

UNA REFLEXIÓN EN TORNO AL DISEÑO Y DESARROLLO DE AMBIENTES DE
APRENDIZAJE PARA EL TRÁNSITO DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA.

ADRIANA ROCÍO CUADRADO HERNÁNDEZ
2017285009

Trabajo de grado presentado ante el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica
Nacional como requisito para optar por el título de
Magister en Docencia de la Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.
2019

UNA REFLEXIÓN EN TORNO AL DISEÑO Y DESARROLLO DE AMBIENTES DE
APRENDIZAJE PARA EL TRÁNSITO DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA.

ADRIANA ROCÍO CUADRADO HERNÁNDEZ

2017285009

Directora

CLAUDIA SALAZAR AMAYA

Magister en Docencia de la Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.

2019

“Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original de mi total autoría:
en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o
investigadores, les he dado los respectivos créditos”

(Acuerdo 031 del 2007. Artículo 42. Parágrafo 2.)



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**ACTA DE VALORACIÓN
DE TRABAJO DE GRADO**

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado **Una reflexión en torno al diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje para el tránsito de la aritmética al álgebra**, presentado por la estudiante:

**Adriana Rocio Cuadrado Hernández, Cód. 2017285009, CC.
1.010.187.218**

como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por la estudiante en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada**, con 43 puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 13 días del mes de septiembre de 2019.

JURADOS

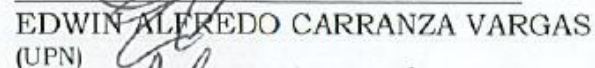
Director del Trabajo:

Profesor:


CLAUDIA SALAZAR AMAYA (UPN)


Jurados:

Profesora:


EDWIN ALFREDO CARRANZA VARGAS
(UPN)


Profesor:


PAOLA ALEJANDRA BALDA ÁLVAREZ
(Secretaría de Educación de Soacha)

	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB		Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012		Página I de 171

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado de Maestría en Profundización
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional- Biblioteca Central
Título del documento	Una reflexión en torno al diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje para el tránsito de la aritmética al álgebra.
Autor(es)	Cuadrado Hernández, Adriana Rocío
Directora	Salazar Amaya, Claudia
Publicación	Bogotá D.C. Universidad Pedagógica Nacional, 2019. 170 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	PRÁCTICA PEDAGÓGICA, DISEÑO, AMBIENTE DE APRENDIZAJE, REFLEXIÓN GUIADA, GENERALIZACIÓN, TAREA, ACTIVIDAD.

2. Descripción
<p>Este trabajo de grado presenta un proceso en el que se sistematizaron dos ciclos de reflexión guiada. Corresponde a un ejercicio investigativo de carácter cualitativo orientado por la propuesta de Smyth (1991). Esta reflexión pretendió interpelar, examinar y evaluar mi práctica en relación con el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje, que propicien el tránsito de la aritmética al álgebra con estudiantes de grado séptimo.</p> <p>Para alcanzar este objetivo, lo primero que realicé fue una reconstrucción de mis experiencias pedagógicas en torno a la implementación de actividades que promovían la interpretación de la letra como número generalizado, con estudiantes de grado octavo, como parte del proceso de introducción a temas algebraicos. Evaluadas estas experiencias obtuve unas conclusiones y reflexiones iniciales que me permitieron llevar a cabo el diseño y la implementación de una nueva propuesta, para lograr un segundo ciclo de reflexión sobre mi práctica.</p>

	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página II de 171	

3. Fuentes

Referencié los siguientes trabajos relacionados con la implementación de actividades de generalización para introducir temas algebraicos en la escuela, a saber:

Azarquiel. (1993). Ideas y actividades para enseñar álgebra. Madrid: Síntesis.

Cañadas, M., & Castro, E. (2002). Errores en la resolución de problemas matemáticos de carácter inductivo. Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas, 147 - 154.

Gobernación de Antioquia. (2006). Módulo 2: Pensamiento Variacional y Pensamiento Algebraico. Medellín: Artes y Letras Ltda.

Hernández, K., & Tapiero, K. (2014). Desarrollo del pensamiento algebraico a partir de la generalización de patrones gráficos - icónicos en estudiantes de la educación básica primaria. Universidad del Valle.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias Matemáticas. Bogotá.


Mora, L. (2012). Álgebra en primaria. Programa de Transformación de la calidad Educativa. Ministerio de Educación Nacional, 1-24.

Smyth, J. (1991). Una Pedagogía Crítica de la práctica en el aula. Números, 275 - 300.

Trujillo, P. (2008). Proceso de generalización que realizan los futuros maestros. Granada, España.

Vergel, R., & Rojas, P. (2018). Algebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula. Bogotá: Universidad Distrital.

Villa, J. (2006). El proceso de generalización matemática: Algunas reflexiones en torno a su validación. Tecno Lógicas, 16, 139 - 151.

	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página III de 171	


4. Contenidos

Este documento se encuentra estructurado en seis capítulos, a saber: (i) Contextualización inicial, (ii) Primer ciclo de reflexión, (iii) Segundo ciclo de reflexión, (iv) Aspectos metodológicos, (v) Reflexiones y (vi) Conclusiones.

El primer capítulo presenta una contextualización inicial a partir de las experiencias profesionales y búsquedas conceptuales que me permitieron definir los objetivos que enmarcan el desarrollo de este trabajo.

En el segundo capítulo se describen las cuatro fases que componen el primer ciclo de reflexión. La primera fase es la reconstrucción de mi experiencia pedagógica (a través de la elaboración de unas notas del profesor) relacionada con el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje para favorecer la transición de la aritmética al álgebra con estudiantes de grado octavo. En esta reconstrucción de mi experiencia se describen tres propuestas implementadas en diferentes años escolares y en las que usé tres contextos distintos (la electrónica, el álgebra geométrica y los procesos de generalización) para propiciar la interpretación de la letra y la transición de la aritmética al álgebra. La segunda fase es la sistematización de la información (recogida en las notas del profesor) en una matriz adaptada de la propuesta de reflexión guiada de Smyth (1991). Esta matriz incluía las categorías: aspectos conceptuales del profesor, técnicas e instrumentos, gestión y discurso en el aula y valoración del aprendizaje. La tercera fase fue el examen, la evaluación y el análisis de mis experiencias a partir de las categorías propuestas por Smyth (1991). Finalmente, la cuarta fase de este ciclo es la elaboración de conclusiones y recomendaciones para diseñar e implementar una nueva propuesta.

El tercer capítulo presenta el segundo ciclo de reflexión. En este ciclo se llevaron a cabo tres fases correspondientes al diseño, implementación y evaluación de una propuesta pedagógica que promoviera la transición de la aritmética al álgebra. En relación con el diseño se presentan: las tareas que se seleccionaron para los estudiantes, la justificación de la selección de estas tareas a la luz de referentes didácticos y teóricos, la organización de las tareas en el marco del currículo

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Educación de Calidad</i>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página IV de 171	

propuesto por la Institución Educativa Departamental Antonio Nariño, los objetivos de aprendizaje y las posibles soluciones a las tareas. También fueron explicitados en este capítulo los aspectos para la implementación de la propuesta y las técnicas para la recolección de información al momento de su implementación. Además, se expone la manera de sistematización de la información y se declaran los resultados de la evaluación de la experiencia a partir de la propuesta de reflexión guiada de Smyth (1991). Por último, se presentan resultados generales de este segundo ciclo de reflexión.


El cuarto capítulo describe los aspectos metodológicos que orientaron este trabajo de grado. El quinto capítulo recoge las reflexiones producto de los dos ciclos de reflexión sobre mi práctica que me permitieron interpelar, examinar y evaluar mi práctica pedagógica en relación con el diseño de ambientes de aprendizaje que promovieran la transición de la aritmética al álgebra y finalmente, el sexto capítulo presenta las conclusiones de este trabajo.

5. Metodología

La metodología de este trabajo se enmarca en la investigación cualitativa. Es una reflexión sobre mi práctica, orientada por el trabajo de Smyth (1991). En este trabajo interrogué mi práctica por medio de preguntas relacionadas con las siguientes categorías: aspectos conceptuales del profesor, las técnicas e instrumentos, la gestión del profesor en el aula, el discurso y la valoración del aprendizaje.

Este marco de referencia me condujo a desarrollar dos ciclos de reflexión: el primero consistió en una mirada retrospectiva de mis experiencias anteriores y el segundo, en una nueva experiencia de diseño de un ambiente de aprendizaje que promoviera la interpretación de la letra a partir de procesos de generalización; con el segundo ciclo se esperaba superar las dificultades encontradas en el primer ciclo.

El primer ciclo inició con la recolección de la información a través de notas del profesor relacionadas con tres momentos diferentes de mi práctica profesional, en las que situé las

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Educación de Calidad</i>	<i>FORMATO</i>	
	<i>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</i>	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página V de 171	

propuestas pedagógicas en tres contextos distintos (electrónica, álgebra geométrica y generalización de series de patrones numéricos). Tomando como referencia la propuesta de reflexión guiada de Smyth establecí una estrategia para la sistematización de la información recopilada a través de las notas del profesor y evalué las experiencias reportadas con base en cinco aspectos: conceptuales del profesor, técnicos e instrumentos, gestión, discurso y valoración del aprendizaje. A partir de esta evaluación elaboré algunas conclusiones que orientaran futuras prácticas que tuvieran el propósito de fomentar este tránsito de la aritmética al álgebra. Los resultados de este primer ciclo permitieron iniciar el segundo ciclo de reflexión encaminado a un ejercicio de diseño, implementación y evaluación de una propuesta que suscitará la interpretación de la letra en un contexto algebraico a partir de tareas de generalización.

En este segundo ciclo, a partir de seis sesiones de clase con un grupo de estudiantes de grado séptimo, registré las soluciones a tres tareas de generalización de patrones orientadas a la interpretación de la letra como número generalizado. En este trabajo registré las soluciones de las actividades realizadas por los estudiantes con fotos y algunos videos grabados en los momentos de trabajo individual, grupal (trabajo de 3 estudiantes) y conjunto (el grupo en general); además elaboré un diario de campo del profesor en el que describí algunos aspectos de la implementación de las tareas y del ambiente de aprendizaje que se favoreció.

Para el análisis respectivo construí datos, a partir de las fuentes de información, para dar respuesta a las preguntas de cada una de las categorías que constituyen una reflexión guiada. Posteriormente estos datos se analizaron a la luz de cuatro aspectos relacionados con el ciclo de reflexión guiada propuesto por Smyth (1991), a saber: descripción, inspiración, confrontación y transformación.



FORMATO

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

Código: FOR020GIB

Versión: 01


Fecha de Aprobación: 10-10-2012

Página VI de 171

6. Conclusiones

Las siguientes son las conclusiones elaboradas después de interpelar, examinar y evaluar mi práctica pedagógica en el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje que propicien, en los estudiantes de grado séptimo, el tránsito de la aritmética al álgebra:

- Las categorías propuestas por Smyth para llevar a cabo una reflexión guiada se constituyeron en una herramienta analítica apropiada para interpelar, examinar y evaluar mi práctica pedagógica, estas categorías fueron: aspectos conceptuales del profesor, técnicas e instrumentos, gestión del profesor en el aula, el discurso y la valoración del aprendizaje. A partir de ellas reconocí aspectos conceptuales que debo fortalecer, para explicitar las relaciones entre lo que quiero enseñar a los estudiantes, lo que conozco del tema, lo que debo fortalecer y el uso de material de consulta asociado.
- La construcción del instrumento *notas del profesor* en el que reconstruí mi experiencia pedagógica, en relación con el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje para la transición de la aritmética al álgebra, me permitió reconocer los argumentos que sustentaban mi práctica pedagógica.
- Diseñar y desarrollar un nuevo ambiente de aprendizaje que promoviera la transición de la aritmética al álgebra, a partir de los resultados del proceso de reflexión suscitado por el examen y evaluación de las experiencias anteriores, me permitió identificar que en mi práctica no consideraba los saberes iniciales de los estudiantes y examinar las prácticas de evaluación que gestionaba en el aula.
- Explicitar las reflexiones que me suscita el proceso experimentado en este trabajo en relación con mi práctica pedagógica me permitió identificar la manera como reflexiono sobre mi práctica pedagógica y reconocer la ausencia de algunas variables en tal reflexión. También me permitió identificar qué aspectos caracterizan este proceso y diferenciar el tipo de procesos que

	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página VII de 171	

atravesan esa reflexión: descripción, justificación, interrogación, o innovación.

- Al proponer y desarrollar tareas de generalización, fundamentadas en trabajos e investigaciones, evidencíe en mi práctica pedagógica experiencias favorables que propician en los estudiantes un acercamiento a la interpretación de la letra. En esta experiencia identifiqué que el estudiante reconoció lo que varía y cómo varía dependiendo del número de iteración en una secuencia de figuras y esto promueve un uso de la letra como variable.
- Al interpretar, examinar y evaluar mis experiencias de manera retrospectiva, logré dar sentido al trabajo algebraico por medio de procesos de generalización, debido a las habilidades de visualización y la comunicación que se favorece en los estudiantes, que no aprecié en la implementación de las actividades propuestas desde otros contextos. Al diseñar y desarrollar un nuevo ambiente de aprendizaje evidencíe una transformación en mi práctica pedagógica, debido a que implementé un proceso evaluativo que se enfocó en el trabajo y aporte de los estudiantes.
- Al reconstruir mi experiencia pedagógica en relación con el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje para la transición de la aritmética al álgebra (desde una perspectiva de aplicación en la electrónica, en el álgebra geométrica y en procesos de generalización) e interpretar, examinar y evaluar mis experiencias en forma retrospectiva, identifiqué errores en torno a mi gestión en el aula relacionadas con la interacción en la clase y el tipo de preguntas que realizaba a mis estudiantes, reflejadas en el primer ciclo de reflexión. Reconocí estas prácticas como segregadoras del conocimiento del estudiante.

Elaborado por:	Cuadrado Hernández, Adriana Rocío
Revisado por:	Salazar Amaya, Claudia

Fecha de elaboración del Resumen:	20	06	2019
--	----	----	------

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
1. Contextualización Inicial	3
1.1 Preocupación profesional inicial.....	3
1.2 Objetivos de este trabajo	6
1.2.1 Objetivo general.....	6
1.2.2 Objetivos específicos	6
2. PRIMER CICLO DE REFLEXIÓN	8
2.1 Reconstrucción de mi experiencia pedagógica en relación con el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje. Notas del profesor.	8
2.2 Sistematización de la información recogida en las notas del profesor desde una mirada retrospectiva de mi experiencia profesional.	9
2.3 Resultados del primer ciclo de reflexión	22
2.4 Recomendaciones para iniciar un segundo ciclo de reflexión	26
3. SEGUNDO CICLO DE REFLEXIÓN: EXPERIENCIA DE DISEÑO DE AMBIENTES DE APRENDIZAJE QUE PROMUEVEN LOS PROCESOS DE GENERALIZACIÓN PARA LA INTERPRETACIÓN DE LA LETRA EN PROCESOS DE TRANSICIÓN DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA.....	29
3.1. Justificación de la selección de las tareas	29
3.2. Diseño de la propuesta.....	32
3.2.1 Selección de tareas.....	33

3.2.2 Organización de las tareas y su inclusión en la estructura curricular de la IED	
Antonio Nariño	34
3.2.3 Objetivos de aprendizaje del diseño	35
3.2.4 Descripción de las tareas.....	36
3.2.5 Posibles soluciones	38
3.2.6 Referentes conceptuales para el diseño.....	46
3.2.7 Materiales para la implementación de la propuesta.....	49
3.2.8 Recolección y sistematización de la información relacionada con la implementación de la propuesta.....	49
3.3 Resultados del segundo ciclo de reflexión.....	51
4. ASPECTOS METODOLÓGICOS	61
4.1 Descripción de los ciclos de reflexión	62
4.2 Caracterización de los datos.....	63
4.3 Categorías para el análisis de los datos y descriptores	64
5. REFLEXIONES.....	67
6. CONCLUSIONES	70
REFERENCIAS.....	72
ANEXOS	73
Anexo 1: Reconstrucción de mi experiencia pedagógica en relación con el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje. Notas del profesor.	73

a) Propuesta desde el contexto de la electrónica.....	73
b) Propuesta de procesos de generalización desde el “álgebra geométrica”	80
c) Propuesta de generalización desde procesos de conteo-patrones	83
Anexo 2: Diario de la profesora, segundo ciclo de reflexión	94
Sesión 1, Actividad 1 (s1, a1):	94
Sesión 2, Actividad 1 (S2, A1).....	101
Sesión 3, Actividad 2 (S3, A2).....	107
Sesión 4, Actividad 2 (S4, A2).....	111
Sesión 5, Actividad 3 (S5, A3).....	113
Sesión 6, Actividad 3 Y Cierre (S6, A3c)	115
Anexo 3: Sistematización de datos del segundo ciclo de reflexión	118
CATEGORÍA: ASPECTOS CONCEPTUALES DEL PROFESOR	118
CATEGORÍA: TÉCNICAS E INSTRUMENTO	120
CATEGORÍA: GESTIÓN.....	122
CATEGORÍA: DISCURSO	139
CATEGORÍA: VALORACIÓN DEL APRENDIZAJE	142

ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Figura 3, actividad de los palillos, propuesta en actividad de generalización a partir del conteo de patrones.....	15
Ilustración 2. Tarea 1. Bordes	37
Ilustración 3. Tarea 2. Las Fichas.	37
Ilustración 4. Tarea 3: Los palillos.....	38
Ilustración 9. Ejemplo de solución 1 para actividad de Bordes.....	45
Ilustración 10. Figura 1, 2 y 3 de la tarea 2, las fichas.....	55
Ilustración 11. Formas de representar una operación en la actividad 3, Los palillos.	56
Ilustración 12. Representación de relación entre el número de la figura y el total de elementos que la componen desde la interpretación gráfica.....	57
Ilustración 13: Circuito electrónico en serie. Ejemplo 1.....	74
<i>Ilustración 14: Circuito electrónico en serie. Ejemplo 2.....</i>	<i>75</i>
Ilustración 15: Circuito electrónico. Ejemplo 3, uso de resistencia, bobina y capacitor.	76
Ilustración 16: Circuito electrónico con resistencias en paralelo.....	77
Ilustración 17: Gráfico ejemplo de espacio en casa.....	81
Ilustración 18. Gráfico para ejemplificar uso de medidas	81
Ilustración 19. Ejemplo de uso de imagen en libros de texto	82
Ilustración 20. Apoyo gráfico para desarrollo de actividad de patrones.....	88
Ilustración 21. Interpretación de solución figura 2.	89
Ilustración 22. Interpretación de Solución. Figura 2.....	89
Ilustración 23: Actividad 3. Los bordes	90
Ilustración 24. Actividad de aplicación 1: Los bordes.....	94

Ilustración 25. Solución 1 de Tarea 1.....	95
Ilustración 26. Solución 2 de Tarea de bordes	96
Ilustración 27. Solución 3, Tarea los bordes.	97
Ilustración 28. Solución 4, actividad los bordes.	98
Ilustración 29. Figura 2 de la Tarea los bordes.	99
Ilustración 30. Solución 5 de actividad los bordes	99
Ilustración 31. Solución 6 para la figura 5 de la tarea los bordes.	100
Ilustración 32. Solución 6 tarea los bordes.	102
Ilustración 33. Solución 7 actividad los bordes.	102
Ilustración 34. Figura 5 de la actividad los bordes.	106
Ilustración 35. Actividad 2: Las fichas.	107
Ilustración 36. Estrategia de solución 1 para actividad 2.....	108
Ilustración 37. Estrategia de solución 2 para actividad 2.....	108
Ilustración 38. Figura con 45 puntos para actividad 2	110
Ilustración 39. Figura 5 de la actividad 2.....	110
Ilustración 40. Figura 6 de actividad 2.....	111
Ilustración 41 Figura 7 de actividad 2.....	111
Ilustración 42. Representación de la figura 100 para la actividad 2	111
Ilustración 43. Figura 1 de actividad 2.....	112
Ilustración 44. Figura 2 de actividad 2.....	112
Ilustración 45. Figura 3 de tarea 2	112
Ilustración 46. Figura 3 de actividad 2.....	113
Ilustración 47. Figura 4 de tarea 2	113

Ilustración 48. Actividad 3: Los palillos	113
Ilustración 49. Figura 5 de actividad 3.....	114
Ilustración 50. Figura 5 de actividad 3.....	114
Ilustración 51. Figura 5 de actividad 3.....	115
Ilustración 52. Figura 5 de actividad 3.....	116
Ilustración 53. Propuesta de Solución de la Tarea 2, las fichas	120
Ilustración 54. Construcción de soluciones para la tarea de las fichas.	121
Ilustración 55. Construcción de un estudiante para la solución de la actividad 2, las fichas.	121
Ilustración 56. Solución de la actividad 1.....	124
Ilustración 57. Solución de la actividad 2, los puntos.....	124
Ilustración 58. Representación de la interpretación de la solución de la actividad de los bordes, interpretación en forma de pirámide.....	130
Ilustración 59. Representación de solución para la figura 4 y 5 de la tarea 2, las fichas.....	138
Ilustración 60. Socialización de solución a tarea 3, punto 3 y 4.....	135
Ilustración 61. Socialización de Solución final a tarea 3, los palillos.....	141
Ilustración 62. Formas de representar la operación para la tarea 1, los bordes.	140
Ilustración 63. Propuesta de operaciones para la solución de la actividad 2, las fichas.	140
Ilustración 64. Imagen de construcción de figuras para la actividad 2.	143
Ilustración 65. Solución puntos 2 y 3 de actividad 1.....	144
Ilustración 66. Solución Puntos 2,3 y 4 de actividad 1.....	144
Ilustración 67. Solución de la actividad 2, puntos 2, 3, 4 y 5	146
Ilustración 68. Uso de operaciones para justificación de solución de la actividad 2, punto 2....	145
Ilustración 69. Solución descrita por un estudiante para la actividad 3.....	147

Ilustración 70. Solución para la actividad 3 que involucraban operaciones.	147
Ilustración 71. Solución de la actividad 3 implementando operaciones y explicaciones de las operaciones. Parte 1	148
Ilustración 72. Solución de la actividad 3 implementando operaciones y explicaciones de las operaciones. Parte 2	148
Ilustración 73. Descripción grupal de la actividad 3, los palillos.	142
Ilustración 74. Solución del punto 4 de la actividad 2, las fichas.	143
Ilustración 75. Solución del estudiante 1 para la actividad de las fichas.	144
Ilustración 76. Solución del estudiante 2 a la actividad de las fichas.	144
Ilustración 77. Solución de actividad grupal, actividad 3, los palillos.	150

TABLAS

Tabla 1. Categorías y preguntas de reflexión guiada, adaptadas de la propuesta de Smyth (1991).	10
Tabla 2. Categoría: Aspectos conceptuales del profesor.	12
Tabla 3. Categoría: técnicas e instrumentos.....	15
Tabla 4. Categoría: Gestión del profesor en el aula.	15
Tabla 5. Categoría: Discurso en el Aula.....	19
Tabla 6. Categoría: Valoración del aprendizaje 21	21
Tabla 7. Interpretación de posibles soluciones a la tarea 1. Bordes.....	39
Tabla 8. Posibles soluciones para la actividad Los Bordes.....	44
<i>Tabla 9. Descripción de los ciclos de reflexión.</i>	<i>61</i>
Tabla 9. Categorías y preguntas de reflexión guiada, adaptadas de la propuesta de Smyth (1991)	64
Tabla 11. Actividad 1. Secuencia de puntos.....	85
Tabla 12. Actividad 2. Los palillos 87	87
Tabla 13. Interpretación de operaciones realizadas por los estudiantes para la actividad de Bordes	90
Tabla 14 Interpretación de la relación de las operaciones con la letra generalizada.	92
Tabla 15. Relación entre el número de la figura y el número de cuadrados de los bordes.	98
Tabla 16. Estrategias de solución para actividad los bordes.	105
Tabla 17. Estrategias de solución para figura 44 de la actividad los bordes.	106
Tabla 18. Relación entre la tabla y la cantidad de puntos por cada figura para la actividad 2. ..	109
Tabla 19. CATEGORÍA: ASPECTOS CONCEPTUALES DEL PROFESOR	118

Tabla 20. CATEGORÍA: TÉCNICAS E INSTRUMENTOS	120
Tabla 21. CATEGORÍA: GESTIÓN.....	122
Tabla 22. CATEGORÍA: DISCURSO	139
Tabla 23. CATEGORÍA: VALORACIÓN DEL APRENDIZAJE	142

INTRODUCCIÓN

Este documento describe un proceso reflexivo, de carácter cualitativo, cuyo objetivo fundamental es interpelar, examinar y evaluar mi práctica pedagógica en relación con el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje, que propicien entre los estudiantes de grado séptimo, el tránsito de la aritmética al álgebra.

En el primer capítulo, denominado *contextualización inicial*, se presenta la descripción de los aspectos que me inquietaban como profesora y las preocupaciones iniciales que orientarían el desarrollo de este trabajo, relacionados con el desarrollo de mi práctica pedagógica para implementar tareas que propicien el tránsito de la aritmética al álgebra, concernientes a la interpretación de la letra como variable.

Considerando los aspectos anteriores propuse el segundo capítulo, *primer ciclo de reflexión*, con el fin de reconstruir mi experiencia pedagógica en relación con el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje para la transición de la aritmética al álgebra con estudiantes de grado octavo (desde la implementación de actividades relacionadas con la interpretación de la letra a partir de la electrónica, la geometría y los procesos de generalización). En este ciclo llevé a cabo las siguientes acciones: (i) reconstruir de manera descriptiva, a través de notas del profesor, mi experiencia pedagógica de tres años como docente de matemáticas en el ejercicio de introducir la letra como variable; (ii) evaluar dichas experiencias con cada una de las categorías que caracterizan una reflexión guiada según Smyth (1991), a saber: aspectos conceptuales del profesor, técnicas e instrumentos, gestión del profesor, discurso y valoración del aprendizaje. En esta matriz sistematicé la información y a partir de ella interpele, examiné y cuestioné lo que habían sido mis distintas experiencias pedagógicas introduciendo la letra como variable, con el propósito de dotarlas de sentido y significado; (iii) analizar las respuestas a estas preguntas y establecer los resultados que me permitieron llevar a cabo un nuevo diseño, que se desarrollaría en un segundo ciclo de reflexión, con el fin de superar la dificultad, que encontré con mis estudiantes para significar la letra.

En el tercer capítulo de este trabajo, denominado *Segundo ciclo de reflexión: Experiencia de diseño de ambientes de aprendizaje que promueven los procesos de generalización para la interpretación de la letra*, se contemplan tres sesiones: la primera contiene la justificación de la selección de tareas, desde referentes prácticos y teóricos que me orientaron sobre la conveniencia de esta propuesta; la segunda presenta la ubicación de estas tareas en la estructura curricular de la IED Antonio Nariño, los objetivos de aprendizaje para este diseño, la descripción de las tareas, una esquematización de los referentes conceptuales que sustentan este diseño, los materiales usados para la recolección y sistematización de la información en su implementación; finalmente, la tercera presenta los resultados del segundo ciclo de reflexión que surgen del análisis que hice a partir de las preguntas propuestas para cada una de las categorías de reflexión guiada propuestas por Smyth (1991).

El cuarto capítulo describe los aspectos metodológicos que orientaron este trabajo de grado, estos se presentan en tres secciones: (i) descripción de los ciclos de reflexión, en esta sección detallé el proceso vivido en cada uno; (ii) caracterización de los datos, aquí referencé las fuentes de recolección de la información para ser interpretada a partir de las categorías de reflexión adaptadas de la propuesta de Smyth (1991) y (iii) categorías de análisis y descriptores, sección en la que describí la forma cómo organicé y sistematicé la información en categorías, así como la manera cómo se obtienen los resultados que se producen en estos dos ciclos de reflexión.

En el quinto capítulo presento las reflexiones que produjo el proceso de esta experiencia en relación con mi práctica pedagógica, a partir de los aspectos por los cuales interpeleé, examiné y evalué mis experiencias a la luz de las categorías para la reflexión. Por último, presento las conclusiones de la experiencia para el desarrollo de este trabajo en el aula desde los objetivos planteados, que se desprenden del objetivo general de interpelar, examinar y evaluar mi práctica pedagógica en relación con el diseño de ambientes de aprendizaje que propicien entre los estudiantes de grado séptimo, el tránsito de la aritmética al álgebra.

1. CONTEXTUALIZACIÓN INICIAL

En este capítulo describo los aspectos que inspiraron el desarrollo de este trabajo. Primero relato las dificultades que tuve para implementar diversas estrategias en el aula, que consideraba fomentarían la interpretación de la letra como variable. Estas experiencias corresponden a diferentes momentos de mi práctica docente cuando debía llevar a cabo la introducción de temas algebraicos con estudiantes de séptimo u octavo grado de educación básica y media.

1.1 Preocupación profesional inicial

En este apartado expongo las situaciones que me han inquietado como profesora de matemáticas relacionadas con la interpretación que hacen los estudiantes de las expresiones algebraicas en diferentes contextos. Con base en mis experiencias pedagógicas, relacionadas con introducir a los estudiantes en el trabajo algebraico, evidencié dificultades en ellos para dar sentido a la implementación de letras en operaciones entre polinomios.

En primer lugar, las ocasiones en las que propuse ejercicios con letras y operadores numéricos, en actividades con diferentes contextos como la electrónica, el álgebra geométrica y procesos de generalización de patrones, identifiqué que muchos de los estudiantes ejecutaron operaciones considerando solo los operadores numéricos que se presentaban y de ello daban un resultado final de forma numérica acompañado de las letras; por ejemplo como solución a la operación $3a+5b-3c$ encontré respuestas como $5abc$. De este tipo de resultados interpreté que lo importante para los estudiantes era operar las cantidades numéricas, porque no se hallaba sentido respecto al uso de la letra en una operación.

Por resultados como el descrito en el párrafo anterior, surgieron dificultades en los procesos de aprendizaje de los estudiantes, asociadas a la falta de sentido construida por ellos para el trabajo algebraico. La letra no la relacionaban con un significado en un contexto y por ello realizaban operaciones con las letras indistintamente del contexto en el que se proponía su uso. Lo anterior me condujo a analizar situaciones particulares de mi práctica, por ejemplo, aquellas en las que

los estudiantes no tenían en cuenta la importancia del uso de una misma letra en una expresión, es decir, no consideraba operar términos semejantes en expresiones algebraicas o aquellas en las que se presentaban problemas de interpretación de la letra en diferentes contextos que implicaban distintas interpretaciones: como número generalizado, incógnita, etiqueta, variable. Por tanto, consideré que la implementación de actividades en un contexto que no fuera significativo para el estudiante no era conveniente, debido a que no constituía caminos provechosos para el aprendizaje del álgebra, además no tenían sentido y más bien se convertían en ejercicios rutinarios para “usar” la letra en diferentes contextos.

En definitiva, a partir de la reconstrucción de mis experiencias y del análisis de estas, entendí que mis prácticas pedagógicas eran monótonas y precarias para el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra, pues al implementar actividades identifiqué repetidamente que no contemplaba aspectos como los diferentes ritmos de trabajo y las potencialidades de los estudiantes en las diferentes situaciones. Para solventar estas problemáticas en el aula me apoyé en diferentes escenarios de aprendizaje de la Maestría en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, para construir una fundamentación teórica que me direccionara al planteamiento de tareas provechosas que condujera a los estudiantes a la interpretación de la letra como variable.

En este sentido, para implementar actividades que promovieran la interpretación de la letra como variable, encontré en los trabajos de generalización un camino para proponer tareas que se enfocaran en la comprensión del álgebra de manera más significativa para el estudiante. En las sesiones de la Maestría abordé artículos, investigaciones y trabajos relacionados con álgebra temprana y actividades de generalización, más precisamente la investigación que realizó el profesor Rodolfo Vergel en su tesis doctoral. Allí encontré investigaciones relacionadas con procesos de generalización que, para efectos de este trabajo, resalto como referentes conceptuales fundamentales. Tomé en consideración algunos aspectos de la tesis doctoral de Trujillo (2008) de la Universidad de Granada, en la que se hace una recopilación de la definición o características de la generalización desde la perspectiva de diversos autores.

A continuación de manera sintética describo algunos de los aspectos que consideré pertinentes para este trabajo. El trabajo realizado por Radford (2008) del que enfatizo que la implementación e interpretación de las actividades de generalización aclaran la forma en la que se percibe lo que es igual y lo que es diferente, lo que me condujo a revisar actividades que le dieran sentido a la resolución de operaciones y a la interpretación de equivalencia entre ambos lados de la igualdad. La investigación de Amil y Neira (2008) en la que se define la generalización como un proceso que involucra reflexiones y habilidades en torno a un argumento dado, sin dar lugar a suposiciones sino a razones concretas de la construcción de una operación. Esta referencia me pareció conveniente para establecer la relación de las propiedades distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y conmutativa de las operaciones en diversos contextos. Además, consulté aspectos relacionados con la implementación de procesos de generalización a través de actividades en la escuela. Consideré trabajos como los de la Universidad de Antioquia, en convenio con el Ministerio de Educación Nacional de Colombia publicado como Módulo 2: Pensamiento Variacional y Pensamiento algebraico (2006), en donde la generalización se relaciona con una actividad no exclusiva de la matemática que, por medio de su trabajo en el aula, permite al alumno ver los casos particulares a través de clases de generalización de problemas. Lo cual me motivó a considerar este como un proceso determinado por la observación o visualización de lo que varía, para que el estudiante pueda determinar si una generalización es “buena o mala”, es decir si tiene o no sentido a partir de estas actividades.

