

**GENERAR INCERTIDUMBRE PARA PROMOVER ARGUMENTOS Y DESARROLLAR
COMPETENCIAS CIUDADANAS Y MATEMÁTICAS EN LA CLASE DE GEOMETRÍA**

**Diego Guerrero Garay
Jeisson Jair Triviño Quintero**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ, D.C. 2018**

**GENERAR INCERTIDUMBRE PARA PROMOVER ARGUMENTOS Y DESARROLLAR
COMPETENCIAS CIUDADANAS Y MATEMÁTICAS EN LA CLASE DE GEOMETRÍA**

**Diego Guerrero Garay
Jeisson Jair Triviño Quintero**

**Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título
de Magíster en Docencia de la Matemática**

**MODALIDAD DEL TRABAJO: Asociada a un grupo de investigación.
Grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$**

**Directora
Tania Julieth Plazas Merchán
Docente de Planta del Departamento de Matemáticas**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ, D.C. 2018**

Dedicatoria

A mis padres quienes siempre me han apoyado a lo largo de mi formación profesional, quienes son mi mayor ejemplo y gracias a ellos soy la persona que soy hoy en día. A mi madre por enseñarme a ser comprometido y persistente en mis actividades, pero sobre todo por su amor infinito que siempre me ha brindado. A mi padre, que, a pesar de la distancia, siempre me ha enseñado a ser paciente y aprender de las dificultades y momentos difíciles de la vida. A Miguel, Roger y David por la voz de consuelo, fortaleza y apoyo que me han brindado en todo momento.

Jeisson Jair Triviño Quintero

Especialmente a Ligia y Héctor, mis padres, que con esfuerzo, compromiso y dedicación han hecho lo imposible por hacer de mí una persona luchadora, responsable y comprometida. A mis hermanas Mónica y Sonia que son ejemplo de perseverancia, unión y amor de familia. A Lorena mi compañera de vida por su paciencia y espera. A ellos que sin importar las sorpresas de la vida siempre han estado allí para acompañarme en este camino.

Diego Guerrero Garay

Agradecimientos

Agradecemos principalmente a Dios por la bendición de permitirnos llegar a este punto de nuestra formación profesional. También a la profesora Carmen Samper por su contribución en la formulación del anteproyecto para esta investigación y a cada uno de los profesores de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional por sus aportes para el desarrollo de este trabajo. Finalmente, pero no menos importante a nuestra directora, Tania Plazas por su dedicación y empeño en todo momento; por los valiosos consejos y enseñanzas que nos compartió en cada asesoría y sobre todo por su alegría y compromiso en el desarrollo de este trabajo.



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado **Generar Incertidumbre para promover argumentos y desarrollar competencias ciudadanas y matemáticas en la clase de geometría**, presentado por los estudiantes:

Jelsson Jair Triviño Quintero, Cód. 2017185023, CC. 1.012.389.135

Diego Guerrero Garay, Cód. 2017185007, CC. 1.022.361.156

como requisito parcial para optar al título de **Magister en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por el estudiante en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada**, con 45 puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 28 días del mes de noviembre de 2018.

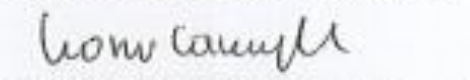
JURADOS

Director del Trabajo: Profesora:


TANIA PLAZAS MERCHAN (UPN)


Jurados:

Profesor:


LEONOR CAMARGO URIBE (UPN)

Profesor:


LUIS ÁNGEL BOHÓRQUEZ (Universidad
Distrital Francisco José de Caldas)

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Secretaría de Investigación</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página v de 198	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado de maestría
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Generar incertidumbre para promover argumentos y desarrollar competencias ciudadanas y matemáticas en la clase de geometría
Autor(es)	Guerrero Garay, Diego; Triviño Quintero, Jeisson Jair
Director	Plazas Merchán, Tania Julieth
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2018. 99 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	COMPETENCIAS CIUDADANAS; COMPETENCIAS MATEMÁTICAS; TAREAS QUE GENERAN INCERTIDUMBRE; TIPOS DE ARGUMENTOS.
2. Descripción	
<p>Este documento corresponde a un trabajo de grado de la modalidad de profundización de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, asociado a la línea de investigación argumentación y prueba en geometría correspondiente al grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$. Que para la cohorte 2017-1, la línea centra su atención en la exploración de estrategias y mecanismos para contribuir en la formación de ciudadanos desde la clase de geometría, donde el estudiante sea escuchado y pueda participar en la construcción de conocimiento, haciendo de las clases espacios para argumentar. En correspondencia, este trabajo muestra las diferentes competencias matemáticas y ciudadanas que se logran promover cuando se implementan tareas que generan incertidumbre, en relación al proceso de argumentar, por tal motivo se presentan los tipos de argumentos utilizados por estudiantes de grado noveno cuando resuelven tareas de este estilo.</p> <p>Para cumplir con el objetivo de esta investigación se diseñaron e implementaron siete tareas que generan incertidumbre, a partir de sus soluciones se analizaron las diferentes acciones, comportamientos, interacciones, participaciones e intervenciones de los estudiantes para determinar los tipos de argumentos y competencias que se promueven con el desarrollo de estas de tareas.</p>	

3. Fuentes

- Aniño, M., Ravera, E., Merino, G., & Escher, L. (2011). Enseñar Matemática a través de problemas abiertos: un desafío para los docentes. *XIII Inter American Conference on Mathematics Education*. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/273579710_Ensenar_Matematica_a_traves_de_problemas_abiertos_un_desafio_para_los_docentes
- Aya, O., & Echeverry, A. (2009). *Geometría dinámica en el proceso de definir*. Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de matemáticas, Bogotá, Colombia.
- Bohórquez, J., Guzmán, C., & Parra, L. (2015). Estudio de caso: Los esquemas de demostración utilizados por estudiantes para profesor de matemáticas al momento de demostrar una prueba en torno al teorema de Pitágoras. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 113-118. Obtenido de <http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME/search/search>
- Caleño, M. M. (2014). *Apropiación de los criterios de semejanza a partir de los conceptos de proporcionalidad y congruencia de triángulos utilizando el software geogebra y algunas aplicaciones applet en la web*. Universidad Nacional De Colombia, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Manizales, Colombia.
- Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios del Cálculo Diferencial e Integral*. Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona, Departamento de didáctica de la matemática en las ciencias experimentales, Bellaterra, Barcelona.
- Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria*. Universitat de Valencia. Valencia, España.: Departament de Didàctica de la Matemàtica.
- Camargo, L., & Samper, C. (2014). Definiciones y construcción de significado en el marco de la actividad demostrativa. En P. Perry, *Relevancia de lo inadvertido en el aula de geometría*. Sistema de Publicaciones y Difusión del Conocimiento, UPN.
- de Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? University of Durban-Westville, South Africa.
- Flores, C., Gómez, A., & Flores, A. (2010). *Esquemas de argumentación en actividades de Geometría Dinámica*. Acta Scientiae, v.12, n.2.
- García, G., & Montenjo, J. (sf). Las relaciones entre evaluación y el orden social en la clase de matemáticas. Un estudio en una clase de álgebra. Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación, Vol. 2, No. 2, 128-138 ISSN: 2215-8421.
- Gómez, P. (sf). *Análisis del diseño de actividades para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Universidad de Granada.
- íniguez, F. (2015). El desarrollo de la competencia matemática en el aula de ciencias experimentales. *Revista Iberoamericana de educación*, Vol.67, núm 2, 117-130.
- MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias ciudadanas*.

- Molina , M., Castro, E., Molina, J., & Castro , E. (2011). *Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza*. Universidad de Granada y Australian National University.
- Planas, N., & Morera, L. (2012). La argumentación en la matemática escolar: Dos ejemplos para la formación del profesorado. En *El desarrollo de competencias en la clase de ciencias y matemáticas*. Univeridad Autónoma de Barcelona , España.
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PSA. *PNA 1(2)*, 47-66.
- Rodriguez, G., Gil, J., & Garcia , E. (1996). Metodología de la investigación cualitativa. Granada, España : Ediciones Aljibe.
- Ruiz, A., & Chau, E. (2005). Las competencias ciudadanas. En *La formación de competencias ciudadanas*. Bogotá; Colombia : Asociación colombiana de facultades de educación - Ascofade.
- Samper , C., Molina, O., & Echeverry, A. (2013). *Elementos de geometría*. Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.
- Silva, L. (2013). *Argumentar para definir y definir para argumentar*. Universidad Pedagógica Nacional , Departamento de Matemáticas , Bogotá .
- Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6(1), 3-26.
- Toulmin, S. (2007). La forma de los Argumentos . En *Los usos de la argumentación* (págs. 129-132). Barcelona: Grup Editorial62, S.L.U.
- Vanegas, Y. (2014). *Competencias ciudadanas y desarrollo profesional*. Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona , Departamenti de didáctica de las ciencias experimentales y la matemática.
- Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics.
- Zaslavsky, O. (2005). Seizing the Opportunity to Create Uncertainty in Learning Mathematics. (E. S. Mathematics, Ed.) *Educational Studies in Mathematics*, 297-321.

4. Contenidos

Este documento está organizado en seis capítulos. En el primero, se da a conocer el planteamiento del problema, la pregunta de investigación, algunas evidencias empíricas y referentes teóricos que llevaron a la formulación de la pregunta. Este finaliza con el objetivo general y específicos a desarrollar.

En el segundo, se presenta la revisión bibliográfica conformada por los siguientes subcapítulos *i) Tareas que generan incertidumbre*: En este apartado se exponen las características de este tipo de tareas y las implicaciones e incidencias que tiene su implementación en el aula. *ii) Competencias ciudadanas y matemáticas*: en este, apartado se presenta una descripción de cada una de las competencias ciudadanas (cognitivas, comunicativas, emocionales e integradoras) y de las competencias matemáticas que proponen autores como Niss (2003) y Rico (2007); eso con el fin de contribuir a la formación de ciudadanos desde el aula de matemáticas y especialmente en la clase de geometría. *iii) Proceso de argumentar*: Aquí, se da a

conocer algunas posturas sobre argumentar y argumentación; así mismo, se presentan diferentes esquemas de argumentación que usan los estudiantes cuando hacen justificaciones o demostraciones.

En el tercer capítulo, se presenta el marco teórico que sustenta la hipótesis de investigación. Se considera que las tareas que generan incertidumbre promueven el desarrollo de competencias ciudadanas y matemáticas, entre ellas la argumentación. Por ello, en este capítulo se presentan los elementos necesarios para la fundamentación y el análisis de este trabajo: tareas que generan incertidumbre, competencias matemáticas, competencias ciudadanas y argumentar.

El capítulo cuatro expone lo relacionado con la metodología empleada para el desarrollo de este reporte: la estrategia de investigación, una descripción de la población, el diseño y la planeación de las tareas propuestas a los estudiantes, explicación sobre la etapa de implementación, y la descripción de las categorías preliminares de análisis.

En el capítulo cinco, se presenta el análisis de nueve fragmentos en relación con las tareas 1, 2, 5 y 6 a la luz de las categorías establecidas para este trabajo de investigación en el apartado cuatro de la metodología.

En el sexto capítulo, se dan a conocer las conclusiones en relación con: *i)* la pregunta, el problema de investigación y los objetivos de investigación *ii)* el aporte de este trabajo de grado a nuestra formación profesional y personal *iii)* la contribución para futuros trabajos de grado de maestría o de doctorados. Finalmente, se enuncian las fuentes bibliográficas que se consultaron y los diferentes anexos que complementan este trabajo.

5. Metodología

Para desarrollar esta investigación se tiene en cuenta el enfoque fenomenológico, que busca entender e interpretar el significado que tienen los diferentes sucesos que se presentan en el aula (Rodríguez, Gil, & García, 1996). La aproximación es hermenéutica debido a que se pretende interpretar diferentes acciones e intervenciones verbales y escritas que realizan los estudiantes al momento de solucionar y socializar tareas, esto con el propósito de identificar qué competencias se movilizan en el aula cuando se plantean tareas que generan incertidumbre. Para lograr tal propósito se diseñó una trayectoria hipotética de aprendizaje, utilizando una metodología que se asemeja a un experimento de enseñanza.

La trayectoria hipotética de aprendizaje se implementó en el Colegio Femenino San Juan Bosco, Institución privada, ubicada en el barrio Santa Ana de la localidad cuarta en la ciudad de Bogotá. El grado en el cual se desarrolló fue 9B, el cual está conformado por 27 estudiantes, cuyas edades oscilan entre los 14 y 15 años, para el desarrollo de las tareas se organizaron en 12 parejas y un grupo de tres. Este curso se caracteriza por

tener una buena disposición durante las clases, son comprometidas y bastante curiosas al momento de interactuar con herramientas tecnológicas.

Para la toma y recolección de información se contó con tres cámaras de video: una fija, que grabó la clase en general, con el fin de tener evidencia de los momentos en los cuales se socializaba por parte de todo el grupo la solución de las tareas presentadas en las sesiones; las otras dos fueron móviles, destinadas a grabar las interacciones que se daban en el trabajo por parejas, se aclara que estas grabaciones no fueron escogidas con anterioridad, por lo contrario fueron por la participación autónoma de cada pareja.

Para la construcción de los datos se realizaron las transcripciones de todas clases (anexos del 2 al 12) luego se hizo una revisión de estas y se seleccionaron aquellos fragmentos en los cuales las estudiantes comunican ideas, exponen sus soluciones, tratan de argumentar afirmaciones, reaccionan ante posturas diferentes de sus compañeras, se presentan discusiones, acuerdos o desacuerdos entre ellas.

La trayectoria hipotética de aprendizaje está conformada por siete tareas; diseñadas de tal manera que genere incertidumbre en las estudiantes, al ser tareas cuya solución no se da de manera inmediata, implica que sus posibles soluciones, no son respuestas memorizadas y no dependen de procesos algorítmicos. A continuación, se presenta una descripción de cada una de ellas.

Tarea 1: Esta tiene como propósito el reconocimiento de algunos términos primitivos y definiciones básicas, además de reconocer sus representaciones gráficas, simbólicas y verbales; entre estas definiciones se encuentra la de segmentos congruentes. Así mismo, con la ayuda del software deben identificar herramientas que le permitan la construcción de estos objetos.

Tarea 2: Para la solución de esta tarea el estudiante debe construir en GeoGebra una circunferencia, y luego medir varios radios de esta; y con esta exploración proponer una definición para circunferencia.

Tarea 3: Para esta tarea se le presenta al estudiante la definición de punto medio, y él debe proponer ejemplos y no ejemplos de este objeto geométrico, justificando el porqué de cada caso. Posterior a esto y con ayuda de GeoGebra encontrar el punto medio de un segmento.

Tarea 4: Al estudiante se le presenta algunas imágenes de rectas, rayos y segmentos que son perpendiculares y otras que no son, los estudiantes deben clasificar dichas imágenes en dos grupos y explicar cuáles fueron los criterios para la clasificación, y establecer una definición de perpendicularidad.

Tarea 5: Para esta tarea se les pide a los estudiantes que con ayuda del software encuentre varios puntos que equidisten de los extremos de un segmento, para que observen que los puntos que cumplen dicha condición pertenecen a una misma recta. Posteriormente deberán explorar las características de la recta para establecer una definición de mediatriz.

Tarea 6: Esta tarea consiste en que dados tres puntos no colineales los estudiantes construyan una circunferencia y encuentren el centro de esta con ayuda de software de geometría dinámica, explicando y justificando su construcción.

Tarea 7: Esta última tarea consiste en que el estudiante encuentre un punto que equidiste de los vértices de un triángulo, explicando y justificando como encontró dicho punto. Esta tarea no requiere el uso de geometría dinámica. Debido que en las tareas anteriores se dieron elementos teóricos que permiten resolver esta tarea de manera más deductiva.

Con el fin de dar respuesta a la pregunta de investigación se establecieron unas categorías preliminares de análisis. El primer grupo, relacionado con las competencias ciudadanas está conformado por trece categorías distribuidas en cuatro subgrupos de competencias (cognitivas, comunicativas, emocionales e integradoras). El segundo, corresponde a las competencias matemáticas, conformada por ocho categorías. Y el tercer grupo hace alusión a los tipos de argumentos, que también cuenta con ocho categorías.

6. Conclusiones

El objetivo de este trabajo investigativo es identificar por un lado las competencias matemáticas y ciudadanas y por el otro, los tipos de argumentos que se promueven en el aula de geometría cuando se proponen tareas que generan incertidumbre en los estudiantes. Por lo anterior, podemos decir que las tareas diseñadas e implementadas permitieron identificar manifestaciones de las estudiantes que dan indicios que este tipo de tareas estarían promoviendo el desarrollo de competencias y permitiendo que las estudiantes realicen justificaciones o explicaciones basándose en diferentes tipos de argumentos.

El análisis de los datos muestra que las tareas generaron diferentes tipos de incertidumbre en las estudiantes. De los nueve fragmentos analizados: en cinco de ellos se presentó incertidumbre de tipo *conclusión cuestionable*; en cuatro fragmentos se evidenció incertidumbre de tipo *afirmaciones encontradas*; y en uno se presentó incertidumbre de tipo *resultados no verificables fácilmente*.

Las competencias matemáticas que se lograron promover por medio del diseño e implementación de tareas que generaron incertidumbre en las estudiantes son: i) *Pensar y razonar matemáticamente* ii) *Comunicar ideas usando las matemáticas* iii) *Argumentar matemáticamente* iv) *Usar herramientas y recursos* v) *Plantear y resolver problemas* y vi) *Representar información matemática*. Cabe aclarar que esta última competencia se logró evidenciar en muy pocas ocasiones de todos los datos analizados.

Ahora, en relación con las competencias ciudadanas que se tuvieron en cuenta para este análisis, se evidenció que se promovieron el desarrollo de cuatro de ellas: i) *Escuchar activamente*, ii) *Participar y tener*

responsabilidad democrática, iii) *Tener un pensamiento crítico* y iv) *ser asertivo para comunicar ideas*. La competencia *identificar y manejar las emociones propias*, también se logró un avance en su desarrollo, aunque no se evidenció en todos los episodios analizados, sí se presentó en más de la mitad de estos.

Otro resultado de esta investigación, es que ante las diferentes situaciones de incertidumbre que generaron las tareas, las estudiantes presentaron manifestaciones que permitieron inferir que argumentaron para dar solución a los conflictos, las dudas, las reclamaciones que tuvieron lugar en la solución de las tareas. El argumento que se basa en *usar símbolos y términos matemáticos* es el que con mayor frecuencia es utilizado por ellas. Debido a que se evidencia que las estudiantes acuden comúnmente a las definiciones que se establecen en las clases y a usar el lenguaje matemático que utilizaban los profesores o el que se encontraban en las diferentes guías de trabajo. No obstante, también se presentaron argumentos de tipo: i) *Autoritarios* ii) *Ejemplificación* iii) *Transformacional* v) *Recuento de resultados* vi) *Explicación de casos*; aunque estos fueron presenciados muy esporádicamente durante las soluciones a las tareas.

Esta investigación permitió a los investigadores reflexionar sobre su práctica docente, su labor en el aula y especialmente la creación y aplicación de tareas que permitan la participación del estudiante en la construcción de su propio conocimiento. Identificando la gran responsabilidad que como profesores existe para captar el interés y atención de las estudiantes para aprender, involucrando herramientas y recursos diferentes a los usuales, mostrando al estudiante que existes otras maneras de aprender, diferente a la memorización y repetición de definiciones. Así pues, el diseño de tareas que generaran incertidumbre fue un reto para los autores de este trabajo, pues a su percepción, favorecer este tipo de tareas iba a permitir a las estudiantes producir argumentos sustentados desde diferentes bases que validaran el trabajo realizado, contribuyendo no solo en este aspecto sino también en el desarrollo de competencias matemáticas y ciudadanas.

Respecto a la formación de ciudadanos se considera que existió un interés en indagar y conocer más sobre este aspecto, lo cual permitió identificar la importancia de formar en la escuela futuros ciudadanos comprometidos con los deberes que exige una sociedad, a su vez con valores y actitudes que fomenten la buena convivencia, empezando desde el aula donde comúnmente comparten.

Elaborado por:	Guerrero Garay, Diego; Triviño Quintero, Jeisson Jair
Revisado por:	Plazas Merchán, Tania Julieth

Fecha de elaboración del Resumen:	07	11	2018
--	----	----	------

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	3
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	5
1.1. Objetivo general	10
1.2. Objetivos específicos.....	10
2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	11
2.1. TAREAS QUE GENERAN INCERTIDUMBRE	11
2.2. COMPETENCIAS CIUDADANAS Y MATEMÁTICAS.....	14
2.2.1. Competencias Ciudadanas.....	14
2.2.2. Competencias Matemáticas.....	20
2.3. ARGUMENTAR.....	23
2.3.1. Esquemas de argumentación	25
3. MARCO TEÓRICO.....	28
3.1. CARACTERIZACIÓN DE LAS TAREAS DE INCERTIDUMBRE.....	28
3.2. DESCRIPCIÓN DE LAS COMPETENCIAS	31
3.3. ARGUMENTACIÓN.....	34
4. METODOLOGÍA	37
4.1. ASPECTOS GENERALES.....	37
4.1.1. Etapas de la metodología.....	38
4.1.2. Descripción de la población	40
4.1.3. Recolección de la información y estrategia de construcción de los datos.....	40
4.2. DISEÑO DE TAREAS	41
4.2.1. Descripción general de la trayectoria	42
4.2.2. Sistema teórico local	42
4.2.3. Requisitos para el desarrollo de la trayectoria.....	44
4.2.4. Descripción de la trayectoria hipotética de aprendizaje:	45
4.3. DESCRIPCIÓN DE LA APLICACIÓN DE LA TRAYECTORIA	48
4.4. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS	49
5. ANÁLISIS DE LOS DATOS	53
5.1. ANÁLISIS DE LA TAREA 1: NOCIONES BÁSICAS.....	53
5.2. ANÁLISIS DE LA TAREA 2: DEFINICIÓN DE CIRCUNFERENCIA	60
5.3. ANÁLISIS DE LA TAREA 5: DEFINICIÓN MEDIATRIZ.....	69
5.4. ANÁLISIS DE LA TAREA 6: TRES PUNTOS-CIRCUNFERENCIA	79
5.5. ANÁLISIS DE LA TAREA OCHO	86
5.6. RESULTADOS.....	89
6. CONCLUSIONES	95
7. BIBLIOGRAFÍA.....	98

LISTA DE ANEXOS

ANEXO 1: Evidencia empírica, entrevista a profesores.....	100
ANEXO 2: Transcripción de la clase 1	102
ANEXO 3: Transcripción de la clase 2	105
ANEXO 4: Transcripción de la clase 3	110
ANEXO 5: Transcripción de la clase 4	114
ANEXO 6: Transcripción de la clase 5	118
ANEXO 7: Transcripción de la clase 6	122
ANEXO 8: Transcripción de la clase 7	130
ANEXO 9: Transcripción de la clase 8	136
ANEXO 10: Transcripción de la clase 9	145
ANEXO 11: Transcripción de la clase 10	151
ANEXO 12: Transcripción de la clase 11	155
ANEXO 13: Planeación de la tarea 1.....	165
ANEXO 14: Planeación de la tarea 2.....	168
ANEXO 15: Planeación de la tarea 3.....	169
ANEXO 16: Planeación de la tarea 4.....	172
ANEXO 17: Planeación de la tarea 5.....	173
ANEXO 18: Planeación de la tarea 6.....	175
ANEXO 19: Planeación de la tarea 7.....	177
ANEXO 20: Permisos legales y administrativos	178
ANEXO 21: Croquis del aula de sistemas	184
ANEXO 22: Croquis del salón de clase	185
ANEXO 23: Trabajos finales	186

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Competencias ciudadanas Según Ruiz y Chaux (2005).....	15
Figura 2: Esquema de relaciones del marco teórico	28
Figura 3: Ejemplo de incertidumbre: resultados no verificables fácilmente	30
Figura 4: Naturaleza dinámica de incertidumbre (Zaslavsky, 2005)	31
Figura 5: Tarea 8- Percepción #1	86
Figura 6: Tarea 8- Percepción #2.....	87
Figura 7: Diagrama de barras de las frecuencias absolutas de las C. Matemáticas	90
Figura 8: Diagrama de barras de las frecuencias absolutas de las C. Ciudadanas	91
Figura 9: Diagrama de barras de las frecuencias absolutas de los tipos de argumentos.....	92

LISTA DE TABLAS

Tabla 1: Esquemas de argumentación (Flores, 2010).....	25
Tabla 2: Esquemas de argumentación externos (Bohórquez et al. 2015)	26
Tabla 3: Esquemas de argumentación empíricos (Bohórquez, Guzmán & Parra, 2015)	26
Tabla 4: Esquemas de argumentación analíticos (Bohórquez, Guzmán & Parra, 2015)	26
Tabla 5: Descripción de las tareas	46
Tabla 6: Planeación de la tarea 6.....	47
Tabla 7: Fechas de implementación de la trayectoria hipotética de aprendizaje	49

<i>Tabla 8: Descripción de las competencias ciudadanas</i>	50
<i>Tabla 9: Descripción de las competencias matemáticas</i>	51
<i>Tabla 10: Descripción de los tipos de argumentos</i>	52
<i>Tabla 11: Fragmento 1 de la tarea 1</i>	55
<i>Tabla 12: Fragmento 2 de la tarea 1</i>	57
<i>Tabla 13: Intervención del profesor [38]</i>	60
<i>Tabla 14: Fragmento 1 de la tarea 2</i>	61
<i>Tabla 15: Fragmento 2 de la tarea 2</i>	64
<i>Tabla 16: Fragmento 3 de la tarea 2</i>	66
<i>Tabla 17: Fragmento 1 de la tarea 5</i>	71
<i>Tabla 18: Fragmento 2 de la tarea 5</i>	76
<i>Tabla 19: Fragmento 1 de la tarea 6</i>	80
<i>Tabla 20: Fragmento 2 de la tarea 6</i>	83
<i>Tabla 21: Frecuencias de las C. Matemáticas</i>	90
<i>Tabla 22: Frecuencias absolutas de las C. Ciudadanas</i>	91
<i>Tabla 23: Frecuencias absolutas de los tipos de argumentos</i>	92

INTRODUCCIÓN

Este documento corresponde a un trabajo de grado de la modalidad de profundización de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, asociado a la línea de investigación Argumentación y prueba en geometría correspondiente al grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$. Para la cohorte 2017-1, la línea centra su atención en la exploración de estrategias y mecanismos para contribuir en la formación de ciudadanos en la clase de geometría, donde el estudiante sea escuchado y pueda participar en la construcción de conocimiento, haciendo de las clases espacios para argumentar.¹ En correspondencia, este trabajo muestra las diferentes competencias matemáticas y ciudadanas que se logran promover cuando se implementan tareas que generan incertidumbre, en relación con algunas definiciones de objetos geométricos, y se presentan los tipos de argumentos utilizados por estudiantes de grado noveno cuando resuelven tareas de este estilo.

Para desarrollar esta investigación se diseñaron e implementaron siete tareas que generan incertidumbre. A partir de sus soluciones, se analizaron las diferentes acciones, comportamientos, interacciones, participaciones e intervenciones de los estudiantes para determinar los tipos de argumentos y competencias que se promueven con su desarrollo.

Este documento está organizado en cinco capítulos. En el primero, se da a conocer el planteamiento del problema, la pregunta de investigación, algunas evidencias empíricas y referentes teóricos que llevaron a la formulación de la pregunta. Este finaliza con el objetivo general y específicos a desarrollar.

En el segundo, se presenta la revisión bibliográfica conformada por los siguientes subcapítulos *i) Tareas que generan incertidumbre*: En este apartado se exponen las características de este tipo de tareas y las implicaciones e incidencias que tiene su implementación en el aula. *ii) Competencias ciudadanas y matemáticas*: en este, apartado se presenta una descripción de cada una de las competencias ciudadanas (cognitivas, comunicativas, emocionales e integradoras) y de las competencias matemáticas que

¹ Objetivo de la línea de investigación Argumentación y Prueba en Geometría, para la cohorte 2017-I de la Maestría en Docencia de la Matemática. Tomado de: <http://cienciaytecnologia.pedagogica.edu.co/vercontenido.php?idp=9864&idh=9867&idn=10077>

proponen autores como Niss (2003) y Rico (2007); eso con el fin de contribuir a la formación de ciudadanos desde el aula de matemáticas y especialmente en la clase de geometría. *iii) Proceso de argumentar:* Aquí, se da a conocer algunas posturas sobre argumentar y argumentación; así mismo, se presentan diferentes esquemas de argumentación que usan los estudiantes cuando hacen justificaciones o demostraciones.

En el tercer capítulo, se presenta el marco teórico que sustenta esta investigación, en relación con las competencias matemáticas, competencias ciudadanas y tareas que generan incertidumbre.

El capítulo cuatro expone lo relacionado con la metodología empleada para el desarrollo de este reporte: la estrategia de investigación, una descripción de la población, el diseño de las tareas propuestas a los estudiantes, una explicación sobre la etapa de implementación, y la descripción de las categorías preliminares de análisis.

En el capítulo cinco, se presenta el análisis de nueve fragmentos en relación con las tareas 1, 2, 5 y 6 a la luz de las categorías establecidas para este trabajo de investigación en el apartado cuatro de la metodología.

En el sexto capítulo, se dan a conocer las conclusiones en relación con: *i)* la pregunta y el problema de investigación *ii)* el aporte de este trabajo de grado a nuestra formación profesional y personal *iii)* la contribución para futuros trabajos de grado de maestría o de doctorados. Finalmente, se enuncian las fuentes bibliográficas que se consultaron y los diferentes anexos que complementan este trabajo.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se presentan las preocupaciones de los autores por las cuales emerge este trabajo de investigación; algunos antecedentes empíricos y teóricos que sustentan la existencia de la problemática que se presenta más adelante, la hipótesis de aprendizaje del trabajo, la pregunta de investigación y finalmente los objetivos.

Las matemáticas escolares y en particular el pensamiento geométrico, deben proveer herramientas, no solo matemáticas a los estudiantes, sino también otras que les permitan ser competentes en la vida como un ciudadano. A lo largo de nuestras prácticas y experiencia del ejercicio docente, hemos notado que, en el mínimo tiempo dedicado a desarrollar este pensamiento, poco incluido en los currículos escolares, las tareas que se proponen generalmente pretenden que los estudiantes memoricen definiciones, fórmulas y algoritmos, lo que lleva a que estos no encuentren una utilidad a lo estudiado (Caleño, 2014). Este mismo autor propone que la clase de geometría podría aportar más en la formación de los estudiantes si se realizan tareas diferentes a las usuales donde la participación, la argumentación, el trabajo colaborativo, la solución de problemas etc. tengan un papel relevante.

Para recoger evidencias empíricas sobre esta problemática se realizó una entrevista dirigida a tres docentes de matemáticas de un colegio privado, de la ciudad de Bogotá, donde laboraba uno de los autores de este trabajo. El propósito era indagar acerca de cómo ellos abordan las definiciones en el aula de geometría y qué usos le dan. Los participantes de la entrevista tienen formación en educación matemática: dos de ellos son licenciados en educación básica primaria con énfasis en matemáticas, y el tercero es licenciado en matemáticas y física. Todos estaban orientando un curso de geometría, pero en diferentes niveles. Las tres preguntas planteadas a los profesores fueron las siguientes:

1. ¿Considera importante abordar definiciones en la clase de geometría? ¿Por qué?
2. ¿Cómo ha sido el proceso de introducción de definiciones en sus clases de geometría?
3. ¿Qué espera que sus estudiantes comprendan de una definición? ¿Cómo evalúa dicho proceso?

A continuación, se presenta un análisis de los datos que resultaron de la entrevista. Las transcripciones de las respuestas de los Profesores A, B y C² se presentan en el anexo 1. En relación con la pregunta uno, los tres docentes coinciden en que estudiar las definiciones es importante; cada uno lo justifica desde su práctica: ayudan a diferenciar figuras, reconocer características, permiten abordar otras temáticas, y facilitan el proceso de comunicación. Se puede establecer que, para los Profesores B y C, las definiciones son la base para iniciar una actividad en el aula y los conocimientos que el estudiante debe adquirir.

Para indagar acerca de cómo es el proceso para que los estudiantes adquieran las definiciones se planteó la segunda pregunta. Los tres profesores manifiestan que son ellos quienes presentan las definiciones y que lo hacen a manera de exposición; es decir, no dan oportunidad a los estudiantes de interactuar entre ellos, presentar ejemplos, contraejemplos, o de que ellos mismos analicen la definición. Aunque el profesor A trata de promover la participación, en sus respuestas no se evidencia como se da este proceso en su clase.

Según Vinner (1991; citado por Silva, 2013) para entender la definición de un objeto geométrico se deben proponer tareas para que los estudiantes analicen diferentes definiciones y provean argumentos para plantear relaciones entre estas; también plantear situaciones teóricas o prácticas para utilizar las definiciones establecidas. En cuanto a las respuestas que dieron los profesores entrevistados no se evidencia que utilicen las definiciones en sus clases. Las tareas propuestas tienen como fin abordar asuntos únicamente conceptuales, dejando de lado aspectos como argumentar usando la definición, lo cual se puede percibir como que no fomentan aspectos relacionados con la formación en competencias tanto ciudadanas como matemáticas en los estudiantes; luego esta no hace parte de los aspectos para tener en cuenta en la clase de geometría.

Finalmente, para identificar qué implica para el docente que un estudiante comprenda una definición, se plantea la tercera pregunta. Los profesores A y B solo abordan la definición desde uno de los tres aspectos que menciona Silva (2013) para comprender una definición: conocer la definición formal, hacer diferentes representaciones y establecer relaciones con otras definiciones. Solo se preocupan porque el estudiante conozca la definición formal.

² Por confidencialidad de los profesores entrevistados, se hará mención de ellos de la siguiente manera profesor A, profesor B y profesor C.

Tampoco mencionan algo relacionado con hacer un proceso deductivo en el cual sus alumnos deban usar las definiciones (Camargo & Samper, 2014). Por lo anterior, según Calvo (2001; citado por Aya y Echevery, 2009), los Profesores A y B aún están en el paradigma de la enseñanza de las definiciones como memorización, lo que posiblemente disminuye la motivación del estudiante o puede contribuir poco para el aprendizaje significativo de este.

El profesor C tiene una mirada más amplia, porque incentiva o favorece la deducción, debido a la exigencia que hace a sus estudiantes de justificar las respuestas, hace que los estudiantes relacionen dos figuras geométricas (El triángulo escaleno y el triángulo rectángulo) (Ver anexo 1), tercer aspecto que menciona Silva (2013).

Del análisis anterior podemos identificar dos asuntos importantes en relación con el tipo de tareas que se le proponen a los estudiantes en la clase geometría: el primero, que efectivamente hay una tendencia en abordar las definiciones de manera expositiva con tareas memorísticas. El segundo, la forma expositiva de abordar las definiciones en geometría no permite un trabajo colectivo, colaborativo, argumentativo, lo cual hace pensar que el trabajo únicamente gira en torno a la memorización; pero no se identifican elementos que permitan afirmar que el profesor busca desarrollar algún tipo de competencia para la formación ciudadana.

En lo que sigue se presentan algunos referentes teóricos de autores que hacen aportes en relación con las tareas cuando se abordan las definiciones en geometría y sobre la formación ciudadana en la clase de matemáticas, reconociendo la importancia de las tareas y su relación en estos dos aspectos.

Calvo (2001, citado en Aya y Echevery, 2009) afirma que cuando los profesores están en el paradigma de la memorización, no surge en ellos el interés por generar tareas para que los estudiantes adquieran un conocimiento significativo más allá de acumular conceptos.

En concordancia, Freudenthal (1978, citado por Camargo y Samper, 2014) expone que la práctica tradicional de la enseñanza de la geometría no conduce a una conceptualización de los objetos geométricos. A favor de esta idea otros autores como Vinner (1991) y Hershkowitz (1980), también citados por Camargo y Samper (2014), en sus investigaciones

muestran que memorizar o conocer la definición de un objeto geométrico no implica que este se comprenda o se entienda.

En esta misma línea de Villiers (1995, citado en Silva, 2013) argumenta que el tratamiento tradicional de las definiciones no permite la participación de los estudiantes en la formulación de definiciones. Además, afirma que los docentes deben replantear responsablemente el tipo de tareas que se están proponiendo para abordar las definiciones en la clase de geometría para favorecer competencias diferentes a la memorización.

Los autores citados anteriormente concuerdan que comprender la definición de un objeto geométrico requiere más que la memorización y repetición. Implica: poder hacer comparaciones, buscar contraejemplos, realizar representaciones, usar la definición para argumentar y hacer deducciones. Luego se considera que las tareas que propone el docente deben favorecer las acciones anteriormente enumeradas, pues ello posibilita que el estudiante pueda construir con significado el concepto y den lugar al desarrollo de competencias matemáticas. Como este tipo de tareas no corresponde a las que usualmente se proponen en el aula, surge la necesidad de diseñar tareas que permitan abordar las definiciones, que favorezcan el proceso de conceptualización con el fin de acercar al estudiante, lo más posible, al objeto geométrico (Aya & Echeverry, 2009), pero también que estas tareas promuevan otras competencias matemáticas diferentes a la memorización.

En relación con las competencias matemáticas, Según Rico (2007), PISA pretende que los estudiantes puedan relacionar y aplicar los conocimientos adquiridos en las clases de matemáticas con situaciones reales, Si en la clase de matemáticas se da privilegio a la memorización y la repetición y las tareas que propone el profesor se relacionan con procesos rutinarios no se estaría dando la posibilidad de que el estudiante construya, por sí mismo, su conocimiento, lo que limita el desarrollo de competencias matemáticas que garanticen su aplicabilidad en la vida diaria y en consecuencia desarrollar competencias ciudadanas por parte de los estudiantes.

En relación con la formación ciudadana que se mencionó anteriormente, Vanegas (2014) expone que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas juegan un papel importante y deben aportar en este proceso. Según esta autora, para fomentar ciudadanía y democracia en

la clase de matemáticas, las tareas propuestas a los estudiantes deben generar la necesidad de argumentar sus afirmaciones entre ellos, favorecer la exploración y análisis de situaciones que generen puntos de vista homólogos o contrarios que puedan ser solucionados por medio del diálogo, la conciencia crítica, la participación discursiva entre pares; estas actividades también permiten al estudiante argumentar, dar explicaciones, justificaciones, esto último muy relacionado con lo que Silva (2013), Aya y Echeverry (2009), Camargo y Samper (2014), refieren a las tareas en torno a las definiciones en geometría.

Es por esto por lo que Vanegas (2014) propone conectar la práctica en el aula de matemáticas con el desarrollo de las competencias ciudadanas. Para que esto se logre, el docente debe implementar cambios, valorar, y mejorar sus procesos de instrucción, con el fin de diseñar tareas que favorezcan la formación de ciudadanos (Vanegas, 2014).

Los autores, anteriormente, mencionados concuerdan que según el tipo de tareas que se les asigne a los estudiantes pueden ser una vía para fomentar el desarrollo de algunas competencias, o por el contrario solo se favorezca la memorización.

Para abordar el tema de las tareas, se tiene en cuenta un estudio realizado por Zaslavsky (2005) quien considera que las tareas son el medio por el cual se facilita aprendizaje. Estas deben ser planeadas por el docente. Es de resaltar que según Sierpinska (2004, citada por Zaslavsky, 2005) esta es “una de las responsabilidades más importantes de la Educación Matemática”. En relación con el tipo de tareas Zaslavsky (2005) propone que estas deben generar *incertidumbre*, entendiéndolas como aquellas situaciones en las cuales los caminos de solución o conclusiones son cuestionables para los estudiantes, y los resultados no se pueden verificar con facilidad; esto implica situaciones de conflictos, dudas y perplejidad.

Según Berlyne (1960, citado por Zaslavsky, 2005) la variedad de este tipo de situaciones permite el desarrollo de nuevos conocimientos, que se van construyendo por medio de la interacción social. Esto está en consonancia con lo que expresa Vanegas (2014) en cuanto a que permite: la participación de los estudiantes; la búsqueda de soluciones a controversias que se dan por medio del diálogo y la argumentación; la generación de una conciencia crítica para la toma de decisiones tanto en un conflicto matemático como en un entorno social (Vanegas, 2014).

Por lo anterior, la hipótesis de esta investigación es que para promover el desarrollo de competencias tanto ciudadanas como matemáticas, las tareas en torno al proceso de argumentar deben generar incertidumbre en los estudiantes. Ahora bien, si efectivamente las tareas que buscan generar incertidumbre desarrollan competencias, cabe la inquietud de indagar sobre cuáles son esas competencias que se promueven con su implementación. Por lo anterior se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué tipo de competencias ciudadanas y matemáticas se promueven en la solución de tareas que buscan generar incertidumbre en torno al proceso de argumentar en la clase de geometría?

1.1.Objetivo general

Identificar que competencias matemáticas y ciudadanas se promueven a partir de la implementación de tareas que generan incertidumbre en la clase de geometría, y que tipos de argumentos emplean los estudiantes cuando resuelven estas tareas.

1.2.Objetivos específicos

- Diseñar e implementar una trayectoria hipotética de aprendizaje que permita desarrollar los procesos de definir y argumentar, en torno algunos objetos geométricos, por medio de tareas que generen incertidumbre.
- Recolectar, transcribir y organizar la información para la construcción de los datos que serán foco de análisis en esta investigación.
- Identificar, en fuentes teóricas, competencias tanto matemáticas como ciudadanas, que permitan construir las categorías para el análisis de los datos.
- Reportar las competencias que se promueven en los estudiantes a partir de la trayectoria hipotética de enseñanza.
- Describir los tipos de argumentos usados por los estudiantes al momento de solucionar las tareas de la trayectoria hipotética de aprendizaje.
- Identificar cuales competencias ciudadanas y cuales matemáticas se presentan simultáneamente, a partir del análisis de los datos.

2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

En este capítulo se presenta una revisión bibliográfica en relación con tres asuntos: Las tareas que generan incertidumbre, exponiendo características e implicaciones que tienen su desarrollo en el aula. Como se considera que este tipo de tareas puede promover el desarrollo de competencias, es por eso por lo que en este capítulo también se presenta los aportes de algunos autores en relación con las competencias ciudadanas y matemáticas. Considerando que la argumentación se puede asumir como una competencia tanto ciudadana como matemática, este capítulo finaliza con una explicación sobre el proceso y algunos esquemas de argumentación.

2.1. TAREAS QUE GENERAN INCERTIDUMBRE

Antes de dar inicio a la descripción de lo que son tareas que generan incertidumbre, es importante resaltar la importancia de las tareas matemáticas. Como lo afirma Zaslavsky (2005) estas juegan un papel importante en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Por otra parte, Sierpinska (2004; citado por Zaslavsky, 2005), menciona que el diseño, análisis y pruebas empíricas de tareas matemáticas es una de las responsabilidades más relevantes en la educación matemática, destacando así la pertinencia de las tareas que se deben construir para fortalecer la interacción entre enseñanza y aprendizaje.

Zaslavsky (2005), menciona, citando a Dewey (1933), que las raíces de situaciones de incertidumbre están ligadas a aspectos del pensamiento crítico y que los planteamientos que surgen, de manera intuitiva, no pueden pasar a una revisión posterior si no han sido criticados; es decir, estos deben pasar por un proceso en el cual se haga un trabajo de razonar, pensar, hacer preguntas, indagar sobre la información importante y así poder llegar a conclusiones. Lo anterior implica que el individuo cae en un estado de duda lo cual lo lleva a realizar acciones de indagación para dar solución a esta.

Para Zaslavsky (2005) tareas que generan incertidumbre son aquellas que componen los constructos del conflicto, la duda y la perplejidad. Si se presentan interacciones sociales pueden llevar a construir significados compartidos que permitirán resolver las incertidumbres generadas.

De acuerdo con Zaslavsky (2005), existen algunas bases pertinentes para construir situaciones de aprendizaje que contengan elementos de incertidumbre. Estos elementos dependen del docente, teniendo claro que crear incertidumbre es una oportunidad y fuente importante para desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Algunas de estas bases giran en torno a:

- Problemas comunes de libros de texto que pueden modificarse para crear incertidumbre.
- Dificultades y conceptos erróneos que pueden ser discutidos por los estudiantes.
- Cambios en el currículo de matemáticas que puedan ser la base para cuestionar suposiciones o creencias.
- Eventos reales de la clase que impliquen debate y conflicto.

Zaslavsky (2005) plantea la existencia de tres tipos de incertidumbre:

- ***Afirmaciones encontradas***: este tipo de incertidumbre hace referencia a los reclamos de los estudiantes que suelen ser creencias e ideas que ofrecen diferentes puntos de vista, que permiten contradecir lo que para ellos es verdad y lo que conocen frente a un objeto específico.
- ***Resultados no verificables fácilmente***: este caso sucede cuando los estudiantes no encuentran de manera pronta la verificación de los resultados de sus hallazgos o en algunos casos no encuentran la verificación que esperaban.
- ***Camino desconocido o conclusión cuestionable***: Este tipo de incertidumbre se presenta cuando los estudiantes solucionan tareas de exploración o problemas abiertos que se relacionan con ambientes tecnológicos o software de geometría dinámica, lo que provoca la necesidad de indagar y cuestionar las conjeturas que surgen al enfrentarse a este tipo de tareas. Existen dos tipos de movimiento de conjeturas encontradas producto de la exploración; el primero, cuando el estudiante refuta su conjetura, lo que conlleva a un cambio de esta; segundo, reforzar su conjetura la cual será apoyada por la explicación y la prueba. En este caso cada cambio de conjetura es el resultado de un ambiente de incertidumbre la cual busca llegar a una conclusión correcta.

Cabe aclarar que Zaslavsky (2005) no separa un tipo de incertidumbre de otro. Por el contrario, plantea que existe un movimiento de uno a otro; esto indica la existencia de la naturaleza dinámica de la incertidumbre. Se entiende por esta como la manera que se moviliza el análisis, la comparación, el deseo de resolver la situación para eliminar la incertidumbre que se genere. De esta manera el estado de incertidumbre donde se encuentre una persona es subjetivo; es decir, puede que para unas personas sí exista y para otras no.

Ahora bien, se hará referencia específicamente al tipo de incertidumbre *camino desconocido o conclusión cuestionable* ya que este se ve ligada a los *problemas abiertos*. Este tipo de problemas, para el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (*ÆG*), permite fortalecer la argumentación en la construcción significativa de un sistema teórico. Garret (1988; citado por Aniño, Ravera, Merino & Escher, 2012) destaca que este tipo de problemas deben cumplir con las siguientes características:

- No se ofrece toda la información requerida para solucionar el problema.
- Pone en juego la creatividad y originalidad de la persona para poder modificar el problema inicial.
- Existe la libertad para seleccionar la forma como se va a resolver.

De acuerdo con Skovsmose (2000) la educación matemática tradicional se relaciona con el paradigma del ejercicio, entendiendo este cómo aquellas tareas en las que hay una única respuesta correcta aprobada por el profesor. Una de las opciones para transformar lo anteriormente mencionado, es crear ambientes de aprendizaje en los cuales el estudiante sea el protagonista en la participación y construcción del conocimiento. Uno de esos ambientes es generar la incertidumbre o lo que Skovsmose denomina zona de riesgo.

En concordancia con lo que propone Zaslavsky (2005), García y Montejo (2011) mencionan que si se genera incertidumbre se descarta un único camino hacia la respuesta correcta, si esto sucede, deben existir tareas que puedan tener diversos caminos de solución, por ello, diferentes respuestas. Es importante resaltar que en este tipo de tareas no existen respuestas correctas o erradas, pues lo que realmente importa es cómo el estudiante justifica su solución.

En conclusión, frente a los planteamientos descritos anteriormente, para los autores de este trabajo de grado, las tareas que generan incertidumbre son aquellas que no tienen una

solución inmediata y estas pueden abordar diferentes situaciones promoviendo el proceso de razonar para llegar a una o varias soluciones. Además, uno de los objetivos de las tareas que generan incertidumbre es promover en los estudiantes acciones tales como razonar, pensar, plantear inquietudes, indagar, tener un pensamiento crítico, establecer conclusiones e interacción entre ellos. Se considera que tales acciones guardan relación con lo que algunos autores denominan por competencias. Por tanto, en el siguiente apartado se presentan los aportes de autores que han hecho trabajos con relación a las competencias tanto ciudadanas como matemáticas.

2.2.COMPETENCIAS CIUDADANAS Y MATEMÁTICAS

Con el fin de identificar y establecer las posibles competencias que se pueden promover con la implementación de tareas que generan incertidumbre, en este apartado se presenta una descripción de las diferentes competencias ciudadanas y matemáticas.

2.2.1. Competencias Ciudadanas

El conjunto de habilidades y capacidades tanto cognitivas, emocionales y comunicativas, integradas con conocimientos básicos que permiten orientar a la persona tanto políticamente como moralmente, en las diferentes acciones ciudadanas es lo que se define como competencias básicas para la ciudadanía (Ruiz & Chaux, 2005). Por ejemplo, una acción ciudadana muy común en las sociedades democráticas es el de realizar la elección de representantes por medio del voto; para ejercer esta acción es necesario que el ciudadano cuente con habilidades como interpretar, entender, discernir, escuchar, tomar decisiones y posturas sobre las propuestas de los candidatos. En este actuar se ve un gran abanico de las competencias básicas que todo ciudadano debe tener para ejercer su derecho.

Por medio de *la acción ciudadana* se logra evidenciar el desarrollo de las competencias básicas. De acuerdo con Ruiz y Chaux (2005) esta acción debe ser ejercida de manera autónoma y no por exigencia de otros individuos. Estos autores afirman que, para ser autónomo, en relación con la acción ciudadana, es necesario contar con un conjunto de competencias integradas, como un dominio de conocimientos que se ponen en juego en los diferentes ambientes o escenarios democráticos.

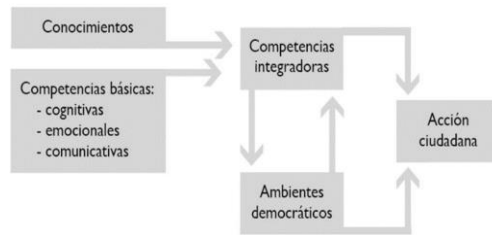


Figura 1: Competencias ciudadanas Según Ruiz y Chaux (2005)

En lo que sigue se presenta la interpretación de los autores de este trabajo sobre las competencias que proponen Ruiz y Chaux (2005).

Competencias cognitivas

Las competencias cognitivas son todas aquellas capacidades integradas con conocimientos para llevar a cabo diversos procesos mentales; en este caso para ejercer la ciudadanía de una manera idónea. Estas capacidades favorecen el ejercicio de la ciudadanía en la medida que permite generar participación, valorar las diferencias, lograr acuerdos de beneficios mutuos, etc. Esto se logra cuando se comprenden, entienden, interpretan y reconocen las diferentes formas de ver el mundo. Investigaciones de Ruiz y Chaux (2005) han mostrado que no desarrollar este tipo de competencias lleva, frecuentemente, a las personas a resolver diferencias o conflictos por la vía de la agresión, la fuerza, la intimidación o el engaño. A continuación, se presentan algunas de las competencias que hacen parte de esta categoría:

- *Tomar diferentes perspectivas de un acontecimiento:* Esto implica que, ante un hecho, una situación, una eventualidad o accidente la persona tiene la capacidad de reconocer diferentes antecedentes, circunstancias o posibles causas que originaron dicha situación.
- *Imaginarse distintas maneras para resolver un problema o un conflicto:* Esto se refiere que ante una problemática la persona presenta más de un procedimiento o estrategia posible o viable para dar solución a esta.
- *Evaluar las consecuencias de una decisión:* Dadas las posibles soluciones para una situación, la persona debe comprender y discernir las consecuencias probables, y así tomar decisiones, que provean una óptima solución a la situación.
- *Pensamiento crítico:* Es una de las competencias a nivel cognitivo con mayor relevancia para un buen actuar ciudadano. Se refiere a la capacidad que tiene el individuo para

cuestionar, validar o evaluar una creencia, afirmación o información frente a una acción que realizan otros o él mismo.

Competencias comunicativas

Las competencias comunicativas son entendidas como las diferentes capacidades de la persona, integradas con conocimientos para establecer una buena comunicación oral o escrita y tener acceso a una realidad simbólica compartida; esto es, entablar diálogos constructivos; dar a conocer las ideas, puntos de vista, intereses y necesidades; comprender y entender las ideas que los demás quieren comunicar; participar y actuar en las diferentes interacciones interpersonales para enfrentar y solucionar problemas o conflictos sociales (Ruiz & Chaux, 2005).

Es importante aclarar que las competencias cognitivas y comunicativas se desarrollan de manera paralela y complementaria; mientras las cognitivas se presentan en relación con los objetos del entorno, las comunicativas se forman en el trato entre los sujetos; y la ciudadanía se da en relación entre objetos y sujetos (Habermas, 2001; citado por Ruiz & Chaux, 2005).

