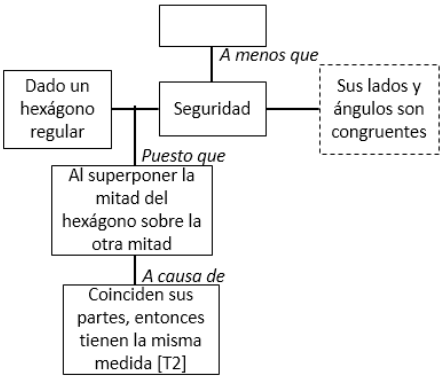

Contesta:
¿Qué puedes decir de los ángulos y los lados del hexágono?
Que todos son congruentes entre sí
¿Cómo puedes verificar que es un polígono regular?
Sobreponiendos sus lados para verificar que estos coinci-dan
Enumera y describe brevemente los pasos que consideres necesarios para realizar la construcción.
1. unir con un doblez los puntos ya hechos
2. Sobreponer estos puntos para encontrar donde debe ir el otro y unirlos
3. Realizar el mismo procedimien-to para completar la construcción
4. comprobar si es un polígono regular

Imagen 136. Respuestas de Brock y Max, tarea final.

En la intervención de Max es posible reconocer un argumento de tipo deductivo [D] al responder a la primera pregunta de la tarea en tanto que él parte del hexágono construido [datos], para asegurar a través de la superposición de una mitad del hexágono en la otra mitad [13] [garantía] que los lados y ángulos de este tienen la misma medida [14, 15] [aserción]. Max al reconocer que al sobreponerse los lados y ángulos deben coincidir, empleando implícitamente la definición de congruencia de segmentos y de ángulos evidencia el respaldo, que es teórico [T2] al elemento.

En el argumento no se reporta refutador. A partir de la manera como Brock y Max asumen la respuesta a la pregunta se puede decir que están seguros [calificativo modal] de su afirmación pues responden de manera inmediata, comparten su respuesta y la justifican. Por tanto, el argumento es incompleto como sigue [111101]:



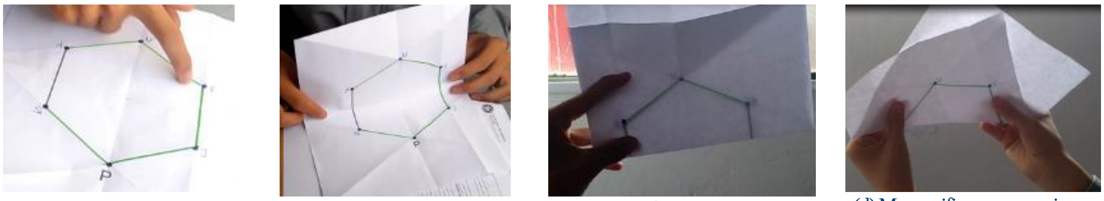
Esquema 140. Brock y Max los lados y ángulos del hexágono son congruentes.

Este argumento es empírico [E] porque es cuando los estudiantes hacen coincidir la mitad del hexágono con la otra mitad que prueban que los lados y ángulos son congruentes. Con una suplementación del medio total [T] que se apoya en el reflejo de la luz en el papel plegado para determinar si los lados y ángulos coinciden. Argumento perteneciente a una tarea de profundización [L]. Este argumento es deductivo, empírico, incompleto, con una suplementación total del medio, de una tarea de profundización [DE111101, T2TL].

Brock y Max continúan abordando las preguntas de la tarea y se presenta el siguiente diálogo:

16	Brock	¿Cómo puedes verificar que es un polígono regular? Un polígono regular es que todos tienen la misma medida, entonces pues… tocaría sobreponerlos y si coinciden sería un polígono regular. Hacemos un doblez así [se refiere sobreponer los puntos A sobre S y F sobre J respectivamente, Imagen 33 a] y tendría que coincidir este segmento [señala al $\overline{AN}$] y este segmento [señala al $\overline{FN}$] con este segmento [señala al $\overline{PJ}$] y este segmento [señala al $\overline{SP}$. Realiza el doblez, Imagen 33 b]. Ahí se puede dar cuenta que sí coincide [verifica congruencia a contraluz, Imagen 33 c]. Luego esto acá así [alterna el modo de plegar para verificar los otros segmentos: $\overline{SP}$ con $\overline{PJ}$, $\overline{FN}$ con $\overline{AN}$], que tendría que coincidir.
17	Max	Entonces [toma la hoja de manos de Brock] sería doblarlo así [dobla y pone a contraluz, repite lo hecho por su compañero], ya estarían los ángulos congruentes y los lados también. Para poder sacar si estos también son congruentes, $\overline{SP}$ y $\overline{NF}$, entonces sería…
18	Brock	Una diagonal.
19	Max	Trazar un doblez diagonal que pase por A y por J y al ponerlo a contraluz [pone a contraluz, Imagen 33 d].
20	Brock	¡Coincidan!
21	Max	Coincida.
22	Brock	¿Y entonces?
23	Max	Ya descubrimos que $\overline{PS}$ y $\overline{NF}$ son congruentes, ahora haríamos el mismo procedimiento con $\overline{AN}$ y $\overline{PJ}$. Tendríamos que pasar un doblez diagonal que pase por S y F [dobla el papel por S y F, pliega y comprueba a contraluz que eran congruentes]. Bueno ahí da congruente, entonces ya se puede afirmar que es polígono regular.
24	Brock	[Lee la pregunta y responde] entonces ¿Cómo puedes verificar que es un polígono regular? Sobreponiendo todos sus lados o todos sus…
25	Max	Sobreponiendo.
26	Brock	¿Sus segmentos?
27	Max	(…) Yo diría que trazando dobleces de punto a punto [diagonales] para verificar si los, si los, si los demás lados son congruentes.

28	Brock	Pues no [duda de lo dicho por Max e intenta replicarle], porque vea, o ¿Sí?
29	Max	¡Sí! Sería, o bueno, sobreponiéndolos para ver si coinciden y tienen la misma medida.
30	Brock	Sobreponiéndolos [escribe la respuesta que le dicta Max], ¿Sobreponiendo qué? ¿Sus lados?
31	Max	Sus lados, para verificar.
32	Brock	Que estos coinciden.



(a) Brock señala segmentos a sobreponer

(b) Brock construye doblez

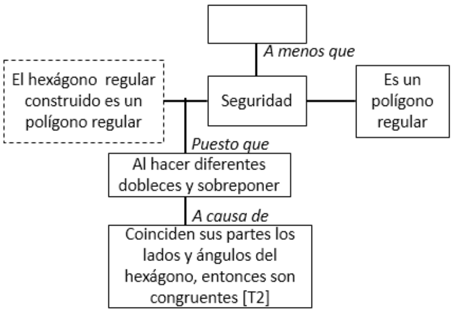
(c) Brock verifiaca conngruencia por medio de contraluz

(d) Max verifica congruencia por medio de contraluz

Imagen 137. Brock y Max comprueban que el hexágono es regular.

En las anteriores líneas de interacción reconocemos que los elementos de argumento que emergieron ostentan un carácter abductivo [A], debido a que Brock y Max cuentan inicialmente con la regla general que es la definición de hexágono regular, además saben que la tarea les solicita obtener por medio de dobleces un hexágono regular. Los estudiantes elaboran un polígono que cumple con la definición, pero ahora deben devolverse en el proceso realizado para probar que en efecto el polígono obtenido es regular.

Brock y Max parten del hexágono construido [datos] para mostrar a través de la superposición de lados y ángulos de este [16, 17, 27] [garantía] que su elaboración en efecto es un polígono regular [aserción]. Afirmación apoyada en el hecho que, al sobreponer las partes del hexágono, coincide lo que da evidencia del uso de segmentos y ángulos congruentes [24, 25] [respaldo], lo que traduce en un respaldo teórico avalado por el doblado de papel [T2]. El refutador es un elemento ausente, en tanto que Brock y Max no refieren en su discurso posibles condiciones de la elaboración de dobleces o marcación de puntos del polígono solicitado para hacer de este uno no regular. En otras palabras, los estudiantes no contemplaron posibles excepciones en lo que construyeron para decir que su hexágono no satisfacía las condiciones solicitadas en la tarea. Finalmente, el calificador modal demuestra de certeza dado que tanto Brock como Max evidencian seguridad cuando sustentan las razones de lo que hacen [16, 17, 18, 19 y 20] en el modo en que lo declaran. El argumento es incompleto [111101] veamos la representación de los elementos descritos:



Esquema 141. Argumento de Brock y Max, el hexágono es regular

Este argumento es analítico [A] porque los estudiantes deben tener en mente la definición de hexágono regular para asegurar que el polígono realizado cumple con lo solicitado por tanto acuden a probar congruencias a través de superposiciones. Aunque los estudiantes en ningún momento refieren a la definición de hexágono, la tienen presente en su proceso de comprobación. Brock y Max idearon plegar el papel por mediatrices y diagonales de este, para comparar longitudes de segmentos y por ende la congruencia de estos, dándole presencia en varios momentos a los elementos conceptuales de la definición. Por esto mismo, la suplementación del medio fue total [T] además que ellos recurren al doblado de papel y toman en cuenta propiedades de la naturaleza de este como la traslucidez para verificar su construcción que sus lados y ángulos coinciden. Dado lo anteriormente descrito, catalogamos el argumento como abductivo, analítico, incompleto, de suplementación total, en el marco de una tarea de profundización [AA111101, T2TL].

Enseguida el profesor se acerca al grupo y solicita a Brock y Max que expliquen la construcción propuesta. En ese momento el profesor preguntó por la relación entre los elementos teóricos adoptados en clase y la ruta de solución propuesta por ellos.

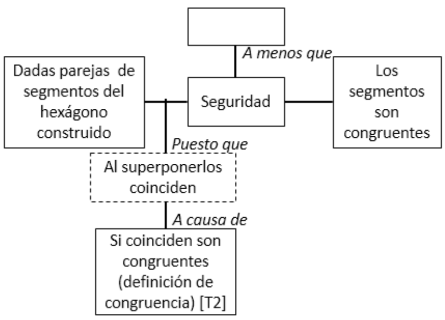
33	P	¿Este hexágono es regular?
34	Max	Sí [Brock asiente].
35	P	¿Por qué puedo decir que es regular?
36	Max	Porque [lo interrumpe Brock].
37	Brock	Porque al sobreponer sus lados, sus dobleces, todos coinciden y sus ángulos también.
38	P	A ver, ¿Cómo puedo demostrar yo que este $\overline{AS}$ [señala el segmento en la hoja, Imagen 34] es congruente con los otros?

Imagen 138. Profesor pregunta por la congruencia de $\overline{\boldsymbol{AS}}$ respecto a los demás.

39	Max	Pues tendría que ser congruente con $\overline{FJ}$, entonces nosotros lo que hicimos fue hacer un doblez que pase por N y P la cual es la mitad y al sobreponerlos [realiza lo que dice] y ponerlos contraluz se puede notar que coinciden.

40	P	¿Pero solamente con $\overline{FJ}$ debe ser congruente? O con los demás ¿Qué relación debe tener?
41	Brock	Se supone que si es un polígono regular todos sus lados tienen la misma medida.
42	P	¿Entonces yo puedo también verificar si es congruente con $\overline{JP}$?
43	Brock	Entonces sería este con este [refiere a los lados opuestos en el polígono, Imagen 33 a].
44	P	¿Cómo lo haría?
45	Brock	Los sobreponemos así [dobla y lleva el $\overline{AS}$ sobre $\overline{FJ}$, manteniéndolos sobrepuestos, dobla y los sobrepone a $\overline{JP}$].
46	P	¿De esa misma manera puede hacer con los otros?
47	Max	Sí.

En el dialogo de los estudiantes con el profesor notamos un argumento de tipo inductivo [I] puesto que Brock y Max concluyen la regla general que todos los lados del hexágono son congruentes [aserción] a través de probar inicialmente superponiendo dos segmentos de dobleces paralelos [garantía], que luego a solicitud del profesor complementan mostrando que también coinciden los lados no consecutivos del hexágono. Determinando que pueden proceder de la misma manera para cualquier pareja de segmentos y con esto obtener la congruencia de todos los segmentos. El dato en este argumento son las parejas de segmentos del hexágono. Brock y Max no aportan otra manera de verificar que los segmentos son congruentes, pero reconocen que si al sobreponer un objeto geométrico en otro de la misma naturaleza coinciden, entonces son congruentes, lo que da evidencia del uso implícito del de la definición de segmentos congruentes [respaldo]. En vista de que se involucra implícitamente la definición de paralelismo se atribuye un carácter teórico al respaldo [T2]. En este caso no se aprecia refutador y el calificador modal es de seguridad cuando le demuestran y sostienen al profesor que los segmentos que él señala también son congruentes [45 y 47]. El argumento es incompleto [111101] como se puede apreciar:



Esquema 142. Los lados de un hexágono regular son congruentes.