Aclaré dicho proceso y su conveniencia cuando se presentan temas algebraicos, al conocer el trabajo de Villa (2006) en el que realiza una reflexión sobre la aplicación de este tipo de actividades. De éste rescaté la afirmación acerca de la generalización como una herramienta para introducir el álgebra escolar, considerando que ayuda al desarrollo de habilidades matemáticas que dan sentido al proceso e involucra distintos razonamientos.

Por su parte, Mason (citado en Villa, 2006) refiere las habilidades de razonamiento asociadas a procesos de generalización como aspectos para ver, hacer exposición verbal y expresar de la manera más concreta posible una regularidad. Además, pone en consideración estas habilidades como rutas con grandes ventajas para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático, a través de diferentes representaciones de los estudiantes. Por último, Radford

(citado en Villa, 2006) aclara que la implementación de actividades de generalización contribuyen con el propósito de dar validez a una idea, pues ayudan a demostrar y deducir los procesos para llegar a una respuesta o a una conjetura.

Considerando las consultas relacionadas con investigaciones para dar sentido al trabajo algebraico con estudiantes de grado octavo, encontré en las actividades de generalización una forma de solventar las dificultades relacionadas con la interpretación de la letra como variable. Esto debido a que facilita a los estudiantes dar sentido al uso de letras en un contexto y a comprender su papel en distintas expresiones y operaciones. Además, en el momento de su implementación podría encaminar el trabajo de los estudiantes por medio de la aplicación de argumentos en contextos más amplios a los trabajados, interpretar formas en las que se percibe el igual y dar sentido a los procesos matemáticos en el aula. Finalmente, con esta implementación espero transformar mi práctica pedagógica relacionada con los procesos de diseño e implementación de propuestas de ambientes de aprendizaje.

1.2 Objetivos de este trabajo

Este trabajo lo propuse para reflexionar sobre la aplicación de actividades de generalización y afrontar de manera más consciente los problemas que me representan su aplicación, relacionados con la transición de la aritmética al álgebra, más específicamente en lo que hace referencia a la interpretación de la letra en un contexto introductorio al álgebra.

1.2.1 Objetivo general

Interpelar, examinar y evaluar mi práctica pedagógica en relación con el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje que propicien entre los estudiantes de grado séptimo el tránsito de la aritmética al álgebra.

1.2.2 Objetivos específicos

- Identificar los aspectos desde los cuales debo interpelar, examinar y evaluar mi práctica pedagógica.

- Reconstruir mi experiencia pedagógica en relación con el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje para la transición de la aritmética al álgebra (desde una perspectiva de aplicación en la electrónica, en el álgebra geométrica y en procesos de generalización).
- Interpretar, examinar y evaluar mis experiencias en forma retrospectiva en el primer ciclo de reflexión.
- Diseñar y desarrollar un nuevo ambiente de aprendizaje de transición de la aritmética al álgebra a partir de los resultados del proceso de reflexión suscitado por el examen y evaluación de las experiencias anteriores.
- Interpelar, examinar y evaluar la experiencia del diseño y desarrollo del ambiente propuesto en el segundo ciclo de reflexión.
- Explicitar las reflexiones que me suscita el proceso experimentado en este trabajo en relación con mi práctica pedagógica.

2. PRIMER CICLO DE REFLEXIÓN

Este ciclo de reflexión lo llevé a cabo en cuatro momentos: elaboración de notas del profesor, las cuales contienen la reconstrucción de mis experiencias pedagógicas; sistematización de la información recogida en dichas experiencias; resultados de las experiencias reportadas en las notas del profesor a través de una reflexión guiada y análisis y recomendaciones de la experiencia a partir de los resultados de dicha reflexión.

En el primer momento reconstruí -de manera descriptiva- mi experiencia pedagógica en un documento que denominé notas del profesor. Allí reporté mis prácticas profesionales a lo largo de tres años como docente de matemáticas en grado octavo y de esta descripción examiné mis acciones y decisiones en torno a la interpretación de la letra en contextos algebraicos, en el proceso de aprendizaje de mis estudiantes, con el propósito de introducir la letra como variable generalizada.

En un segundo momento y asumiendo la postura de Smyth (1991) en relación con el desarrollo de una reflexión guiada, construí una matriz en la que se establecieron algunas preguntas para cada una de las categorías de análisis, a saber: aspectos conceptuales del profesor, técnicas e instrumentos, gestión del profesor, discurso y valoración del aprendizaje. Estas categorías se asumieron para interpelar, examinar y cuestionar lo que habían sido mis distintas experiencias pedagógicas introduciendo la letra, con el propósito de significarla como variable generalizada. En el tercer momento de este primer ciclo, hice un análisis de las respuestas a estas preguntas encontradas en las notas del profesor las cuales guiaron mi reflexión y finalmente, establecí unas recomendaciones que me permitieron hacer un ejercicio nuevo de diseño y desarrollo de una propuesta, que me condujera a superar la dificultad que encuentro en mis estudiantes al significar la letra.

2.1 Reconstrucción de mi experiencia pedagógica en relación con el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje. Notas del profesor.

La reconstrucción de esta práctica pedagógica la realicé por medio de notas del profesor, las cuales recopilan descripciones de las actividades ejecutadas en tres años diferentes, en las que me apoyé con unos pocos registros de trabajos de estudiantes, cuadernos y portafolios que conservaba de esos años y a partir de los cuales realicé la descripción que se encuentra en el anexo uno de este trabajo. En esta reconstrucción aparecen tres tipos distintos de propuestas que implementé para la interpretación de la letra, a saber:

- a. Propuesta desde el contexto de la electrónica, relacionada con el análisis de circuitos desde el punto de vista matemático, con el propósito de significar la letra como etiqueta de un elemento electrónico.
- b. Propuesta de procesos de generalización desde el álgebra geométrica, relacionada con la implementación de símbolos para medidas en pro del análisis de áreas de superficies, con el fin de contextualizar la letra desde las unidades de medida.
- c. Propuesta de generalización desde procesos de conteo en secuencias de patrones, con la que propuse un acercamiento de los estudiantes a la interpretación de la letra, por medio de actividades de generalización e implementé estrategias para interpretar las operaciones por medio de estas actividades.

2.2 Sistematización de la información recogida en las notas del profesor desde una mirada retrospectiva de mi experiencia profesional.

Para la sistematización de la información recogida en las notas del profesor, consideré algunos de los planteamientos desarrollados por Smyth (1991) que se relacionan con la reflexión guiada y describe lo que constituyó este proceso reflexivo. A partir de este referente construí una matriz para mi reflexión que, por medio de preguntas sugeridas para cada categoría, me condujeron a interpelar y evaluar mi experiencia pedagógica sistematizando la información obtenida de las notas del profesor. En esta matriz asumí categorías relacionadas con aspectos conceptuales del profesor, técnicas e instrumentos, gestión en el aula, discurso en el aula y valoración del aprendizaje.

Tabla 1. Categorías y preguntas de reflexión guiada, adaptadas de la propuesta de Smyth (1991).

<i>CATEGORÍAS</i>	<i>PREGUNTAS</i>
<i>ASPECTOS CONCEPTUALES DEL PROFESOR</i>	¿Qué quiero enseñar a los estudiantes?
	¿Qué sé del tema?
	¿Qué material de consulta debí revisar para hacer la planeación?
	¿En qué me basé para proponer el objetivo de clase?
<i>TÉCNICOS E INSTRUMENTO</i>	¿Qué recursos usé y qué papel creo que jugó el material?
	¿El material fue importante para lo que quería enseñar?
<i>GESTIÓN</i>	¿Qué preguntas hice a los estudiantes?
	¿Cómo gestioné la enseñanza?
	¿Qué aspectos de los estudiantes y del contexto influyeron en la enseñanza?
	¿Surgieron imprevistos y cómo se sortearon?
<i>DISCURSO</i>	¿Qué términos, notaciones, expresiones pensé promover y por qué?
	¿Qué términos, notaciones y expresiones promoví?
	¿Los estudiantes usaron los términos que se introdujeron?
<i>VALORACIÓN DEL APRENDIZAJE</i>	¿Cómo valoré los aprendizajes?
	¿Realicé en clase alguna valoración de los aprendizajes?

La sistematización de mis experiencias pedagógicas, presentadas en las notas del profesor, las llevé a cabo a partir de la matriz registrada en la tabla 1. En las tablas 2 a 6 presento las respuestas a cada una de las preguntas por categoría con los datos que resultan de fuentes, como las notas del profesor. De manera más puntual, cada tabla corresponde al análisis de las propuestas (electrónica, álgebra geométrica y procesos de conteo) a partir de las categorías de la tabla 1, en ellas consigno de manera vertical la relación entre las categorías y las preguntas asociadas a ellas y de manera horizontal los datos asociados a cada una de las propuestas que dan respuesta a los interrogantes planteados.

Dichas prácticas reconstruidas, a través de las notas del profesor, me permitieron establecer una mirada retrospectiva de mi experiencia pedagógica y de ellas dar respuesta a cada una de las preguntas consignadas en cada una de las tablas.

Tabla 2. Categoría: Aspectos conceptuales del profesor.

	<i>ASPECTOS CONCEPTUALES DEL PROFESOR</i>				
	¿Qué quiero enseñar a los estudiantes?	¿Qué sé del tema?	¿Qué material de consulta debí revisar para hacer la planeación?	¿En qué me basé para proponer el objetivo de clase?	¿Qué usé de lo que sabía al enseñarlo?
Propuesta desde el contexto de la electrónica.	Por medio de actividades relacionadas con el análisis de circuitos electrónicos, pretendí dotar de significado el uso de la letra en diferentes contextos asociados con la electrónica.	Del tema, reconocí procesos de solución en torno a casos de factorización, del álgebra de Baldor y manejé conceptos asociados con la electrónica, tales como, análisis de circuitos en serie y paralelo e interpretación de mallas y nodos en un circuito.	Los materiales de consulta para revisar la planeación se constituían en libros como el álgebra de Baldor y documentos asociados con las matemáticas aplicadas en el campo de la electrónica.	El objetivo de clase estaba basado en los requerimientos descritos en las mallas de aprendizaje institucionales.	De lo que sabía para enseñarlo, tenía claridad acerca de conceptos asociados a circuitos y análisis de los mismos desde aspectos matemáticos, de ello, tomé como referencia los temas necesarios para la enseñanza desde el álgebra de Baldor, para establecer una relación entre aspectos electrónicos y los temas a desarrollar.

Propuesta desde el álgebra geométrica	Desde el contexto de la geometría, pretendí promover el uso de la letra para contextualizar el álgebra.	Tenía clara la interpretación y el uso de símbolos para representar aspectos geométricos.	Tenía como soporte de trabajo la implementación de guías de aprendizaje institucionales, actividades adicionales y pruebas con opciones de respuesta múltiple.	Como requerimiento institucional, los objetivos de la clase se planteaban desde lo escrito en las mallas de aprendizaje.	Desde los conceptos abordados en los libros, relacionados con operaciones algebraicas, establecía una relación entre aspectos geométricos y aspectos temáticos de los libros, para así, transmitirlos en clase.
		Reconocía, desde el contexto de la geometría, aspectos relacionados con la interpretación de la letra como variable generalizada a partir el análisis de gráficos geométricos.	Adicional al trabajo institucional, recurría a libros de texto de grado octavo, para complementar la implementación de actividades desde el uso de guías de aprendizaje.		
Propuesta desde procesos de conteo - patrones	Pretendí enseñar aspectos relacionados con la interpretación de la letra como número	Tenía claridad acerca de la interpretación de aspectos algebraicos trabajados en las dos experiencias anteriores.	Los materiales de consulta revisados para esta nueva experiencia eran artículos relacionados con la	El objetivo propuesto se encontraba enmarcado en las mallas de aprendizaje institucionales que	Usé aspectos relacionados con la interpretación de la generalización, como las formas de

	<p>generalizado, para trabajarlo en contextos algebraicos.</p>	<p>Lo descrito en libros y artículos relacionados con la generalización de patrones.</p>	<p>propuesta "Early algebra" y experiencias e investigaciones relacionadas con la generalización desde el conteo de patrones.</p>	<p>reformé de acuerdo con la nueva propuesta a implementar.</p>	<p>visualización de una secuencia para introducir el tema de factorización.</p>
--	--	--	---	---	---

Tabla 3. Categoría: técnicas e instrumentos.

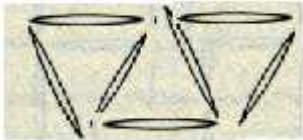
	<i>TÉCNICAS E INSTRUMENTOS</i>	
	¿Qué recursos usé y que papel creo que jugará el material?	¿El material fue importante para lo que quería enseñar?
Propuesta desde el contexto de la electrónica.	Los recursos usados para el desarrollo de las actividades se dispusieron en guías de aprendizaje institucionales y actividades adicionales para ser ejecutadas solo en mi clase. El papel desempeñado por el material no era funcional dado que eran actividades a desarrollar en hojas que solamente requerían el uso de procedimientos para la solución de situaciones propuestas.	El material no fue importante para lo que quería enseñar, pues se convirtió en un elemento de trabajo que no era de importancia para la representación de las actividades o para el desarrollo del proceso.
Propuesta desde procesos de conteo - patrones	En una de las actividades recurrí a palos de paleta, como elemento de apoyo en la construcción de la figura propuesta en la actividad.	El material fue relevante en algunos momentos, dado que, con los palillos, los estudiantes pudieron realizar la construcción de la secuencia, como, por ejemplo: 
	Otras de las actividades eran hojas con secuencias impresas y requerían de representación gráfica de las interpretaciones de la visión de la secuencia propuesta a los estudiantes.	

Ilustración 1. Figura 3, actividad de los palillos, propuesta en actividad de generalización a partir del reconocimiento de patrones o regularidades.

Tabla 4. Categoría: Gestión del profesor en el aula.

<i>GESTIÓN DEL PROFESOR EN EL AULA</i>					
	¿Qué preguntas hice a los estudiantes?	¿Cómo gestioné la enseñanza?	¿Qué aspectos de los estudiantes y del contexto influyeron en la enseñanza?	¿Surgieron imprevistos y cómo se sortearon?	¿Cambié algo respecto a lo gestionado?
Propuesta desde el contexto de la electrónica.	Las preguntas planteadas a los estudiantes se relacionaban con el resultado final de una operación, por ejemplo: ¿cuál es el resultado de la operación $7a + 4b - 3c$?	En un primer momento, mi proceso para la gestión de la enseñanza se orientó al desarrollo de los pasos para el análisis de circuitos, los cuales se relacionaban con la explicación de cada uno de los casos de análisis y luego cambiaba los valores o la forma como se presentaba el ejemplo.	Los aspectos relacionados con el contexto de la enseñanza, y específicamente de la propuesta, llevaron a resultados como la poca comprensión de los temas desarrollados asociados al álgebra.	Los imprevistos sorteados en el desarrollo de la propuesta se relacionaron con la interpretación del análisis de circuitos, que condujo al replanteamiento de las interpretaciones de aspectos algebraicos.	Mi gestión se encaminó a cambiar la forma de la interpretación de la letra en el contexto de la electrónica a contextos tradicionales. En consecuencia, el trabajo realizado con el contexto de la electrónica cambió, para dar cabida a la enseñanza del tema de manera más tradicional,
		Para la interpretación de la letra en diferentes contextos, cambié las letras que usaba en el	Los aspectos relacionados con el trabajo de los estudiantes lo interpreté como el desinterés por el desarrollo del tema.		

		análisis de circuitos con letras x, y, z, lo que generó confusión en la implementación de la letra como número generalizado.		polinómicas y circuitos electrónicos, los imprevistos que surgieron condujeron a replantear las actividades para la interpretación de conceptos.	grado octavo.
Propuesta desde el álgebra geométrica	Las preguntas realizadas a los estudiantes se relacionaron con la implementación de la letra para expresar el perímetro y área de ciertas figuras rectangulares.	La enseñanza la gestioné desde el planteamiento de actividades relacionadas con el álgebra geométrica y su interpretación en diferentes contextos.	Los aspectos de los estudiantes los relacioné con su motivación por aprender los temas, al igual que el contexto en el que se plantearon las primeras actividades para la interpretación de la letra como número generalizado y el apoyo de los padres para la ejecución de las tareas en casa.	Los imprevistos se relacionaron con las dificultades en la solución de operaciones de suma y resta, siendo confundidas con las de multiplicación, las cuales se sortearon con explicaciones a los estudiantes.	Como en la experiencia anterior, los cambios respecto a lo gestionado se dieron por las dificultades en la interpretación de las operaciones, esto llevó a la implementación de actividades de manera más tradicional, es decir, al uso de libros de texto para grado octavo y con actividades que

					requerían soluciones más mecánicas con aplicación de expresiones algebraicas.
Propuesta desde procesos de conteo - patrones	Las preguntas, en esta experiencia, permitían que el estudiante realizara una descripción de la interpretación gráfica de las relaciones, en torno a la cantidad de elementos que componían las figuras presentadas y la cantidad total de elementos.	La enseñanza la gestioné con la socialización de la solución en cada una de las experiencias, en las que promoví el uso de justificaciones de las propuestas presentadas y la implementación de expresiones matemáticas para la interpretación de cada una de las relaciones.	Los aspectos más relevantes en esta experiencia se dieron en torno a la interacción entre los estudiantes y su participación en las discusiones de clase respecto a la validez de las operaciones socializadas.	En el desarrollo de esta experiencia no evidencié imprevistos en la implementación.	Para el desarrollo de esta propuesta, no cambié aspectos en relación con lo gestionado, debido a los resultados favorables, en comparación con las anteriores.

Tabla 5. Categoría: Discurso en el Aula.

	<i>DISCURSO EN EL AULA</i>		
	¿Qué términos, notaciones, expresiones pensé promover y por qué?	¿Qué términos, notaciones y expresiones promoví?	¿Los estudiantes usaron los términos que se introdujeron?
Propuesta desde el contexto de la electrónica.	Pensé promover los símbolos usados para el análisis de circuitos en electrónica porque eran los temas que estaba implementando para la interpretación de la letra como variable generalizada.	En esta experiencia promoví con algunos estudiantes el uso de términos relacionados con la electrónica para la interpretación de operaciones algebraicas.	Los estudiantes recurrieron a símbolos relacionados con el análisis de circuitos para llevar a cabo operaciones algebraicas.
desde el álgebra geométrica	Pensé promover el uso de letras que representan unidades de longitud para ser interpretadas como variable generalizada.	Las notaciones y expresiones que promoví se encaminaron al uso de letras relacionadas con unidades de longitud.	Los términos que introduje se relacionaban con letras para llevar a cabo operaciones algebraicas en un contexto geométrico.
procesos de conteo – patrones	Promoví el uso de la letra como representación del número de una figura que conformaba una secuencia.	Los términos, notaciones y expresiones se encaminaban a las formas de interpretar la factorización, dar sentido a las letras dentro de una	Los estudiantes usaron los términos para establecer relaciones entre la letra y el número que varía. El uso e interpretación de los términos

		expresión y una operación.	ayudaron a la implementación y contextualización de las letras en una operación.
--	--	----------------------------	--

Tabla 6. Categoría: Valoración del aprendizaje

	<i>VALORACIÓN DEL APRENDIZAJE</i>	
	<i>¿Cómo valoré los aprendizajes?</i>	<i>¿Realicé en clase alguna valoración de los aprendizajes?</i>
Propuesta desde el contexto de la electrónica.	Los aprendizajes los valoraré por medio de actividades y evaluaciones que se establecieron por la respuesta correcta o incorrecta de algunas tareas, por parte de los estudiantes.	La valoración de los aprendizajes los realicé por medio de la solución de actividades y evaluaciones escritas de acuerdo con los ejemplos y la selección de respuesta múltiple.
Propuesta desde el conteo de patrones	Los aprendizajes valorados contemplaron: la participación de los estudiantes en los procesos, las actividades escritas, la representación y validación de la interpretación de las relaciones que fueron presentadas en las actividades de generalización propuestas.	La valoración la realicé teniendo en cuenta los procesos de los estudiantes, las soluciones de las actividades, las expresiones empleadas y la interacción con los compañeros para la solución y justificación de las relaciones encontradas.

2.3 Resultados del primer ciclo de reflexión

A partir del proceso de sistematización de la información, consignada en las notas del profesor, analicé y evalué mis experiencias anteriores. Desde este análisis pude construir los siguientes resultados en torno a las categorías planteadas por Smyth (1991).

- Sobre los aspectos conceptuales del profesor concluí que traté de dotar de significado el uso de la letra, en actividades en las que relacionaba un símbolo con algún elemento que pudiera reconocer el estudiante. Esto llevó a que el estudiante no realizara operaciones entre términos semejantes en un determinado contexto y generó confusiones en torno a la interpretación de la letra para realizar operaciones algebraicas. Así mismo, obvié el hecho de realizar un diagnóstico previo a los alumnos, pues las actividades implementadas eran resultado de un trabajo anterior relacionado con el desarrollo del pensamiento numérico, con el mismo grupo.

Para el caso de la interpretación de la letra como variable en contextos de electrónica, di por sentado el manejo de conceptos previos en relación con el análisis e identificación de circuitos, lo que me condujo a inconvenientes con los conceptos asociados con la electrónica y el trabajo mancomunado con el profesor de tecnología, debido también a que estos temas no se trabajaron de la misma forma en la respectiva área.

Las guías fueron consideradas material de consulta para la planeación y su realización implicó la implementación de conceptos asociados al álgebra; allí debí tener en cuenta que las actividades que proponía no solamente serían usadas por mí, sino por profesores en las escuelas rurales, con el método de escuela nueva (porque estas guías estaban enmarcadas en el proyecto multigrado, del cual hacen parte las escuelas rurales de la institución) e implicaba plantear actividades lo suficientemente comprensibles, prácticas y sencillas para ser desarrolladas por los estudiantes, en compañía de los docentes en sus respectivas escuelas.

A partir de lo anterior tuve que generar trabajos adicionales (para implementar actividades como las propuestas en el marco de la electrónica, basados en ejercicios propuestos por el Proyecto de Matemáticas en Contexto del SENA) que representaban nuevos costos a los padres y doble trabajo para mí, pues debía hacer las guías para los estudiantes en las escuelas, pero a la vez las actividades complementarias para mis sesiones de clase.

- Respecto al material de consulta y su uso en la clase reconocí, en la implementación de guías institucionales, que la transición aritmética al álgebra era un tema abandonado por el grupo de docentes de matemáticas de la institución; supuse entonces que su uso limitaba las interpretaciones que daban los estudiantes a las operaciones y no conducía a la función del lenguaje matemático para justificar las soluciones de las actividades, lo cual dificultaba el desarrollo de las sesiones. En vista de lo anterior y aprovechando el abandono de estas herramientas de aprendizaje, realicé un cambio respecto a la forma de abordar los temas en las clases, teniendo en cuenta que cada profesor proponía y daba énfasis a los temas que consideraba convenientes, en mi caso particular se relacionó con la implementación de actividades de generalización para desarrollar estrategias en torno a la interpretación de la letra como variable, de manera más significativa para el estudiante.
- De mis conocimientos previos para enseñar, identifiqué que en los conceptos algebraicos tenía debilidad para establecer relaciones entre aspectos teóricos y prácticos relacionados con aspectos didácticos. Un ejemplo: la implementación de la propuesta de la electrónica, en la que reconocí que tenía conocimiento del análisis de circuitos y la interpretación de los resultados matemáticos en los mismos, pero desconocía aspectos relacionados con el conocimiento especializado para la interpretación de la letra como variable; por lo tanto, me apoyé en libros de texto como el álgebra de Baldor y documentos que fueran útiles para la implementación y desarrollo de los temas algebraicos.
- En cuanto a las técnicas e instrumentos para el aprendizaje, la implementación de la guía como recurso de aprendizaje, me representó una limitación conceptual en el aula para las dos primeras experiencias, porque condujo a problemas en la interpretación y manejo de la letra como variable, pues el tema de la transición aritmética al álgebra no se

consideraba relevante para la enseñanza en la institución y no era abordada por todos los profesores. En cambio, la tercera propuesta que evidenciaba el trabajo autónomo del docente me llevó a usar lo que sabía en la implementación de actividades de generalización, que como prueba experimental para introducir temas algebraicos se tradujo en un cambio en los ritmos de trabajo de los estudiantes en el aula que identifiqué por medio de sus aportes y participación en el desarrollo de las sesiones.

Esta propuesta, relacionada con el conteo de patrones me permitió reconocer que el uso de material -como palos de paleta- condujo a los estudiantes a implementar esquemas del proceso, por el cual se dieron explicaciones a las relaciones que se encontraban en las cantidades de las secuencias propuestas en las tareas; esto permitió expresar las relaciones de la secuencia de manera oral o escrita. De ahí que las explicaciones de los estudiantes se representaran con ayuda del material y se refutaran, promoviendo así el empleo del lenguaje matemático que promovió una nueva esquematización de las relaciones entre cantidades y operaciones.

- De la gestión en el aula, una primera conclusión que destaco se relaciona con el hecho de descartar el uso de estrategias que condujeran a modificar las dos primeras propuestas e implementarlas de nuevo con otros grupos, pues consideré desecharlas, toda vez que no fueron funcionales en su implementación. Esto como consecuencia de las dificultades que, evidencié en los estudiantes con el manejo de conceptos e interpretaciones relacionadas con operaciones con expresiones algebraicas, más precisamente con la interpretación de la letra como variable que las cuales vi superadas a través de la implementación de actividades de generalización, debido a que identifiqué un proceso más inclusivo del estudiante para su aprendizaje porque tenía en cuenta su proceso, sus construcciones en torno al lenguaje matemático y las operaciones matemáticas que marcaban la diferencia con lo realizado en otras experiencias.

Consideré que dicha gestión se dividió en dos grandes momentos: el primero descrito en las propuestas 1 y 2, que consideré como “segregador” de las intervenciones de los estudiantes pues solamente consistía en un método de explicación, ejemplo, ejercicio,

socialización y evaluación de las actividades, el cual justifiqué con la necesidad de la implementación de guías y de responder por el desarrollo de temas en cada periodo.

En el segundo momento de mi gestión, relacionado con el desarrollo de la propuesta tres, di cabida a la realización de actividades más abiertas, enfocadas a la socialización de las diferentes soluciones que proponían los estudiantes y la evaluación conjunta de los resultados, que condujeron a una participación más activa en el desarrollo de las clases.

De los aspectos descritos en la propuesta 2, que influyeron en la enseñanza, resalto el cambio de ritmo de trabajo y la manera cómo se desarrollaban las actividades en las sesiones, reconocí más participación e interacción de los estudiantes con el conocimiento que asocié con su actitud para el desarrollo de las actividades y el papel que tomaban los alumnos para resolver las tareas y justificar cada una de sus propuestas de solución. De manera semejante, en la implementación de la propuesta tres encontré mayor receptividad por parte de los estudiantes para el desarrollo de las actividades de generalización de patrones, donde la participación y el interés por el trabajo en clase fue productivo en los temas que se abordaron.

- Del discurso entendí que las actividades de generalización se convirtieron en una puerta para la interpretación de una secuencia a través de diferentes formas de representación (oral, gráfica, escrita), las cuales apoyaron el desarrollo del trabajo algebraico y se encuentran puntualizadas en la propuesta tres. En vista de lo anterior destacué la importancia del proceso de visualización de patrones porque promovieron la interpretación de términos de una expresión como algo que varía, de tal forma que condujo al estudiante a ampliar la visión del trabajo algebraico y promovió la interpretación de la factorización a través de la representación de las propiedades de las operaciones, como la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.

Con dichas deducciones esperé identificar modificaciones del lenguaje matemático e involucré el uso de expresiones matemáticas en las soluciones de los estudiantes que se correspondían con lo planeado, pero al revisar de manera retrospectiva esta

implementación no recordé en el discurso de los estudiantes, aspectos del lenguaje matemático, aunque en el registro escrito de las soluciones reconocí algunas interpretaciones que comprendían el uso de operaciones matemáticas las cuales me llevaron a una interpretación relacionada con el uso de términos algebraicos escritos, en una expresión.

- Sobre la valoración del aprendizaje, en la propuesta 1 y 2 di prioridad a las evaluaciones escritas que evidenciaran el manejo de las operaciones de acuerdo con los ejemplos desarrollados en clase. Pero en la tercera propuesta tuve en cuenta elementos a favor de la interpretación de las actividades por parte del estudiante, por medio de la socialización de los conceptos y las discusiones en relación con las formas de ver y describir una secuencia de figuras. Así, la implementación de estrategias de evaluación en las dos primeras experiencias las asocié con escritos de los estudiantes, en las evaluaciones de los temas abordados en diferentes sesiones, pero en la última experiencia del proceso de evaluación consideré los procesos de los estudiantes más que los resultados.

Esta mirada retrospectiva me condujo a identificar el cambio de actitud de mis estudiantes respecto al desarrollo de las clases y la valoración de los aprendizajes, al igual que la consideración de sus interpretaciones del tema o la actividad matemática. En el proceso evaluativo de la tercera propuesta contemplé procesos de los estudiantes para expresar una relación entre la cantidad de elementos que compone la figura y el número de la figura, esto lo obligaba a expresar relaciones por medio del lenguaje matemático, dotando de significado su aprendizaje sin dar lugar a respuesta memorística a una operación.

2.4 Recomendaciones para iniciar un segundo ciclo de reflexión

Las siguientes recomendaciones las construí a partir del tratamiento y análisis realizado a la información recogida en las notas del profesor, sistematizada en la tabla 1 presentada en la sección anterior. Espero contribuyan al diseño de un ambiente de aprendizaje que se llevará a cabo en el segundo ciclo de reflexión para introducir la letra como variable desde tareas de generalización.

- Considerar un proceso de diagnóstico de los estudiantes que me permita identificar específicamente sus conocimientos alrededor de la interpretación de la letra en expresiones polinómicas.
- Cuestionar los procesos de los estudiantes para promover su reflexión relacionada con el uso del lenguaje, las operaciones matemáticas, la implementación de estrategias para justificar las soluciones y su quehacer en torno a las tareas.
- Proponer preguntas a los estudiantes para que sus respuestas conduzcan a la implementación de expresiones y operaciones, como por ejemplo recurrir a $2n + 1$ para expresar la relación matemática que le permita encontrar el número total de palillos en una secuencia, desde la implementación de la propuesta de actividades de generalización.
- Recurrir a métodos de evaluación que tengan en cuenta el proceso del estudiante más que el resultado final.
- Prever las respuestas de los estudiantes a las actividades planteadas, como parte de mi gestión en la práctica pedagógica, para pensar en estrategias que me conduzcan a sortear dificultades que surjan del tratamiento de dichos resultados.
- Introducir el uso de material tangible o implementar tareas que permitan ser manipuladas de forma gráfica, para promover las justificaciones de los estudiantes por medio de diferentes representaciones, que esquematicen las interpretaciones de las actividades en relación con los resultados obtenidos como los de la propuesta 3 del primer ciclo de reflexión.
- Implementar una evaluación de carácter formativo que promueva la interpretación de los procesos de los estudiantes de acuerdo con las formas de visualización de una actividad y su solución; esto fue evidente en la implementación de la propuesta de generalización desde el proceso de conteo de patrones, del cual destaco el uso del lenguaje y expresiones

matemáticas para que los estudiantes justificaran sus acciones, además de participar de manera más activa en el desarrollo de la clase.

3. SEGUNDO CICLO DE REFLEXIÓN: EXPERIENCIA DE DISEÑO DE AMBIENTES DE APRENDIZAJE QUE PROMUEVEN LOS PROCESOS DE GENERALIZACIÓN PARA LA INTERPRETACIÓN DE LA LETRA EN PROCESOS DE TRANSICIÓN DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA.

Este segundo ciclo de reflexión parte de los resultados y recomendaciones del primer ciclo para llevar a cabo una experiencia de diseño, implementación y evaluación de una nueva propuesta para la transición de la aritmética al álgebra. A partir de la implementación de tareas de generalización que permitan el tránsito entre estas dos áreas de las matemáticas de manera más significativa para el estudiante.

En un primer apartado de esta sección presento la justificación de la selección de tareas de generalización, apoyada en los referentes teóricos y en los resultados obtenidos del primer ciclo de reflexión que me orientaron sobre la conveniencia de esta propuesta. En el segundo apartado describo el diseño de la propuesta, tomando en consideración: la selección de las tareas, la organización de las tareas en la estructura curricular institucional, los objetivos de aprendizaje de este diseño, la descripción de las tareas, las posibles soluciones, los referentes conceptuales para el diseño y su respectiva esquematización, los materiales para la implementación de la propuesta, la sistematización de la información y los aspectos que orientan la elaboración del diario de campo de la profesora en este segundo ciclo. Finalmente, presento los resultados del segundo ciclo a partir de los aspectos que caracterizan una reflexión guiada planteada por Smyth (1991).

3.1. Justificación de la selección de las tareas

Como producto del primer ciclo de reflexión, donde describí y analicé aspectos de mi práctica pedagógica alrededor de la propuesta de tareas que favorecieron la interpretación de la letra como variable generalizada, justifiqué la selección de esta propuesta de implementación de tareas de generalización con los siguientes soportes teóricos y prácticos.