Ahora bien, las competencias comunicativas favorecen el ejercicio de la ciudadanía en cuanto a que permiten el intercambio de ideas, posturas y conocimientos a la hora de solucionar conflictos o situaciones problemáticas, esto se logra por medio de las representaciones, argumentaciones, narraciones, juicios o explicaciones. Ruiz y Chaux (2005) argumentan que entre mayor sea el desarrollo de estas competencias es más factible que las personas interactúen de manera constructiva, pacífica, tolerante y democrática.

A continuación, se presentan algunas competencias comunicativas:

- *Escuchar a otro; escucha activa:* Esta habilidad implica no solo comprender lo que el otro está tratando de comunicar, sino también demostrarle al locutor que está siendo escuchado. Esto último se puede evidenciar por medio de las acciones corporales o con el parafraseo del mensaje. Cuando alguien nota que es escuchado siente la responsabilidad también, de escuchar, a los demás.
- *Ser asertivo:* Es la capacidad para expresar y comunicar de manera clara y concisa inquietudes, necesidades, intereses, posturas, ideas propias, diferencias, anomalías,

desacuerdos, entre otras. Pero la asertividad no solamente es decir o comunicar aquello que pensamos, sino que implica construir un discurso de tal manera que el otro no se sienta agredido, evitando herir susceptibilidades y el escarnio público.

- *Expresar ideas por medio del lenguaje no verbal:* Son aquellas expresiones comunicativas en donde intervienen la pintura, el teatro, el baile, el canto, la fotografía, las manualidades, creatividad, etc.

Competencias emocionales

Parte de la acción ciudadana está relacionada con la formación en valores, esta a su vez con la conciencia y los sentimientos.

Las competencias emocionales son habilidades o capacidades ineludibles para reconocer las emociones y sentimientos que se suscitan en los diferentes escenarios y situaciones sociales, para poder actuar frente a ellas de forma constructiva. En sus trabajos y estudios Ruiz y Chaux (2005) han documentado que, aunque se cuente con un buen dominio de habilidades cognitivas y comunicativas se pueden generar graves problemas de adaptación y aceptación social si la persona presenta limitaciones con las competencias emocionales. Ellos sustentan que el desarrollo de las competencias cognitivas, comunicativas y emocionales se debe dar de manera simultánea o paralela. A continuación, se describen dos tipos de competencias emocionales:

- *Manejar las emociones propias:* Esta busca que los sujetos tengan la capacidad de tener control de sus emociones y de las respuestas de estas. Ruiz & Chaux (2005) sustentan que no desarrollar esta competencia en las personas conlleva a tener personas violentas que atentan en contra de la ciudadanía, porque pueden generar daños a sí mismos o a los demás. Por ejemplo, una persona con enojo crónico³ puede llevar a generar diferentes acciones de violencia causando daño tanto personal como a otras personas. Este tipo de acciones se pueden evitar si las personas tienen un buen manejo sus emociones.
- *Identificar y dar respuesta empática ante las emociones de los demás:* Esto hace referencia a sentir una emoción o un sentimiento algo parecido a lo que está viviendo la

³ Cuando el enojo presenta acciones de violencia entonces se habla de un enojo crónico. Tomado de: <https://justificaturespuesta.com/las-15-emociones-toxicas-que-te-impiden-ser-feliz/>

otra persona. La empatía no solo hace alusión a identificar esos sentimientos de los demás, sino que también requiere involucrarse con esas emociones y sentimientos que expresan las personas; es poder compartir, apoyar, contribuir y actuar ante cualquier emoción.

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) propone *Los estándares básicos de competencias* (MEN, 2006), documento que presenta un cuarto grupo de competencias, denominadas *Integradoras*.

Competencias integradoras

Estas son capacidades o habilidades que integran todas las demás competencias y otros conocimientos para el buen manejo de un conflicto. Requieren algunos conocimientos como normas, leyes y debidos procesos para darle una buena dinámica al conflicto; además contar con unas competencias: cognitivas para poder establecer y proponer posibles rutas de solución ante un problema; y comunicativas para transmitir y comunicar de manera asertiva los diferentes puntos de vista; y finalmente también se hace necesario de las competencias emocionales para lograr tener un autocontrol de las mismas (MEN, 2006).

El MEN (2006) establece cuatro competencias integradoras, que se resumen a continuación:

- *Desarrollar la moral:* El desarrollo de esta competencia permite al sujeto reflexionar y tomar decisiones y posturas cada vez más íntegras en donde prime el bien común sobre el bien individual. Para el avance de esta capacidad es necesario contar con un buenas capacidades cognitivas y emocionales.

El MEN (2006) hace explícito la importancia de desarrollar esta competencia debido a que las personas, y específicamente los estudiantes, están en constante interacción con otros, en los conflictos de la vida cotidiana es donde se pone en juego la empatía, el juicio moral, la ética y los valores; y estos están estrechamente relacionados con el desarrollo de la moral.

- *Aportar a la construcción de la convivencia y la paz:* Esta competencia hace referencia a la habilidad que tienen las personas de interactuar con el prójimo de manera pacífica y constructiva de reconocer que tanto uno mismo como el otro somos seres humanos, que

según el grupo social en el que hacemos parte nos cobija una misma constitución política que nos exige los mismos deberes y derechos.

Pero además esta competencia implica reconocer que las personas pertenecen a diferentes grupos sociales como: la familia, la escuela, el trabajo, el barrio, el país. Por lo anterior es indispensable aprender a hacer parte de esos grupos, cuidar de ellos; a no maltratar; a perdonar y pedir perdón; a respetar las normas que tiene cada grupo; a cumplir con los deberes asignados; y hacer respetar los derechos tanto propios como los del prójimo. El MEN (2006) se refiere a todo lo anterior como el “actuar de manera solidaria con las personas”.

- *Participar y tener responsabilidad democrática:* Esta capacidad implica varios asuntos: i) participar de manera responsable en la construcción de las normas y acuerdos; ii) velar por el cumplimiento de las normas y el respetar los acuerdos a favor del bien y la vida en comunidad; iii) entender el sentido de la construcción y el cumplimiento de las normas y acuerdos.

Según el MEN (2006) los anteriores asuntos son procesos complejos para las personas y específicamente para los estudiantes, debido a que involucran otras capacidades que se deben desarrollar como: ponerse en la situación del prójimo, entender las diferentes perspectivas, debatir, escuchar, proponer diversas estrategias, entender las consecuencias de lo acordado, acatar y seguir los acuerdos y normas aun si están en desacuerdo o en contra de intereses propios.

- *Promover la pluralidad, la identidad y valorar las diferencias humanas:* Esta busca que las personas en particular los niños y jóvenes aprendan a respetar a quienes son diferentes, tratarlos como sujetos con los mismos derechos y deberes, tener en cuenta y valorar las perspectivas que ellos tienen de la realidad. Esta capacidad también implica que el estudiante se reconozca primero a sí mismo, identificando las características de los grupos socioculturales a los que pertenece y, de esta manera, poner a disposición de los demás su propia perspectiva de las realidades del mundo.

2.2.2. Competencias Matemáticas

Otro aspecto que se quiere indagar en este trabajo, son las competencias matemáticas que se pueden lograr desarrollar con el diseño e implementación de tareas que generan incertidumbre. Es por ello, que a continuación se presentan los constructos teóricos desarrollados por algunos autores en relación con estas competencias.

Uno de los objetivos centrales de las Pruebas PISA es darle importancia, no solo a los contenidos matemáticos aprendidos y que han sido establecidos en los currículos, sino identificar de qué manera los estudiantes aplican lo aprendido, en situaciones de su vida diaria. Por tal motivo, en la descripción realizada por Rico (2007) del proyecto PISA, se menciona que las competencias matemáticas hacen parte fundamental del proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que cuando los ciudadanos se enfrentan a situaciones en las cuales se involucran las matemáticas (comprar, organizar tiempo, finanzas personales, dirigirse a diferentes lugares, entre otras), deben mostrar su competencia matemática con el fin de solucionar, analizar y comprender esas situaciones.

La definición de competencia matemática que PISA establece es la siguiente:

“la capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo” (OECD, 2004, p. 3; OECD, 2003, p. 24).

PISA presenta las siguientes competencias matemáticas que deben desarrollar los estudiantes durante la solución de diferentes situaciones:

- *Pensar y razonar*: el individuo formula preguntas que permitan una relación de sus respuestas con las matemáticas. Reconocer e identificar los tipos de enunciados que puedan presentarse (definiciones, teoremas, afirmaciones condicionadas, etc.). El individuo comprende y sabe utilizar conceptos matemáticos.
- *Argumentar*: el individuo construye y comunica argumentos matemáticos de acuerdo con la estrategia que escoja para solucionar alguna situación.
- *Comunicar*: permite al individuo expresar contenido matemático de manera verbal o escrita. Asimismo, comprender a otras personas cuando expresan ideas matemáticas de cualquiera de esas dos formas.

- *Modelar*: permite al individuo modelar situaciones de contenido matemático a lo real y viceversa.
- *Plantear y resolver problemas*: el individuo plantea, analiza y da solución a diferentes tipos de problemas.
- *Representar*: el individuo puede construir, interpretar y relacionar distintos tipos de representación de objetos matemáticos de tal manera que pueda escoger qué tipo de representación se adapta a una situación dada.
- *Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones*: permite al individuo interpretar lenguaje simbólico y formal, e identificar su relación con el lenguaje natural y viceversa y manipular enunciados con ecuaciones y fórmulas.
- *Uso de herramientas y recursos*: el individuo utiliza cualquier tipo de herramientas o recursos que permitan explorar y ser usados de tal manera que se pueda sacar provecho de las cualidades que estos ofrecen.

En la formulación y creación de los problemas matemáticos PISA plantea tres niveles de complejidad que deben tenerse en cuenta para lograr una relación entre el proceso de enseñanza y el desarrollo humano del estudiante en el aprendizaje de las matemáticas:

- Reproducción y procedimientos rutinarios.
- Conexiones e integración para resolver problemas estándar.
- Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.

Así mismo plantea seis niveles para evaluar las competencias anteriormente presentadas.

- *Primer nivel*: sucede cuando el estudiante sabe y puede responder preguntas planteadas en ambientes conocidos para él. Las preguntas contienen la información necesaria y solamente basta con seguir operaciones y procedimientos rutinarios.
- *Segundo nivel*: el estudiante deduce de manera directa una situación, extrae solamente la información que necesita y la representa en un único sistema de representación (verbal o escrita).
- *Tercer nivel*: el estudiante puede plantear varias soluciones a situaciones sencillas. Se le facilita expresar sus razonamientos, comprensiones y resultados.

- *Cuarto nivel:* el estudiante puede trabajar con modelos matemáticos que le permitan crear supuestos. No utiliza un solo tipo de representación; por lo contrario, puede usar varias. Elabora explicaciones y argumentos teniendo en cuenta sus resultados y acciones.
 - *Quinto nivel:* el estudiante construye modelos y trabaja con ellos en situaciones complejas respecto a los niveles anteriores. En este nivel analiza las estrategias que usará para desarrollar y solucionar los problemas planteados, así como los tipos de representación que serán acordes a la situación. Asimismo, reflexionan sobre sus ideas, resultados y acciones.
 - *Sexto nivel:* en este nivel el estudiante construye conceptos, generaliza y sabe usar la información que le permita solucionar una situación. El razonamiento y pensamiento matemático que caracteriza a los estudiantes es avanzado en comparación con los niveles anteriores, así como la forma en que expresa sus interpretaciones, argumentos y resultados.
- Por otra parte, para Niss (2003; citado por Íñiguez, 2015) la competencia matemática se refiere a “poseer habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos intra y extra-matemáticos y situaciones en las que las matemáticas juegan o pueden tener un protagonismo”. Este autor plantea que se deben desarrollar ocho competencias matemáticas, divididas en dos grupos: el primero, se relaciona con usar, cuestionar y contestar por medio de matemáticas; y el segundo grupo se relaciona con la comprensión, uso del lenguaje matemático y uso de recursos matemáticos.

A continuación, se presentan las competencias que hacen parte del **primer grupo** de acuerdo con la clasificación establecida por el autor.

- *Pensar matemáticamente:* esta competencia implica que el individuo pueda pensar en matemáticas y de esta manera utilizar razonamientos cuantitativos y lógicos en la vida diaria, esta competencia permite hacer preguntas y llegar a respuestas, las cuales se apoyan en matemáticas.
- *Planteamiento y resolución de problemas:* esta competencia permite que el individuo pueda identificar, planear y resolver diferentes tipos de problemas matemáticos y no matemáticos.
- *Modelar matemáticamente:* esta competencia permite al individuo hacer transiciones del mundo real al modelo y del modelo al mundo real, haciendo deducciones, llegando a comprensiones e interpretaciones y resultados del modelo.

- *Razonar matemáticamente*: esta competencia permite al individuo construir conceptos a partir de su razonamiento y que los argumentos que realice sean rigurosos y se puedan validar por medio de demostraciones.

A continuación, se presentan las competencias que hacen parte del *segundo grupo* de acuerdo con la clasificación establecida por el autor.

- *Representar entidades matemáticas*: esta competencia implica que el individuo pueda hacer uso de diferentes representaciones de objetos matemáticos; asimismo, que comprenda cada representación usada.
- *Manipular símbolos matemáticos y formalismos*: esta competencia permite al estudiante manipular fórmulas, símbolos y expresiones matemáticas, interpretar el lenguaje natural y el lenguaje formal.
- *Comunicación en, con y acerca de las matemáticas*: este tipo de competencia permite a los individuos comprender mensajes escritos, orales y visuales que tienen que ver con matemáticas, así mismo a expresar sus ideas de diferentes maneras.
- *Uso de recursos y herramientas*: esta competencia busca que el estudiante haga un buen uso de los recursos y herramientas que se disponen para solucionar diferentes situaciones diseñadas para trabajar con software matemático y otros recursos manipulables.

2.3. ARGUMENTAR

Argumentar es un elemento fundamental en las matemáticas, además, en la vida cotidiana es necesario que el ciudadano sea capaz de argumentar cuando toma decisiones. Es por eso por lo que se considera la argumentación como el vínculo entre las competencias ciudadanas y matemáticas. Para profundizar más en esta idea, se presentan los planteamientos de algunos autores en relación con la argumentación.

Según Sardá (2000; citado en Planas y Morera, 2015) argumentación es toda actividad social y cognitiva, que permita la comunicación de justificaciones de ideas para aprobar o refutar, con el fin de establecer cuál es la opción o solución que mejor se ajusta a una situación. Es la transmisión comunicativa de juicios teniendo como base unas garantías que permitan la toma de decisiones.

Toulmin (2007; citado por Silva, 2013) propone un modelo de argumentación donde se involucran tres elementos fundamentales que hacen parte de un argumento en matemáticas: los datos, las garantías y las conclusiones.

Este modelo se propone con el fin de establecer una línea metodológica para generar argumentos matemáticos. Se parte de un enunciado o afirmación que se establece como verdadero a lo que se llamará dato; con esto se elabora una premisa, que genera un resultado final que se denomina conclusión. Para hacer legítima la transición del dato a la conclusión es necesario utilizar definiciones, teoremas, postulados, reglas lógicas, etc. Este conjunto de proposiciones es lo que se conoce como garantías (Toulmin, 2007).

Por ende, la argumentación matemática es entendida para el grupo $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$ (Perry, Samper, Camargo, y Molina, sf) como la formulación y encadenación de argumentos con el propósito de apoyar, defender una idea o conjetura. Dicho de otra manera, la argumentación en matemáticas es entendido como el proceso de encadenación de argumentos, es decir que un argumento con lleva a la formulación de otro, hasta conseguir el resultado o la conclusión requerido.

Según Jarba (2000; citado por Planas y Morera, 2015) en el proceso de argumentar se desarrollar la competencia argumentativa. Entendida esta, como el conjunto de capacidades cognitivas y lingüísticas como, describir, narrar, explicar, argumentar y justificar, que se van desarrollando en el proceso de la argumentación. Las dos primeras serían las capacidades para leer y escribir textos. Pero, las tres últimas presentan un nivel de mayor complejidad, debido que no solo es transmitir la información, sino que hay que hacerlo de manera fundamentada.

Douek (2007; citado por Camargo, 2010) se refiere al proceso de argumentar como aquella actividad de esgrimir razones, defender puntos de vista, establecer enunciados y dar a conocer referentes teóricos que sustentan una afirmación. En consonancia con el grupo $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$ esta autora también coincide en que la argumentación se basa en un conjunto de argumentos que pueden estar establecidos deductiva o inductivamente. Adicionalmente a esto Camargo (2010) hace explícito que comparte la idea de Douek (2007) que para hacer una

argumentación es indispensable contar con referentes teóricos que ayuden a sustentar todo el proceso de argumentación, ya sea de manera implícita o explícita.

2.3.1. Esquemas de argumentación

En los apartados anteriores hemos mencionado lo que diferentes autores asumen por argumentación y por argumento. Ahora bien, uno de los intereses de este trabajo es identificar cómo argumentan los estudiantes cuando se le presentan tareas que generan incertidumbre en la clase de matemáticas, específicamente de geometría; es por eso por lo que a continuación se presentan dos constructos teóricos que se hallaron en dos fuentes bibliográficas en relación con la tipología de argumentos que pueden presentar los estudiantes.

Según Flores, Gómez & Flores (2010) en este proceso de argumentar los estudiantes hacen uso de *esquemas de argumentación*. Esto es entendido para estos autores como las diferentes maneras que los escolares usan su forma de pensar y razonar durante la práctica argumentativa. Son acciones y razonamientos que ellos utilizan para explicar un resultado, validar una afirmación o justificar una conjetura, que surge durante el desarrollo de un problema o una tarea.

Los siguientes son esquemas de argumentación propuestos por Flores et al. (2010).

Esquema	Descripción
Autoritario	Los argumentos presentados están apoyados por alguna autoridad, que puede ser el profesor, algún compañero de clase o la información del libro de texto, entre otros.
Simbólico	La simbología y el lenguaje matemático utilizado por el estudiante son innecesarios y pocos útiles, e impide llegar a una conclusión. En este tipo de argumentos el estudiante suele mencionar conceptos poco claros o no acordes, y cree que al hacer uso de estos elementos su argumento es correcto.
De recuento Fáctico o simplemente fácticos	Los argumentos de este tipo se basan en recuentos de lo hecho para encontrar un resultado, dando a conocer un conjunto de pasos o de algoritmos realizados.
Empírico	En este tipo de argumentos el estudiante se basa en hechos físicos, generalmente en dibujos o representaciones gráficas en el caso de la geometría.
Analítico	Para este tipo de argumentos se debe establecer una cadena deductiva de argumentos, utilizando elementos de un sistema teórico; pero no necesariamente conlleva a que se llegue a una tesis válida.

Tabla 1: Esquemas de argumentación (Flores, 2010)

En consonancia con esta tipología que se presentó, Bohórquez, Guzmán y Parra (2015) reportan en un artículo de investigación unos esquemas de argumentación que proponen Harel y Sowder (1998). Bohórquez et al (2015), utilizaron estos esquemas para analizar el razonamiento lógico empleado por algunos estudiantes, de tercer semestre de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, cuando realizan una demostración. A continuación, se presentan los tres tipos de esquemas: Externos, empíricos y analíticos que explican Bohórquez et al (2015), ampliando las categorías propuestas por Flores et al. (2010)

Esquemas de argumentación externos

Tipo de argumentos	Descripción
Autoritarios	El estudiante acude a información que proviene del libro de texto, del profesor o incluso de un compañero de clase que considera con mayor conocimiento. Esta categoría coincide con una de las que proponen Flóres et al. (2010).
Rituales	El estudiante considera válidas aquellas afirmaciones cuando se utiliza el rigor de la escritura o las estructuras lógicas propias de las matemáticas, sin reflexionar el uso adecuado de estas.
Simbólicos	El estudiante utiliza un lenguaje simbólico sin hacer referencia al objeto y dejando de un lado las relaciones con este. Este tipo de argumento también corresponde al simbólico expuesto por Flóres et al. (2010).

Tabla 2: Esquemas de argumentación externos (Bohórquez et al. 2015)

Esquemas de argumentación empíricos

Tipo de argumentos	Descripción
Perceptivos	En este tipo de argumentos se utiliza generalmente ejemplificación con una secuencia de gráficos o dibujos representativos de la situación.
Inductivos	Los argumentos presentados por el estudiante se evidencian que particulariza una situación sin llegar a una generalización.

Tabla 3: Esquemas de argumentación empíricos (Bohórquez, Guzmán & Parra, 2015)

Esquemas de argumentación analíticos

Tipo de argumentos	Descripción
Transformación	Los argumentos inician con la identificación de ejemplos o representaciones gráficos, posterior se hace una transformación de lo gráfico a lo simbólico, para finalizar con el planteamiento o replanteamiento de conjeturas.
Axiomático	Los argumentos son resultados de hacer uso correcto del sistema teórico, de reglas matemáticas, y resultados asumidos como válidos con anterioridad.

Tabla 4: Esquemas de argumentación analíticos (Bohórquez, Guzmán & Parra, 2015)

En relación con las dos tipologías de argumentos presentadas, se logra observar que hay algunas similitudes con la descripción que hace cada uno de los autores: por ejemplo, en los argumentos *autoritarios* y *simbólicos* los autores concuerdan en su descripción. En relación con los argumentos empíricos y analíticos que presenta Flores et al (2010) también se corresponden con los presentados por Bohórquez et al (2015), con la diferencia de que ellos subdividen estas dos categorías. En las dos propuestas se encuentran argumentos que son exclusivos de cada autor y no se puede establecer una relación entre ellos, el *recuento fatico* y el de *ritual*, el primero propuesto por Flores et, al (2010), y el segundo propuesto por Bohórquez et al (2015).

En el capítulo siguiente, se presenta la postura de los autores de este trabajo en relación con los tipos de argumentos, el nombre y la descripción que se asumirá para el desarrollo de esta investigación. Pero, además, en ese capítulo también se exponen las posturas que se asumen en relación con las tareas de incertidumbre, las competencias ciudadanas y las matemáticas.

3. MARCO TEÓRICO

En busca de una estrategia para el desarrollo de competencias ciudadanas y matemáticas en la clase de geometría, este capítulo se centra en varios asuntos. La caracterización de tareas que generan incertidumbre. Se cree que estas tareas pueden promover el desarrollo de dichas competencias, es por esto por lo que se presenta la descripción de las competencias que se infiere pueden llegar a evidenciarse en la implementación de este tipo de tareas. Se considera que el punto de contacto entre los dos tipos de competencias es la argumentación. Por tanto, se finaliza este capítulo exponiendo la postura de los autores, en relación con este asunto y se presentan los posibles tipos de argumentos que se pueden dar durante el desarrollo de las tareas. En la figura 2, se presenta el esquema de relaciones del marco teórico que se presenta a continuación.



Figura 2: Esquema de relaciones del marco teórico

3.1. CARACTERIZACIÓN DE LAS TAREAS DE INCERTIDUMBRE

En concordancia con lo expuesto por Zaslavsky (2005), Skovsmose (2000), y García y Montejo (2011), acerca de las tareas y ambientes que generan incertidumbre, se asume que las tareas que buscan generar incertidumbre son aquellas que tienen varios caminos de solución y no tiene una única respuesta; por lo contrario, pueden tener varias soluciones las

cuales pueden ser correctas o erróneas pues la justificación que realice el estudiante sobre sus resultados es lo relevante. Se considera que las tareas construidas para la trayectoria hipotética de aprendizaje de este trabajo tienen como base el crear situaciones en la clase donde se implique debate y conflicto entre las estudiantes las cuales deberán argumentar para justificar sus soluciones.

De acuerdo con la comprensión alcanzada sobre tareas que generan incertidumbre, a continuación, se describen los diferentes tipos de incertidumbre planteados por Zaslavsky (2005) y que pueden surgir al enfrentar una tarea. Junto a cada uno se muestra un ejemplo de tarea⁴ específicamente en geometría que consideramos pueden evocar incertidumbre.

- ***Afirmaciones encontradas:*** este tipo de incertidumbre se considera puede surgir cuando el estudiante se enfrenta a una tarea que contiene algún objeto del cual tiene ciertas creencias o ideas que para él son verdad y, al momento de contradecir esta verdad, pueden surgir reclamos o afirmaciones ya sean de él mismo o de algunos pares.

Ejemplo: Dado el triángulo WXY, ¿sus alturas se intersecan?

Se dice que esta tarea puede generar incertidumbre porque posiblemente los estudiantes ya tienen ciertas creencias sobre las alturas y construcción de estas en un triángulo y, al ser cuestionados sobre si estas se intersecan, pueden entrar en un estado de incertidumbre. Sí para ellos es claro que, sí se intersecan, la tarea puede ser modificada con el fin de contradecir la verdad en la que los estudiantes ya confían. Por ejemplo: *Dado el triángulo WXY, ¿sus alturas no se intersecan?*

- ***Resultados no verificables fácilmente:*** este tipo de incertidumbre puede surgir en momentos en los cuales los estudiantes no encuentren una herramienta, método o construcción para validar la solución a la que llegaron lo que provocara que no estén convencidos de su respuesta. Además, este tipo de incertidumbre tarda en eliminarse teniendo en cuenta que los resultados no serán verificados de manera rápida.

⁴ Tareas tomadas de los libros *Elementos de geometría y Geometría Plana*. Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Ejemplo: Explique cómo encontrar, en la siguiente figura, cada uno de los puntos descritos a continuación. Haga la construcción correspondiente.

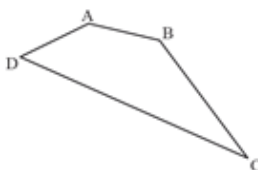


Figura 3: Ejemplo de incertidumbre: resultados no verificables fácilmente

- a. Un punto equidistante de \overline{AD} y \overline{AB} que, a la vez, sea equidistante de D y C.*
- b. Un punto equidistante de \overline{AB} , \overline{AD} y \overline{DC} .*

Se dice que esta tarea puede evocar en los estudiantes un estado de incertidumbre ya que posiblemente ellos no lleguen a una pronta solución. Posiblemente, de manera intuitiva se encuentre el punto para responder el ítem a. Pero, carecerán de herramientas para verificar que efectivamente el punto hallado cumpla la condición, lo que provocará que no estén de acuerdo con la solución encontrada.

- **Camino desconocido o conclusión cuestionable:** este tipo de incertidumbre surge, por ejemplo, cuando el estudiante se enfrenta a tareas que están diseñadas para trabajar con un software de geometría ya que permiten la exploración e indagación. Esto genera buscar hallazgos, soluciones o relaciones, lo que tendrá como resultado la creación de conjeturas.

Ejemplo: Construya el triángulo ABC y trace \overleftrightarrow{AC} . Seleccione un punto D sobre \overleftrightarrow{AC} , trace el \overline{BD} y halle el punto medio M de ese segmento. ¿Qué ocurre con el punto M cuando se mueve el punto D sobre \overleftrightarrow{AC} ?

Posiblemente esta tarea genere incertidumbre ya que puede ser desarrollada con apoyo de un software de geometría dinámica, las herramientas que ofrece el programa permitirán al estudiante la construcción de las rectas y puntos solicitadas en la tarea, lo que provocará en el estudiante el deseo de explorar e indagar las funciones de cada herramienta para producir conjeturas en busca de una solución. El punto central de la tarea puede ser la pregunta *¿Qué ocurre con el punto M cuando se mueve el punto D sobre \overleftrightarrow{AC} ?* Si el programa ofrece la

función arrastre el estudiante podrá llegar a la creación de conjeturas que podrá verificar con ayuda de este.

Asimismo, se tendrá en cuenta lo que Zaslavsky (2005) denomina naturaleza dinámica de incertidumbre, entendiendo esta como el movimiento que puede existir entre los diferentes tipos de incertidumbre que se pueden generar en la solución de una situación teniendo presente que este movimiento se realiza con el fin de que el sujeto elimine la incertidumbre. En la figura 4, que se presenta a continuación se evidencia el movimiento entre los tipos de incertidumbre.



Figura 4: Naturaleza dinámica de incertidumbre (Zaslavsky, 2005)

3.2.DESCRIPCIÓN DE LAS COMPETENCIAS

Teniendo en cuenta la revisión bibliografía y la definición propuesta por la RAE, se asume como competencias el conjunto de capacidades integradas con algunos conocimientos, habilidades y valores que permiten intervenir o actuar en un ámbito educativo, social, personal o laboral.

Dicho esto, a continuación, se describen las competencias matemáticas y ciudadanas que se asumen para el desarrollo y análisis de este trabajo, fruto de la revisión bibliográfica.

3.2.1. Ciudadanas

Teniendo en cuenta lo expuesto por Ruiz y Chaux (2005) se asume por competencias ciudadanas al conjunto de capacidades cognitivas, comunicativas y emocionales que integradas con algunos conocimientos básicos permiten orientar y formar a la persona tanto política como moralmente.

En la revisión bibliográfica se presentaron las competencias que exponen tanto Ruiz y Chauv (2005) como el MEN (2006). Para este trabajo se asumirán estas competencias con algunos cambios bien sea en el nombre o la descripción de la competencia.

Competencias cognitivas

- **Proponer diversas maneras para entender un problema:** Consiste en mencionar, exponer o explicar diferentes antecedentes que permiten entender un problema.
- **Establecer distintas maneras de resolver un problema:** Se refiere a socializar, exponer o presentar más de una solución posible para un mismo problema o conflicto.
- **Evaluar las consecuencias de las posibles maneras de resolver un problema:** Es dar a conocer o mencionar ventajas o desventajas de las posibles soluciones que se pueden asumir ante una situación de problema o conflicto.
- **Tener un pensamiento crítico:** Consiste en cuestionar, validar o evaluar una solución, construcción, procedimiento, afirmación o información que se le presenta.

Competencias comunicativas

- **Escuchar activamente:** Es comprender lo que otros están tratando de comunicar, lo cual permite evidenciar que está siendo escuchado por medio del parafraseo, generando preguntas, refutando o complementando la información que el emisor trasmite.
- **Ser asertivo para expresar ideas, necesidades e intereses:** Se refiere a expresar ideas de manera que los demás miembros no se sientan agredidos, además utiliza un tono de voz moderado, palabras respetuosas y adecuadas para establecer comunicación amable y cortés.
- **Expresar ideas por medio del lenguaje no verbal:** Consiste en hacer dibujos, realizar movimientos con partes del cuerpo (e.g. las manos) para comunicar sus ideas o planteamientos.

Competencias emocionales

- **Identificar y manejar las emociones propias:** Consiste en controlar las distintas emociones ante situaciones de complejidad o de conflictos, evitando generar situaciones de violencia.
- **Identificar y dar respuesta empática ante las emociones de los demás:** Se refiere a reconocer emociones de las personas a su alrededor para contribuir y saber actuar de manera idónea frente a las diferentes emociones de los demás.

Competencias integradoras

- **Contribuir por el bien común:** Hace referencia a tomar decisiones en las cuales prime el bien común.
- **Aportar a la construcción de la convivencia y la paz:** Consiste establecer relaciones con sus compañeros de manera pacífica, además ve en el otro una ser con los mismos deberes y derechos. También implica cumplir y hacer cumplir las normas y compromisos establecidos en el aula de clase.
- **Participar y tener responsabilidad democrática:** Es participar en la construcción de acuerdos, velar por el debido cumplimiento de los acuerdos, principios, compromisos y normas que orientan el buen desarrollo de la clase.
- **Promover la pluralidad, la identidad y valorar las diferencias humanas:** Implica ser respetuoso con sus compañeros y docentes sin importar las características de cada persona, por el contrario, valora las diferencias de los integrantes de la clase.

3.2.2. Competencias Matemáticas

De acuerdo con lo expuesto por Niss (2003) y PISA, se asume por las competencias matemáticas como aquellas capacidades que posee un estudiante para hacer y usar adecuadamente las matemáticas en diferentes contextos, de tal manera que pueda aplicar estas capacidades en la solución de situaciones.

Tanto Niss (2003) como PISA, presentan un grupo de ocho competencias matemáticas, a continuación, se presentan aquellas que posiblemente se pueden lograr promover en la

aplicación de la trayectoria hipotética de aprendizaje presentada en este trabajo, estas fueron modificadas y la descripción se realizó con base a la comprensión lograda a partir de la revisión bibliográfica.⁵ Si bien en la revisión bibliográfica se pusieron las dos posturas fue con el fin de tener mayor soporte para el planteamiento de las categorías de análisis, por ejemplo PISA propone la competencia argumentar, mientras que Niss no tiene una categoría específica sobre argumentar, está la relaciona con la competencia razonar matemáticamente.

- **Pensar y razonar matemáticamente:** Es cuestionar y responder con ayuda de las matemáticas, a su vez distingue los diferentes tipos de enunciados.
- **Argumentar:** capacidad que le permite al estudiante para construir y comunicar argumentos matemáticos relacionados con la estrategia que utilizó para la solución de una situación dada.
- **Comunicar ideas usando las matemáticas⁶:** Hace alusión a expresar e interpretar sus ideas y las de sus compañeros, asimismo utilizar un lenguaje matemático, simbólico y formal. Ya sea de forma oral o escrita (utiliza conceptos propios de la geometría al comunicarse con sus compañeros).
- **Plantear y resolver problemas:** Es plantear, analizar y resolver diferentes tipos de problemas.
- **Representar:** capacidad del estudiante que le permite representar de diferentes formas una situación específica.
- **Usar herramientas y recursos:** Implica utilizar herramientas y recursos para explorar diferentes situaciones. En este caso un software de geometría dinámica.

3.3. ARGUMENTACIÓN

Consideramos que la argumentación es una competencia tanto matemática como ciudadana, en la medida que esta permite justificar o evaluar una situación o conflicto tanto en el campo de las matemáticas como en el actuar de un ciudadano.

⁵ Los nombres de las competencias matemáticas se toman de acuerdo con los planteados por PISA

⁶ La competencia comunicación y la competencia utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones, presentadas por PISA, se unificaron a consideración de los autores y avalado por la asesora de este trabajo. Se le asigna el siguiente nombre: comunicar ideas usando las matemáticas.

Para este trabajo la argumentación en la clase de geometría se asume como un proceso tanto social como cognitivo que permite establecer acciones o justificaciones para evaluar, aceptar o rechazar una conjetura, una construcción, un planteamiento o la solución de una tarea. Ahora bien, para el análisis de la investigación se van a tener en cuenta los esquemas de argumentación que se presentan en el capítulo anterior, con algunas modificaciones: algunos en el nombre otros en la descripción del tipo de argumento. Se asume la clasificación de los argumentos propuestos por Bohórquez et al (2015) (Externos, empíricos y analíticos) incluyendo y unificando los propuestos por Flores et al (2010).

Argumentos externos

- **Autoritarios:** Los argumentos presentados por los estudiantes se basan en agentes de autoridad con el profesor, su compañero, la información que encuentra en el libro de texto, o lo que observa en un software de matemáticas.
- **Simbólicos:** El estudiante en sus argumentos hace uso del lenguaje simbólico de las matemáticas, para con estos lograr convencer a los demás que planteamientos son correctos por el hecho de hacer uso de la simbología; aunque estos sean innecesarios o no estén bien empleados.

En este tipo de argumentos suele también hacer referencia a elementos del sistema teórico, que pueden o no estar acordes con la situación.

- **Recuento de un resultado:** Los argumentos que comunica el estudiante son descripciones de procedimientos o algoritmos que realiza para encontrar una determinada solución o resultado. También, pueden ser la explicación paso a paso de una construcción que realizó en algún entorno de geometría dinámica para solucionar una tarea.
- **Rigor en la escritura:** El estudiante establece argumentos acudiendo al rigor de la escritura matemática y reglas lógicas, sin que este esto llegue a relacionarse con la situación.

Argumentos empíricos

- **Ejemplificación:** El estudiante establece sus argumentos haciendo uso de gráficos, imágenes, dibujos o construcciones realizados a lápiz y papel o alguna herramienta tecnológica.
- **Explicación de casos:** El estudiante para establecer sus argumentos centrar la atención en una situación particular, un posible caso o un posible ejemplo; sin llegar a generalizar.

Argumentos analíticos

- **Transformacional:** El argumento que utiliza el estudiante presenta ejemplos o representaciones, luego hace uso de elementos teóricos para transformar cierta información en una posible conjetura.
- **Axiomático:** El estudiante basa sus argumentos en el uso adecuado de los elementos, reglas y acuerdos que componen un sistema teórico para hacer inferencias o deducir información.

4. METODOLOGÍA

4.1. ASPECTOS GENERALES

Para desarrollar esta investigación se tiene en cuenta el enfoque fenomenológico, que busca entender e interpretar el significado que tienen los diferentes sucesos que se presentan en el aula (Rodríguez, Gil, & García, 1996). La aproximación es hermenéutica debido a que se pretende interpretar diferentes acciones e intervenciones verbales y escritas que realizan unos estudiantes al momento de solucionar y socializar un conjunto de tareas; esto con el propósito de identificar qué competencias se movilizan en el aula cuando se plantean tareas que generan incertidumbre.

Para lograr tal propósito se diseñó una trayectoria hipotética de aprendizaje, utilizando una metodología que se asemeja a un experimento de enseñanza. Esta metodología consiste en generar una secuencia de tareas, en la que intervienen el docente-investigador, un grupo de estudiantes (uno o más), que son observados por los demás integrantes de la investigación. El propósito de que uno de los investigadores asuma el rol docente de la clase es que sea él quien evidencie el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Los demás investigadores forman parte del proceso que se están llevando a cabo, creando espacios como discusiones grupales, pequeños debates entre grupos de trabajo y socialización con el docente; esto conlleva a diferentes relaciones entre investigadores, profesores y estudiantes (Kelly y Lesh, 2009. Citados por Molina, et al, 2011).

En un experimento de enseñanza el tiempo para el desarrollo de las sesiones es variable, puede ir desde algunas horas de clase hasta varios años. El espacio de desarrollo puede ser en pequeñas aulas, laboratorios, salas de cómputo o digitales (Steffe & Thompson, 2000. Citados por Molina, et al, 2011).

Los experimentos de enseñanza se desarrollan con el fin de analizar acciones en tiempo real (en vivo) de los estudiantes, tomar datos y generar posibles hipótesis; esto durante cada sesión en la cual se lleva a cabo el experimento. El objetivo de este tipo de investigación es desarrollar un modelo de relaciones entre el sujeto y el objeto de conocimiento en cuestión, teniendo como resultado el aprendizaje del sujeto según la forma de llegar a ese objeto y las

tareas o situaciones puestas en clase por el docente-investigador (Molina , Castro, Molina, & Castro , 2011).

Uno de los autores de este trabajo asumió el rol de docente y otro de observador. Este último ocasionalmente participó en las socializaciones que se hacían de las tareas en el aula. La implementación de la trayectoria se llevó a cabo los lunes y viernes, en una clase de geometría de grado noveno, durante los meses de marzo y abril del 2018. Fueron 11 sesiones de las cuales nueve fueron desarrolladas en el aula de sistemas y dos en el salón habitual.

En relación con lo anterior, esta investigación dio como resultados dos productos: por un lado, el análisis de las acciones de los estudiantes cuando resuelven tareas que generan incertidumbre, en la clase de geometría, en relación con el desarrollo de las competencias matemáticas y ciudadanas. Por otro lado, el conjunto de tareas que hacen parte de una trayectoria hipotética de aprendizaje que se implementó, con el objetivo de proveer ejemplos para profesores, de tareas que podrían tomar como base para promover estas competencias en sus clases.

En las asesorías con la directora del trabajo de grado, que se desarrollaban los lunes después de la aplicación de las tareas, el docente-investigador y el observador-investigador comentaban lo que había sucedido en las sesiones de clase, esto permitió realizar un análisis sobre la pertinencia de la aplicación de cada tarea, algunos de logros alcanzados por las estudiantes, la forma de guiar la tarea en la próxima sesión y la continuidad de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

4.1.1. Etapas de la metodología

Según Cobb y Gravemeijer (2008; citados por Molina, et al, 2011) un experimento de enseñanza se debe desarrollar en tres etapas: i) Diseño, elaboración y preparación del experimento ii) Implementación iii) Ejecución del análisis de los datos obtenidos en la etapa de implementación.

En la primera etapa se tienen en cuenta las siguientes acciones: Definir el problema de investigación, los objetivos de esta y los de enseñanza; indagar sobre los conocimientos previos de los estudiantes; construir una trayectoria hipotética de aprendizaje; realizar el

diseño de la secuencia de manera justificada y diseñar los instrumentos para la recolección de los datos.

En la segunda etapa se presentan tres momentos:

- *Antes de cada sesión de clase* se cuenta con información previa del trabajo que se realiza en el aula, se identifican los objetivos e instrucciones de la sesión de clase, se elaboran hipótesis sobre los posibles resultados que se puedan obtener en el desarrollo de la clase.
- *En cada intervención* se recoge información de lo que ocurre en las sesiones de clase, incluyendo aquellas acciones o decisiones que se toman durante las intervenciones.
- *Después de cada intervención* se hace un primer análisis de lo observado en las sesiones para identificar como se actuará en la próxima sesión.

En la tercera etapa se recopila la información y se organizan las evidencias recogidas en la etapa de experimentación. Se selecciona la información que serán los datos para el análisis de la investigación. Se analizan los datos a la luz de la hipótesis de aprendizaje y de un conjunto de categorías sobre competencias matemáticas, ciudadanas y tipos de argumentos.

A continuación, se presenta como se desarrollaron las etapas anteriormente explicadas.

- En el apartado 3.2 (Diseño de tareas) de esta investigación se presenta información que da cuenta de varios aspectos con relación a la primera etapa, dado que se realiza el diseño de la trayectoria hipotética de aprendizaje. Además, antes de la implementación, se realizó la organización logística, se hicieron los trámites necesarios para conseguir los permisos tanto de directivas como de padres de familia de la Institución educativa, para contar con el consentimiento y poder realizar las grabaciones de las clases⁷ (Ver anexo 20). Adicionalmente, los investigadores asistieron a la Institución para instalar el software GeoGebra en todos los computadores de la sala de sistemas. Además, se reunieron los materiales necesarios para el desarrollo y grabación de las clases: cámaras de video, pilas, cargadores, memorias de almacenamiento, los talleres impresos, las carpetas para las estudiantes, etc.

⁷ En el anexo 20 se encuentran el permiso firmado por coordinación académica de la Institución, y el permiso de una de las estudiantes firmado por sus acudientes. Estos formatos se pueden descargar en: http://mpp.pedagogica.edu.co/download.php?file=consentimiento_informado_en_inv_ninos_y_adolecentes.docx

- En los siguientes apartados o anexos de esta investigación se presenta información que da cuenta de la segunda etapa del experimento de enseñanza en: i) Del anexo 2 al 12 se presentan las transcripciones de cada una de las sesiones de clase que se desarrollaron durante la aplicación de la secuencia ii) en los anexos del 13 al 19 se presenta la planeación de cada una de las tareas.
- La tercera etapa se puede evidenciar en el capítulo cuatro (Análisis de los datos) donde se ponen en juego las categorías de análisis, que posteriormente se expondrán, con el fin de establecer y encontrar relaciones y resultados parciales del estudio.

4.1.2. Descripción de la población

La trayectoria hipotética de aprendizaje se implementó en el Colegio Femenino San Juan Bosco, institución privada, ubicada en el barrio Santa Ana de la localidad cuarta en la ciudad de Bogotá. El Colegio orienta la formación de niñas y jóvenes de las clases populares de la localidad, lo que significa que el estrato socioeconómico de las familias de las estudiantes esta entre 2 y 3. El grado en el cual se desarrolló fue Noveno-B, el cual está conformado por 27 estudiantes, cuyas edades oscilan entre los 14 y 15 años. Este grupo de estudiantes se caracteriza por tener una buena disposición en las clases, ser comprometidas y curiosas al momento de interactuar con herramientas tecnológicas. En cuanto a su gusto por las matemáticas se puede decir que se preocupan por aprender nuevas cosas y se ven interesadas cuando las tareas que proponen los profesores son diferentes a las que comúnmente se usan durante las clases. Para el desarrollo de las tareas se organizaron en 12 parejas y un grupo de tres.

4.1.3. Recolección de la información y estrategia de construcción de los datos

Dado que las tareas requerían del uso del programa GeoGebra para su solución, nueve de las once clases se desarrollaron en el aula de sistemas de la Institución⁸ y las otras dos en el salón habitual de clase.⁹ A cada pareja se le asignó un computador con dicho programa.

Posterior al trabajo en parejas siempre se abrió un espacio para la discusión entre el profesor y todas las estudiantes. En estas se presentaron algunas soluciones a las tareas planteadas,

⁸ El aula tiene 32 computadores, un tablero, un video beam y está distribuida como se muestra en el anexo 21

⁹ La distribución del salón de clases habitual se presenta en el anexo 22.

que generaron comentarios, sugerencias, justificaciones o validaciones por parte de los estudiantes.

Para la toma y recolección de información se contó con tres cámaras de video: una fija, que grabó la clase en general, con el fin de tener evidencia de los momentos en los cuales se socializaba por parte de todo el grupo la solución de las tareas presentadas en las sesiones; las otras dos fueron móviles, destinadas a grabar las interacciones que se daban en el trabajo por parejas, se aclara que estas grabaciones no fueron escogidas con anterioridad, por lo contrario fueron por la participación autónoma de cada pareja.

Para la construcción de los datos investigativos se realizaron las transcripciones de todas las clases (anexos del 2 al 12). Luego se hizo una revisión de estas y se seleccionaron aquellos fragmentos en los cuales las estudiantes comunican ideas, exponen sus soluciones, tratan de argumentar afirmaciones, reaccionan ante posturas diferentes de sus compañeras, se presentan discusiones y acuerdos o desacuerdos entre ellas. Esta elección se realizó por parte de los autores teniendo en cuenta aquellas tareas en las cuales se evidenció mayor participación de las estudiantes, la cantidad de posibles soluciones propuestas por los grupos de trabajo y aquellas en las cuales los docentes percibieron la existencia o desarrollo tanto de las competencias matemáticas y ciudadanas, así como de los argumentos utilizados por las estudiantes en los momentos de socialización. Por lo anterior, es conveniente aclarar que los análisis realizados surgieron de las producciones orales de las estudiantes más no de las producciones escritas que apoyaron las sesiones. Para el procesamiento y análisis de los datos se contó con unas categorías preliminares de análisis sobre las competencias matemáticas y ciudadanas basadas en Niss (2003), Rico (2007), Ruiz y Chaux (2005), MEN (2006); y otras en relación con los esquemas de argumentación basados en lo propuesto por Flores et al. (2010) y Bohórquez, et al (2015).

4.2. DISEÑO DE TAREAS

En este apartado se presenta el diseño y la planeación de las tareas, teniendo como base la propuesta de Gómez (Sf) para desarrollar la trayectoria hipotética de aprendizaje. Inicialmente se presentan las generalidades, la finalidad, los objetivos, el marco matemático a utilizar y luego los aspectos específicos de cada una de las tareas. Algunas de las tareas se

basan en lo estudiado por el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{A}G$) en investigaciones y libros.

4.2.1. Descripción general de la trayectoria

Grado: Noveno

Tema: La mediatriz

Finalidad de la trayectoria hipotética de aprendizaje: Se pretende implementar una serie de tareas buscando generar incertidumbre, con el fin de desarrollar en los estudiantes competencias ciudadanas y matemáticas, así como la argumentación.

Objetivo de la trayectoria hipotética de aprendizaje: Promover las competencias tanto ciudadanas (cognitivas, comunicativas, emocionales e integradoras); como matemáticas (planteamiento y resolución de problemas; el razonamiento matemático; la comunicación en, con y acerca de las matemáticas; y el uso de recursos y herramientas tecnológicas) haciendo uso de algunas nociones básicas como punto, recta y segmento¹⁰; algunas definiciones establecidas como la de intersección, colinealidad, equidistancia entre otras; pero a la vez la formalización de otras definiciones como punto medio, relación de perpendicularidad, circunferencia y mediatriz; que le permitan al estudiante tomar decisiones, comunicar y justificar las posibles soluciones a las tareas planteadas.

4.2.2. Sistema teórico local

A continuación, se enuncian las definiciones y hechos geométricos que se ponen en juego en el desarrollo de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

Definiciones

D. Segmento: Para dos puntos cualesquiera A y B , el segmento AB es el conjunto de los puntos A y B , y de todos los puntos que están entre A y B . Se simboliza \overline{AB} .

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{x/A - X - B\}$$

D. Segmentos congruentes: Dos segmentos son congruentes si y solo si tienen la misma medida.

D. Colinealidad: Tres o más puntos son colineales si y solo si pertenecen en la misma recta.

¹⁰ Para esta trayectoria de aprendizaje se considera el segmento como una noción básica.

D. Equidistancia: Los puntos A y B equidistan del punto C si y solo si $AC = BC$

D. Interestancia¹¹: B está entre A y C si y solo si B pertenece al segmento AC . Se simboliza $A - C - B$

D. Punto medio: M es punto medio del \overline{AB} si y solo si se cumple las siguientes condiciones

- i. $A - M - B$
- ii. M equidista de los puntos A y B

D. Circunferencia: Es el conjunto de todos los puntos de un mismo plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

D. Ángulo: Es la unión de dos rayos no colineales con el mismo punto de origen.

D. Ángulo recto: Ángulo cuya medida es 90 grados.

D. Perpendicularidad: Dos rectas son perpendiculares si y solo si se intersecan y determinan ángulos rectos.

D. Mediatriz: La mediatriz del segmento \overline{AB} es el conjunto de todos los puntos que equidistan de A y B .

D. Triángulo: Dados tres puntos que no colineales, el triángulo es la unión de los segmentos cuyos extremos son los puntos.

D. Mediatriz de un triángulo: m es la mediatriz de uno de los segmentos de un triángulo si y solo si esta es perpendicular al segmento y lo interseca en su punto medio.

D. Circuncentro: Punto de intersección de las mediatrices de un triángulo.

Hechos Geométricos (Teoremas)

HG. Circuncentro: Si C es el circuncentro de un triángulo entonces equidista de los vértices del triángulo.

HG. Radios: Si \overline{AB} y \overline{AD} son radios de la circunferencia con centro en A y radio r entonces $\overline{AB} \cong \overline{AD}$.

HG. Punto medio: Si C es el punto medio del \overline{AB} entonces $2AC = AB$

HG. Mediatriz: Si l es la mediatriz del segmento \overline{AB} entonces $l \perp \overline{AB}$ y l interseca al \overline{AB} en su punto medio.

¹¹ Para este trabajo modificaremos la definición de interestancia: C está entre A y B si y solo si se cumple las siguientes dos condiciones; i. A, B y C son colineales ii. $AC + CB = AB$ y la utilizaremos así: B está entre A y C si y solo si B pertenece al segmento AC

4.2.3. Requisitos para el desarrollo de la trayectoria

A continuación, se dan a conocer los recursos, conocimientos o compromisos con los que se espera contar por parte de la institución, estudiantes y docentes.

Institución

Se espera que la Institución cuente con un aula que tenga computadores o tablets con el software de geometría dinámica GeoGebra, preferiblemente uno por dos estudiantes; es necesario tener un video-beam o televisor para proyectar las soluciones.

Estudiantes

- Los estudiantes requieren tener ideas intuitivas o reconocer la definición de algunos objetos geométricos como segmento, punto medio, perpendicularidad, circunferencia entre otras. Estas ideas se reconstruirán a medida que se vayan requiriendo.
- Los estudiantes deben hacer un buen uso de las herramientas y funciones de los computadores o las de las tablets.
- Los estudiantes deben redactar textos donde expliquen, ya sea el paso a paso de una construcción que realizaron, o una justificación de alguna solución a una tarea planteada.
- Los estudiantes deben reconocer el lenguaje simbólico usual en la geometría, y sus escritos darán cuenta de ello.
- Los estudiantes deben expresar y dar a conocer con fluidez y claridad sus ideas o planteamientos.
- Los estudiantes deben comprometerse a trabajar activamente con las diferentes tareas propuestas, siguiendo cada una de las instrucciones dadas.

Docentes

- Los docentes deben tener los conocimientos geométricos del contenido de la tarea.
- Los docentes deben tener buen uso del lenguaje matemático que explicarán a los estudiantes a medida que se van incorporando elementos teóricos.
- Los docentes deben orientar las discusiones que se presenten en las sesiones de clase, atendiendo las diferentes participaciones de los estudiantes, dando pautas de comportamiento y escucha para los estudiantes.

- Los docentes deben tener conocimiento sobre el uso de las herramientas tecnológicas y el programa de geometría dinámica.

4.2.4. Descripción de la trayectoria hipotética de aprendizaje:

Esta trayectoria hipotética de aprendizaje está conformada por siete tareas; con las cuales se busca generar incertidumbre, al ser tareas cuya solución no se da de manera inmediata. Sus posibles soluciones no son respuestas memorizadas y no dependen de procesos algorítmicos.