Este argumento es empírico [E] debido a que se sustenta en la superposición de segmentos que se verifica de manera visual al comprobar los resultados obtenidos tras luz. Es de suplementación total [T] dado que la garantía se sustenta en el doblado de papel. Inmerso en una tarea de profundización [L]. Este argumento es inductivo, empírico, incompleto, de suplementación total en una tarea de profundización [IE111101, T2TL].

El profesor continúa realizando preguntas frente a la construcción de Brock y Max y se presenta el siguiente dialogo:

48	P	Ahora mi pregunta es ¿Cómo inició la construcción del hexágono?
49	Max	Pues la construcción...
50	Brock	¡Yo la hago! [Toma una hoja limpia e inicia de nuevo la construcción, nombran los puntos del hexágono de otro modo al que ya habían hecho].
51	Max	Nosotros empezamos primero nombrando los puntos e hicimos un doblez que pase por B y P. [Toma la hoja de manos de Brock] y después lo que hicimos fue coger y tratar de sobreponer el punto B con el punto A [dobla la hoja para llevar al punto B sobre A, Imagen 35 a].

(a) Punto $\boldsymbol{B}$ sobre $\boldsymbol{A}$ (b) Obtención del punto $\boldsymbol{S}$ (c) Hexágono obtenido

Imagen 139. Proceso de construcción de Max.

52	P	¿Se valieron de la contraluz?
53	Max	Sí señor. (...) Después de eso, lo que hicimos fue coger el punto P y en este mismo doblez y a contraluz también, mirar y ahí se puede ver el punto P [llevar a B sobre A tenía como fin calcar a P y generar a S, Imagen 35 b] y pues nombrarlo, pongámosle S. Después unimos los puntos que estaban desunidos [construye un doblez por los puntos A y S]. Aquí lo que hicimos fue el mismo procedimiento para sacar este lado del de acá [refiere a la mitad que faltaba construir del hexágono], un doblez que pase por P y S, y al ponerlo a contraluz ahí se puede observar el punto A y el punto B [pone a contraluz y al calcar los puntos A y B, obtiene a los puntos D y E]. Y como todos los anteriores, cerramos el hexágono [realiza dobleces por los puntos para formar el hexágono y repisa con un color, Imagen 35 c].
54	P	Vale. ¿Cómo podría verificar que los ángulos son congruentes? Para poder decir que ese hexágono es regular.
55	Brock	Vemos que este a contraluz, coincide.
56	P	Coloquemos números a los ángulos por favor.
57	Brock	[Coloca números] uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis, Imagen 36.

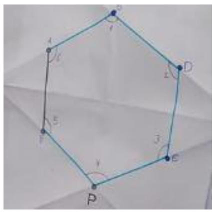


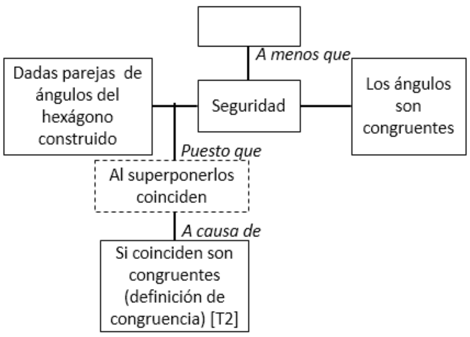
Imagen 140. Ángulos enumerados

58	P	Listo. ¿Cómo puedo demostrar con doblado de papel la congruencia de esos ángulos para decir que ese hexágono es regular?
59	Max	Pues sería lo mismo que hicimos con este [toma la hoja de manos de Brock].
60	Brock	Coincidirlos, o sea, para [hacer] coincidir este [ángulo 6] con este [ángulo 3] tendríamos que hacer un doblez diagonal.
61	Max	Pues ya no tendríamos que hacer otro doblez porque podemos usar el mismo de referencia que hicimos [se refieren al doblez hecho al llevar a A sobre B, Imagen 35 a].
62	P	Y ahí se ve ¿Qué? [Max pone a contraluz luego de haber plegado. De esa manera muestra la congruencia de los ángulos 5 y 6; 3y 2; 4y 1 respectivamente]. ¿Y así yo puedo comprobar que los ángulos 5 y 3 son congruentes?
63	Brock	Así sin la diagonal.
64	Max	Así [pliega la hoja por el doblez de los puntos P y S, Imagen 36, sobreponiendo al ángulo 5 sobre el ángulo 3, luego pone a contraluz], y ahí se podría ver que el 5 y el 3.