- Desde las apreciaciones de los estudiantes, recopiladas en la experiencia de generalización del primer ciclo de reflexión, identifiqué que las tareas de generalización implican el establecimiento de relaciones entre operaciones y representaciones gráficas, que conduzcan a la interpretación de patrones de regularidad, para contextualizar la letra como variable generalizada en una situación determinada.
- Al trabajar con tareas de generalización debo considerar las estrategias de los estudiantes para la solución de estas que, a la luz de la teoría, se relacionen con la comprensión de los números o las cantidades y las formas geométricas. Apoyada en uno de los libros de la Editorial Síntesis, *Ideas y actividades para enseñar álgebra*, del grupo de profesores Azarquiel (1993), encontré que al proponer situaciones de generalización debo obtener respuestas por parte de los estudiantes encaminadas a distintas maneras de ver una figura, las cuales vi reflejadas en el primer ciclo de reflexión. Además, con esta propuesta espero que los estudiantes encuentren sentido a la comprobación de las equivalencias entre los miembros de una igualdad, para así reforzar los conocimientos asociados a las propiedades de las operaciones aritméticas (conmutativa y distributiva de la multiplicación con respecto a la suma).

Con todo esto y considerando la generalización como un aspecto de trabajo dentro y fuera de las matemáticas, reconozco que debo interpretar que las prácticas de los estudiantes se pueden dividir en habilidades como: la visión de la regularidad, la configuración de la forma, el proceso a desarrollar, el uso de una expresión simbólica y por tanto escrita, las cuales son convenientes para abordar la interpretación de las operaciones desde aspectos didácticos para la interpretación de la letra como variable, como lo cita Mason y Otros (1999).

- Al considerar este tipo de tareas debo tener en cuenta los cuestionamientos que haría a los estudiantes para que, a partir de sus respuestas, promueva el uso de expresiones en diferentes contextos. La implementación de tareas de generalización es conveniente para este propósito pues, al considerar los resultados de investigaciones como las de Trujillo (2008) en su tesis doctoral citando a National Council of Teacher of Mathematics (NCTM, 2000), el proceso

de generalizar toma fuerza al ser considerado como uno de los principales objetivos de la instrucción matemática. Identificar un patrón desde este tipo de tareas, potenciaría el uso del lenguaje verbal y algebraico desde la descripción y representación de dichos patrones, por tanto, promovería el uso de términos y notaciones de expresiones desde la identificación e interpretación de una regularidad.

Por otra parte, para superar las dificultades narradas anteriormente y relacionadas con los aspectos para promover una reflexión guiada, encontré justificaciones desde el desarrollo del álgebra en la escuela a partir de actividades de generalización que, contrastadas con los resultados obtenidos en la tercera propuesta del primer ciclo de reflexión, me permitieron realizar las siguientes afirmaciones.

- Implementar este tipo de tareas debe conducir a dotar de significado el uso de la letra, promover el desarrollo de aspectos conceptuales y acumular ejemplos a través del establecimiento de relaciones entre los aspectos teóricos y prácticos del álgebra, los cuales no fueron claramente identificadas en las descripciones del ciclo uno de reflexión.
- Considerar estas tareas relacionadas con el proceso de transición aritmética al álgebra, implica que los estudiantes detecten y sistematicen una regularidad para promover el uso de sistemas de representación algebraicos alternativos, como el lenguaje verbal y gráfico. Dichas representaciones deben conducir a la utilización y manejo del lenguaje algebraico a través del discurso y el uso de expresiones algebraicas para la comunicación de soluciones de una tarea, tal como lo afirma Cañadas (citado por Trujillo, 2008).
- Promover el trabajo y la participación de los estudiantes en clase por medio de esta propuesta de implementación de tareas de generalización, relacionada con las técnicas e instrumentos definidas por Cañadas y Castro (2002), lleva a la interpretación de un sistema de categorías de los alumnos para suscitar un trabajo que comprenda aspectos relacionados con la comprensión del enunciado, el trabajo con casos particulares, la formación de conjeturas, su justificación general y la validación de las mismas.

De lo anterior y soportada en los resultados de la propuesta tres del primer ciclo de reflexión, proponer tareas de generalización promovería la participación de los estudiantes desde el trabajo individual y grupal, daría fuerza al desarrollo del lenguaje matemático a través de la justificación de los procesos, por medio de la implementación de operaciones para explicar las relaciones entre las propiedades de las operaciones (como la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma), la construcción de conjeturas de manera gráfica, oral o escrita y la validación de las mismas a través de la socialización y comparación de resultados.

- Elaborar previsivamente las actividades de los estudiantes, desde mi gestión como docente, para anticiparme a algunas respuestas y generar modificaciones en las mismas. De los que podría reconocer procesos que impliquen expresiones en las que se identifique el uso de símbolos, la interpretación de una generalización de patrones a partir de una característica y la formalización de la relación (por medio de operaciones) que conduzcan a promover el uso del lenguaje matemático.
- Referenciar el proceso de los estudiantes como parte de la evaluación del aprendizaje, relacionado con las interpretaciones de las soluciones a las tareas de generalización, me conduciría a interpretar que la evaluación debe ser parte del conocimiento formativo y procedimental, pues desde lo propuesto por los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), se refuerza la consideración de la evaluación como un proceso que se relaciona con la acción, las técnicas y estrategias para interpretar conceptos y transformar las representaciones.

3.2. Diseño de la propuesta

Para el desarrollo de este aspecto, consideré los resultados del primer ciclo de reflexión expuestos en las secciones 2.3 y 2.4 del capítulo 2 de este trabajo. Estos resultados me

condujeron a construir el nuevo diseño que contempla asuntos relacionados con la implementación de la propuesta.

3.2.1 Selección de tareas

Para la selección de tareas, consideré una pregunta para orientar este proceso: ¿Qué aspectos y criterios priorizan la selección de estas tareas y no otras?

En lo que respecta a los aspectos o elementos para considerar estas tareas me apoyo en los resultados descritos de cada una de las propuestas del primer ciclo de reflexión. Enfatizo en el desarrollo de la propuesta tres, relacionada con la generalización desde el conteo de patrones, porque en ella identifiqué elementos relacionados con la implementación de este tipo de tareas de generalización que promueven el uso de estrategias de solución que cuestionan el quehacer del estudiante, así como el desarrollo del lenguaje matemático y el uso de expresiones.

Con esto realicé una búsqueda de tareas de generalización, algunas contempladas en la propuesta 3 del ciclo 1 de reflexión. Escogí tres propuestas del grupo Azarquiél (1993) que consideré convenientes para el desarrollo de este diseño puesto que, desde los resultados de las investigaciones del grupo, esta implementación puede potenciar aspectos relacionados con la visualización, la descripción y la comunicación que me ayudarían a superar las debilidades enunciadas para mi trabajo en el aula.

Dichas consideraciones me hacen interpretar que los aspectos que priorizan la selección de tareas de generalización se relacionan con promover la interacción de los estudiantes, por medio de la construcción de justificaciones, que conduzcan al uso de lenguaje matemático, plantear preguntas en las que sus respuestas implique uso de expresiones matemáticas, cuestionar los procesos que lleven a que los estudiantes modifiquen su lenguaje matemático y finalmente originar una implementación evaluativa diferente que contemple los trabajos de los estudiantes, sus procesos, participaciones y resultados a las tareas propuestas.

Los criterios por los cuales seleccioné estas tareas y no otras, fueron los resultados obtenidos en el primer ciclo de reflexión, donde reconocí que debo implicar preguntas que en las respuestas de los estudiantes reflejen aspectos relacionados con procesos de visualización a los que recurren los alumnos y de ellos considerar las construcciones de las secuencias y las interpretaciones (gráficas o escritas), tomar una postura “crítica” en torno al trabajo del estudiante y encaminar las soluciones a la interpretación de la letra como variable.

Para la implementación de este tipo de actividades resalto la forma como se promueve la construcción de justificaciones, argumentos y conjeturas por parte de los alumnos en el momento de realizar exposiciones verbales, las cuales se describieron en la tercera propuesta del primer ciclo de reflexión, de ello tomo en cuenta la participación del estudiante con argumentos expresados en lenguaje matemático (en los que se involucre el uso de operaciones aritméticas para explicar una relación) y promueva la interpretación de la letra como variable.

Sobre los criterios por los que son estas tareas y no otras considero que esta selección puede activar en los estudiantes diferentes tipos de representación gráfica y así se promuevan justificaciones desde la visión de la forma, se identifique la regularidad de la secuencia propuesta y la formulación de respuestas a las preguntas por medio del lenguaje matemático, al igual que el registro de las relaciones por medio de expresiones matemáticas.

Finalmente, la selección e implementación de estas tareas puso en consideración el cambio de mi práctica pedagógica para construir un aprendizaje más significativo para los estudiantes. Mi propósito fue que las tareas propuestas sean una manera de aprender matemáticas, a través de las representaciones de las relaciones, el uso de expresiones y el lenguaje matemático propio de estas las actividades en las que se involucren justificaciones de manera sintética y coherente.

3.2.2 Organización de las tareas y su inclusión en la estructura curricular de la IED Antonio Nariño

Para la organización de las tareas dentro de la estructura curricular me cuestioné: ¿Cómo organizo un grupo de tareas desde la perspectiva de la generalización? Que respondí desde mi práctica como docente de aula, en la Institución Educativa Departamental Antonio Nariño (IEDAN) donde, al hacer un estudio de la distribución de los temas descritos en las mallas de aprendizaje, consideré la implementación de tareas de generalización antes de iniciar el tema de monomios y polinomios, para los estudiantes de grado octavo en el primer periodo de clase, pero por los periodos de tiempo en los que se desarrolla este trabajo (finales del año escolar 2018) la implementación será con estudiantes que finalizarían el grado séptimo en ese mismo año, para comenzar el trabajo algebraico con el mismo grupo de estudiantes en el año 2019, de acuerdo con la estructura curricular institucional y tomando como referencia esta implementación como apoyo al trabajo algebraico en grado octavo.

Para la organización de las tareas contemplo las primeras aproximaciones de la propuesta 3, descritas en el primer ciclo de reflexión, en el que desde el trabajo individual de los estudiantes descubrí aspectos relacionados con la visión de la regularidad y la configuración de la forma. De dicha descripción considero importante el trabajo individual del estudiante, en cada una de las tareas, para que se familiarice con la secuencia presentada y luego consolide su proceso con la implementación del trabajo grupal, con expresiones matemáticas (en las que refute o afirme las construcciones realizadas) y con la ayuda de los compañeros llegue finalmente al planteamiento de una expresión más sintética de la relación escrita.

Por lo tanto, la propuesta de organización para la implementación de este trabajo se distribuye en cuatro momentos, el primero pretende un acercamiento individual del estudiante a cada tarea, el segundo un trabajo grupal (de tres estudiantes) con el fin de afirmar o refutar la propuesta construida por cada alumno, un tercer momento de socialización general a manera de exposición, donde se discutan los acuerdos o desacuerdos de las relaciones establecidas entre las figuras y las operaciones matemáticas, para finalmente realizar un trabajo de institucionalización en el que intervendría como docente.

3.2.3 Objetivos de aprendizaje del diseño

Este diseño enfocado a la selección de tareas de generalización pretende desarrollar la siguiente trayectoria de aprendizaje con los estudiantes de grado séptimo, de la IEDAN.

- Para la primera tarea construir la interpretación de relaciones numéricas en una figura desde la visualización, como estrategia de acercamiento a actividades de generalización.
- Para la segunda tarea establecer relaciones numéricas, a través de operaciones matemáticas, entre el número de fichas que compone una figura y el número de la figura en una secuencia.
- Para la tercera tarea interpretar dichas relaciones numéricas entre la cantidad de elementos que componen una figura y su posición en una secuencia (por medio de una operación), a partir de la forma de visualización de esta.

Finalmente, el objetivo general para el diseño de estas tres tareas es interpretar, a partir de la solución de diversas tareas de generalización, la letra como variable generalizada por medio del establecimiento de relaciones entre el número de elementos que compone una figura y la posición de esta en una secuencia, desde la caracterización de las distintas formas de ser visualizadas.

3.2.4 Descripción de las tareas

Para la selección de las tareas propuestas, consideré conveniente preguntarme ¿cómo organizo un grupo de tareas desde esta perspectiva de la generalización? que respondí por medio de las siguientes tres tareas que se propusieron a estudiantes de grado séptimo y que dieron respuesta a los objetivos de aprendizaje del diseño, así como a la organización de estas en la estructura curricular, descrita en el apartado 3.2.3 de este trabajo:

Tarea 1: Bordes

A continuación, se presenta la figura 1, 2 y 3 de una secuencia:



Figura 1



Figura 2



Figura 3

Ilustración 2. Tarea 1. Bordes

1. Dibuje la figura 5 y 6
 - a. ¿Cuántos cuadrados hay en el borde de la figura 5?
 - b. ¿Cuántos cuadrados hay en el borde de la figura 6?
2. ¿Hay alguna manera de encontrar los cuadrados el borde de la figura 15 sin dibujar la figura? Explique su respuesta.
3. Mario tiene exactamente 44 cuadrados el borde de una figura ¿A qué número de la figura corresponde? Explique su respuesta.
4. ¿Existe una manera general de encontrar la cantidad de cuadrados en el borde de cualquier figura? Explique su respuesta.

Tarea 2: Las Fichas



Figura 1

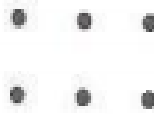


Figura 2

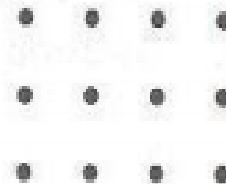


Figura 3

Ilustración 3. Tarea 2. Las Fichas.

1. Dibuje la figura 4 y 5
 - a. ¿Cuántos puntos hay en la figura 4?
 - b. ¿cuántos puntos hay en la figura 5?

- ¿Hay alguna manera de encontrar los puntos de la figura 20 sin dibujar la figura? Explique su respuesta.
- Daniel quiere construir la figura 100, explique lo que debe hacer para construirla.
- Santiago tiene la figura de esta secuencia donde usó exactamente 45 puntos ¿A qué número de la figura corresponde? Explique su respuesta.
- ¿Cómo podría hacer para encontrar la cantidad de círculos de cualquier figura?

Tarea 3: Los palillos

A continuación, se presentan la figura 1, 2 y 3 de una secuencia:

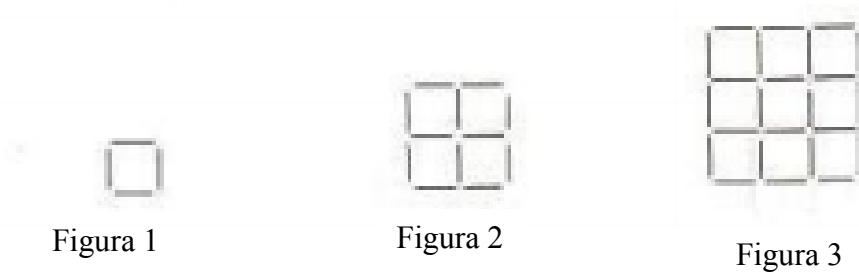


Ilustración 4. Tarea 3: Los palillos.

- Dibuje La figura 5 de la secuencia, ¿cuántos palillos la componen?
- ¿Cuántos palillos hay en la figura 9? Explique su respuesta.
- ¿Cuántos palillos hay en la figura 100? Explique la respuesta.
- Existe algún procedimiento para calcular el número de palillos para una figura cualquiera.

3.2.5 Posibles soluciones

En esta sección presento las soluciones a las tareas con el fin de responder a ¿Qué puedo anticipar de lo que creo que va a pasar en torno a las tareas propuestas? De las que tomé en cuenta diferentes aspectos relacionados con la representación y descripción de las secuencias,

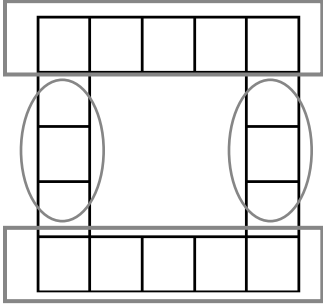
algunas de las cuales obtuve en la implementación de la tercera propuesta del primer ciclo de reflexión.

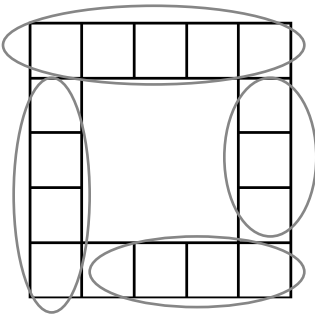
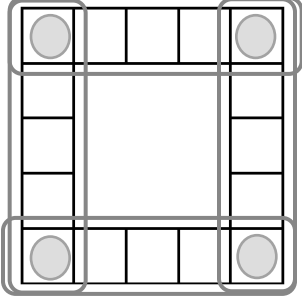
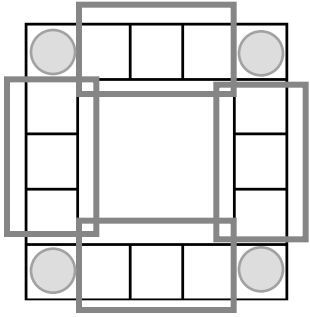
3.2.5.1 Tarea 1

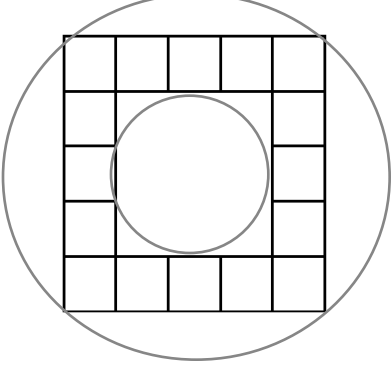
De las primeras impresiones que considero que pueden expresar los estudiantes, para solucionar esta actividad, contemplé que un primer proceso consiste en multiplicar por 4 la cantidad de cuadrados que componen el lado del borde. Dado que la figura tiene 4 lados iguales el estudiante puede generar estrategias como las obtenidas en la sesión de pilotaje, donde reconocía que las esquinas se contaban dos veces (por tanto, descontaba las 4 esquinas) para así contar inicialmente la cantidad de cuadrados que componen el borde, multiplicar por 4 (el número de lados) dicha cantidad de cuadrados y al final adherir los 4 cuadrados que componen las esquinas.

La siguiente tabla describe las posibles interpretaciones de los estudiantes en torno a la relación de la figura con las cantidades numéricas presentadas.

Tabla 7. Interpretación de posibles soluciones a la tarea 1. Borde.

DIBUJO	INTERPRETACIÓN
	<p>El estudiante puede tomar los cuadrados que están de manera horizontal en la parte superior e inferior de la figura, luego, contar los cuadrados que quedaron en las hileras verticales pero que no fueron contadas en las primeras hileras, obteniendo la operación $5 + 5 + 3 + 3$</p>

	<p>El estudiante puede ir contando las hileras de acuerdo con el orden en que las vea, comenzaría con la primera hilera horizontal, de ella cuenta 5 cuadrados, luego, la primera hilera vertical que contiene 4 cuadrados, luego la segunda hilera horizontal que contiene otros 4 cuadrados y finalmente la segunda hilera vertical que contiene 3 cuadrados, de ellos sumaría las cantidades encerradas en la figura: $5 + 4 + 4 + 3$</p>
	<p>El estudiante podría contar las 4 hileras compuestas por los 5 cuadrados iniciales y quitar los cuadrados que se encierran dos veces, dado que se repiten, pues se están contando dos veces, de ello nace la operación $5 \times 4 - 4$</p>
	<p>Este último caso se da inverso al anterior, no se contaría la cantidad de cuadrados totales, de este se quitarán 2 cuadrados que son los que están ubicados en las esquinas, se multiplicaría por 4 dado que es la cantidad de hileras que tiene la figura y finalmente le sumaría los 4 cuadrados no contados al inicio, es decir $3 \times 4 + 4$</p>

	<p>Una última opción, sería considerar la cantidad total de cuadrados que se pueden formar en la figura y de este retirar la cantidad total de cuadrados que se forman al interior de la figura, para el caso específico $5^2 - 4^2$</p>
---	---

Los términos que se valoran y promueven con esta actividad están ligados a la relación de las operaciones y el número de la figura, para con ello hacer un reconocimiento de una relación entre la cantidad de la figura y la cantidad de cuadrados presentados en la tarea.

3.2.5.2 Tarea 2

Para dar solución a esta tarea los estudiantes podrían recurrir a contar las cantidades que componen cada figura y representarlas de acuerdo con las formas de agrupación que la componen, por ejemplo, para la figura dos las interpretaciones podrían ser:

Otras variables que se podrían interpretar, tomando como ejemplo la figura, 3 son:

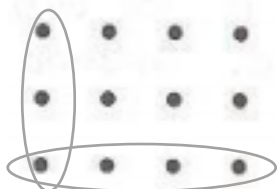


Figura 3

Se puede formar un rectángulo que de largo tenga la cantidad de puntos que corresponden al número de la figura y de ancho la cantidad de puntos del número de la figura más uno, para hallar, por medio de la multiplicación de esas dos cantidades, la cantidad total de puntos. correspondería al producto entre el largo y ancho de la figura.

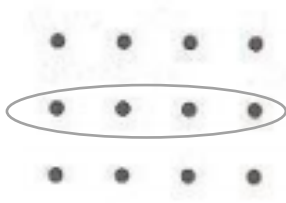
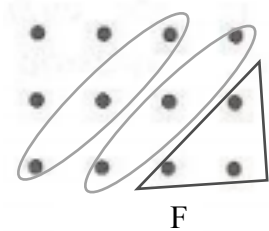


Figura 3

El estudiante podría seccionar la figura por hileras de manera horizontal, la cantidad de puntos que se encuentran en las filas corresponde al número de la figura más uno y la cantidad de puntos que conforman las columnas corresponden al número de la figura. Para este caso tres hileras compuestas por cuatro puntos cada una.

Ilustración 6. Interpretación de solución 2 para figura 3.



Se puede considerar el caso en que se interprete la relación entre la cantidad de puntos que conforman la diagonal y la cantidad de puntos que no se encuentran en la diagonal, descubriendo que de los puntos que no se encuentren en las diagonales de la figura existe la relación de los números triangulares correspondientes al número de la figura menos uno.



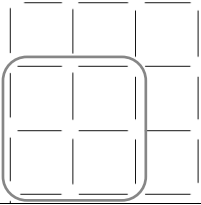
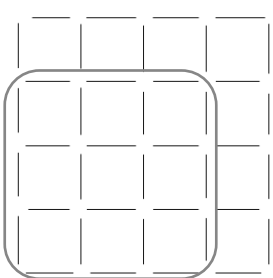
Ilustración 7. Interpretación de solución 3 para figura 3.

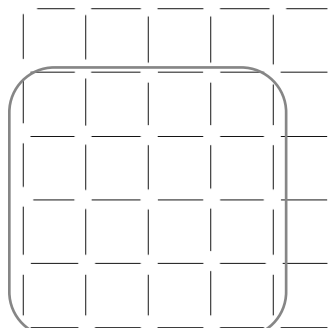
3.2.5.3 Tarea 3

Para la solución de esta tarea consideré varias interpretaciones que dieron los estudiantes en la propuesta 3 del primer ciclo de reflexión, y tomo como ejemplo la siguiente interpretación y la respectiva tabla para esquematizar la idea de los posibles resultados de esta actividad.

- El estudiante podría añadir los palillos que necesita para armar la siguiente figura, de donde obtendría una serie de relaciones para identificar el valor que corresponda a la cantidad de palillos del número de la figura que se pregunta y de ello, quizás, encontrar un patrón entre ellas.

Tabla 8. Posibles soluciones para la actividad Los Bordes.

N°	Figura	Explicación
1		La figura 1 tiene 4 palillos
2		La figura 2 tiene los 4 palillos de la figura 1, más 8 palillos, dando un total de 12 palillos.
3		La figura 3 contiene la cantidad de palillos de la figura 2 más 12 palillos
4		La figura 4 contiene, la cantidad de palillos de la figura 3 más 16 palillos que forman la siguiente figura, obteniendo la relación entre 4 el número de la figura y 4 el número de palillos.

5		<p>Se valida la información conjeturada para la figura 4 y se encuentra cierta la relación, para la figura 5, la cantidad de palillos equivale a la cantidad de palillos de la figura 4 más el resultado de multiplicar 5×4, que corresponden a la cantidad total de palillos.</p>
---	---	--

Si las respuestas de los estudiantes coinciden con las interpretaciones descritas en la tabla anterior, para esta tarea le preguntaré la estrategia que emplearía para encontrar la cantidad de palillos que componen las figuras que son extensas para ser dibujadas, como por ejemplo la cantidad de palillos para la figura 20, 25, para la cantidad de palillos de la figura 50 o si dibujaría la figura 100, porque para ella tendría que dibujar todas las 99 figuras anteriores, lo que le complicaría el cálculo de la cantidad de palillos.

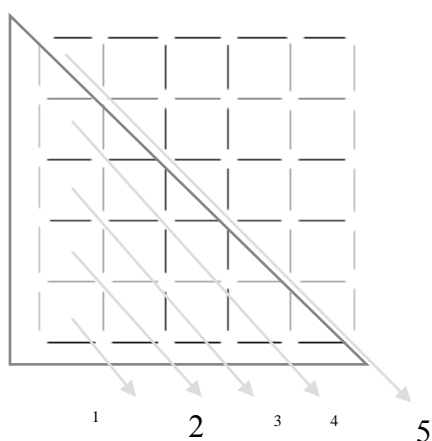


Ilustración 5. Ejemplo de solución 1 para actividad de Bordes.

Otra de las opciones considerada, consiste en que el estudiante divida la figura por sus diagonales obteniendo 2 triángulos iguales en los que encontraría en la cantidad de palillos que componen cada triángulo, la relación de los números triangulares, por ejemplo para la figura 5 el estudiante contaría los 4 palillos que forman cada cuadrado y por tanto se multiplicaría por 4, obteniendo la siguiente operación:

$$4 \times \left(\frac{5 \times (5 + 1)}{2} \right)$$

Con las respuestas que den los estudiantes a las tareas, realizaré un ejercicio de socialización de las interpretaciones de los alumnos buscando encontrar estrategias de generalización que, aunque fueran vistas de forma diferente, conducen a una misma respuesta numérica. La valoración de los aprendizajes se hará de acuerdo con el trabajo individual, grupal y conjunto de los estudiantes en relación con las justificaciones de la relación de las figuras con

los elementos que la componen o la describen, contemplando la posibilidad de no descubrir la letra como variable, pero si una interpretación por medio de una operación matemática que permita describir una relación entre cantidades y figuras.

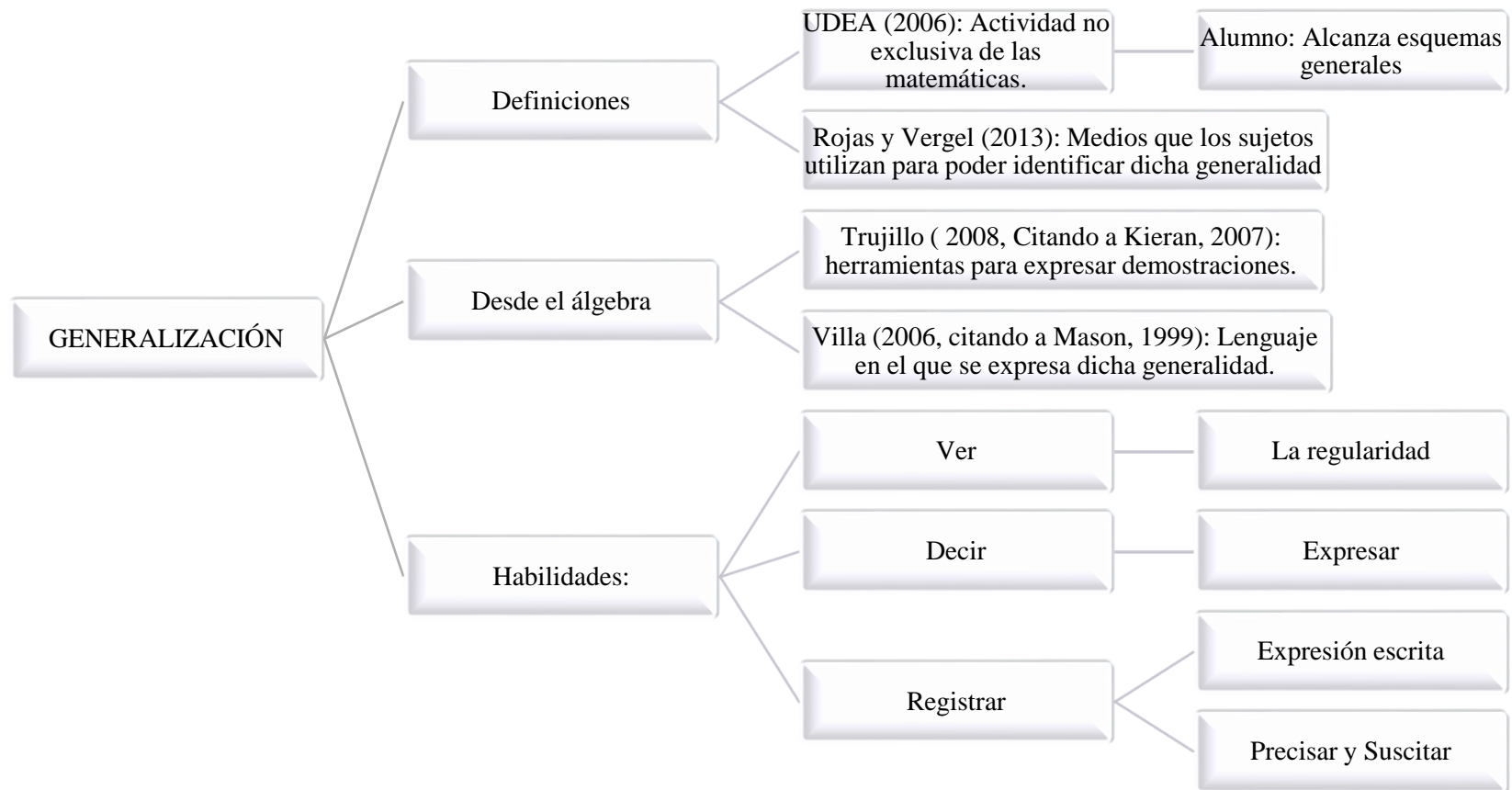
3.2.6 Referentes conceptuales para el diseño

Al considerar aspectos conceptuales relacionados con la implementación de actividades de generalización en la escuela y como proceso para la enseñanza y el aprendizaje, encuentro diferentes perspectivas respecto a su definición, de las cuales rescato las siguientes consideraciones.

- La generalización, como un proceso de la actividad matemática (no exclusiva), es una actividad en la que el alumno tiene por meta alcanzar esquemas generales de pensamiento matemático y reconoce un caso particular de una clase general de problemas ante una situación. También puede ser el proceso contrario, en el que el alumno vea los casos particulares a través de clases de generalización de los problemas (Universidad de Antioquia, 2006).
- Rojas y Vergel (2013) definen la generalización como un proceso caracterizado por medios que los sujetos utilizan para identificar una generalidad a través de patrones de figuras, los cuales se convierten en una estrategia para introducir el álgebra en la escuela. Estos procesos posibilitan a los estudiantes acercarse a situaciones de variación, las cuales son importantes para el desarrollo del pensamiento algebraico.
- En lo relativo al álgebra como procesos de generalización, Trujillo (2008) plantea que estos procesos son una herramienta para expresar demostraciones, pues en el ejercicio de reconocimiento de patrones se busca la validez desde una expresión.
- Para Villa (2006) la generalidad es considerada la vida de las matemáticas y el álgebra como el lenguaje con que se expresa una relación.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, en este ciclo de reflexión asumí que la generalización se convierte en una herramienta para la introducción del álgebra escolar. Este proceso incorpora diferentes formas de visualización, de reconocimiento de variables y establecimiento de relaciones entre ellas. Por otra parte, consideré conveniente considerar los medios utilizados para la interpretación de una cierta generalidad, por lo cual enfatizo en las tres (3) habilidades propuestas por Mason (1999): ver, decir y registrar. Así, para esta experiencia de diseño fue fundamental diferenciar tres momentos en los procesos de generalización: (i) la visión de la regularidad, (ii) su exposición verbal y (iii) su expresión escrita de la manera más concisa posible.

El siguiente esquema sintetiza algunos aspectos relacionados con la significación del álgebra, desde investigaciones resaltadas en párrafos anteriores.



Esquema 1. Aspectos relacionados con la significación del álgebra.

3.2.7 Materiales para la implementación de la propuesta

Respecto a los aspectos relacionados con la aplicación, primero debí tener en cuenta el tiempo de implementación de las tareas propuestas (apartado 2.3.4). Estas se desarrollaron en 6 sesiones de clases, los días 23, 24, 30, 31 de octubre, 6 y 7 de noviembre del año 2018. De la implementación de la propuesta obtuve registro de las soluciones de los alumnos por medio de los escritos de estos (para el desarrollo de las tareas de manera individual y grupal) y la información recolectada en fotos y algunos videos (que contaban con previo consentimiento de los padres). En relación con las condiciones para el desarrollo de las actividades tuve en cuenta que estas se ejecutaron en el salón de clases y se implementarán en el último periodo académico del año 2018.

3.2.8 Recolección y sistematización de la información relacionada con la implementación de la propuesta

Para registrar la solución de las actividades tuve en cuenta: el trabajo individual de los estudiantes consignado en el documento escrito de la tarea y el trabajo en grupo, de máximo tres estudiantes (el criterio para que sean tres estudiantes es tener un tercer alumno que impulse un acuerdo cuando no hay consenso y permita una solución colectiva). Consideré conveniente la recolección de algunos videos de trabajo de un solo grupo, al igual que el registro en video de la socialización general de la solución de las actividades que debió exponer cada grupo al curso.