En la tabla 9 se da a conocer, de manera resumida, la descripción de cada una de las tareas que hacen parte de la trayectoria de aprendizaje de este trabajo de investigación.

Tareas	Descripción general de la tarea
Tarea 1: Nociones Básicas	Esta tarea tiene como propósito el establecimiento de algunos términos primitivos y definiciones básicas, reconocer sus representaciones gráficas, simbólicas y verbales. Los estudiantes, con la ayuda del software deben identificar herramientas que le permitan la construcción de estos objetos. Se espera que en la aplicación de la tarea se genere incertidumbre especialmente la relacionada con <i>camino desconocido o conclusión cuestionable</i> pues a partir de la exploración surgirán posibles conjeturas. (Ver planeación de la tarea en el anexo 13)
Tarea 2: Def. de Circunferencia	Esta tarea tiene como propósito establecer la definición de circunferencia. Para la solución de esta tarea los estudiantes deben construir en GeoGebra una circunferencia, y luego medir varios radios de esta; y con esta exploración proponer una definición para circunferencia; posteriormente se podrán en discusión las posibles soluciones y con esto llegar a una definición factible. Se espera que el tipo de incertidumbre que se genere sea <i>afirmaciones encontradas</i> . De acuerdo con el propósito de esta tarea las estudiantes ya tienen unas ideas o creencias sobre qué es circunferencia, lo que probablemente dé lugar a discusiones sobre dicha definición. (Ver planeación de la tarea en el anexo 14)
Tarea 3: Def. de punto medio	Para esta tarea se les presenta a los estudiantes la definición de punto medio, y ellos deben proponer ejemplos y no ejemplos de este objeto geométrico, justificando el porqué de cada caso. Posterior a esto y con ayuda de GeoGebra encontrar el punto medio de un segmento. Se espera que en la aplicación de la tarea genere se incertidumbre de tipo <i>afirmaciones encontradas</i> . Ya que se pondrá en juego creencias e ideas de las estudiantes sobre algunas definiciones lo que provocará contradicciones entre los diferentes puntos de vista. (Ver planeación de la tarea en el anexo 15)
Tarea 4: Def. de perpendicularidad	En esta tarea, el objetivo es que los estudiantes puedan establecer una definición de mediatriz. A los estudiantes se les presentan algunas imágenes de rectas, rayos y segmentos que son perpendiculares y otras que no son; a partir de ello deben clasificar dichas imágenes en dos grupos y explicar cuáles fueron los criterios para la clasificación, y establecer una definición de perpendicularidad. Se espera que la tarea genere incertidumbre de tipo <i>afirmaciones encontradas</i> , teniendo en cuenta que las estudiantes seguramente ya han trabajado con anterioridad la definición de perpendicularidad lo que implica que tengan creencias diferentes y puede que se genere discusión en relación a esta definición. (Ver planeación de la tarea en el anexo 16)
Tarea 5: Def. de mediatriz	Para esta tarea se le solicita a los estudiantes que con ayuda del software encuentren varios puntos que equidisten de los extremos de un segmento, para que observen que los puntos que cumplen dicha condición pertenecen a una misma recta. Posteriormente deberán explorar las características de la recta para establecer una definición de mediatriz. Se espera que en la aplicación de la tarea se genere incertidumbre de tipo <i>resultados no verificables fácilmente</i> . Posiblemente las estudiantes no lleguen a una solución pronta o que la solución a la que llegaron no sea la que esperaban. (Ver planeación de la tarea en el anexo 17)

Tarea 6: Tres punto-circunferencia	Esta tarea consiste en que dados tres puntos no colineales los estudiantes construyan una circunferencia y encuentren el centro, con ayuda de software de geometría dinámica, justificando su construcción. Se espera que en la aplicación de esta tarea se genere dos tipos de incertidumbre. Por un lado, <i>camino desconocido o conclusión cuestionable</i> ya que las estudiantes por medio de la exploración e indagación construirán sus conjeturas para llegar a una solución a la tarea, y antes las posibles soluciones o conjeturas las estudiantes presenten cuestionamientos. Por otro lado, se espera que se genere incertidumbre de tipo <i>resultados no verificables fácilmente</i> pues la solución a esta tarea posiblemente puede tardar y las soluciones a las que lleguen las estudiantes no sean las esperadas por ellas, o que sus resultados no sean fáciles de comprobar. (Ver planeación de la tarea en el anexo 18)
Tarea 7: Mediatrices del triángulo	En esta última tarea los estudiantes deben encontrar un punto que equidiste de los vértices de un triángulo, explicando y justificando como encontraron dicho punto. Esta tarea no requiere el uso de geometría dinámica debido que las tareas anteriores dieron elementos teóricos que permiten llegar a una solución. Se espera que al aplicar esta tarea se genere incertidumbre especialmente <i>resultados no verificables fácilmente</i> . Puede ser que las estudiantes lleguen a una solución pronta pues ya tienen ciertos elementos teóricos que les facilitaran el proceso, pero posiblemente los resultados a los que lleguen se les dificulten o no sepan cómo justificar o comprobar sus soluciones. (la planeación de la tarea en el anexo 19)
Tarea 8: cuestionario de percepción	En un folleto, friso, historieta o escrito las estudiantes deben plasmar sus percepciones con relación a: al trabajo realizado durante la implementación de la trayectoria hipotética de aprendizaje, el aporte en su formación, cambios en la metodología de clases respecto al año anterior, los valores que identificaron y se lograron promover durante las sesiones, los aprendizajes adquiridos, entre otros.

Tabla 5: Descripción de las tareas

A continuación, se presenta una de las planeaciones de las tareas realizadas por los autores. En esta se identifican: los conceptos que se trabajarán, el objetivo de enseñanza, las posibles competencias matemáticas y ciudadanas que se pueden desarrollar, el tipo de incertidumbre que se espera se presente y las posibles soluciones a la tarea.

Tarea 6: Tres puntos-circunferencia	
IDENTIFICACIÓN	
Conceptos por trabajar	Definición de mediatriz, circunferencia, punto medio, relación de perpendicularidad.
Objetivo(s) de enseñanza	Proponer una tarea en la cual las estudiantes utilicen las definiciones construidas durante la trayectoria hipotética de aprendizaje y permita evidenciar la adquisición de estas.
Competencias matemáticas y ciudadanas	Se espera que en la aplicación de la tarea se promuevan las siguientes competencias: Matemáticas: pensar y razonar, argumentar, representar. Ciudadanas: cognitiva, comunicativa e integradora.
Tipo de Incertidumbre	Se espera en esta tarea generar incertidumbre de dos tipos <i>camino cuestionable y resultados no verificables</i> . El primero, porque las estudiantes utilizarán un programa de geometría dinámica para solucionar la tarea y puede que durante este trabajo de exploración surjan posibles conjeturas que generen debate en la clase. El segundo, porque la solución que presenten las estudiantes puede que no sea la propuesta por los demás grupos o quizás no sepan cómo comprobar que la solución es correcta, por tal motivo puede que se genere algún tipo de discusión que implique la participación activa de las estudiantes.
Dificultades y soluciones posibles	Durante la solución de la tarea las estudiantes pueden presentar varias dudas respecto a la construcción de una circunferencia a partir de tres puntos no colineales, al igual que durante la localización del punto centro de esta. En este caso los investigadores estarán al tanto de la exploración que realicen las estudiantes para poder orientar las posibles soluciones que surjan en el momento.
RECURSOS	
Material que utiliza	<ul style="list-style-type: none"> • Guía #6: tres puntos- circunferencia • Un computador por parejas con el software GeoGebra.

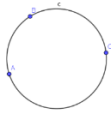
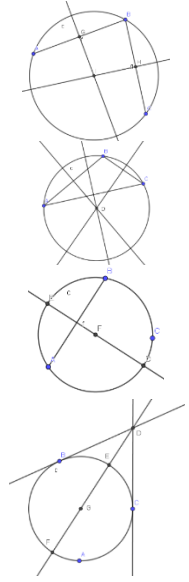
	• Video-beam.
DESCRIPCIÓN DE LA CLASE- GUÍA DE TRABAJO	
Con la tarea seis se pretende que las estudiantes resuelvan una situación donde el tiempo de solución es mayor que las actividades anteriores, debido a que aumenta el grado de complejidad y de incertidumbre. Esta consiste en que dados tres puntos no colineales construir una circunferencia y encontrar el centro de esta. Al finalizar el trabajo por parejas, se destinará un tiempo para la socialización y explicación de las posibles soluciones, donde se les pedirá a las estudiantes que hagan uso de los elementos teóricos estudiados durante las actividades anteriores.	
GUÍA DE TRABAJO	
Dados tres puntos no colineales	
<ol style="list-style-type: none"> 1) ¿Se puede completar la circunferencia? ¿Cómo se haría? 2) ¿Se puede encontrar el centro dicha circunferencia? 3) ¿Cómo lo encontró? 4) ¿Qué elementos teóricos permite justificar el procedimiento anterior? 	
POSIBLES SOLUCIONES	
<ol style="list-style-type: none"> 1) ¿Se puede completar la circunferencia? ¿Cómo se haría <p>Solución 1: Es posible que los estudiantes intenten de manera intuitiva realizar una circunferencia que una los tres puntos, esto quizás sin concebir que existe un punto centro para que la circunferencia quede bien construida.</p> <p>Solución 2: dados tres puntos no colineales A, B y C. En GeoGebra buscar la herramienta <i>circunferencia por tres puntos</i>, dar clic a cada punto y el programa automáticamente construirá la circunferencia.</p> 	
<ol style="list-style-type: none"> 2) ¿Se puede encontrar el centro dicha circunferencia? <p>Solución 1: Dados tres puntos no colineales A, B y C, construir la circunferencia c, construir el segmento \overline{AB}, construir el segmento \overline{BC}, hallar punto medio de cada segmento G y H, respectivamente, construir la mediatriz de cada segmento, trazar el punto de intersección J el cual será el centro de la circunferencia c.</p> <p>Solución 2: Dados los tres puntos no colineales A, B y C, construir los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$, trazar la mediatriz de los tres segmentos, hallar el punto de intersección el cual va a ser centro de la circunferencia.</p> <p>Solución 3: Dados los tres puntos no colineales A, B y C, unir los puntos A y B, formando el segmento \overline{AB}, hallar la mediatriz f, de este segmento, trazar puntos de intersección entre la circunferencia y la mediatriz construida D y E, hallar el punto medio de la cuerda \overline{DE}, este punto será el centro de la circunferencia.</p> <p>Solución 4: Dados los tres puntos no colineales A, B y C, construir la circunferencia c, trazar la tangente de la circunferencia que pase por el punto B, realizar lo mismo con el punto C, hallar el punto de intersección D entre las dos tangentes, hallar la bisectriz del ángulo $\angle BDC$, trazar punto de intersección entre la bisectriz y la circunferencia, puntos E y F, hallar el punto medio G, el cual será el centro de la circunferencia.</p> 	
<ol style="list-style-type: none"> 3) ¿Cómo lo encontró? <p>Se espera que las estudiantes utilicen argumentos para justificar como hallaron el centro de la circunferencia construida dados tres puntos no colineales</p>	
<ol style="list-style-type: none"> 4) ¿Qué elementos teóricos permite justificar el procedimiento anterior? <p>En esta pregunta se pretende que los estudiantes utilicen las definiciones construidas y revisadas durante la trayectoria hipotética de aprendizaje tales como (punto medio, perpendicularidad, mediatriz etc.)</p>	

Tabla 6: Planeación de la tarea 6

4.3.DESCRIPCIÓN DE LA APLICACIÓN DE LA TRAYECTORIA

La implementación de la trayectoria se llevó a cabo los lunes y viernes. Fueron 9 sesiones de 45 minutos y 2 sesiones ¹² de 90 minutos aproximadamente. Nueve fueron desarrolladas en el aula de sistemas y dos en el salón habitual. En la tabla 10 se hace una descripción de lo que se realizó en cada clase.

Tarea	Clase	Fecha / Duración	Descripción
Uno	1	9 de marzo/ 45 minutos	En esta primera clase se presentaron los dos profesores, se explicó la dinámica a implementar en las clases y las normas para el buen desarrollo de estas y se establecen las parejas de trabajo. Posteriormente, se dio inicio a la solución de la primera guía para el reconocimiento de las nociones básicas (punto, recta y segmento).
	2	13 de marzo/ 48 minutos	Esta clase se destinó para la socialización de las definiciones básicas: colinealidad, interestancia, equidistancia y congruencia de segmentos, y lograr que las estudiantes identificaran estos términos.
	3	16 de marzo / 45 minutos	En esta clase se inició la solución del segundo punto de la tarea 1 que consistía en construir un segmento congruente uno dado inicialmente.
	4	23 de marzo / 43 minutos	Iniciando esta clase se dio un espacio para que las estudiantes reconstruyeran lo que habían realizado en la sesión anterior. Posterior a este trabajo se socializaron dos posibles soluciones a la tarea asignada.
	5	06 de abril / 47 minutos	Se inició esta clase con la continuación de la socialización del ítem dos de la tarea 1, en esta clase una pareja de estudiantes presenta una tercera solución, la cual se pone en discusión ante toda la clase. Finalizada la discusión de esta tarea, se inicia con la solución de la tarea 2, que consistía en establecer la definición de circunferencia.
Dos	6	9 de abril / 90 minutos	Se presenta en esta clase la socialización y la discusión en relación con cuatro posibles definiciones de circunferencia que expusieron las estudiantes, y se establece una definición grupal de circunferencia.
Tres y cuatro	7	13 de abril / 50 minutos	Esta clase fue destinada para solucionar y socializar la tarea 3 y 4 relacionadas con la definición de punto medio y perpendicularidad respectivamente.
Cinco	8	16 de abril / 45 minutos	Se inicia la clase recordando las dos definiciones que se establecieron en la sesión anterior. Posterior a esto, se da inicio a la tarea 5 que pretendía encontrar características que cumplía la mediatriz de un segmento para establecer su definición.
	9	23 de abril / 47 minutos	Esta clase fue destinada para socializar las posibles soluciones a la tarea presentada en la sesión anterior, y establecer la definición de mediatriz de un segmento.
Seis y siete	10	27 de abril / 45 minutos	Para esta clase se explica y se inicia el trabajo a realizar para solucionar la tarea 6, que consistió en dados tres puntos no colineales encontrar una circunferencia y su centro que los contenga. En esta clase solo hubo se realizó trabajo por parejas.
	11	30 de abril / 90 minutos	Esta clase se destinó para la explicación y socialización de tres posibles soluciones a la tarea 6 encontradas por tres parejas de estudiantes, cada una de las parejas pasó al frente y presentaron su construcción realizada en GeoGebra que se proyectó en la pantalla del televisor. Finalizada la socialización, se les entregó a las estudiantes la tarea 7 que consistía en encontrar un punto que equidistara de los extremos de un triángulo. Para su realización no era necesario el uso del software, y cada grupo tenía que entregar una hoja con la solución y una justificación de esta. Cabe aclarar que esta sesión de clase no se desarrolló en el aula de sistemas sino en el salón habitual de clase.

¹² En la Institución donde se implementaron las tareas las horas de clase son de 45 minutos aproximadamente, la dos sesiones que tuvieron dos horas fue debido a que la profesora de la clase siguiente a la de geometría nos facilitó continuar con el trabajo que se venía haciendo con las estudiantes.

Ocho	12	7 de mayo/ 45 minutos	Esta clase se destinó para proponer a las estudiantes un cuestionario el cual busca conocer la percepción de las estudiantes frente a las tareas aplicadas en los días en los cuales los investigadores asistieron, también los cambios que observaron respecto clases anteriores a este proceso de investigación. La fecha de entrega se concertó con las estudiantes y el docente que labora en la institución.
------	----	--------------------------	---

Tabla 7: Fechas de implementación de la trayectoria hipotética de aprendizaje

4.4.CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Este trabajo de investigación tiene como hipótesis que: el diseño e implementación de tareas que generan incertidumbre en torno al proceso de argumentar promueven el desarrollo de competencias tanto matemáticas como ciudadanas. Por tal motivo, pretende encontrar qué tipo de competencias se desarrollan en la clase de geometría cuando el estudiante se enfrenta este tipo de tareas.

Con el fin de dar respuesta a lo mencionado anteriormente y poder contrastar los datos que surgieron de la recolección de información y la hipótesis que se planteó, se establecieron unas categorías preliminares de análisis que son el resultado de hacer operativo el marco teórico de esta investigación. Un primer grupo de categorías están relacionadas con las competencias ciudadanas; el segundo grupo con las competencias matemáticas y, finalmente, el tercero correspondiente a los tipos de argumentos que presentan los estudiantes.

Competencias ciudadanas

A continuación, se presentan el primer grupo de categorías de análisis, en relación con las competencias ciudadanas, atendiendo a los estándares básicos de competencias ciudadanas propuestos por el MEN (2006), pero también atendiendo los planteamientos de Ruiz & Chaux (2005). En la tabla 11 se encuentran doce categorías distribuidas en cuatro subgrupos de competencias.

De acuerdo con las descripciones de cada categoría o se les asignó un nombre o se dejó el nombre establecido por los autores respectivos.

Los códigos están formados por tres caracteres. Estas competencias inician con la letra C, haciendo alusión a las competencias ciudadanas. La segunda letra hace referencia al tipo de competencia: Cognitiva (C), Comunicativa (O), Emocional (E) e Integradoras (I); y la tercera letra hace referencia alguna letra que hace parte del nombre de la competencia.

Por ejemplo, el código CCP está haciendo alusión a:

C: competencia ciudadana

C: Cognitiva

P: Pensamiento crítico

Competencias ciudadanas (C)			
Tipo de competencia	Nombre de la Competencia	Indicador	Cód.
Cognitiva (C)	Proponer diversas perspectivas para entender un problema.	El estudiante menciona, expone o explica diferentes antecedentes para entender el problema.	CCD
	Establecer distintas maneras para resolver un problema.	El estudiante socializa, expone o explica más de una solución posible para un mismo problema.	CCR
	Evaluar las consecuencias de las posibles maneras de resolver un problema.	El estudiante menciona o presenta las ventajas y desventajas de las diferentes soluciones que se pueden asumir ante un problema.	CCE
	Tener un pensamiento Crítico	El estudiante cuestiona, valida o evalúa una solución, construcción, afirmación o información que presenta alguno de sus compañeros, el profesor o el mismo.	CCP
Comunicativa (O)	Escuchar activamente	El estudiante comprende lo que su compañero o el profesor está tratando de comunicar, lo cual permite evidenciar que está siendo escuchado, por medio del parafraseo, generando preguntas, refutando o complementado la información que el emisor transmite.	COE
	Ser asertivo para expresar ideas, necesidades e intereses	El estudiante comunica sus ideas de manera que los demás miembros de la clase no se sientan agredidos, utiliza un tono de voz moderado, palabras respetuosas y adecuadas para establecer una comunicación cortés y amable.	COA
	Expresar ideas por medio del lenguaje no verbal.	El estudiante realiza dibujos o hace movimientos con partes del cuerpo para comunicar sus ideas o planteamientos.	COL
Emocional (E)	Identificar y manejar las emociones propias.	El estudiante controla sus emociones (e.g. enojo, disgusto, rabia) ante situaciones de tensión y de mal entendidos, evitando generar cualquier tipo de violencia o malestar entre los miembros de la clase.	CEP
	Identificar y dar respuesta empática ante las emociones de los demás	El estudiante identifica emociones de las personas a su alrededor y se involucra con ellos para poder compartir, contribuir y actuar frente a estas emociones, ya sean positivas o negativas.	CED
Integradoras (I)	Contribuir por el bien común	El estudiante toma decisiones en las cuales prima el bien común.	CIM
	Aportar a la construcción de la convivencia y la paz	El estudiante interactúa con sus compañeros de manera pacífica, reconocer en el otro los mismos derechos y deberes. Respeta las normas establecidas en el aula de clase, cumple con los deberes o tareas asignados.	CIC
	Participar y tener responsabilidad democrática	El estudiante participa en la construcción de acuerdos, vela por el cumplimiento de las normas, entiende el sentido e importancia de las normas y los acuerdos para el bien de todos.	CIP
	Promover la pluralidad, la identidad y valorar las diferencias humanas.	El estudiante respeta y valora a sus compañeros y su profesor sin importar las características económicas, sociales, culturales, sexuales, étnicas de cada uno de ellos.	CIH

Tabla 8: Descripción de las competencias ciudadanas

Competencias matemáticas

Estas categorías están relacionadas a las competencias matemáticas a evaluar. La codificación también cuenta con tres caracteres. Iniciando con la letra M, que hace alusión a

competencia matemática, seguido por dos letras más, que hace alusión a dos palabras que conforman el nombre de la competencia. Por ejemplo, el código MRH se está refiriendo a

M: Competencia matemática H: Herramientas R: Recursos

MHR: Competencia matemática relacionada a la capacidad de usar recursos y herramientas tecnológicas.

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS (PISA) ¹³		
Nombre original según los autores	Indicador	Cód.
Pensar y Razonar matemáticamente	El estudiante se cuestiona y se responde con ayuda de las matemáticas, a su vez utiliza conceptos y definiciones matemáticos. Distingue los diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, ejemplos, conjeturas afirmaciones, etc.).	MPR
Argumentar	El estudiante construye y comunica argumentos matemáticos relacionados con la estrategia que utilizó para solucionar una situación dada.	MAR
Comunicar ideas usando las matemáticas¹⁴	El estudiante expresa e interpreta sus ideas y las de sus compañeros. Utiliza un lenguaje matemático, simbólico y formal, ya sea de forma verbal o escrita (utiliza conceptos propios de la geometría al comunicarse con sus compañeros).	MCO
Modelar	El estudiante construye modelos matemáticos a partir de una situación de la vida real y viceversa.	MMO
Plantear y resolver problemas	El estudiante plantea, analiza o resuelve diferentes tipos de problemas.	MPP
Representar	El estudiante decodifica, construye e interpreta información matemática relacionada con una situación dada.	MRE
Usar herramientas y recursos	El estudiante utiliza herramientas y recursos que permitan explorar situaciones dadas. En este caso software de geometría dinámica.	MHR

Tabla 9: Descripción de las competencias matemáticas

Tipos de argumentos

Para fines de este trabajo se tiene en cuenta lo propuesto por Flores et al. (2010) y por Bohórquez et al (2015), como tipos de argumentos que pueden elaborar estudiantes en edad escolar. Los tipos de argumentos que presentamos a continuación se clasifican de acuerdo con la propuesta de Harel & Sowder (1998, citados por Bohórquez, Guzmán & Parra, 2015); con algunas modificaciones tanto en la descripción con el nombre de cada tipo de argumento.

La codificación de cada categoría está conformada por tres caracteres. Inicia con la letra A que hace alusión a Argumentos. La segunda letra se relación con el tipo de argumento: Externos (E), Empíricos (M), Analíticos (A). La tercera letra hace referencia a una palabra que conforma el nombre del tipo de argumento.

¹³ El nombre de las competencias matemáticas no será modificado, excepto *comunicación* que para los autores de este trabajo será *comunicar ideas usando las matemáticas*.

¹⁴ La competencia comunicación y la competencia utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones. Se unificaron a consideración de los autores y avalado por la asesora de este trabajo.

Por ejemplo, el código AES está haciendo alusión a:

A: Argumento E: externo S: Simbólico

Clasificación de los argumentos			
Tipo de Arg ¹⁵ .	Argumento	Indicadores	Cód.
Externos (E)	Autoritarios (A)	El estudiante establece como argumento lo que ha dicho el profesor, su compañero, la información que encuentra en el libro de texto, o lo que observa en un software de matemáticas.	AEA
	Uso de símbolos (S)	El estudiante basa sus argumentos en el uso del lenguaje, la simbología, para con estos convencer a sus compañeros que algo es cierto por el hecho de hacer uso de estos elementos.	AES
	Recuento de un resultado (R)	El estudiante enfoca sus argumentos en la descripción de los procedimientos o algoritmos que realizó para encontrar una solución o resultado, o también la explicación paso a paso de una construcción que realizó en algún entorno de geometría dinámica.	AER
	Rigor en la escritura (T)	El estudiante establece argumentos basados en el uso de simbología matemática o reglas lógicas, sin que este esto llegue a relacionarse con la situación.	AET
Empíricos(M)	Ejemplificación	El estudiante utiliza o expone ejemplos gráficos, secuencias de dibujos o imágenes para presentar sus argumentos.	AME
	Explicación de casos	En los argumentos presentados se evidencia que el estudiante particulariza una situación o un posible caso sin llegar a una generalización. En este tipo de argumento no es necesario el uso de gráficos.	AMC
Analíticos (A)	Transformación	En el argumento presentado por el estudiante se evidencia el uso de ejemplos o representaciones y elementos del sistema teórico para transformar una información en una posible conjetura.	AAT
	Axiomático	El estudiante basa sus argumentos en el uso correcto de definiciones, propiedades o resultados matemáticos acordados anteriormente, haciendo inferencias y deduciendo información de estos.	AAA

Tabla 10: Descripción de los tipos de argumentos

¹⁵ Nombre abreviado de esa columna que significa: Tipo de argumento.

5. ANÁLISIS DE LOS DATOS

En este capítulo se presenta el análisis realizado a las tareas 1, 2 5 y 6 (Ver análisis didáctico en los anexos 13, 14, 17 y 18 respectivamente). Se escogieron estas tareas porque según consenso de los autores y la directora fueron las tareas en las cuales se logra evidenciar mayor desarrollo de las diferentes competencias. Para cada una de estas tareas se revisa el tipo de incertidumbre que generan con su desarrollo.

Para el desarrollo del análisis se presentan en total nueve fragmentos. Inicialmente se hace una descripción de cada fragmento para contextualizar al lector sobre lo sucedido en la clase de la cual fue obtenido. Posteriormente, se muestra la transcripción del fragmento en una tabla conformada por tres columnas: la primera corresponde al número de intervención, la segunda el nombre de la estudiante o el profesor que interviene y en la tercera la transcripción de lo que dijeron los participantes. Finalmente, se expone el análisis que se realiza a cada fragmento, en cuatro momentos. El primero, presenta el tipo de incertidumbre que se logra evidenciar. El segundo, está relacionado con las competencias matemáticas que se están promoviendo en la clase. El tercero, da cuenta de los tipos de argumentos que utilizaron las estudiantes. En el cuarto momento, se presentan las competencias ciudadanas que se logran inferir¹⁶.

Finalizada la revisión de los nueve fragmentos se presenta el análisis de los resultados obtenidos: Se muestra inicialmente una descripción cuantitativa de las veces que se presentaron las categorías de análisis y posteriormente posibles relaciones que se pueden inferir de los tres grupos de categorías. Se termina este capítulo con el análisis de la tarea ocho, relacionada con las percepciones que exponen las estudiantes sobre las experiencias, en relación con la trayectoria hipotética de aprendizaje en la que participaron.

5.1. ANÁLISIS DE LA TAREA 1: NOCIONES BÁSICAS

La tarea uno, de la trayectoria hipotética de aprendizaje, está conformada por dos ítems. El primero consiste en reconocer tres nociones (punto, recta y segmento) y cuatro definiciones

¹⁶ Los nombres de los estudiantes presentados en las transcripciones y análisis son seudónimos.

básicas (colinealidad, interestancia, equidistancia y congruencia de segmentos) (Ver anexo 13). El ítem dos tiene como objeto profundizar en la definición congruencia de segmentos. Para el desarrollo de esta tarea se usaron cinco sesiones de clase (de la clase 1 a la clase 5, ver transcripciones en los anexos 2 al 6).

En el análisis de esta tarea se centra la atención en el segundo ítem, debido a que este generó incertidumbre en las estudiantes, dado que las estudiantes presentaron tres maneras, no algorítmicas ni memorísticas, para resolverla lo cual generó diferentes discusiones entre las estudiantes.

Para el análisis de esta tarea se presentan a continuación dos fragmentos. Uno sucedió en la clase 4 y el otro en la clase 5. Se centra la atención en el segundo ítem de la tarea, debido a que este generó incertidumbre en las estudiantes, dado que ellas presentan tres maneras, no algorítmicas ni memorísticas, para resolverla, lo cual genera discusión en la clase. El tipo de incertidumbre que se puede identificar es *conclusión cuestionable*. Incertidumbre que se pretendía generar según lo propuesto en la planeación de la tarea (Ver anexo 13). En el análisis de cada fragmento se amplía esta idea.

Fragmento 1: Construcción de segmentos congruentes

Este fragmento se desarrolla en la clase cuatro (ver transcripción completa en el anexo 5) que tenía como finalidad socializar las posibles soluciones de segundo ítem de la tarea uno, que consistía en lo siguiente: *En GeoGebra, dado un segmento AB construir otro que sea congruente con AB. Explicar la construcción paso a paso*. Una vez realizada la tarea en parejas se presentan públicamente dos soluciones: la de Amelia junto con Bertha, y la de Sandra con su compañera Alexandra.

La primera pareja presenta su construcción, la cual consiste en utilizar la herramienta “*Segmento longitud dada*”, Amelia y Bertha copian la medida del segmento *AB* para obtener el segmento *CD*. (Ver la construcción paso a paso en el anexo 5). Luego se presenta la construcción de la segunda pareja. Esta se basa en el uso de la herramienta “*Traslación*” para obtener el segmento *CD*, a partir del movimiento del segmento *AB* en el plano. (Ver la construcción paso a paso en el anexo 5).

Luego de presentar las dos construcciones, el profesor es solicitado por Teresa quien le comenta algo en voz baja en relación con las soluciones dadas. Por solicitud del profesor, Teresa expuso su planteamiento a todo el grupo.

14	P. Diego	[Teresa alza la mano, para llamar al profesor y comentarle algo en relación con la expuesto por sus compañeras]. (Se dirige a todos) Su compañera me está comentado (...) y me está dando un planteamiento que ella encontró con respecto a las dos construcciones. Entonces vamos a escuchar lo que ella nos tiene que decir.
15	Teresa	Es que lo que pasa, mirando las diferencias en los procesos que hizo Sandra y Bertha (...). En el que hizo Bertha, hace lo que pide el ejercicio, que es hacer dos segmentos que sean congruentes, y pasó, y se movían [los segmentos] y todo. Pero cuando lo hizo Sandra lo que pasó fue que ella hizo fue como copiar el primer segmento más no hacer uno diferente que fuera congruente ¿Si me entienden? O sea, el primero esta como reflejado en el segundo, es como una copia, más no dos segmentos totalmente diferentes como lo pedía el ejercicio.

Tabla 11: Fragmento 1 de la tarea 1

El tipo de incertidumbre que se evidencia en este fragmento es *conclusión cuestionable*. Se puede observar que Teresa en la intervención [15] está cuestionando la solución que presenta Sandra junto con su compañera. Para Teresa, usar la herramienta translación es copiar el segmento; más no son dos segmentos diferentes. Por lo cual, no es correcta esta construcción. Según la interpretación que hace Teresa del ejercicio propuesto en la guía, esta solución no cumple las condiciones pedidas. Este tipo de incertidumbre permitió inferir el desarrollo de algunas competencias.

En cuanto a las competencias matemáticas, se resalta el desarrollo del pensamiento y razonamiento matemático (**MPR**) debido a que Teresa expone sus planteamientos haciendo uso de algunas definiciones. Adicionalmente interpretó las ideas matemáticas comunicadas por sus compañeras. También, hay indicios de que la estudiante está desarrollando una *comunicación haciendo uso de las matemáticas* (**MCO**) debido a que expresa sus ideas de manera oral haciendo uso de algunos términos matemáticos como segmento, congruencia y medida. Adicionalmente, se puede decir que ella logró comprender las ideas comunicadas por sus compañeras debido a que en su intervención da cuenta de ello.

Podemos inferir que Teresa está desarrollando la competencia argumentativa (**MAR**) ya que dio argumentos que le permitieron cuestionar y decidir no validar la construcción de su compañera Sandra. Según Teresa, ella no utilizó la medida como herramienta principal para la construcción, sino que utilizó la herramienta *Traslación*; pero esta no garantizaba que los segmentos sí fueran congruentes; además no atendía a lo que solicitaba la tarea.

En la intervención que hace Teresa se evidencia que plantea dos tipos de argumentos para cuestionar las dos construcciones propuestas por sus compañeras, *Autoritarios (AEA)* porque se basó en dos agentes de autoridad: lo expuesto por sus compañeras y adicionalmente en lo que observó en el software GeoGebra [15]. Teresa escuchó, observó e hizo un recuento de los procesos realizados en las dos construcciones (*AER*) para dar mayor veracidad a su argumento.

Respecto a las competencias ciudadanas se percibe que se generan acciones que dan a entender que se promueven cuatro de ellas: *El pensamiento crítico (CCP)*, por cuanto Teresa cuestiona y, de cierta manera, evalúa las soluciones que se presentan [15]. *La escucha activa (COE)*, porque utilizó el parafraseo de las ideas comunicadas por sus compañeras, demostrando que presta atención; esto se hace evidente [15] al mencionar parte de lo que hizo Sandra “*O sea el primero esta como reflejado en el segundo*”. *La asertividad (COA)*, debido a que la estudiante comunica su postura y desacuerdo con relación a una de las soluciones presentadas, utilizando un discurso que no genera ningún tipo de discordias ni rivalidades “*es como una copia, más no dos segmentos totalmente diferentes como lo pedía el ejercicio*”, además porque maneja un tono de voz sutil y amable. *La participación y la responsabilidad democrática (CIP)* en la medida en que Teresa participa dando su punto de vista y así contribuye en la solución de la tarea. Hay evidencia que nos permite decir que para ella tienen importancia las normas de la clase, por ejemplo, levantar la mano para participar. Esto se puede observar cuando ella pide la palabra llamando al profesor antes de hacer su intervención.

Fragmento 2: Otra manera para construir segmentos congruentes.

El fragmento que se presenta a continuación es la transcripción de un momento destinado al trabajo por parejas que sucedió en la clase 5 (Ver transcripción completa en el anexo 6), en la cual se da solución a segundo ítem de la tarea 1. En este interactúan tres personas, dos estudiantes y el investigador-observador, quien en la transcripción es el P. Jeisson.

Luego de que se presentarán dos posibles soluciones a la tarea al grupo, se solicita a las estudiantes, nuevamente, reunirse por parejas, para mejorar las soluciones presentadas por

sus compañeras o plantear una nueva solución que cumpliera con el objetivo de la tare: bajo cualquier condición los segmentos deben ser congruentes.

Los profesores hacen recorridos por el salón revisando qué soluciones proponen los grupos de trabajo. Una de las parejas que se encontraban realizando la exploración para solucionar la tarea, llama la atención de uno de los investigadores pues las estudiantes inician construyendo un segmento AB , luego usan la herramienta “*circunferencia centro punto*”, y construyen la circunferencia con centro en A y radio AB . Luego, deciden usar la herramienta *segmento longitud dada*, y construyen un segmento CD con la misma medida de AB . En ese momento el P. Jeisson hace un cuestionamiento: ¿para qué trazan la circunferencia si en la nueva construcción no fue usada? (Ver anexo 6).

Respecto a esta pregunta las estudiantes reformulan su construcción e inician nuevamente su proceso de exploración en el software. Es en este momento cuando una de las estudiantes construye la circunferencia utilizando uno de los extremos del segmento como centro de la circunferencia y radio desde el centro hasta el otro extremo del segmento. Luego construye un nuevo segmento teniendo un punto extremo en el centro de la circunferencia y otro extremo en un punto de esta. Paso seguido, utiliza la medida para comprobar que los dos segmentos tienen la misma longitud. A partir de esto surge la siguiente conversación:

59	P. Jeisson	¿Son congruentes?
60	Talía y Victoria	Pues sí.
61	Talía	Porque siguen teniendo la misma medida. Si lo movemos no son congruentes. ¡Sí! sí son congruentes
62	P. Jeisson	¿Cómo podemos, cómo sabemos, por qué esos dos segmentos resultan congruentes?
63	Victoria	Porque tienen las mismas distancias, ¿no?
64	P. Jeisson	Si, ¿pero por qué más? Sí, ahí medimos, y tienen las mismas distancias. ¿Sí no tuviéramos las distancias? [oculta las medidas] Listo no hay distancias ¿ustedes cómo le dirían a alguien que estos dos segmentos son congruentes?
65	Victoria	Porque digamos, que el círculo o sea (...)
66	Talía	Tiene una medida
67	Victoria	La circunferencia ya está en sí, ya tiene una medida. Y pues obviamente que los puntos, como el punto A esta ubicado en el centro de la circunferencia todos los puntos que inicien (...) todos los segmentos que inicien desde el punto A hasta alguna esquina de la circunferencia van a ser de la misma medida
68	P. Jeisson	A ok. ¿Ahí no necesitamos medidas?
69	Victoria	No necesitamos medidas para saber que son congruentes.
70	Talía	Como está en el centro de la circunferencia todos los lados van a tener su misma distancia.
71	P. Jeisson	Es decir que encontramos dos segmentos congruentes. ¿De una manera diferente?
72	Talía	Sí. Ahora pasar a exponer.

Tabla 12: Fragmento 2 de la tarea 1

En este fragmento, la tarea también genera incertidumbre de tipo *conclusión cuestionable*. Pero, a diferencia del fragmento anterior, en este caso quien cuestiona la construcción de Talía y Victoria es el profesor al preguntarles *¿para qué trazan la circunferencia si en la nueva construcción no fue usada?* Las estudiantes al evidenciar que son cuestionadas por el profesor deciden iniciar, nuevamente, la construcción. A medida que ellas la van realizando el profesor continúa haciéndoles preguntas; las estudiantes van respondiendo, apoyándose en lo que observan en GeoGebra. El cuestionamiento que realiza el profesor permite evidenciar en las estudiantes el desarrollo de las competencias que se mencionan a continuación.

En relación con las competencias matemáticas se favorece *la comunicación con las matemáticas (MCO)* ya que durante la interacción las estudiantes expresaron sus pensamientos en la solución de la tarea. Así mismo, tienen un diálogo en el cual se evidencia la comprensión de las ideas que pretendían comunicar entre ellas y el profesor. De la intervención [63] se puede inferir que se está promoviendo la competencia *pensar y razonar matemáticamente (MPR)* porque la estudiante pregunta y responde ante una situación, con ayuda de las matemáticas: Victoria se pregunta si al mover la circunferencia, los segmentos construidos siguen siendo congruentes. Este cuestionamiento es contestado por ella misma en la intervención [67]. Se puede identificar también que se desarrolla la competencia de *argumentar (MAR)* en el diálogo de las dos compañeras en la intervención [67] ya que a partir de la exploración y del razonamiento las estudiantes logran justificar por qué los segmentos son congruentes. A continuación, se presentan los diferentes tipos de argumentos utilizados por las estudiantes.

Victoria y Talía utilizan argumentos de *autoridad (AEA)* ya que inician con una construcción que les permite identificar que los segmentos son congruentes utilizando el software GeoGebra. Este trabajo las lleva a decidir que sin importar si se tienen o no medidas, en este caso específico, los segmentos construidos a partir de la circunferencia son congruentes, establecen una conjetura sin llegar a una demostración formal.

En el caso de Talía en la intervención [61] también utilizó un argumento *autoritario (AEA)* para corroborar su construcción, basándose en el software de geometría dinámica, al indicar inicialmente que los segmentos no son congruentes, pero al momento de mover la

construcción ve que sí lo son (*Si lo movemos no son congruentes. ¡Sí! sí son congruentes*). Talía vuelve a recurrir a este tipo de argumento [70] al parafrasear lo mencionado por su compañera Victoria en la intervención [67].

Así mismo se identifica el uso de un argumento *transformacional (AAT)* en la intervención [67] de Victoria al mencionar (*...todos los segmentos que inicien desde el punto A hasta alguna esquina de la circunferencia van a ser de la misma medida*), se evidencia que hace uso de algunos elementos del sistema teórico como punto, centro, circunferencia; tratando de proponer una conjetura en relación con la medida de los radios de una circunferencia.

También cabe señalar que Victoria quiere convencer tanto al profesor como a su compañera que sus planteamientos son correctos. Se infiere que para lograr tal objetivo la estudiante en su discurso hace uso de algunos elementos teóricos (medida, el punto A, centro de la circunferencia, segmentos), y con esto darle mayor validez a sus argumentos. Este argumento no se relaciona con los expuestos en las categorías de análisis preliminares. Por ende, a este tipo de argumento se le denominará: *Argumentos usando términos matemáticos (ATM)*¹⁷. Pero cabe aclarar, que no todos los términos que usa Victoria en su planteamiento son correctos, en la frase “esquina de la circunferencia” se evidencia un uso incorrecto de la palabra esquina.

En el caso de las competencias ciudadanas se encuentra que durante la discusión y especialmente en la intervención [67] se favorecen la competencia *pensamiento crítico (CCP)*, pues Victoria valida la construcción que realizó producto de la exploración y socialización con su compañera al momento de mencionar (*todos los segmentos que inicien desde el punto A hasta alguna esquina de la circunferencia van a ser de la misma medida*) Así mismo se evidencia el desarrollo de la competencia *escuchar activamente (COE)* al haber una participación y comprensión entre las dos estudiantes y el profesor. En el caso de Victoria y Talía una de ellas complementaba lo que la otra decía y viceversa como se puede evidenciar en [66], [67], [69], [70].

¹⁷ Para orientar al lector este nuevo tipo argumento (ATM) también se presenta en el análisis de algunos de los fragmentos que se presentaran más adelante.

De igual manera en el diálogo se promueve la *participación y la responsabilidad democrática (CIP)* ya que las dos estudiantes participan activamente en la construcción y solución de la tarea, velando por el cumplimiento de las condiciones de la tarea; en este caso que los segmentos construidos son congruentes.

5.2. ANÁLISIS DE LA TAREA 2: DEFINICIÓN DE CIRCUNFERENCIA

En la tarea uno, algunas estudiantes hacen uso de la idea intuitiva de circunferencia para dar la solución, pero no se había establecido una definición para este objeto geométrico. Por tanto, la tarea dos tiene como objetivo que las estudiantes, a partir de la construcción en GeoGebra de una circunferencia con centro en un punto P y radio cualquiera (ver descripción de la tarea en el anexo 14) y midieran algunos radios de la circunferencia y establecieran la relación entre los radios, para luego formular la definición de circunferencia.

La socialización de esta tarea se llevó a cabo en la clase 6 (Ver anexo 7). El profesor de la clase pidió a cuatro parejas que expusieran la definición que propusieron de circunferencia. A continuación, se presentan las cuatro definiciones¹⁸ que se establecieron en la clase:

D1. Circunferencia: Es una figura conformada por radio y un punto central. Conjunto de puntos que equidistan del centro.

D2. Circunferencia: Es el alrededor de un círculo, compuesto por muchos puntos y uno en especial, el punto centro. Comprende por radio, diámetro, cuerda y semicircunferencia etc.

D3. Circunferencia: Es una línea cerrada de forma curva, que conforma el contorno del círculo

D4. Circunferencia: Es una figura compuesta por puntos y se caracteriza porque todos los puntos tienen la misma distancia con respecto al centro.

El profesor terminó de anotar cada una de estas definiciones en el tablero (Ver anexo 7), y procedió a preguntarles a las estudiantes lo que aparece a continuación, en la intervención [38] de esta clase:

38	P. Diego	Listo, sí. Bien. Por favor cada grupo quiero que observe en el tablero las cuatro definiciones, construidas por sus compañeras. Quiero que me digan ¿sí hay similitudes? ¿Sí hay diferencias? ¿Sí están de acuerdo? Sandra y Alejandra por favor [Les llama la atención] ¿Sí están de acuerdo o no lo están, con las definiciones que están ahí? Y ¿Cuál es la que más se asemeja a la construcción que hicimos de circunferencia en la sala de sistemas? Listos, tómense unos minutos de su tiempo y léalas muy bien. Dos minuticos para que revisen.
----	-------------	--

Tabla 13: Intervención del profesor [38]

¹⁸ Estas cuatro definiciones fueron copiadas tal cual como las estudiantes las leyeron en la clase.

Como consecuencia de estas preguntas, se dan una serie de intervenciones y participaciones por parte de las estudiantes. Estas intervenciones están presentadas en tres fragmentos. En dos de ellos la tarea genera incertidumbre de tipo “*afirmaciones encontradas*”, tipo de incertidumbre que se esperaba de la tarea, según la planeación (Ver anexo 14). En el otro fragmento se considera que la incertidumbre que se genera es de tipo “*conclusión cuestionable*”. En el análisis de cada fragmento se explica de manera detallada estas afirmaciones.

Fragmento 1: Comparaciones entre las definiciones de circunferencia

Se presenta la intervención de dos estudiantes, que exponen algunos planteamientos para dar respuesta a una de las preguntas establecidas por el P. Diego en relación con las cuatro definiciones de circunferencia.

58	P. Diego	Listo, ok, gracias. ¿Señora? [Dando la palabra a Sonia, quien alza la mano para participar].
59	Sonia	Pues en la definición uno y la cuatro hay similitud. Ya que pues dice que conjunto de puntos que equidistan del centro, y pues abajo [Refiriéndose a la definición cuatro] dicen que tienen la misma distancia con respecto al punto centro. Pues es lo mismo, pero en la definición uno, ellas usaron una palabra, como un término más geométrico que en la definición cuatro, pero pues dicen lo mismo.
60	P. Diego	Tu estas diciendo que en la definición uno utiliza la palabra equidistan y en la definición cuatro la misma distancia. ¿Qué opinan frente a esto?
61	Sandra	Yo, yo, yo puedo decir. [Alzando la mano para participar]
62	P. Diego	Señora [Dándole la palabra a Sandra]. Gracias Sonia.
63	Sandra	Eh, profe es que lo que quiere decir también equidistan: es como hallar uno o más puntos o cosas a igual distancia en otro lugar determinado, sí. Entonces ahí lo que están diciendo pues es muy claro porque nos están diciendo que equidistan del centro, entonces tienen una misma distancia. Estoy de acuerdo con las dos [definición uno y cuatro].

Tabla 14: Fragmento 1 de la tarea 2

En este fragmento se logra evidenciar que el tipo de incertidumbre que genera la tarea es de tipo “*conclusión cuestionable*”. Se evidencia que Sonia y Sandra en sus intervenciones [59] y [61], respectivamente, presentan cuestionamientos con relación a la D1 y D4. Estos cuestionamientos apuntan a establecer comparaciones entre las definiciones. Sonia hace explícito que la D1 utiliza un término Geométrico “*equidista*”, a diferencia a la D4, que no hace uso de este término, pero sí de su definición. Sandra, por su parte explica la definición de equidistancia para luego decidir que está de acuerdo con las dos definiciones. Esta situación de incertidumbre permite tener manifestaciones de las estudiantes que dan indicios del desarrollo de algunas competencias.

En estas intervenciones hay información que permite inferir que se están desarrollando competencias matemáticas. En primera instancia, se está promoviendo *el pensamiento y razonamiento matemático* (**MPR**). Por un lado, Sonia presenta sus planteamientos haciendo uso del término equidistancia [59], para establecer la comparación entre las dos definiciones (D1 y D4). Por otro lado, Sandra explica lo que significa el término equidistancia [63] y luego concluye que las dos definiciones (D1 y D4) están diciendo lo mismo. Como segunda instancia, observamos que las dos estudiantes se están *comunicando matemáticamente* (**MCO**) al hacer uso del contenido y las definiciones que se dan en la clase. Pero, además se deduce que comprendieron el mensaje transmitido por sus compañeras cuando se presentaron las definiciones de circunferencia, debido a esto tanto Sonia como Sandra pudieron realizar su participación.

En tercera instancia, las dos estudiantes están *argumentando* (**MAR**) en la medida que Sonia presenta argumentos para explicar porque las dos definiciones tienen similitudes (*Pues en la definición uno y la cuatro hay similitud*), mientras que, Sandra lo hace para explicar por qué estas dos definiciones están bien (*Estoy de acuerdo con las dos [D1 y D4]*).

En la intervención [59] de Sonia se puede establecer que en su discurso presenta un argumento, en el cual hace *uso de términos matemáticos* (**ATM**). Tipo de argumento que también se evidencia en el fragmento anterior, y que no se logra categorizar y por ende se le asigna este nombre. Sonia, Está tratando de convencer a los integrantes de la clase que las definiciones D1 y D4 presentan similitudes en su escritura. Para decir esto, se basa en que la primera hace uso del término equidistancia y la segunda utiliza el significado de la definición de equidistancia (*Pues en la definición uno y la cuatro hay similitud...*) Es decir, para Sonia las definiciones implícitamente están refiriéndose a lo mismo.

Sandra, por su parte, presenta un argumento de *transformación* (**AAT**) para decir que las dos definiciones están bien, esto lo hace al querer generalizar la definición de equidistancia, haciendo uso de una implicación dentro de su discurso (*equidistan del centro, entonces tienen una misma distancia*) [63] tratando de establecer una posible conjetura.

En cuanto a las competencias ciudadanas hay acciones de las estudiantes que permiten inferir que se están promoviendo algunas de ellas. La primera está en relación con *tener un*

pensamiento crítico (CCP) en la medida que Sonia cuestiona la definición cuatro (definición que ella misma presentó) al mencionar que la definición uno usa términos más geométricos que en la definición que ella misma planteó [59] (*Pues es lo mismo, pero en la definición uno, ellas usaron una palabra, como un término más geométrico que en la definición cuatro*) dándole mayor validez a la primera definición. En cuanto a Sandra, ella primero realiza una explicación [63] para finalizar su intervención validando las dos definiciones.

Otra competencia que se está promoviendo es la *escucha activa (COE)*. Tanto Sonia como Sandra dan indicios que están comprendiendo y entendiendo lo que están escuchando, lo que les permite responder lo que el docente pregunta en relación con las definiciones de circunferencia.

En de las intervenciones de las dos estudiantes se infiere que hay una *comunicación asertiva (COA)* debido a que utilizaron palabras acordes a la situación, muchas de ellas son términos matemáticos que ayudan a que la participación sea más asertiva. Utilizan un tono de voz moderado y dirigiéndose a los demás de manera respetuosa. Esta manera pacífica de interactuar de ellas permite tener información para poder decir que están *aportando a la construcción de la convivencia* en el aula de clase (**CIC**). De igual manera se puede observar que las estudiantes realizaron sus intervenciones después de pedir la palabra y el profesor les da la instrucción de intervenir en las discusiones [58] [61] [62]. Estas acciones que dan indicios que ellas son conscientes del respeto y el cumplimiento de las normas para la participación en el aula de clase. Estas son acciones que del desarrollo de la competencia *participación y la responsabilidad democrática (CIP)*.

Fragmento 2: ¿Las partes de la circunferencia deben estar presentes en su definición?

En la socialización de las diferentes definiciones que se presentan para circunferencia, algunas estudiantes hacen mención de las partes de la circunferencia como elementos que deben estar presentes en la definición de este objeto geométrico. La discusión se centra en establecer si es necesario mencionarlos o no en la definición. Por ello el profesor inicia la discusión.

66	P. Diego	¿Es importante que estos elementos de la circunferencia estén en la definición?
Las intervenciones 67 a 70 no son fundamentales para este análisis.		

71	Talía	Eh, pues yo digo que en una definición debe estar como los puntos claves, que son como características ¹⁹ en sí de la definición de esa figura o a esa (...) si a esa figura. Pues, por ejemplo, digamos que es muy diferente círculo a circunferencia , así. Pues, y pues... Si ya definimos como radio , punto central , diámetro , todo eso son características que hacen diferenciar la circunferencia de otras figuras .
72	P. Diego	O sea ¿Si yo tengo una circunferencia, y no le hago el radio no es circunferencia?
73	Talía	No, o sea, sí, pero (...)
74	P. Diego	Pero me están dando a entender que eso es central [haciendo referencia a que las partes de la circunferencia son importantes en la definición] Voy a intentar hacer una circunferencia.
75	Talía	O sea, digamos que el radio, pues creo es la distancia, es la medida desde el centro hacia alguna longitud de la circunferencia, ¿no?
76	P. Diego	Lo que pregunto yo es que si necesariamente tenemos que mostrar esto para que sea una circunferencia [Refiriéndose a un radio de la circunferencia que dibujó en el tablero] [Algunas estudiantes responden que sí; mientras que otras contestan que no]. O ¿sin este radio ya doy por hecho que es circunferencia?
77	Jessica	Pues yo pienso, digamos que, omitiéndole el punto central y el radio, quitándole ese dibujo [hace referencia al radio que el profesor dibujó en la circunferencia]. Pienso que ahí se vería como un círculo, entonces pienso yo, que es importante solo (...) o bueno que es muy indispensable para que se entienda que es una circunferencia, el punto central.