65	P	¿Con todos puedo hacer lo mismo?
66	Max	Sí señor.

En este argumento también se reconoce una estructura de tipo inductiva [I], de manera similar al argumento anterior en la que se probó la congruencia de segmentos, pues aquí ahora los estudiantes parten de tomar diferentes parejas de ángulos del hexágono [datos] y sobreponerlos para determinar que coinciden, tras luz [garantía]. A partir de lo que encuentran la regla general “los ángulos de un hexágono regular son congruentes” [aserción]. El respaldo se hace evidente en el momento que Max señala [59] que deben hacer lo mismo que hicieron para probar la congruencia de segmentos con la primera construcción y Brock añade que se “deben hacer coincidir” con lo que demuestran el uso implícito de la definición de ángulos congruentes, correspondiendo a un respaldo teórico [T2]. No se reporta refutador.

En este argumento es preciso notar acciones determinísticas en los estudiantes, especialmente en Brock cuando al preguntárseles frente a la manera como construyeron el hexágono, no acude a la construcción realizada sino que hace una nueva construcción que va justificando al profesor, ninguno de los dos demuestra duda y complementan sus opiniones que concuerdan con las apreciaciones y afirmaciones realizadas en los diálogos antes de la intervención del profesor. Así el calificador modal es de seguridad. Por tanto, se tiene un argumento incompleto como se ve a continuación:



Esquema 143. Los ángulos de un hexágono regular son congruentes.

El argumento es empírico [E] debido a que se sustenta en la superposición de ángulos que se verifica de manera visual al comprobar los resultados obtenidos tras luz. Es de suplementación total [T] porque está soportado en el doblado de papel. Inmerso en una tarea de profundización [L]. Este argumento es inductivo, empírico, incompleto, de suplementación total en una tarea de profundización [IE111101, T2TL].

El profesor realiza otras preguntas a la pareja de trabajo en la que presenta el siguiente dialogo:

67	P	Otras preguntas ¿ahí hay dobleces que contienen segmentos paralelos?
68	Max	¿Cómo así? Que comprobara que SA y EP ¿Son paralelos?

69	P	Sí, por ejemplo ¿Qué dobleces hay paralelos ahí que contengan segmentos paralelos?
70	Brock	Este [señala al $\overline{DE}$] y este [señala al $\overline{AB}$].
71	P	¿Cómo podría demostrar que los que usted señaló son paralelos?
72	Brock	Pues ya tenemos acá el doblez del segmento [se refiere al doblez del $\overline{AB}$, pliega la hoja por tal doblez] y este [se refiere al doblez del $\overline{DE}$, pliega la hoja por tal doblez también], entonces para comprobar que son paralelos sobreponemos estos [sobrepone cada doblez sobre sí mismo de manera simultánea].
73	Max	Ah vea [toma la hoja de manos de Brock y termina de realizar el doblado].
74	Brock	Eso por el hecho geométrico [no aclara el hecho geométrico al que está acudiendo].
75	P	Describa lo que está haciendo [le dice a Max].
76	Brock	Sobreponemos estos dos dobleces que decimos que son paralelos [en tanto Max manipula la hoja] y tienen que formar un doblez perpendicular a ellos dos para comprobar si son paralelos [se refiere al *HG 6: paralelas perpendicular: Si tengo 2 dobleces paralelos, al sobreponerlos sobre sí mismos, se genera un doblez perpendicular*]. O sea, si coinciden [se refiere a que se pueden sobreponer sobre sí mismo cada doblez y generar un solo doblez perpendicular a ambos].
77	P	¿Bueno y qué pasa?
78	Brock	Se formó este doblez que es un doblez perpendicular a estos dos dobleces [perpendicular a los dobleces de los $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ respectivamente, Imagen 37].