Respecto al diario de campo del profesor, en el recogí los diferentes momentos de la ejecución de la clase, tuve en cuenta las preguntas del planteamiento de Smyth (1991), respecto al proceso de reflexión guiada que orientaron la elaboración del diario de campo (consignado en el Anexo 2 de este trabajo) y que para este segundo ciclo de reflexión respondió a:

- a. ¿Qué pude decir de lo que pasó?
- b. ¿Qué aspectos fueron favorables? ¿Cuáles no y por qué?
- c. ¿Qué ajusté al proponer estas tareas?
- d. ¿Qué se modificó en mi práctica profesional?
- e. ¿Qué resistencias identifiqué en mi práctica?

f. ¿Qué me proporcionó la posibilidad de reflexionar sobre mi práctica?

3.3. Resultados del segundo ciclo de reflexión

De la sistematización de datos del segundo ciclo de reflexión, a la luz de las categorías de reflexión guiada, construí los siguientes resultados que me permitieron evaluar esta nueva experiencia. Esta experiencia me permitió superar las dificultades descritas en el primer ciclo de reflexión, relacionadas con los problemas de mis estudiantes para interpretar la letra como variable generalizada.

3.3.1. Aspectos conceptuales del profesor

Los datos consignados en la tabla correspondieron a una caracterización descriptiva que dio respuesta a las preguntas planteadas para esta categoría, a partir de registros consignados en el diario de campo del profesor y que no fueron evidentes en los vídeos, fotos y registros escritos de los estudiantes. Esta información recogió aspectos relacionados con lo que sabía del tema a enseñar, el material de consulta revisado para hacer la planeación, en qué me apoyé para proponer los objetivos de clase y lo que usé de lo que sabía para enseñarlo.

En relación con lo que quería enseñar a los estudiantes tomé como referencia ejemplos de imágenes del registro escrito de las soluciones, que corresponden a formas de representar en la solución de la actividad 1, la cual interpreté como la forma a la que recurren los estudiantes para entender una secuencia y graficarla. Este aspecto corresponde en parte a las decisiones tomadas a partir de los resultados de la propuesta 3, descritas en el primer ciclo de reflexión, donde a manera de pilotaje implementé algunas actividades de generalización que arrojaron resultados positivos relacionados con las interpretaciones del tema, promover el uso de expresiones matemáticas para el desarrollo de las tareas e implementar una evaluación de acuerdo con el proceso de mis estudiantes.

Destaco en esta implementación que lo que quería enseñar se asociaba a la interpretación y reconocimiento de relaciones, por medio de operaciones entre el número de elementos que componen la figura y la posición de la figura, en la secuencia de cada una de las tareas propuestas. Esto lo identifiqué en la solución de los estudiantes, pues reconocí las diversas formas de representar las relaciones, y pude entender sus afirmaciones (como por ejemplo

agrupar cantidades en parejas o tríos para explicar una relación matemática como el doble o el triple de) en el proceso de participación en clase.

Con base en consultas previas, referentes al proceso de generalización como estrategia para introducir el álgebra desde la interpretación de la letra como variable o para este caso un acercamiento a esta interpretación, propuse objetivos específicos que se relacionaban con el desarrollo de cada tarea propuesta y un objetivo general para el desarrollo de toda la propuesta; también consideré lo que institucionalmente se propuso en las mallas de aprendizaje para ese grado, en ese momento.

3.3.2. Las técnicas e instrumentos

Se caracterizaron por justificar el sentido que tenía lo que realizaba en clase, ahí identifiqué mi práctica como un proceso que dio respuesta al interrogante ¿por qué hice lo que hice y no de otra forma? Confronté entonces mi práctica con afirmaciones, algunas relacionadas con la caracterización de inspiración y descripción que le dieron sentido a lo que hice a través de la interpretación de relaciones entre las operaciones y las figuras, la expresión de una regularidad por medio de una operación aritmética y las formas de representar las relaciones (por medio de la expresión oral, gráfica o escrita).

Con todo esto interpreté que los recursos, constituidos en actividades impresas, podían registrar de manera gráfica las relaciones que construían los estudiantes cuando solucionaban la tarea, como la construcción gráfica de las secuencias de figuras para identificar la regularidad, que permitió justificar el trabajo matemático realizado en clase, a partir de la construcción de operaciones aritméticas que llevaron a interpretar dicha relación y la implementación de lenguaje matemático para explicar lo realizado.

La relevancia de esta implementación se constituyó en la identificación de los esquemas de las relaciones entre las representaciones gráficas y numéricas de cada una de las tareas de la propuesta, allí el estudiante realizó justificaciones desde lo gráfico, lo cual permitió potenciar habilidades como la visualización y el registro escrito de la regularidad encontrada por medio del

lenguaje matemático, procesos en los cuales me apoyé para hacer las intervenciones en las socializaciones conjuntas de las actividades.

De manera puntual en este aspecto, los datos recogidos contemplan recursos como las actividades impresas con las que los estudiantes podían graficar las relaciones establecidas en cada una de las figuras presentadas en las tareas. Para esquematizar estas relaciones recurrí, por ejemplo, al uso de una de las imágenes de la actividad 3 de un estudiante; allí se evidenció que dibujó toda la secuencia de puntos para identificar cada uno de los elementos que componen la figura y registró la relación entre el número de la figura y la cantidad de puntos que la componen. Esta información se caracterizó por ser descriptiva, puesto que narraba las características recogidas de la información que dio respuesta a la pregunta ¿Qué recursos y qué papel creo que jugará el material? Y que reconocí en las respuestas de más de un estudiante.

Tomé como referencia el registro escrito de mis estudiantes para ejemplificar y entender mejor mi labor en el aula y poder responder a las diferentes situaciones de la actividad de las fichas; por ejemplo, por medio de la construcción gráfica de secuencias de las figuras presentadas, se identifican las relaciones entre la cantidad de puntos y el número de la figura. Con esto reconocí que la implementación de actividades de generalización y su registro por medio de hojas condujo al uso de representaciones gráficas, para interpretar las formas en las que los estudiantes establecieron relaciones y cómo construyeron operaciones, que justificaron dichas interpretaciones, entre la cantidad de elementos que componen la figura y el número de la figura, y que luego desembocaron en la respectiva evaluación.

Describí también la importancia del material para lo que quería enseñar, su relevancia para realizar las representaciones gráficas y así interpretar las formas de visualización del estudiante, además de justificar las operaciones que gráficamente se habían representado. En este sentido, respecto a la inspiración como elemento que caracterizó este aspecto, encontré en el registro gráfico de las actividades de un estudiante, la interpretación de la relación entre las representaciones gráficas y las operaciones, la construcción de la relación entre el número que compone una figura y la cantidad total de elementos que la componen.

3.3.3. Gestión de la propuesta

De manera general, describí en esta categoría el planteamiento de preguntas que fueron más allá de la interpretación de las relaciones numéricas, que se pensaron para guiar al estudiante a identificar una regularidad. Con las preguntas planteadas llevé al estudiante a justificar oralmente las interpretaciones que tenía de la secuencia que estaba construyendo en relación con cada una de las tareas; esto me ayudó en el momento de gestionar la enseñanza porque promovió que el estudiante hiciera exposiciones verbales de sus estrategias de conteo, para que construyera lo más sucintamente posible la relación que había encontrado entre lo gráfico y lo numérico.

Además, esta categoría me permitió identificar que, en el trabajo en grupo de tres estudiantes se sortearan imprevistos de las soluciones, lo que le dio sentido a lo que hacía en clase por medio de las orientaciones para el desarrollo de la actividad. Dichos imprevistos se relacionaron con la solución de casos lejanos de la secuencia propuesta en las tareas, un ejemplo fue la interpretación de la cantidad de puntos que componen el lado de la figura 100 de la tarea 2, las fichas, donde el valor de la cantidad de puntos que componía el lado de la figura no coincidía con las soluciones dadas por los grupos de estudiantes, al respecto hubo una gran discusión que puso al descubierto las interpretaciones gráficas de los estudiantes en las exposiciones.

La primera exposición usó representaciones gráficas de las secuencias construidas, desde la figura 1 hasta la figura 100, para encontrar el total de puntos: allí se encontró que la cantidad de puntos que componen el lado de dicha figura es 102. La segunda exposición se apoyó en las relaciones entre las cantidades que componía cada figura y el número de la figura en sí, lo que condujo a establecer una analogía desde los casos particulares a los casos generales, este grupo mostró, desde las relaciones encontradas en la figura 1, 2 y 3 (que se muestran en la ilustración), la dependencia entre la cantidad de puntos que componen el lado de la figura y la cantidad de puntos que componen el ancho de la figura (donde el alto tiene la cantidad de puntos que corresponde al número de la figura y el ancho el número de la figura más uno), de lo que se concluyó que la cantidad de puntos que componía el lado de la figura 100 era 101.

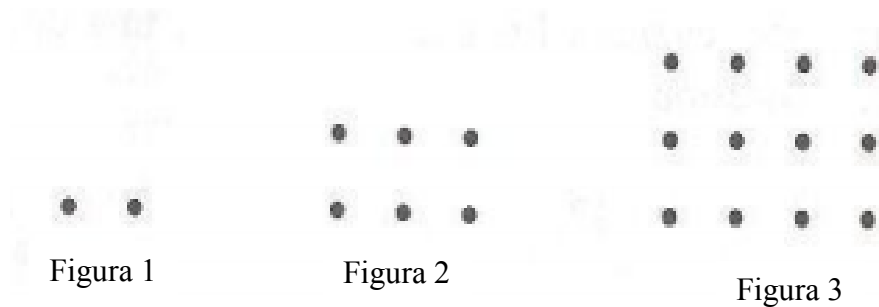


Ilustración 6. Figura 1, 2 y 3 de la tarea 2, las fichas

Esta discusión, más allá de encontrar el grupo de estudiantes que tenían razón o no, me permitió identificar los procesos de los estudiantes para expresar demostraciones que dieran validez a su afirmación, como fueron los recursos gráficos y escritos; de igual forma estas demostraciones las tuve que aclarar por medio de las relaciones gráficas entre el número de la figura y la cantidad de elementos que la componen, soportada por casos particulares para expresar el caso general y así no dejar dudas del proceso de los estudiantes.

Lamentablemente, el tiempo de ejecución de las tareas se acortó porque las actividades institucionales dificultaron la consecución del proceso, sin embargo, implementé las tres tareas propuestas con el ánimo de llegar a la interpretación de una regularidad por medio de los patrones de figuras, sin llegar a la interpretación de la letra.

3.3.4. Discurso que se presenta en el aula

Pensé promover el uso de expresiones matemáticas a partir de las actividades de los estudiantes, en las cuales recurrieron al uso de operaciones que permitieran establecer relaciones entre el número de la figura y la cantidad de elementos que la componen, para finalmente validar lo planteado desde las comparaciones entre lo gráfico y lo escrito. Dichas operaciones, en algunos casos expresaban la relación entre el número de la figura y un cálculo aritmético para hallar la cantidad total de elementos que la componían, otros casos mostraban el registro de una lista de las relaciones encontradas para establecer la operación entre el número de elementos que compone una figura y el número mismo de la figura y así poder identificar la generalidad de la solución.

En algunas socializaciones identifiqué las dificultades para reconocer las relaciones de las operaciones, como en el caso de la solución a la tarea 3 de los palillos donde se representa dos veces la misma operación, pues algunos estudiantes no interpretaron fácilmente la repetición de una operación como multiplicar por 2 (aquí no hallé explicación para esta dificultad), es decir si la operación consistía en 5×6 más 5×6 , identifiqué dificultad en algunos estudiantes para reconocer esta operación como $2 \times 5 \times 6$; para aclarar esta situación recurrí a la visualización de la figura para interpretar dicha relación, como se representa en la imagen siguiente:

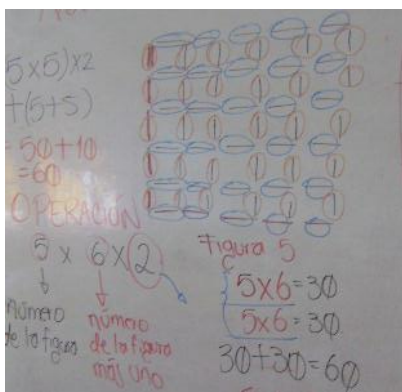


Ilustración 7. Formas de representar una operación en la actividad 3, Los palillos.

Este tipo de representaciones apoyó la interpretación de las relaciones entre las operaciones y fue útil para los estudiantes que no entendían esta referencia.

3.3.5. La valoración del aprendizaje

Esta categoría se caracterizó más por la confrontación con mi práctica. Por tanto, la valoración la realicé en tres momentos relacionados con aspectos de las interpretaciones realizadas en la propuesta de generalización de patrones del ciclo uno de reflexión de este trabajo, donde estructuré esta categoría bajo la lupa de Villa (2006), considerando que el estudiante desarrolló habilidades como las citadas por Mason (1999) en la sección 3.2.6, las cuales explico a continuación.

En lo que respecta a la visión de la regularidad valoré el proceso desde el trabajo individual del estudiante, la construcción de gráficos y operaciones que expresaban una relación

entre el número de la figura y el número total de elementos, como por ejemplo la relación que se muestra en la ilustración.



Ilustración 8. Representación de relación entre el número de la figura y el total de elementos que la componen desde la interpretación gráfica.

Respecto a la explicación y la realización de exposiciones verbales de dicha regularidad, contemplé primero el trabajo escrito individual y de manera consecuente el trabajo escrito realizado por los grupos de tres estudiantes, consideré la validez de lo realizado en relación con la interpretación de las relaciones entre el número de elementos que forman la figura y el número de la figura en la secuencia. Finalmente, tomé en cuenta el establecimiento de relaciones de manera escrita lo más sucintamente posible y que fue apreciada de manera general en el trabajo de socialización grupal conjunta.

La valoración del aprendizaje lo consideré desde dos aspectos esenciales asociados con el trabajo individual del estudiante, uno relacionado con el uso de representaciones gráficas para expresar la relación (agrupar de 2, 3 o 4 elementos y establecer la operación desde dicha agrupación), que se convirtió en un aspecto mínimo de valoración del proceso del estudiante, sus interpretaciones y las relaciones. El segundo incorporaba la relación entre el número de la figura

y la operación que daba luces para expresar de manera más sucinta la dependencia entre la cantidad total de elementos que compone la figura y el número de la figura.

Como no percibí casos en los cuales el estudiante no solucionaba la actividad de manera individual, porque por lo menos todos los estudiantes recurrieron a representar gráficamente la relación, encontré casos en los que el grupo de tres estudiantes no encontraron coincidencias para trabajar de manera conjunta y expresar una respuesta; en casos recurrí a una valoración individual del trabajo para no afectar el proceso.

En clase, la valoración se enfocó en la socialización del trabajo como método de exposición de conclusiones de los estudiantes, que permitieron identificar las representaciones de la relación de las operaciones entre la figura y la interpretación de una operación lo más sintéticamente posible; aunque no haya llegado a la interpretación de la letra si encontré procesos, en los que se buscó la validez de una expresión en torno a una representación gráfica, que interpreté como herramientas para expresar demostraciones.

3.3.6. Reflexión general

En conclusión, en cuanto a los aspectos relacionados en los apartados 3.3.1 a 3.3.5 identifiqué elementos relacionados con: primero, considerar datos descriptivos del diario de campo del profesor para dar respuesta a las preguntas que se desprendían de cada aspecto me permitió pensar acerca de lo que hago regularmente en clase; segundo, dar sentido a lo que hago por medio de la identificación de los fundamentos de mi práctica en el aula que promueven el proceso de la inspiración (soportada en la transcripción de videos y la descripción de imágenes de las actividades de los estudiantes); tercero, identificar la confrontación que me permite entender mejor mi labor en el aula y desde allí dar respuesta a por qué hice lo que hice y no de otra manera.

En este proceso no evidencié las transformaciones que se relacionaban con cómo podría ser mi práctica puesto que, en el momento de la implementación, no consideré cambios en la interacción de las actividades con los estudiantes. De manera retrospectiva considero que el

proceso hubiera sido más nutrido si, en casos como la socialización general, hubiera implementado recursos como grandes representaciones gráficas de las secuencias en material tipo plotter, que pudiera ser rayado por el estudiante para expresar las relaciones encontradas en las figuras de las tareas.

3.3.7. Contraste entre los resultados de los dos ciclos

En torno a la interpretación de los resultados de los dos ciclos de reflexión, descritos en este trabajo, considero relevante la descripción de los aspectos, sobre las categorías de reflexión guiada propuestas por Smyth (1991), que representaron cambios sustanciales entre el primer y segundo ciclo.

- De los aspectos conceptuales en el segundo ciclo hice un acercamiento a la interpretación de la letra como variable y doté de significado el uso de expresiones en un contexto, lo cual no había logrado en las primeras experiencias narradas en el primer ciclo de reflexión.
- Las técnicas e instrumentos simbolizaron un cambio en el contenido pero no en el recurso, es decir la implementación de tareas de generalización en hojas de trabajo promovió el uso de representaciones gráficas que permitieron el establecimiento de las relaciones numéricas en una secuencia, lo que condujo a la interpretación de lo que varía por medio del reconocimiento de dependencias entre el número de elementos que componen una figura y el número de la figura; esto lo consideré un primer acercamiento a la interpretación de la letra como variable generalizada.
- Mi gestión tuvo un cambio pues en el primer ciclo la definí como “segregadora” porque estructuraba la clase por los momentos de explicación, ejemplo, ejercicio y evaluación del concepto. Ahora la considero más participativa debido a la interacción de los estudiantes con la tarea para exponer los diferentes resultados representados gráficamente y las expresiones usadas para justificarlos.

- La valoración de los aprendizajes en el segundo ciclo se transformó en un proceso que tuvo en cuenta todo su desarrollo para que el estudiante llegara al resultado final o a la interpretación final de la tarea, más que la realización válida o no de una operación como lo fue en el primer ciclo.
- La implementación de un discurso matemático en las clases tuvo un acercamiento en el primer ciclo de reflexión por medio de la propuesta 3, en estas clases identifiqué las primeras formas de representación de acuerdo con la visualización de patrones de las figuras propuestas. De manera semejante identifiqué algunas modificaciones del lenguaje y el uso de algunos términos matemáticos, para explicar las relaciones encontradas, entre el número de la figura y la cantidad de elementos que la componen. Esta idea se reflejó en la implementación del segundo ciclo, pues el uso de expresiones de las relaciones matemáticas fue más claro para los estudiantes y se vio la necesidad de ser implementadas para expresar una relación y para identificar claramente los errores en la interpretación de las representaciones, socializadas en el trabajo de grupo.

4. ASPECTOS METODOLÓGICOS

El marco de referencia que orientó los aspectos metodológicos de este trabajo de reflexión sobre la práctica fue el trabajo de Smyth (1991). El cual considera interrogar la práctica a partir del planteamiento de preguntas relacionadas con las siguientes categorías: aspectos conceptuales del profesor, las técnicas e instrumentos, la gestión del profesor en el aula, el discurso y la valoración del aprendizaje. Cabe anotar, que el desarrollo de los aspectos metodológicos que se presentan a continuación tuvo en cuenta los aportes del curso corto “Sistematización de ejercicios de reflexión guiada sobre la práctica del profesor de matemáticas”, impartido en la Universidad Pedagógica Nacional.

Este marco de referencia me llevó a desarrollar dos ciclos de reflexión. Los dos ciclos que componen esta propuesta son: una mirada retrospectiva de mis experiencias anteriores y una nueva experiencia de diseño de un ambiente de aprendizaje que fomente la interpretación de la letra a partir de procesos de generalización para superar las dificultades encontradas en el primer ciclo. El siguiente esquema sintetiza el proceso de reflexión sobre la práctica llevado a cabo en los dos ciclos descritos.

Tabla 9. Descripción de los ciclos de reflexión.

PRIMER CICLO		
Exploración de posibilidades para superar dificultades		
Matriz de preguntas		
Propuesta 1	Propuesta 2	Propuesta 3
Contexto de la electrónica	Álgebra geométrica	Generalización desde el conteo de patrones
↓		
SEGUNDO CICLO		
Implementación de propuesta desde el conteo de patrones		
Diseño	Implementación	Evaluación

Para describir las acciones llevadas a cabo en cada ciclo, este capítulo se organizó en tres apartados: (i) Descripción de los ciclos de reflexión; (ii) Caracterización de los datos; (iii) Categorías de análisis y descriptores de cada categoría.

4.1 Descripción de los ciclos de reflexión

La recolección de la información para el primer ciclo se llevó a cabo a través de notas del profesor, las cuales escribí teniendo como evidencias los registros de trabajos de los estudiantes y portafolios que aún conservaba. Dicha reconstrucción de mis experiencias, en las notas del profesor, me condujo al análisis de tres situaciones: una experiencia relacionada con el contexto de la electrónica, encaminada a la interpretación y uso de la letra para representar un elemento electrónico en el análisis de circuitos; una segunda experiencia relacionada con el contexto algebraico geométrico, que conducía al desarrollo de actividades relacionadas con conceptos de área y perímetro, donde usé letras para representar medidas de longitudes de segmentos; y la tercera experiencia relacionada con la interpretación de la letra en situaciones de generalización de series de patrones geométricos o numéricos. Para evaluar mis experiencias en este primer ciclo tomé como referencia las preguntas propuestas por categorías en la reflexión guiada de Smyth (1991), descritas en la tabla del apartado 2.2 de este trabajo, con las cuales sistematicé la información recogida en las notas del profesor.

Después de este primer ciclo inicié un segundo ciclo de reflexión en el que realicé un ejercicio de diseño, implementación y evaluación de una propuesta que promoviera el tránsito entre lo aritmético y lo algebraico. Esta propuesta suscitaría la interpretación de la letra en un contexto algebraico a partir de tareas de generalización, con miras a superar las dificultades encontradas en el proceso reflexivo del primer ciclo. Por consiguiente, este segundo ciclo de reflexión pretendió interpretar, examinar y evaluar esta experiencia de diseño sobre la interpretación de la letra en contextos algebraicos. En este ciclo describí los momentos antes de la acción, en la acción y post acción propuestos por Parada (2001), para que este trabajo se convirtiera en un proceso sistemático de reflexión sobre mi práctica como profesora de

matemáticas, teniendo además como referencia las categorías de la reflexión guiada propuesta por Smyth (1991).

4.2 Caracterización de los datos

Para caracterizar los datos que corresponden a las respuestas recolectadas en las diferentes fuentes de información y los cuales responden a las preguntas planteadas en las categorías de reflexión guiada adaptadas del planteamiento de Smyth (1991), construí descripciones para cada uno de los dos ciclos.

Para el ciclo uno realicé una reconstrucción descriptiva de mi experiencia pedagógica con notas del profesor. De manera más puntual, cada una de las descripciones correspondía a la implementación de actividades que me permitieran el tránsito de lo aritmético a lo algebraico, a través de la interpretación de la letra como algo que varía. Tomé dichas descripciones y las sistematicé en la tabla 9, para construir datos que dieran respuesta a las preguntas asociadas con las categorías para una reflexión guiada, descritas en el apartado 2.2 de este trabajo, que me permitieron interpretar la información recolectada para construir los resultados y recomendaciones de mi práctica.

En consideración, diseñé un segundo ciclo, en el que a partir de seis sesiones de clase registré las soluciones a tres tareas de generalización de patrones, con estudiantes de grado séptimo para conducir a la interpretación de la letra como número generalizado. En este trabajo tomé registros de las soluciones de las actividades realizadas por los estudiantes con fotos y algunos videos grabados en los momentos del trabajo individual, grupal (trabajo de 3 estudiantes) y conjunta (el grupo en general); además el diario de campo del profesor en el que describí algunos apartes de la implementación de las tareas que apoyaron la descripción realizada de esta propuesta.

Para el análisis respectivo construí datos, a partir de las fuentes de información, para dar respuesta a las preguntas de cada una de las categorías que constituyen una reflexión guiada. Estos datos se caracterizaron en cuatro aspectos relacionados con la reflexión guiada, a saber:

descripción, inspiración, confrontación y transformación. Estos me permitieron realizar afirmaciones respecto a los resultados en este segundo ciclo y los cuales describo puntualmente en la sección 4.3 de este trabajo.

4.3 Categorías para el análisis de los datos y descriptores

Las categorías consideradas para el análisis de la información en los dos ciclos de reflexión fueron cinco, a saber: aspectos conceptuales del profesor, aspectos técnicos e instrumentos, gestión, discurso y valoración del aprendizaje. Para efectos de la sistematización de la información del primer ciclo de reflexión y la construcción de datos, organicé la tabla 9. La información sistematizada en esta tabla se extraía de las notas del profesor. En las filas se ubica la información que da respuesta a cada una de las preguntas planteadas por categoría. Dichas preguntas las adapté de la propuesta de reflexión guiada de Smyth (1991).

Tabla 10. Categorías y preguntas de reflexión guiada, adaptadas de la propuesta de Smyth (1991)

CATEGORÍAS	PREGUNTAS
<i>ASPECTOS CONCEPTUALES DEL PROFESOR</i>	¿Qué quiero enseñar a los estudiantes?
	¿Qué sé del tema?
	¿Qué material de consulta debí revisar para hacer la planeación?
	¿En qué me basé para proponer el objetivo de clase?
	¿Qué usé de lo que sabía al enseñarlo?
<i>TÉCNICOS E INSTRUMENTO</i>	¿Qué recursos usé y que papel creo que jugará el material?
	¿El material fue importante para lo que quería enseñar?
<i>GESTIÓN</i>	¿Qué preguntas hice a los estudiantes?
	¿Cómo gestioné la enseñanza?
	¿Qué aspectos de los estudiantes y del contexto influyeron en la enseñanza?
	¿Surgieron imprevistos y cómo se sortearon?
	¿Cambié algo respecto a lo gestionado?
<i>DISCURSO</i>	¿Qué términos, notaciones, expresiones pensé promover y por qué?
	¿Qué términos, notaciones y expresiones promoví?

	¿Los estudiantes usaron los términos que se introdujeron?
<i>VALORACIÓN DEL APRENDIZAJE</i>	¿Cómo valoré los aprendizajes?
	¿Realicé en clase alguna valoración de los aprendizajes?

Para el segundo ciclo de reflexión, como se tenían distintas fuentes de información, propuse la organización de la información en tablas por categorías, como se aprecia en la tabla 10. La sistematización de los datos del segundo ciclo se encuentra en el anexo 3 de este trabajo.

Tabla 10. Ejemplo de Sistematización de la información de segundo ciclo de reflexión. Categorías: Aspectos conceptuales del profesor.

	CATEGORÍA: ASPECTOS CONCEPTUALES DEL PROFESOR				
	¿Qué quiero enseñar a los estudiantes?	¿Qué sé del tema?	¿Qué material de consulta debí revisar para hacer la planeación?	¿En qué me basé para proponer el objetivo de clase?	¿Qué usé de lo que sabía al enseñarlo?
Fuente: Diario de campo del profesor; registro del estudiante; transcripción de un lapso de vídeo; imagen de una solución extraída del tablero					
Asunto específico de la generalización: ver, decir, registrar					
CARACTERIZACIÓN: DESCRIPCIÓN INSPIRACIÓN TRANSFORMACIÓN CONFRONTACIÓN					

Sobre estas tablas es necesario aclarar los siguientes aspectos:

- En la fila que corresponde a fuente se caracteriza el dato a partir de las fuentes de información, que pueden ser: el diario de campo del profesor, los registros de los estudiantes, la transcripción de segmentos de video, las imágenes de soluciones extraídas del tablero.
- En la fila que se refiere al asunto específico de la generalización, se caracteriza el dato de acuerdo con la habilidad de ver, decir o registrar. Habilidades que se especificaron en la sección 3.2.6 de este trabajo (referentes conceptuales para el diseño).
- En la fila correspondiente a la caracterización se relaciona cada dato con uno de los elementos de la reflexión guiada planteados por Smyth (1991). Estos elementos

pueden ser: descripción, inspiración, transformación o confrontación. La descripción corresponde a la identificación de lo que hago regularmente en clase y da respuesta al interrogante ¿qué pasó?; la inspiración considerada como los fundamentos, causas o creencias de mi práctica en el aula y se relaciona con ¿qué sentido tiene lo que hago?; la confrontación cuyo fin es entender mejor mi labor en el aula con la pregunta ¿por qué hice lo que hice y no de otra forma? Y la transformación que se relaciona con un nuevo plan de acción, con la pregunta ¿cómo podría ser? Cada una de estas caracterizaciones se asoció con un color, para favorecer la identificación de las características que imperaron en el desarrollo de la reflexión. Así, los datos relacionados con la descripción se resaltaron en amarillo, la inspiración en azul, la confrontación en verde y la transformación en color rosa.

5. REFLEXIONES

Luego de interpelar mi práctica pedagógica, examinarla y evaluarla a través de algunas categorías asociadas con la reflexión guiada, en los dos ciclos descritos, construí las siguientes reflexiones en relación con mi práctica pedagógica y con el proceso que experimenté.

- Analizar mi práctica de manera retrospectiva me permitió identificar errores en la implementación de actividades para la transición aritmética al álgebra, como estos:
 1. Asociar y adoptar mi práctica pedagógica como un monólogo de clase, en el que tenía la planeación y ejecución de actividades, descritas en una guía, de manera estructurada de acuerdo con lo requerido en las mallas de aprendizaje institucionales.
 2. Implementar tareas y métodos de evaluación rutinarios, que se constituían en repetición de los ejercicios y ejemplos de clase y conducían a una sola respuesta sin tener en cuenta los procesos de los estudiantes o por lo menos sus interpretaciones de la solución.
 3. Excluir el uso de expresiones matemáticas en diferentes contextos, al igual que limitar la explicitación de justificaciones de los estudiantes para el desarrollo de una tarea. Esto porque todas las actividades se relacionaban con el ejemplo explicado en clase, sin dar lugar al estudiante para que explorara las diferentes interpretaciones de las operaciones matemáticas.
 4. Limitar la participación del estudiante en la solución de las tareas, pues las actividades propuestas no se programaban para ser socializadas de manera conjunta en clase.
- De la experiencia vivida del segundo ciclo, relacionada con esta nueva implementación, considero que transformé los instrumentos para la representación de las interpretaciones de las propiedades de las operaciones y otorgué importancia a los procesos de solución propuestos por los estudiantes para el desarrollo de la clase, alejándome de los resultados de las actividades propuestas en los libros de texto.
- Mi gestión en el diseño y desarrollo del segundo ciclo de reflexión promovió el fortalecimiento de la comunicación entre estudiante-estudiante y estudiante-profesor, esto fomentó la confianza entre los estudiantes para expresar su implementación de operaciones matemáticas relacionadas con el desarrollo de la propuesta. Lo anterior

permitió la modificación del lenguaje matemático como parte del proceso de enseñanza - aprendizaje de los estudiantes y transformó la comunicación en un proceso que no solamente involucró respuestas a preguntas formuladas por el profesor, sino justificaciones de las acciones de los estudiantes para proponer soluciones a las tareas.

- El discurso que circuló en el segundo ciclo de reflexión promovió, en principio, el uso de expresiones numéricas, el establecimiento de relaciones y el reconocimiento de un cambio en una secuencia de tareas. Además, favoreció formas de razonamiento para solucionar problemas, o afrontarlos de manera diferente, más dinámica, fundamentada en lo que hacen los estudiantes y no en los libros de texto.
- Al realizar la valoración de los aprendizajes vi confrontada mi práctica debido a que respondí a caracterizaciones relacionadas con por qué hice lo que hice y no de otra manera, lo cual no había considerado en el ciclo uno de reflexión.
- Mis conceptos fueron mejor fundamentados, estructurados y nutridos con nuevos planteamientos en la clase, no me apoyé únicamente en los libros de texto, también en las investigaciones que me ayudaron a abrir la mirada hacia los procesos de los estudiantes, las interpretaciones de los mismos, el uso de representaciones gráficas y escritas, inclusive las formas de escribir las operaciones.
- Este trabajo representó la evaluación constante de mi práctica que, desde la mirada retrospectiva, me hizo reconocer que puedo tener muchos conocimientos prácticos de un tema, pero no los puedo transmitir tan fácilmente de un contexto a otro. Este fue el caso de la implementación de actividades en el contexto de la electrónica, a niños de básica secundaria. A partir de ello transformé mi práctica y contextualicé los conocimientos dando prioridad a algunos procesos que ayudan a la inclusión del trabajo con estudiantes que declaraban tener problemas con las matemáticas.
- Este trabajo no representa nuevas interpretaciones en el álgebra y no es innovador en cuanto a su desarrollo en investigaciones, pues soy consciente que la implementación de actividades de generalización se ha realizado desde hace muchos años e inclusive existen investigaciones relacionadas con el desarrollo del álgebra temprana; sin embargo, considero que su ejecución fue para mí una experiencia importante pues evalué mi práctica pedagógica y la forma como propongo las tareas de clase y cómo las evalúo. Lo

considero un aporte significativo en mi desarrollo profesional como docente de matemáticas.