Tabla 15: Fragmento 2 de la tarea 2

En este fragmento se logra evidenciar que el tipo de incertidumbre que genera la tarea es “*afirmaciones encontradas*”. Se puede evidenciar que hay reclamos por partes de las estudiantes para establecer si las partes de la circunferencia se incluyen o no en la definición. Por un lado, Talía y Jessica concuerdan que las partes deben estar en la definición, porque si no se mencionan se confundiría la circunferencia con otra figura, por ejemplo, el círculo, como lo menciona Jessica. Por otro lado, Talía no está segura. Porque para ella el radio es una es una distancia, explica que es la medida que hay del centro a un punto de la circunferencia. En las intervenciones [73] [75] se intuye que Talía no está de acuerdo que se incluya el radio en la definición. En estas afirmaciones se puede inferir que se está promoviendo el desarrollo de algunas competencias.

En relación con las competencias matemáticas se promueven cuatro de ellas. *La comunicación usando las matemáticas (MCO)*, debido a que las dos estudiantes expresan sus ideas y hablan haciendo uso de algunos términos propios de las matemáticas como circunferencia, radio, círculo, punto central entre otros [70] [75] [77]. Pero adicionalmente, en sus intervenciones se logra inferir que comprenden lo que su compañera o el profesor

¹⁹ Las frases resaltadas son establecidas por los autores, para destacar asuntos que se usan en el análisis posterior.

comunican, porque responden y dan cuenta al tema en cuestión. Esto último da evidencias que también se está desarrollando *pensamiento matemático* (**MPR**). Por ejemplo, se deduce, a partir de los planteamientos hechos por Talía, que ella reconoce el significado de una definición en matemáticas al decir que son características de una figura que permite diferenciarla de otras [71] (*son como características en sí de la definición de esa figura (...) que hacen diferenciar la circunferencia de otras figuras*) estando en concordancia con lo que el grupo $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$ considera como una definición: La definición da información importante sobre las propiedades fundamentales de un objeto que permite caracterizarlo y diferenciarlo de otro (Samper, Molina, & Echeverry, 2013).

En sus intervenciones Talía y Jessica *argumentan* (**MAR**) por qué las partes de la circunferencia deben o no estar mencionadas en la definición. La primera, utiliza un *argumento haciendo uso de términos matemáticos* (**ATM**) al querer convencer a sus compañeras que las partes de la circunferencia deben estar presentes en la definición, se piensa que hace uso varios términos para lograr convencerlas (*...es muy diferente círculo a circunferencia, así. Pues, y pues... Si ya definimos como radio, punto central, diámetro, todo eso son características*). Jessica usa un *argumento de ejemplificación* (**AME**) al remitirse en su intervención a las representaciones gráficas realizadas por el docente en el tablero. Adicionalmente, al referirse a los dibujos del profesor [77] (*... omitiéndole el punto central y el radio, quitándole ese dibujo...*) nos da indicios que se presenta un avance en el desarrollo de la *competencia de representar* (**MRE**) porque demuestra que interpreta la información matemática relacionada con las imágenes realizadas por el docente.

En relación con las competencias ciudadanas también se logran identificar comportamientos que dan cuenta del avance de tres de ellas. Al igual que los anteriores fragmentos presentados, aquí también se evidencia una *escucha activa* (**COE**) de las estudiantes. Por un lado, Talía responde la pregunta que comunica el profesor [66] [71]. Por otro lado, Jessica al parafrasea [77] algunas de las ideas que su compañera manifiesta en su intervención. Las dos lo hacen de manera *asertiva* (**COA**) al utilizar palabras acordes a la clase de geometría lo que permite que el diálogo sea respetuoso, sin llegar a generar agresión o hacer sentir agredidos a los demás miembros de la clase. En el caso de Jessica, ella usa palabras como (*... yo pienso...*) que hace que su intervención se preste para ponerla en discusión, al no ser un mensaje de

imposición. La intervención de las dos estudiantes nos permite decir que se está logrando promover la *participación (CIP) para la construcción* de conocimiento, acuerdos y toma de decisiones.

Fragmento 3: Partes de la circunferencia

En el siguiente fragmento se presenta la continuación de la discusión sobre si se incluye o no el radio y el punto central en la definición de circunferencia. A continuación, se muestran algunas intervenciones de las estudiantes.

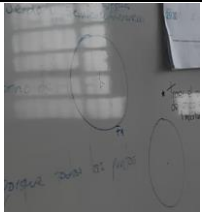
78	P. Diego	O sea que ¿esta figura 1 y esta, son objetos diferentes? [haciendo referencia a una circunferencia con un radio dibujado y otra sin algún radio] ¿Señora? [Dando la palabra a Amelia].	
79	Amelia	Pues serían iguales, y no habría la necesidad de hacerle ese segmento que hay del centro hacia cada esquina. Ya que nosotros podemos ver, o sea, si vemos el punto central ya podemos diferenciar que es una circunferencia a simple vista.	
80	P. Diego	Fíjense que lo que está diciendo Amelia es importante. Sí yo le dibujo o no el radio pues va a seguir siendo circunferencia. ¿Señora? [Dando la palabra a Jeimy, quien alzó la mano para participar].	
81	Jeimy	Pero es que dice que es una figura conformada por radio y punto central. O sea, lo que dice Amelia, con el punto central ya sabemos que tiene un radio, pero al igual eso hace parte de la circunferencia. Así no hagamos la línea del centro a un punto de la circunferencia igualmente o imaginariamente va a estar la línea del radio, o sea siempre va a estar en el medio.	
82	P. Diego	¿Siempre va tener el radio? Pero a lo que yo voy, es que ¿si es importante que esto esté? [la palabra radio en la definición][Se generan varios comentarios entre las niñas] ¿Deja de ser circunferencia?	
83	Talía	No, porque desde el punto central. Lo distinto sería que no tuviera nada, sería tomado como un círculo y una circunferencia.	
84	P. Diego	Teresa [Dándole la palabra a ella, quien alzó la mano para participar.]	
85	Teresa	Pues yo digo que no es necesario que el radio se ponga en la definición (...) porque como tal el radio es para intensificar y profundizar en el tema de la circunferencia, pero no para la definición, para entender. El radio es como una medida para poder hallar la longitud de la circunferencia, pero no es necesidad que este conformando la definición.	
86	P. Diego	Listo Teresa. Es decir, Teresa dice que no es necesario que este el radio. Va a seguir siendo circunferencia. O sea ¿que para que sea circunferencia yo tendría que mencionar todos los elementos? ¿Señora? [Dando la palabra a Patricia, quien tenía la mano alzada por arto tiempo, para pedir la palabra].	
87	Patricia	Yo digo que de pronto en la definición sería importante dejar solo el punto central, pero de pronto quitarle radio porque nosotros sabemos que siempre va a tener un radio, entonces si le quitamos el punto central ya no sería una circunferencia sino sería un círculo . Entonces yo digo que si sería importante dejar el punto central.	

Tabla 16: Fragmento 3 de la tarea 2

En este fragmento hay evidencias que la tarea también se genera incertidumbre de tipo “*afirmaciones encontradas*”. Amelia en su intervención [79] asegura que solo es necesario mencionar el punto central de la circunferencia, y que no hay necesidad de mencionar el radio. Jeimy [81] reclama implícitamente que sí se debe mencionar el radio. Porque, así se

dibuje o no, siempre va a estar en la circunferencia. Teresa y Patricia en sus intervenciones [85] y [87] respectivamente, refutan el planteamiento de Jeimy. Ellas reclaman que solo se debe dejar el punto central y no incluir el radio en la definición, tal como lo propone Amelia. En estas intervenciones se presenta una situación polémica, que permite observar que se están poniendo en juego varias competencias.

A partir de la información del fragmento anterior se puede inferir que se está promoviendo el desarrollo de cuatro competencias matemáticas. En primera instancia Amelia [79], Jeimy [81], Teresa [85] y Patricia [87] tienen una interacción donde se evidencia que hay una *comunicación haciendo uso matemáticas (MCO)* debido a que expresan sus ideas de manera verbal haciendo uso del contenido matemático. Pero, también podemos inferir que comprenden lo que sus compañeras o el profesor dicen cuando utilizan conceptos de las matemáticas. En el caso de Amelia, ella hace su intervención tratando de utilizar un lenguaje matemático, pero tiene dificultades con el significado de “esquina”, al relacionar este con la circunferencia *“y no habría la necesidad de hacerle ese segmento que hay del centro hacia cada esquina”*.

En segunda instancia, otra competencia matemática que se promueve en el aula es el *pensamiento y razonamiento matemático (MPR)*. En Amelia se evidencia cuando dice *“Ya que nosotros podemos ver o sea si vemos el punto central ya podemos diferenciar que es una circunferencia a simple vista”* está razonando al decir que solo es necesario ver el centro para establecer que el objeto es una circunferencia, así se dibujen o no los radios. Mientras que Jeimy, lo hace para objetar lo dicho por su compañera Amelia *“O sea lo que dice Amelia, con el punto central ya sabemos que tiene un radio, pero al igual eso hace parte de la circunferencia...”* Quiere decir que sí es necesario que el radio esté presente en la definición, ya que imaginariamente o no, la circunferencia siempre va a tener radio. Teresa también está desarrollando esta competencia al hacer explícito en sus palabras [85] que el radio es importante para abordar el tema de circunferencia, pero no es necesario ponerlo en la definición: *“(…) porque como tal el radio es para intensificar y profundizar en el tema de la circunferencia, pero no para la definición, para entender”*. Podríamos inferir que quiere hacer una definición minimal, según lo establecido por Calvo (2001). En cuanto a Patricia, también podemos inferir de su intervención que está desarrollando esta competencia, al

proponer que solo se deje el punto central en la definición, porque si se omite sería un círculo y no una circunferencia [87] “*entonces si le quitamos el punto central ya no sería una circunferencia sino sería un círculo*”.

Como tercera instancia, hay información dentro del fragmento que nos lleva a decir que las estudiantes tratan de identificar la información que se presenta en la representación gráfica del objeto geométrico para pasar a una representación verbal [79] [81] [85] [87], esto aludiendo al desarrollo de la competencia de *representar información matemática (MRE)*

El fragmento también nos brinda información que nos permite inferir que se está promoviendo el desarrollo de la competencia *Argumentativa (MAR)*, cuando las estudiantes, en sus intervenciones, tratan de explicar o justificar por qué es necesario omitir o no la palabra radio en la definición de circunferencia. Por un lado, Amelia y Patricia utilizan *argumentos de ejemplificación (AME)* al explicar su posición a partir de las representaciones gráficas hechas por el profesor en el tablero [79] [87]. Por otro lado, Jeimy y Teresa presentan un argumento *usando algunos términos matemáticos (ATM)* y así darles mayor veracidad a sus planteamientos. Por ejemplo, Jeimy hace referencia al radio de la circunferencia de manera más acorde “*la línea del centro a un punto de la circunferencia*” no emplea la palabra esquina, haciendo uso en su intervención de un lenguaje matemático. En el caso de Teresa, ella también hace uso de este tipo de argumento cuando se refiere al término radio, relacionándolo con una medida que es importante para calcular la longitud de la circunferencia, pero que no es necesario mencionarlo en la definición de esta.

Ahora bien, en cuanto a las competencias ciudadanas, cuando las estudiantes presentan sus explicaciones o argumentos están cuestionando, validando o evaluando la pertinencia de incluir o no ciertos elementos en la definición de circunferencia [79] [81] [85] [87], información que nos permite inferir que hay un avance en el desarrollo del *pensamiento crítico (CCP)*. En este fragmento también hay acciones que dan muestra de que se promueve una *escucha activa (COE)* en el aula de clase. Esto sucede, por ejemplo, cuando Jeimy en la intervención [81] parafrasea algunas de las ideas expuestas por su compañera Amelia: (*O sea, lo que dice Amelia, con el punto central ya sabemos que tiene un radio, pero al igual*

eso hace parte de la circunferencia.) Ella le demuestra a su compañera que la escuchó y que estaba tratando de comprender lo que ella dijo.

De la información del fragmento y de lo observado en la clase se puede decir que hay comportamientos de las estudiantes donde se evidencia el *manejo de las emociones propias (CEP)*. En la clase se presentan intervenciones opuestas por parte de ellas: unas comentan que sí es necesario incluir el radio en la definición, mientras que otras dicen lo contrario. De aquí se puede afirmar que se desarrolla esta competencia porque a pesar de las diferentes posturas ninguna estudiante da evidencia de emociones negativas como malgenio, rabia, envidia entre otras, cuando sus compañeras hacen sus participaciones. Este mismo argumento permite también decir que en el aula se contribuye y *aporta para la construcción de convivencia y paz (CIC)*, en el sentido que las cuatro niñas además de no generar emociones negativas están interactúan de manera respetuosa y pacífica.

La última competencia que se logra evidenciar que se está promoviendo es la *participación y la responsabilidad democrática (CIP)* puesto que las estudiantes con sus intervenciones [79] [81] [85] [87] contribuyen a la construcción de la definición de circunferencia. Cabe señalar nuevamente que ellas velan por el cumplimiento de las normas de participación y de prestar atención a sus compañeras, normas estipuladas por el profesor cuando se dio inicio con la implementación de la trayectoria de aprendizaje.

5.3. ANÁLISIS DE LA TAREA 5: DEFINICIÓN MEDIATRIZ

La tarea cinco de la trayectoria hipotética de aprendizaje está conformada por la representación de un segmento y cuatro ítems. El primero consiste en hallar un punto que equidiste de los extremos del segmento dado sin hacer uso de regla, compás o software de geometría dinámica. El segundo consiste en graficar y explorar la situación en el software de geometría dinámica; el tercero, haciendo uso del software, justificar o explicar si se puede encontrar un punto que equidiste de los extremos y el último ítem pregunta a las estudiantes si existe solo un punto o si existen varios puntos de ser así explicar cómo hallarlos (Ver anexo 17). Para el desarrollo de esta tarea se requirieron dos sesiones de clase (la clase 8 y la clase 9, ver transcripciones en los anexos 9 y 10).

El análisis de esta tarea está presentado en dos fragmentos. En el primero, se evidencia que la solución al primer ítem generó incertidumbre de tipo “*Resultados no verificables fácilmente*” lo cual se tiene contemplado en la planeación de la tarea [Ver anexo 17]. En el segundo, el tipo de incertidumbre que se generó es “*afirmaciones encontradas*”, el cual no se tenía previsto en la planeación de la tarea. En el análisis correspondiente a cada fragmento se dan más detalles de este asunto.

Fragmento 1: ¿Cómo llegar a la mediatriz?

Durante a aplicación de la tarea cinco, relacionada con la construcción de la definición de mediatriz, en un primer momento se da lugar a la exploración y análisis por parte de cada pareja de trabajo en busca de las posibles soluciones. Enseguida se realiza una socialización sobre las respuestas de las estudiantes frente a los ítems uno y dos mencionados anteriormente y que provocaron la participación de varias estudiantes.

218	Cecilia	Pues nuestro grupo. [Es interrumpida por el profesor ya que algunas estudiantes no hacían silencio]. Pusimos que no se sabe porque para poder hallar el punto medio se necesitan herramientas que nos den un resultado concreto.
219	P. Jeisson	O sea que tú ya identificaste algún punto ¿cuál?
220	Alexandra	Medio, el punto medio [respondiendo por su compañera Cecilia].
221	P. Jeisson	El punto medio, dime [Amelia levanta la mano]
222	Amelia	Nosotros dijimos que sí había posibilidad de tener un punto equidistante ya que, así no tengamos claro un punto medio, si (...) o sea nosotros nos debemos idear cómo construir ese punto centro.
223	P. Jeisson	Sí dime [señalando a Jenny que levanto la mano].
224	Jenny	Pues nosotras pusimos que sí existe un punto, pero... es muy difícil hallarlo sin estas herramientas. Digamos no tanto GeoGebra, pero sin la regla y el compás que son indispensables, pero digamos que sí se podría hallar así a simple vista infiriendo.
225	P. Jeisson	Niñas lo que les comentaba a varias cuando me estaban preguntando, es que la pregunta dice ¿existe un punto? [algunas estudiantes contestan sí] ¿Más no qué? [Sandra levanta la mano].
226	Sandra	Nosotros, bueno nosotras pusimos sí, sí porque nos da respuesta que, el punto medio, porque es la mitad del segmento. O sea (...)
227	Alexandra	Digámoslo, así como tú dijiste que existe un punto. Pero, o sea, no están siendo concretos de que sí, de que hay en la pregunta, ahí dice punto medio, no es así, si no que si existiera un punto equidistante entre el punto <i>A</i> y <i>B</i> . Y obviamente es el punto medio ¿y cómo sabemos que es el punto medio? Pues la mitad del segmento que pues es... [Lina levanta la mano]
228	P. Jeisson	¿Y acá? [Señala el grupo de Xiomara y Lina].
229	Lina	¡Eh! nosotras pusimos que sí, a pesar de tener, no tener [corrige] la herramienta nombrada anteriormente, el punto medio es parte del segmento que no se encuentra graficado.
230	Xiomara	Y nosotros también pusimos que, existe más de un punto que equidiste, se puede encontrar más de un punto equidistante porque no necesariamente debe estar en el segmento, aunque no significa que tenga varios puntos medios, va a haber solamente un punto medio. Pero puede haber varios puntos que equidisten por fuera del segmento.
231	P. Jeisson	Chicas, escuchemos esta afirmación que hace su compañera Xiomara. Vuélvela a decir, pero trata de decirla en palabras, en tus palabras.
232	Xiomara	Listo. Entonces nosotros lo que pusimos es que van a haber varios puntos equidistantes porque en un segmento pueden estar por fuera de él, ahí no especifican que necesariamente tienen que estar en la línea (...) en el segmento perdón.
233	P. Jeisson	Hasta ahí ¿qué opinan ustedes de esa afirmación? [Dirigiéndose a todo el grupo] que hay varios (...) Voy a retomar lo que ella dice, niñas hay que prestar atención. Listos. Hay un segmento

		¿existe un punto? Ustedes que dicen que sea equidistante [las estudiantes responden que sí] ¿Cuál es? [Las estudiantes responden “El punto medio”]. El punto medio [afirma lo que las estudiantes dicen] que como decía la compañera allá [señala una estudiante] que, aunque no esté graficado, lo deducimos, existe. Listos, entonces a la pregunta que esta respondemos, sí [Talía levanta la mano] dime.
234	Talía	Pues nosotras principalmente habíamos leído, pues nosotras, esto para llegar a la respuesta. Pues tuvimos dos ideas. Bueno, la primera idea fue (...) pues una idea que pensamos porque no habíamos leído como bien la pregunta. Habíamos dicho pues que no podíamos así como diferenciar un punto, el punto centro, porque no teníamos la herramienta necesarias para medir la distancia entre los distintos puntos. Pero después, de cómo pensarlo y pues de estudiar cómo (...), o sea como de verdad deducir como la pregunta llegamos a la conclusión de que si se puede porque... [señala a su pareja de trabajo Victoria]
235	Victoria	O sea que (...) como tal si existe un punto que (...), o sea, respondemos a la pregunta que en el segmento si existe un punto. Pero, que por herramientas o algo así no se puede identificar donde está el punto. Pero, sí existe.
236	Xiomara	¡Ay! yo quiero contradecir eso.
237	P. Diego	¡Perdón! Profesor Jeisson ¿tú quieres contradecir? [señalando a Xiomara]
238	Xiomara	Contradecir, respecto a lo que ellas dijeron de la herramienta en GeoGebra. Existe una función que uno apenas (...) uno apenas crea el segmento va a aparecer un punto en el centro. Una letra donde indica el punto medio. Es más en el caso (...) (la estudiante es interrumpida por varias estudiantes diciéndole que no, incluso el grupo anterior todas hablan al tiempo y el profesor calma el grupo)
239	Victoria	Es que nosotras no nos referimos a eso.
240	Lina	Pero Lala [seudónimo de su compañera Victoria] espera que estamos hablando
241	Xiomara	No díganlo ustedes que de pronto entendí mal [tono amable].
242	Talía	Es que digamos aquí en la pregunta decía como: sin usar regla, compas o geometría dinámica GeoGebra, o sea sin usar como tal la aplicación ¿Cómo podíamos deducir el punto medio? O sea, por eso estamos diciendo que sin las herramientas. Porque pues sí las tenemos. Pero, si no las ponemos en práctica no sabemos la medida de un punto hacia otro.

Tabla 17: Fragmento 1 de la tarea 5

En las intervenciones se puede evidenciar que el ítem uno de la tarea cinco, efectivamente generó incertidumbre de tipo “*resultados no verificables fácilmente*”. En relación con la pregunta ¿existe un punto que equidiste de los puntos A y B ? Las estudiantes establecen que sí existe tal punto; específicamente, dicen que es el punto medio del segmento. En las intervenciones de Cecilia [218], Alexandra [220], Amelia [222], Jenny [224] y Lina [229] explican que este punto no es fácil de encontrar sin las herramientas necesarias como la regla o el software. Amelia dice que hay que idearse la manera de encontrarlo. Jenny contesta diciendo, que se puede hallar infiriendo (...se podría hallar así a simple vista, infiriendo). Esta situación de incertidumbre permite identificar algunas evidencias para decir que la solución a la tarea está promoviendo el desarrollo de algunas competencias, entre ellas la argumentación.

Durante las intervenciones de las estudiantes se evidencia una *comunicación* expresiva y continúa *usando las matemáticas (MCO)*. En la participación de cada una se hace uso de un lenguaje matemático acorde a la situación. Las estudiantes utilizan en su intervención

conceptos vistos en sesiones anteriores (punto medio, equidistancia), que permiten comunicarse y darse a entender de manera clara con sus compañeras.

Así mismo se considera que se da lugar durante las intervenciones a *pensar y razonar matemáticamente* (**MPR**). Se puede evidenciar que las estudiantes se cuestionan frente a una de las preguntas planteadas en la tarea “*Sin usar regla, compás o Geometría dinámica (GeoGebra) ¿existe un punto que equidiste de los puntos A y B? Sí, No o No se sabe. Explique su respuesta*” Esto permite que cada pareja busque formas diferentes de hallar una respuesta. Podemos identificar que, a pesar de tener la condición de no utilizar alguna herramienta, las estudiantes se interesan en contestar si existe un punto o no. Prueba de ello se evidencia en la intervención [222] cuando Amelia menciona (*...o sea nosotros nos debemos idear como construir ese punto centro...*). En la intervención de Alexandra [227] se puede identificar que ella busca una respuesta relacionada con las matemáticas que le permita identificar que el punto que cumple con la condición es el punto medio y este punto está en la mitad del segmento (*...Y obviamente es el punto medio ¿y cómo sabemos que es el punto medio? Pues la mitad del segmento que pues es...*).

Varias de las participaciones se apoyan en el *uso de herramientas y recursos* (**MHR**) ya que, en la tarea se solicitaba a las estudiantes que miraran si era posible hallar un punto sin ayuda de regla, compás o software de geometría dinámica. Estos recursos fueron usados paulatinamente en la solución de la tarea con el fin de que las estudiantes buscaran diferentes estrategias de solución. De igual manera, incluir el software provoca que las estudiantes exploraran con mayor profundidad las funciones de GeoGebra [238], teniendo en cuenta que en un primer instante no tenían la posibilidad de utilizar alguno de los recursos para hallar los puntos que equidistaran de los extremos del segmento. Se destaca el reconocimiento por parte de una de las estudiantes de la importancia de tener recursos y el buen uso de ellos para examinar y solucionar la tarea [242].

Otra competencia a la que se da lugar es *argumentar* (**MAR**). En varias de las intervenciones las estudiantes utilizan sus argumentos para contestar las preguntas solicitadas en la tarea. Algunos de ellos son por medio de *explicación de casos* (**AMC**) ya que las estudiantes hablan de la situación particular y la solución de esta, ofreciendo una afirmación. Pero sus

argumentos no llegan a una generalización, Por ejemplo, en la intervención de Jenny [222] ella menciona que el punto existe, que es difícil hallarlo, pero que es algo que se puede inferir a simple vista. La estudiante resuelve una situación concreta pero no generaliza que esto pueda pasar en cualquier segmento dado. En las siguientes intervenciones se observa el mismo tipo de argumento [224] [227] [232] [234] [235].

En el caso de la intervención [230] se logra inferir que Xiomara presenta un argumento *transformacional (AAT)* porque se logra interpretar que la conjetura que trata de establecer es la siguiente “un segmento tiene solo un punto medio, pero hay varios puntos que equidistan de los extremos” en su discurso hace uso de elementos teóricos como segmento, punto medio y equidistancia relacionándolos para establecer su argumento. Este mismo argumento se presenta en la intervención [222] cuando Amelia dice (*... sí había posibilidad de tener un punto equidistante (...) así no tengamos claro un punto medio, (...) nosotros nos debemos idear cómo construir ese punto centro*) queriendo establecer la conjetura “que todo segmento tiene un punto medio”. En esta posible conjetura que dice Amelia se evidencia el uso de elementos teóricos.

Se considera que posiblemente se desarrollaron competencias ciudadanas. Se evidencia que las estudiantes recurren a *proponer diversas perspectivas para entender un problema (CCD)*. Es el caso de la intervención [218] la estudiante menciona que no se sabe si es posible cumplir con la tarea ya que no se tienen las herramientas. En otra intervención [222], Amelia menciona que sí existe el punto y que deben idear como construirlo, dando a entender que se debe buscar la manera posible para hallar ese punto. En la intervención de Talía [234] se evidencia la forma en que ella en un primer momento dio respuesta a la pregunta mencionando (*... una idea que pensamos porque no habíamos leído como bien la pregunta y habíamos dicho pues que no podíamos, así como diferenciar un punto, el punto centro, porque no teníamos la herramienta necesaria...*). Está indicando una perspectiva de la solución a la tarea a raíz de no haber leído bien. Luego en esa misma intervención, y con apoyo de su compañera, mencionan que a pesar de no tener las herramientas sí existe el punto [234] [235]. En estas intervenciones también se da lugar al *pensamiento crítico (CCP)*. Por una parte, en la intervención [234] de Talía, al cuestionar la manera como en un primer momento había abordado la tarea, y luego junto a su compañera [235] en la respuesta a la

que logran llegar. Así mismo, en la intervención [242] se evidencia como Talía está asumiendo un *pensamiento crítico* al mencionar que (*...sin las herramientas, porque pues si las tenemos, pero si no las ponemos en práctica no sabemos la medida, pues de un punto hacia otro...*) ya que evalúa de qué manera puede hallar el punto sabiendo que tiene las herramientas. Pero no las ponen en práctica lo que impide saber la medida del punto. Esta competencia se repite en las intervenciones de Xiomara [236] y [238] al mencionar que va a contradecir a partir de las funciones que ella encontró en GeoGebra y lo realiza respecto a lo que menciona su compañera Victoria en la intervención [235].

Otra competencia que logra evidenciarse es *escucha activa (COE)*. Durante las intervenciones el profesor asigna la palabra creando una cadena de participaciones. Estas son fluidas y en comparación de una y otra; las estudiantes no repiten las ideas mencionadas por alguna de sus compañeras. Esto permite inferir que ellas están atentas a las participaciones entre ellas, escuchando las respuestas que cada una ofrece para solucionar la tarea.


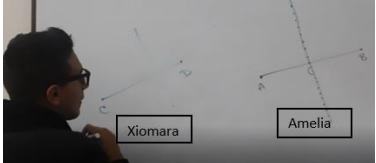
A pesar de algunos momentos donde se solicita a las estudiantes hacer silencio, se evidencia que se da lugar a que desarrollen una *comunicación asertiva (COA)*. Es decir, tuvieron en su participación la cortesía y amabilidad para expresar sus ideas. En la intervención de Xiomara [241]; luego de ser interrumpida por sus compañeras ella exhibe *control de sus emociones (CEP)* indicando y permitiendo que sus compañeras cuestionen su participación.

En las intervenciones se destaca la participación de varias estudiantes en la socialización del primer punto de la tarea lo que evidencia *participar y tener responsabilidad democrática (CIP)*. En este caso, las estudiantes levantan la mano para participar y es el docente quien da la palabra. En las intervenciones se evidencia como cada una de ellas hace su participación para contribuir en el desarrollo de la clase, pero también velan por el cumplimiento de las condiciones de la tarea para llegar a su solución [218] [242].

Fragmento 2: identificar las características de la mediatriz

En la sesión 9 (Ver transcripción en el anexo 10) en la cual se socializa con todo el grupo la tarea de la mediatriz, se da lugar a la intervención de varias estudiantes las cuales aportan en la construcción de la definición de mediatriz. A continuación, se muestran algunas

participaciones en las cuales se destacan algunas características que debe tener la mediatriz y que se surgieren con relación a los tres ítems de la tarea 5 (ver anexo 17).

15	P. Diego	Pregunta ¿Qué características tiene esa recta? [Copiando la pregunta en el tablero] Aquí ustedes dijeron no solo es un punto, son varios puntos y Alexandra dice “no profé pues esos varios puntos se me van a compartir en una recta”. La pregunta que yo les hago ahora es ¿Qué características tiene y debe cumplir específicamente esa recta? Jenny y Patricia [asigna la palabra a dos estudiantes que levantan la mano].	
16	Jenny	Pues para mí una de las características sería que al ser una recta se vuelve perpendicular.	
17	P. Diego	Pilas aquí [copia la palabra perpendicular en el tablero] aquí también lo habían dicho. Una característica es que esa recta va a ser perpendicular al segmento \overline{AB} ¿qué otra característica? Patricia [la estudiante que levanta la mano para pedir la palabra].	
18	Patricia	Que... eh... que forma ángulos de 90° .	
19	P. Diego	Bueno que sea perpendicular implica que los ángulos que se forman sean de 90° [copia en el tablero] Amelia [la estudiante que levanta la mano para pedir la palabra].	
20	Amelia	Pues yo además de eso diría que se deben componer por puntos los cuales deben estar en el centro del segmento.	
21	P. Diego	Bueno, vamos a desarrollar esa idea que está diciendo Amelia Por favor escúchenla para mirar de qué manera podemos comprimir o reducir esa afirmación. Vuélvela a decir por fa.	
22	Amelia	Que es, que se componen por puntos los cuales forman la recta que está en medio del segmento	
23	P. Diego	Está en medio del segmento [repitiendo lo último en la intervención de Amelia] ¿qué nos dice eso? Vayan pensando, que específicamente estén en medio del segmento. Y Xiomara [levanta la mano].	
24	Xiomara	Eh... no nada. No, no estoy de acuerdo. Pues o sea sí, yo no había entendido mal, porque puede que yo sea la equivocada. Según lo que habíamos leído en la guía de perpendicular , dice que no necesariamente tiene que estar, bueno, no se tiene que unir o intersecar en el centro, sino puede ser en cualquier parte de la recta desde que forme cuatro ángulos de 90 grados .	
25	P. Diego	Listo. Pilas aquí que vamos a poner en discusión, tanto lo que dice Amelia como lo que dice Xiomara y ustedes me dicen “estamos de acuerdo, o no estamos de acuerdo”. Amelia dice que específicamente esta recta [señalando la recta que había construido anteriormente] miren, miren aquí, miren porque yo voy señalando y yo no sé usted que está mirando. Amelia dice que específicamente estos puntos que conllevan a que sea una recta... tienen que pasar o van a estar en el medio del segmento ¿sí o no? que es una recta perpendicular, sí. Mientras que Xiomara dice que no está de acuerdo, porque no necesariamente... esa recta perpendicular pasa por el punto medio. Cierto. La pregunta que me surge es ¿están o no están de acuerdo? Puede que las dos tengan la razón o puede que una tenga la razón y otra no. (Jenny levanta la mano).	
26	Jenny	Pues yo sí estoy de acuerdo con eso, porque esa recta se formó a partir del punto medio. Entonces, si ponemos más puntos hacia arriba y hacia abajo, que son medios y se comprueba que son medios, si se realiza la recta pues, la recta va por todo el punto medio, está en la mitad de ese segmento.	
27	P. Diego	En este caso [señalando la construcción realizada en el tablero] o sea, que, si se forman todos los puntos, la recta va a pasar exactamente por el punto medio del segmento. Listo, Valeria [dando la palabra a una estudiante que levanto la mano]. Por aquí ya escuché que sí, que sí	
28	Valeria	Yo no estoy de acuerdo con el segundo [refiriéndose a la idea dada por Xiomara]	
29	P. Diego	No estás de acuerdo con el segundo, con este [señala la construcción].	
30	Valeria	O sea, sí, porque nosotras al momento de hacer esa construcción, o sea, como intentamos hacer eso, sin poder que un punto sea también medio, fuera de esa recta y no nos daba.	

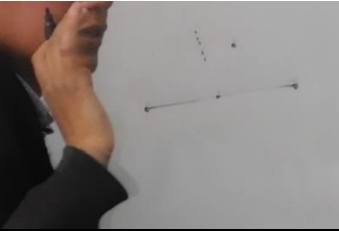
31	P. Diego	No les daba, o sea lo que dice Valeria es que ellas tenían construido un segmento, hallaron el punto medio y empezaron a encontrar así puntos, pero al poner otro aquí [construye una representación de lo que realizaron las estudiantes] y ya, incumplió con eso. Es decir que lo que dice Amelia, tiene la razón. Por aquí escuchaba que sí, que no.	
32	Xiomara	¡Ah! yo. Si, que tenía razón porque yo lo que no había tomado en cuenta (...) yo solo había pensado en las características de la perpendicularidad y no que estábamos formando el punto medio. Entonces sí tiene la razón.	

Tabla 18: Fragmento 2 de la tarea 5

En el fragmento anterior hay intervenciones que permiten establecer que el ítem tres de la tarea cinco genera incertidumbre de tipo “*afirmaciones encontradas*”. Jenny [16] afirma que una característica de la mediatriz es que debe ser perpendicular al segmento. Amelia en su intervención [20] complementa lo dicho por Jenny, tratando de decir que el punto medio debe estar en la recta mediatriz. Xiomara en la intervención [24] reclama que una recta perpendicular a un segmento no necesariamente pasa por el punto medio. Jenny en su intervención [26] reclama que la mediatriz se construyó iniciando por el punto medio, y luego poniendo más puntos (...ponemos más puntos hacia arriba y hacia abajo...). Valeria interviene [28] [30] y complementa la intervención de Jenny. Xiomara [32] luego de escuchar los reclamos hechos por sus compañeras, acepta que ella solo había tenido en cuenta las características de una recta perpendicular. Finalmente, Xiomara acepta que la mediatriz pasa por el punto medio. En esta situación de incertidumbre que se logra solucionar, hay intervenciones que permiten inferir el desarrollo de algunas competencias.

Con relación a las competencias matemáticas se puede decir que se promueve la *comunicación usando las matemáticas (MCO)* puesto que las estudiantes utilizan lenguaje matemático propio de la situación. Recurren a conceptos ya antes trabajados lo que permite que las ideas sean expresadas de manera clara. Prueba de ello son las intervenciones [16] [18] [24] [26] en las cuales las estudiantes destacan en su comunicación conceptos como perpendicularidad, recta, segmento, punto medio y ángulos.

De igual manera se infiere que las estudiantes desarrollan la competencia *pensar y razonar matemáticamente (MPR)*, esto se deduce a partir de las siguientes intervenciones [16] [22] [24] [26] en las cuales se evidencia que algunas de ellas cuestionan y responden apoyándose en las matemáticas haciendo relación con algunas definiciones ya conocidas por ellas. Es el

caso de Amelia en la intervención [16] al observar que unos puntos consecutivos forman una recta. Ella deduce que esta recta, a su parecer, es una recta perpendicular mencionando (*pues para mí una de las características sería que al ser una recta se vuelve perpendicular*) La estudiante, al evidenciar la forma que toma estos puntos lo relaciona con una recta que será perpendicular al segmento.

Así mismo se evidencia que se promueve la *argumentación (MAR)* puesto que las estudiantes en cada intervención construyen y comunican argumentos para expresar justificaciones o explicaciones durante la socialización que se estaba presentando. A continuación, se describe los tipos de argumento que fueron utilizados.

El argumento ejemplificación (**AME**) se evidencia en las intervenciones [16] [22] [26] ya que las estudiantes utilizan como ejemplo la representación realizada por el profesor en el tablero [15] para apoyar su argumento. De igual manera en la intervención [30] realizada por Valeria ella expresa *...al momento de hacer esa construcción, o sea, como intentamos hacer eso, sin poder que un punto sea también medio, fuera de esa recta y no nos daba*. Lo anterior significa que se basa en su ejemplo o representación para argumentar que al poner un punto que este por fuera de la recta no puede construir una recta. Esta intervención también se puede relacionar con un argumento autoritario (**AEA**) ya que Valeria se basa en la construcción realizada desde el software de geometría dinámica para justificar que al evidenciar que si mueve el punto fuera de esta recta ya no era equidistante.

También se considera la existencia de *argumentos basados en el uso de términos matemáticos (ATM)* por parte de Xiomara en su intervención [24]. Ella basa sus argumentos utilizando un lenguaje matemático haciendo referencia a la perpendicularidad (*...perpendicular, dice que no necesariamente tiene que estar, bueno, no se tiene que unir o intersecar en el centro, sino puede ser en cualquier parte de la recta desde que forme cuatro ángulos de 90 grados*) se considera que la estudiante recurre a elementos del sistema teórico, para lograr convencer a sus compañeras que una recta que es perpendicular a un segmento no necesariamente pasa por su punto medio. Pero en esta misma intervención hay un argumento *autoritario (AEA)* porque recurre a la guía de perpendicularidad para apoyar su argumento.

En cuanto a las competencias ciudadanas se infiere que se promueven las siguientes: Por una parte, el *pensamiento crítico (CCP)* ya que Xiomara en su intervención [24] cuestiona y evalúa lo que plantea su compañera Amelia, basándose en la guía que ya se había trabajado en la sesión de perpendicularidad (*...que yo sea la equivocada, según lo que habíamos leído en la guía de perpendicular, dice que no necesariamente tiene que estar, bueno, no se tiene que unir o intersecar en el centro, sino puede ser en cualquier parte de la recta desde que forma cuatro ángulos de 90 grados*). Se dice que tiene un pensamiento crítico pues compara lo que sucede con la recta perpendicular y con la mediatriz. Esta misma competencia se presenta en la intervención de Valeria [28] y [30], al momento de cuestionar y no estar de acuerdo con lo planteado por Xiomara, valiéndose de su construcción en el software de geometría dinámica.

Por otra parte, se evidencia que existe una *comunicación asertiva (COA)* entre las estudiantes ya que a pesar de no estar de acuerdo con algunos planteamientos el tono de voz utilizado es moderado y las apreciaciones fueron realizadas de manera respetuosa, cortés y usando los términos geométricos. Prueba de ello se puede observar en las intervenciones [24] [26] [28] [32].

De igual manera se presenta durante las intervenciones de las estudiantes la *escucha activa (COE)*. En el transcurso de la socialización se evidencia un hilo conductor de ideas desarrolladas por ellas. En algunas ocasiones se presentan refutaciones por parte de algunas estudiantes al mencionar que están o no de acuerdo [24] [26] [30] [32] lo que indica que están atentas y escuchando las intervenciones de sus compañeras y lo que expone el profesor.

En las intervenciones de Ximena [24] [32] hay evidencia que a pesar de mencionar que no está de acuerdo con el planteamiento de sus compañeras, ellas no presentan muestras de enojo, rabia o ni suben su tono de voz para refutar. Aspecto que permite inferir un control de emociones (*CEP*). Ximena también destaca que puede estar equivocadas, esto muestra el grado de respeto y colaboración en cada participación que ella hace.

También se evidencia la contribución por el bien común (*CIM*). Xiomara, teniendo en cuenta que sus compañeras dieron sus planteamientos en la intervención [32] menciona *...yo solo había pensado en las características de la perpendicularidad y no que estábamos formando*

el punto medio, entonces si tiene la razón. Deja atrás una postura individual y da lugar a la idea colectiva y común del grupo.

Por último, se evidencia que se promueve la *participación y responsabilidad democrática (CIP)* ya que durante la sesión se da lugar a varias intervenciones en las cuales las estudiantes construyen acuerdos, aportaron a la socialización con el fin de lograr llegar a una solución que convenza a sus compañeras.

5.4. ANÁLISIS DE LA TAREA 6: TRES PUNTOS-CIRCUNFERENCIA

La tarea seis de la trayectoria hipotética de aprendizaje está conformada por cuatro ítems. Con base a la siguiente indicación “dados tres puntos no colineales”, responder: primero si es posible construir una circunferencia a la que pertenezcan los tres puntos; segundo, si es posible encontrar el centro de la circunferencia; tercero, justificar cómo construye la circunferencia y el centro de ella y por último responder ¿Qué elementos teóricos se usan para llegar a la solución de la tarea?

Esta tarea se desarrolla durante la clase 10 que se destina para la explicación, exploración y trabajo en parejas. Los dos fragmentos que se analizan a continuación ocurren en la clase 11, la cual fue destinada para la socialización de las soluciones encontradas por las estudiantes (Ver transcripciones en los anexos 11 y 12).

En los dos fragmentos se evidencia que la tarea seis no solo genera incertidumbre de tipo “*conclusiones cuestionables*” como se tiene propuesto en la planeación (Ver anexo 18). Si no que también, se evidencian dos incertidumbres de tipo “*afirmaciones encontradas*”. En el análisis de cada fragmento se explica de manera detallada este asunto.

Fragmento 1: Encontrando el centro de la circunferencia

Esta sesión de clase se lleva a cabo en el aula donde regularmente las estudiantes reciben sus clases y es la continuación de la sesión anterior en la cual se da el espacio para que ellas, por parejas, exploraran y trataran de llegar a una solución.

En el fragmento se presenta la primera de las soluciones que surge durante la exploración y análisis a la tarea. La presentación de esta es realizada por Camila y Jenny (Ver anexo 12). A partir de esta exposición algunas estudiantes reaccionan y participan, aportando en la solución.


11	Camila	Bueno, nosotros primero ubicamos tres puntos en cualquier parte de la hoja [refiriéndose a una ventana nueva en GeoGebra]. Eh (...) después fuimos a buscar la opción de <i>circunferencia por tres puntos</i> y pues ahí nos daba la opción. Era como de dibujar la circunferencia en (...) con todos los puntos y ya después se formaba como tal circunferencia. (...) Después buscábamos la opción mediatriz y lo poníamos entre eh (...) [risas]	
12	P. Jeisson	Solo pícalos o dale clic en cada punto [al ver que la estudiante no logra realizar la circunferencia utilizando la herramienta].	
13	Camila	[Retomando] Bueno, entonces después buscamos la opción mediatriz y pues lo poníamos entre el punto, pues que estaba de extremo a extremo de la circunferencia y pues ahí nos daba la mitad del (...) de la circunferencia y ya. Después, poníamos el punto, un punto entre dos, pues en la mitad porque digamos nosotros como le dábamos la opción mediatriz entre cada punto, pues ahí todos iban a tener el centro, entonces ahí ya se ponía un punto x . Y (...) y ya.	
14	Jeimy	¿Lo puedes medir?	
15	P. Jeisson	¿Qué dices? [refiriéndose a Jeimy]	
16	Jeimy	¿Que, si lo pueden medir, lo del punto centro a un punto hacia afuera? Porque no, no sabemos si en realidad es. [Hallan las medidas desde el centro hasta cada uno de los puntos, Camila también hace el procedimiento].	
18	Camila	Bueno entonces ahí también podemos observar que todos tienen la misma distancia y pues si agrandamos o achiquitamos la circunferencia siempre va a tener... también, todos van a medir lo mismo.	
19	P. Jeisson	Listo, eh... ¿tú para que querías que lo midieran? [Refiriéndose a Jeimy, estudiante que había solicitado hacer esto].	
20	Jeimy	¡Ah! porque no está. Pues quería asegurarme que de que la medida que estaba dando si era igual en la circunferencia	
21	P. Jeisson	¿Y cómo te diste cuenta de que si era cierto? O sea, al medir que. ¿Porque te convence?	
22	Jeimy	Los puntos que ella había puesto al centro que tuvieran la misma distancia todos.	
23	P. Diego	Alguien más que quiera opinar frente a la construcción de sus compañeras. [Silencio] (...)	

Tabla 19: Fragmento 1 de la tarea 6

En este fragmento hay evidencias de que la tarea seis genera incertidumbre de tipo “*Conclusión cuestionable*”. Camila en sus intervenciones [11] y [13] presenta una posible manera de solucionar la tarea. Jeimy por su parte [16] cuestiona esta solución, al solicitar que se mida un radio de la circunferencia. Con este cuestionamiento Jeimy quiere estar segura que efectivamente la solución presentada cumpla con las condiciones establecidas de la

circunferencia. Esta situación de incertidumbre permite tener manifestaciones de las estudiantes que dan indicios del desarrollo de algunas competencias.

En relación con las competencias matemáticas se puede evidenciar que las estudiantes dan solución y justificación a la tarea con el uso del software de geometría dinámica y con base a esto explican la construcción realizada por ellas. De esta manera podemos inferir que la competencia *Usar herramientas y recursos (MHR)* se evidencia en las intervenciones [11], [13], [17], en las cuales las estudiantes utilizan las herramientas y funciones que ofrece la aplicación para solucionar la tarea y para comprobar que su construcción cumple con la condición de encontrar el centro de la circunferencia, intervenciones [17] y [18].

De igual manera se deduce que se da lugar a la competencia *pensar y razonar matemáticamente (MPR)*. En la intervención [16] Jeimy se cuestiona acerca de la construcción solicitando que, con apoyo de la herramienta *distancia* se verifique que la medida desde el punto centro de la circunferencia, hallado por sus compañeras, hasta los puntos no colineales esté a la misma distancia. Esto lo hace esperando una respuesta matemática apoyada por las herramientas del programa, la cual le permita comprobar y aceptar la solución expuesta por sus compañeras. Logra determinar que la distancia desde el centro a los puntos es la misma [20] [22]. Se evidencia que una de las competencias matemáticas que se desarrolla es *comunicar usando las matemáticas (MCO)*, ya que Camila durante sus intervenciones utiliza un lenguaje propio de la geometría refiriéndose a conceptos que permiten a sus compañeras entender el mensaje que quiere transmitir. Así lo podemos ver por ejemplo en las intervenciones [11], [13].

Por último, se identifica que se desarrolla la competencia *argumentar (MAR)* ya que Camila justifica con apoyo de argumentos que solución de la tarea está bien. Los tipos de argumentos que utiliza son, por una parte, *autoritarios (AEA)*, ya que se puede evidenciar que la justificación y solución que realiza se basa en lo construido en el software de geometría dinámica. Este tipo de argumento puede surgir al observar o explorar la solución de una tarea utilizando las herramientas de este. A partir de ello Camila basa su argumento [18] en su construcción. Por otra parte, se considera que usa un argumento basado en *recuento de un resultado (AER)* ya que durante su exposición comenta el paso a paso [11] [13] de la

construcción para llegar a la solución de la tarea, retoma aspectos centrales de su exploración para validar que la solución cumple con las condiciones propuestas desde el inicio.

En el caso de las competencias ciudadanas se promueven las siguientes: *pensamiento crítico (CCP)* ya que Jenny en la intervención [16] cuestiona la construcción elaborada por su compañera y le solicita realizar una acción con las funciones del software que le permitan evidenciar que lo que expone su compañera sucede en realidad. Se dice que se tiene un pensamiento crítico pues la estudiante no se convence fácilmente y pide pruebas para comprobar que las medidas fueran las mismas [20] y verificar la solución de sus compañeras.

Así mismo se evidencia que se favorece la *escucha activa (COE)*, ya que Jenny está atenta a la explicación de su compañera, lo que provoca reaccionar y solicitar que se verifique con las medidas, que el punto está a la misma distancia y que sea el punto centro cumpliendo la condición de la tarea [16], [20] y [22].

Se identifica que durante las intervenciones se da lugar a la *asertividad* en la comunicación de las estudiantes (**COA**). Se evidencia en el momento en que Camila responde y realiza lo que Jeimy [16] solicita (*¿Que, si lo pueden medir, lo del punto centro a un punto hacia afuera?...*) La reacción de Camila frente a esta solicitud es de respeto, ella contesta con un tono de voz moderado y cortés [18], en ningún momento se evidencia en este diálogo que alguna de las estudiantes se sienta agredida.

También se evidencia el desarrollo de la competencia *participar y tener responsabilidad democrática (CIP)* ya que Jeimy está cuidando que las condiciones y normas de la tarea se cumplan. Es decir, solicita y verifica que los radios de la circunferencia tengan la misma medida [16] [20].

También se puede decir que hay un manejo de emociones propias (**CEP**), en el momento en que Jeimy pide a Camila hacer la verificación de la construcción [16]. Ella no manifiesta ningún disgusto cuando su compañera hace la solicitud de medir para comprobar que la construcción es correcta.

Fragmento 2: ¿Se puede hacer la solución en papel?

Luego de presentar la construcción realizada por el grupo de Camila, se procede a socializar la solución encontrada por el grupo de Teresa. Las estudiantes explican otra manera de resolver la tarea planteada (Ver transcripción completa en el Anexo 12). Finalizada la intervención de este grupo el profesor promueve la discusión en el aula con la pregunta que se muestra en el siguiente fragmento.

32	P. Diego	¿Qué opinan frente a la construcción de su compañera [refiriéndose a la de Teresa] y a la construcción presentada por el grupo anterior? [Camila y Jenny].
33	Amelia	Yo pensaría que en este caso (...). ¡Eh! Sería como más, complicada de hacer, o sea, hallar. Sí por ejemplo lo hacemos en una hoja de papel. Digamos, sería como menos complicado, como hallar ese proceso que hizo Teresa. En cambio si lo hacemos con (...) según la teoría de Camila, entonces sería como más complejo hacerlo. Según mi opinión.
34	P. Diego	¿Más compleja esta que la anterior?
35	Amelia	No, la de Camila.
36	Teresa	¿Cómo así? ¿Te parece más difícil la de Camila?
37	Amelia	La de Camila, No más difícil. Sino que más complicada al momento de hacerlo en una hoja de papel
39	Martha	Pues... Yo quiero decir que los dos métodos estuvieron, en sí bien. Porque, por lo que usaron mediatriz. Qué pues como había dicho Teresa en la definición, pues de que estaban unidas como por un punto medio. Entonces eso nos ayuda a encontrar el punto de la circunferencia. Lo que dice Amelia de hacerlo con una hoja de papel, pues yo creo, que sí podemos usar cualquiera de los dos métodos de la misma manera. Porque igual los dos te van a llevar al mismo resultado de encontrar el punto medio. Entonces, se me hace que creo este [refiriéndose a la construcción de Teresa] es más fácil, sí. Pero lo que hicieron como Camila y Quiñonez también estuvo muy bien explicado y todo. Y pues los dos son muy fáciles de hacer. Así sea manualmente o a computador.

Tabla 20: Fragmento 2 de la tarea 6

Este fragmento permite observar que la tarea seis sí genera incertidumbre. Por un lado, la tarea genera en Amelia incertidumbre de tipo “*conclusión cuestionable*”. En la intervención [33] ella cuestiona nuevamente la solución presentada por Camila en el fragmento anterior. Amelia, asegura que la solución que expone Teresa es más fácil de hacer en una hoja de papel, mientras la solución de Camila es más compleja (*En cambio si lo hacemos con (...) según la teoría de Camila, entonces sería como más complejo hacerlo*). Por otro lado, la incertidumbre que se genera en Martha es de tipo “*afirmaciones encontradas*”. En la intervención [39] se observa que ella no está de acuerdo con el cuestionamiento de Amelia. En su reclamo Martha hace explícito que las dos soluciones son fáciles de hacer tanto en una hoja de papel con el software (*...Y pues los dos son muy fáciles de hacer. Así sea manualmente o a computador*). Estos dos momentos de incertidumbre, permiten identificar algunas evidencias para decir que la solución a la tarea está promoviendo la argumentación y el desarrollo de algunas competencias.

En relación con las competencias matemáticas se infiere el desarrollo de cuatro de ellas. Una de ellas es *pensar y razonar matemáticamente (MPR)*. Por un lado, en la intervención [33]

Amelia razona al explicar que una de las dos construcciones es más fácil de hacer si la tarea tuviese que hacerla en una hoja de papel (*...si por ejemplo lo hacemos en una hoja de papel, digamos, sería como menos complicado como hallar ese proceso que hicieron Teresa...*). Por otro lado, Martha en la intervención [39] también da cuenta de esta competencia, al cuestionar la participación de su compañera, y decir que las dos soluciones presentadas a la tarea se pueden hacer en la hoja y se obtendría el mismo resultado (*Lo que dice Amelia de hacerlo con una hoja de papel, pues yo creo que, si podemos usar cualquiera de los dos métodos de la misma manera*).

Una segunda competencia que se promueve tanto en Amelia como en Martha es la *representación matemática (MRE)*, en la medida que las dos interpretan la información presentada en las dos soluciones a la tarea que explicaron sus compañeras.

La tercera competencia que se está desarrollando es la *comunicación haciendo uso del lenguaje matemático (MCO)*. Esto al momento que Martha en su intervención [39] menciona algunos términos matemáticos como punto medio, circunferencia y mediatriz.