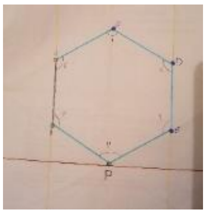
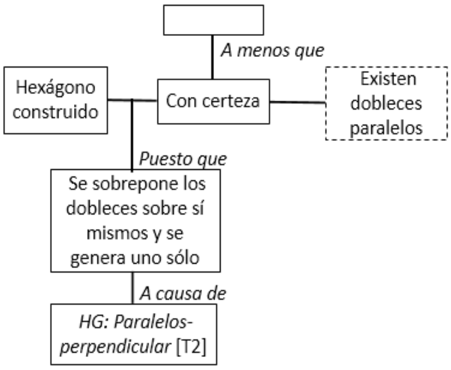


Imagen 141. Segmentos de dobleces paralelos con HG 6

Por último, apreciamos un argumento que involucra el paralelismo de los dobleces que contenían segmentos del hexágono regular. Al analizar la forma en que se relacionan los elementos de dicho argumento encontramos que es de tipo deductivo [D], puesto que Brock y Max cuentan con un dato que toman como punto de partida y por medio de una regla general como el hecho geométrico seis arriban a una conclusión.

El dato del argumento se distingue en la construcción del hexágono regular de Brock y Max dado que la pregunta del profesor fue precisamente alrededor de tal objeto geométrico [67 y 69]. Los estudiantes en ese momento de la pregunta ven la necesidad de demostrar que efectivamente existían dobleces paralelos (Imagen 37) [68], tal situación descrita es el punto de partida para elaborar el argumento. La garantía por su parte se reconoce en el trabajo inicial de Brock de retomar los dobleces que contenían a los $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ respectivamente [70], y tratar de sobreponer cada doblez sobre sí para verificar que se formaría un solo doblez perpendicular a los primeros [72], el trabajo fue completado por Max [73], sustentado por Brock [75 y 76] y constituye el puente entre el dato y la conclusión. Esta que constó en declarar que los dobleces que contenían a los $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ eran paralelos, tal afirmación les permitió llegar el trabajo de sobreponer los dobleces y obtener a su vez un único doblez [76]. En este orden de ideas el respaldo es de naturaleza teórica [T2] y se evidencia en el hecho geométrico *paralelos-perpendicular* [74] evocado por Brock e implementado por èl mismo. El refutador está ausente en el discurso de Brock y Max envista que no refieren casos o construyen con el doblado de papel situaciones o ejemplos que desvirtúen lo que ellos habían ya aducido sobre la presencia de dobleces paralelos en el hexágono regular. Por último, el calificador modal es de certidumbre, no se reconoce en la interacción de los estudiantes duda o inconsistencia en lo que afirmaron. Presentamos el esquema del argumento [111101].



Esquema 144. Argumento de Brock y Max sobre dobleces paralelos

La garantía del argumento se fundamenta en un respaldo que hace parte del marco conceptual formalizado en clase, además existe una conexión lógica entre el dato, la garantía y la aserción, luego es analítico [A]. La suplementación del medio fue total única [U] porque Brock recurrió al doblado de papel de manera exclusiva, es decir, no se valió de propiedades físicas de la hoja sino de sobreponer dobleces y plegar. Así el argumento es deductivo, analítico, incompleto, de suplementación total única, en una tarea de profundización [DA111101, T2UL].

En esta tarea los estudiantes acudieron a calcar puntos por medio del reflejo de la luz en los pliegues de la hoja para construir el hexágono regular, situación que denota una manera auténtica de proceder que no necesariamente se presenta al trabajar con otras herramientas, sino que es una característica única de la manipulación y trabajo con papel. Así el medio toma forma en el conocimiento que se construye. Las afirmaciones y maneras de proceder para presentar los argumentos se expresan de modo físico y verbal recurriendo al uso de propiedades del doblado de papel, que dejan ver un saber permeado por la implementación de tal recurso involucrado para el aprendizaje, permitiendo caracterizar los objetos geométricos de estudio de maneras distintas a la geometría euclideana. Reconocemos entonces la incidencia del medio en el aprendizaje logrado por los estudiantes cuando estos exhiben sus argumentos.