5. CONCLUSIONES

Las siguientes son las conclusiones elaboradas después de interpelar, examinar y evaluar mi práctica pedagógica en el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje que propicien, en los estudiantes de grado séptimo, el tránsito de la aritmética al álgebra:

- Las categorías propuestas por Smyth para llevar a cabo una reflexión guiada se constituyeron en una herramienta analítica apropiada para interpelar, examinar y evaluar mi práctica pedagógica, estas categorías fueron: aspectos conceptuales del profesor, técnicas e instrumentos, gestión del profesor en el aula, el discurso y la valoración del aprendizaje. A partir de ellas reconocí aspectos conceptuales que debo fortalecer, para explicitar las relaciones entre lo que quiero enseñar a los estudiantes, lo que conozco del tema, lo que debo fortalecer y el uso de material de consulta asociado.
- La construcción del instrumento *notas del profesor* en el que reconstruí mi experiencia pedagógica, en relación con el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje para la transición de la aritmética al álgebra, me permitió reconocer los argumentos que sustentaban mi práctica pedagógica.
- Diseñar y desarrollar un nuevo ambiente de aprendizaje que promoviera la transición de la aritmética al álgebra, a partir de los resultados del proceso de reflexión suscitado por el examen y evaluación de las experiencias anteriores, me permitió identificar que en mi práctica no consideraba los saberes iniciales de los estudiantes y examinar las prácticas de evaluación que gestionaba en el aula.
- Explicitar las reflexiones que me suscita el proceso experimentado en este trabajo en relación con mi práctica pedagógica me permitió identificar la manera como reflexiono sobre mi práctica pedagógica y reconocer la ausencia de algunas variables en tal reflexión. También me permitió identificar qué aspectos caracterizan este proceso y diferenciar el tipo de procesos que atraviesan esa reflexión: descripción, justificación, interrogación, o innovación.
- Al proponer y desarrollar tareas de generalización, fundamentadas en trabajos e investigaciones, evidencí en mi práctica pedagógica experiencias favorables que propician en los estudiantes un acercamiento a la interpretación de la letra. En esta experiencia

identifiqué que el estudiante reconoció lo que varía y cómo varía dependiendo del número de iteración en una secuencia de figuras y esto promueve un uso de la letra como variable.

- Al interpretar, examinar y evaluar mis experiencias de manera retrospectiva, logré dar sentido al trabajo algebraico por medio de procesos de generalización, debido a las habilidades de visualización y la comunicación que se favorece en los estudiantes, que no aprecié en la implementación de las actividades propuestas desde otros contextos. Al diseñar y desarrollar un nuevo ambiente de aprendizaje evidencí una transformación en mi práctica pedagógica, debido a que implementé un proceso evaluativo que se enfocó en el trabajo y aporte de los estudiantes.
- Al reconstruir mi experiencia pedagógica en relación con el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje para la transición de la aritmética al álgebra (desde una perspectiva de aplicación en la electrónica, en el álgebra geométrica y en procesos de generalización) e interpretar, examinar y evaluar mis experiencias en forma retrospectiva, identifiqué errores en torno a mi gestión en el aula relacionadas con la interacción en la clase y el tipo de preguntas que realizaba a mis estudiantes, reflejadas en el primer ciclo de reflexión. Reconocí estas prácticas como segregadoras del conocimiento del estudiante.

REFERENCIAS

Azarquiel. (1993). Ideas y actividades para enseñar álgebra. Madrid: Síntesis.

Cañadas, M., & Castro, E. (2002). Errores en la resolución de problemas matemáticos de carácter inductivo. Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas, 147 - 154.

Gobernación de Antioquia. (2006). Módulo 2: Pensamiento Variacional y Pensamiento Algebraico. Medellín: Artes y Letras Ltda.

Hernández, K., & Tapiero, K. (2014). Desarrollo del pensamiento algebraico a partir de la generalización de patrones gráficos - icónicos en estudiantes de la educación básica primaria. Universidad del Valle.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias Matemáticas. Bogotá.

Mora, L. (2012). Álgebra en primaria. Programa de Transformación de la calidad Educativa. Ministerio de Educación Nacional, 1-24.

Smyth, J. (1991). Una Pedagogía Crítica de la práctica en el aula. Números, 275 - 300.

Trujillo, P. (2008). Proceso de generalización que realizan los futuros maestros. Granada, España.

Vergel, R., & Rojas, P. (2018). Algebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula. Bogotá: Universidad Distrital.

Villa, J. (2006). El proceso de generalización matemática: Algunas reflexiones en torno a su validación. Tecno Lógicas, 16, 139 - 151.

ANEXOS

Anexo 1: Reconstrucción de mi experiencia pedagógica en relación con el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje. Notas del profesor.

a) Propuesta desde el contexto de la electrónica

En primera instancia para desarrollar la enseñanza de algunos conceptos algebraicos con estudiantes de grado octavo, en el que la meta era dotar de significado el uso de la letra en diferentes contextos, identifiqué mis conocimientos previos en torno a aspectos algebraicos y de ello relaciono aspectos del aprendizaje del álgebra en la escuela como las actividades del álgebra de Baldor y libros de texto, además, manejé conceptos básicos asociados con la electrónica por trabajos desarrollados anteriormente y de ahí ejecuté una primera propuesta de aprendizaje para dar sentido al uso de expresiones algebraicas en la vida de los estudiantes por medio del trabajo electrónico.

El material de consulta que fue base para el desarrollo de las explicaciones y actividades se compuso de libros de texto para grado octavo (como los de la editorial Santillana), libros del Ecuador con enlace de descarga gratis y un documento del Servicio Nacional de Aprendizaje denominado Matemáticas En Contexto (MEC), este último sirvió como guía para el trabajo con circuitos con los estudiantes de grado octavo.

Con dicha revisión bibliográfica el objetivo de la clase cumplía con los requerimientos descritos en las mallas de aprendizaje institucionales, que fueron estructuradas en años anteriores por los profesores y tenían como referente el desarrollo de cada uno de los pensamientos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional, relacionados con el contexto, los procesos generales y los conocimientos básicos que debe desarrollar el estudiante por cada año y que en la institución se propuso ejecutar por periodo académico es decir, en el primer periodo plantear actividades relacionadas con el desarrollo del pensamiento numérico, en segundo periodo, actividades relacionadas con el desarrollo del pensamiento variacional, y así.

Para la implementación de recursos la institución contaba con guías de aprendizaje institucionales, dado que el énfasis es enseñanza para la comprensión, pero las guías que yo realizaba la implementarían otros docentes problema por el cual no podía proponer actividades de electrónica, pues no todos las conocían o implementarían de manera satisfactoria (además de no contar en ese tiempo con espacios para socializar dicha propuesta con los profesores). Se generaban entonces actividades adicionales para ser ejecutadas solo en mi clase, estas “complementaban” las explicaciones y suponía que las guías eran un apoyo para el estudiante en la casa para que complementara con actividades o conceptos desarrollados en el aula.

De manera personal tenía claro cuál era el manejo conceptual de circuitos y análisis de los mismos desde el tratamiento matemático, al igual que los temas relacionados con el desarrollo algebraico, por tanto, quería aprovecharlo como instrumento para el aprendizaje de los estudiantes estableciendo relaciones entre lo algebraico y el análisis de circuitos, que en su momento lo consideraba buena opción.

Opté en primera medida por usar los temas de electrónica, aprovechando el auge con el uso de la tecnología, para explorar caminos respecto a actividades relevantes a este tema. Es así como comencé el trabajo con estudiantes de grado octavo empleando las letras como “representantes” de diferentes significados, por ejemplo: para la resistencia se emplearía la letra R , para la corriente la letra I y para el voltaje la letra V y comenzaría a operarlas en diferentes situaciones para relacionar las variables en un contexto o situación como lo es un circuito en serie (Ilustración 1):

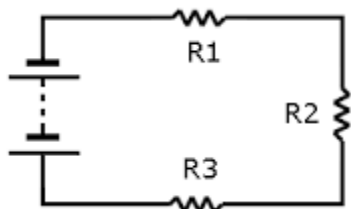


Ilustración 9: Circuito electrónico en serie. Ejemplo 1.

Para empezar el tratamiento de los temas, explicaba cada uno de los casos como: la resistencia equivalente de este circuito se calculaba con la suma de las resistencias que se

representaban con la misma letra R y si eran iguales equivaldría a: $R_{equivalente} = R_1 + R_2 + R_3 = 3R$

Este resultado se daba únicamente en los casos en que las resistencias fueran iguales (del mismo valor), pues para los casos que eran diferentes se debía recurrir a otra estrategia como la suma de los valores dados, pero como dentro del circuito no se contemplaba valores sino letras, recurrí a estrategias como cambiar los valores de la resistencia o la forma como presentaba el valor de la resistencia, es decir:

En este caso (Ilustración 3) el estudiante debía recurrir a sumar las veces en que la letra R aparecía en el circuito para que realizara la operación respectiva y de ello pudiera expresar una respuesta, entonces debía proceder de forma tal que reconociera que la segunda resistencia era el doble de la primera y la tercera resistencia correspondería al triple de la misma.

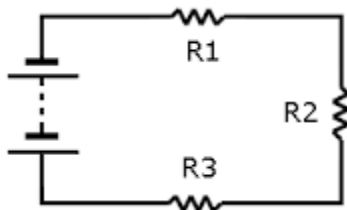


Ilustración 10: Circuito electrónico en serie. Ejemplo 2.

Para calcular la resistencia equivalentes, se expresaba la operación: $R_{Equivalente} = R + 2R + 3R = 6R$, como docente en ese entonces pensaba que este tipo de actividades podrían ser de utilidad para el estudiante, pues reconocía que debía tener mismos elementos para ser operados, pero me preguntaba en qué casos el estudiante podría operar elementos diferentes (es decir, combinar letras para ser operadas), entonces introduje en el trabajo algebraico, temas relacionados con bobinas y capacitores los cuales, en la práctica no se podrían operar (combinar o mezclar) debido a la naturaleza y funcionalidad de cada uno de los elementos, se emplearon básicamente para el uso de circuitos electrónicos para audio, luego de una pequeña explicación al respecto trataba de presentar el circuito y preguntaba a los estudiantes ¿por qué los elementos del circuito no se pueden sumar?, con la siguiente imagen me apoyé para la explicación:

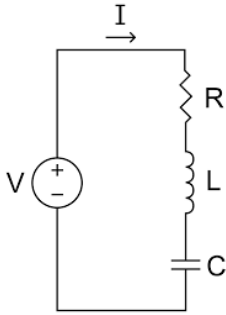


Ilustración 11: Circuito electrónico. Ejemplo 3, uso de resistencia, bobina y capacitor.

De lo anterior esperaba que, al aplicar estas actividades para trabajar el uso de expresiones algebraicas con diferentes elementos, podía introducir el uso de polinomios en diferentes contextos, explicaba a los estudiantes que se podría considerar la resistencia equivalente con la expresión: $R_{Equivalente} = R + L + C$, lo cual en la realidad resultaba ser falso para la electrónica. Dado que los elementos ahí dispuestos tenían ciertas características que no permitían ser sumados de la misma forma, pero para mí, en un pensamiento muy narcisista de mi desempeño como docente, lo importante era la comprensión de que los elementos no se podían combinar en la suma pues representaban cosas diferentes, aparecía la letra L que en el circuito representaba a la bobina y la letra C que representaba al capacitor.

Una vez realizadas las explicaciones, comenzaba el trabajo con las expresiones algebraicas y a realizar las comparaciones de elementos en circuitos electrónicos con las letras X, Y e Z , donde el estudiante debía reconocer que era lo mismo, solo cambiaba la letra pero que ellas podrían representar los mismos elementos en un circuito, la X podría representar la resistencia, la Y la bobina y la Z el capacitor, para mí era fácil dado que comprendía y dominaba el tema pero para el estudiante no, se confundía con el uso de las letras en diferentes contextos, lo que lo condujo a tener problemas en aspectos relacionados con las operaciones.

Entonces cuando comenzaba a realizar operaciones de tipo $R + x + y$ el estudiante arrojaba resultados del tipo $Rx + y$, que hasta ahora comprendo estos procedimientos porque le había dicho que la resistencia se representaría con la letra X . Así con el uso de estas expresiones algunos de los estudiantes no se sentían atraídos por el tema, pues no era de su interés, la electrónica no era su “fuerte” y por tanto no trabajarían es estos temas, para otros estudiantes este

tipo de actividades carecía de sentido porque ellos en el área de tecnología no trabajaban con estos temas y otros ya los habían realizado pero tenían otras técnicas para solucionar los ejercicios como el de la bobina y el capacitor, así que sabían la forma indicada de emplearlo, dejando a la profesora sin herramientas para justificar su error, la intención era establecer una relación entre la interpretación de expresiones polinómicas y el uso de circuitos electrónicos.

Ahora bien, mi postura era la terquedad pues, para el uso de este tipo de expresiones en torno a la multiplicación, introduje términos de circuitos paralelos lo cual complicaba la situación para aquellos estudiantes que no encontraban sentido a este tipo de trabajo, por mi parte pensé que la implementación de este tipo de circuitos daba un contexto más claro al estudiante en torno al uso de potencias en un contexto “conocido”, ya que podría entonces trabajar con circuitos paralelos como:

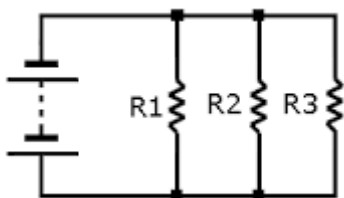


Ilustración 12: Circuito electrónico con resistencias en paralelo.

Apoyada en la figura anterior, afirmaba al estudiante que $R_1 = R_2 = R_3$, y de ello que la resistencia equivalente que se produciría de este circuito sería:

$$R_{Equivalente} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

un gran trabajo para los estudiantes “muy matemático” llegaba al resultado: $R_{Equivalentes} = \frac{R_1 * R_2 * R_3}{R_2 * R_3 + R_1 * R_3 + R_1 * R_2}$, y como afirmé en un principio que dichas resistencias eran iguales, entonces

esperaba que el estudiante entendiera que esa equivalencia era igual a : $R_{Equivalente} = \frac{R^3}{R^2 + R^2 + R^2} = \frac{R^3}{3R^2}$, además porque en explicaciones anteriores había tomado el tema de

multiplicación de términos semejantes y llegué a afirmar que si las letras eran iguales y se multiplicaban, el resultado del producto era igual a la letra elevada al cuadrado, por tanto si eran tres letras iguales el resultado se elevaría al cubo y el estudiante podría transmitir esa información a cualquier contexto que se le presentara.

Lo anterior generó más confusión en algunos estudiantes, pues se tornó más complicado por el uso de las operaciones y la solución de las situaciones que por los conceptos en sí, así que al terminar esta explicación decidí desistir de la idea del trabajo algebraico por medio de circuitos electrónicos porque se complicaba para varios de mis estudiantes este tipo de tratamiento.

La valoración de los aprendizajes la realizaba de acuerdo con la solución de algunas actividades en clase, que eran propuestas desde el desarrollo de cada tema, adicional a ello contemplaba actividades que aplicaba luego de abordar un tema relacionado con actividades similares a las realizadas en clase, otras evaluaciones se plantearon con estructuras afines a lo propuesto en libros de texto o en ejercicios con múltiple respuesta de selección, por requerimiento institucional.

Respecto a lo anterior, me di cuenta que la implementación de esta propuesta tenía contravenciones para el trabajo con los estudiantes y las relacioné con:

- El desinterés de los estudiantes en el desarrollo de este tema debido al poco o mucho dominio del mismo.
- Las confusiones conceptuales que este tipo de ejercicios conllevó en torno a la clase de tecnología.
- El cambio de representación abusivo de la profesora para poder emplear estos temas con ejercicios del libro de texto, es decir, asemejar unas letras con otras y hacer pensar a los estudiantes que estas eran iguales.
- El procedimiento para obtener ciertos resultados era extenso y por tanto confusos para algunos de los estudiantes.
- La falta de experimentación de estos temas en la clase de tecnología, hacía perder el interés de los estudiantes con el desarrollo de la clase.
- No se permitía la experimentación por parte del estudiante con el manejo de conceptos, actividades o evaluaciones, convirtiendo el trabajo en clase en un trabajo mecánico y carente de sentido.

Por otra parte, de estos temas podía rescatar que el estudiante encontraba:

- Relación entre el uso de las letras con un elemento conocido.
- No presentaba confusión en el uso de los elementos hasta que la profesora introdujo las variables X, Y e Z , para realizar las actividades y asemejarlas con temas encontrados en los libros de texto.

De manera global en esta propuesta no di mucha cabida a preguntas a los estudiantes porque la implementación en la clase se relacionaba con la explicación de un ejemplo y la solución de actividades iguales al ejemplo, los aprendizajes entonces se valoraban con la respuesta correcta o incorrecta a algún tipo de operación, sin tener en cuenta las posibles variables que podrían contener las soluciones de los estudiantes.

En retrospectiva si hubiera pensado en esta propuesta en conjunto con el profesor de tecnología, el resultado hubiera sido un buen trabajo de análisis de funciones por medio de expresiones polinómicas, empleando la letra como una etiqueta a la representación de un objeto físico, además de contextualizar a los estudiantes en la implementación de la letra pero, la premura para desarrollo del trabajo debido al ajuste de temas registrados en la malla curricular y las necesidades institucionales llevaron a trabajar conceptos algebraicos de manera individual y apresurada.

Además, no tuve en cuenta la posición de los estudiantes que de este tema no querían saber nada y por tanto no ejecutaban las actividades, o en casos opuestos donde los estudiantes tenían estrategias para la solución de este tipo de actividades y no empleaban las dadas en clase, dejando sin armas a la profesora para afirmar que lo hecho estaba mal realizado, pues llegaban a la solución correcta del ejercicio sin emplear las estrategias de clase.

Debido a que el material empleado se basaba en las guías de aprendizaje y las actividades extra que se proponían en la clase, no di oportunidades de experimentar con los elementos relacionados con el tema de tecnología, esperando que esto se realizara en la respectiva clase (que no se hizo), el material se convirtió en un elemento poco útil para el desarrollo de las sesiones, pues eran actividades de papel y lápiz que requerían únicamente de cálculos para encontrar los resultados de la actividad.

b) Propuesta de procesos de generalización desde el “álgebra geométrica”

Debido a que la propuesta desde el contexto de la electrónica no tuvo éxito para la enseñanza del álgebra recurrí a una nueva estrategia donde, teniendo en cuenta las experiencias anteriores, trataría de abordar el tema de manera diferente. Advirtiendo algunas de las dificultades replanteé las actividades en torno al uso del álgebra, ajustándolas a como se relatan en algunos libros de texto, hice la semejanza del uso de letras a medidas como: metros representados con la letra m , longitud con la letra l o la altura de una figura geométrica con la letra A .

El material empleado, era el mismo que el relatado en la experiencia anterior, el uso de guías de aprendizaje, tomando como referencia los temas plasmados en las mallas de aprendizaje estructuradas institucionalmente, como base para el desarrollo de los temas periodo a periodo, de esta guía rescaté su uso para el desarrollo de las sesiones y las actividades en sí, donde al final recopilaba algunas preguntas con respuesta de selección múltiple, para que el estudiante desarrollara al finalizar todo el trabajo propuesto en cada unidad o tema.

Respecto a lo anterior conduje el trabajo en el aula con los estudiantes, con un proceso para conocer las letras a, b, c, \dots como variables y que de ellas se entendería que se podrían emplear en diferentes contextos, luego, para contextualizar la suma recurrí a dibujar un espacio físico para ejemplificar con metros las cantidades a operar como por ejemplo, una casa que tenía 7 metros de ancho y 5 metros de largo, el total del perímetro de la casas sería $7m + 5m + 7m + 5m = 24m$ y el grafico correspondería a:

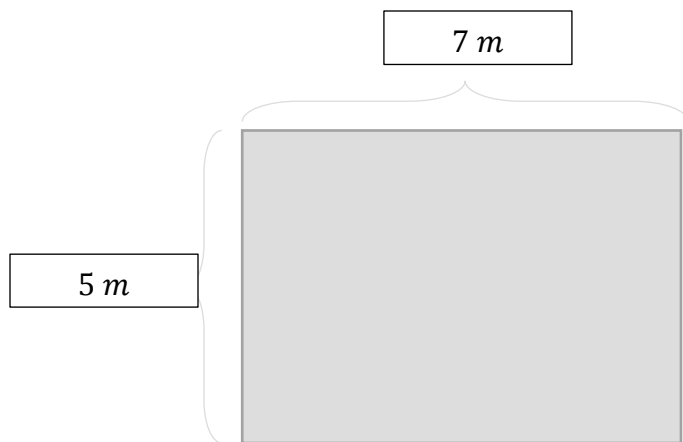


Ilustración 13: Gráfico ejemplo de espacio en casa

Así, planteaba actividades relacionadas con este tipo de situaciones, muchas veces fuera de un contexto, para que el estudiante pudiera abordar los temas rápidamente, esto generaba dificultades en el momento de operar algunas expresiones como, por ejemplo:

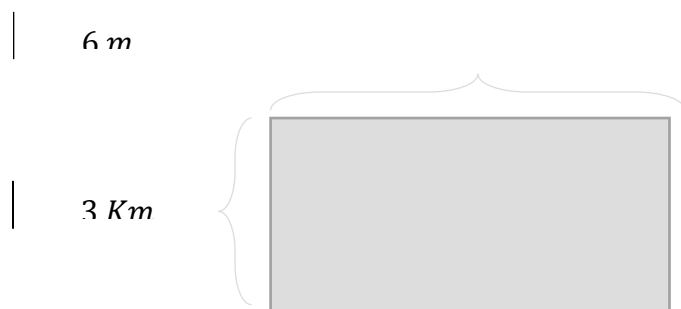


Ilustración 14. Gráfico para ejemplificar uso de medidas

En estas situaciones encontré soluciones del tipo: $6m + 3Km + 6m + 3Km = 18mKm$ las cuales se justificaban debido a que eran unidades de medida que se podían combinar porque hacían referencia a longitudes, algunos estudiantes ayudados por sus padres llegaban con soluciones del tipo $6m + 3Km + 6m + 3Km = 18m^4K^2$, las cuales llevaban a pensar que las actividades se encontraban mal planteadas y por tanto se ejecutaban mal, sin embargo encontré que estos errores se debían al modo de simbolizar el álgebra, es decir, los razonamientos que daba el estudiante al uso de números en el contexto daban pie a estos errores, pues los venían realizando un tratamiento de longitudes usando el número como parte de la longitud, pero ahora las debía interpretar como cantidades generalizadas y esto no tenía sentido porque no se expresaban cantidades relacionadas con un elemento o figura concreta.

Así que decidí seguir con lo propuesto por algunos libros de texto para grado octavo donde se encontraban situaciones que hacían uso del área y el perímetro, pero relacionadas con baldosas diferentes para casas o con amoblados, de esta forma propuse ejercicios relacionados con la multiplicación de polinomios semejantes al área de un cuadrado construido por dos segmentos de diferente longitud y además con cantidades desconocidas:

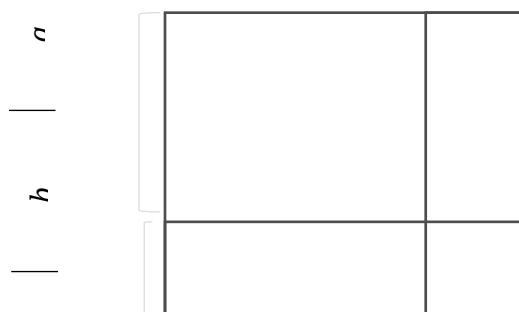


Ilustración 15. Ejemplo de uso de imagen en libros de texto

El ejemplo gráfico se usó para representar la relación de un binomio al cuadrado y la solución correspondería a la relación de $(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$. Este tipo de actividades no daba contexto al estudiante y recaía en las matemáticas sin sentido que no quería disponer, pues solo se memorizaban formas de escritura de las operaciones y las soluciones sin sentido, ni significado y se repetían en la ejecución de “evaluaciones formales” o “evaluaciones sorpresas”.

El desarrollo de esta experiencia con el grupo fue más amena, aunque hubo poca interacción entre el profesor con el estudiante, de pronto por el tipo de actividades las cuales se enfocaban en el desarrollo de ejercicios como en el libro o de pronto por la actitud de los estudiantes dispuesta a aprender a pesar del método de enseñanza tradicional que se había implementado, conté con el apoyo de algunos padres comprometidos, que en casa complementaban información y algunos estudiantes la compartían en el aula con sus compañeros.

De esta experiencia, las actividades planteadas me representaron dificultades como:

- La falta de contextualización del álgebra y la carencia de significado de las expresiones para los estudiantes.

- El uso abusivo del tratamiento de expresiones en las diferentes operaciones, que llevó a tener soluciones erróneas.
- Falta de creatividad en la búsqueda de actividades con más relevancia para los estudiantes o más significativas para su desarrollo.

Dado que este tipo de actividades las abordé casi como los libros de texto, no rescaté beneficios, pues la implementación condujo a dificultades en la interpretación de la letra como número generalizado, como lo fue el caso de no discriminar la letra al realizar operaciones de suma y resta de polinomios, al igual que los cambios de representación de esta en los diferentes ejemplos y en las formas de solución de las actividades, lo que condujo a una constante observación y revisión por mi parte para identificar errores de los estudiantes para abordarlos, corregirlos y socializarlos en las clases y así, tratar de aminorarlos de manera general, es decir, no di sentido al trabajo con la letra como número generalizado, identificando confusiones en las operaciones realizadas por los estudiantes.

c) Propuesta de generalización desde procesos de conteo-patrones

Esta propuesta presentó interpretaciones desde dos aspectos: el primero se relacionó con las experiencias pedagógicas, anécdotas y trabajos realizados por los estudiantes para solucionar las actividades propuestas. El segundo se relacionó con algunas interpretaciones de los estudiantes, soportadas a la luz de la teoría, en torno a la implementación de actividades de generalización.

Por lo que refiero a la revisión documental tuve en cuenta algunos aspectos abordados en la maestría en docencia de la matemática, como fue la introducción al álgebra por medio de patrones y secuencias y el estudio y análisis de la propuesta “Early algebra”, de lo cual implementé actividades relacionadas con la generalización desde el conteo de patrones. Mi ingreso a la maestría abrió puertas al desarrollo de diversas posibilidades en el aula, esta propuesta nunca la había trabajado en clase con estudiantes de secundaria por lo que, en pro de un primer acercamiento a su desarrollo, propuse a los estudiantes que cursaban grado octavo en

el año 2018 una serie de actividades que despertara en ellos interés por el trabajo algebraico desde actividades con secuencias de patrones.

Aprovechando al abandono de guías institucionales recurrí a materiales de consulta relacionados con el desarrollo del pensamiento algebraico en la escuela, obteniendo información relacionada con actividades de generalización (las cuales fueron introducidas como temas a trabajar en algunos de los seminarios de la Maestría en docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional), de las que reconocí que no son novedosas, nuevas, ni diferentes a las trabajadas hace un par de años en algunas universidades, pero que para efectos de la enseñanza de temas relacionados con el álgebra, le vi mucha utilidad.

Los recursos a los que acudí entonces serían actividades impresas en algunos casos, palos de paleta para esquematizar algunas de las propuestas en clase, de las cuales se desprendería el objetivo de acuerdo a las mallas de aprendizaje de la institución.

Uno de los primeros artículos a los que me acerqué para el desarrollo de este trabajo y que me dio ideas para la consecución del planteamiento de las actividades, fue el realizado por Mora (2012) que, en apoyo con la Secretaría de educación, para la implementación de actividades de generalización con niños en primaria, describió que el trabajo algebraico se considera una forma para desarrollar simultáneamente el pensamiento algebraico y numérico desde la educación primaria. Allí propuso una actividad con palillos, como la que describiré más adelante, en la que los estudiantes de grado primero a quinto establecieron relaciones entre la cantidad de palillos y el número de figuras que se pueden armar de ellos, teniendo en cuenta la relación que se podía establecer entre aspectos algebraicos y aritméticos, opté por plantear actividades que sirvieran como pilotaje para este trabajo y de ellas recoger aspectos que me fueran útiles para abordar en la experiencia sobre el diseño.

De dicho trabajo consideré la implementación de este tipo de actividades para introducir temas algebraicos con mis estudiantes, de los cuales podría propiciar el estudio, desarrollo y manipulación de estructuras algebraicas, abstraídas de cálculos y relaciones de modelización a partir de la manipulación de objetos y cantidades numéricas, rescatando a la vez la enseñanza del

álgebra como un proceso que no se centra en la formalización sintáctica y rigurosa de expresiones algebraicas, sino de términos que se construyen a partir de una regla de repetición o patrón, como los que los estudiantes establecieron con estas actividades.

Para abordar este trabajo, solicité a los estudiantes que primero realizaran la actividad de manera individual y luego de manera grupal (con máximo 3 estudiantes), la cual es una constante en mis clases, con ello busqué que generaran ideas acerca de la solución de un ejercicio y luego con la comparación de sus respuestas con los compañeros se valide o refute lo realizado, es de aclarar que en algunos casos fue funcional dado, que desde mi perspectiva, incentivó la creación de justificaciones validas entre compañeros, por así decirlo, desarrollar el poder de convencimiento pero bien justificado en cuanto al desarrollo de actividades de manera grupal. Además, el trabajo propuesto, en grupos de tres personas, ayudó en el caso de que, si en un grupo se generan dos puntos de vista, el tercer integrante rompía la discusión con un punto de vista relacionado con uno de los ya discutidos.

Las preguntas realizadas a los estudiantes, en relación a las actividades realizadas, tenían que ver con la cantidad de elementos que componían figuras cercanas y lejanas que se encontraban dibujadas en la actividad, para de ello comenzar a deducir: operaciones matemáticas en relación a la figura, la cantidad total de elementos que se presentan de acuerdo a la figura y finalmente determinar una relación entre lo preguntado y lo encontrado.

Una primera propuesta se encaminó a la disposición de puntos en una figura, de la que se debía identificar ciertos aspectos que relacionaran el número de la figura con la cantidad total de puntos, los estudiantes tenían la siguiente actividad:

Tabla 11. Actividad 1. Secuencia de puntos

*	* * * *	* * * * * * * * *
Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3

Responde:

1. ¿Cuántos puntos se necesitan para dibujar la figura 4?


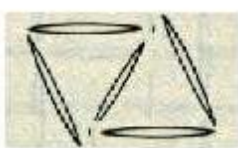
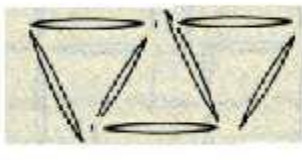
2. *¿Cuántos puntos se necesitan para dibujar la figura 6?*
3. *¿Cuántos puntos se necesitan para dibujar la figura 10?*
4. *¿Cuántos puntos se necesitan para dibujar la figura 25?*
5. *Explica, ¿cómo has respondido a las preguntas anteriores y utiliza tus propias palabras para describir los procedimientos usados para solucionar cada caso?*
6. *¿Qué estrategias emplearías para contar más rápido la cantidad total de puntos en cada figura?*
7. *¿Existe alguna operación matemática que ayude a solucionar cada ejercicio, cuál?*

De esta actividad los estudiantes dedujeron rápidamente que la única respuesta a obtener es el cuadrado del número corresponde a la figura, por tanto, la cantidad total de puntos de una figura cualquiera correspondía al número de la figura elevado al cuadrado y las estrategias corresponderían a esa única respuesta, aun así, para esta respuesta se observó la exploración de varios caminos como por ejemplo, de la imagen correspondiente a cada figura, tomar filas y columnas y contar la cantidad de puntos que correspondían a cada fila y a cada columna y multiplicarlos entre sí, o asemejar la figura que se presenta a una figura geométrica y asignar base y altura, en cada uno de los casos la base y la altura correspondería al número de la figura respectiva, para hallar el área se realizaría la multiplicación que correspondería a la potencia cuadrada del número de la figura, esta exploración llevaba siempre a la interpretación que traduje como x^2

La finalidad al plantear estas actividades, se correspondía con minimizar un poco los errores relacionados con ver el signo igual, como los descritos por Kieran, Filloy & Puig (1989), en donde el signo se concibe como un mero separador sin tener en cuenta las operaciones que anteceden o preceden al símbolo; por tanto, esperaba que el estudiante pudiera reconocer que el procedimiento podía ser la respuesta e identificar aspectos equivalentes, como por ejemplo las relaciones en las que x por x es equivalente a x^2 , dando sentido a la relación entre las cantidades y la equivalencia de las operaciones.

Para seguir con el trabajo, solicité disponer de palos de paleta, para que por medio de construcciones pudieran llevar a cabo la siguiente actividad:

Tabla 12. Actividad 2. Los palillos

		
Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3

Responde:

- a. *¿Cuántos palillos se necesitan para dibujar la figura 4?*
- b. *¿Cuántos palillos se necesitan para dibujar la figura 6?*
- c. *¿Cuántos palillos se necesitan para dibujar la figura 10?*
- d. *¿Cuántos palillos se necesitan para dibujar la figura 25?*
- e. *Explica, ¿cómo has respondido a las preguntas anteriores y utiliza tus propias palabras para describir los procedimientos usados para solucionar cada caso?*
- f. *Reúnete con dos compañeros del salón y comparen sus respuestas, respondan:*
 - i. *¿Qué estrategias emplearías para contar más rápido la cantidad total de palillos en cada figura?*
 - ii. *¿Existe alguna operación matemática que ayude a solucionar cada ejercicio, cuál?*

Para la solución de este ejercicio, varios de los estudiantes construyeron la conclusión que, la operación corresponde al doble del número que se le asigna la figura más uno, es decir, para cualquier figura la cantidad de palillos necesarios correspondería a: $2n + 1$, siendo n el número de la figura.

De esta actividad, encontré que la secuencia representada por medio de palillos se denominó la secuencia de los números impares, aunque este tipo de representación permitía más interpretaciones, como por ejemplo, tomar siempre como referencia los tres primeros palillos, a ello sumar los palillos siguientes, que corresponderían al anterior número par de la figura respectiva interpretada como $3+(2n-2)$ donde n corresponde al número de la figura, pero en una revisión de la solución de los estudiantes, no encontré este tipo de contemplaciones en los registros de las soluciones.