Martha *argumenta (MAR)* porqué los métodos utilizados por sus compañeras para solucionar la tarea están bien (*...Yo quiero decir que los dos métodos estuvieron, en si bien porque, por lo que usaron mediatriz...*). En su explicación [39] hace *uso del término matemático (ATM)* mediatriz, objeto geométrico que utilizan sus compañeras en la solución de la tarea. Martha trata de convencer a sus compañeras que por usar la mediatriz las soluciones están bien. En las dos intervenciones realizadas por Amelia [33] [37] no se evidencia que ella utilice algún tipo de argumento, solo menciona que una solución es más fácil de hacer en una hoja de papel que la otra, pero no justica o explica su planteamiento.

En relación con las competencias ciudadanas se logra evidenciar el desarrollo de seis de ellas. Una de ella es *evaluar las consecuencias de las posibles maneras de resolver un problema (CCE)*. Cabe aclarar que es la primera vez que esta competencia se evidencia en todo el análisis presentado hasta el momento. Como se puede observar en la intervención [33], Amelia está evaluando las soluciones presentadas y establece que una consecuencia de seguir la solución de su compañera Camila [37] es que es más compleja de hacerla en una hoja de

papel. Inferimos que ella está pensando en el momento que no se cuente con el software para la solución de tareas.

La segunda competencia que se promueve es el *pensamiento crítico (CCP)*. Tanto Amelia como Martha dan evidencias de esta competencia en sus intervenciones: Amelia, cuestiona la construcción realizada por su compañera Camila [3] pero de cierta manera aprueba la construcción de Teresa por ser menos complicada para hacer en una hoja. Por el contrario, Martha acepta que las dos construcciones están bien. Además, afirma que las dos se pueden hacer con el uso del computador o en la hoja de papel (*pues los dos son muy fáciles de hacer, así sea manualmente²⁰ o a computador*).

La *escucha activa (COE)* es la tercera competencia que se evidencia en el fragmento. Por un lado, Teresa, en su única intervención demuestra que ha escuchado a su compañera al preguntarle si la construcción de Camila le parecía más fácil [36]. Por otro lado, Amelia y Martha también dan indicios del desarrollo de esta competencia. Amelia, al responder [33] el cuestionamiento que hace el profesor [32] y al dar respuesta a la pregunta que le hace su compañera Teresa. Martha, por su parte al refutar el planteamiento de Amalia (*...Lo que dice Amelia de hacerlo con una hoja de papel, pues yo creo que, si podemos usar cualquiera de los dos métodos...*) [39].

La *comunicación asertiva (COA)*, es la cuarta competencia que se infiere. Amelia y Martha expresan sus planteamientos de manera tranquila, respetuosa sin hacer uso de palabras ofensivas o retadoras. El tono de voz utilizado por ellas es el ideal para lograr una comunicación agradable entre los integrantes de la clase. Adicionalmente la comunicación es más asertiva cuando Martha hace uso de elementos teóricos en su intervención [39].

Se evidencia que ni Amelia ni Martha dieron muestras de emociones negativas, como rabia o enojo, al tener dos posturas diferentes en relación con la solución de la tarea. Esto da muestra que hay un avance en el desarrollo *del manejo de las emociones propias (CEP)*, quinta competencia ciudadana que se promueve.

²⁰ Inferimos que cuando la estudiante se refiere a la solución que se hace manualmente está haciendo referencia a la hoja de papel que menciona su otra compañera.

Como sexta y última competencia se tiene *la participación y la responsabilidad democrática (CIP)*. Esto se establece en la medida que las estudiantes ayudan con sus participaciones y aportes a llegar a la construcción de acuerdos en relación con la solución de la tarea planteada.

5.5. ANÁLISIS DE LA TAREA 8: TRABAJO FINAL

Los autores de esta investigación quisieron conocer las percepciones de las estudiantes frente: al trabajo realizado, el aporte en su formación, cambios en la metodología de clases respecto al año anterior, los valores que identificaron y se lograron promover durante las sesiones. Esto es de gran ayuda para identificar si las estudiantes perciben el desarrollo de competencias ciudadanas, y la importancia de promover tareas diferentes a las usuales. Para ello se les solicita bien sea un folleto, un friso, una historieta o un escrito en el que expresen sus apreciaciones de las sesiones.

En los trabajos presentados por las estudiantes, se destaca el reconocimiento por parte de ellas de valores y aprendizajes colectivos como: aprender a escuchar a sus compañeras, respetar las opiniones, aportar con sus ideas en la creación de nuevos conceptos de geometría, estar de acuerdo o no a las intervenciones de las compañeras, pero siempre manteniendo el respeto y la tolerancia. A continuación, se presentan dos de las apreciaciones.

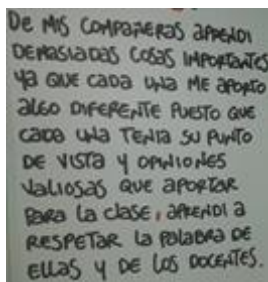


Figura 5: Tarea 8- Percepción #1

Esta apreciación da indicios que las estudiantes perciben acciones que guardan relación con algunas competencias ciudadanas. Por un lado, en la afirmación (... *cada una me apporto algo diferente puesto que cada una tenía su punto de vista y opiniones valiosas que aportar en la clase...*) se identifica que se ha promovido la competencia “*participar y tener responsabilidad democrática*” (CIP) en la medida que se percibe la importancia de la participación en la clase para la construcción de acuerdos. Por otro lado, la siguiente frase

(... aprendí a respetar la palabra de ellas y de los docentes) se logra relacionar con la competencia “aportar a la construcción de la convivencia y paz” (CIC) en la medida que la estudiante reconoce la importancia de cumplir con las normas establecidas en clase como por ejemplo el respeto por palabra del otro.

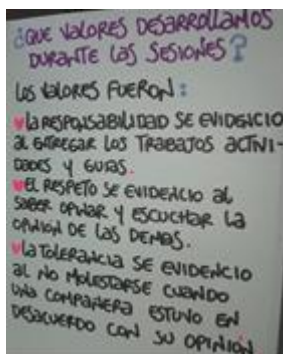


Figura 6: Tarea 8- Percepción #2

En esta otra apreciación se evidencian tres frases que se relacionan con algunas competencias ciudadanas:

- La primera frase, en relación con la competencia “participar y tener responsabilidad democrática” (CIP) cuando hace referencia a la responsabilidad en la entrega de los trabajos.
- La segunda, se relaciona con dos competencias: i) *ser asertivo para expresar ideas* (COA) y ii) *escuchar activamente* (COE). Esto se evidencia cuando menciona (...saber opinar y escuchar la opinión de los demás),
- La tercera, está relacionada con la competencia “identificar y manejar las emociones propias” (CEP). Esta se infiere de la frase (... no molestarse cuando una compañera estuvo en desacuerdo con su opinión).

Así mismo, se identifica en los trabajos que las estudiantes se sienten cómodas en cada sesión. Que las clases fueron más interesantes para ellas respecto a las de años anteriores en las que eran comunes solo explicar, asignar un taller y finalizar con una evaluación; además no se hace uso de herramientas tecnológicas, aspecto que llama la atención no solo por parte de las estudiantes sino también por las directivas de la Institución. Este tipo de trabajo permite a los

investigadores recibir de las estudiantes una aceptación positiva frente al trabajo realizado e inferir que, sí hay un impacto en la formación de ellas ya que se da lugar a la construcción del conocimiento por parte de ellas mismas, rompiendo un poco con lo convencional y generando mayor participación por parte de las estudiantes. Con el fin de evidenciar más trabajos de las estudiantes se invita al lector observar el Anexo 23 donde se pueden apreciar otros comentarios de las estudiantes.

6. RESULTADOS

A continuación, se presenta el análisis cuantitativo de los datos obtenidos a partir de los fragmentos analizados que se presentaron anteriormente. Para cada uno de los grupos de categorías se presenta una tabla de frecuencias absolutas²¹ con su respectivo diagrama de barras.

El análisis de los datos muestra que las tareas generaron diferentes tipos de incertidumbre en las estudiantes. De los nueve fragmentos analizados: en cinco de ellos se presentó incertidumbre de tipo *conclusión cuestionable*; en cuatro fragmentos se evidenció incertidumbre de tipo *afirmaciones encontradas*; y en uno se presentó incertidumbre de tipo *resultados no verificables fácilmente*.

Estas situaciones de conflictos, debates, cuestionamientos y reclamos permitieron, como lo menciona Zaslavsky (2005), fomentar la interacción social entre las estudiantes. Con esto se logró identificar acciones y manifestaciones que dan indicios que permiten inferir que con este tipo de tareas se estarían promoviendo algunas de las competencias matemáticas y ciudadanas, entre ellas la argumentación.

Con relación a las competencias matemáticas se logran obtener manifestaciones del desarrollo de cinco competencias: tres de ellas (*Pensar y razonar matemáticamente*, *Comunicar ideas usando las matemáticas y argumentar*) se logran tener evidencias en todos los fragmentos analizados. La competencia “*Usar herramientas y recursos*”, se evidenció en dos de los fragmentos analizados. Sin embargo, decidimos asignarle la máxima puntuación (9) debido a que en las tareas analizadas (1, 2, 5 y 6) fue necesario el uso del software GeoGebra para su solución o parte de ella. Explícitamente se está garantizando que las estudiantes utilicen una herramienta tecnológica en las tareas mencionadas. La competencia “*Plantear y resolver problemas*” se presenta permanentemente ya que durante la aplicación de la trayectoria hipotética de aprendizaje los estudiantes deben analizar, interpretar y

²¹ La frecuencia se asigna dependiendo en cuantos fragmentos se presentó cada una de las categorías de análisis.

resolver las tareas propuestas por los autores, asignándole también una frecuencia de nueve puntos.

Como se muestra en la tabla 21, en la competencia “representar” se logra tener algunas acciones que dan indicios de su desarrollo, pero con una frecuencia menor. Mientras la competencia “modelar” no se logra evidenciar en algún fragmento de los analizados, debido a que las tareas no requerían que las estudiantes propusieran modelos matemáticos.

Cód. De la competencia	Cantidad de veces que se evidencio
MPR	9
MAR	9
MCO	9
MMO	0
MPP	9
MRE	3
MHR	9

Tabla 21: Frecuencias de las C. Matemáticas

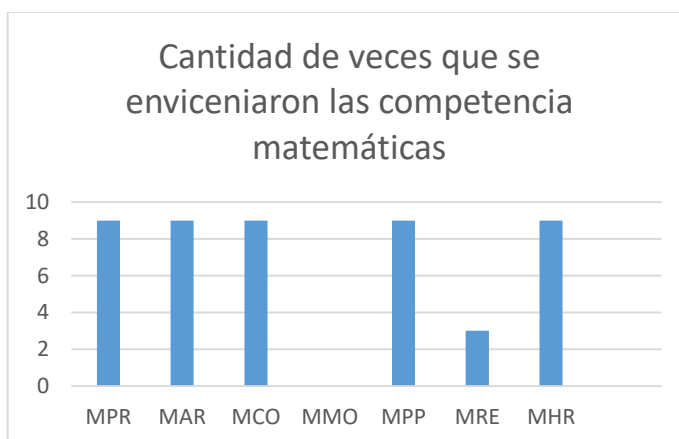


Figura 7: Diagrama de barras de las frecuencias absolutas de las C. Matemáticas

En relación con las doce competencias ciudadanas que se tuvieron en cuenta para este análisis, se logró evidenciar el desarrollo de cuatro de ellas: i) *Escuchar activamente* ii) *Participar y tener responsabilidad democrática* iii) *Tener un pensamiento crítico* iv) *ser asertivo para comunicar ideas*. Las dos primeras se evidenciaron con una y dos frecuencias más con relación a las otras dos competencias, respectivamente (Ver tabla 22).

Por un lado, la competencia *identificar y manejar las emociones propias*, también, a partir de las evidencias, se infiere que se está promoviendo. Aunque no se evidenció en todos los episodios analizados, sí se presentó en más de la mitad de estos. Por otro lado, el desarrollo de las competencias i) *Proponer diversas perspectivas para entender un problema* ii) *Evaluar las consecuencias de las posibles maneras de resolver un problema* iii) *Contribuir por el bien común* y iv) *Aportar a la construcción de la convivencia y la paz*, no se logró

evidenciar frecuentemente, las tres primeras solo se observaron una vez, mientras la cuarta se dio únicamente en dos ocasiones.

Sobre las competencias ciudadanas: i) *Establecer distintas maneras para resolver un problema* ii) *Expresar ideas por medio del lenguaje no verbal* iii) *Promover la pluralidad, la identidad y valorar las diferencias humanas*, si bien no se logró tener evidencias de su desarrollo en las tareas analizadas, no se descarta la posibilidad que se hubiese presentado en otros momentos de la aplicación de la trayectoria hipotética de aprendizaje, o en episodios que no registraron durante las grabaciones para la recolección de la información.

Cód.	Cantidad de veces que se evidenció
CCD	1
CCR	0
CCE	1
CCP	8
COE	9
COA	7
COL	0
CEP	5
CED	0
CIM	1
CIC	2
CIP	9
CIH	0

Tabla 22: Frecuencias absolutas de las C. Ciudadanas

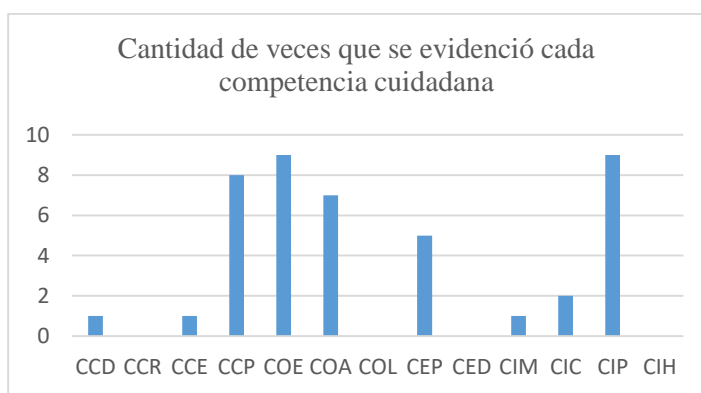


Figura 8: Diagrama de barras de las frecuencias absolutas de las C. Ciudadanas

Otro resultado de esta investigación es que ante las diferentes situaciones de incertidumbre que generaron las tareas, las estudiantes presentaron manifestaciones que permitieron inferir que argumentaron para dar solución a los conflictos, las dudas, las reclamaciones que tuvieron lugar en la solución de las tareas. El argumento que se basa en *usar términos matemáticos*, que no se tenía en la lista de categorías de los tipos de argumentos, y que se infiere de análisis de los datos es el que con mayor frecuencia es utilizado por las estudiantes. Debido a que se evidencia que ellas acuden comúnmente a las definiciones que se establecen en las clases y a usar el lenguaje matemático que utilizaban los profesores o el que se encontraban en las diferentes guías de trabajo. De la manera como se analizaron los datos este tipo argumento para este trabajo se define así:

Argumento usando términos matemáticos: En este tipo de argumentos el estudiante acude y hace alusión a términos matemáticos para darle mayor credibilidad a sus planteamientos y

con esto logra convencer a sus pares. Se clasificaría como un argumento externo, teniendo en cuenta la clasificación de los argumentos que proponen Bohórquez et al (2010).

No obstante, también se presentaron argumentos de tipo: *i) Autoritarios ii) Ejemplificación iii) Transformacional v) Recuento de resultados vi) Explicación de casos*; aunque estos fueron presenciados muy esporádicamente durante las soluciones a las tareas (Ver tabla 23)²².

Los argumentos basados en el *i) Uso de símbolos ii) Rigor en la escritura y iii) Axiomáticos* en ninguno de los episodios de clase analizados no se observa que las estudiantes recurran a estos argumentos. Una posible explicación a este suceso en cuanto al argumento de tipo simbólico es que las clases se centraron en estudiar conceptos y definiciones geométricas para establecer posibles conjeturas y no en las presentaciones simbólicas. En relación con el rigor en la escritura es que los argumentos generalmente fueron comunicados de manera verbal durante las socializaciones de las tareas, debido a que los investigadores centraron su atención principalmente en las diferentes interacciones sociales que se dieron en el aula en el momento que se presentaban discusiones o debates sobre las posibles soluciones a las tareas propuestas. En relación con los argumentos axiomáticos, consideramos por ser su primera experiencia con este tipo de tareas las estudiantes aún no cuentan con conocimientos matemáticos necesarios para hacer deducciones formales como lo exige este tipo de argumento.

Cód.	Cantidad de veces que se evidencio
AEA	4
AES	6
AER	2
AET	0
AME	3
AMC	1
AAT	3
AAA	0
ATM	6

Tabla 23: Frecuencias absolutas de los tipos de argumentos

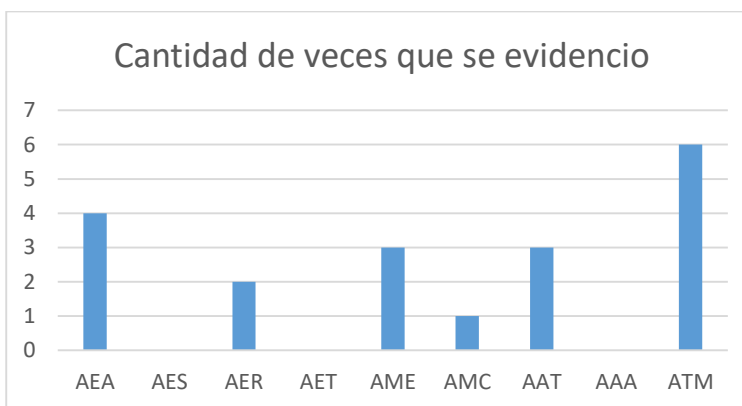


Figura 9: Diagrama de barras de las frecuencias absolutas de los tipos de argumentos

²² En esta tabla de frecuencias absolutas se incluye el tipo de argumento “uso de términos matemáticos” que se establece en los análisis y que no se había tenido en cuenta en las categorías preliminares.

De los nueve fragmentos analizados y de la información cuantitativa que se presentó inferimos cuatro posibles relaciones entre las categorías que se evidencian en este análisis. A continuación, se presenta una descripción de cada una de ellas.

- El hecho que las estudiantes en sus intervenciones hicieran uso de un lenguaje matemático para comunicar sus ideas y planteamientos implica que se promueva en el aula de clase una comunicación asertiva. Es decir, desarrollar la habilidad para comunicarse usando las matemáticas ayuda a promover tal comunicación. Esto se puede decir debido a que en los siete episodios analizados donde se evidenció la competencia COA también se presentó la competencia MCO.
- Se evidencia también que cuando las estudiantes escuchan activamente los planteamientos, explicaciones o intervenciones que realizan sus demás compañeras, en la clase de geometría desarrollan razonamiento matemático; de esto se infiere que si las estudiantes no prestan atención y no escuchan a sus compañeras muy posiblemente el no van a responder, comprender o cuestionar los procesos, construcciones o los conceptos matemáticos que se presentan en las participaciones de clase. En todos los fragmentos analizados se evidenció la competencia COE y también la competencia MPR. Información que nos permitió establecer dicha relación.
- Se puede decir que cuando se promueve el desarrollo del pensamiento crítico en la clase de geometría muy posiblemente también se promueve la argumentación. En ocho de los nueve análisis realizados se observó que cuando las estudiantes dan muestra de CCP así mismo se presenta MAR. Ellas exponían argumentos que les permitían comparar, refutar, cuestionar, validar o evaluar la información presentada.
- Finalmente, se puede inferir de los datos analizados que cuando las estudiantes, ante las diferentes tareas razonan, argumentan y comunican sus ideas haciendo uso de las matemáticas se están comprometiendo con el desarrollo de la clase y a la vez contribuyendo para llegar a acuerdos en relación con las posibles soluciones de las tareas. Esto se asume en la medida que, en los fragmentos analizados, se observó que siempre que se presentan estas tres competencias matemáticas (MPR, MAR, MCO) también se presenta la competencia ciudadana CIP. Lo que lleva a inferir que el desarrollo de estas tres

competencias matemáticas promueve la capacidad en las estudiantes para participar y tener responsabilidad democrática en la clase de geometría.

7. CONCLUSIONES

En este capítulo damos a conocer las conclusiones del estudio de investigación en relación con tres asuntos: i) La pregunta de investigación y el desarrollo de los objetivos ii) La contribución de este trabajo a nuestra formación tanto personal como profesional iii) La continuidad de esta investigación en futuros trabajos de maestría o doctorado.

El objetivo de este trabajo investigativo es identificar por un lado las competencias matemáticas y ciudadanas y por el otro, los tipos de argumentos que se promueven en el aula de geometría cuando se proponen tareas que generan incertidumbre en los estudiantes. Por lo anterior, podemos decir que las tareas diseñadas e implementadas permitieron identificar manifestaciones de las estudiantes que dan indicios de que este tipo de tareas estarían promoviendo el desarrollo de competencias y permitiendo que las estudiantes realicen justificaciones o explicaciones basándose en diferentes tipos de argumentos.

En relación con las tareas, se considera que se logró generar incertidumbre en las estudiantes. Por un lado, según las percepciones de los investigadores en la experiencia de aula las razones son: primero, al ser tareas que en su mayoría requirieron del uso del software GeoGebra, generaron en ellas curiosidad por explorar, hacer construcciones, proponer y verificar planteamientos propios y de sus compañeras. Segundo, permitieron a las estudiantes indagar y comprobar hallazgos que no dependen de procesos algorítmicos ni memorísticos. Tercero, las estudiantes, en varias tareas, no llegaron a soluciones inmediatas, lo que generó que gastaran más tiempo de lo planeado. Cuarto, las posibles soluciones generaron momentos de conflicto y debate que permitieron llegar a establecer acuerdos entre ellas. Por otro lado, el análisis de los datos muestra que las tareas generaron incertidumbre en las estudiantes principalmente de tipo *conclusión cuestionable* y *afirmaciones encontradas*. Estas situaciones de conflictos, debates, cuestionamientos y reclamos permitieron, como lo menciona Zaslavsky (2005), fomentar la interacción social entre las estudiantes. Con esto se logró identificar acciones y manifestaciones que dan indicios que permiten inferir que con este tipo de tareas se estarían promoviendo algunas de las competencias matemáticas y ciudadanas, entre ellas la argumentación.

El análisis de este estudio nos dio indicios que el desarrollo de algunas competencias matemáticas posiblemente favorece o contribuyen el desarrollo de otras competencias ciudadanas, o viceversa. Por ejemplo: i) Desarrollar la competencia que permite transmitir información haciendo uso de las matemáticas contribuye a que en el aula se promueva una comunicación más asertiva. ii) Promover la escucha activa en la clase de geometría aporta para que se fomente el desarrollo del razonamiento matemático. iii) El desarrollar la capacidad para pensar críticamente ayuda a mejorar la capacidad para argumentar. iv) Las tres competencias matemáticas que se mencionaron en los ítems anteriores son necesarias para que el estudiante pueda participar y contribuir en la construcción del conocimiento y así desarrollar la competencia de participación y tener una responsabilidad democrática dentro del aula.

En cuanto a la contribución personal y profesional esta investigación permitió a los investigadores reflexionar sobre su práctica docente, su labor en el aula y especialmente la creación y aplicación de tareas que permitan la participación del estudiante en la construcción de su propio conocimiento. Se identificó la gran responsabilidad que como profesores existe para captar el interés y atención de las estudiantes en aprender, involucrando herramientas y recursos diferentes a los usuales, mostrando al estudiante que puede existir otra manera de aprender, diferente a la memorización y repetición de definiciones. Así pues, la creación de tareas que generaran incertidumbre fue un reto para los autores de este trabajo. Pues, favorecer este tipo de tareas iba a permitir a las estudiantes producir argumentos sustentados desde diferentes bases que validaran el trabajo realizado, contribuyendo no solo en este aspecto sino también en el desarrollo de competencias matemáticas y ciudadanas.

Respecto a la formación de ciudadanos se considera que existió un interés en indagar y conocer más sobre este aspecto, lo cual permitió identificar la importancia de formar en la escuela futuros ciudadanos comprometidos con los deberes que exige una sociedad, a su vez con valores y actitudes que fomenten la buena convivencia, empezando desde el aula donde comúnmente comparten.

A nivel personal los autores de esta investigación asumieron con responsabilidad, compromiso y dedicación las actividades específicas para desarrollar este proyecto de la

mejor manera posible. Adoptaron madurez frente a la toma de decisiones que aportaran significativamente en cada apartado de este trabajo.

En cuanto a la continuidad de esta investigación, permitió reflexionar acerca de las tareas que el profesor construye para aplicar en el aula. En este documento se presentó un ejemplo de tareas²³ que promueven el desarrollo de competencias tanto ciudadanas como matemáticas. Por lo tanto, esta propuesta es una invitación a los lectores a reflexionar acerca de la manera de promover estas, pero compartimos una inquietud sobre ¿qué otros tipos de tareas se pueden diseñar e implementar para promover el desarrollo de estas competencias?

De igual manera y con base al análisis en el cual se logró evidenciar en este estudio cuáles competencias fueron las que más se favorecieron durante las sesiones, sería pertinente indagar acerca de la posibilidad de desarrollar aquellas competencias que quizás no tuvieron aparición en este estudio, por lo anterior nos preguntamos ¿qué otras características deben tener las tareas que generan incertidumbre para promover las competencias que no se lograron evidenciar en este estudio?

Otra de las preguntas que generan los resultados obtenidos es ¿se pueden diseñar e implementar tareas que promuevan todas las competencias que se establecieron en este trabajo? O ¿será que no todas las competencias se logran desarrollar con un mismo tipo de tareas?

De igual manera un aspecto importante a trabajar en futuras investigaciones es la formación de ciudadanos desde la clase de matemáticas especialmente de geometría. Esta investigación, de alguna forma, promovió que las estudiantes logaran argumentar y desarrollar algunas competencias ciudadanas que fueron identificadas no solo por los investigadores sino también por ellas mismas, pero queda un interrogante y es pensar en la formación de ciudadanos que utilicen las matemáticas para su diario vivir, en la solución de situaciones de la vida diaria y no solamente para resolver ejercicios rutinarios y mecánicos en los cuales solo basta repetir lo que explica el profesor.

²³ Como se mencionó en el capítulo de metodología, estas tareas fueron tomadas y adaptadas del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría $\mathcal{A} \cdot G$

BIBLIOGRAFÍA

- Aniño, M., Ravera, E., Merino, G., & Escher, L. (2011). Enseñar Matemática a través de problemas abiertos: un desafío para los docentes. *XIII Inter American Conference on Mathematics Education*. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/273579710_Ensenar_Matematica_a_traves_de_pr oblemas_abiertos_un_desafio_para_los_docentes
- Aya, O., & Echeverry, A. (2009). *Geometría dinámica en el proceso de definir*. Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de matemáticas, Bogotá, Colombia.
- Bohórquez, J., Guzmán, C., & Parra, L. (2015). Estudio de caso: Los esquemas de demostración utilizados por estudiantes para profesor de matemáticas al momento de demostrar una prueba en torno al teorema de Pitágoras. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 113-118. Obtenido de <http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME/search/search>
- Caleño, M. M. (2014). *Apropiación de los criterios de semejanza a partir de los conceptos de proporcionalidad y congruencia de triángulos utilizando el software geogebra y algunas aplicaciones applet en la web*. Universidad Nacional De Colombia, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Manizales, Colombia.
- Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios del Cálculo Diferencial e Integral*. Tesis Doctoral, Universidad Autònoma de Barcelona, Departamento de didáctica de la matemática en las ciencias experimentales, Bellaterra, Barcelona.
- Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria*. Universitat de Valencia. Valencia, España.: Departament de Didàctica de la Matemàtica.
- Camargo, L., & Samper, C. (2014). Definiciones y construcción de significado en el marco de la actividad demostrativa. En P. Perry, *Relevancia de lo inadvertido en el aula de geometría*. Sistema de Publicaciones y Difusión del Conocimiento, UPN.
- de Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? University of Durban-Westville, South Africa.
- Flores, C., Gómez, A., & Flores, A. (2010). *Esquemas de argumentación en actividades de Geometría Dinámica*. Acta Scientiae, v.12, n.2.
- García, G., & Montenjo, J. (sf). Las relaciones entre evaluación y el orden social en la clase de matemáticas. Un estudio en una clase de álgebra. Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación, Vol. 2, No. 2, 128-138 ISSN: 2215-8421.
- Gómez, P. (sf). *Análisis del diseño de actividades para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Universidad de Granada.

- íniguez, F. (2015). El desarrollo de la competencia matemática en el aula de ciencias experimentales. *Revista Iberoamericana de educación, Vol.67, núm 2*, 117-130.
- MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias ciudadanas*.
- Molina , M., Castro, E., Molina, J., & Castro , E. (2011). *Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza*. Universidad de Granada y Australian National University.
- Planas, N., & Morera, L. (2012). La argumentación en la matemática escolar: Dos ejemplos para la formación del profesorado. En *El desarrollo de competencias en la clase de ciencias y matemáticas*. Univeridad Autónoma de Barcelona , España.
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PSA. *PNA 1(2)*, 47-66.
- Rodriguez, G., Gil, J., & Garcia , E. (1996). Metodología de la investigación cualitativa. Granada, España : Ediciones Aljibe.
- Ruiz, A., & Chaux, E. (2005). Las competencias ciudadanas. En *La formación de competencias ciudadanas*. Bogotá; Colombia : Asociación colombiana de facultades de educación - Ascofade.
- Samper , C., Molina, O., & Echeverry, A. (2013). *Elementos de geometría*. Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.
- Silva, L. (2013). *Argumentar para definir y definir para argumentar*. Universidad Pedagógica Nacional , Departamento de Matemáticas , Bogotá .
- Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6(1), 3-26.
- Toulmin, S. (2007). La forma de los Argumentos . En *Los usos de la argumentación* (págs. 129-132). Barcelona: Grup Editorial62, S.L.U.
- Vanegas, Y. (2014). *Competencias ciudadanas y desarrollo profesional*. Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona , Departament de didáctica de las ciencias experimentales y la matemática.
- Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics.
- Zaslavsky, O. (2005). Seizing the Opportunity to Create Uncertainty in Learning Mathematics. (E. S. Mathematics, Ed.) *Educational Studies in Mathematics*, 297-321.

ANEXOS

ANEXO 1: Evidencia empírica, entrevista a profesores

	¿Considera importante abordar definiciones en la clase de geometría? ¿Por qué?
Profesor A	(3:27) Si. Claro. Creo que son importantes pues, porque, ayudan a diferenciar e identificar formas, figuras. También ayudan a reconocer características de diferentes temáticas trabajadas en geometría.
Profesor B	(5:50) Desde mi perspectiva y experiencia, considero que es muy importante que el estudiante adquiera esos conocimientos, debido que esa es la base de todo campo de estudio. No es posible abordar, digamos, por ejemplo, el área y el perímetro de polígonos, sin que el estudiante sepa qué es un polígono. Así pasa con cualquier definición ya sea desde el cuadrado, ángulo, triángulo.
Profesor C	(4:25) Considero que no solo son importantes en geometría sino en matemáticas en general, ya que es por medio de las definiciones que se abordan otras temáticas. Y si no se definen los objetos desde el comienzo, se empieza a tener dificultades en la comunicación con el estudiante, porque no sabrán de lo que uno está hablando.

	¿Cómo ha sido el proceso de introducción de definiciones en sus clases de geometría?
Profesor A	Vale. Digamos que en la institución que estamos laborando este año, más que dictarle al chico un concepto y que plasme unos cuantos reglones en su cuaderno, utilizamos una metodología que es utilizar diferentes esquemas. Entonces, utilizar el mapa de ideas, el mentefacto, cuadros sinópticos, mapa conceptual. Cosas que no hagan que, al chico, que digamos, que se aburra de tanto texto. Sino que sea una manera más fácil de que el chico de una u otra manera, vuelvo y digo, memorice y/o entienda el concepto. También, digamos que los chicos se les facilitan mucho reconocer un concepto a partir de ejemplos, de dibujos, de imágenes, cosas que les llame la atención.
Profesor B	Bueno Jeisson, usted al igual que yo sabemos que las definiciones son construcciones matemáticas ya, digámoslo así, elaboradas; que lo único que cambia es la manera de redactarlas. Entonces, no hay mucho que entrar a estudiar con los chicos de séptimo y octavo. De pronto, para que no sea como algo así, como ya impuesto, hago algunas preguntas motivadoras de lo que reconocen de la figura a trabajar.
Profesor C	Bien profe, de la manera usual. El estudiante siempre tendrá unas ideas iniciales, lo que llaman los preconceptos. A partir de esas ideas que tienen se empieza hacer una indagación sobre lo que saben de algún concepto. Por ejemplo, en noveno abordé el tema de triángulo y su clasificación. Les pregunté a los estudiantes que entendían por ese concepto. Y, pues, la mayoría de ellos ya sabían la definición con algunas imprecisiones. Entonces lo que procedí a realizar fue recoger esas ideas que ya traían los estudiantes, y formularles una más formal y precisa. Con esa que formulé era con la que íbamos a entendernos.

	¿Qué espera que sus estudiantes comprendan de una definición? ¿Cómo evalúa dicho proceso?
Profesor A	Considero que más que el chico venga y me vuelva a escribir lo mismo que yo le expliqué, lo que se encontró en el libro o que el chico consultó, que se lo memorice así con punto, con coma con todo, considero que el chico lo hable desde lo que aprendió, desde lo que entendió. No es necesario que el chico eso, sino que desde sus propias palabras se dé a entender, con sus propias palabras de una manera sencilla.
Profesor B	Cuando realizo evaluaciones, las preguntas que realizo son en su mayoría tipo Icfes; es decir, con opción múltiple donde no solo hay que marcar la respuesta sino justificar. Por ejemplo, en la bimestral del primer periodo les proponía algo como así: ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? No recuerdo muy bien. Y ponía diferentes afirmaciones como, por ejemplo: Un polígono es una figura plana formada por segmentos. Y pues es evidente que esa es falsa porque le hace falta decir que debe ser cerrada. Y así más o menos son el tipo de preguntas que propongo en las evaluaciones.
Profesor C	Yo siempre he tenido la costumbre de poner a pensar a los estudiantes. Yo sé si el estudiante logró entender un concepto cuando se lo aprendió, y con eso le hago preguntas donde lo hago dudar. Profe voy a seguir con el cuento de los triángulos. En la evaluación les hice varias

	preguntas como esta: ¿Es posible tener un triángulo que sea escaleno y a la vez sea rectángulo? y pues es muy fácil decir no o decir sí. Es mejor que también digan por qué sí o por qué no. Cuando me di cuenta, muchos no respondieron bien, porque no se aprendieron la definición o no la estudiaron a profundidad.
--	---

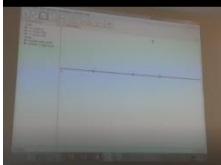

ANEXO 2: Transcripción de la clase 1

Sesión 1. Realizada el 9 de marzo de 2018

La sesión inicia con la organización de las estudiantes en el aula de gestión contable, se solicitó que trabajaran por parejas y se afirmó que esta pareja iba a ser con la que trabajarían el resto de las sesiones. Las estudiantes se ubicaron de manera libre en los computadores. Enseguida se les entregó por pareja la guía sobre nociones básicas, a continuación, se evidencia el trabajo realizado en la sesión que inicia con la lectura de la guía por parte del profesor.

1	P. Diego	Vamos a ser una representación simbólica y grafica tal cual como no lo está mostrando el programa. Y van a describir como fue el paso a paso, para que usted construya un punto, usted construya una recta y usted construya un segmento. ¿Listo? ¿Clara esa parte? Entonces empecen a explorar el programa miren que herramientas nos dan, prueben, ensayen y todo lo que van realizando les va a salir en la pantalla. [Las estudiantes luego de escuchar la instrucción inician con un trabajo de reconocimiento y exploración al programa de geometría dinámica.] La idea es que empecemos con cada una de las nociones básicas presentadas en la tabla ¿listo?
Aproximadamente duran 6 minutos interactuando cada pareja, durante este tiempo exploraron las herramientas que ofrece el programa, en busca de las funciones propias que cumplen con la representación de las nociones básicas punto, recta y segmento.		
2	P. Diego	Es importante escuchar y ver lo que nos está diciendo la otra persona. Y si vamos a utilizar nuestros argumentos para hacer demostraciones, construcciones y demás, como vamos a poder escucharnos y entender a la otra persona si estamos gritando y hablando al mismo tiempo. [pausa] Dijimos ¿no? levantamos la mano para pedir la palabra.
3	P. Diego	Estaba haciendo una pregunta de pronto fue un tanto general pero ahora si alguien particularmente que me diga ¿Cómo esta y como le está pareciendo el programa? ¿Creen que puede ser una herramienta que justifique mejor la enseñanza de la geometría? [Las estudiantes responden grupalmente si] o seguimos como la estábamos llevando a cabo, es una nueva idea ¿cierto? ¿Quieres decir algo? [señalando a una estudiante que levanto la mano]
4	Victoria	Pues (...) me parece una buena idea ya que es una forma diferente de aprender y pues las estudiantes pueden o sea como alguna forma diferente de cómo se estudia en otros colegios más dinámica para que las estudiantes apliquen esto en otras partes.
5	P. Diego	Gracias Victoria. [una estudiante levanta la mano] Señora Valeria
6	Valeria	Al momento de hacer un ejercicio la información va a ser como más precisa cambio en una hora. Escuchemos lo que está diciendo la compañera. Perdóname [el profesor interrumpe porque algunas estudiantes no escuchan la opinión de su compañera] la estudiante continua. En cambio, en un aula de clase digamos que de pronto se aproxima y eso, en cambio, en la aplicación va a ser más precisa.
7	P. Diego	La información que estamos viendo aquí es más precisa dice Valeria ¿Qué opinan frente a esto? ¿Si tiene la razón?
8	Estudiantes	Sí.
9	P. Diego	Tatiana que quieres decirnos
10	Teresa	Pues la página es muy interesante ya que nos muestra diferentes formas de hacer figuras geométricas y todo lo que tenga que ver con la geometría. Además, es un método muy actualizado ya que en la actualidad la tecnología es lo más utilizado por los adolescentes, jóvenes y la mayoría de la comunidad. Entonces yo creo que es muy interesante, además también nos da diferentes vistas, nos da la vista gráfica y la vista algebraica y tiene diferentes opciones para el manejo.
11	P. Diego	Perfecto. Estamos en la actualidad y el uso de las tecnologías es bastante importante. Eh, su compañera menciona algo sobre las dos hojas que se abren apenas uno abre el programa. Una hoja en blanco y al lado una vista algebraica que es como toda la representación algebraicamente de lo que estamos haciendo. Pero no va a ser tanto el foco de atención en

		nuestras actividades es bueno que lo mencionemos. Pero en general lo que nos interesa es lo de la hoja en blanco. Listo Sandra dime.
12	Sandra	Yo también pienso que GeoGebra es un programa dinámico pues sí, pues para la enseñanza y aprendizaje de digamos la geometría, pues esto nos ayuda para la educación y un mejor aprendizaje pues también sirve para matemáticas.
13	P. Diego	Exactamente. No solo nos sirve para geometría sino también en matemáticas. Pilas yo sé que están emocionadas con el programa, pero también es importante escuchar a nuestras compañeras.
14	P. Diego	Ya indagamos, ya exploramos bastantes herramientas del programa. Se exploraron herramientas para la construcción de punto y las demás nociones básicas. Están describiendo el paso a paso y eso es realmente lo que importa ¿alguien no quiere contar cual fue el paso a paso por ejemplo de hacer la recta? [Alexandra levanta la mano]
15	Alexandra	En la tercera fila de las opciones y entonces después le damos clip y nos desplazamos al área de hacer las actividades y ahí nos aparecerá la recta y ya. Y pues como esta no tiene ni comienzo ni fin entonces nos va a aparecer infinita.
16	P. Diego	Dentro de la recta señalan dos puntos ¿no? Que es parte también de la parte simbólica de lo que se le está pidiendo en la actividad. Entonces Jennifer y Victoria [dos estudiantes que levantaron la mano para participar]. Cuéntanos Jennifer tú el paso a paso para construir segmento en el programa.
17	Jenny	Pues primero, pues, fue como experimentar el programa porque yo nunca había trabajado en el programa, entonces pues, comenzamos a ver como la barra donde están todos los conceptos geométricos y pues encontramos ahí donde decía recta y pues hay una flechita le dimos ahí y apareció segmento, entonces a partir de eso pudimos construir segmento.
18	P. Diego	Listo, gracias. Empezamos punto y en la hoja en blanco total está representado el punto, la recta lo que nos describió Alexandra y el segmento al igual nos señalan dos puntos y el segmento ya es más corto frente a la recta. Listo. Bien alguien más que quiera comentar acerca de las herramientas. ¿Qué herramientas vieron que quizás pueden ser importantes para hacer el trabajo geométrico? Alexandra y Sandra
19	Alexandra	Yo digo que la circunferencia porque pues nosotros utilizamos muchos la circunferencia. Y más de eso nos ayuda muchísimo ya que algunas actividades que tú nos dejaste tienen mucha práctica de circunferencia.
20	P. Diego	Exactamente. Hay unas actividades que estamos haciendo con circunferencia y el traer el compás, el traer la regla, miren todo lo que nos estamos ahorrando directamente con el programa.
Hasta este momento se da por terminada la actividad de nociones básicas y exploración del software de geometría dinámica (GeoGebra). A continuación, se describe la segunda parte de la sesión en la cual se le entrega a cada pareja una nueva hoja en la cual se encuentran las definiciones de: colinealidad, interestancia, equidistancia, congruencia de segmentos.		
21	P. Diego	Vamos a pasar a la segunda parte de la actividad, en esta parte les vamos a pasar una hoja en ella esta una tabla, que nos informa la definición, la representación gráfica, representación simbólica y representación verbal de algunos conceptos y que nosotros debemos utilizar al momento de representarlas. Acá en específico están cuatro, definiciones importantísimas, entonces la idea es que las analicemos, las interpretemos. Si quieren, bueno de hecho sería lo ideal, por favor grafíquenlas, háganlas en el programa, que en el programa ustedes se pregunten. Ah nos están hablando de colinealidad ¿Qué es eso? ¿Será que existe un programa que nos grafique eso? Entonces por parejas pasare entregando la hoja para que la analicen. [el profesor entrega las hojas a cada pareja]
22	P. Diego	Quiero que cojan la hoja que les acabe de entregar y empecemos a revisar algunos de los conceptos de los que nos está hablando. Leidy por favor nos podrías mencionar los cuatro conceptos que están allí presentes
23	Leidy	Colinealidad, interestancia, equidistancia y congruencia de segmentos
24	P. Diego	Listo. Que es lo que vamos a hacer, en esta segunda parte ustedes por parejas, va a empezar a leer la definición. Listo que es colinealidad y cada una de las representaciones que se presentan en la tabla, pero dentro del programa, a medida que vayan avanzando por parejas o una persona de la pareja, va a pasar a este computador y en el computador fíjese que en el video beam el

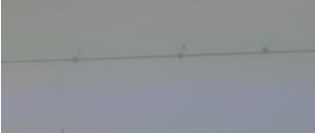
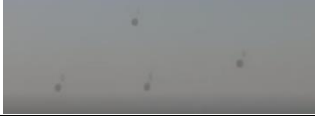
		programa ya está instalado y nos va a mostrar lo que hizo, eso es lo que haremos en esta segunda parte.
Sandra una de las estudiantes de clase, pasa al computador y nos muestra su interpretación y análisis del primer concepto presentado en la tabla.		
25	P. Diego	Listo Sandra
26	Sandra	Empieza a realizar su construcción
27	P. Diego	Niñas en esta parte cuando estemos hablando o cuando alguna compañera este hablando, pues prestamos atención y ustedes van a decir si están de acuerdo o no están de acuerdo, o ustedes que fue lo que hicieron. Listo. Pero para eso necesitamos que estén pendientes a lo que la compañera va a decir. Si quieres vuelve a empezar. [Sandra inicia nuevamente, su explicación es apoyada por su compañera Alexandra]
28	Alexandra	Entonces colinealidad pues significa, dice: dos o más puntos son colineales si y solo si perteneces a la misma recta. ¿Cómo así? o sea la recta está hecha por varios puntos consecutivos, eso quiere decir que la colinealidad está en la misma recta o sea que muchos puntos consecutivos o de tres o más, de dos o más, ya sería una colinealidad en la misma recta, o sea cualquier recta que hagamos sería una colinealidad ya que está hecha por muchos punticos. 
29	Sandra	Sí, o sea que, son puntos que pertenecen a una recta, si, en general, ¿si entienden? O sea, una recta, muchos puntos sobre la recta. No puede, pues como nos decía el profesor que una recta ya no sería colineal si los puntos estuvieran así ubicados. Señala los puntos que están fuera de la recta. Porque ya no hay una recta en general, si me entienden. 
30	P. Diego	Están de acuerdo con esta parte que Sandra menciona, miren que ella dibujo puntos alrededor de la recta. ¿Creen que el punto A, D, B Y C son colineales?
31	Estudiantes	No. Por qué no están en la misma recta.
32	P. Diego	Fíjense que D , ¿Qué paso con D ?
33	Estudiantes	No está en la misma recta
34	P. Diego	Quiere decir que la colinealidad sucede si y solo si dos o más puntos están en una misma recta. Listo, Creo que por el día de hoy vamos a concluir aquí.
Durante la segunda parte de la primera sesión se socializa solamente el primer concepto colinealidad. Se da por finalizada la sesión.		

ANEXO 3: Transcripción de la clase 2


Sesión 2. Realizada el 13 de marzo de 2018

En esta sesión se continuó con la socialización del resto de conceptos presentados en la tabla que se entregó en la primera sesión. En esta sesión a cada pareja se le asignó un computador específico para trabajar en la actividad.

1	P. Diego	Hoy vamos a recordar algo que se hizo la sesión pasada y para la próxima actividad les vamos a pedir un favor muy grande. Están tres conceptos siguientes cierto Interestancia, equidistancia y congruencia de segmentos. Ustedes al respaldo de la hoja nos van a escribir, para que luego no lo comenten ¿qué relaciones hay entre estos conceptos o qué diferencias hay? Así mismo nos van a dar dos ejemplos, uno cuando suceda la colinealidad, por ejemplo y otro cuando no suceda. Volvemos a hacer lo mismo de que alguien pase aquí y nos muestre en el video beam lo que está sucediendo listo. Entonces quien se anima, a decirnos que es punto o la representación de punto o lo que hizo respecto al punto. Tres puntos de manera ágil y rápida, uno que nos diga punto, otro que nos diga segmento y otro que nos diga recta. [las estudiantes levantan la mano y el profesor asigna el concepto y el grupo que lo expone] Bien ya estamos repartidos. Victoria cuéntenos.
2	Victoria	Entonces, en la descripción es el punto de inicio sobre algo, también digo la (...)
3	P. Diego	Representación simbólica y como lo hicieron, [su compañera Xiomara interviene]
4	Xiomara	Entonces el punto es como la parte donde en la que se va a iniciar algo, en el caso de la geometría. La representación simbólica pues es un puntico y arriba va la letra la cual lo nombra y ya. Y pues para hacerlo en GeoGebra, nos dirigimos a la esquina superior izquierda, presionamos, nos devolvemos a la hoja blanca, volvemos a presionar y ya está el nombre del punto y el punto simbolizado.
5	P. Diego	Bien gracias Victoria y Xiomara. Sigamos recta [Refiriéndose al siguiente término a estudiar]
6	Sandra	Yo. Eh (...) bueno nosotros la recta. Como saben es una línea que está conformada por puntos. Sí, entonces pues nosotras, eh (...) la representación simbólica gráfica, eh (...) la hicimos por un punto que inicia, pero no tiene fin, entonces esta por un punto A y un punto B. [señala la hoja donde realizo su representación] su compañera interviene.
7	Alexandra	O sea, digamos así, que la recta es como, algo que no tiene ni inicio ni fin, entonces, igualmente es un segmento plano
8	P. Diego	Mmm, bueno ¿segura? [Victoria levanta la mano]
9	Victoria	De la recta sí, yo diría que la recta es la unión de varios puntos o de varios segmentos o puntos, en una misma dirección
10	P. Diego	¿Solo dos puntos? Que dices Tatiana U
11	Talía	Pues, yo digo que la recta, o sea, digamos la recta es, o sea, no tiene como tal un punto, en cambio el segmento sí. Entonces pues obviamente son la unión de dos puntos, en línea recta. Entonces pues la recta tiene como, en si no tiene un lugar en cual termina, puede ser infinita. Pero en cambio el segmento, el segmento, es finito si tiene como unas medidas de la cual. Tiene un punto de inicio y un punto de final.
12	P. Diego	¿Qué opinan las demás acerca de lo que está diciendo aquí los dos grupos? porque al parecer aquí hay algo que esta confuso. ¿Qué opina el grupo de Yaneth, por ejemplo, respecto a lo que nos esta mencionando el grupo de Alexandra y el grupo de Victoria y Tatiana?
13	Yaneth	Pues profe, yo estoy de acuerdo por ejemplo con lo que dice Tatiana, que decía que segmento era una línea finita y que la recta era una línea infinita. Pero que igualmente las dos se representan con puntos. [interviene Alexandra en la opinión]
14	Alexandra	Profe, pero un segmento está relacionado con la recta, porque la recta es una línea recta, lo único que cambia es que el segmento si tiene final y tiene un comienzo mientras tanto que la recta no.
15	Sandra	Y además la recta es unidimensional, o sea, no tiene dimensión y el segmento también. [una estudiante levanta la mano y el profesor le concede la palabra]
16	Xiomara	Pues yo estoy de acuerdo con lo que había dicho Tatiana y Sandra en que la recta es algo que es una línea infinita, pero sin embargo va a tener dos puntos uno de inicio y uno de fin. Y el segmento si es finito entonces no va a continuar para siempre.
17	P. Diego	Alguna otra idea sobre recta, listo chicas, concluyamos entonces la recta y el segmento
18	Estudiantes	Recta no tiene punto de inicio, pero no punto de fin y el segmento tiene punto de inicio y punto final.
37	Victoria	Una recta es colonial cuando contiene varios puntos en la misma recta.

19	P. Diego	Entonces como les decía no nos vamos a preocupar por las definiciones concretas de estos tres elementos, simplemente necesitamos cuál es su representación gráfica que ya la conocemos y ya, y como ubicarlos en el programa.
29	P. Diego	¿Ya todas saben ubicar un punto?
21	Estudiantes	Sí [responden todas las estudiantes]
22	P. Diego	¿Ya todas saben ubicar un segmento?
23	Estudiantes	Sí [responden todas las estudiantes]
24	P. Diego	¿Y todas saben ubicar una recta?
25	Estudiante	Sí [responden todas las estudiantes]
26	P. Diego	También es importante reconocer las diferencias
27	P. Diego	Bertha tu dijiste que nos ibas a hablar de la colinealidad
28	Bertha	Sí señor.
29	P. Diego	Antes de eso, en la hoja que les entregamos, si son definiciones, que si nos interesa saber cuál es su significado, entender cuáles son las partes de la definición, su representación gráfica y todo. Listo Bertha
30	Bertha	Eh pues según lo que hablamos el viernes, colinealidad es que en la misma recta hay dos o más puntos consecutivos. Y ya eso fue lo que hablamos el viernes.
31	P. Diego	¿De acuerdo niñas?
32	Estudiantes	Sí. [responden todas]
33	Sandra	Si porque nosotros habíamos explicado eso el viernes
34	P. Diego	¿Qué dice Victoria? Respecto a lo que leíste de colinealidad
35	Victoria	Eh, o sea, que, en una recta, dos puntos que pertenecen a la misma recta y cuando los puntos A, B y C están en la recta son colineales.
36	P. Diego	Listo, por favor Victoria, pasa allí al computador y Victoria nos va a dar dos ejemplos, uno cuando sean colineales y dos cuando no lo sean. Vamos a ver como Victoria lo hace.
La estudiante pasa al computador a realizar su construcción mientras que las demás estudiantes observan la pantalla.		
38	P. Diego	¡Pero una recta es colineal, otra vez! ¡Otra vez! Es que remitámonos o devolvámonos a la definición. Léenos fuerte y claro Sandra la definición.
39	Sandra	Definición de colinealidad “dos o más puntos son colineales si y solo si pertenecen a la misma recta” representación verbal: los puntos A, B, C son colineales.
40	P. Diego	¡Pilas! ¿Las rectas son colineales o los puntos son colineales?
41	Estudiantes	Los puntos [responden al mismo tiempo]
42	P. Diego	Entonces la recta es la que nos va a permitir darle lugar a la definición. [el profesor repite la definición] ¡Pilas! ¡Pilas! Pertenecen perteneces o sea están incluidas dentro de la recta.
43	Victoria	 Victoria muestra la siguiente construcción
44	P. Diego	Y uno cuando no sea colineales.
45	Victoria	Victoria muestra la siguiente construcción [Todas empiezan a opinar al tiempo] 
45	P. Diego	Mire, respeto la palabra, por favor alguien, gracias Victoria
47	Victoria	No son colineales porque estos puntos [señalando la pantalla] no están en la recta, están fuera de la recta, por lo tanto, no son colineales.
48	P. Diego	Listo gracias Victoria
49	Alexandra	No tienen una recta que los une.
50	P. Diego	Listo bien, hay preguntas frente a esta definición. Claro. Bueno entonces si yo les aseguro que yo tengo tres puntos que son colineales ¿ustedes qué pueden asegurar?
51	Estudiantes	Que sí, porque tienen que estar en la misma recta
52	Jeimy	Que no, porque tú en ningún momento estas diciendo que sean en la misma recta solo estas diciendo que hay tres puntos.
53	Estudiantes	Discuten entre sí por las opiniones presentadas. Se le asigna la palabra a Talía.
52	Talía	Yo digo que si es cierto porque bueno además que dices que son tres puntos y ahí dice que son dos o más puntos y además ya estas afirmando entonces estas diciendo que si son colineales y si estás afirmando que son colineales significa que están ubicados en la misma recta.

53	P. Diego	¿De acuerdo? O a lo que nos referimos es que a lo que se dice de la definición le falta el complemento el sí y solo si pertenece a la misma recta, o sea, como sería la definición completa. ¿Cómo sería la definición completa?
54	Alexandra	Dos o más puntos son colineales si y solo si estarían en una recta.
55	P. Diego	Entonces fíjese, yo no puedo decir solamente tres puntos son colineales y ya, debo completarlo mencionando si y solo si pertenecen a una sola recta. Listo. Sigamos con el siguiente concepto. Talía por favor lee la definición que nos presenta fuerte y claro
56	Talía	Interestancia “un punto está entre otros dos si y solo si el punto pertenece al segmento cuyos extremos son los otros dos puntos” [la estudiante pasa al computador que proyecta en el video beam]
57	P. Diego	Pilas escuchémonos, ya lo habíamos mencionado no es necesario estar repitiendo, estemos atentos a lo que se está dando en la sesión, gracias.
58	Talía	Presenta la siguiente representación y explica: Entonces la interestancia bueno trata de que es un segmento, entonces como es un segmento, obviamente es finito, significa que en cada extremo hay dos puntos, en el extremo del inicio podemos encontrar un punto y al finalizar podemos encontrar otro punto, entonces si un punto está entre el medio entre estos dos hace que este segmento sea interestancia.
59	P. Diego	Yo tengo una pregunta Talía, ¿tú intentaste buscar la mitad del segmento?
60	Talía	Sí. Por qué pues debe estar como en el medio de los dos.
61	P. Diego	¿Qué opinan frente a lo que está sucediendo aquí? [Patricia levanta la mano, el profesor le da la palabra]
62	Patricia	Eh, es que en la interestancia en ningún momento dice que el punto que está en el centro tiene que tener como la misma distancia, o sea, tiene que estar en la mitad, sino que tiene que (...), o sea, puede que esté en cualquier parte de ese segmento pero que este dentro de esos puntos. Entonces puede que esté más hacia allá o más hacia algún lado y aun así va a seguir siendo interestancia.
63	P. Diego	¿Qué opinan frente a lo que nos menciona Patricia? [Jenny, levanta la mano, se concede la palabra]
64	Jenny	Pues yo digo que sí. Porque aquí en la definición nunca dice que tiene que haber con exactitud una distancia entre punto y punto, sino solo dice que tiene que estar entre punto A y punto B.
65	P. Diego	Entonces, esos dos puntos tienen un nombre ahí, ¿cómo los mencionamos? ¿Los puntos como se llaman? Los extremos de un segmento. Talía no significa que este equivocada tu representación, fue una pregunta que me causo curiosidad, porque ella intento buscar la mitad, pero entonces dio para entender que cuando hay interestancia no necesariamente tiene que estar a la mitad y que este a la misma distancia. Listo, sino que este entre dos extremos, dos puntos extremos, independientemente que este un poco a la derecha, un poco a la izquierda. [una estudiante levanta la mano, se le concede la palabra]
66	Jeimy	¿Dentro de un segmento puede haber más puntos? O sea, digamos diciendo que... porque acá nos está diciendo que tiene que haber uno en el medio, entonces, si yo pongo dos puntos en el centro.
67	P. Diego	Podrías por favor pasar al computador para mostrarnos, miremos y pensemos si lo que dice Jeimy, lo que dice es relevante para discutir, yo digo que sí. Miremos. Porque ella dice que ¿si solamente puede ser un solo punto?
68	Jeimy	Jennifer construye la siguiente representación y explica Que digamos, o sea yo agregue el punto D, entonces podría ser que A y C, son los extremos de D, que es lo que dice la definición, aunque ahora que lo miro bien, en la definición dice que son los extremos, o sea que se terminan y ahí la recta sigue entonces... creo que, no se [algunas estudiantes replican diciendo que la recta no sigue] ella responde: si sigue porque mira que en D, digamos que sería el extremo C, pero seguiría hasta B. entonces no se terminaría ahí y ahí dice en la interestancia...
69	P. Diego	¿Quién va a analizar lo que dice su compañera Jennifer? Ella dice que si dos puntos pueden ser interestancia de los extremos de A y de B. Jennifer recuérdanos nuevamente tu planteamiento
70	Jeimy	O sea, que digamos, o sea, de A a B yo dije que si se podía agregar otro punto, porque dice que es el que está en el centro, entonces yo decía que A y C son los extremos de D, pero ya mirando otra vez la definición dice que tiene que ser los extremos y por ejemplo si, ya no sería el extremo porque C sigue la línea hasta B, entonces ya no sería.
71	P. Diego	¿Qué opinan ahora si ustedes? [Jenny levanta la mano]

72	Jenny	Profe, pero entonces, digo yo que ese ejercicio que hizo Jennifer está bien, porque digamos se podría también decir que D y C están entre A y B. ¿solo puede haber un solo punto entre los dos extremos o pueden haber más?
73	P. Diego	Eso es lo que estamos indagando.
74	Jenny	No, o sea si, si no que yo me refiero, o sea yo concuerdo con la idea de Jennifer porque mira digamos, se dice que entre A y C esta D, pues dice que es un segmento, pero digamos que aquí en C, sigue el segmento entonces no sería extremo. ¿Si me entiendes? Pero entonces yo también te pregunto ¿si está bien dicho que A y B son los extremos de C y D?
75	P. Diego	Si ya tenemos algo en común. Señora Talía [Talía levanta la mano, se le concede la palabra]. ¿A parte de las ideas que ya se mencionaron?
76	Talía	Pues yo creo que la pregunta de las niñas es que, o sea, digamos de A a C pareciera que fuera un segmento y pues que D fuera el punto intermedio de ellos, y que de A y B es como otro segmento y que C es punto intermedio de ellos. Pero entonces yo creo que obviamente no se pueden poner como más puntos, sino que solo uno, para evitar esa confusión, porque igual no se sabría cuál es el inicio y pues el final del segmento.
77	Victoria	Pues o sea yo opino que A y C no pueden ser un extremo porque en la definición nos dice que en la recta solo hay dos extremos y después de C, o sea, B sigue la recta por lo tanto C no podría ser un extremo, entonces simplemente es un punto ahí, cosa que D no podría ser la interestancia de A y C porque C no es el extremo final de la recta.
78	P. Diego	Pero D y C están entre el segmento que es \overline{AB} .
79	Talía	Pero entonces aquí en la definición dice "si el punto pertenece al segmento cuyos extremos son los otros dos puntos", entonces dice como el punto si hubieran dicho solo uno, entonces si hubieran dicho como los dos puntos o los puntos pues ahí si es distinto.
80	P. Diego	Ok, ya vamos a concluir esa parte. Alexandra
81	Alexandra	Pues yo estoy de acuerdo con Talía, que digámoslo así, eso no puede ser porque dice un punto entre otros dos, si solo si, pertenecen al segmento. Como así, entonces solo debe haber un punto que este digámoslo así entre los dos extremos del segmento y pues ahí como esta en la representación hay dos puntos y pues no podría ser ya que el extremo de los segmentos, o sea, digámoslo así, es como para una interestancia es como para una representación de un segmento, pero el caso es que dice, un punto y no dice como más o como decía Talía, no dice como eso específico.
82	P. Diego	Estaría bien si se dijera uno o más puntos según lo que dice la tabla
83	Alexandra	Si, como diría la colinealidad, que dice dos o más puntos seria como algo así si se dijera uno, dos o más puntos.
84	Sandra	Profe, pero también se podría decir que, como ahí se miran los puntos que quedan en el medio, sí, entonces quedaría C, está en el medio de AB, pero D está en el medio de AC, entonces también se podría concluir que CD está en el medio de AB si, entonces eso también podría ser interestancia.
85	Alexandra	No porque entonces habría dos rectas
86	Sandra	No
87	Alexandra	No porque podría haber dos segmentos, hay se presentan dos segmentos digámoslo así
88	Sandra	No solamente hay un segmento
89	Alexandra	No porque mira que ahí dice que, en la mitad de los dos, entonces ahí lo que estamos haciendo es A y C, jeh! D esta entre A y C, ahí se completaría una individualidad, o sea, no metería a B.
Las estudiantes debaten por un momento si existe uno o más segmentos en la representación que se presenta a continuación, el profesor pregunta nuevamente si, ¿hay uno o más segmentos? El grupo de Alexandra y Sandra continúan afirmando que solo existe un segmento.		
90	P. Diego	¿Patricia querías decir algo?
91	Patricia	Es que, yo iba a decir, digamos, podría ser punto dentro, digamos que para que sea interestantes tiene que, a haber un solo punto en el segmento, podría haber varios como ahí, pero digamos para que sean interestantes uno tendría que decir que A, que D y C están entre A y B, más uno no podría decir que D esta entre A y C porque digamos C no tiene un final.
92	P. Diego	Bueno vamos a aclarar entonces antes de continuar. ¿Ese punto D quien lo dibujo?
93	Jeimy	Yo
94	P. Diego	¿Cómo te llamas?
95	Jeimy	Jeimy
96	P. Diego	Listo. Ese punto D ¿pertenece al \overline{AB} ?
97	Estudiantes	Sí

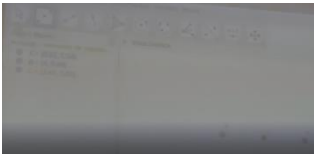

98	P. Diego	Pero miren [sujeta el punto D y lo mueve], se escuchan murmullos de las estudiantes [¡ay! se mueve] Se mueve, no pertenece [afirma el profesor] ¿y C? ¿Pertenece al \overline{AB} ?
99	Estudiantes	Sí
100	P. Diego	Y si yo lo quiero mover [mueve el punto C]
101	Estudiantes	¡Ay sí!
102	P. Diego	¿Qué pasa con el punto C y el punto D?
103	Alexandra	Que el punto D solo es un punto y el punto C ya está integrado a segmento
104	P. Diego	¿Todos de acuerdo?
105	Estudiantes	Sí. [Una estudiante pregunta ¿Qué dijo?]
106	P. Diego	Vuélvelo a decir
107	Alexandra	Que el punto D es solo un punto, un punto común y corriente y el C ya está integrado al segmento, o sea, ya hace parte del segmento.
108	P. Diego	Okey. Entonces observen que integrado aquí en lo que la compañera dice lo vamos a referenciar ¿a qué? A lo que mencionábamos ahorita, ¿a la palabra?, ¿qué? Leamos la definición
109	Estudiantes	Pertenece.
110	P. Diego	Entonces ¿el punto C pertenece al segmento \overline{AB} ? [Las estudiantes responden sí], ¿el punto D? [las estudiantes responden no]
111	Sandra	Una pregunta ¿pero entonces, o sea, que no la intersección no puede tener más de dos puntos en la mitad?
112	P. Diego	Entonces leamos la definición [lee la definición] vuelve a preguntar ¿C pertenece al segmento? ¿Está entre A y B? Listo. Otro punto [construye otro punto llamado E en el segmento \overline{AB}] ¿E cumple la intersección?
113	Estudiantes	si
114	P. Diego	Pertenece al segmento \overline{AB}
115	Estudiantes	Si pertenece al \overline{AB}
116	P. Diego	Si yo les coloco, ¡eh! alguien que haga esta intersección. [en el tablero escribe A-C-B]
117	Jenny	Que C esta entre A y B
118	P. Diego	Para todos es claro, pero C debe pertenecer al \overline{AB}
119	P. Diego	Si yo coloco esta otra, ¿Quién pasa y la hace al tablero?
120	Sandra	Pasa al tablero y construye la intersección propuesta por el profesor
121	P. Diego	¿De acuerdo?
122	Estudiantes	Sí
123	Alexandra	Profe y de acuerdo con lo que dice Tasco [refiriéndose a Patricia] este punto no necesariamente es en la mitad.
En este momento finaliza la clase.		

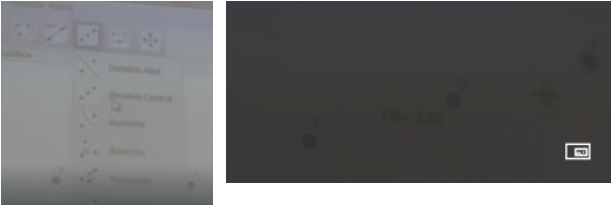
ANEXO 4: Transcripción de la clase 3

Sesión 3. Realizada el 16 de marzo de 2018

Se inicia la clase con la socialización de las definiciones de interestancia y equidistancia, que se abordaron en la clase anterior. Además, se exponen las construcciones que las estudiantes plantearon para encontrar puntos equidistantes y las discusiones que se generan a raíz de esta tarea.

1	P. Diego	¿Hay alguien que nos quiera comentar acerca de la interestancia?
2	Victoria	Yo [Alza la mano]
3	P. Diego	Victoria
4	Victoria	Son varios puntos en una misma línea, pero en una línea que no me piden una distancia o una medida determinada.
5	P. Diego	¿Varios puntos en una línea? En una recta perdón ¿Están de acuerdo con eso?
6	Todas	Sí
7	P. Diego	Sonia dinos
8	Sonia	Es el punto que está en la mitad de los extremos.
9	P. Diego	¿Exactamente en la mitad?
10	Todas	No, no.
11	Sonia	No en la mitad. Si no el central, que puede estar a diferente distancia.
12	P. Diego	¿Exactamente en el central Sonia?
13	Una estudiante	Tiene que estar entre dos puntos.
14	Sonia	Es decir, me refiero a que este en la misma línea, pero me refiero al punto que esta entre tres puntos, el que está en la mitad.
15	P. Diego	Entre tres puntos ese punto está entre ellos.
16	Sonia	Aja.
17	P. Diego	Eso fue lo que entendí. ¿Alguien está de acuerdo? O ¿quiere preguntar algo sobre lo que su compañera dice?
18	Sonia	No señor.
19	P. Diego	Tú. Interestancia, alguien paso al tablero y nos hizo ejemplos y todo. Ya no nos hablada de rectas, ¿Si no de quién?
20	Todos	Segmentos.
21	P. Diego	Segmentos ¿cierto? Entonces ese punto iba estar entre los extremos del segmento. No necesariamente en la mitad podría estar ubicado. Desde que estuviera entre esos dos está bien. Ahora retomemos el de equidistancia. Allá Yaneth y Valeria.
22	Valeria	Son dos puntos que tienen que estar... que son equidistantes. Tienen que tener la misma distancia, tienen que tener la misma distancia para ser equidistantes.
23	Profesor	Tienen que estar exactamente a la misma distancia. ¿Alguien tiene algo para opinar frente a la equidistancia? La sesión pasada se intentó que ustedes hicieran puntos equidistantes ¿Cierto? [Las estudiantes hacen silencio por un momento] Y nos dábamos cuenta de que habían unas herramientas que nos servían para ello. ¿Alguien que ya encontró, demostró que al hacer tres puntos estén dos de ellos a la misma distancia de uno en específico? Sin utilizar cuadrícula, porque acuérdense que nosotros vamos a utilizar nuestra hoja como una hoja en blanco. Sin cuadrícula ni ejes. Listo cinco minuticos para que usted retome... [Es interrumpido por una pareja que alza la mano para dar a entender que ya tenía la solución a la tarea]... si ya sé que aquí hay un grupo que va a pasar. Cinco minuticos para que usted retome sus ideas y nos explique.
Las niñas empiezan su trabajo y discusiones por parejas. Una vez terminado el trabajo individual el profesor inicia la socialización nuevamente:		
24	P. Diego	Todas las niñas observemos el video-beam, para que evidencemos la forma en que ella hizo este razonamiento.

25	Marisol	A bueno, fui a la opción que decía punto y elegí la opción que decía medio o centro. Y Pues ahí con hacer dos puntos nos muestra el centro de los dos.	
26	P. Diego	¿Cómo hacemos para determinar la distancia, para que sea igual? ¿Alguna herramienta que nos mencione que la distancia de A a C es la misma que de B a C ?	
27	Todas	Sí	
28	P. Diego	Sí por si acaso nuestro programa no tuviera eso [Refiriéndose a la herramienta de medir distancias] ¿Alguien de lo que socializó con su compañera lo hizo? Entonces, Gracias Marisol. Vamos con Victoria, enseguida va Valeria y Jenny.	
29	Victoria	Eh, bueno nosotras usamos la misma técnica, pero igual también planteamos, como que tal vez entre las distancia entre los puntos no podía haber la misma medida, entonces lo que hicimos fue... ¡ay no la encuentro! Nos vinimos para esta opción [Refiriéndose a la opción de medidas] y miramos que una de las opciones dice distancia y longitud, entonces como que intentamos probar. Empezamos por estos puntos, y nos dimos cuenta que del punto A al punto C hay una distancia de 1,59 y de este punto [Refiriéndose al punto C] al punto B esta la misma distancia. Asimismo, nos dimos cuenta que entre los puntos sí está la igualdad de distancias.	
30	P. Diego	Sí está la igualdad de distancia. ¿Algunas de ustedes también utilizaron esta herramienta?	
31	todas	Sí.	
32	P. Diego	Listo. Por favor Victoria ¿podrías arrastrar? Fíjense, dentro del programa hay una herramienta que nos permite arrastrar, es decir, que usted sujeta alguno de los puntos y lo puede mover. Podrías por favor hacerlo en el computador. Dale en la flecha.	
33	Victoria	¿Esta?	
34	P. Diego	No en la primera [Refiriéndose a la flecha para arrastrar objetos] Podrías mover el punto A . Gracias. Miremos allá [Señalando la pared donde se está proyectando el video-beam] ¿qué está pasando?	
35	Todas	Está disminuyendo [Victoria arrastra el punto A acercándolo al punto C]	
36	P. Diego	Pero ¿sigue siendo la misma medida?	
37	Todas	Sí.	
38	P. Diego	Ahora mueve el punto B ¿qué está pasando?	
39	Todas	Está aumentando [Victoria aleja el punto B]	
40	Marisol	Mantienen las mismas medidas.	
41	Victoria	Sin importar el movimiento que tengamos de los dos puntos, la medida va ser la misma entre las distancias de los puntos.	
42	P. Diego	¿Podrías por favor intentar mover C ? [Victoria mueve el punto C , que es el punto medio de los puntos A y B , construcción realizada anteriormente por Marisol]	
43	P. Diego	¿Qué paso ahí?	
44	Todas	No se mueve.	
45	P. Diego	¿Por qué creen ustedes que no se mueve ese punto? [Varias niñas alzan la mano para explicar] aquí uno y dos [Asignando la palabra a dos grupos] ¿Por qué no se mueve ese punto Yaneth?	
46	Yaneth	Porque en realidad yo use la herramienta, la de, la de... [Dirige su mirada a la pantalla para recordar el nombre de la herramienta] la de medio o centro, y pues con esa herramienta ya no se podría aumentar el punto del centro.	
47	P. Diego	¿Están de acuerdo? [Varias niñas piden la palabra] Gracias Yaneth ¿Qué dice Valeria?	
48	Valeria	Además en punto del centro siempre va a determinar el final o el inicio de cada medida, entonces determinará si las medidas son iguales, o una es más larga o una es más corta.	
49	P. Diego	O sea que el punto C , el punto que ustedes denominan como centro va a ser como la fuente que va a determinar la distancia de los otros dos puntos. [Una estudiante alza la mano y comenta algo] Dilo, dilo-	
50	Martha	Es que el punto C , es el que siempre va determinar la distancia entre C a B , y de C a A . Es decir va ser un punto fijo para que pueda tener la misma distancia.	
51	P. Diego	¿Están de acuerdo con lo que dice Martha?	

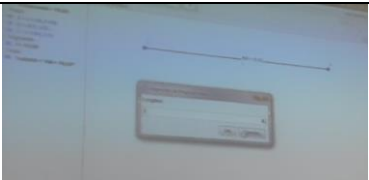
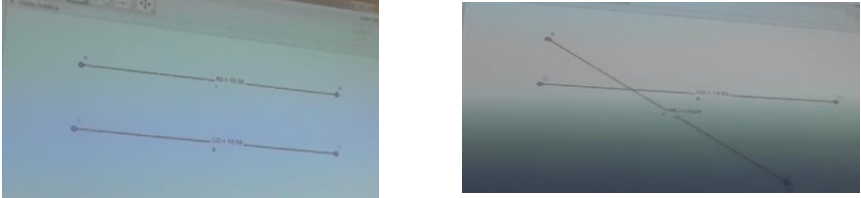
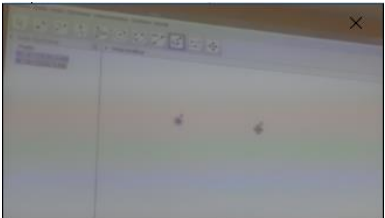
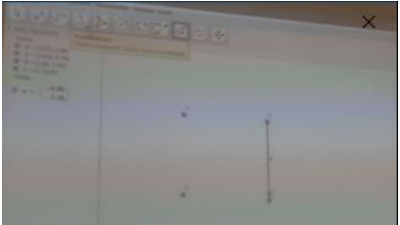
52	Todas	Sí, claro.
53	P. Diego	Ahora, ahí ¿podemos relacionarlo como la definición de equidistancia que se nos presenta en la tabla?
54	Todas	Sí.
55	P. Diego	Alguien que por favor la lea fuerte y claro. [Amelia alza la mano, y el P. Diego le da la palabra] Amelia porfa
56	Amelia	Dos puntos son equidistantes de otro punto si y solo si las distancias son las misma. [Hace la lectura de la definición que se presenta en la guía]
57	P. Diego	En nuestro ejemplo ¿Cumple? El ejemplo que hizo Marisol
58	Todas	Sí
59	P. Diego	¿Vas agregar algo? [Preguntándole a Victoria, quien mueve la cabeza diciendo que no] Allí me dijeron que habían encontrado otra manera. [Señalando a Patricia y a Jennifer]
60	Patricia	Sí señor
61	P. Diego	¿Valeria y Yaneth hicieron la misma? ¡Cierto!
62	Valeria y Yaneth	Sí señor
63	P. Diego	Aquí vamos a socializar una que hizo Patricia con Jennifer. Miremos en la pantalla
64	Patricia	Se le da simetría central, cogemos dos puntos y vemos que están a la misma distancia. [Ubica los puntos F y G , y automáticamente aparece el punto F']  Entonces acá podemos medir con distancia longitud [mide la distancia de FG y GF'] y los dos van a tener la misma medida.
65	P. Diego	Entonces, Patricia experimento otro tipo de herramienta. Pero miremos si puede mover por favor el punto F . Exacto ¿miremos que pasa? [Mientras dice esto Patricia está moviendo el punto F] ¿Qué está pasando ahí?
66	Todas	Se mueve el otro punto.
67	P. Diego	Intenta mover el punto... a ok [no termina de decir la frase cuando Patricia mueve el punto F' al que se quería referir el P. Diego] ¿Qué está pasando ahí?
68	Patricia	Que al alargarlo o moverlo siempre va tener la misma medida.
69	P. Diego	Y el punto F' . Bueno esa tilde, comilla, eso que ven ahí arriba es una representación que mencionamos como una extensión del punto F . Que lo nombramos efe prima ¿Pero por qué no podemos mover el F' en este ejemplo y en el ejemplo que nos mostró Victoria si podíamos?
70	Patricia	Porque en este digamos que lo que hacemos es poner F y esta [refiriéndose a F'] es una extensión, es como una réplica.
71	P. Diego	¿Es una réplica?
72	Valeria	Es el mismo punto
73	P. Diego	¿Será el mismo punto? ¿Qué está pasando?
74	Teresa	Se está reflejando.
75	P. Diego	¿Se está reflejando el punto? ¿Qué creen ustedes? Si yo coloco un espejo exactamente en el punto G reflejando el punto F ¿el resultado sería F' ?
76	Todas	Sí.
77	P. Diego	¿Es por eso que yo no puedo mover ese punto porque depende de F
78	Alexandra	Es que pasa lo mismo con el punto central, en el punto central tú no lo puedes mover. Entonces ahí pasa lo mismo, en vez del punto central que sería G , no puedes mover F' .
79	Teresa	Se movería según como se mueva F . Ya que la F' es el reflejo, se movería como se mueve F .
80	P. Diego	Exacto. ¿De acuerdo con lo que dijo Teresa?
81	Amelia	No escuche lo que dijo.
82	P. Diego	De nuevo Teresa, y más fuerte.
83	Teresa	Que la F con la comita arriba [Se refiere al punto F'] no se puede mover, porque es el reflejo del punto F . Y solo se va a mover si el punto F se mueve, del resto no se podrá mover.
84	P. Diego	Solo se mueve si movemos el punto F . Intentemos Patricia.

		[Las niñas voltean a mirar la pared donde está proyectado el video-beam] ¿Tiene la razón lo que está diciendo Patricia?
85	Todas	Sí.
86	P. Diego	Ahora movamos F' .
87	Patricia	No deja.
88	P. Diego	Exactamente. No se puede. Mientras que en el anterior caso si podíamos mover los extremos.
89	Teresa	Pero no el punto central.
90	P. Diego	Pero no el objeto central, el punto central. Listo. Podemos entonces decir, o concluir la definición de equidistancia, para dejar eso claro. ¿Clarificamos este concepto? [En este momento, otro grupo paso hacer la solución de la tarea de encontrar puntos equidistantes. La pareja que paso realizó una construcción blanda, debido que al mover los puntos las distancias eran aproximadamente iguales. No se grabó esta parte porque se estaba haciendo cambio de pilas de la cámara]
91	Patricia	Al igual las medidas van estar mal.
92	P. Diego	No, dijimos que aquí nada iba a estar mal.
93	Alexandra	De igualmente las medidas no eran exactas, no se cumple esa propiedad.
94	P. Diego	Listo chicas, hemos trabajado unas nociones básicas a las que no les dimos definición. ¿Cuáles fueron?
95	Patricia	Congruencia
96	P. Diego	No.
97	Patricia	Puedes volver a repetir la pregunta.
98	P. Diego	Tres nociones básicas a las que no les dimos una definición, Si.
99	Todas	Punto, recta y segmento.
100	P. Diego	Punto, recta y segmento. Pueden haber definiciones pero pues en este momento solo necesitamos su representación gráfica. Después estudiamos otras tres que si son definiciones. ¿Tres definiciones que fueron? Colinealidad ¿Qué era?
101	Todas	Dos o más puntos que estén en la misma recta [otros más susurros que no se logra entender]
102	P. Diego	Es decir que estén en la misma recta. ¿Después?
103	Sonia	Interestancia. Un punto que este entre dos puntos
104	P. Diego	Vuélvelo a decir. Escuchen acá lo de interestancia.
105	Sonia	Un punto que este entre dos puntos, y no tiene que ser en la mitad de los extremos, pero que si estén en la misma recta.
106	P. Diego	¿Par todos es claro la interestancia?
107	Todas	Si
108	P. Diego	Y equidistancia. ¿Qué es la equidistancia?
109	Amelia	Dos puntos que tienen la misma distancia.
110	P. Diego	Dos o más puntos que están a la misma distancia. Chicas ahora lo que vamos hacer es a trabajar con segmentos. Ya conseguimos dos puntos que estén a la misma distancia de otro. Lo que van a hacer en la siguiente guía es trabajar la definición de congruencia. Listos. ¿Qué es congruencia de segmentos? [Valeria lee la definición de congruencia de segmentos que aparece en la guía] [En ese momento el P. Diego explica cada una de las representaciones que aparece en la guía de nociones básicas] ¿En la actividad que tenemos que hacer? [Varias niñas contestan, y se escuchan muchas voces al mismo tiempo y varios susurros] Construir un segmento, y después construir un segmento que tenga la misma longitud del primero. Luego hay uno pasos específicos, que vamos a ir pasando al tablero, que pase y lo construya. Venga y nos diga como lo hizo. Para esto en la parte de atrás vamos a reportar lo que se hizo.
La clase finaliza con la exploración para solucionar la tarea propuesta.		

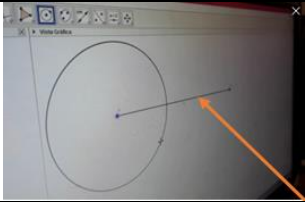
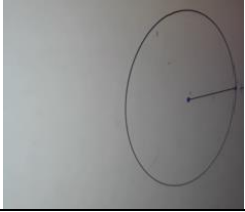
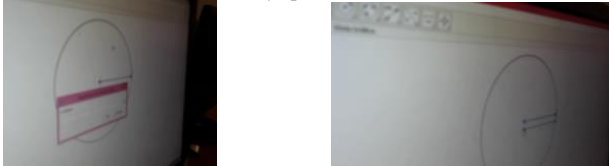
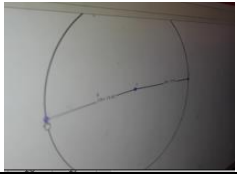
ANEXO 5: Transcripción de la clase 4

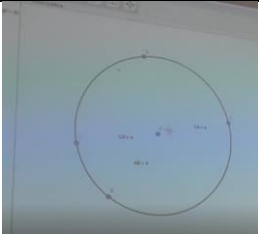
Sesión 4. Realizada el 23 de marzo de 2018

Se inicia con la socialización de la tarea que las estudiantes iniciaron la clase pasada, que consistía en construir en GeoGebra dos segmentos que bajo la prueba del arrastre fueran congruentes. Dos parejas de estudiantes pasan a explicar sus respectivas soluciones.

1	P. Diego	El primer grupo es el de Bertha con Amelia, y el segundo grupo va ser el de Sandra con Alexandra. Entonces vamos a ver, aquí quiero que centremos nuestra atención no tanto en nuestra pantalla, si no en lo que nos van a mostrar ellas en el video-beam. Listo miremos y escuchemos atentamente lo que nos va decir Amelia a ver si nos puede aportar algo en nuestra construcción.	
2	Amelia	Yo con mi compañera Bertha le dimos acá en este icono [herramienta para construir segmentos] y le dimos en segmento, entonces le dimos, hicimos el segmento. Después llegamos y dimos en distancia y longitud	
3	Todas	En ángulo [Refiriéndose a donde estaba la herramienta longitud]	
4	Amelia	A ya. Y después, le damos acá [hace referencia a la opción del programa "Segmento longitud dada"] pero en segmento longitud dada. Y le damos en el icono de ... f [Hace referencia al cuadro de dialogo que aparece para ingresar la medida del segmento]	
6	Dos niñas	Y ¿por qué f?	
7	Amelia	f era porque o sea digamos todo el segmento es f ¿Si me entienden? Y ya, le volvemos a dar la distancia y lo movíamos. [arrastra uno de los extremos del primer segmento]	
8	P. Diego	Bueno, aquí ¿Qué opinamos? Ese era el objetivo esencial de la actividad. Bien Gracias Amelia, gracias Bertha. Algunas de ustedes lo que hicieron, lo que inicialmente lo que hacíamos fue colocar los segmentos pero al momento de mover uno de ellos el otro se quedaba quieto, se quedaba estático. Y nos íbamos dando cuenta que no teníamos una congruencia de segmentos de acuerdo con la definición que habíamos presentado en la clase anterior. Otras niñas también hicieron otro procedimiento que logramos observar fue darle la longitud de segmento, una medida específica y evidentemente salía dos segmentos congruentes pero al momento de arrastrar no me permitía que ese segmento varias medidas, entonces aquí sus compañeras Sandra y Alexandra nos van a explicar.	
9	Sandra	Nosotras lo que hicimos fue algo diferente, vamos a la barra de selección y nos pusimos aquí donde dice translación. Entonces acá nos muestra que si ponemos un punto nos pide otro punto por acá. Y abajo nos pide otro, entonces lo que hicimos fue que automáticamente pasan cuatro puntos. Lo que pasó fue que seleccionamos segmento le damos aquí [hace referencia al punto A] hasta el punto de aquí [punto A']. Después vamos a los centímetros [herramienta para hallar la longitud] de aquí a aquí [del punto A al punto B] Y cuánto hay, luego este [Refiriéndose del punto A' al punto C] Y Esto último [terminando midiendo los cuatro lados del cuadrilátero AB A'C]	 

		<p>En el momento de seleccionar para mover, si muevo este punto [Punto A] entonces se va a mover y van a mantener la misma distancia, ahora si muevo este [Punto C] Se va a mover y bueno va tener la misma distancia. Y este no es como, así como movable como que no se mueve.</p>	
10	Alexandra	Porque es como un espejismo.	
11	Sandra	Entonces ponme cuidado, que queda igual todo, siempre la distancia que nos da.	
12	P. Diego	Podrías por favor mover el segmento, [Sandra mueve el segmento inicial que era lo que el P. Diego pedía] Exactamente, más despacio. Listo. ¿Son congruentes los segmentos en este caso?	
13	Todas	Sí.	
14	P. Diego	<p>¿A qué creen que se debe? O si ¿Hay una relación entre lo que nos dijo el grupo de Bertha con lo del grupo de Alexandra? ¿Podríamos encontrar alguna relación? ¿Hay cosas diferentes? ¿Hay alguien que haya encontrado otra forma? Gracias Sandra y gracias Alexandra.</p> <p>¿Alguien que haya encontrado otra forma? Vamos a trabajar los demás grupos tres minuticos. Vamos a conversar con nuestra compañera. Vamos a mirar si de pronto algo de lo que está en la guía me puede orientar, para encontrar otra manera.</p> <p>[El P. Diego es llamado por Tatiana que le comenta algo relacionado a las construcciones anteriores] Su compañera me esta comentado y me está dando un planteamiento que ella encontró con respecto a las dos cosas. Entonces vamos a escuchar lo que ella nos tiene que decir.</p>	
15	Teresa	Es que lo que pasa mirando las diferencias, en los procesos que hizo Sandra y Bertha (...). En el que hizo Bertha, hace lo que pide el ejercicio, que es hacer dos segmentos pero que sean congruentes, y paso, y se movían [Los segmentos] y todo. Pero cuando lo hizo Sandra lo que paso fue que ella hizo fue como copiar el primer segmento más no hacer uno diferente que fuera congruente, ¿Si me entienden? O sea, el primero esta como reflejado en el segundo, es como una copia, más no dos segmentos totalmente diferentes como lo pedía el ejercicio.	
16	P. Diego	Gracias Teresa. ¿Qué opinan de esto que está diciendo Teresa? ¿Tiene la razón Teresa? O sea, en lo que hizo Bertha, hicieron dos segmentos diferentes, mientras lo que hizo Sandra y Alexandra fue el reflejo de uno.	
17	Todas	Sí, mmm jumm	
18	P. Diego	¿Qué podemos pensar de eso? Al parecer tiene la razón. Entonces ¿Cuál se estaría adaptando más a la guía?	
19	Todas	El de Bertha.	
20	P. Diego	<p>Sin desmeritar lo que sus compañeras hicieron, porque también encontraron un razonamiento propio.</p> <p>Las invito otra a que lean toda la guía, de pronto a ver si encuentran alguna pista, algún indicio para utilizar otro tipo de razonamiento, diferente al que hizo Bertha y Amelia.</p>	
Las parejas de estudiantes vuelven a retomar la tarea de construir dos segmentos congruentes que cuando se realice el arrastre sigan siendo congruentes. A continuación se presenta la interacción de una de las parejas de trabajo.			
21	P. Diego	Ya niñas. ¿Bueno que hacen? [Construyen un segmento.] ¿Ahora que van hacer?	
22	Victoria	La circunferencia. Esta [haciendo referencia a la herramienta "circunferencia centro punto"] desde el punto A	
23	P. Diego	¿Ese punto A quien será?	
24	Victoria	El centro	
25	P. Diego	¿El centro de la (...)?	
26	Talía	De la circunferencia.	
27	P. Diego	¿Hasta dónde la vas agrandar?	
28	Victoria	Hasta aquí [como se muestra en la imagen]	

		
29	Talía	No. Hasta el punto B . 
30	P. Diego	Hasta el punto B . Bueno listo. Bueno ahí el segmento.
31	Victoria	El radio.
32	P. Diego	¿Qué más? Necesitas un segmento que sea congruente a este [Refiriéndose al \overline{AB} que es el radio de la circunferencia] ¿Cómo lo encontraríamos?
33	Victoria	Pues, rápidamente como hacer, segmento con longitud dada.
34	P. Diego	¿Longitud dada?
35	Victoria	Sí. Y pues (...) Entonces, y queda así 
36	P. Diego	Entonces ¿para que la circunferencia?
37	Victoria	Mmm no entiendo (...) [Momento de silencio] pues (...) ¡a ya!
38	Talía	¡A ya! Ya sé.
39	Victoria	Pues la otra manera sería (...)
40	Talía	Quita esto, el segmento [El segundo segmento] [Victoria borra el segmento]
41	Victoria	Sería escoger segmento normal, y pues obviamente que si de acá [refiriéndose al punto A , El centro de la circunferencia] al punto dado tiene la misma distancia, obviamente que del punto A al punto C [Construye \overline{AC} otro radio de la circunferencia] en este caso también sería la misma distancia. Entonces podemos ir a medir [Mide los dos segmentos \overline{AB} y \overline{AC}] y así. 
42	P. Diego	Entonces ¿Ahí que encontraron?
43	Victoria	Una equidistancia
44	Talía	Que da una con (...) con (...) congruencia.
45	P. Diego	¿Son dos segmentos qué?
46	Victoria	Congruentes
46	P. Diego	Vamos para el otro ítem.
48	Talía	¿Si arrastro uno de los extremos el segmento dado, el segmento que se consiguió sigue siendo congruente?
49	P. Diego	¿Qué tendrías que arrastrar ahí?
50	Talía y Victoria	El punto A .
51	P. Diego	¿El punto A ?
52	Victoria	No. Una esquina, el punto.
53	P. Diego	¿El otro segmento sigue siendo congruente?
54	Talía	Sí porque sigue teniendo las mismas medidas.
55	P. Diego	¿Si mueves al punto C ?
56	Victoria	NO, ya no. [luego de mover el punto C]
57	P. Diego	¿No?

58	Victoria	Sigue teniendo la misma distancia.	
59	P. Diego	¿Son congruentes?	
60	Talía y Victoria	Pues sí.	
61	Tania	Porque siguen teniendo la misma medida. Si lo movemos no son congruentes. ¡Si! sí son congruentes	
62	P. Diego	¿Cómo podemos, como sabemos por qué esos dos segmentos resultan congruentes?	
63	Victoria	Porque tienen las mismas distancias, ¿No?	
64	P. Diego	Sí, ¿pero por qué más? Si ahí medimos, y tienen las mismas distancias. ¿Sí no tuviéramos las distancias? [oculta las medidas] Listo no hay distancias ¿ustedes cómo le dirían a alguien que estos dos segmentos son congruentes?	
65	Victoria	Porque digamos, que el círculo o sea (...)	
66	Talía	Tiene una medida	
67	Victoria	La circunferencia ya está en sí, ya tiene una medida. Y pues obviamente que los puntos, como el punto A esta ubicado en el centro de la circunferencia todos los puntos que inicien (...) todos los segmentos que inicien desde el punto A hasta alguna esquina de la circunferencia van a ser de la misma medida	
68	P. Diego	A ok. ¿Ahí no necesitamos medidas?	
69	Victoria	No necesitamos medidas para saber que son congruentes.	
70	Talía	Como esta en el centro de la circunferencia todos los lados va tener su misma distancia.	
71	P. Diego	Es decir que encontramos dos segmentos congruentes. ¿De una manera diferente?	
72	Talía	Sí. Ahora pasar a exponer.	
Se renueva la socialización grupal, con las nuevas construcciones que surgieron en el trabajo por parejas.			
73	Xiomara	También podemos solucionar con la circunferencia. Entonces, vamos a la opción de circunferencia, y vamos a crear varios puntos. Tenemos que verificar que los puntos no se vayan a salir de la circunferencia, porque o si no, va estar mal porque no harán parte de ella [Se refiere a la circunferencia] Después vamos a la opción distancia y longitud, y vamos a comprobar que la distancia de un punto a otro punto de los segmentos va ser la misma. Esto es causado porque el punto A sería el centro y va haber la misma distancia a todos sus lados, en decir a los puntos D, C, E . Ya esto es todo.	
74	P. Diego	Intenta mover alguno de los puntos, con el fin de agrandar o disminuir la circunferencia.	
75	Xiomara	No se puede [Responde luego de tratar de arrastrar los puntos D, C y E]	
76	P. Diego	Listo. Estamos de acuerdo con la construcción de su compañera. ¿Estamos llegando a segmentos congruentes?	
77	Todas	Sí.	
78	P. Diego	Muchas gracias Xiomara. Vamos a mirar la última presentación antes de salir. Y es también guiándonos por lo que hizo Xiomara.	
79	Tania	Nosotras también con mi compañera Victoria dijimos que se podía con una circunferencia. Pero nosotras si iniciamos con un segmento.	
En este momento se termina la clase.			

ANEXO 6: Transcripción de la clase 5

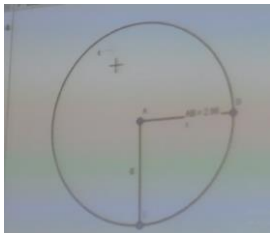
Sesión 5. Realizada el 6 de abril 2018

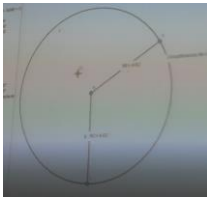

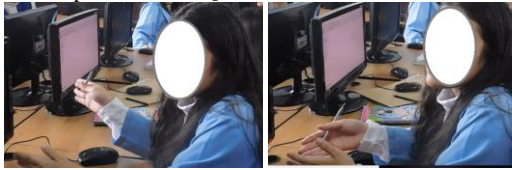
En esta clase se inicia con el comentario que hizo Teresa en relación con las dos soluciones a la tarea que consistía en construir dos segmentos congruentes. Posterior se renueva el trabajo por parejas para establecer nuevas soluciones.

1	P. Diego	En la clase anterior una de las cosas con las que se concluyó esa sesión fue un comentario que hizo Tatiana. Tatiana nos expresaba un comentario que ella encontró, al momento de presentarnos las dos posibles soluciones a la construcción de segmentos congruentes. Entonces vamos a mirar y reconstruir esas ideas, y vamos a estar pendientes de lo que nos tenga que decir ellas, con respecto a las soluciones. Tienen minuto y medio para contarnos que fue lo que hicieron y justificarnos porque eso está correcto, a partir de ya.
2	Amelia	Bueno, decía primero que construyamos un segmento, como la clase pasada habíamos explicado, de que construimos el segmento, le dábamos la medida que tenía que estar, y después construíamos otro, que al arrastrar el primero tenían que tener la misma medida cada uno. Entonces pues, nosotras decimos que nuestra construcción está bien, pues, porque le dimos el mismo nombre al segmento que es f , entonces al momento de arrastrarlo va tener el mismo (...) la misma medida que tiene g . Por eso decimos que está bien.
3	P. Diego	Listo. Hasta ahí es la justificación de ellas. Se basan básicamente en la longitud. Pero bueno ¿Por qué f ? o ¿Por qué g ? ¿Por qué exactamente esas cosas? Leidy, ¿Por qué crees que ellas se basan su construcción en eso? Que al poner f en la medida del otro segmento les va a dar el segmento congruente. Yo me imagino que escuchaste lo que dijeron y por eso pregunto.
4	Leidy	(...)(...) Momento de silencio.
5	P. Jeisson	¿Está construcción está bien? ¿Qué opinan ustedes? ¿Están de acuerdo? O ¿no están de acuerdo?
6	Jenny	Pues a mí me pareció muy interesante este ejercicio, porque se vio que el grupo de ellas pues exploró el GeoGebra, y se dio cuenta de esas herramientas que el programa tenía, y de ahí vieron como era que tenían que hacer, y comprobándolo empezaron a mover el segmento, para mirar si la medida era igual es decir tenían la misma longitud.
7	Alexandra	Yo digo que se coge f y g pues ya que es el centro de la (...) recta, del (...) segmento perdón. Entonces si cogemos algunos de los puntos extremos [del segmento] así podría no dar, pues de pronto (...) no sabría cómo explicar (...) ya que daría diferentes. Si dice que es la misma longitud, la misma medida, entonces ya cogiendo los extremos pasaría como lo que hicimos en el punto anterior.
8	P. Diego	¿Tú dices que f es la mitad del segmento? O ¿eso es una etiqueta no más?
9	Alexandra	No, o sea es la mitad el segmento y por eso da medida del segmento, porque calcula todo.
10	P. Diego	¿Cómo podríamos mostrar que es exactamente la mitad? Me causa curiosidad (...)
11	Alexandra	Midiendo completamente el segmento y dando la división, y pues ahí se daría uno cuenta que es la mitad.
12	Amelia	No entiendo.
13	P. Diego	Lo que argumenta Alexandra es que f es la mitad del segmento, pero digamos que eso no lo podemos demostrar Alexandra. Yo creo más bien que es una etiqueta. (Varias niñas alzan la mano para participar)
14	Martha	Es el nombre del segmento.
15	P. Diego	Es el nombre del segmento como dice Martha.
16	Martha	Yo digo que está bien, porque nos decía el ejercicio es que teníamos que hacer dos segmentos congruentes, pero que tengan la misma medida, entonces el primer segmento es AB y el segundo es CD . Al arrastrar cualquier punto van a tener la misma medida. Entonces el nombre que se le da al primer segmento es f y al poner al segundo segmento va ser g . Y van a ser diferentes segmentos, pero como ya están relacionados y al poner (...) (Se dirige a la pantalla del computador para recordar cual fue la herramienta utilizada) segmento longitud dada, se pone la



		medida del primero (Segmento AB), el segundo (Segmento CD) va quedar de la misma medida. Y estaría correcta la solución.
17	P. Diego	¿Está correcta? Escuchamos la argumentación o justificación de Martha, del porque sí está correcta. Ella se basa en que, dado el segmento y su medida se puede construir otro congruente.
18	Camila	Yo también estoy de acuerdo, pues ese es el nombre que se le da al segmento [Hace referencia a f]. Porque es igualmente la medida, se está dando desde el punto A al punto B . Y no desde el punto f , o pues desde el nombre f al punto B . Y pues por eso no se puede comprobar específicamente que ese es la mitad del segmento [Hace referencia a f]
19	P. Diego	Listo. Bien muchas gracias. Amelia última intervención.
20	Amelia	Pues a mí me pareció buena la teoría que propuso Amelia y Bertha, porque estamos verificando que los dos segmentos fueran de la misma medida, entre el centro y los extremos, dando la distancia o la longitud.
21	P. Diego	OK, bien gracias. Y Xiomara. Había dicho que la última pero bueno.
22	Xiomara	Pues a mí me pareció muy chévere lo que hicieron, fue como buscar la forma de usar la herramienta, al momento que estamos siguiendo los pasos ahí dice segmento longitud dada, entonces yo pienso que lo primero que uno asocia es poner el número, pero no, lo que ellas hicieron fue copiar el nombre del segmento que en ese caso era f , para hacer uno similar, entonces eso fue lo que me gustó mucho de lo que hicieron.
23	P. Diego	Listo, gracias Xiomara. Entonces ahí concluimos la justificación de porque la primera construcción que hizo Amelia y Bertha esta correcta. Ahora vamos a escuchar a Sandra y Alexandra. Lo mismo, un minuto y medio, lo vamos a contabilizar las intervenciones también para que alcancemos a terminar con el grupo de Tatiana, y así cerrar la sesión.
24	Sandra	Eh, bueno básicamente como que lo llamamos nuestra teoría de Alexandra y Sandra. Entonces lo principal es utilizar la opción Traslación, y pues el objetivo es trasladar. (Mientras Sandra está haciendo su intervención su compañera Alexandra va haciendo la construcción en el software) [No explican el paso a paso] Luego de esto tomamos la distancia de todos los puntos, en este caso sería A , B ; C Y A prima. Nuestra teoría se basa más que todo en la translación de todos los puntos. Esperemos que aquí tenemos algo mal. Entonces después de eso tenemos que tomar las medidas exactamente cuánto mide. Y al rotarlo o al mover algunos de los puntos tiene que tener la misma longitud.
25	P. Diego	Pero ahí están demostrando que la distancia en la misma, y la idea es que el segmento sea congruente. [No están midiendo los segmentos] ¿Qué deberían medir ellas?
26	Martha	El punto A con el punto A prima.
27	P. Diego	Martha otra vez por favor.
28	Martha	El Punto A con el punto A prima. Y el punto B con el punto C . Pero pues en este caso no sería un segmento, pues A prima es como (...) es como una copia del punto A .
29	P. Diego	Gracias Martha. Fíjense que sus compañeras trasladaron fueron puntos, sí. Y a partir de la translación de puntos, unieron los puntos que trasladaron y encontraron un segmento congruente. Ahora, mientras Xiomara hace la pregunta ¿para el grupo que acabo de exponer?
30	Xiomara	Sí señor. O sea, la primera es ¿Por qué solamente aparece A prima, y digamos no se tuvo en el segmento AB , y en el segmento que se iba a copiar o poner la misma distancia, se puso A prima y B prima? ¿Por qué solamente hay una prima y porque es diferentes de B y C ?
31	Sandra	Yo pienso porque aquí se está manejando la translación, entonces yo al poner el cuarto punto ya empieza hacer la prima.
32	Xiomara	Y pues yo también tenía una pregunta sobre la translación y era ¿Por qué no se toma eso como reflexión? Sí se supone que la translación es solamente una figura, o pueden ser varias que se mueven en el plano y son diferentes.
33	P. Diego	Sandra ¿tienes algo para responderle a Xiomara?
34	Sandra	No señor.
35	P. Diego	Amelia dinos.
36	Amelia	Pues, aunque pues si daría la misma distancia y la longitud entre los dos segmentos, no me parecía correcta la teoría de ellas. Porque no están tomando como en cuenta las distancia del centro como tal.
37	P. Diego	¿El centro? Pero en ninguna están tomando el centro
38	Amelia	No, o sea la distancia (...) no o sea, no la necesidad de hacer más puntos, siendo los dos únicos que ya estás, bueno los cuatro únicos que ya están, para que de la misma medida entre los dos [Segmentos que construyeron en la explicación]
39	P. Diego	OK, lo que pasa es que ellas hacen la translación de los puntos y miden las distancias, hasta lo que tengo entendido. A ellas les funciona en el hecho que está trasladando los puntos, miren aquí (se

		refiere a donde se proyecta la imagen del computador) ellas construyeron e inicialmente unos puntos, y midieron las distancias y al momento de mover algunos de ellos están siendo congruentes. (Suena el timbre de finalización de clase) (Susana pide la palabra) Concluimos, Susana. Yo sé que ya timbraron pero terminamos con la construcción de Victoria y Tatiana.	
40	Susana	Me parece que la idea que tuvieron Sandra y Alexandra, fue buena, pues porque tuvieron otra (...) forma de hacer los segmentos congruentes. Pero entonces funcionó porque tenían la misma distancia, pero no estaban haciendo exactamente los que se pedía, porque era como una copia del primer segmento [hace referencia a la construcción de Sandra y Alexandra] y lo que estaban pidiendo eran dos segmentos diferentes.	
41	P. Diego	O sea tú dices que porque trasladaron los puntos, y es decir un copia de. Ok gracias. Concluimos entonces con la presentación de Talía junto con Victoria. Con esto ya una ronda de intervenciones y cerramos, listos.	
42	Victoria	Eh, bueno el ejercicio que mi compañera y yo hicimos fue que a partir de un segmento podemos hacer una circunferencia, la cual va tener (...) (...)	
43	P. Diego	Otra vez, a partir de un segmento podemos (...)	
44	Victoria	Una circunferencia. (Mientras Victoria explica, Talía hace la circunferencia con centro en el punto A y radio AB). O sea como podemos ver, alguna parte de la circunferencia está unida con el centro de la circunferencia. Y pues ahí vamos a tener una misma medida. (Talía mide el segmento AB , y construye el segmento AC .) Eh, si tomamos la medida del otro segmento serán iguales. ¿Esto a que se debe? ¿Qué significa? O sea, sin la necesidad de tener como un punto, tener las medidas de un segmento en si visible, podemos ya deducir que ya siempre van a tener la misma medida, ya que la medida del punto [El punto A , el centro de la circunferencia] hacia alguna parte [Punto] de la circunferencia va tener siempre la misma medida. Por lo que pues sin importar que se alargue o se disminuya [hace referencia a la circunferencia] pues su medida al centro hacia alguna parte de la circunferencia es la misma.	
45	P. Diego	Listo, gracias, ¿Qué opinan frente a esto? Justifiquen. Por allí Martha.	
46	Martha	Bueno, primero una de las funciones que cumple, es que hacia cualquier punto de la circunferencia, el segmento va tener la misma medida, y eso es lo que hace la circunferencia. Que no importa desde que punto se tome hacia el centro, o del centro hacia la circunferencia siempre va cumplir la misma función, que es la misma medida. Es algo que ya está dado.	
47	P. Diego	Gracias. Camila	
48	Camila	Pues yo creo que esta teoría si esta buena, pero digamos porque pasamos (...), porque la circunferencia tiene un punto central específico, entonces pues se basa desde el punto central para poder tener la misma distancia, si no tuviera un punto central no se tendría la misma distancia.	
49	P. Diego	¿Desde ese punto central hasta dónde? [refiriéndose al punto A , centro de la circunferencia]	
50	Alexandra	NO, Pues al igual podría dar. Porque el punto central es como una medida en sí, pero si tú trazas la circunferencia a la misma circunferencia va dar lo mismo. Porque tienen el mismo radio.	
51	Camila	Por eso, Porque tiene el punto central.	
52	Talía	No, no. Yo creo que si se puede	
53	P. Diego	¿Sin punto central ustedes dicen que voy a tener las mismas distancias entre los segmentos?	
54	Martha	No	
55	P. Diego	¿Por qué no?	
56	Xiomara	O sea como primera medida no hay, no puede haber una posibilidad que no tenga centro, porque es un círculo. Un círculo tiene las partes que siempre van a estar. El círculo que es la parte de adentro, la circunferencia que es el contorno, los radios y los diámetros. Entonces no va a ver una forma de que no haya centro. Entonces siempre que solamente exista el círculo va a existir eso. Pues me pareció muy curioso esa expresión, pues es como también sacarle el provecho de una figura geométrica para tenerlo en cuenta y relacionarlo con él.	
57	P. Diego	Gracias Xiomara. Por favor Talía has un punto en cualquier parte de la circunferencia. (Talía ubica un punto sobre la circunferencia).	