Luego, propuse el desarrollo de una nueva actividad, pero, esta vez con los palillos organizados de forma diferente:

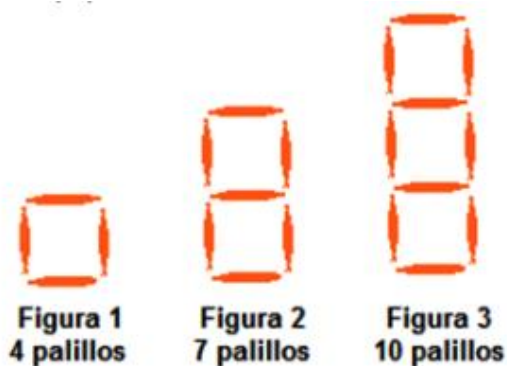


Ilustración 16. Apoyo gráfico para desarrollo de actividad de patrones

Responde:

1. *¿Cuántos palillos se necesitan para dibujar la figura 4?*
2. *¿Cuántos palillos se necesitan para dibujar la figura 6?*
3. *¿Cuántos palillos se necesitan para dibujar la figura 10?*
4. *¿Cuántos palillos se necesitan para dibujar la figura 25?*
5. *Explica, ¿cómo has respondido a las preguntas anteriores y utiliza tus propias palabras para describir los procedimientos usados para solucionar cada caso?*
6. *Reúnete con dos compañeros del salón y comparen sus respuestas, respondan:*
 - *¿Qué estrategias emplearías para contar más rápido la cantidad total de palillos en cada figura?*
 - *¿Existe alguna operación matemática que ayude a solucionar cada ejercicio, cuál?*

En lo que respecta a la solución de esta actividad, consideré aspectos teóricos como los de Radford (2008, citado por Trujillo 2008), en los que, la justificación de la generalización se basa en explicar la forma en la que se concibe el igual y lo diferente, tomé como referencia este trabajo y las distintas estrategias de solución que dieron los estudiantes, para así generar conexiones entre los patrones que generaron los estudiantes y establecimiento de las similitudes de términos de la secuencia, el establecimiento de una regla o la formulación de un esquema.

Así como en la actividad anterior, mostré el establecimiento de relaciones entre la cantidad de la figura y el número de palillos que se necesitan para la construcción de la misma, es por ello que, en la socialización de respuestas concluí que la operación que representa los

palillos de cada figura es el producto de 3 por el número que corresponde a la figura, más 1, este último corresponde al palillo que cierra la figura, lo que traduje como $3n+1$, las interpretaciones de esta actividad correspondían a formar cuadrados de acuerdo al número de la figura, teniendo en cuenta que, desde el segundo cuadrado se quitaba un palillo porque este quedaba sobrepuesto en el lugar que se encontraba la figura.

Las explicaciones se relacionaban con:



Este palillo se cuenta dos veces, por tanto, la operación podría ser $4n$ pero si se le quita el palillo que se repite, la operación para la figura dos quedaría $(4 \times 2) - 1$, sin embargo, en la revisión de algunas soluciones, encontré que algunos de los estudiantes desistieron de esa idea.

Ilustración 17. Interpretación de solución figura 2.



En esta figura los palillos encerrados se repiten, dejando de sobra un palillo. Para este caso la operación matemática que acerca al estudiante a la solución $3n + 1$ correspondería a:

$3n + 1$ *3 palillos que se repiten por 2 el número de la figura y los cuadrados que se forman más 1 palillo que sobra en la figura*

Ilustración 18. Interpretación de Solución. Figura 2.

En esta propuesta, evidencí que las tres primeras actividades tienen diferentes formas de interpretar las figuras, pero, todos llegan al mismo resultado, de manera adicional no hubo inconvenientes en la representación e interpretación de los resultados, las actividades eran agradables para ser solucionadas por los estudiantes, pero no se exploraba más allá de las situaciones en los casos que tuvieran diferentes respuestas, es decir, que al momento de plantear una forma matemática, como se describe en el punto 6, apartado b del ejercicio, los estudiantes llegaron a diferentes tipos de soluciones, de ello, pensé en el planteamiento de una nueva

situación para así explorar caminos de representación e interpretación a este tipo de actividades, la situación corresponde a:

Observe la siguiente figura:

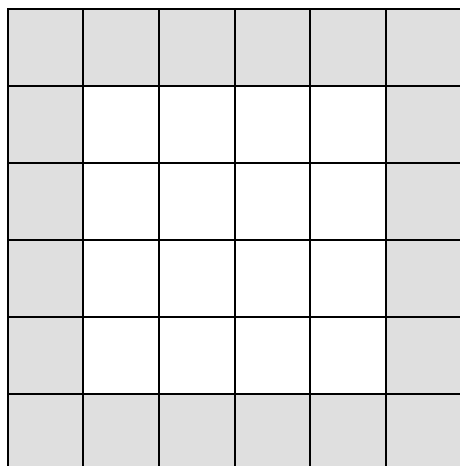


Ilustración 19: Actividad 3. Los bordes

Escribe la respuesta a cada una de las siguientes preguntas:

- ¿Cuántos cuadrados hay de lado?
- ¿Cuántos cuadrados hay en el borde de la figura?
- ¿Cuántos cuadrados habrá en el borde de un cuadrado de 37 cuadros de lado?

Para esta actividad, encontré diversas exploraciones y resultados de los estudiantes, al igual que formas de representación, promoviendo la participación grupal, las discusiones y justificaciones en cada uno de los grupos de estudiantes, realicé la socialización de la actividad de 37 cuadros de lado, encontrando diversas formas de ser interpretado, las operaciones que dieron lugar a la solución de este punto corresponden a:

Tabla 13. Interpretación de operaciones realizadas por los estudiantes para la actividad de Bordes

Operaciones	Interpretaciones gráficas		
$37 + 36 + 36 + 35$	37 cuadros	36 cuadros	
			35 cuadros

			36 cuadros	
$37 + 37 + 35 + 35$		37 cuadros		
	35 cuadros			35 cuadros
		37 cuadros		
$(37 + 37 + 37 + 37) - 4$	-1	37 cuadros	-1	
	37 cuadros		37 cuadros	
	-1	37 cuadros	-1	
$(35 + 35 + 35 + 35) + 4$	+1	35 cuadros	+1	
	35 cuadros		35 cuadros	
	+1	35 cuadros	+1	

De esta actividad, las exploraciones permitieron identificar que todas las formas representadas del ejercicio eran acertadas para dar respuesta a la pregunta planteada, correspondían con los ejercicios y las justificaciones dadas por los diferentes grupos de

estudiantes en la clase, al momento de interpretar un número cualquiera no hubo mucho problema en entender que la cantidad n podría corresponder a cualquier figura, así entonces, las expresiones dadas podrían corresponder a una letra que varía, de acuerdo a la posición de la figura, porque podía ser tan grande que no se podría dibujar, comencé entonces a establecer relaciones por medio del planteamiento de preguntas en relación a: si 37 corresponde a la letra n ¿quién correspondería a 36 en términos de la letra n ? Luego, ¿35 cómo se expresaría en términos de la letra n ?, los estudiantes fueron estableciendo sus conjeturas y para ello realizaron las relaciones:

Tabla 14 Interpretación de la relación de las operaciones con la letra generalizada.

Operación	Interpretación en torno a la letra n
$37 + 36 + 36 + 35$	$n + (n - 1) + (n - 1) + (n - 2)$
$37 + 37 + 35 + 35$	$n + n + (n - 2) + (n - 2)$
$(37 + 37 + 37 + 37) - 4$	$(n + n + n + n) - 4$
$(35 + 35 + 35 + 35) + 4$	$((n - 2) + (n - 2) + (n - 2) + (n - 2)) + 4$

La solución de esta actividad, me permitió ver la proactividad de algunos estudiantes que optaron por cortar las figuras y sobreponerlas para verificar los casos en que se repiten los cuadros de la esquina o en los que se debían quitar para así demostrar a los compañeros de trabajo que su punto de vista era válido dada la situación planteada, aquí, evidencié más interacción entre los estudiantes e interpretación de las diversas respuestas obtenidas, realicé discusiones en torno a la validez de las formas de ver la figura y promoví discusiones acerca de si cada una de las operaciones propuestas era válida o no para el ejercicio.

Esta primera experiencia permitió acercar más a los estudiantes “tímidos” a las interacciones en torno a actividades matemáticas, el curso que desarrolló estas actividades a manera de pilotaje mostró interés y comprensión en algunas de las propuestas relacionadas con el trabajo de polinomios, por ejemplo, para el trabajo con las interpretaciones de factorización, la actividad de los bordes les permitió identificar que existe más de una forma de interpretar un polinomio pero todas esas formas llevan a una misma representación al momento de ser operado, al parecer, di sentido al uso de las letras y como estas se pueden trabajar en una operación, se pueden combinar e interpretar como número generalizado.

En cuanto a la enseñanza, mi papel fue pasivo, tratando de identificar diferentes aspectos, interpretaciones, interacciones de los estudiantes con la actividad y con los pares de trabajo, esto me permitió observar que algunos estudiantes, que, al parecer no dominaban temas matemáticos, pudieran argumentar en torno a la solución, pues recurrían a representaciones gráficas o tabulares para expresar las soluciones, justificando desde lo gráfico todas las deducciones que pudo obtener de la figura. De esta actividad, rescaté la facilidad con la que algunos estudiantes trabajaron, dado que no sentían la presión de realizar actividades matemáticas sino un ejercicio en el cual se establecieron relaciones entre las cantidades observadas y la posición de la figura, algunos lograron establecer la relación matemática solicitada haciéndola válida desde la representación gráfica.

A manera de pilotaje, las actividades “más complejas de entender” permitieron observar más interacción entre los estudiantes, al igual que la construcción de justificaciones bien fundamentadas de las soluciones de los ejercicios, desde lo gráfico y escrito, la puesta en común puso en evidencia las diferentes formas de interpretar las actividades y de ello las justificaciones de los estudiantes para validar los procesos. Mi poca interacción con algunos estudiantes, permitió interpretar cómo la poca presión en torno a la calificación los desenvolvía, y llevaba a una interacción más natural entre ellos.

De forma general, estas actividades interpretadas bajo la lupa de Villa (2006, citando a Mason, 1999), me permitieron identificar que la distribución del trabajo empleado el estudiante desarrolló habilidades como:

- Ver la regularidad, desde la propuesta de trabajo individual del estudiante.
- Expresar y hacer exposición verbal de dicha regularidad, primero, por medio de la descripción del trabajo, escribiendo con palabras la justificación de dicha regularidad y segundo, por medio de la exposición oral a los compañeros, de las relaciones establecidas entre las figuras y el número que les correspondía.
- Expresar de manera escrita de la manera más sucinta y precisa la relación establecida, ligado al proceso de registrar las relaciones encontradas en el trabajo individual y grupal.

Anexo 2: Diario de la profesora, segundo ciclo de reflexión

Sesión 1, Actividad 1 (s1, a1):

FECHA: OCTUBRE 23

ACTIVIDAD 1: Bordes

A continuación, se presenta la figura 1, 2 y 3 de una secuencia:

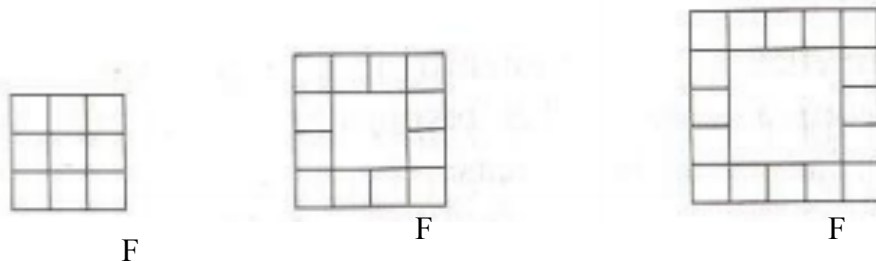


Ilustración 20. Actividad de aplicación 1: Los bordes.

1. Dibuje la figura 5 y 6
 - a. ¿Cuántos Cuadrados hay en el borde de la figura 5?
 - b. ¿Cuántos Cuadrados hay en el borde de la figura 6?
2. ¿Hay alguna manera de encontrar los cuadrados el borde de la figura 15 sin dibujar la figura? Explique su respuesta
3. Mario tiene exactamente 44 cuadrados el borde de una figura ¿A qué número de la figura corresponde? Explique su respuesta
4. ¿Existe una manera general de encontrar la cantidad de cuadrados en el borde de cualquier figura? Explique su respuesta

Descripción:

De manera inicial percibí entusiasmo de los estudiantes para el desarrollo de la experiencia, y mientras repartía las actividades aclaré que debían solucionar la actividad, primero de manera individual y luego, de manera grupal (máximo 3 estudiantes por grupo), a ello no hubo oposición, la descripción la haré de acuerdo a lo encontrado a lo largo de la clase y no en un momento específico.

Al revisar la solución de algunos estudiantes, esperaba que lanzaran la afirmación, profe ¿qué hay que hacer?, pero para mi sorpresa esa no fue la pregunta con la que iniciaron la actividad, ellos preguntaron acerca de si podrían o no llevar a cabo la solución en una hoja

cuadrículada, dado que se les facilitaba la construcción de la figura, a lo que no me opuse, algunos estudiantes, tímidos al ser grabados solamente tapaban sus hojas para que la profesora no tomara capturas de lo que estaban realizando, sin embargo, otros comenzaron con el desarrollo de la actividad y dejaron ver lo que estaban haciendo, así por los próximos 40 minutos del desarrollo de la clase, los estudiantes comenzaron a evidenciar avances en la solución.

En torno a la relación de la figura con el número que componía la cantidad de cuadrados de lado, una de las afirmaciones con las que inició un estudiante es que el número de cuadrados que quedaba en el centro de la figura correspondía al número de la figura, es decir que no contaba los cuadros que componían las esquinas, a lo que solicité que verificara dicha relación con varias figuras, pues no esperaba en primera instancia esa relación, el estudiante siguió dibujando las figuras con la cantidad de cuadrados que afirmó deben haber por cada figura, entonces para la figura 5 dibujó:

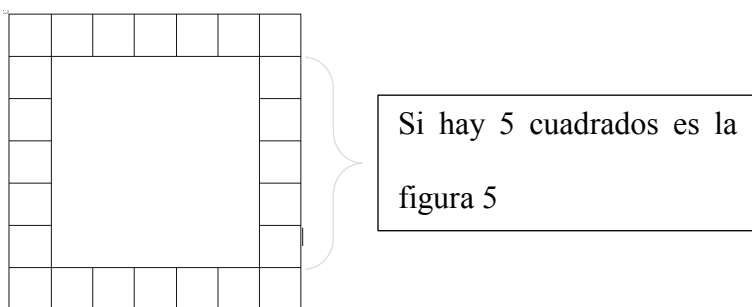


Ilustración 21. Solución 1 de Tarea 1.

Otra de las respuestas que esperaba encontrar al momento de ver las figuras construidas era que la cantidad de cuadrados en el borde corresponderían a la cantidad total de cuadrados (confundiendo la cantidad de cuadrados que conforman el área con la cantidad de cuadrados que conforman el perímetro), pero para mi sorpresa solo dos estudiantes lo afirmaron, es decir que no solo se contaba el total de cuadros en el borde (lo que se interpretaría como perímetro), sino los contenidos en la figura (lo que se interpretaría como área), de esto indiqué, a cada uno por separado, que leyera detenidamente la actividad y mostrara cuál era el borde que se referencia en la pregunta.

Algunos estudiantes optaron por dibujar la siguiente secuencia, teniendo en cuenta la relación con la ilustración anterior:

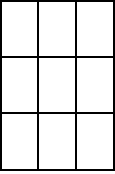
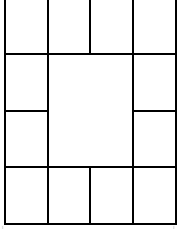
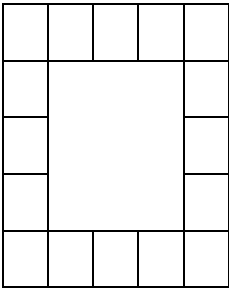
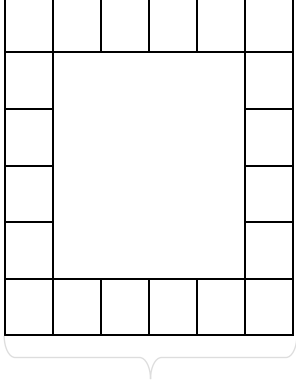
 <p>3 cuadrados</p>	 <p>4 cuadrados</p>	 <p>5 cuadrados</p>	 <p>6 cuadrados</p>	<p>Cuadros de lado: $6 + 1 = 7$</p>
Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5

Ilustración 22. Solución 2 de Tarea de bordes

Del cuadro anterior, interpreté que construyó la figura 4, luego la 5, 6, 7, identificando que de una figura a otra hay un cuadrado de diferencia, es decir que para construir la figura 7 se necesitaban los cuadrados de la figura 6 y se añadía un cuadrado de lado para obtener lo deseado, los estudiantes que recurrieron a esta estrategia afirmaban que así se podría encontrar los bordes de cada figura, contando los cuadrados de lado que componían la figura anterior, a lo que les pregunté ¿pero cómo hallarían la cantidad de cuadrados que componen todo el borde de una figura?, los estudiantes respondieron que multiplicando por 4 la cantidad de cuadros que componen el lado de la figura.

Para aclarar estas respuestas, realicé la siguiente afirmación: si tratamos de hallar la cantidad de cuadrados que hay en el borde de la figura 3, según lo que dice, debo multiplicar 3×4 ¿cierto?, luego de la respuesta afirmativa del estudiante, realizaba la comparación entre la cantidad de cuadrados dibujados en el borde de la figura 3 (que correspondía a 16) y la cantidad que correspondía a la solución dada por la multiplicación (que correspondía 12), al finalizar cada operación, preguntaba al estudiante ¿Son iguales las cantidades que contamos y operamos?, luego de las preguntas, seguía con la ronda, dejando la duda en el aire para que estudiante realizara las respectivas comparaciones.

Luego de ver otro tipo de soluciones, regresaba al mismo estudiante con este tipo de solución y le preguntaba ¿cómo le fue con la comparación de cantidades?, ¿Qué diferencias encontré?, ciertamente, luego de haber hecho esas comparaciones esperaba que el estudiante no

se desanimara por el desarrollo de la actividad y siguiera con la estrategia, de lo cual, lanzó una afirmación (cambiando un poco la argumentación inicial), de haber encontrado una situación curiosa dentro de la solución, y es que las esquinas se repetía un cuadrado y había contado dos veces cada esquina, porque comparando los resultados de la figura 3, tenía lo siguiente:

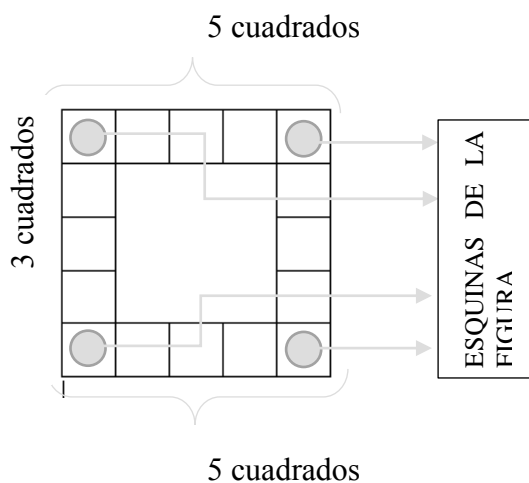


Ilustración 23. Solución 3, Tarea los bordes.

La explicación que dio el estudiante en torno a la imagen corresponde a: “como se tienen 5 cuadrados de lado, se formará un cuadrado que tiene 5 cuadrados de alto y 5 de ancho, de esa figura, los cuadrados de las esquinas se contarían 4 veces si multiplico por 4, porque los contaría de alto y de ancho, entonces, solo cuento los que están de ancho, si es así, me quedan 5 cuadrados de ancho y 3 de alto, para completar el cuadrado, entonces, el total de bordes es la suma de $5 + 5 + 3 + 3$, por eso no me da 12 de la operación 3×4 sino 16”. La pregunta que quedó luego de esta afirmación es, ¿cómo haría para encontrar la figura 15?, esperando obtener justificaciones semejantes a las relatadas para la figura 3.

Al regresar, el estudiante había realizado una lista de todas las soluciones hasta la figura 15, relacionando el número de cuadrados en el lado de la figura respectiva y el número total de cuadrados en el borde, con una lista como la descrita en la tabla siguiente:

1.	$3 = 8$
2.	$4 = 12$
3.	$5 = 16$
4.	$6 = 20$
5.	$7 = 24$
6.	$8 = 28$

Tabla 15. Relación entre el número de la figura y el número de cuadrados de los bordes.

La descripción de la información de la tabla corresponde a: para el punto 1, numerado en el cuadro, se justifica que es la figura 1 que tiene 3 cuadrados de lado y 8 cuadrados en el borde, de manera consecuente, la figura 2 tiene 4 cuadrados de lado y 12 en el borde, y así sucesivamente, para la figura 15 entonces haría la lista completa hasta llegar al número respectivo, y para cualquier figura realizaría el listado hasta llegar al número de la figura pedida.

Por otra parte, un caso que no se tenía contemplado, correspondía a sobreponer las figuras una sobre otra para relacionar la cantidad de bordes de la figura con la cantidad del lado, obteniendo entonces una especie de pirámide como la siguiente:



Figura 1. Act. Bordes

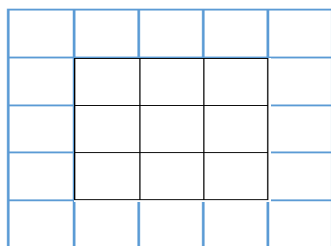


Figura 2. Act. Bordes

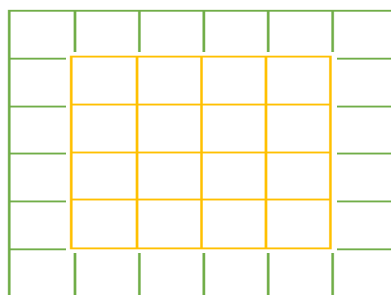


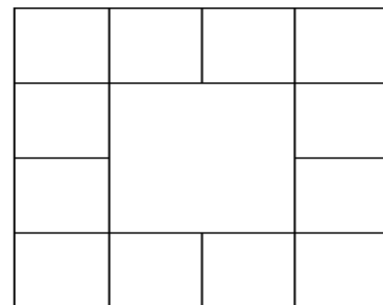
Figura 3. Act. Bordes

Ilustración 24. Solución 4, actividad los bordes.

El estudiante estaba formando la figura sobreponiéndola en la figura anterior, es decir, formaba una nueva figura desde los bordes de la figura anterior (asimilando la forma a una pirámide), entonces, lo que construía no coincidía con lo que estaba plasmado en la hoja, a lo cual solicité que comparara la información de la figura 3 que estaba en la hoja de la tarea y con la

que tenía dibujada en la hoja. Al momento de realizar dicha comparación encontraba que el número de cuadrados que componen el lado de la figura 3 es 5 y en la figura 3 construida por él eran 6, que excedía en 1 la cantidad de cuadrados que debía tener en realidad, para la figura 4 la comparación era mucho más grande y por tanto los dibujos realizados no coincidían con los propuestos en la actividad, a ello el estudiante justificó que estaba haciendo una “torre” que no le iba a ayudar en el desarrollo de esta actividad.

Otro de los casos que esperaba que se presentara con la mayoría de los estudiantes, pero ocurrió con muy pocos, fue el de no considerar la cantidad de cuadrados que componen el borde de la figura sino la cantidad total de cuadrados de toda la figura (el área de la figura), una situación que estaba contemplando desde el inicio de la propuesta de la actividad, para abordar este tipo de situaciones recurrí a la explicación de la actividad desde la figura 2, donde no se mostraba la cantidad de cuadros que habían en el centro de la figura y se le preguntaba al estudiante cuántos cuadrados pequeños habían, el estudiante contaba 13 cuadrados por que estaba contando el cuadrado grande de la mitad, a ello se le afirmó si todos los cuadrados que había contado eran iguales o diferentes, el estudiante respondía que había uno diferente (como se muestra en la figura), por tanto, le hacía notar que ese cuadrado no se debía contar dado que no estaba en el borde de la figura sino en el centro de la misma.



Un caso especial, no contemplado en las actividades previas, se representa en la siguiente secuencia:

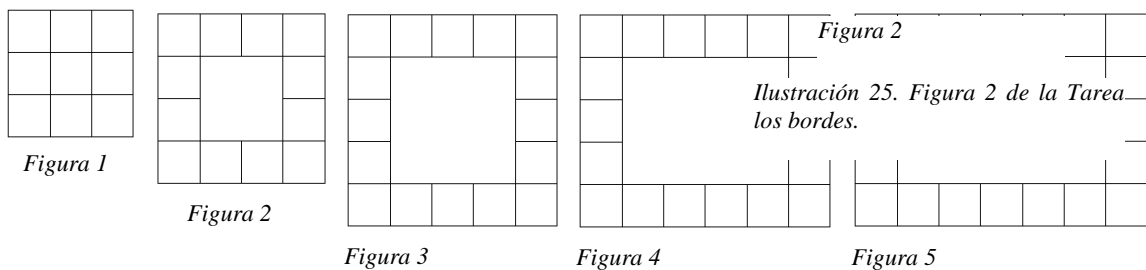


Ilustración 26. Solución 5 de actividad los bordes

Para las figuras 1, 2 y 3 el estudiante siguió la secuencia presentada, pero de la figura 4 en adelante, solo aumento los cuadrados del largo de la figura y el ancho de la figura seguía siendo de 3 cuadrados (sin contar las esquinas), argumentando que como era la última figura que

se había visto, el lado de la misma seguiría constante y cambiaría el ancho de la figura, con esta idea, la figura 5 se compondría de 7 cuadrados de lado pero 5 de ancho y si se omiten los cuadrados de las esquinas, se contarían solo 3 cuadrados de ancho, es decir:

| 7 cuadrados que componen la figura |

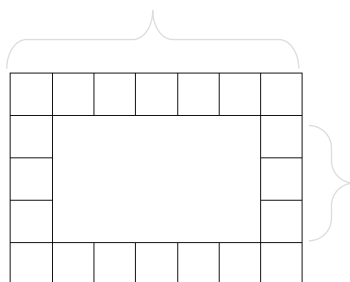


Ilustración 27. Solución 6 para la figura 5 de la tarea los bordes.

Con esta explicación dada por el estudiante, solicité que comparara las soluciones con la de los compañeros, pues insistió que las figuras se dibujarían así dado que la última imagen vista solo tenía 3 cuadrados de lado sin contar las esquinas, así que, su solución era razonable. No se discutió más con el estudiante, esperando que el trabajo en grupo lo hiciera razonar en cuanto a la secuencia formada, pues la idea no era mostrarle la solución sino permitir que pensara sobre la actividad y realizara sus conjeturas para ser discutidas en grupo.

Luego de este trabajo, procedí a formar los grupos de 3 estudiantes, pero, ya se disponía de 20 minutos para el trabajo, iba a finalizar la clase, sin embargo, para no perder la información que se había construido hice la primera parte de la socialización:

Al revisar las discusiones de los grupos, encontré que se centraron, primero en identificar los bordes de las figuras, algunos de los estudiantes que conformaban los grupos coincidieron con las soluciones en las que relacionaron la cantidad de cuadrados que componen los bordes de la figura y el número de la figura, por tanto, no se centraron en las discusiones sino en la construcción de respuestas a cada una de las preguntas o estrategias para contar la cantidad de bordes.

Una de las discusiones que llamó mi atención se relacionó con la cantidad de cuadrados a contar, pues uno de los estudiantes presentó confusiones respecto a la cantidad de cuadrados que estaban en los bordes, algunos insistían en que era la cantidad total de cuadrados de la figura, aclaré esa información con argumentos como: “el borde es lo que cierra el cuadrado, como la cerca de una casa, no puede ser lo de adentro porque no es parte del borde”, al llegar a estas

discusiones aclaré a los estudiantes que existe una relación entre el número cuadrados que componen del borde con el número que corresponde a la figura, para que continuaran con el trabajo sin más discusiones.

Al finalizar esta clase, los estudiantes preguntaron cómo procederían en la siguiente, a lo que aclaré que ellos seguirían con un trabajo en grupo para luego socializar los resultados de las discusiones.

Sesión 2, Actividad 1 (S2, A1)

FECHA: OCTUBRE 24

Teniendo en cuenta que los estudiantes que estaban en cada grupo debían discutir acerca de la solución encontrada en la actividad 1, y de alguna forma convencer a los compañeros de las soluciones que tenían del trabajo realizado de manera individual, sugerí que los argumentos, que justifican las soluciones, debían ser “sólidos” del porqué de lo propuesto en cada punto, y luego, entre los 3 estudiantes, que conformaban el grupo, construir una respuesta a la actividad propuesta, no se aceptarían respuestas tipo “porque así pensamos” o “eso se nos ocurrió”, estas respuestas debían estar soportadas en las figuras y dibujos realizados en grupo.

El tiempo para la discusión era corto, teniendo en cuenta el tiempo de discusión empleado en la clase anterior para el trabajo en grupo, esperé que los estudiantes no demoraran con la solución de las actividades, dando 20 minutos aproximadamente para terminar las actividades de manera grupal con las respectivas justificaciones.

Al realizar las revisiones en los grupos, encontré que 1 estudiante se dejó convencer de los compañeros, con la argumentación de que la cantidad total de cuadrados que componen el borde de la figura correspondería a multiplicar por 4 el número que se encontraba en el borde de la figura, porque la figura que se forma es un cuadrado y este tiene 4 lados iguales, el estudiante del grupo, que tenía información relacionada con la actividad donde no tenían en cuenta los 4 lados, porque se repetían las esquinas, se quedaba callado porque lo que justificaban los compañeros les parecían convenientes (eran 4 lados con la misma cantidad de cuadrados, por eso se multiplicaba por 4) y coherentes con la definición de figura, a esta situación, intervine afirmando que a pesar de que ellos tuvieran una respuesta en común él debía socializar su respuesta.

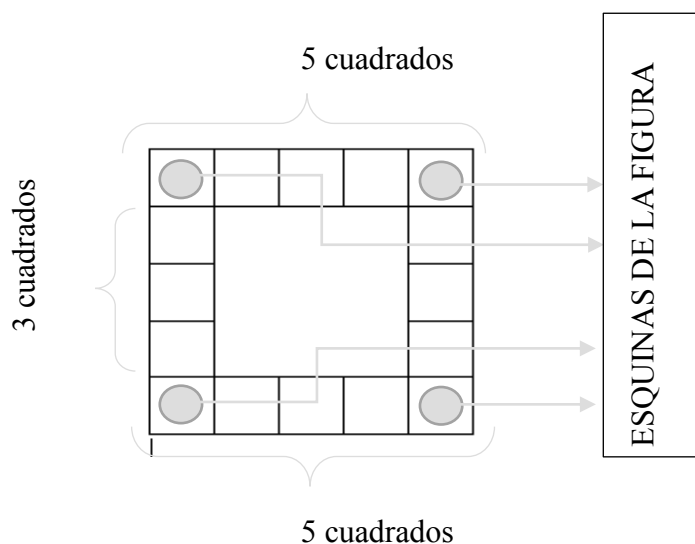


Ilustración 28. Solución 6 tarea los bordes.

El estudiante, entonces, procedió a justificar con una imagen como la representada en la ilustración 29 y afirmó que dicha solución no era conveniente, pues en las esquinas se repetían cuadrados, si los compañeros comparaban con las imágenes de la actividad, la cantidad de cuadrados no coincidiría y por tanto habría errores en la solución.

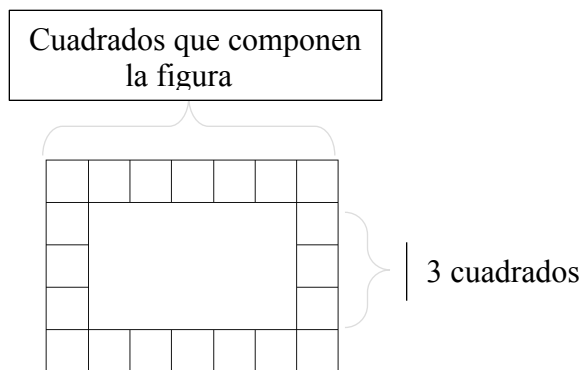


Figura 5

Ilustración 29. Solución 7 actividad los bordes.

Otro de los casos que identifiqué, fue de un estudiante que procedió a justificar su solución con el razonamiento para la figura 4, argumentó que todas las figuras cambiarían la cantidad de cuadrados que componen el ancho pero no el alto, generó una discusión con sus compañeros al respecto, pues uno de ellos afirmaba que son cuadrados las figuras que se muestran en la actividad y lo que él había

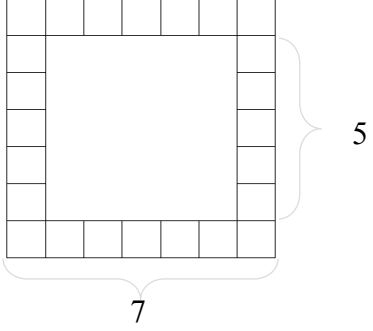
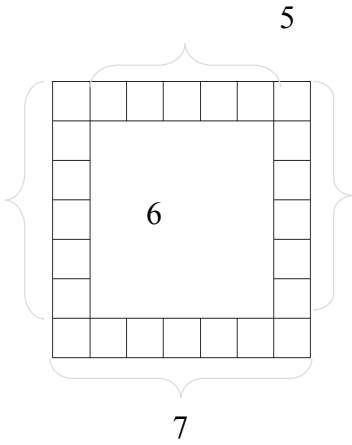
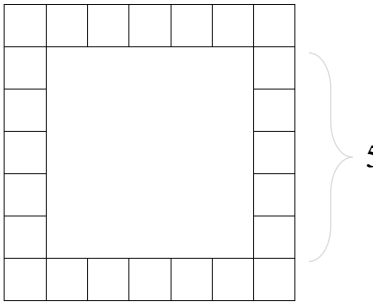
dibujado era un rectángulo, y por tanto no coincidiría con la actividad, la discusión siguió, pues el estudiante inicial se justificaba diciendo que la imagen que seguía no se sabía cómo era, así que lo que cambiaría sería la cantidad total de cuadrados que conforman el lado, no intervino en

esta discusión dado que consideraba conveniente el valor de la incertidumbre que sembraba el estudiante con sus compañeros.