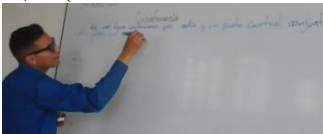
		<p>No, no perdón. Dentro de la circunferencia. (Talía ubica un punto D sobre la circunferencia). Ahí, ahí.</p> <p>Si yo trazó un segmento desde D hasta cualquier punto de la circunferencia, va tener una medida ¿Cierto?</p> <p>Hazlo por favor (Le dice a Talía) segmento hasta ahí (Punto E de la circunferencia). Y desde ese mismo punto D hasta otro punto cualquiera de la circunferencia. (Momento para que Talía realizará lo que le P. Diego le pidió, construyendo el segmento DF).</p>	
58	Talía	(Momento para que Talía realizará lo que le P. Diego le pidió).	
59	P. Jeisson	Suelta en cualquier parte, y dale control Z. (Al momento que Talía no logra hacer bien la construcción requerida)	
60	P. Diego	<p>Lo que quiero que vean es que es un poco la idea que están mencionando Martha, Camila y Alexandra. Si el punto no estuviera en el centro muy posiblemente los segmentos no van hacer congruentes. Miren lo que están pasando allí.</p> <p>¿El segmento DE es congruente con el segmento DF?</p>	
61	Todas	No, no señor.	
62	P. Diego	Y eso tiene una razón específica, que es la que esta mencionando sus compañeras, es que el punto A esta en el centro. Teresa (Le da la palabra a Teresa)	
63	Teresa	<p>Profe, si el punto no queda visible, estaba pensando que se podría hacer de la forma (...) como el diámetro esta de un punto a otro del círculo, se podría según el diámetro de sacarle la distancia de una parte al centro [Hace un movimiento con la mano, queriendo decir la mitad]</p>  <p>Y así fácilmente, se podría diferencia donde queda el punto del círculo [refiriéndose al centro de la circunferencia] y así sacarle los diferentes radios.</p>	
64	P. Diego	O sea sacando la medida del	
65	Teresa	Diámetro	
66	P. Diego	Medida total, dividiendo en dos, entre la mitad	
67	Teresa	La mitad	
68	P. Diego	Y así sería. Listo. Así cerramos, niñas muchas gracias. Por favor apagan todos los computadores.	


En este momento finaliza la clase

ANEXO 7: Transcripción de la clase 6

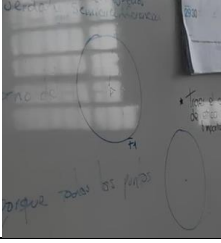
Sesión 6. Realizada el 9 de Abril de 2018

La clase inicia con la presentación y socialización de cuatro posibles definiciones que propusieron las estudiantes para circunferencia; la clase continúa con la discusión si las partes de la circunferencia como el radio y el centro deben hacer parte o no de la definición.

1	P. Diego	Para iniciar el trabajo del día de hoy necesitamos que ustedes tengan una definición de circunferencia. Entonces nos vamos a poner manos a la obra en definir de acuerdo a las construcciones que hicieron ¿qué es para ustedes circunferencia? Listo. Sí ya la hizo, por favor revise si esa definición que colocó si corresponde o no. Entonces tienen cinco minutos para completar esa última hoja que les dimos. Otra cosa adicional que recuerdo hoy es la primera revisión de la carpeta, de ahí quiere decir que va salir una de las primeras notas, ya que estaban preocupadas por las notas. Pues el tener completa la carpeta, todas las actividades anteriores va ser parte de una nota inicial, adicionalmente las participaciones. Dentro de las clases se está teniendo en cuenta la participaciones y el aporte que usted hace en el silencio, la disciplina y demás. Entonces cinco minutos y ya empezamos con la socialización.
Un tiempo para organizar las propuestas que las estudiantes van a presentar		
2	P. Diego	Estamos tratando de definir o que ustedes mismas con sus propias palabras establecieran la definición de circunferencia. [...] Necesitamos que por favor nos digan la definición que construyeron las socializamos en grupo, la idea es construir conjuntamente y colectivamente grado noveno B una definición de circunferencia, que se asemeje a las construcciones que hemos hecho en las sesiones anteriores con el programa. Entonces le voy a pedir el favor a Jeimy que nos lea su definición, al grupo de Susana, a Xiomara y a Sonia. Listo, las demás también son importantes, por lo que necesitamos que de alguna manera nos reflejen lo que escribieron y con lo que vayan a decir ellas, listos. Entonces definición que escribió Jennifer.
3	Jeimy	Es una figura conformada por un radio y un punto central
4	P. Diego	Espera, espera (...) es una figura conformada (...) (Va escribiendo en el tablero)
5	Jeimy	¿Sigo?
6	P. Diego	Sí
7	Jeimy	Es un conjunto de puntos que equi (...) equi (...) eech equidistan del centro.
8	P. Diego	Listo, entonces es una figura conformada por ¿Un punto?
9	Jeimy	Eh, no. Un radio y un punto central. He pues puntos.
10	P. Diego	Sí
11	Jeimy	Conjunto de puntos que equidistan del centro.
12	P. Diego	¿Lo escribiste así tal cual? ¿Conjunto de puntos?
13	Jeimy	Sí, sí. (Momento de silencio mientras el P. Diego termina de escribir en el tablero)
		
14	P. Diego	Listo Susana.
15	Susana	Es el alrededor de un círculo, compuesto por muchos puntos y uno en especial, el punto centro. Comprendido por radio, diámetro, cuerda y semicircunferencia etc.
16	P. Diego	Haz de cuenta que estas dictando, para poder copiar
17	Susana	Es el alrededor de un círculo (...) compuesto por muchos puntos (...)
18	P. Diego	Por muchos puntos (...)
19	Susana	Y una en especial (...) y uno en especial (...) el punto centro coma (...)
20	P. Diego	Sí.
21	Susana	Comprendido por un radio (...) coma, diámetro (...) coma, cuerda y semicircunferencia.
22	P. Diego	Listo. Tres [Refiriéndose a la tercera intervención, en este caso es Xiomara]
23	Xiomara	Es una línea cerrada de forma curva, que conforma el contorno del círculo
24	P. Diego	Es una línea (...) ¿Qué?
25	Xiomara	Es una Línea cerrada de forma curva (...)
26	P. Diego	¿Niñas están escuchando? ¿Qué conforma?
27	Xiomara	Que conforma el contorno del círculo.

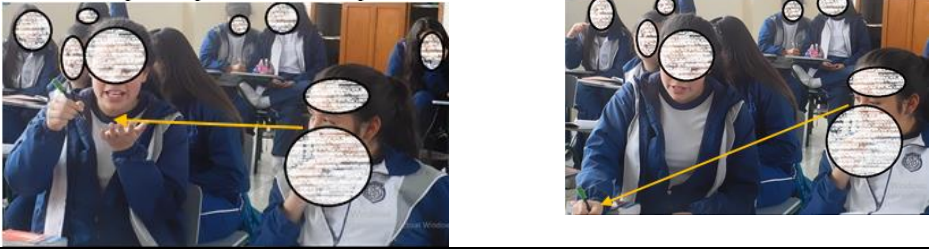
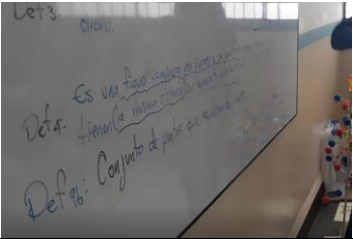

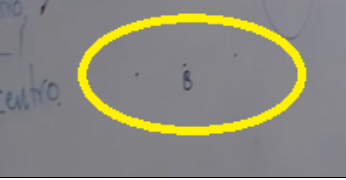
28	P. Diego	Sí.
29	Xiomara	Y ya profe. Pues tenemos un mini dibujito para explicar la diferencia entre circunferencia y círculo.
30	P. Diego	A ok, ahorita lo haces. Listo. Y Sonia
31	Sonia	Es una figura compuesta por puntos (...) Es una figura compuesta por puntos (...) y se caracteriza porque todos los puntos (...)
32	P. Diego	¿Por punto? ¿Por un punto?
33	Sonia	Por puntos.
34	P. Diego	Ah, Ok.
35	Sonia	Y se caracteriza (...) porque todos los puntos (...)
36	P. Diego	Sí.
37	Sonia	Tienen la misma distancia con respecto (...) con respecto al punto centro.
38	P. Diego	(Momento de silencio mientras el P. Diego termina de anotar la definición en el tablero) Listo, sí. Bien. Por favor cada grupo quiero que observe en el tablero las cuatro definiciones, construidas por sus compañeras. Quiero que me digan ¿sí hay similitudes? ¿Sí hay diferencias? ¿Sí están de acuerdo? Sandra y Alexandra por favor [Les llama la atención] ¿Sí están de acuerdo o no lo están con las definiciones que están ahí? Y ¿Cuál es la que más se asemeja a la construcción que hicimos de circunferencia en la sala de sistemas? Listos, tómense unos minutos de su tiempo y léalas muy bien. Dos minuticos para que revisen.
Tiempo de dialogo por parejas		
39	P. Diego	Hay cosas en las definiciones que se mencionan y que podemos omitirlas. Entonces quiero que hagan relaciones. No sé si usted cree que la uno y la tres, la uno y la dos [Haciendo referencia a las cuatro definiciones que se plantearon de circunferencia] y nos diga. Entonces vamos a empezar. Vamos a iniciar con la uno. Victoria lee la definición uno, fuerte por fa.
40	Victoria	Es una figura conformada por radio y un punto central. Un conjunto de puntos que equidistan del centro.
41	P. Diego	Listo. ¿Quiénes están de acuerdo con esa esa definición? (Varias niñas alzan la mano)
		
42	P. Diego	Listo. Bertha y Amelia ¿Por qué están de acuerdo con esta definición?
43	Bertha	Porque una de sus partes de la circunferencia es el radio y el centro.
44	P. Diego	Radio y el centro. Eh, alguien más. Jenny.
45	Jenny	Eh, yo pienso que si está bien porque el grupo utilizó unos términos propios de geometría, y creo que es entendible para todas.
46	P. Diego	Marisol [Dándole la palabra]
47	Marisol	Pero yo iba a decir porque no estoy de acuerdo.
48	P. Diego	¿Por qué no estas de cuerdo?
49	Marisol	Porque dice que un radio y un punto central, pero ese radio y ese punto ¿No son lo mismo?
50	P. Diego	¿Punto y radio son lo mismo?
51	Todas	No.
52	Marisol	A entonces si estoy de acuerdo.
53	P. Diego	Bueno, escuchemos, aprendamos a escuchar que es importante. Señora Xiomara.
54	Xiomara	Yo pienso, que digamos que está bien. O sea no es por copiarme del P. Diego, y no me vayan a decir (...) bueno yo no sé qué. Pero lo que está entre paréntesis [] no se debería poner. Porque está bien, Es una figura conformada por un conjunto de puntos que equidistan del centro. Pero, radio y punto central eso hace parte del círculo y no de la circunferencia.
55	Todas	No.

56	P. Diego	Bien, bien. Su compañera está diciendo algo clave. Escuchen, eso clave que está diciendo Xiomara ¿Ustedes creen que la definición es importante mencionar que tiene un radio y un punto centro? ¿Es demasiado importante que eso este en la definición? Victoria.
57	Victoria	Pues, o sea como tal la circunferencia si tiene radio, y tiene diámetro. Radio y diámetro y demás. Por eso digo que sí está correcto, con mi compañera y yo hicimos una definición bastante similar, porque pienso que dentro de la circunferencia todos los puntos conformados por la circunferencia son equidistantes al punto central de la circunferencia.
58	P. Diego	Listo, ok, gracias. Señora [Dando la palabra a Sonia, quien alza la para participar]
59	Sonia	Pues en la definición uno y la cuatro hay similitud ya que pues dice que conjunto de puntos que equidistan del centro, y pues abajo [Refiriéndose a la definición cuatro] dicen que tienen la misma distancia con respecto al punto centro. Pues es lo mismo pero en la definición uno ellas usaron una palabra, como un término más geométrico que en la definición cuatro, pero pues dicen lo mismo.
60	P. Diego	Tu estas diciendo que en la definición uno utilizan la palabra equidistan y en la definición cuatro la misma distancia. ¿Qué opinan frente a esto?
61	Sandra	Yo, yo, yo puede decir. [Alzando la mano para participar]
62	P. Diego	Señora [Dándole la palabra a Sandra]. Gracias Sonia.
63	Sandra	Eh, profe es que lo que quiere decir también equidistan: es como hallar uno o más puntos o cosas a igual distancia en otro lugar determinado, sí. Entonces ahí lo que están diciendo pues es muy claro porque nos están diciendo que equidistan del centro, entonces tienen una misma distancia. Estoy de acuerdo con las dos [definición uno y cuatro]
64	P. Diego	Entonces hay una relación entre la definición uno y la definición cuatro. Mientras en la definición uno utilizaron la palabra equidistan; en la cuatro utilizaron misma distancia que equivale a lo mismo ¿Si están de acuerdo con eso?
65	Todas	Sí.
66	P. Diego	Reitero mi pregunta ¿Es importante que estos elementos de la circunferencia estén en la definición?
67	Sandra	Sí, obvio.
68	P. Diego	O ¿Los podemos omitir?
69	Todas	No. No.
70	P. Diego	O ¿son algo a parte de la definición?
71	Talía	Eh, pues yo digo que en una definición debe estar como los puntos clave, que son como características en sí de la definición de esa figura o a esa (...) si a esa figura. Pues por ejemplo digamos que es muy diferente círculo a circunferencia así. Pues, y pues si ya definimos como radio, punto central, diámetro, todo eso son características que hacen diferenciar la circunferencia de otras figuras.
72	P. Diego	O sea ¿Sí yo tengo una circunferencia, y no le hago el radio no es circunferencia?
73	Talía	No, o sea, si pero (...)
74	P. Diego	Pero me están dando a entender que eso es central [haciendo referencia a que las partes de la circunferencia son importantes en la definición] Voy a intentar hacer una circunferencia.
75	Talía	O sea digamos que el radio, pues creo es la distancia, es la medida desde el centro hacia alguna longitud de la circunferencia, ¿No?
76	P. Diego	Lo que pregunto yo es ¿Qué si necesariamente tenemos que mostrar esto para que sea una circunferencia? [Refiriéndose a un radio de la circunferencia que dibujo en el tablero] [Algunas estudiantes responden que sí; mientras que otras contestan que no] O ¿sin este radio ya doy por hecho que es circunferencia?
77	Jenny	Pues yo pienso, digamos que omitiéndole el punto central y el radio, quitándole ese dibujo [hace referencia al radio que el P. Diego dibujo en la circunferencia] pienso que ahí se vería como un círculo, entonces pienso yo, que es importante solo (...) o bueno que es muy indispensable para que se entienda que es una circunferencia, el punto central.
78	P. Diego	O sea que ¿esta figura 1 y está son diferentes? [haciendo referencia a una circunferencia con un radio dibujado y otra sin ningún radio] Señora [Dando la palabra a Amelia]
79	Amelia	Pues serían iguales, y no habría la necesidad de hacerle ese segmento que hay del centro hacia cada esquina. Ya que nosotros podemos ver o sea si vemos el punto central ya podemos diferenciar que es una circunferencia a simple vista.
80	P. Diego	Fíjense que lo que está diciendo Amelia es importante. Sí yo le dibujo o no el radio pues va seguir siendo circunferencia. Señora [Dando la palabra a Jeimy]

81	Jeimy	Pero es que dice que es una figura conformada por radio y punto central. O sea lo que dice Amelia, con el punto central ya sabemos que tiene un radio, pero al igual eso hace parte de la circunferencia. Así no hagamos la línea del centro a un punto de la circunferencia igualmente o imaginariamente va estar la línea del radio, o sea siempre va estar en el medio.	
82	P. Diego	¿Siempre va tener el radio? Pero o lo que yo voy, es que ¿Si es importante que esto esté? [la palabra radio en la definición] [Se generan varios comentarios entre las niñas] ¿Deja de ser circunferencia?	
83	Talía	No, porque desde el punto central. Lo distinto sería que no tuviera nada, sería tomado como un círculo y una circunferencia.	
84	P. Diego	Teresa	
85	Teresa	Pues yo digo que no es necesario que el radio se ponga en la definición (...) porque como tal el radio es para intensificar y profundizar en el tema de la circunferencia, pero no para la definición para entender. El radio es como una medida para poder hallar la longitud de la circunferencia pero no es necesidad que este conformando la definición.	
86	P. Diego	Listo Teresa. Es decir Teresa dice que no es necesario que este el radio. Va seguir siendo circunferencia. O sea ¿que para que sea circunferencia yo tendría que mencionar todos los elementos? Señora. [Dando la palabra a Patricia]	
87	Patricia	Yo digo que de pronto en la definición sería importante dejar solo el punto central, pero de pronto quitarle radio porque nosotros sabemos que siempre va tener un radio, entonces si le quitamos el punto central ya no sería una circunferencia sino sería un círculo. Entonces yo digo que si sería importante dejar el punto central.	
88	P. Diego	¿Qué dice Xiomara? Luego Camila, Susana y Jeimy. Ya tienen el orden.	
89	Xiomara	Yo tengo una pregunta para aclarar algo ¿El radio y el punto central hacen parte del círculo o de la circunferencia? [Momento de silencio]	
90	P. Diego	¿Cuál es la diferencia entre círculo y circunferencia?	
91	Xiomara	Pues si no lo tengo (...) o sea creo que lo tengo medio claro pero no estoy segura, pero la circunferencia es el contorno y el círculo es la parte de adentro, por decirlo así.	
92	P. Diego	Bien. Esos elementos que estamos diciendo hacen parte de la circunferencia.	
93	Xiomara	Es decir ¿Qué la circunferencia no es todo? ¿La circunferencia va incluida en el círculo?	
94	P. Diego	¿Dentro de la circunferencia está incluido el círculo? ¿Qué opinan frente a lo que está diciendo Xiomara? Espérenme un segundo que teníamos un orden. Pero piense sobre lo que está diciendo su compañera. [Momento de silencio] Dices que si no hay circunferencia no hay círculo.	
95	Xiomara	Sí. Esa es mi pregunta.	
96	Camila.	Yo también pienso que es importante el punto central porque digamos como estábamos haciendo el ejercicio de la clase pasada, si el punto tú lo ponías en cualquier otro lado del círculo no va tener la misma medida. Pues como estaban diciendo ya sabemos que hay punto central pues hay radio ¿Si? Pero entonces se supone que debe haber un punto central para mantener la misma medida.	
97	P. Diego	¿Necesariamente debe estar el punto centro?	
98	Camila	Sí	
99	P. Diego	Susana	
100	Susana	Yo creo que no es necesario ponerlo en la definición, pero si es importante mencionarlo. Porque si digamos pones ahí dos gráficas y pones los dos círculos no van a saber si una es circunferencia o la otra es círculo ¿Sí me hago entender? O sea necesitas tener en el gráfico poner las partes de la circunferencia.	
101	P. Diego	O sea que si yo no pongo las partes de circunferencia ¿No es circunferencia? ¿Tengo que colocarlas obligatoriamente? Jeimy	
102	Jeimy	Es que lo que pasa es que ponga o deje de poner la línea va dejar de ser una circunferencia o no. Lo que yo estoy tratando de decir es que si te piden una definición se suponen, o si yo busco una definición es porque yo no sé qué es eso, y yo tengo que dar las características y que significa. Pero no significa que eso este o no este va dejar de ser.	
103	P. Diego P. Jeisson	Listo niñas hagamos una cosa. Lo que tenemos ahí es una circunferencia, y lo que queremos definir es eso, más no queremos definir las partes de la circunferencia.	

104	Patricia	Pero es que el punto central es importante. Porque el punto central es como una parte fundamental del circunferencia. Sí no tuviéramos punto central no tuviéramos circunferencia, sería un círculo.
105	P. Diego	¿Seguras? ¿Alguien nos puede decir la diferencia entre círculo y circunferencia? Señora [Da la palabra a Patricia]
106	Patricia	Es que yo digo que de pronto el círculo es el contorno, es solo la línea de afuera. Y la circunferencia es como todo lo que está adentro.
107	Sandra	No, no, no. Es al contrario
108	P. Diego	Sandra dinos
109	Sandra	El círculo es lo que está por dentro y circunferencia es el (...)
110	Xiomara	El contorno.
111	Sandra	La línea de afuera.
112	P. Diego	Mire, lo importante aquí es definir esas cositas que están diciendo, pero en términos de la circunferencia, no más. Ahora lo que dice el profe es enserio, nosotros no queremos definir radio, diámetro de la circunferencia u otras partes de la circunferencia. Para ello necesitamos definir primero circunferencia. Sus compañeras construyeron cuatro definiciones, vamos en la primera. Dijimos que sí era importante de que se mencionara radio y punto central ¿Cierto? Ahora, para dibujar una circunferencia como lo que tenemos aquí [Una circunferencia dibujada en el tablero] es necesario dibujar las partes de ella.
113	Todas	No.
114	P. Diego	¿Va seguir siendo circunferencia?
115	Todas	Sí.
116	P. Diego	Listo. Segunda definición. Eh Leidy ¿Qué dice la segunda definición?
116	Leidy	Es el alrededor de un círculo, compuesto por muchos puntos y uno en especial el punto centro. Comprendido por un radio, diámetro, cuerda y semicircunferencia.
117	P. Diego	¿Qué relación encuentras? O ¿Hay algo hay alguna relación entre algunas de las definiciones que están allí?
118	Leidy	Eh, ¿lo que lo compone el círculo? El centro, el diámetro y la semicircunferencia.
119	P. Diego	¿Qué relaciones con las definiciones que están allí hay? ¿Hay alguna relación con alguna? ¿Tú encuentras alguna relación con la que leíste con alguna de las otras tres? [Dirigiéndose específicamente a Leidy]
120	Leidy	Con la uno
121	P. Diego	¿Con la uno? [Leidy mueve la cabeza para decir que sí] Listo su compañera Leidy dice que una relación entre la definición uno y la definición tres ¿Están de acuerdo?
122	Talía	Pero no vamos en la definición dos
123	P. Jeisson	Definición uno y definición dos.
124	P. Diego	A uno y dos dices [Refiriéndose a Leidy] Perdón. ¿Están de acuerdo? Talía
125	Talía	Pues es que obviamente por lo que en la primera definición dice que está conformada por radios y punto central y en la definición dos hay dice que está comprendida radio diámetro y la semi (...) la semicircunferencia. Pero yo también creo que también tiene relación con la definición tres [refiriéndose a la definición dos] porque dice que es alrededor de un círculo compuesto por muchos puntos, y ahí abajo dice que es una línea cerrada curva que conforma el contorno de círculo. Entonces pues la relación que habría de la definición dos con la tres, es que alrededor de un círculo y el contorno del círculo.
126	P. Diego	Eh. Laura. Gracias.
127	Laura	Hay relación entre la definición dos y la definición uno porque las dos nos están diciendo que es un círculo con varios puntos y en las dos están nombrando las partes que conforman la circunferencia.
128	P. Diego	Repito ¿Es importante nombrar las partes para que sea circunferencia? Pílas aquí, en nuestra labor. Vamos a construir una definición de circunferencia grupal que contenga solo y exclusivamente lo necesario para entender una circunferencia. Ya ustedes dicen que no necesitamos definir o incluir las partes de la circunferencia en la definición. Teniendo lo que está en el tablero ¿Cómo podríamos construir una definición? Ó ¿Cuál sería una definición general acerca de circunferencia? Omitiendo las cosas que no sean necesarias, y bueno quitando algunas palabras que de pronto no dan a entender eso. Entonces un minutico para que piensen con su pareja ¿Cuál sería una definición general que permita entender que es circunferencia?
Minuto de socialización por parejas		
129	P. Diego	Listo. Ahora ¿Cuál es la tarea importante? Escuchen, escuchen muy bien lo que van a decir ustedes mismas para la construcción de esa definición. Sin embargo la tienen que definir ahí en su hojita. Señora [dándole la palabra a Jeimy]

130	Jeimy	Eh, bueno yo puse: es una figura conformada por un conjunto de puntos que equidistan del centro [Lee la definición que escribió en su hoja]
131	P. Diego	Escuchemos esa. Más fuerte.
132	Jennifer	Es una figura conformada por un conjunto de puntos que equidistan del centro.
133	P. Diego	¿De acuerdo? Sí, no, porque. 22-54”
134	Xiomara	O sea nosotras tenemos como lo mismo pero nosotras en vez de poner conjunto de puntos pusimos de una vez línea. Es una línea cerrada que esta al contorno de círculo y equidistas del centro.
135	P. Diego	Pero teniendo la condición (...) conjunto de puntos. Eh Jenny
135	Jenny	Eh, pues profe digamos, mirándolo bien con respecto a la pregunta que nos planteaba hace unos instantes que era ¿si el radio, o bueno las partes que si eran importantes en la definición? Creo que antes estaba redundante porque decía radio, punto central conjunto de puntos que equidistan del centro. Ya ahí equidistan del centro ya se saben que hay un punto central, entonces antes o sea antes no pensaba que era necesario.
136	P. Diego	Gracias Jenny por esa claridad.
137	P. Jeisson	Pero volviendo a la definición (...) Vuélvela a leer por fa [Refiriéndose a Jeimy]
138	Jeimy	Es una figura conformada por un conjunto de puntos que equidistan del centro.[Lee la definición que tiene en su hoja]
139	P. Jeisson	Sobre esa definición ¿qué tienen que decir?
140	Sandra	Yo, yo, yo tengo (...)
141	P. Jeisson	¿Sobre esa? [Refiriéndose a la definición que mencionó Jeimy]
142	Sandra	Pues digamos que no sería como una figura si no que llegaría a ser como una línea curva conformada por puntos, que de ahí (...) equidistan de un mismo punto que se llama centro. Sí, y todos tienen una misma medida o longitud. O sea (...)
143	P. Diego	¿Línea curva?
144	Sandra	No porque, es que hay (...) hay una línea recta (...) línea curva. Línea curva es esto [haciendo movimientos circulares con el dedo anular]
145	Talía	Yo quiero decir algo respecto a lo que dijo Sandra, y la verdad es que obviamente si debe tomarse como figura porque como el profe dice, cuando se dice línea curva o sea tu no piensas en una circunferencia o un círculo, si no que tú piensas en algo curvo. Entonces si tú dices como figura tu comienzas a mirar figuras, y ya empezarías a decidir. Y pues con respecto a la definición de Jeimy esta corta, pero esta lo necesario, para entender que es una circunferencia.
146	P. Diego	¿Pero figura?
147	Talía	Sí, que es una definición que esta concuerda con lo que vamos a definir.
148		Yo tengo algo similar con la de Jeimy. Es una figura conformada por un conjunto de puntos y se caracterizan porque todos los puntos equidistan del punto central.
149	P. Jeisson	¿Son iguales esas dos definiciones?
150	Talía	Sí, son lo mismo.
151	P. Diego	Martha, señora.
152	Martha	Profe es que yo diría como tal la figura es el círculo y está conformado por la circunferencia. Como tal la figura no sería la circunferencia.
153	P. Diego	¿Entonces quitamos la palabra “la figura”? ¿Están de acuerdo?
154	Algunas niñas	No. [hacen varios comentarios al mismo tiempo]
155	P. Diego	Lee la definición sin mencionar figura. [Dirigiéndose a Jeimy]
156	Jeimy	Después de leerla puedo decir algo.
157	P. Diego	Sí.
158	Jeimy	Eh conformada por un conjunto de puntos
159	P. Diego	Eso, quita eso, figura conformada, quita eso.
160	Jeimy	Por eso. Conformada. Ah ya, conjunto de puntos que equidistan del centro. Ya, puedo decir algo.
161	P. Diego	Sí.
162	Jeimy	Bueno, dicen que figura no, pero tendría que ponerse algo, porque un conjunto de puntos (...) pues un conjunto de puntos puede ser algo (...)
163	Talía	Un matachín ahí
164	P. Diego	Pero, miren, miren muy bien. Conjunto de puntos que equidistan del centro. No cualquier punto. ¿Este punto equidista del centro? [El P. Diego dibuja un punto que no pertenece a la circunferencia]
165	Todas	Ah, no.
166	P. Diego	Tienen que ser todos exactamente los que equidistan del centro.
167	Jeimy	Pero necesariamente tienen que ser circular

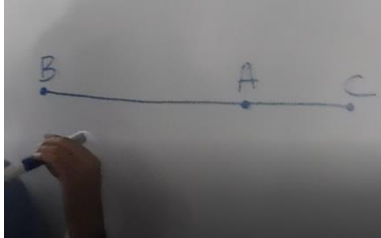
168	Talía	<p>Pero lo que el P. Diego trata de decir, es que sí en la definición en sí está clara, porque el centro, equidistantes del centro [refiriéndose al conjunto de puntos]. Si un punto está acá sí, este es el centro sí. Pues obviamente para que todos sean equidistantes al centro todos deben estar como a la misma (...) como a la misma medida, y obviamente van a formar una figura circular. [Hace una representación en el cuaderno, para explicarle a su compañera]</p> 
169	P. Diego	Señora, Susana
170	Susana	Es que nosotras queremos decir nuestra definición.
171	P. Diego	Bueno léela para haber si hay similitud
172	Susana	<p>Es el alrededor de un círculo, conformado por un conjunto de puntos que equidistan del centro [Lee la definición que tiene en su hoja de trabajo] Nosotras decimos que es el alrededor porque, pues para nosotras es el alrededor del círculo. No la figura.</p>
173	Alejandra	Pero en sí el círculo es (...) el círculo es un elemento (...) es como digamos quitar el círculo y dejar como el profe lo puso.
174	P. Diego	<p>Haciéndole unos arreglos y conforme a lo que ustedes construyeron y dijeron una circunferencia para nosotros grado noveno B, la definición de circunferencia es la siguiente: Conjunto de puntos que equidistan del centro. (El P. Diego anota dicha definición en el tablero)</p> 
175	Xiomara	<p>Pero no me convence la definición, porque se construyen puntos que equidistan del centro, y hay no sé cuántos puntos tienen que ser. Así que pongo un punto central y dos puntos laterales y ahí están equidistando y no tienen que ser un círculo (Hace un movimiento de manos para indicar que ubica un punto y los dos puntos son colineales junto con el punto inicial que están a la misma distancia)</p> 
176	P. Diego	<p>Lo que tú dices es esto. (dibuja en el tablero la situación planteada por Xiomara)</p> <p>¿Por qué decimos conjunto de puntos? ¿Qué entendemos por conjuntos de puntos?</p> 
177	Tatiana	Varios puntos
178	Xiomara	Pero tú dices conjunto de puntos, pueden ser tres. Cuando uno habla de conjuntos uno habla de más de dos, y más de dos pueden ser tres.
179	P. Diego	Si yo tengo tres puntos ¿Puedo construir una circunferencia?
180	Xiomara	Es que para mí, hablan de un conjunto de puntos que equidistan del centro, pero están en una línea circular. Porque se puede tener cuatro puntos pero ubicados así (Hace el movimiento con la mano haciendo alusión a los vértices de un cuadrado), entonces tiene que tener la línea completa, no sé si estoy equivocada pero pienso que es eso.

		Y teníamos otras preguntas más. La primera ¿sin circunferencia no hay círculo?
181	P. Diego	¿Qué opinan frente a la pregunta?
182	Alexandra	No, porque el círculo es un elemento de la circunferencia, es, digámoslo así es aparte de la circunferencia, no hay necesidad de que sin circunferencia hay círculo. Uno puede dibujar un círculo normal, y ya. Pero no necesariamente debe depender de la circunferencia. La circunferencia en cambio sí depende de un círculo, porque, o sea, digámoslo así, lo que tu decías [refiriéndose al P. Diego] el conjunto de puntos que equidistan del centro, la circunferencia no dependería tanto del círculo.
183	P. Diego	Ok. Vamos a centrar una cosa, y vamos a centralizar en esta definición, ya sí hay alguna pregunta extra, pues la realizaremos y con justo la solucionaremos. Pero (...) ya hay más o menos una idea de lo que es una circunferencia ¿Sí? Sí hay alguna duda en su momento la solucionaremos. Señora Angie. (Le da la palabra a Angie que con venia alzando la mano)
184	Angie	Pues, o sea yo que sería una sucesión de puntos en forma circular. Porque sí no se define de qué forma es, pues (...) yo digo que para definirlo puede ser de muchas formas.
185	P. Diego	Es que si nos vamos a la definición todos los puntos toman esa forma. ¿Por qué? Porque están a la misma distancia. Sí tú haces una figura que no estén a la misma distancia, entonces no se va cumplir eso de la definición.
186	Xiomara	Un cuadrado.
187	P. Diego	Un cuadrado ¿Tú dices? ¿Qué sí un cuadrado cumple la definición?
188	Todas	Se presenta una discusión entre pequeños grupos de la clase. (No es muy claro el audio.)
189	P. Jeisson	¿Cuál sería el centro?
190	P. Diego	Pilas, ¿Cuál sería el punto centro de un cuadrado?
191	Martha	Pues habría cuatro puntos que equidistan.
192	P. Diego	Martha dice que habría cuatro puntos definidos, el A, B, el C y el D. (Dibujando un cuadrado, y nombrando los vértices). ¿Y el punto centro? Miren cuál es la diferencia que Martha está diciendo, en la circunferencia los puntos van a equidistar del centro. Mientras en el cuadrado en el cuadrado no tenemos esa garantía de exactamente ese punto (Ubicando un punto en el cuadrado). Por eso nos referimos a que la circunferencia es u conjunto de puntos, que sigue siendo una sucesión. A medida que vamos ubicando puntos, esos puntos con esa condición van a tener la misma distancia del punto hasta el centro.
193	Xiomara	Es decir que para nosotros poder deducir que la circunferencia tiene un centro, tiene que estar dentro de las partes de circunferencia.
194	P. Diego	De la definición.
195	Xiomara	No, no. Yo me refiero que para que se pueda tener en cuenta la medida de los lados con el punto central, dentro de las partes de la figura, debe estar el punto centro.
196	P. Diego	Para ese caso de la circunferencia sí.
197	Xiomara	Y el cuadrado ¿No tiene punto centro?
198	P. Diego	¿Cómo defines tú cuadrado?
199	Xiomara	Una figura de cuatro lados iguales. ¿Pero el cuadrado no tiene centro?
200	P. Diego	Si lo tiene, pero no está dentro de la definición de cuadrado.



ANEXO 8: Transcripción de la clase 7


Sesión 7. Realizada el 13 de abril de 2018

En esta sesión se da inicio a la tarea 4 relacionada con la construcción de la definición de punto medio y perpendicularidad, en ella se evidencian dos momentos; primero, la socialización de la definición de punto medio, donde se analizan dos condiciones y se solicita que las estudiantes realicen ejemplos y contraejemplos; la segunda, donde se socializa la definición de perpendicularidad la cual se apoya con varios casos donde existe y no existe la perpendicularidad.

1	P. Diego	¡Pilas! escuchen porque ya sabemos que revisaron, pero la sesión pasada se hizo énfasis en dos conceptos... punto medio y perpendicular, se dieron unas condiciones y el fin de esas condiciones era plantear unos ejemplos y en los ejemplos definir o tratar de hacer lo que se puede hacer en una y lo que no se puede hacer en la otra. ¡Listo! Entonces alguien que nos quiera mostrar su primer ejemplo.
2	Jeimy	¿Lo digo o paso al tablero?
3	P. Jeisson	Si pasa a dibujarlo al tablero.
La estudiante pasa al tablero a realizar su representación		
4	P. Diego	El primer ejemplo o la primera condición del ejercicio que me decía Verónica [asignando la lectura a una estudiante específica]
5	Verónica	Proponga un ejemplo donde se cumpla la segunda condición, pero no la primera. Explique su ejemplo. [leyendo el primer ítem de la tarea]
6	P. Diego	Punto medio y ¿cuál era la primera condición?
7	Verónica	Proponga un ejemplo donde se cumpla la primera condición, pero no la segunda. Explique su ejemplo
8	P. Jeisson	¿Pero cuál es la primera condición?
9	Verónica	¡Ah!
10	P. Diego	¿y es $B - A - C$ o como lo decimos?
11	Camila	A esta entre el punto medio
12	P. Diego	¿Entre el punto o entre el segmento?
Varias estudiantes corrigen diciendo que es entre el segmento		
13	Jeimy	Eso sería una interestancia [pregunta al P. Diego]
14	P. Diego	¿Ese sería interestancia pregunta Jeimy [dirigiéndose a todas las estudiantes]
Varias estudiantes participan apoyando al mencionar que sí es una interestancia		
15	P. Diego	Es una interestancia [afirmando] y ¿la segunda condición?
16	Victoria	A equidista de B y C
17	P. Jeisson	¿Qué significa eso?
Varias estudiantes participan al tiempo diciendo que es A es el punto medio, otras dicen que debe tener la misma distancia hasta los puntos B y C		
18	P. Jeisson	¿de dónde a dónde?
19	Jeimy	Bueno. Entonces en el primero decía que cumpliera... en el primero, en el primer ejemplo decía que cumpliera la primera condición mas no la segunda entonces, esta es de interestancia [señalando la construcción que realizó] 
		A esta entre B y C pero no son equidistantes porque B y A no tienen la misma distancia y A y C no tienen la misma distancia.
20	P. Diego	¿de acuerdo? O ¿hay alguien que tenga una contraposición a esto?
Las estudiantes expresan no tener preguntas		
21	P. Diego	¿No? Listo.

22	P. Jeisson	Ahí en ese caso ¿A es punto medio?
Las estudiantes tienen opiniones divididas, unas dicen que sí y otras que no. [los Profesores intentan persuadir para identificar el por qué]		
23	P. Diego	¿A es punto medio? [el P. Jeisson repite la pregunta]
24	P. Jeisson	¿Quién dice que no?
25	Sonia	Sí es punto medio, pero no es equidistante
26	Jenny	Yo digo que no es punto medio porque debería estar en la mitad
27	P. Jeisson	¿Quién más dice que no?
28	Xiomara	Yo
29	P. Jeisson	¿Por qué?
30	Xiomara	Porque en la guía lo dice, al principio lo dice, voy a leer [toma su carpeta de apuntes y lee] punto medio A es punto medio de B y C si cumple las siguientes condiciones, entonces, que este en la mitad y que A equidiste de B y C
31	P. Jeisson	¿y que pasa entonces?
32	Xiomara	Entonces tiene que estar a la misma distancia, A tiene que estar justo en la mitad porque equidista.
33	Victoria	No yo creo que, si está en la mitad, lo que se refiere es que A debería estar en el medio de B y C y si esta cumpliendo estando en el medio, lo que pasa es que en el ejemplo nos proponía que no tenía que ser equidistante, o sea, no es equidistante, pero si está en el medio entre B y C
34	P. Diego	¿Segura? ¿Si es equidistante?
Las estudiantes reaccionan a lo mencionado y hablan al tiempo, en las intervenciones mencionan estar de acuerdo mientras la mayoría expresan no estarlo.		
35	P. Diego	¡Susana! [dando la palabra]
36	Susana	Yo digo que no, porque dice que tiene que cumplir las dos condiciones, que este en el medio y que sea equidistante con... [tono bajo de voz]
37	P. Jeisson	Escuchamos lo que dijo, habla más duro, porfa Susana
38	Susana	Que yo sigo que no, porque... si está en el medio, pero no es equidistante con B y C.
39	P. Jeisson	¿Quién está de acuerdo?
Las estudiantes que están de acuerdo levantan la mano o mencionan estarlo		
40	P. Jeisson	¿Y las otras niñas porque todavía no creen que es punto medio?
41	Jeimy	¡Yo! ¡yo! Nosotras [refiriéndose a ella y a su compañera de trabajo]
42	P. Jeisson	¿es punto medio o no es punto medio?
43	Jeimy	Yo creo que si es punto medio, porque en la primera condición si decimos, si decimos que es interstancia, eh... si podemos regresarnos a la segunda hoja de la que ustedes nos dieron [toma su carpeta de apuntes] acá decía un punto esta entre dos si y solo si el punto pertenece al segmento cuyos extremos son de los otros dos puntos y acá nos muestran un ejemplo donde C no está precisamente en la mitad y no equidista de B y C.
44	P. Jeisson	Observemos acá, que punto medio, para que un punto sea punto medio de un segmento, me está diciendo tiene que cumplir dos condiciones, ese ejemplo [señalando el tablero] ¿qué condición cumple?
45	Estudiantes	¡La primera!
46	P. Jeisson	¿Y la equidistancia la cumple? ¿es punto medio?
47	Estudiantes	No...
47	P. Jeisson	¿es punto medio?
La mayoría de las estudiantes dicen que no, excepto Patricia, lo cual provoca que las estudiantes expresen que nuevamente que no es punto medio		
48	Viviana	No es punto medio, porque si no cumple las condiciones y es verdad no cumple [señalando el tablero] entonces no va a ser punto medio por que todas las condiciones no están ahí [refiriéndose al ejemplo]
49	Patricia	O sea, si es punto medio porque es que, una de las dos condiciones, espere [respondiendo a una compañera que iba a interrumpir] una de las dos condiciones, o sea, la primera condición no dice que específicamente tiene que estar en la mitad y que tiene que tener la misma medida, la primera solo dice que tiene que estar entre B y C no dice en qué posición. Entonces si es punto medio.
50	Xiomara	Las dos condiciones, la primera si se cumple ahí [señalando el tablero] pero no llega a ser punto medio porque A que es el punto que esta en el centro, no equidista de B y C, es decir A no esta a la misma distancia que B que A y C. Entonces no esta a la misma, no es punto medio.

51	P. Jeisson	Listo. Entonces no es punto medio igual en la guía nos están diciendo, proponga un ejemplo donde se cumpla la primera y no se cumpla la segunda. Listo. ¿El otro ejemplo?
52	P. Diego	Leamos el segundo [refiriéndose al segundo punto de la guía]
53	Camila	Proponga un ejemplo donde se cumpla la segunda condición, pero no la primera. Explique su ejemplo [leyendo el punto de la guía]
54	Amelia	Según mi ejemplo pues, hacemos el segmento, hacemos el segmento [construye en el tablero su ejemplo] y colocamos un punto fuera del segmento pero que este en medio de B y A 
55	P. Diego	¿Qué opinan frente a la representación que hizo Amelia?
56	Xiomara	Yo estoy de acuerdo... porque A equidista de B y C pero no pertenece a un mismo segmento entonces cumple la primera, pero no la segunda. ¡Perdón! Cumple la segunda, pero no la primera [corrigiendo] entonces si estoy de acuerdo
57	P. Jeisson	¿Si estás de acuerdo? Mira el orden
58	Xiomara	Bueno, el caso, entonces C equidista de B y A pero no están en la misma recta, entonces si se cumpliría. [mientras que Xiomara realiza la intervención el P. Diego nombra nuevamente los puntos] 
59	P. Diego	Xiomara está diciendo que ella si está de acuerdo, porque no se cumple la primera condición, pero si la segunda
60	Xiomara	Entonces no es punto medio, pero si se está cumpliendo lo que dice ahí, proponga un ejemplo donde se cumpla la segunda condición, pero no la primera.
61	P. Diego	Alguna resonancia o algo por decir frente a la representación o a lo que está diciendo Ximena. Y la pregunta sería ahí ¿y cómo garantizamos que ese punto si está a la misma distancia si no está en el segmento?
Una estudiante tiene una duda y expresa que es lo que no entiende		
62	Verónica	No entiendo porque se sale del segmento, o sea porque no está el punto en el segmento
63	P. Diego	¿Por qué no está el punto en el segmento? [asignando a Viviana para responder]
64	Viviana	Porque las condiciones dicen que tiene que estar en el mismo segmento el punto A y pues están diciendo que no se cumpla la primera, pues el punto A se tiene que salir para que no cumpla la primera condición.
65	Verónica	Pero no estaría cumpliendo la primera condición, o sea, la primera condición dice pues que (...) Bueno si (...) Dijeron que A no estaba en la mitad y pues abajo en la segunda condición si dicen que A
66	Viviana	Pero no está en el mismo segmento
67	Verónica	Pero para que equidiste no sería punto (...) ¡ay no nada!
68	P. Diego	Sigue, está bien. Está bien y esta interesante la discusión de Verónica porque de alguna manera, ella pregunta que porque el punto A no esta en el segmento. Bertha [dando la palabra pues levanto la mano]
69	Bertha	Yo no estoy de acuerdo con lo que dice Xiomara porque (...) [pausa]
70	P. Jeisson	Atiende a la pregunta porfa, que te está preguntando el profe
71	Bertha	Ay señor, que pena
72	P. Diego	Verónica todavía pregunta porque A no esta en el segmento.
73	Bertha	¡Ah! Porque la equidistancia no necesariamente tiene que estar en el mismo segmento sino digamos tres puntos y el punto de la mitad tiene que tener la misma distancia.
74	P. Diego	Jeimy Señora [asignando la palabra]
75	Jeimy	Eh... pues en el segundo ejemplo como nos piden que cumplamos nada más la segunda condición que es equidistancia, en el primero eh... la condición es interestancia, la interestancia nos pide que en la misma recta este B , que A este entre B y C [corrige] pero que este en la misma recta, entonces, si tu sacas a A [refiriéndose al punto] de la recta no estaría pues en la recta y no estaría cumpliendo la primera condición que es la interestancia.
76	Sonia	Eh... pues yo iba a decir cómo lo mismo, porque es que en el segundo ejemplo dice que no se puede cumplir la primera condición y la primera condición es que estén en el segmento, o sea, sobre el segmento, los tres puntos. Para que en el segundo no se cumpla la primera condición, tiene que sacar al punto, o sea, que quede a la misma distancia, pero tienen que sacarlo de la recta para que no se cumpla la primera.
77	P. Jeisson	¿si es claro niñas? Entonces ahí, en el segundo ejemplo ¿ A es punto medio?
78	Estudiantes	No.