Por otra parte, hubo un estudiante con soluciones acertadas en la actividad pero con una actitud muy pesada con los compañeros, como tenía aprobación del acudiente para ser grabado se solicitó que completara un grupo específico, pero tomó la vocería del grupo en torno a la solución de la actividad dejando a los compañeros sin argumentos para discutir, esta actitud no se tenía contemplada en el desarrollo de la socialización, lo cual fue frustrante tanto para los compañeros de grupo como para la profesora pues no hubo una discusión del tema sino imposición de ideas, de esta actitud se prefirió dejar que el estudiante trabajara de manera individual y no perturbara el desarrollo de la actividad de los otros dos compañeros.

Pasados los 20 minutos de discusión y a pesar de no poder ver todas las interacciones de los estudiantes, procedí a la respectiva socialización de las actividades, llamaría a uno de los integrantes del grupo a socializar la solución a dos puntos de la actividad puesta en el tablero y los compañeros procederían a aceptar o negar la estrategia socializada, solicité que se socializara los cuadrados en el borde de la figura 5, la manera general o la operación matemática que permitía llegar al número de cuadrados en el borde de la misma.

Las estrategias de solución de los estudiantes se relacionaban con la forma de ver las figuras, a continuación, se relacionan las conjeturas que se construyeron en torno al ejercicio y que varios grupos coincidieron con ellas:

Es trategia	CUADRADOS EN EL BORDE DE LA FIGURA 5	FORMA MATEMÁTICA PARA LOS CUADRADOS EN EL BORDE DE LA FIGURA 5
1		$5 + 5 + 7 + 7 = 24$
2		$7 + 6 + 6 + 5 = 24$
3		$5 \times 4 + 4 = 24$

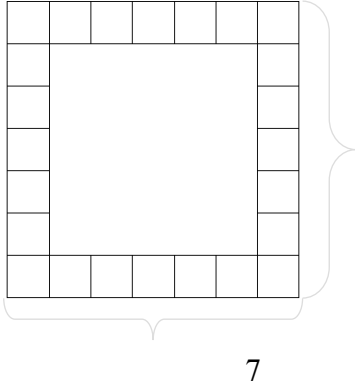
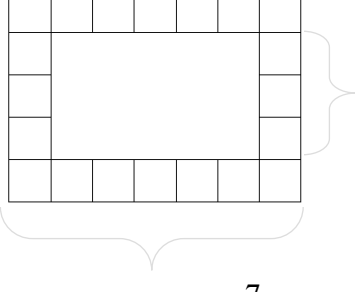
4		$7 \times 4 = 28$
5		$7 \times 3 = 21$
6	Se construyó la figura porque se estableció la relación con el número de la figura y la cantidad de cuadrados que conforman el borde de la misma, es decir, por tanteo.	Sumando $3 = 16$ $4 = 20$ $5 = 24$

Tabla 16. Estrategias de solución para actividad los bordes.

De esta socialización, no es de sorpresa que se tengan varios de los errores que encontré al inicio de la actividad, cuando se trabajó de manera individual, también jugó un papel importante el poder de convencimiento de los estudiantes con los compañeros, noté también trabajo en todos los aspectos de la actividad por gran parte de los estudiantes, muchos de ellos motivados por el desarrollo de la misma, lo cual promovió una buena actitud en su desarrollo.

Un segundo aspecto de la socialización correspondió en identificar a qué figura correspondería la figura que contenía 44 cuadrados de lado, del cual encontré respuestas no tan variadas con las dadas a la primera pregunta pero que lograron movilizar en algo la socialización:

FORMA MATEMÁTICA PARA IDENTIFICAR LA FIGURA CON 44 CUADRADOS EN EL BORDE
--

$44 \div 4 = 11$
<p>Siguiendo la secuencia de figuras anteriores, se obtenía la relación de la figura igual a la cantidad de cuadrados en el borde expresada de la forma:</p> <p style="text-align: center;">$6 = 28$</p> <p style="text-align: center;">$7 = 32$</p> <p style="text-align: center;">$8 = 26$</p> <p style="text-align: center;">$9 = 40$</p> <p style="text-align: center;">$10 = 44$</p>
<p>Haciendo tanteo de las cantidades que hay en los bordes, hasta llegar a la cantidad de cuadrados en el borde, pero teniendo en cuenta que se suman dos cantidades diferentes, es decir, haciendo referencia a la estrategia 1:</p> <p style="text-align: center;">$12 + 12 = 24$</p> <p style="text-align: center;">$10 + 10 = 20$</p> <p style="text-align: center;">$24 + 20 = 44$</p>
<p>Haciendo tanteo, pero recurriendo al uso de la estrategia 1:</p> <p style="text-align: center;">$12 + 11 + 11 + 10$</p>
<p>Devolviéndose en el uso de la estrategia 3:</p> <p style="text-align: center;">$44 - 4 = 40$</p> <p style="text-align: center;">$40 \div 4 = 10$</p>

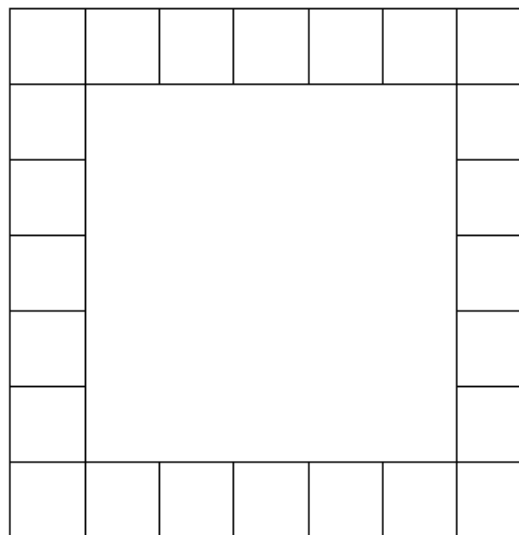


Ilustración 30. Figura 5 de la actividad los bordes.

Tabla 17. Estrategias de solución para figura 44 de la actividad los bordes.

De las socializaciones realizadas, algunos estudiantes recurrieron al tanteo, muy pocos a la realización de los procesos inversos de las operaciones, la actividad fue nutrida para mí, dada la interacción que tuvo la mayoría de los estudiantes, la atención y disposición de la actividad

promovió en algunos de ellos el uso de la argumentación para proceder en las soluciones y convencer al otro de la respuesta.

Lastimosamente, no pude hacer una revisión a todos los grupos para encaminar el desarrollo de las actividades, pero al socializar todos los tipos de respuestas llevó a que los grupos que tuvieron errores pudieran caer en cuenta de los aspectos que no consideraron y por tanto validar lo encontrado por medio de la demostración, con las socializaciones se produjeron discusiones en torno a si las operaciones realizadas y las interpretaciones eran correctas, de lo que solicité a todos los grupos que dibujaran la figura 5 y de acuerdo a la operación escribieran la interpretación que se tenía de cada número, no lo hicieron como se describe en este documento pero si lo expresaron de manera oral y mostraron a los compañeros la relación de las cantidades con la figura.

Sesión 3, Actividad 2 (S3, A2)

FECHA: 30 DE OCTUBRE

ACTIVIDAD 2: Las Fichas

A continuación, se presenta la figura 1, 2 y 3 de una secuencia:

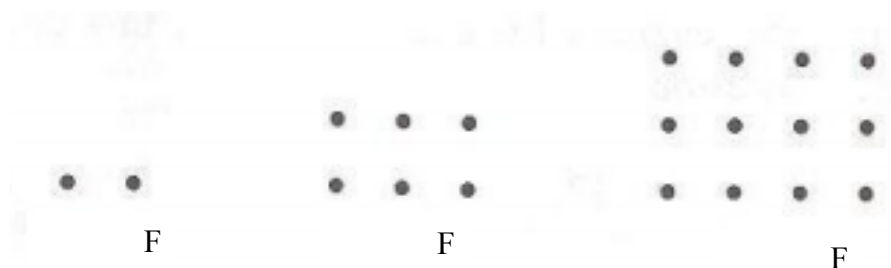


Ilustración 31. Actividad 2: Las fichas.

figura 4 y 5

- a. ¿Cuántos puntos hay en la figura 4?
- b. ¿cuántos puntos hay en la figura 5?
2. ¿Hay alguna manera de encontrar los puntos de la figura 20 sin dibujar la figura?
Explique su respuesta.
3. Daniel quiere construir la figura 100, explique lo que debe hacer para construirla.
4. Santiago tiene la figura de esta secuencia donde usó exactamente 45 puntos ¿A qué número de la figura corresponde? Explique su respuesta.

1. Dibuje la

5. ¿Cómo podría hacer para encontrar la cantidad de círculos de cualquier figura?

DESCRIPCIÓN:

Para dar solución a esta actividad, varios estudiantes procedieron a contar los bordes de la figura, pensando en actividad 1 solucionada anteriormente, por tanto, los comenzaron a contar y a desarrollar la actividad como la inicial, mostrando soluciones como:

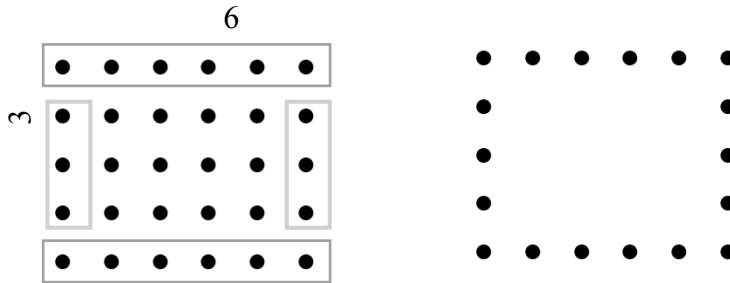


Ilustración 32. Estrategia de solución 1 para actividad 2.

Al identificar este proceso, les aclaré que esta

actividad no se relacionaba con la actividad anterior, pues, era una nueva construcción.

Teniendo en cuenta la aclaración, la solución de actividad llevó a que la mayoría de los estudiantes reconociera una misma relación de los puntos que se encuentran en cada figura, la mayoría de los estudiantes encontraron que entre los puntos que componen la figura de lado y de alto existe una multiplicación que se compone por el número de la figura y el número siguiente a

la figura, de esta manera, se encontraron soluciones tipo:

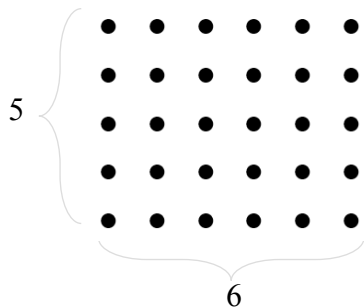


Ilustración 33. Estrategia de solución 2 para actividad 2

Para encontrar la cantidad de puntos de la figura 5, el proceso que seguían los estudiantes era tomar la cantidad de puntos que componen el lado y multiplicarla por la cantidad de puntos que componen el alto, mostrando entonces la operación 5×6 dando como resultado 30.

Las justificaciones que daban algunos de los estudiantes eran en torno a: son 5 filas y en cada fila hay 6 puntos, o viceversa, para encontrar así la cantidad de puntos

en dicha figura.

Otra de las respuestas de los estudiantes consistía en seguir la secuencia de puntos, y de ello comenzaban a contar los puntos para la siguiente figura, haciendo la relación entre el

número de la figura y la cantidad de los puntos, el siguiente cuadro representa lo descrito por uno de los estudiantes:

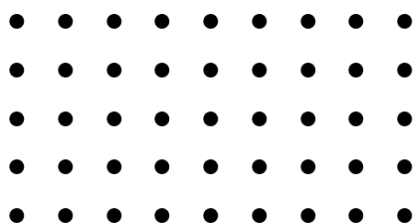
F IGURA	P UNTOS
1	2
2	6
3	1 2
4	2 0
5	3 0
6	4 2
7	5 6
8	7 2
9	9 0

Tabla 18. Relación entre la tabla y la cantidad de puntos por cada figura para la actividad 2.

Al preguntarle al estudiante ¿cómo haría para contar la cantidad de puntos en la figura 100?, respondió que seguiría con el conteo de puntos hasta la figura respectiva, esta solución no se refutó al estudiante en esperas al trabajo en grupo.

Para el punto 4 “*Daniel tiene la figura de esta secuencia, donde usó exactamente 45 puntos, ¿A qué número de la figura corresponde? Explique su respuesta*”, la mayoría de los estudiantes llegaron a la conclusión de que no existe figura pues para la figura 6 se usaron 42 puntos y para la figura 7, 56 puntos, lo que quiere decir que Santiago realizó mal la figura.

Un estudiante, para dar sentido a la respuesta, realizó la figura respectiva para tener los 45 puntos:

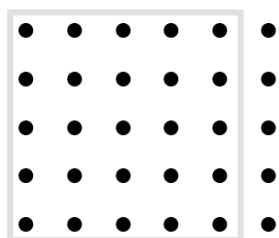


En la figura construida entonces, se tienen 9 puntos de lado y 5 de alto, la cual no coincidiría con ninguna de las figuras realizadas porque no cumplía con las características de la misma.

Ilustración 34. Figura con 45 puntos para actividad 2

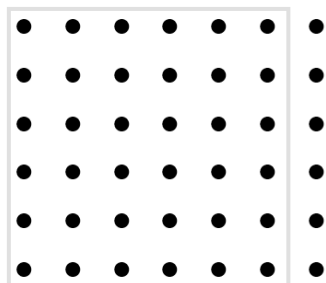
Para la figura 100, se presentaron inconvenientes entre las cantidades que se manejaban de lado y de alto, pues era claro para la mayoría de los estudiantes que la cantidad de puntos de alto eran 100, pero de lado se obtuvieron dos clases de respuestas, los estudiantes que tenían 101 puntos teniendo en cuenta la relación establecida anteriormente (una cantidad x de lado y una cantidad $x + 1$ de ancho), y los que tenían 102 puntos al parecer por la relación dada en la actividad 1, lo curioso de esta relación es que fue la dada por los estudiantes que prefirieron construir la cantidad total de puntos hasta la figura 100, lo que consideré un error de cálculo.

Luego del trabajo individual, procedí al trabajo en grupos de 3 estudiantes, las soluciones encontradas en casi todos los grupos se relacionaban con la forma descrita anteriormente, multiplicando el número de la figura por el número de la figura más uno, sin embargo, la construcción de un grupo no tuvo relación con la anterior, pues, establecieron la relación entre los puntos que forman un cuadrado y los puntos que sobran de la figura, de la que se dibujó:



Para el caso de la figura 5, la relación sería $(5 \times 5) + 5$, porque se formaba un cuadrado con 5 puntos de lado y 5 puntos de ancho, finalmente se adicionaba una fila de 5 puntos, para validar dicha información comparé esta relación para la figura 6, haciendo el dibujo y la respectiva operación, al igual que la figura 7, todo con el fin de comparar información y validar la relación.

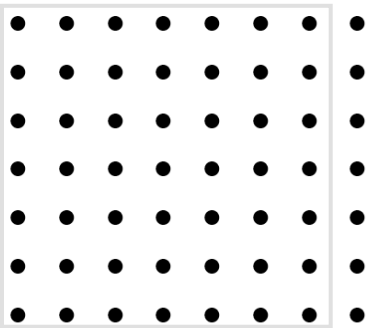
Ilustración 35. Figura 5 de la actividad 2



Se forma el cuadrado de lado 6 y ancho 6 y se suma la fila que contiene 6 puntos

Ilustración 36. Figura 6 de actividad 2

Para socializar el punto 5, donde solicité a los estudiantes calcular la cantidad de puntos de la figura 100, la mayoría de los grupos



Se forma el cuadrado de lado 7 y ancho 7 y se suma la fila que contiene 7 puntos

Ilustración 37 Figura 7 de actividad 2.

concordó que la operación sería 100×101 encontrando así un total de 10.100, pero dos de los grupos concordaron que la respuesta era: 100×102 , dado que son 102 los puntos que se encuentran de manera horizontal en la figura, a esto, los estudiantes comenzaron una discusión en torno a la cantidad real de puntos en la figura, pero no se llegaba a ningún acuerdo algunos de los estudiantes solicitaron mi intervención para aclarar dicha información y así tener un mismo punto de vista, pero dado el tiempo de la clase esta inquietud se dejó como tarea para identificar cuál sería la solución que considerarían correcta.

Sesión 4, Actividad 2 (S4, A2)

FECHA: OCTUBRE 31

Inicié la clase con la discusión que se produjo anteriormente, relacionada con la cantidad de puntos que componen el ancho de la figura 100, al respecto, algunos estudiantes afirmaban que la cantidad de puntos de lado eran 101 porque se adicionaba un punto a la figura específica, entonces al momento de realizar la figura no se disponía de espacio para hacer la figura 100, así que recurrí al siguiente esquema:



Ilustración 38. Representación de la figura 100 para la actividad 2

Justificaba, que como en las figuras anteriores, los puntos que estaban ubicados de manera horizontal excedían en un punto los que estaban ubicados de manera vertical, por esa explicación, los puntos serían 100×101 y no de otro modo.

En torno a tener 102 puntos de manera horizontal, los grupos de estudiantes con resultados diferentes, dieron razones relacionadas con que la cantidad de puntos contenidos en las filas se repetían, pero al momento de hacer el conteo de la relación entre el número de la figura y la cantidad de puntos, obtuvieron que el resultado total de puntos para la figura 100 es 10.200 y no 10.100, como lo obtuvieron los compañeros.

En ese momento realicé una intervención con las aclaraciones respectivas, para ello, comencé a socializar las 4 primeras cantidades que se podrían representar mediante puntos, y de cada figura lanzar afirmaciones relacionadas, entonces, describí lo siguiente:



 Se encontraron 2 puntos de lado y 1 punto de alto, o 1 punto horizontal y 2 verticales

Ilustración 30. Figura 1 de actividad 2

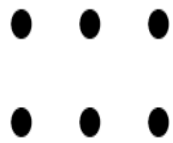

 Se construyó la figura con 2 puntos horizontales y 3 verticales, obteniendo un total de 6, en relación a la figura anterior se adicionaron 1 punto de ancho y de largo, obteniendo un total de 6 puntos.

Ilustración 40. Figura 2 de actividad 2

Al ver la figura 100, se hizo la comparación y los estudiantes relacionaron estas figuras para establecer cantidad total de puntos, donde se concluyó que no se hallaba sentido el tener 102 puntos de manera horizontal, a estas discusiones, una de las estudiantes intervino aclarando que había visto la relación como la actividad anterior, pues como se añadía una hilera vertical y horizontal se repetía el punto que compartían las hileras, por eso salía la cantidad 102, es decir, como el ejemplo de la figura 3:

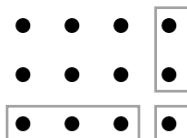

 Se observa que la figura fue construida con 3 puntos horizontales y 4 puntos verticales, obteniendo un total de 12 puntos, para construir esta figura con respecto a la anterior se adicionó una fila y una columna más un punto, los cuales se encerraron en los cuadros azules.

Ilustración 41. Figura 3 de tarea 2

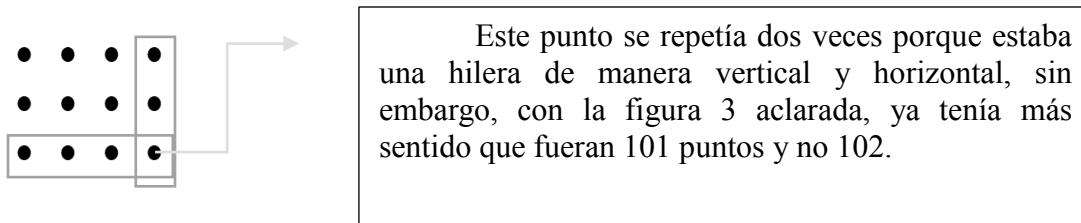
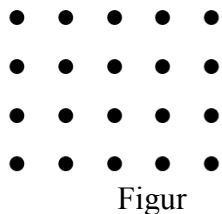


Ilustración 42. Figura 3 de actividad 2



Para esta figura, se tienen 4 puntos horizontales y 5 puntos verticales, ¿qué cambió? A lo que los estudiantes respondieron que la cantidad de puntos puestos de manera vertical y horizontal, entonces tienen sentido que sean 20 puntos como resultado de la operación 4×5

Ilustración 43. Figura 4 de tarea 2

Con esta aclaración se terminó la clase, dado que el tiempo que se disponía era menor al de las anteriores clases, sin embargo, me sorprendió el trabajo que se había podido realizar con los estudiantes.

Sesión 5, Actividad 3 (S5, A3)

FECHA: NOVIEMBRE 6

ACTIVIDAD 3: Los palillos

A continuación, se presentan la figura 1, 2 y 3 de una secuencia:

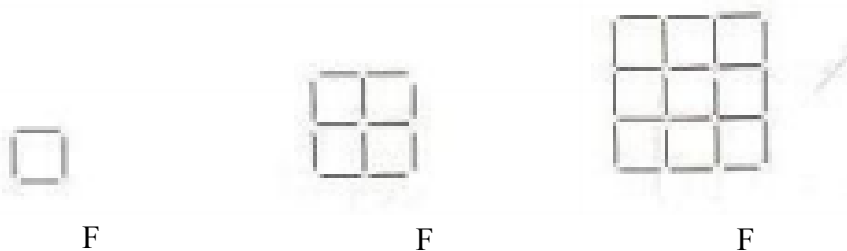


Ilustración 44. Actividad 3: Los palillos

1. Di buje la figura 5 de la secuencia, ¿cuántos palillos la componen?
2. ¿Cuántos palillos hay en la figura 9? Explique su respuesta.
3. ¿Cuántos palillos hay en la figura 100? Explique la respuesta

4. Existe algún procedimiento para calcular el número de palillos para una figura cualquiera

DESCRIPCIÓN

Recomendé a los estudiantes que iniciaran con el trabajo individual, dado que este iba a permitir el desarrollo del trabajo grupal, uno que otro estudiante preguntó si la actividad se relacionada con la actividad 1, la cual, al parecer fue significativa en algún aspecto para dichos estudiantes.

Haciendo un recorrido rápido a las estrategias de algunos estudiantes, encontré relaciones interesantes y justificaciones relacionadas cada una de las figuras formadas, como por ejemplo considerar siempre los 4 palillos que forman la figura, que no se repiten para ninguna figura, es decir, para la figura 5, la estrategia fue multiplicar 5×4 , dado que son 5 cuadrados de lado y 4 palillos los que se forman en cada figura, a esta afirmación pregunté al estudiante, si la relación dada se correspondía con la cantidad de palillos dibujada, como no correspondía el estudiante decía que no le funcionaba la figura, pero aclaraba que lo realmente no funcional es la estrategia porque la figura se encontraba ya dibujada.

Una de las estrategias de conteo que salió de esta actividad está relacionada con la cantidad de palillos que se tienen de forma vertical y horizontal, se tiene la figura 5 representada en la ilustración 46, así:

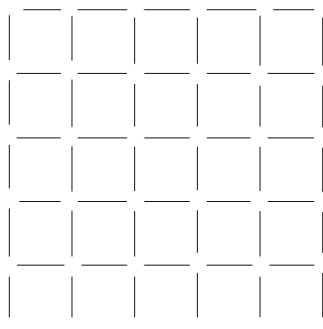


Ilustración 45. Figura 5 de actividad 3

De la figura 5, se tienen 60 palillos, distribuidos 30 de manera vertical y 30 de manera horizontal, la pregunta fue ¿cómo?, el estudiante afirmó que, contando los 6 palillos puestos de manera vertical por los 5 palillos puestos de manera horizontal, dado que no era clara su respuesta, se le solicitó que indicara la cantidad a la que hacía referencia con el número 6 y el número 5, el estudiante indicó,

por tanto:

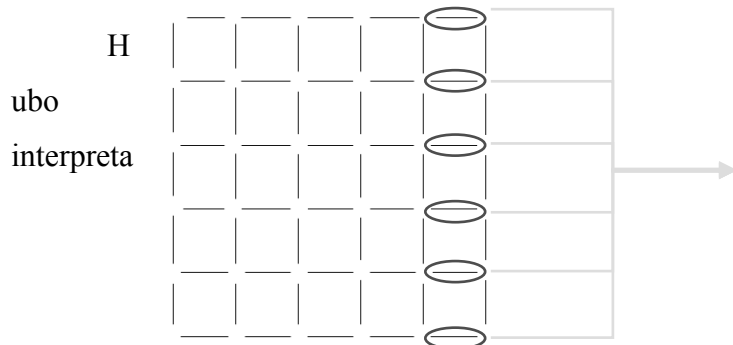


Ilustración 46. Figura 5 de actividad 3.

Se tienen 6 líneas horizontales que se repiten en las 5 columnas, de lado pasa lo mismo, 6 líneas verticales que se repiten en las 5 columnas, lo que quiere decir que se tiene $6 \times 5 = 30$ y sumado con el resultado de $6 \times 5 = 30$, da el resultado del total de líneas en la figura 5

ciones y operaciones que realmente no se entendieron al momento de ser ejecutadas, como por ejemplo para la figura 5 sumar los resultados de las multiplicaciones 5×4 y 5×4 y 5×4 , pero, la estudiante no supo darse a entender de donde salían las cantidades y qué relación tenían esas con la figura en cuestión, a parte de la cantidad de cuadrados que había en la imagen.

Sesión 6, Actividad 3 Y Cierre (S6, A3c)

FECHA: NOVIEMBRE 7

Para el desarrollo de la sesión, en la cual se socializaron las soluciones de los estudiantes, concedí 15 minutos para la culminación del trabajo grupal, en el cual se debían concertar ideas en torno a la solución propuesta a la actividad, de esta socialización se concretaron ideas relacionadas con el trabajo asociado a la actividad 3, como recomendación adicional, pasé grupo por grupo haciendo referencia a la necesidad de una operación matemática que fuera de utilidad para saber rápidamente la cantidad de palillos necesario para cualquier figura.

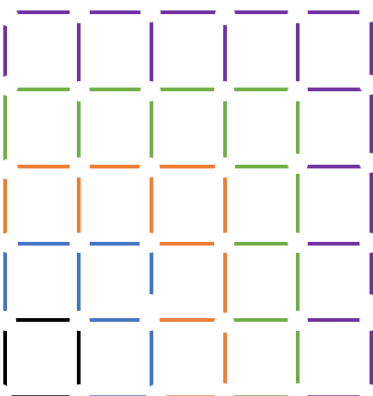
Para la socialización, pedí a los estudiantes que realizaran las operaciones para determinar la cantidad de palillos necesarios para la figura 100, de esta socialización, varios de los grupos llegaron a que la relación entre la cantidad de palillos puestos de manera vertical y horizontal es una multiplicación de un número por el siguiente, un solo grupo finalmente llegó a la necesidad de construir todas las figuras, sin embargo, no se descartó esa idea pues fue parte del proceso para encontrar la regularidad.

En los siguientes aspectos, se describen las interpretaciones encontradas:

- Operación: Hacer la lista de los palillos que se necesitan en cada figura.

Gráfico e interpretación:

Recurrir a todos los cuadros construidos antes de la figura siguiente, haciendo la lista de todos los palillos que se necesitan para cada figura y escribirlas en el orden respectivo.



La ilustración, representa la figura 5, de ella se considera: para el caso de la imagen, la figura 1 es el formado por palillos negros, luego para la figura 2 se necesitan 8 palillos, que son los de color azul más los de color negro, para la figura 3 se forma con los palillos de la figura 2 y 12 palillos más, que son representados de color rojo.

Ilustración 47. Figura 5 de actividad 3.

El inconveniente de esta estrategia se dio cuando se necesita averiguar la cantidad de palillos en una figura muy grande, por ejemplo, la figura 900 requiere que el estudiante construya 899 figuras para saber cuántos palillos necesita en ella, por tanto, se descartó esta estrategia.

- Operación: Multiplicar el número de la figura por el número de la figura más uno, y sumar su mismo resultado.

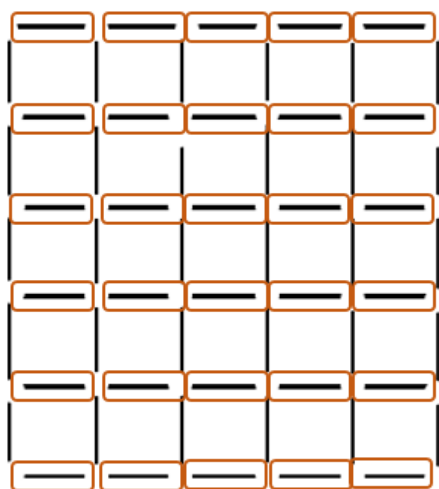


Ilustración 48. Figura 5 de actividad 3.

Gráfico e interpretación: este tipo de solución la expresaron varios grupos de estudiantes, y se relaciona con la posición y cantidad de palillos que se ubican de manera horizontal y vertical, se hizo referencia que en cada columna se encontraban 6 palillos, y se tenían 5 columnas, por tanto, serían 6 palillos por 5 filas, encontrando 30 palillos solo de manera vertical, de manera horizontal ocurre algo semejante con la organización de los palillos, y se repetiría el resultado de la operación 5×6 .

La expresión de esta operación en el tablero la hicieron los estudiantes como:

$$5 \times 6 = 30 + 30 = 60$$

Haciendo alusión a lo enunciado, se tuvo en cuenta dos casos en los cuales los estudiantes representaron la operación como: $5 \times 6 \times 2$, lo cual desató en los estudiantes cara de no poder entender lo expresado en el tablero, el segundo estudiante que expuso su idea, contestó al grupo que, dado que la operación se repite dos veces, sería innecesario ponerla o sumarla, así que consideró poner el 2 como referencia a que la operación se repite dos veces.

- Operación: sumar dos veces el resultado de: elevar al cuadrado el número de la figura y sumar el doble del número de la figura.

Interpretación: un grupo de estudiantes estableció la relación entre las cantidades de forma tal que para la figura 5, funciona la operación: $(5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 + 5)$, la relación funciona para todos los casos, pero no se estableció la relación existente entre las cantidades y el número de la figura.

Para culminar la clase, se socializaron estas estrategias y las formas de ver las soluciones de la actividad, haciendo énfasis en que el cambio lo representa el número de la figura, pues de acuerdo a ella cambian diversos aspectos de la forma de la figura y los elementos que la componen.

Teniendo en cuenta que esta sería la última sesión de trabajo dadas actividades institucionales posteriores, decidí intervenir en el trabajo para concluir algunos aspectos relacionados con las actividades, de ello se socializó que el número de las figuras puede variar, mostrando operaciones en torno a una figura, si tenemos una figura cualquiera la podemos operar de acuerdo a las características de la misma.

Por ejemplo, en el caso de la figura 5 de la actividad 3, la última estrategia que consistía en $(5 \times 5) + (5 \times 5) + (5 + 5)$, la cual se podría reemplazar por $2 \times (5 \times 5) + (2 \times 5)$, sabiendo que 5 corresponde al número de la figura y que se tienen operaciones que se repiten 2 veces, las cuales se pueden expresar fácilmente, a esta afirmación pregunté a los estudiantes, ¿si es una figura cualquiera?, un estudiante resultó diciendo pues se pone figura cualquiera, pero eso no era lo que esperaba, pero luego de hablar de las figuras y la forma y posición que habían tomado, se necesitaba de una forma o estrategia de llamar a las figuras.

Luego de un silencio “incómodo”, esperando alguna observación a dicha aseveración, otro estudiante afirmó que debía ponerse como x , aunque su afirmación fue: “profe, pues ponga una cosa como x , porque ya sabemos que es cualquiera”, otra estudiante, en pro de la discusión afirmó “si profe, es mejor, porque ya sabemos que esa x es de la figura y no tenemos que andar complicándonos tanto, hagamos fácil las cosas” a estas afirmaciones, entonces se reemplazó la operación anterior como $2 \times (X \times X) + (2 \times X)$ sabiendo pues que la x representa al número de la figura.

Se preguntó a los estudiantes si esa x se podría representar por otra letra como la F de figura o la n de número, a lo que respondieron que sí, dado que lo importante era reconocer que la letra reemplazaba el número al que correspondía la figura. Lastimosamente la sesión finalizó y no se pudo abordar de nuevo la socialización de las actividades.

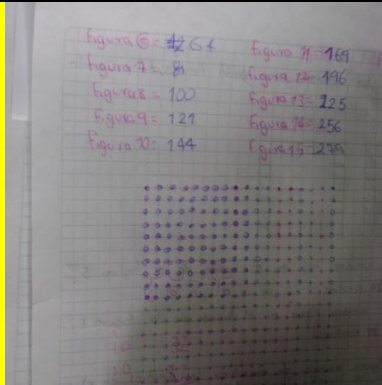
ANEXO 3: SISTEMATIZACIÓN DE DATOS DEL SEGUNDO CICLO DE REFLEXIÓN

Tabla 19. CATEGORÍA: ASPECTOS CONCEPTUALES DEL PROFESOR

	CATEGORÍA: ASPECTOS CONCEPTUALES DEL PROFESOR				
	¿Qué quiero enseñar a los estudiantes?	¿Qué sé del tema?	¿Qué material de consulta debí revisar para hacer la planeación?	¿En qué me basé para proponer el objetivo de clase?	¿Qué usé de lo que sabía al enseñarlo?
<p>DATO.</p> <p>Fuente: Diario de campo del profesor</p>	<p>Pretendí, promover en los estudiantes el uso de la letra como variable generalizada por medio del reconocimiento de las relaciones entre el número de elementos que compone una figura y la posición de esta en una secuencia, teniendo en cuenta la forma de visualizar la secuencia.</p>	<p>Supe del tema lo encontrado desde las distintas fuentes de información (artículos de aplicación de los temas y reportes de investigación), relacionadas en los referentes conceptuales para este diseño de la generalización.</p>	<p>El material de consulta se constituyó en investigaciones y artículos relacionados con la significación del álgebra por medio de procesos de generalización.</p>	<p>El objetivo de cada clase, en este caso, para cada actividad, fue planteado desde la información analizada de los artículos del material de consulta para hacer la planeación de las actividades.</p>	<p>Los materiales de consulta y el resultado de la experiencia de la propuesta 3 del primer ciclo, fue en lo que me basé para proponer los objetivos de clase, lo cual se relacionaba con artículos y reportes de investigación para la implementación de actividades de generalización en la escuela.</p>

<p>Registro del estudiante</p> <p>Proceso: ver</p>	<p>Imágenes que representan las distintas formas de interpretar la solución a la actividad 1, los bordes, por parte de los estudiantes para entender la secuencia y graficarla.</p> 				
--	--	--	--	--	--

Tabla 20. CATEGORÍA: TÉCNICAS E INSTRUMENTOS

	CATEGORÍA: TÉCNICAS E INSTRUMENTO	
	¿Qué recursos usé y que papel creo que jugará el material?	¿El material fue importante para lo que quería enseñar?
Fuente: Diario de campo del profesor	Los recursos fueron las actividades impresas, desde las cuales se esperaba que el estudiante realizara representaciones gráficas de las formas de visualizar las relaciones entre el número de la figura y la cantidad total de elementos que la componen, por tanto, su papel se basó en facilitar algunas de las representaciones gráficas de las secuencias propuestas.	El material fue relevante para realizar las representaciones gráficas y las formas de expresar las visualizaciones de la solución a cada una de las actividades.
Imagen de registro del estudiante Proceso: Registrar	 <p>Ilustración 49. Propuesta de Solución de la Tarea 2, las fichas</p> <p>Con esta actividad, promoví el uso de</p>	Fue relevante para esquematizar las relaciones y justificar las operaciones que gráficamente se habían representado.

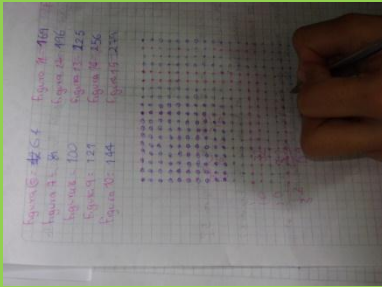

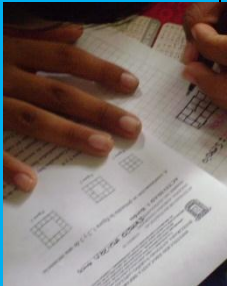

	representaciones gráficas de las figuras como ayuda para justificar los procesos y operaciones realizados.	
<p>Imagen de registro del estudiante</p> <p>Proceso: Registrar</p>	 <p><i>Ilustración 50. Construcción de soluciones para la tarea de las fichas.</i></p> <p>Esperé que el planteamiento de las actividades condujera al tipo de interpretaciones de la imagen, en que el estudiante realizara las construcciones de las figuras que constituyen la secuencia, al igual que, a partir de la construcción de todas las figuras, identificar la relación entre la cantidad de puntos que componen cada figura.</p>	<p>El material fue importante para identificar las construcciones gráficas de los estudiantes y la relación que establecía con las operaciones. Con este, no se dejó de lado las construcciones, las cuales fueron base para la socialización de ideas en trabajos grupales. La imagen representa los dibujos realizados por un estudiante para identificar la relación de los puntos que componen cada figura en la actividad 2, las fichas.</p>  <p><i>Ilustración 51. Construcción de un estudiante para la solución de la actividad 2, las fichas.</i></p>

Tabla 21. CATEGORÍA: GESTIÓN

CATEGORÍA: GESTIÓN					
	¿Qué preguntas hice a los estudiantes?	¿Cómo gestioné la enseñanza?	¿Qué aspectos de los estudiantes y del contexto influyeron en la enseñanza?	¿Surgieron imprevistos y cómo se sortearon?	¿Cambié algo respecto a lo gestionado?
DATO FUENTE: DIARIO DE CAMPO DEL PROFESOR	Las preguntas realizadas a los estudiantes se encaminaban a la descripción de la interpretación de las relaciones encontradas en cada una de las figuras, por ejemplo: Para la actividad 1: ¿cómo hallarían la cantidad de cuadrados que componen todo el borde de una figura? ¿Son iguales las cantidades que contamos y operamos? ¿qué diferencias encontré	La enseñanza la gestioné en 3 momentos: el primero contemplaba un trabajo individual del estudiante, donde identificaba las formas en las que el estudiante interpretaba la figura y establecía unas relaciones iniciales. El segundo momento, en grupos de 3 estudiantes, donde identificaba las formas en las que comunicaba dichas interpretaciones a los compañeros y, por tanto, justificaba sus procedimientos. El tercer momento, que consistía en escribir de manera general la	Los aspectos de los estudiantes que influyeron en la enseñanza se relacionaron con su disposición, que de manera positiva influenció en la realización de las actividades. Respecto al contexto de las actividades, el ritmo de trabajo tuvo un cambio notable en los estudiantes, pues noté más participación de los mismos en el desarrollo	El imprevisto más grande, se relacionó con la actitud de uno de los estudiantes, que, a pesar de tener los mejores resultados, impuso sus ideas a los compañeros, dificultando la posibilidad de participación de los compañeros para el desarrollo de las actividades, este impase se solucionó hablando con el	El cambio respecto a lo gestionado, fue el referente al tiempo de solución de las actividades, pues, la ejecución de programaciones institucionales dificultó disponer de más tiempo para el desarrollo de esta propuesta.

	<p>entre las cantidades operadas y contadas? Para la actividad 2: ¿Cómo haría para contar la cantidad de puntos en la figura 100? de la representación de la figura 3, de la actividad ¿qué cambió? Para la actividad 3: ¿qué operación se realizaría, si se quiere calcular la cantidad de palillos para una figura cualquiera?</p>	<p>forma en la cual se visualizaba cada uno de los patrones propuestos frente al grupo en general.</p>	<p>de las clases.</p>	<p>estudiante esperando un cambio de actitud en las demás sesiones, lo cual dio resultado, permitiendo desarrollar las actividades sin ningún inconveniente.</p>	
--	--	--	-----------------------	--	--

				<p>Un impase relacionado con las actividades, fue la solución dada a la segunda actividad la cual era igual a al de la primera actividad, tal vez por la forma de la figura propuesta, este impase se solucionó realizando la lectura de manera conjunta y construyendo las interpretaciones de la tarea 2 y sus diferencias con la tarea 1.</p>	
<p>Imagen de registro del estudiant e</p> <p>Proceso:</p>	 <p><i>Ilustración 52. Solución de la</i></p>	 <p><i>Ilustración 53. Solución de la actividad</i></p>		<p>TRANSCRIPCIÓN DE VÍDEO:</p> <p>La siguiente transcripción corresponde a un momento de</p>	

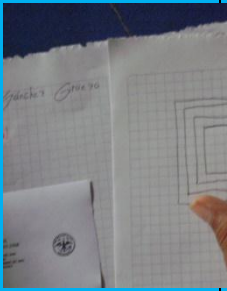
Registrar	<p><i>actividad 1.</i></p> <p>Pregunté a este estudiante lo que estaba haciendo y le pedí que comparara su dibujo con las primeras tres imágenes que tenía, para que, por medio de la comparación entre las cantidades que conforman cada imagen cayera en la cuenta que estaba cometiendo un error, pero, por más que hice la comparación, confrontando la cantidad de cuadros que componen el lado de cada figura, el estudiante insistía que</p>	<p><i>2, los puntos.</i></p> <p>Esta es la imagen de la confusión de los estudiantes con las actividades 1 y 2, pensando que la solución de la actividad 1 era igual a la actividad 2. Teniendo en cuenta este tipo de representaciones, hice la aclaración a los estudiantes en torno a la forma en la cual solucionan la actividad. De ello, consideré hacer referencia a la forma cómo fue presentada la figura y las características la misma en comparación a la actividad 1 para no desviar la solución.</p> <p>Dicha intervención la hice para encaminar las ideas de los estudiantes y no tener las mismas soluciones</p>		<p>discusión en la clase, para llegar a común acuerdo en torno a la solución de la figura 100 de la actividad de los puntos, pues, para esta solución se presentaron discusiones acerca de la cantidad de puntos que conformaban la figura de lado, por ello, pregunté a un integrante de cada grupo por qué consideran que la cantidad de puntos de lado que componían la figura 100 era 101 o 102, en relación a esto,</p>	
-----------	---	---	--	--	--

	<p>las demás figuras serían iguales.</p>	<p>presentadas para la actividad 1.</p>		<p>propuse una discusión grupal para exponer las interpretaciones a las que había llegado cada grupo de estudiantes, para finalmente tener una conclusión grupal y entender entre todos las estrategias que llevaron a dicha interpretación:</p> <p>David: ¿Se le suma un punto?</p> <p>Profesora: ¿A quién se le suma un punto? ¿A usted o a la figura?</p> <p>David: a la figura</p> <p>Profesora: Ahh bueno, entonces</p>	
--	--	---	--	--	--

			<p>¿Cómo quedaría? ¿El de cien por ciento uno o el de cien por ciento dos? David: Cien por ciento uno Profesora: bueno, Eeeel grupo de Luz Daniela ¿Qué dice? Ingrith: Es cien por ciento dos, ¡Profesora! Profesora: ¡Por qué! Ingrith: Pues es que ni modo de yo ponerme a hacer todas las multiplicaciones para averiguar cuál se opera. Profesora: Pero ¿es ciento dos?,</p>	
--	--	--	--	--

			<p>entonces ¿tú dices? Ingrith: Siiii Profesora: ehhhhhmm, ehmmmm, Ingrith Ingrith: Tengo todas las multiplicaciones acá Profesora: Si es así, entonces. Bueno sigamos con la discusión. ¡Cristian! Cortés ¿Es ciento uno o ciento dos los puntos que van de lado? Cristian: Ciento dos Profesora: ¿Por qué? Cristian: Siempre se le van sumando dos Profesora: siempre</p>	
--	--	--	--	--

			<p>se le van sumando dos puntos. Allá, Jaiver, ¿Qué dice? Jaiver yyyyyyy, Hmmm, Paula</p> <p>(...)</p> <p>Profesora: ¿En qué se basan para decir que es ciento uno? ¿En qué se basan para decir que es ciento dos?</p> <p>Jaiver: porque bueno, podemos decir que en la de arriba hay ciento dos, pero con en la de abajo la de la esquina se está contando, como ya no hay que contar la de la esquina,</p>	
--	--	--	--	--

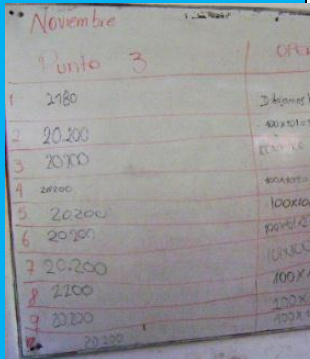
				<p>entonces tiene que haber ciento uno. (haciendo referencia a que la estudiante Ingrith está contando dos veces el mismo punto)</p> <p>Profesora: Hmm más o menos entiendo. (...)</p>	
<p>Imagen y transcripción de registro del estudiante e Proceso: Registrar</p>	 <p><i>Ilustración 54. Representación de la interpretación de la solución de la actividad de los bordes, interpretación en forma de pirámide.</i></p> <p>Pregunté al estudiante qué estaba</p>	<p>TRANSCRIPCIÓN:</p> <p>Luego de una socialización en torno a la cantidad de puntos que componen la figura 100 en la actividad de los puntos. La estudiante ingrith interrumpió debido a que la construcción que realizó no coincidía con la información que tenían los demás estudiantes del grupo, en plena socialización,</p>			

	<p>haciendo, con el fin de saber cual era la forma de pensar para armar la secuencia en forma de pirámide, pensando en la sobreposición de las figuras. Este tipo de procedimientos me causó curiosidad debido a que con siguió la secuencia de acuerdo a lo planteado sino creó su propia estrategia para la respectiva solución.</p>	<p>interrumpió mi explicación porque ella insistía que la operación a realizar en la actividad era multiplicar 100 por 102 para hallar la cantidad total de puntos y no 100 por 101 como todos los compañeros la tenía, para entender lo que ella estaba realizando y mostrar a los estudiantes el error, busqué dentro de las soluciones de los grupos de estudiantes las posibles justificaciones para derrumbar esta interpretación y así hacer caer en cuenta a la estudiante de su error desde las justificaciones que dan sus compañeros:</p> <p>Ingrith: ¡NO! Pero es que, de igual manera profesora, haga la cuenta, hagamos la figura</p>			
--	--	--	--	--	--

		<p>100 ¿cierto?. Se supone que tiene que haber cien así (Señalando la forma vertical) y dese de cuenta de que estoy contando los puntos y me va a dar ciento dos.</p> <p>Paula: está contanto ciento dos</p> <p>Jaiver: Abajo, está contando los que van así (señalando la manera horizontal de la figura)</p> <p>En ese momento, paso a ver al construcción que realizó ingrith de la figura para identificar el error, mientras algunos estudiantes discuten al respecto</p> <p>Profesora: A ver, miren acá, Ingrith dice: tiene para la figura 4 hay 20 puntos ¿Todos coincidimos?</p>			
--	--	---	--	--	--

	<p>Respuesta general: siii</p> <p>Profesora: para la figura 5 hay 30 puntos, ¿todos coincidimos?</p> <p>Respuesta general: siii</p> <p>Profesora: listo, se saltó la figura 6 y 7, hizo la figura 8 (...)</p> <p>Esneider: Está contando un punto dos veces</p> <p>Profesora: Sumercé está contando un punto dos veces ¿Sabe qué punto está contando dos veces ingrith?, este (señalando un punto de la esquina de la figura dibujada en el tablero), por eso le salen 102, por que, ¿este punto cuantas veces lo tengo que contar? (señalando el punto encerrado), un vez para abajo y una vez para el lado, o sea</p>			
--	---	--	--	--

		que sumercé me está agregando una fila demás, por eso le quedó mal, en la figura 4 y en la 5 lo hizo bien, pero en la figura 6 está repitiendo este punto (señalando el punto encerrado en el tablero), o sea que está repitiendo esta columna (señalando la hilera de puntos que se repite). Por eso le está quedando mal. ¿Si? ¿ME hago entender? (...)			
Transcripción de socialización de actividad Imagen: solución extraída del	TRANSCRIPCIÓN DE VÍDEO: Transcripción del vídeo de un grupo de 3 estudiantes que estaban socializando la solución al punto 1 de la actividad 2. Los puntos. En el que la	Realicé la socialización de las soluciones de los estudiantes, pero, recopilándolas todas en una misma tabla para comparar las formas de registrar la solución de los grupos de estudiantes, algunos coincidieron y otros no, de esta socialización			

<p>tablero. Proceso: Registrar</p>	<p>inquietud de los estudiantes era si lo que estaban realizando correspondía a una estrategia de solución o no, lo que hice fue preguntar a los estudiantes respecto a lo que estaban haciendo para indicar al grupo que ciertamente lo que estaban contemplando se consideraban posibles estrategias de solución a la actividad. La conversación fue: Profesora: ¿Qué hicieron? Estudiante 1: se multiplica cuatro (señalando la figura de</p>	<p>nacieron justificaciones de los estudiantes que correspondían a la forma de la figura. La imagen registra la socialización del punto 3 y 4 de la actividad 3, que realizaron los estudiantes, el punto 3 correspondía a la cantidad de puntos que componen la figura 100 y el punto 4 la operación realizada para identificar la cantidad de puntos en dicha figura.</p>  <p><i>Ilustración 56. Socialización de solución a tarea 3, punto 3 y 4</i></p>			
--	--	---	--	--	--

	<p>manera vertical) por cuatro (Señalando la figura de manera horizontal). Entonces el resultado que dé le sumamos con lo que está adentro (señalado el contorno de la figura). Que tampoco podemos saber cuánto va a dar, entonces será igual acá (mostrando la figura 5) y con los demás, para saber el número total que lo componen.</p> <p>Profesora: (preguntando a otro estudiante) ¿Sumercé que opina? ¿Qué sí o no? (refiriéndome a la validez de la estrategia)</p>				
--	--	--	--	--	--

	<p>Estudiante 2: Si.</p> <p>Profesora: Listo, ¿y cuánto les dio entonces? Si esa es la estrategia, pues ¿cuánto les dio en la figura 4 (señalando la figura)? ¿Cuánto les dio en la figura cinco?</p> <p>Estudiante 3: Nos dio igual (refiriéndose que todos coincidieron con el valor que corresponde a la totalidad de puntos para la figura 5)</p> <p>Profesora: ¿les dio igual?</p> <p>Estudiante 2: Si señora</p> <p>Profesora: listo, entonces eso es una estrategia</p>				
--	--	--	--	--	--

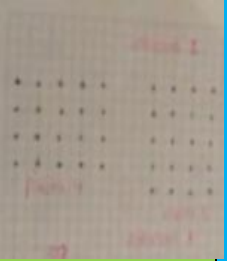
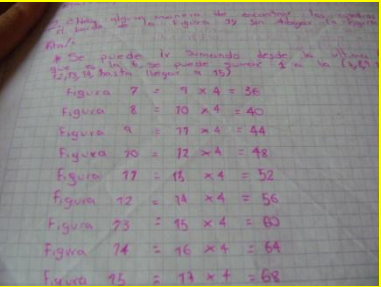
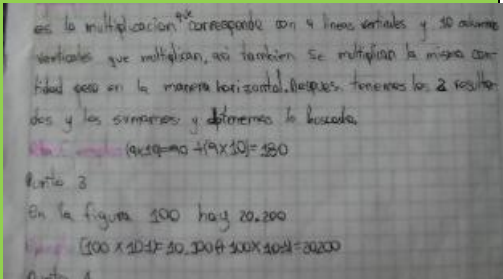
	<p>(refiriéndome al proceso de solución indicado por el estudiante 1)</p>  <p><i>Ilustración 55. Representación de solución para la figura 4 y 5 de la tarea 2, las fichas.</i></p>			
--	--	--	--	--

Tabla 22. CATEGORÍA: DISCURSO

CATEGORÍA: DISCURSO			
	¿Qué términos, notaciones, expresiones pensé promover y por qué?	¿Qué términos, notaciones y expresiones promoví?	¿Los estudiantes usaron los términos que se introdujeron?
<p>DATO</p> <p>Fuente: diario de campo del profesor</p>	<p>Pensé promover el uso de expresiones matemáticas para dar respuesta a una relación por medio de las mismas y a implementación de letras en reemplazo de una figura.</p> <p>Por ejemplo, las expresiones matemáticas para aplicar propiedades de las operaciones para la suma y resta, estaban dispuestas como: $(5X5) + (5X5) + (5 + 5)$ es equivalente a $2X(5X5) + (2X5)$</p>	<p>En el desarrollo de las sesiones promoví la interpretación de formas y su relación con operaciones por medio de representaciones gráficas y escritas. De manera adicional, encontré interpretaciones de equivalencias entre operaciones para representar la cantidad de elementos que componen una figura.</p>	<p>Los términos que introduje en el desarrollo de la propuesta se relacionaron con el uso de expresiones matemáticas para representar las relaciones entre, el número de la figura y la cantidad de elementos que componen la misma. Además, la interpretación de una letra que representa el número de una figura dentro en una operación.</p>

<p>Imagen: Solución extraída del tablero y notas de los estudiantes</p> <p>Proceso: Registrar</p>	<p>Respecto al registro de las operaciones, recurrí a representar todas las posibles soluciones de los estudiantes y las interpretaciones que realizaban de las agrupaciones de los elementos que componen las figuras, para establecer la operación respecto a las gráficas de cada una de las actividades.</p> <p>La imagen corresponde a la interpretación de la figura 5 y su relación con las operaciones realizadas, considerado las agrupaciones horizontales para una operación y las verticales para otra operación, que unidas dieron como resultado la cantidad total de palillos para la figura 5. Mas abajo muestro la relación de los números con la operación y el proceso que realizaron algunos de los grupos para justificar repetir una operación</p>	<p>La imagen representa una de las formas de registrar las soluciones de los estudiantes para cada una de las figuras de la actividad 1, los bordes, donde el estudiante estableció la relación entre el número de la figura y la operación requerida para encontrar el número total de cuadrados para el borde de la figura.</p>  <p>Ilustración 58. Formas de representar la operación para la tarea 1, los bordes.</p>	<p>Con esta propuesta promoví el uso de operaciones para establecer relaciones entre las cantidades que componen una figura y el número de la figura. La imagen corresponde a la representación escrita de las operaciones encontradas por un estudiante para la solución de la actividad 2, las fichas.</p>  <p>Ilustración 59. Propuesta de operaciones para la solución de la actividad 2, las fichas.</p>
---	--	--	--

dos veces, todo ello como estrategia para unificar las estrategias.

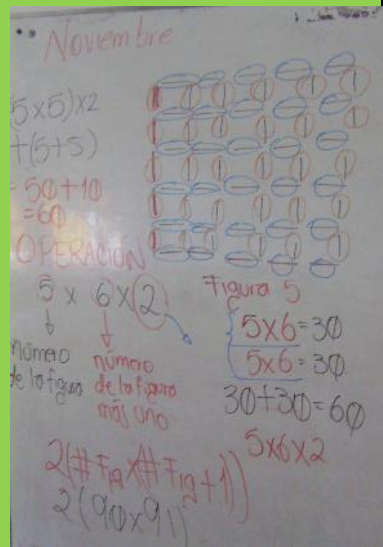


Ilustración 57. Socialización de Solución final a tarea 3, los palillos.

Tabla 23. CATEGORÍA: VALORACIÓN DEL APRENDIZAJE

CATEGORÍA: VALORACIÓN DEL APRENDIZAJE		
	¿Cómo valoré los aprendizajes?	¿Realicé en clase alguna valoración de los aprendizajes?
<p>DATO</p> <p>Fuente: Diario de campo del profesor.</p>	<p>Los aprendizajes los valoré por medio de diferentes aspectos como: la participación de los estudiantes, la realización y justificación de las actividades, la implementación de expresiones matemáticas.</p>	<p>La valoración de los aprendizajes los realicé al finalizar cada una de las actividades, teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje de mis estudiantes y las formas en las cuales establecieron las soluciones.</p>
<p>FUENTE:</p> <p>Imagen de las actividades de los estudiantes</p>	<p>Valoré los aprendizajes de acuerdo al desarrollo de cada una de las sesiones y las justificaciones que se construyeron los estudiantes a cada una de las soluciones. Por ejemplo, para el trabajo individual de acuerdo a cada actividad, consideré:</p> <p>El requerimiento mínimo por cada estudiante, sería la realización de dibujos de cada una de las relaciones, por tanto, cada actividad que contuviera dibujos únicamente se contemplaría con una relación mínima de calificación para ser aprobado. La figura corresponde a la construcción de un estudiante para encontrar la cantidad de puntos que compone cada figura, para la actividad 2 y en la parte superior de la misma la relación entre el número de la figura y la cantidad total de puntos.</p>	<p>Tomé en consideración el trabajo grupal, para valorar los aprendizajes de manera conjunta, de ello, tomé en consideración las justificaciones de las operaciones empleadas, las comparaciones con el trabajo individual de los estudiantes.</p> <div data-bbox="1423 1013 1705 1344" data-label="Image"> <p>The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. At the top, there is a table with two columns: 'Número de la figura' and 'Cantidad total de puntos'. Below the table, there is a paragraph of text in Spanish, which appears to be a student's explanation or solution for a problem involving counting points in a figure. The handwriting is clear and legible.</p> </div> <p>Ilustración 69. Descripción grupal de la actividad 3, los</p>



Ilustración 60. Imagen de construcción de figuras para la actividad 2.

Para la actividad 1: reconocí en primera medida el uso de dibujos por parte del estudiante para no confundirse, es por ello, que realicé una escala teniendo en cuenta aspectos como

Uso de descripciones en palabras de la relación que encuentra en la figura y la cantidad total de elementos que la componen	Uso de operaciones matemáticas para construir la figura y establecer las relaciones entre la cantidad total de elementos que compone la figura y el número
---	--

palillos.

SI NO SE TENÍAN EVIDENCIAS DEL TRABAJO GRUPAL: tomé en consideración las construcciones del trabajo individual y valoré el trabajo de los estudiantes de manera individual.

La imagen siguiente corresponde a una solución no encontrada por el grupo en general, así que recurrí a buscar el trabajo realizado por cada uno de los estudiantes para identificar las soluciones individuales.

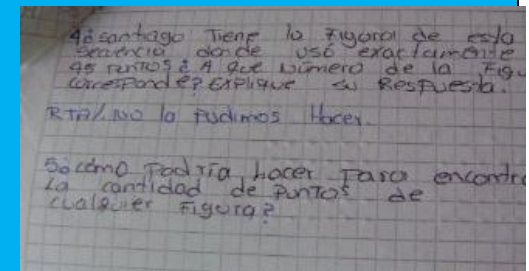


Ilustración 70. Solución del punto 4 de la actividad 2, las fichas.

La imagen corresponde a la solución dada por el estudiante 1, que realizó gráficos y descripciones para la solución de la actividad.

La imagen contiene la descripción de un estudiante para obtener la solución de los puntos 1 y 2 de la actividad 1, donde también intenta justificar la relación entre la cantidad total de cuadrados que componen el borde de la figura.

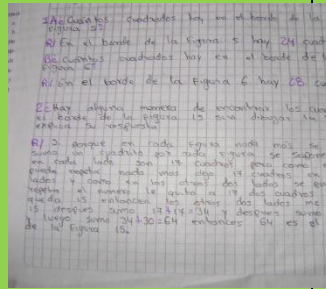


Ilustración 61. Solución puntos 2 y 3 de actividad 1.

correspondiente a la figura

La figura representa una la descripción del estudiante empleando operaciones, aunque para esta actividad la relación entre la cantidad de cuadros y las operaciones no fue bien establecida, tuvo en cuenta la justificación que daba a las operaciones propuestas.

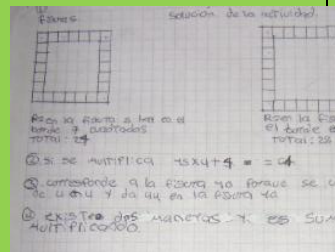


Ilustración 62. Solución Puntos 2,3 y 4 de actividad 1.

Para la actividad 2: consideré justificaciones más sólidas de los estudiantes y su relación con la figura o las operaciones respectivas:

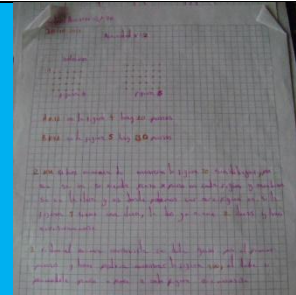


Ilustración 71. Solución del estudiante 1 para la actividad de las fichas.

El estudiante 2 recurrió a escribir operaciones y descripciones de la actividad.

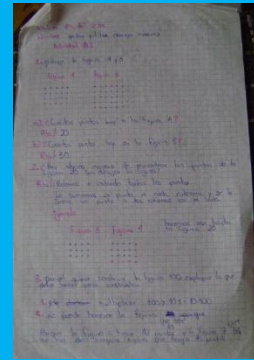
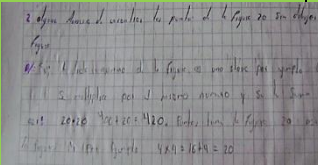
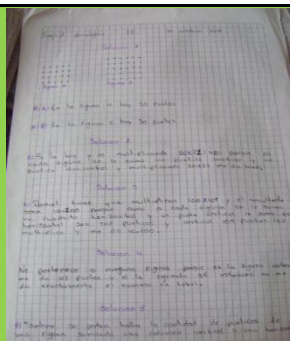


Ilustración 72. Solución del estudiante 2 a la actividad de las fichas.

	<p>Uso de justificaciones de las descripciones para justificar la cantidad de elementos que componen la figura</p>	<p>Uso de operaciones matemáticas para justificar la cantidad de elementos que componen la figura</p>	
	<p>La figura representa las justificaciones escritas que usa el estudiante para justificar la cantidad total de puntos encontrados para las respectivas figuras, de esta descripción tomé en cuenta la relación que escribe entre las operaciones que realizó el estudiante y el número de la figura.</p>	<p>La imagen contiene una descripción y la operación construida por el estudiante para identificar la cantidad total de puntos que compone la figura, además, justifica la relación entre la operación y la figura.</p>  <p><i>Ilustración 64. Uso de operaciones para justificación de solución de la actividad 2, punto 2</i></p>	



*Ilustración 63. Solución de la actividad
2, puntos 2, 3, 4 y 5*

Para la construcción 3, consideré tomar en cuenta únicamente las operaciones como parte del proceso realizado, en las que el estudiante realizó dibujos, descripciones y finalmente operaciones que lo llevaran a interpretar la relación entre las operaciones y la cantidad de palillos que componen cada figura.

Las imágenes corresponden a descripciones y operaciones que apoyan las descripciones para justificar la cantidad total de palillos que componen cada una de las figuras.

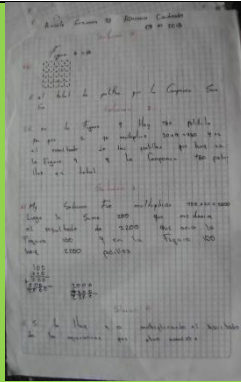


Ilustración 65. Solución descrita por un estudiante para la actividad 3.

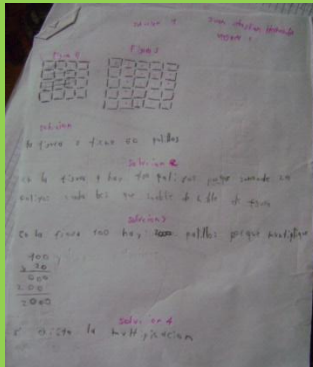


Ilustración 66. Solución para la actividad 3 que involucraban operaciones.

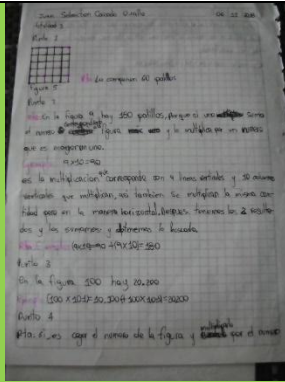


Ilustración 67. Solución de la actividad 3 implementando operaciones y explicaciones de las operaciones. Parte 1

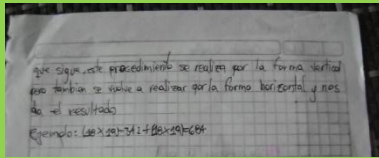


Ilustración 68. Solución de la actividad 3 implementando operaciones y explicaciones de las operaciones. Parte 2

Transcripción de video de socialización de la actividad 1.

TRANSCRIPCIÓN:

Para evaluar las acciones conjuntas de los estudiantes, tomé en consideración las socializaciones de las actividades y las respectivas justificaciones a las interpretaciones que se dieron a la relación entre una operación y la cantidad de elementos que compone una

		<p>figura:</p> <p>Para la figura 100, en la socialización de la información, el grupo de Iván justifica lo escrito en la hoja ilustrada en la figura:</p> <p>Profesora: bueno, ¿de dónde sale cada valor?</p> <p>Iván: el 100 sale del número de la figura, el otro 100 sale del número de, lo, de las líneas</p> <p>Profesora: ¿o sea que el número de la figura y el número de las líneas son iguales?, bueno</p> <p>Iván: más</p> <p>Profesora: ahí ya tenemos algo, ¿No?, el número de la figura y el número de líneas son iguales, ¿pero de qué líneas?</p> <p>Iván: ¿Ah?</p> <p>Profesora: ¿De qué líneas?</p> <p>Iván: De cualquiera, de las de arriba</p> <p>Profesora: ¿pero si yo tomo las de adentro? ¿Esas líneas deben tener una condición? Es decir, si yo tomo la figura 100, ¿tendré 100 cuadraditos diagonales o 100 cuadraditos verticales, de un lado?</p> <p>(...)</p>
--	--	--

Profesora: siga Iván, ¿de dónde sale 200?

Iván: del número de las líneas que están

Profesora: ¿cómo sé que son las 200?

Iván: porque sumamos el número de las líneas

Profesora: ¿Funcionará para todos?

Iván: Si

Profesora: hágala con la de 300

Iván: uyyyyyy, con la del 8

Profesora: hágala con la del 8 entonces

(...)

Luego de realizar la actividad y validar la operación, con la estrategia socializada, validé el trabajo de los estudiantes.

La imagen que corresponde al trabajo realizado por el grupo de Iván corresponde a:

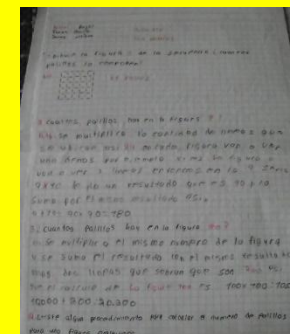


Ilustración 73. Solución de actividad grupal, actividad 3,

		<i>los palillos.</i>
--	--	----------------------