79	P. Jeisson	Entonces vemos dos ejemplos, estamos viendo dos ejemplos donde no es punto medio, ahora un tercer ejemplo donde nos piden que no cumpla ninguna de las dos condiciones ¿a quién le había asignado el P. Diego? ¿Quién va a pasar el tercero?
80	P. Diego	Por aquí, pasen niñas [refiriéndose a Aleida y Marisol]
81	Marisol	Dice, proponga un ejemplo donde no se cumpla ninguna de las dos condiciones. Explique su ejemplo [la estudiante lee lo que se propuso en la guía]. Pues, o sea, no se está cumpliendo las dos condiciones [señala la construcción ] B no equidista de C ni de A , ni está en el mismo segmento. Y ya.
82	P. Jeisson	¿Qué dicen ustedes niñas?
83	Camila	Pues yo pienso que el ejemplo está mal, porque es que ahí se está cumpliendo el segundo, bueno la segunda condición, ¿por qué? Porque está en la mitad y no está en el segmento. [basándose en la representación realizada por sus compañeras]
84	Marisol	Esta más corrido [refiriéndose al punto B] la idea era que no estuviera en la mitad
85	P. Jeisson	Bueno ¿tú qué dices? [señalando a una estudiante]
86	Amelia	Pues si la harían así, estarían cumpliendo pues por parte la primera pero por parte no, porque o sea, estaría cumpliendo que no debería estar interesante de B , o sea, de C y de A , pero también la marcación, o sea, C , B y A , arriba y B punto abajo, entonces pues ahí si se cumpliría, pero si hacen la línea, o sea, si hacen el punto en el segmento, entonces ahí si se cumpliría la primera.
87	P. Jeisson	¿Dónde está el punto acá? [Señalando el tablero] recordemos que hay que saber marcar, si ese punto está aquí en el segmento pues marcar que está ahí o si esta por fuera marcar donde está el punto B . Para identificar listos. [En esta intervención el P. Diego señaló la construcción realizada en el tablero]. Aquí cambiando la condición, aquí cambiaron B por A , ¿cierto? Y ¿este B es punto medio? ¿Por qué?
88	Sonia	Pues obviamente no porque ahí no está cumpliendo ninguna de las condiciones ni es esta, o sea, ni es equidistante ni tampoco pertenece al segmento, entonces pues no es punto medio.
89	P. Diego	¿Están de acuerdo?
90	Estudiantes	Si
91	P. Jeisson	Entonces para que un punto, sea punto medio de un segmento que condiciones debe cumplir Teresa
92	Teresa	Para que un punto sea punto medio tiene que cumplir las dos condiciones que se presentaron, que tiene que estar en el mismo segmento y tiene que tener la misma distancia.
93	P. Jeisson	Listos, vuélvelo a decir, ¿por fa!
94	Teresa	Que para que se cumplan las condiciones de, para que sea punto medio se tiene que cumplir las condiciones, es decir, los tres puntos tienen que estar en el mismo segmento y tienen que tener la misma distancia.
95	P. Jeisson	¿Si es claro?
96	Estudiantes	Si señor.
97	P. Jeisson	Listo entonces, tratemos de construir el punto medio... en GeoGebra.
Las estudiantes empiezan a trabajar por parejas en cada computador.		
98	P. Jeisson	Creo que hoy no tenemos ayuda del video beam, entonces cada pareja trabaja en su computador. ¿Quiénes ya pudieron hacer el punto medio?
99	Estudiantes	Algunas levantan la mano
100	P. Jeisson	¿Quiénes no han hablado? [una estudiante levanta la mano, se le asigna la palabra]
101	Jenny	Nosotras realizamos el punto medio, organizamos un segmento y colocamos el punto C en cualquier lugar del segmento, después halle la medida con la herramienta de <i>distancia</i> y comenzamos, primero confirmamos que no estuviera, que el punto perteneciera al segmento [corrigiendo] y después comenzamos a moverlo hasta que ya equidistara los tres puntos.
102	P. Jeisson	Ese es un procedimiento valido, ubicaron un punto en el segmento y lo arrastraron hasta que quedara las dos medidas iguales. ¿hay otro procedimiento diferente? Dime [señalando a Lili]
103	Lili	Nosotras encontramos uno que, vamos a la barra de herramientas, damos donde dice <i>punto</i> y bajamos hasta donde dice <i>punto medio o centro</i> , después de haber hecho el segmento obviamente, podemos el punto en cualquier lado, más específicamente en la mitad, después

		vamos a la barra de herramientas donde dice <i>ángulo</i> , vamos donde dice <i>distancia y longitud</i> y le damos en el punto del lado izquierdo a la mitad, ahí nos da una medida y luego del lado derecho a la mitad y nos da la misma medida
104	P. Jeisson	¿Quiénes más hicieron ese procedimiento?
105	Sonia	Parecido, pero no.
106	P. Diego	Utilizaron la herramienta punto medio del programa.
107	Sonia	Nosotras construimos primero el segmento, a diferencia de ellas nosotras primero construimos nuestro segmento, después si usamos, pues la opción <i>punto medio</i> y para verificar que estuviera bien pues usamos la opción de <i>distancia</i> .
108	P. Jeisson	¡Eh! ¿Cómo te llamas? [señalando a una estudiante]
109	Jenny	Jenny
110	P. Jeisson	Jenny ¿entendiste el procedimiento? ¿Qué diferencia hay con el tuyo?
111	Jenny	Pues que ellas, o sea, ya había una herramienta a parte de la que yo utilice para de una vez hallar el punto medio, pero pienso que mi construcción fue como más larga, un poquito más prolongada y entonces la de ellas es más rápida.
112	P. Jeisson	Sí, podemos ver que hay dos construcciones, hay una opción que me permite rápidamente encontrar el punto medio, ese punto cumple las condiciones, está en el segmento, como dijo Tatiana, y equidista. Esta interstancia [señalando la construcción] la podemos relacionar como lo que decía Tatiana, que pertenezca al segmento y la segunda equidista, ese punto equidista de los extremos. Escucho a Teresa y escucho después a ¿Cómo es tu nombre? [al evidenciar que dos estudiantes levantan la mano, la niña a la que le pregunta el nombre es Jeimy]
113	Teresa	Pero es que mirando la construcción que hizo, Jenny, si se mueve, ellas lo que hicieron fue poner un punto y ubicarlo en la mitad, pero si se llega a mover el punto, se va a cambiar el punto medio y ya no va a cumplir las dos condiciones.
114	P. Jeisson	Okey, ese punto va a ser, el punto que construyo Jenny, como dice Teresa si se mueve ya no cumple las condiciones. ¿Sí? Es como una dificultad hay en tu construcción.
115	Sonia	Mientras que en nuestra opción podemos mover cualquiera de los dos extremos y va a seguir moviéndose el punto medio.
116	P. Jeisson	Listo dale [refiriéndose a Jeimy]
117	Jeimy	Ehm, bueno nosotras encontramos otra, en la quinta opción, en la barra de herramientas, en la segunda que dice <i>circunferencia centro punto</i> , la pusimos, luego fuimos a la primera opción de segmento y pusimos la opción dos, la pusimos en la circunferencia, o sea, hicimos el segmento dentro de la circunferencia y luego pasamos a la octava opción de las herramientas, en la que dice como <i>distancia y longitud</i> , y da la misma medida porque pues en la circunferencia todos son equidistante del centro, del punto centro, hacia cualquier punto de la circunferencia.
118	P. Jeisson	Entonces, lo que ellas hicieron fue, un segmento después hizo una circunferencia que pasara por los extremos y luego le encontraron el centro de la circunferencia, que sería tanto el centro del segmento, como el centro de la circunferencia. Listo, vamos ahora a establecer la definición de perpendicularidad. Listos, retomen su definición, retomen lo que hicieron. Un minuto para eso por favor, analicen las ideas que van a decir.
Las estudiantes compartes con su pareja ideas y recuerdan lo realizado para en unos minutos iniciar nuevamente la socialización sobre perpendicularidad. Antes de esto el P. Diego hace una recomendación para que las estudiantes pidan la palabra.		
119	Aleida	Nosotras colocamos, son rectas o segmentos cruzados que forman ángulos rectos de noventa grados.
120	P. Jeisson	Vuélvela a decir por favor.
121	Aleida	Son rectas o segmentos cruzados que forman ángulos rectos de noventa grados.
122	P. Jeisson	Listo, con respecto a la definición que dio la compañera hay alguien que tenga que objetar, contradecir, que no esté de acuerdo.
123	Xiomara	Yo tengo una pregunta
124	P. Jeisson	Pregunta
125	Xiomara	Necesariamente para la perpendicularidad, tienen que tener noventa grados las rectas.
126	P. Diego	¿Qué le responde ustedes?
127	Sandra	Yo digo que sí, porque en la actividad que nos habían dejado pues precisamente se estaba hablando de la perpendicular, de la perpendicularidad, entonces dice que la perpendicularidad forma un ángulo de noventa grados con otra recta ¿si me entienden? O sea, siempre tiene que ir recto el ángulo que se está formando.
128	P. Diego	Talía, señora cerramos aquí [al ver que la estudiante levanta la mano para participar]

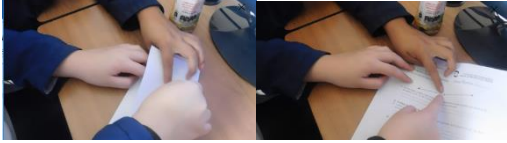

129	Talía	Pues yo digo que, si deben tener, pues el ángulo de noventa grados porque si nos damos cuenta en todos los ejemplos que nos dieron se ponía que eran perpendiculares por lo que estaban unidas por el ángulo de noventa grados, es más como una característica para tu poderlo diferenciar de otras rectas.
130	P. Jeisson	Escuchemos ahí, escuchemos ahí. Es una que...
131	Talía	Característica...
132	P. Jeisson	Lo último
133	Talía	Es una característica que nos ayuda a diferenciar de otras rectas o segmentos.
134	P. Jeisson	Es la característica que cumplen los casos ¿Cuáles casos están ahí? [refiriéndose a los presentados en la guía] ¿el caso cuál?
135	P. Diego	¿Qué casos de los que están ahí son perpendiculares y cuáles no? Patricia [asignando la palabra]
136	Patricia	Los casos que son perpendiculares son los que tienen que al prolongarse se encuentran y forman ángulos de noventa grados, mientras que los ángulos que no forman noventa grados no son perpendiculares.
137	P. Jeisson	Lo que me quiero decir es que aquí Talía dice que, defino perpendicularidad a partir de la característica de los casos que son perpendiculares, ahí hay unos casos que dicen que, si son, no son. A partir de los casos que si son ¿Qué busco?
138	Sonia	Características iguales entre los que si son
139	P. Jeisson	¿y la característica cuál es? Tu dínos una [señalando a una estudiante]
140	Camila	Que se cruzan
141	Victoria	Que se cruzan formando un ángulo de noventa grados
142	P. Diego	Podemos cerrar con dos cosas, por favor, una niña que nos diga que aprendimos acerca de punto medio, como diferenciamos que es punto medio y cuando no, las condiciones que las cumplan. Y otra niña que nos diga acerca de perpendicularidad. Porque, para que, como hicimos la sesión pasada tengamos todos en común y hablemos el mismo lenguaje, por lo menos la clase pasada definimos que es circunferencia ¿cierto? Todo el curso vamos a manejar esa definición. Entonces Sonia punto medio y Xiomara perpendicular y Patricia circunferencia y así recordamos los tres conceptos que, hasta la fecha, además de los que ya revisamos en la tabla debemos tener pendientes.
143	Sonia	Pues de punto medio ya pues nos quedó claro que para que sea punto medio se tiene que cumplir las dos condiciones que son; una, la interstancia que estén los tres puntos sobre el segmento y equidiste el punto medio de los dos extremos.
144	P. Jeisson	¿Todos de acuerdo?
145	Todas	Si
146	Xiomara	Dos rectas perpendiculares si se cruzan y forman ángulos de noventa grados.
La socialización de circunferencia no se alcanzó a dar por inicio de otra clase.		

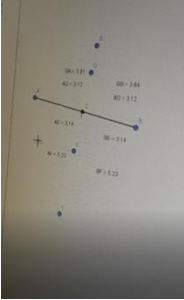
ANEXO 9: Transcripción de la clase 8


Sesión 8. Realizada el 16 de abril de 2018

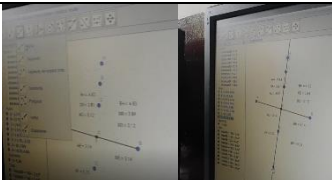
En esta sesión se da inicio a la tarea 5 relacionada con la construcción de la definición de mediatriz, en ella se evidencian dos momentos, un trabajo por parejas y luego un trabajo grupal donde se socializan algunas ideas y respuestas a las preguntas propuestas en la tarea.


1	P. Diego	El día de hoy y lo que se haga el viernes va a ser más significativo de alguna manera para todos, entonces, el día de hoy les vamos a entregar una nueva guía, la idea es que revisemos cada uno de los ejercicios que están allí presentes o en los puntos que se nos solicita y empecemos a trabajar la idea es que hoy avancemos en su mayoría en toda esta actividad. Listo.
Estudiantes reparten las guías, una hoja por pareja.		
2	P. Diego	Por favor por parejas empezamos a leer la actividad y empezamos a trabajar en ella, ya en quince minutos para que sepan, faltan cinco minutos para la 1, a la una y diez empezamos la socialización junto al computador y vamos a escuchar al igual que razonamientos o que pensamientos tienen para solucionar esa guía que se presentó. Listo. Si tienen preguntas pueden levantar la mano y nosotros nos acercamos para resolverlas.
Las estudiantes empiezan a trabajar por parejas de trabajo leyendo la guía entregada		
3	Sandra	Póngale cuidado a lo que yo le quiero decir. Lo que paso fue que con Alexandra deducimos que podíamos acá. Eeh punto medio digamos midiendo con la regla y dividido dos para sacar el punto centro, pero no se puede porque dice que sin usar regla y sin usar compas, ni GeoGebra ni nada. Entonces... (Alexandra la interrumpe)
4	Alexandra	¡¡Pero yo le digo que he!! O sea digámoslo así tu nos das el valor de ese segmento si me hago entender, pero muy fácilmente tu puedes sacar el punto medio dividiéndolo en dos da o sea prácticamente da eso por ejemplo ese [señalado en la hoja un segmento] mide 9 cm, si 9 cm y tú le sacas la mitad que sería 4,5 cm y en el 4,5 daría toda la mitad de la recta.
5	Sandra	Pero es que no nos están dando el valor, no nos están dando nada.
6	Alexandra	Como que no
7	P. Jeisson	La pregunta aquí no es la medida ni nada de eso. La pregunta no es tampoco digamos... si lo puedo encontrar o como lo puedo encontrar. La pregunta es ¿existe? [Las estudiantes responden: sí, sí, existe] y como justifican su respuesta.
8	Alexandra	Nosotros tenemos la recta conformada de puntos, son puntos consecutivos y si nos dicen que hay mitad de la recta pues obviamente existirá como la... o sea no sé cómo explicarlo, como la recta esta... con puntos consecutivos que forman una recta entonces obviamente el punto medio sería alguno de los puntos consecutivos.
9	P. Jeisson	¿Cuál estas diciendo tú? es que tú dijiste algo, acabas de decir algo.
10	Sandra	¿Los puntos consecutivos?
11	P. Jeisson	No el anterior, tu mencionaste un punto. De qué punto están queriendo hablar ustedes.
12	Alexandra	Del punto medio
13	P. Jeisson	Del punto medio [afirmando] o sea, que a la respuesta a esto [señalando la guía ¿cuál sería el punto que estaríamos buscando en primera instancia?
14	Alexandra y Sandra	El punto medio [en una sola voz], el punto C
15	P. Jeisson	O sea, el punto C ¿Qué va a ser el (...)?
16	Alexandra	El punto medio
17	P. Jeisson	Ese punto ¿cumple la condición de equidistancia?
18	Alexandra	Sí
19	P. Jeisson	Sí, O sea, ustedes darían respuesta a la pregunta ¿cómo? Existe un punto que equidiste ¿Cuál? (Sandra aún no se convence y dice: no acá no hay ningún punto)
20	Alexandra	Si el punto medio
21	P. Jeisson	Ah Listo
22	Alexandra	En serio, eso era todo
23	P. Jeisson	Existe un punto, el punto medio ¿y porque el punto medio? (Sandra sigue sin estar convencida y menciona: es que acá yo no veo ningún punto medio [señalando la guía])
24	Alexandra	Por qué es la mitad de la recta
25	P. Jeisson	Ah ok. Listo entonces ahora la pregunta es ¿existe ese punto? Sí
26	Sandra	No. Pero es que yo no veo ningún punto

27	Alexandra	Pero es que no necesitas verlo, necesitas deducirlo
28	P. Jeisson	Mira [dirigiéndose a Sandra] escucha a tu compañera ¿Qué es lo que necesitas?
29	Alexandra	Deducirlo, o sea, no necesitas verlo en el dibujo sino deducirlo
30	P. Jeisson	Deducirlo, si me hago entender, entonces tu compañera dice: hay que deducirlo, ¿cómo deduzco que existe un punto? ¿Porque hay un punto que? Medio [Alexandra responde] P. Jeisson ¿qué pasa con ese punto medio? Que es la mitad de la recta [Alexandra contesta] Del segmento [corrigiendo]
31	P. Jeisson	Ustedes que harían, es que hay que leer la pregunta ¿existe un punto que equidiste de los extremos A y B? sí, no o no se sabe. Explique su respuesta. ¿Cuál sería el punto?
32	Alexandra	El punto medio
33	P. Jeisson	Ah ok.
34	Alexandra	¿Y eso es todo?
35	P. Jeisson	Pero expliquen porque el punto medio cumple esa condición.
En otro grupo se presenta la siguiente solución		
36	Sonia	Entonces no sirvió esto
37	P. Jeisson	¿Por qué?
38	Sonia	Pues porque nosotros usamos como método, pues como no se podía ni regla ni compas ni GeoGebra nosotras utilizamos el método manual
39	P. Jeisson	Como así el método manual
40	Sonia y Viviana	Las estudiantes describen el paso a paso de su doblez como podemos ver en la primera imagen, al desdoblar la hoja hallan un doblez en la hoja en lo que para ellas es la mitad 
41	Sonia	Ves profe dio, o sea que mis deditos si funcionan
42	P. Jeisson	Pero es que mira que se generó acá (señalando la hoja). Haz bien el doblez. (La estudiante lo hace). Pero la pregunta no es si lo puedo encontrar. Mira la pregunta es ¿existe un punto que equidiste de los puntos A y B?
43	Sonia y Viviana	Sí... (a una sola voz)
44	P. Jeisson	¿Cuál?
45	Sonia	Este (señalando el doblez en la mitad del segmento) 
46	P. Jeisson	¿Este? [señalando la hoja donde las estudiantes también habían mostrado el supuesto punto medio]
47	Sonia	Aja... equidista de A y equidiste de B
48	P. Jeisson	Listo... y explica tu respuesta. Listo, doblas la hoja. ¿Será que hay otro?
49	Viviana	Los de los deditos
50	P. Jeisson	Y este específicamente como se llama [señalando la hoja]
51	Viviana	Punto medio
52	P. Jeisson	Ese es el, punto medio [afirmando] o sea que, si a mí me dan un segmento, ¿puedo encontrar un punto que equidiste de los extremos?
53	Viviana y Sonia	Sí
54	P. Jeisson	¿Cuál sería el primero?
55	Viviana y Sonia	El punto medio
56	P. Jeisson	Listo, ya encontraron ¿Cuál sería la respuesta ahí? Este que ustedes encontraron acá [señalando la guía] el punto medio [responde así mismo]. Ahora tienen que hacerlo en GeoGebra, ya no tienen que encontrar uno, tienen que encontrar muchos y utilicen ese doblez que se les genero acá [señalando la hoja].
57	Viviana	Entonces podemos poner como respuesta que, si lo encontramos, pues (...) uniendo los puntos.
58	P. Jeisson	Sí claro

En otro recorrido el P. Diego socializo con otro grupo de estudiantes (Verónica y Leidy) las cuales acudieron a él con el fin de aclarar dudas, tal cual como se muestra a continuación		
59	P. Jeisson	Hola niñas ¿Cómo están no las había saludado?
60	Verónica y Leidy	Hola, bien
61	Leidy	Este, es que no entiendo este [señalando uno de los puntos de la guía] es que ya llevamos como esto, pero no sabemos sí, si está bien.
62	P. Jeisson	Listo. ¿Cuál es el segmento?
63	Verónica	Este [señalando la pantalla e indicando un segmento construido en GeoGebra]
64	P. Jeisson	¿Encontraron un punto medio de A y B ?
65	Verónica y Leidy	Sí [al mismo tiempo]
66	P. Jeisson	Sí. Listo, ¿Por qué ese es punto medio? Bueno ¿Por qué se equidista?
67	Verónica	Porque están como dadas las mismas distancias
68	P. Jeisson	Tienen la misma distancia, bien. Ahora, listo la idea es encontrar otro punto (...) ¿Cuál encontraron?
69	Leidy	Se podría decir que estos dos [señalando en dos puntos el segmento] o sea, esa es nuestra pregunta si esa parte está bien.
70	P. Jeisson	No, pues no sé. Aquí lo que dice es: hay que encontrar puntos que equidisten siempre de A y de B , ¿el punto C ustedes dicen que equidista?
71	Verónica	Sí, aja
72	P. Jeisson	Ok, ¿el punto E equidista de A y B ?
73	Leidy	¡Ah no!
74	P. Jeisson	¿Equidista?
75	Leidy	No.
76	P. Jeisson	No, o sea que este punto [refiriéndose al punto E] no me sirve, ¿cierto? ¿Por qué no me sirve?
77	Verónica y Leidy	¿Porque no equidista de A y de B [a una sola voz]
78	P. Jeisson	¿Y el punto D ?
79	Leidy	Tampoco
80	P. Jeisson	Tampoco, entonces hay que buscar otro punto aparte de C que siga siendo ...
81	Leidy	Profe y es dentro del mismo segmento
82	P. Jeisson	No, no sé. ¿Cuál es la única condición que me dan? uhm acá que equidisten (...) pero que no, me piden la otra condición. Listo. Entonces hay que buscar otro punto.
El P. Diego continuó con su recorrido con el fin de identificar como se logró la interpretación de la tarea. A continuación, se evidencia otra conversación entre una pareja de estudiantes (Yaneth y Valeria)		
83	P. Jeisson	¿Ustedes que están haciendo Niñas?
84	Yaneth	Encontrando los puntos profe que pueden equidistar a A y B . Entonces hasta ahora vamos cuatro
85	P. Jeisson	¿Y bueno como lo hicieron?
86	Valeria	Pues mire profe, o sea nosotros dijimos nos dijeron solamente los puntos, no tenían que estar en el segmento el punto que... sea la mitad, que equidiste de A y B . Entonces dijimos, por lo tanto, hay muchos puntos, porque pudimos encontrar muchos puntos en medio de A y B . Entonces como este [refiriéndose a dos puntos E y F] es equidistante a A y a B . O sea, aquí está la prueba [señalando los puntos en la siguiente imagen]
		
87	P. Jeisson	Ah ok
88	Valeria P	Pero nosotras, o sea, nosotras pusimos el punto y por medio de (...) ¿Cómo se llama? <i>Distancia</i> y <i>longitud</i> miramos cual era el, o sea, como que tuvieran la misma distancia.
89	P. Jeisson	Ah, o sea, ustedes fueron, ubicaron un punto y después ubicaban la distancia.
90	Valeria y Yaneth	La distancia [a una sola voz] para saber si era equidistante.
91	Valeria	Para saber que era equidistante.

92	P. Jeisson	Otro punto, ubiquen otro punto a ver como lo hicieron, construyan otro punto que tenga la distancia.
93	Valeria	Entonces pusimos el punto H y lo medimos, de aquí [refiriéndose a un extremo del segmento] a acá [refiriéndose a el punto H] y desde aquí [refiriéndose al otro extremo del segmento] hasta H . Y este punto 
94	P. Jeisson	¿Cómo se llama ese punto?
95	Valeria	H . Lo movíamos para, (...) para mirar la equidistancia.
96	P. Jeisson	¿Pero ustedes más o menos saben dónde ponerlo?
97	Valeria	Sí. Pero es que yo me he estado dando cuenta y donde pusimos el punto C , ehh (...) esos puntos también, o sea, como que va a ser lo mismo pero lo único que va a cambiar es que, o sea como la distancia, pero va a ser como lo mismo eh. (...) [señala la consecución de puntos que se forma] Yaneth interrumpe.
98	Yaneth	Como la misma hilerita
99	Valeria	Sí
100	P. Jeisson	¿La misma qué?
101	Yaneth	Hilera
102	P. Jeisson	Hilerita, hilerita ¿y esa hilerita que nombre tiene?
103	Valeria	Línea;
104	P. Jeisson	¿Línea?
105	Yaneth	Una línea recta
106	P. Jeisson	Una línea, no ¿una línea?
107	Yaneth	¿Un segmento?
108	Valeria	Ayyy;
109	P. Jeisson	¿Una qué?
110	Valeria	Un segmento
111	P. Jeisson	¿Un segmento?
112	Valeria	Una línea
113	P. Jeisson	Pero es que una línea puede ser curva
114	Yaneth	Una línea recta entonces
115	P. Jeisson	¡Ah! ¿Una?
116	Valeria y Yaneth	¡Línea recta [al mismo tiempo] ah! Una recta [menciona Yaneth]
117	P. Jeisson	Una recta [afirmando] entonces ¿será que es una recta?
118	Yaneth	Yo diría que sí
119	P. Jeisson	¿Cómo dibujamos una recta?
120	Valeria y Yaneth	(Segundos de silencio) Mmm no sé. (risas)
121	Valeria	Un segmento hagamos [la estudiante busca la herramienta para empezar a construir el segmento]
122	Yaneth	No, una recta [señalando la herramienta en GeoGebra]
123	P. Jeisson	Que necesitas para generar una recta
124	Yaneth	Puntos
125	P. Jeisson	Pues señala otro punto
126	Valeria	¿Otro punto? Ay espere
127	P. Jeisson	No ya dos de los que tienes
128	Valeria	Pero es que no, no, no da.
129	P. Jeisson	Suelta [refiriéndose al ratón para ayudarle a la estudiante a trazar la recta]. Listo, ahora otra vez. ¿Cómo vas a hacer la recta? ¿Cómo te llamas tú?
130	Yaneth	Yaneth [diciendo el segundo nombre]
131	P. Jeisson	¿Y tú? [refiriéndose a su compañera]
132	Valeria	Valeria
133	P. Jeisson	Listo, entonces
134	La estudiante construye una recta utilizando dos puntos de los que había hallado anteriormente y de los cuales mencionaba eran equidistantes a los extremos del segmento A y B . Como se muestra en la siguiente imagen.	

		
135	P. Jeisson	¿Qué pasa con esos puntos niñas? [refiriéndose al conjunto de puntos que las estudiantes habían construido]
136	Valeria y Yaneth	Están en la misma recta [menciona Valeria apoyada por su compañera]
137	P. Jeisson	Están en la misma recta, y ¿Cómo se llama eso, nosotros alguna vez lo estudiamos?
138	Valeria	Ah...si
139	Yaneth	Eso es un ... [las estudiantes se remiten a su carpeta de apuntes especialmente a las nociones básicas y empiezan a analizar rápidamente cada una de las definiciones]
140	Valeria	¿Interestancia?
141	Yaneth	Interestancia [afirmando]
141	P. Jeisson	¿Interestancia? ¿Seguros?
142	Valeria	No. Colinealidad [con firmeza] que tienen que estar “dos o más puntos colineales si y solo si perteneces a la misma recta”
143	P. Jeisson	Ahh muy bien, entonces.
144	Yaneth	Entonces. Son puntos colineales que pertenecen a la misma recta [respondiendo la pregunta realizada anteriormente por el P. Diego “¿Qué pasa con esos puntos niñas?”]
145	Valeria	Los puntos de esta recta son equi [confunde la palabra], que son colineales son equidistantes a A y B ¿no? [durante su afirmación la estudiante señaló inicialmente los puntos, los extremos y por último la recta construida]
146	P. Jeisson	Muy bien, sí. Pero a mí me cabe una pregunta si yo muevo este punto... [El P. Diego escoge un punto de los hallados por las estudiantes] listo ustedes ya encontraron una recta [las 1estudiantes afirman] este punto yo lo muevo este punto ¿ya no es?
147	Yaneth y Valeria	Colineal [a una sola voz]
148	P. Jeisson	¿Ya no es?
149	Yaneth y Valeria	Ni equidistante
150	P. Jeisson	Ni equidistante, muy bien, muy bien. Este es muy bueno [refiriéndose a lo construido por las estudiantes] tienen una construcción muy buena porque ustedes que encontraron a parte de encontrar puntos ¿Qué encontraron?
151	Yaneth	Una recta y los puntos colineales
152	P. Jeisson	Recta
153	Valeria	Que los puntos equidistantes a A y B son colineales
154	P. Jeisson	Son colineales, es decir, pertenecen a la recta, muy bien. Pero yo quiero que... todo punto que yo coloque sea colineal a pesar de que yo lo mueva, si yo lo muevo acá [escoge el punto extremo B] el único que se mantiene ¿quién es?
155	Valeria	C [refiriéndose al punto medio]
156	P. Jeisson	¿Es él?
157	Valeria	El punto C
158	P. Jeisson	¿Y ese qué punto es?
159	Yaneth	El punto medio
160	P. Jeisson	El punto medio, ¿y estos puntos siguen siendo equidistantes? [refiriéndose al conjunto de puntos hallados por las estudiantes]
161	Valeria y Yaneth	No.
162	P. Jeisson	Que tendría que hacer yo, como correr esto para acá [refiriéndose a la recta] entonces ¿cómo hago para que yo arrastre [uno de los extremos] esta recta [refiriéndose a la construida por las estudiantes luego de unir dos puntos] también se mueva? Volvamos a dejar más o menos donde estaba. Según la clase pasada, utilicen los conceptos que vieron la clase pasada a ver que sale por ahí. Listo, pero tienen una muy buena construcción, una muy buena idea. Listo niñas
163	Valeria y Yaneth	Listo, bueno dale.

El P. Diego sigue con su recorrido por el aula, a continuación, se evidencia otro dialogo con un grupo de estudiantes. Lili y Xiomara		
164	Lili	Pues, no necesitamos usar GeoGebra
165	P. Jeisson	¿Por qué?
166	Lili	Pues aquí ustedes decían como que... sin usar regla y compas.
167	P. Jeisson	Espérame te interrumpo un minutico ¿Cómo te llamas?
168	Lili	Lili
169	P. Jeisson	¿Y tú?
170	Xiomara	Xiomara
171	P. Jeisson	Xiomara, listo. Ya ahora si
172	Lili	Entonces pues aquí [señalando la guía de trabajo] ustedes decían como que no teníamos que usar la regla, el compás o GeoGebra... entonces pues teníamos como que concluir nosotras mismas.
173	P. Jeisson	Sí
174	Lili	Entonces nosotras pusimos que sí, porque a pesar... de no tener la herramienta (...) nombrada el punto medio es parte del segmento que se encuentra graficado.
175	P. Jeisson	O sea que ustedes si yo les pregunto, les doy un segmento ¿existe un punto que equidiste a los extremos? ustedes que me dicen.
176	Xiomara	Eh... sí. Porque hace parte del segmento que sería el punto medio que siempre existe.
177	P. Jeisson	O sea que tú dirías que, ese punto que estamos buscando, que existe [afirmando] ¿es el punto?
178	Lili	Medio
179	P. Jeisson	¿Ese punto, sería el punto medio?
180	Xiomara	Sí
181	P. Jeisson	Listo, entonces existe
182	Xiomara	Sí. Sí existe
183	P. Jeisson	Y ustedes lo argumentan porque es el punto medio
184	Xiomara	Sí, aja porque hace parte del segmento
185	P. Jeisson	muy bien
186	Xiomara	Y respecto a esto...
187	P. Jeisson	Y aquí [refiriéndose a la construcción realizada por las estudiantes] ustedes me imagino que lo pusieron, este es el segmento \overline{AB} y este es el punto (...)
		
188	Xiomara	Nosotros pusimos, perdón cojo el mouse, nosotros pusimos entonces. Determinamos cual era el punto medio que en este caso es D , mediante la herramienta que nos brinda, eh... no el encuentro aquí, <i>medio o centro</i> . Nosotros la encontramos y lo que dedujimos, deducimos, es que no existe más de un punto medio porque hay solamente una mitad entre, en el segmento. Pero pues puede haber más puntos medios que se van formando cada vez que haya más puntos en el segmento. Entonces, digamos puede haber un punto medio entre A y D que en este caso es E [refiriéndose a los puntos] y puede ser así siempre. Entonces entre A y B va a haber un punto medio y así.
189	P. Jeisson	Pero entonces mira que la pregunta siempre es existe más puntos que equidisten de A y de B
190	Xiomara	Sí
191	P. Jeisson	Siempre, o sea a que me hace referencia que A y de B , siempre ...
192	Xiomara	Va a haber un punto, entonces lo que... repito lo que nosotros dijimos es que entre A y B solamente va a haber un punto, porque solamente hay una mitad y esos son los únicos puntos que equidisten, va a haber un solo punto que equidiste de A y B
193	P. Jeisson	Una mitad ...
194	Xiomara	... y de resto si puede haber más que equidisten de otros puntos, pero no van a ser los mismos
195	P. Jeisson	Ok, listo. Pero supongamos ustedes dicen que el único punto que equidista a A y B es...
196	Xiomara	De A y B es D [refiriéndose a los puntos]
197	P. Jeisson	Solo D [refiriéndose al punto] ok entonces ahorita (...) hay grupos que pues dijeron que sí que hay puntos que equidistan
198	Xiomara	¿y Cómo?
199	P. Jeisson	Ahorita miramos y ustedes van miran si las convencen o ustedes las convencen a ellas
200	Xiomara	Listo
201	P. Jeisson	Listo, porque aquí solo están pidiendo que sean distancias, equidistancia, si yo les digo equidistancia ¿qué quiere decir eso?

202	Lili	Pues que un punto debe estar... [Xiomara toma una reacción de sorpresa en este instante y menciona "puede haber más puntos" por tal motivo el P. Diego le da la palabra]
203	Xiomara	Si existen más puntos [con firmeza] porque pueden estar por fuera del segmento.
204	P. Jeisson	¿Porque deduces eso?
	Xiomara	Porque dice solamente que equidista y no que tenga que estar en la línea
205	P. Jeisson	¿Qué equidista y no que...?
206	Xiomara	Que no necesariamente debe estar en el segmento [al mismo tiempo]
207	Lili	Que equidiste de A y B mas no que estén en el segmento [al mismo tiempo]
208	P. Jeisson	Pues trabájlenlo por ahí a ver que resulta.
209	Xiomara	Listo
210	P. Jeisson	Ok niñas listo, gracias, eh (...) Lili y Xiomara.
Los Profesores dan por finalizado el trabajo por parejas, así mismo, el recorrido por los grupos que tenía como fin aclarar las dudas de las estudiantes respecto a la tarea. Enseguida inicia una socialización grupal de los hallazgos de las estudiantes. Varias estudiantes están conversando y otras solicitan hacer silencio para atender.		
211	P. Jeisson	Silencio gracias.
212	Algunas estudiantes	Shhh [pidiendo silencio]
213	P. Jeisson	Hay varias soluciones ya, entonces vamos a mirar algunas. ¿Pudieron dar solución a la actividad? [pregunta general]
214	Estudiantes	Sí (...) [algunas estudiantes] No (...) [otras estudiantes]
215	P. Jeisson	¿Qué grupos no? [Las estudiantes levantan las manos] uno, dos tres y cuatro grupos [contando a las niñas que no solucionaron la tarea] lo demás grupos (...) tuvieron solución [las estudiantes responden que sí] listo. Primer punto, primera pregunta [señala una estudiante para que lea] léenos la pregunta por fa.
216	Jeimy	Sin usar regla, compas o geometría dinámica "GeoGebra" existe un punto que equidiste de los puntos A y B . ¿Si, no o no se sabe? Explique su respuesta. Entonces nosotras escribimos que, si existe desde que no sean en una recta o en un punto, ¿por qué? Por qué las rectas son infinitas y no podríamos con certeza dar un punto medio, y los puntos pues porque obviamente no tienen mitad.
217	P. Jeisson	Listo, entonces tú dices que sí. Hay alguna otra respuesta a esta pregunta. [las estudiantes levantan la mano y el P. Diego le da la palabra a Cecilia] ¿Cómo te llamas?
218	Cecilia	Cecilia, pues nuestro grupo [es interrumpida por el P. Diego ya que algunas estudiantes no realizaban silencio], pusimos que no se sabe porque para poder hallar el punto medio se necesitan herramientas que nos den un resultado concreto.
219	P. Jeisson	O sea que tú ya identificaste algún punto ¿cuál?
220	Alexandra	Medio, el punto medio [respondiendo por la compañera]
221	P. Jeisson	El punto medio, dime [una estudiante levanta la mano]
222	Amelia	Nosotros dijimos que, si había posibilidad de tener un punto equidistante ya que, así no tengamos claro un punto medio, si... o sea nosotros nos debemos idear como construir ese punto centro.
223	P. Jeisson	Si dime [señalando a otra estudiante que levanta la mano]
224	Jenny	Pues nosotras pusimos que, si existe un punto, pero... es muy difícil hallarlo sin estas herramientas, digamos no tanto GeoGebra, pero sin la regla y el compás que son indispensables, pero digamos que si se podría hallar así a simple vista infiriendo.
225	P. Jeisson	Niñas lo que les comentaba a varias cuando me estaban preguntan, es que la pregunta dice ¿existe un punto? [algunas estudiantes contestan sí] ¿Más no qué? [Sandra levanta la mano]
226	Sandra	Nosotros, bueno nosotras pusimos sí, sí porque nos da respuesta que, el punto medio, porque es la mitad del segmento. O sea ...
227	Alexandra	Digámoslo, así como tu dijiste que existe un punto, pero, o sea, no están siendo concretos de que si, de que hay en la pregunta hay dice punto medio, no es así, si no que si existiera un punto equidistante entre el punto A y B . Y obviamente es el punto medio ¿y cómo sabemos que es el punto medio? Pues la mitad del segmento que pues es... [Lili levanta la mano]
228	P. Jeisson	Y acá [señalando el grupo de Xiomara y Lili]
229	Lili	Eh, nosotras pusimos que si, a pesar de tener, no tener [corrige] la herramienta nombrada anteriormente, el punto medio es parte del segmento que no se encuentra graficado.
230	Xiomara	Y nosotros también pusimos que, existe más de un punto que equidiste, se puede encontrar más de un punto equidistante porque no necesariamente debe estar en el segmento, aunque no significa que tenga varios puntos medios va a haber solamente un punto medio, pero puede haber varios puntos que equidisten por fuera del segmento

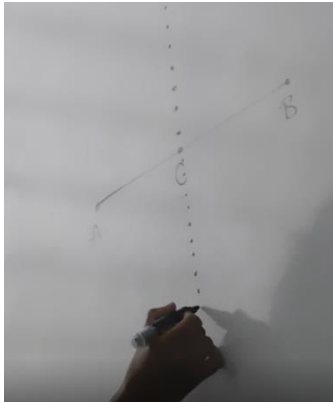
231	P. Jeisson	Chicas escuchemos esta afirmación que hace su compañera Xiomara, vuélvela a decir, pero trata de decirla en palabras, en tus palabras.
232	Xiomara	Listo. Entonces nosotros lo que pusimos es que van a haber varios puntos equidistantes porque en un segmento pueden estar por fuera de él, ahí no especifican que necesariamente tienen que estar en la línea (en el segmento perdón)
233	P. Jeisson	Hasta ahí, que opinan ustedes de esa afirmación [dirigiéndose a todo el grupo] que hay varios, voy a retomar lo que ella dice, niñas hay que prestar atención. Listos. Hay un segmento ¿existe un punto? Ustedes que dicen que sea equidistante [las estudiantes responden que sí] ¿Cuál es? [las estudiantes responden “El punto medio”] el punto medio [afirma lo que las estudiantes dicen] que como decía la compañera allá [señala una estudiante] que, aunque no esté graficado, lo deducimos, existe. Listos, entonces a la pregunta que esta respondemos, sí [Talía levanta la mano] dime.
234	Talía	Pues nosotras principalmente habíamos leído, pues nosotras, esto para llegar a la respuesta. Pues tuvimos dos ideas, bueno la primera idea fue pues una idea que pensamos porque no habíamos leído como bien la pregunta y habíamos dicho pues que no podíamos así como diferenciar un punto, el punto centro, porque no teníamos la herramienta necesarias para medir la distancia entre los distintos puntos, pero después, de cómo pensarlo y pues de estudiar cómo, o sea como de verdad deducir como la pregunta llegamos a la conclusión de que si se puede porque... [señala a su pareja de trabajo Victoria]
235	Victoria	O sea que, o sea como tal si existe un punto que, o sea, respondemos a la pregunta que en el segmento si existe un punto pero que por herramientas o algo así no se puede identificar donde está el punto, pero si existe.
236	Xiomara	Ay si yo quiero contradecir eso
237	Diego	Perdón P. Jeisson, tú quieres contradecir [señalando a Xiomara]
238	Xiomara	Contradecir, respecto a lo que ellas dijeron de la herramienta en geogebra, existe una función que uno apenas, uno apenas crea el segmento va a aparecer un punto en el centro, una letra donde indica el punto medio es mas en el caso (la estudiante es interrumpida por varias estudiantes diciéndole que no, incluso el grupo anterior todas hablan al tiempo y el P. Diego calma el grupo)
239	Victoria	Es que nosotras no nos referimos a eso
240	Lili	Pero Lala [seudónimo de la compañera] espera que estamos hablando
241	Xiomara	No díganlo ustedes que de pronto entendí mal
242	Talía	Es que digamos aquí en la pregunta decía como, sin usar regla, compas o geometría dinámica geogebra, o sea sin usar como tal la aplicación podíamos deducir el punto medio, o sea por eso estamos diciendo que, sin las herramientas, porque pues si las tenemos, pero si no las ponemos en práctica no sabemos la medida, pues de un punto hacia otro.
243	P. Jeisson	O sea que sí, todos estamos de acuerdo de que, existe un punto ¿Cierto? [las estudiantes responden sí] que si no tenemos las herramientas ¿Qué pasa? [no podemos identificarlo] no lo podemos hallar fácilmente, cierto. Ahora todos estamos de acuerdo de que si existe un punto, que es el punto medio. La siguiente pregunta ya era, utilice la herramienta la geometría dinámica, el software, y encuentre más puntos. A la siguiente tarea vamos a mirar las posibles soluciones que se dieron, entonces, que soluciones hay [las estudiantes levantan la mano] una, dos, tres y finalizamos cuatro [señalando los grupos] pasas [señalando al grupo uno]
El grupo uno conformado por Yaneth y Valeria pasan a explicar su construcción.		
244	P. Jeisson	Bueno muéstranos su solución
245	Yaneth	Bueno chicas, somos Yaneth y Valeria, y nosotras pues cogimos un segmento [la estudiante empieza a realizar la construcción en GeoGebra].
246	P. Jeisson	Prestemos todas atención a lo que están haciendo sus compañeras (...) identifiquemos cada uno de los pasos que ellas hacen... listo un segmento
247	Yaneth	Un segmento, después nos fuimos para la herramienta de <i>punto medio, medio o medio centro</i> . Después de eso nosotros (...)
228	P. Jeisson	Entonces ahí ya encontramos un punto ¿cierto? que equidista, la pregunta es ¿será que hay más? Ustedes que respondieron
229	Yaneth	Eh... que sí hay más puntos, porque digamos acá [construye un punto <i>D</i> y trata de acomodarlo en fila con el punto medio] digamos lo podemos poner en la misma fila que debe estar en <i>C</i> , digamos lo ponemos acá si [alinea el punto <i>D</i> con <i>C</i>] entonces (...)
250	P. Jeisson	¿En la misma qué?
251	Yaneth	En la misma recta, puede estar en la misma recta que está en el <i>C</i>
252	P. Jeisson	Una misma recta que pasa por <i>C</i>

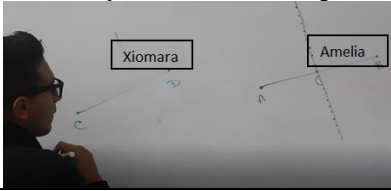

253	Yaneth	Que pasa por C , exacto. Se cogen las distancias digamos [mide la distancia desde el punto D hasta A y hasta B] y ahí vemos que quedo igual entonces ahí ya se pueden ir sacando las distancias. Y ahí está diciendo que A v
254	P. Jeisson	O sea, ahí ya tienes dos puntos que equidistan
255	Yaneth	Ahí ya tienen dos puntos que equidistan de las distancias de \overline{AB} , que sería el primero que fue de \overline{AB} , es equidistante el punto C , que es el punto medio. Y de A equidista a B con el punto D que también es el medio, pero esta fuera del segmento.
256	P. Jeisson	Listo, van dos, alguien encontró tres ¿ustedes cuantos encontraron? [refiriéndose a Yaneth y a Valeria]
256	Yaneth	Seis
257	Valeria	Pero es que digamos son los mismos puntos, pero por una misma línea recta entonces, al hacer una línea recta digamos todos los puntos van a ser equidistantes a A y B .
258	P. Jeisson	Construye otro por fa, con eso concluimos y la próxima clase el viernes escuchamos las otras.
259	Diego	Por favor miren en la pantalla que su compañera esta tratando como de alinear los puntos con C , en ese sentido y con lo que estamos observamos ahí ¿la cantidad de puntos podría ser finita o infinita?
260	Estudiantes	Infinita
261	Diego	O sea, puede haber muchos puntos
262	Estudiantes	Si [a una sola voz]
263	Diego	Y eso a que nos lleva, si tenemos una sucesión de puntos o puntos infinitos [Alexandra levanta la mano]. Alexandra [dando la palabra]
264	Alexandra	Pues como la recta o un segmento está conformado por puntos consecutivos, entonces, pues obviamente va a haber demasiados puntos infinitos, en una recta o un segmento entonces eso nos lleva a buscar
265	P. Jeisson	O sea que los puntos que estamos buscando ¿Dónde están?
266	Estudiantes	En una recta
267	P. Jeisson	En una recta, listos. La tarea que vamos a hacer la próxima clase es como construir esa recta, sí. ¿Porque si yo muevo los extremos esos puntos siguen siendo equidistantes?
268	Xiomara	Profe. De pronto no estoy segura pero tal vez mediante una recta, mediante un par de líneas perpendiculares
269	P. Jeisson	Tal vez, vamos a tener para la próxima clase, que fue lo que dijo su compañera [recordando a las estudiantes]
270	Estudiantes	Mediante unas rectas perpendiculares
271	P. Jeisson	Entonces vamos a tener en cuenta que si hay varios puntos y que muy posiblemente es una recta perpendicular. Listo niñas, gracias.

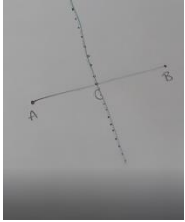
ANEXO 10: Transcripción de la clase 9

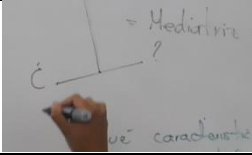
Sesión 9 realizada el 23 de Abril de 2018

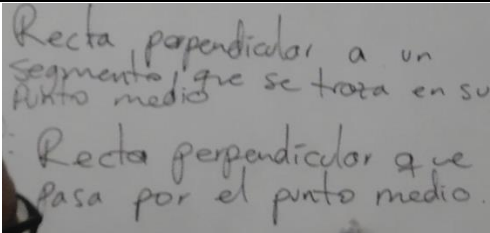
Esta sesión inicia con la socialización de la tarea relacionada con la mediatriz que inicio la sesión anterior y en la que se interactuó con algunos grupos para luego finalizar con la exposición de uno de los grupos en obtener una solución. A continuación, se evidencia la socialización a la tarea en la cual se pretendía que las estudiantes construyeran la definición de mediatriz.

1	P. Diego	Teníamos un segmento y a partir de ese segmento nos preguntaban que si existía un punto (...) ¿Cuál era la pregunta específica o la primera pregunta? Eh (...) Veronica [le solicita a Veronica que lea la pregunta]	
2	Veronica	¿Yo?	
3	P. Diego	Sí	
4	Veronica	Sin usar regla, ah (...) ya. ¿Existe un punto que equidiste de los puntos A y B ?	
5	P. Diego	Listo. De acuerdo a eso nos pedían que si había un punto que equidistara del extremo A , miren acá [el P. Diego dibuja un segmento en el tablero y solicita a las estudiantes que lo miren] y del extremo B [señalando en el tablero] ustedes llegaron a una conclusión cierto ¿a qué conclusión llegaron ahí? Alguien que quiera decirla (...) ¿a qué conclusión llegaron en esa pregunta? o ¿a qué respuesta llegaron? (una estudiante levanta la mano) Amelia [dando la palabra a la estudiante]	
6	Amelia	Que sí. Porque digamos, o sea no debe ser el mismo segmento, sino que al momento que equidisten los puntos ya hay un punto medio.	
7	P. Diego	O sea, Amelia dice que hay un punto, que es el punto medio que equidista de esos extremos ¿cierto? Hay alguien que haya escrito algo similar, Teresa, que escribió Teresa respecto a la primera pregunta [asignando la participación a una estudiante]	
8	Teresa	Yo escribí que si ya que, sin necesidad de estar graficando, visualmente se puede encontrar un punto que equidisté de A y B aunque es mas sencillo encontrarlo con las herramientas	
9	P. Diego	Listo, allí Lili [pidiendo que otra estudiante participe] que dijiste respecto a eso	
10	Lili	Nosotras pusimos que sí, porque a pesar de no tener la herramienta nombrada el punto medio es parte del segmento que no se encuentra graficado.	
11	P. Diego	Listo, entonces mire aquí [señalando el tablero, un segmento construido cuyos extremos nombro como A y B]. Sus compañeras llegaron a la conclusión que si existe un punto y es el punto medio que está equidistando de A y B ¿si o no? A ese punto le voy a llamar C [señala el punto en el tablero]. Pero entonces resulta que en preguntas adelante llegan y le dicen ¿hay solo uno o hay más puntos? Y en ese caso Yaneth que esta entretenida con Amelia dijo si profe [con Valeria, corrigiendo] dijo si profe y realizaron una construcción en la que ellas empezaron a encontrar puntos así. O me equivoco ¿sí o no? ¿Si recuerdan? Voy a suponer que eso es, que están alineados (...) Y entonces ellas decían que no iba a ser solo un punto, que estuviera en el segmento si no que iban a ser muchos puntos ¿cierto? Es que veo que no hay niñas acá mirando y me preocupa, yo sé que están concentradas, pero es que [el P. Diego llama la atención al evidenciar que hay niñas que no observan la socialización de la tarea] ellas mencionaban que no era solo un punto sino podía haber varios puntos ¿cierto? Y entonces llegaron algunas conclusiones ¿alguien recuerda esas conclusiones? Alexandra [levanta la mano para participar el P. Diego le da la palabra]	
12	Alexandra	Una recta está conformada por muchos puntos	
13	P. Diego	Entonces resulto que Alexandra dice que estos puntos podían llegar a ser una recta, cierto [algunas estudiantes responden que si] ¿si recuerdan esa parte? ¿A qué otra conclusión llegaron ustedes? (...) [Silencio por algunos segundos] ninguna otra, no se acuerdan. Listo basémonos en esta [refiriéndose a la idea planteada por Yaneth en la exposición de la sesión anterior] si, si, si seguimos diciendo que esa consecución de puntos o esos puntos forman una recta ¿Qué característica va a tener esta recta? [señala los puntos y los une por una recta]	
14	Estudiantes	Paralela [menciona una estudiante] Perpendicular [menciona otra estudiante]	

15	P. Diego	Pregunta ¿Qué características tiene esa recta? [Copiando la pregunta en el tablero] aquí ustedes dijeron no solo es un punto, son varios puntos y Alexandra dice no profe pues esos varios puntos se me van a compartir en una recta, la pregunta que yo les hago ahora es ¿Qué características tiene y debe cumplir específicamente esa recta? Jenny y Patricia [asignando la palabra a dos estudiantes que levantaron la mano]
16	Jenny	Pues para mí una de las características sería que al ser una recta se vuelve perpendicular.
17	P. Diego	Pilas aquí [copia la palabra perpendicular en el tablero] aquí también lo habían dicho. Una característica es que esa recta va a ser perpendicular al segmento \overline{AB} que otra característica Patricia.
18	Patricia	Que (...)eh (...) que forma ángulos de 90°
19	P. Diego	Bueno que sea perpendicular implica que los ángulos que se forman sean de 90° [copia en el tablero] Amelia [dando la palabra a una estudiante que levanta la mano]
20	Amelia	Pues yo además de eso, diría que se deben componer por puntos los cuales deben estar en el centro del segmento
21	P. Diego	Bueno, vamos a desarrollar esa idea que está diciendo Amelia Por favor escúchenla a ver de qué manera podemos comprimir o reducir esa afirmación. Vuélvela a decir por fa
22	Amelia	Que es, que se componen por puntos los cuales forman la recta que está en medio del segmento
23	P. Diego	Está en medio del segmento [repetiendo lo último en la intervención de Amelia] ¿qué nos dice eso? Vayan pensando, que específicamente estén en medio del segmento. Y Xiomara [levanta la mano]
24	Xiomara	Eh (...) no nada. No, no estoy de acuerdo, pues o sea sí, yo no había entendido mal, porque puede que yo sea la equivocada, según lo que habíamos leído en la guía de perpendicular, dice que no necesariamente tiene que estar, bueno, no se tiene que unir o intersecar en el centro, sino puede ser en cualquier parte de la recta desde que forma cuatro ángulos de 90 grados.
25	P. Diego	Listo. Pilas aquí que vamos a poner en discusión, tanto lo que dice Amelia como lo que dice Xiomara y ustedes me dicen estamos de acuerdo, o no estamos de acuerdo. Amelia dice que específicamente esta recta [señalando la recta que había construido anteriormente] miren, miren aquí, miren porque yo voy señalando y yo no sé usted que está mirando. Amelia dice que específicamente estos puntos que conllevan a que sea una recta... tienen que pasar o van a estar en el medio del segmento ¿sí o no? que es una recta perpendicular, sí. Mientras que Xiomara dice que no está de acuerdo, porque no necesariamente... esa recta perpendicular pasa por el punto medio. Cierto. La pregunta que me surge es ¿están o no están de acuerdo? Puede que las dos tengan la razón o puede que una tenga la razón y otra no. (Jenny levanta la mano)
26	Jenny	Pues yo si estoy de acuerdo con eso, porque esa recta se formó a partir del punto medio, entonces, si ponemos más puntos hacia arriba y hacia abajo, que son medios y se comprueba que son medios, si se realiza la recta pues, la recta va por todo el punto medio, está en la mitad de ese segmento.
27	P. Diego	En este caso [señalando la construcción realizada en el tablero] o sea, que, si se forman todos los puntos, la recta va a pasar exactamente por el punto medio del segmento. Listo, Valeria [dando la palabra a una estudiante que levanta la mano]. Por aquí ya escuché que sí, que si
28	Valeria	Yo no estoy de acuerdo con el segundo [refiriéndose a la idea dada por Xiomara] 
29	P. Diego	No estás de acuerdo con el segundo, con este [señala la construcción]
30	Valeria	O sea, sí, porque nosotras al momento de hacer esa construcción, o sea, como intentamos hacer eso, sin poder que un punto sea también medio, fuera de esa recta y no nos daba.
31	P. Diego	No les daba, o sea lo que dice Valeria es que ellas tenían construido un segmento, hallaron el punto medio y empezaron a encontrar así puntos, pero al poner otro aquí [construye una representación de lo que realizaron las estudiantes] y ya, incumplió con eso.  Es decir que lo que dice Amelia, tiene la razón. Por aquí escuchaba que sí, que no.

32	Xiomara	Ah si yo, si, que tenía razón porque yo lo que no había tomado en cuenta, yo solo había pensado en las características de la perpendicularidad y no que estábamos formando el punto medio, entonces si tiene la razón.
33	P. Diego	Entonces fíjense una cosa y quiero que muy atentas aquí, encontramos una cosa nueva y es que esta representación [señalando el tablero y refiriéndose a la imagen que se presenta] que se basa en la perpendicularidad y el punto medio nos está llevando a un nuevo concepto, esto es nuevo ¿cierto? Porque de alguna manera ya sabemos que esto es perpendicularidad [señala la representación realizada para evidenciar la perpendicularidad] que aquí formaban ángulos de 90, que, si yo tengo un segmento, tengo aquí un punto medio. Pero entonces que pasa si conjugo una recta que pasa por el punto medio. A que concepto me podría llevar a eso, ¿sí? O sea, dentro de los conceptos geométricos que nosotros conozcamos, alguna de ustedes que recuerde, que podría cumplir, eso que estamos poniendo aquí. Uno que sea perpendicular y acá [en el tablero] voy a colocar lo que dijo Amelia “esa recta pasa por el centro del segmento” pila esa recta ya cumple dos características y acá es clave, primera que sea perpendicular al segmento, segunda de acuerdo a lo que dijo Amelia, que esa recta pase por el centro del segmento ¿y eso a que nos lleva? Hagan un flash back de algo que hayan visto, devuélvase.
		
34	Xiomara	Colinealidad e interestancia.
35	P. Diego	Aquí Xiomara dice que eso le recuerda la colinealidad y la interestancia.
36	Xiomara	Y también equidistancia
37	P. Diego	Pero ahí hay equidistancia, sí. Pero hay un objeto más grande o hay un concepto más grande que nos lleva a eso. Voy a dar cinco minuticos para revisar.
Pasan entre cinco y diez minutos, en los cuales las estudiantes interactuaron con sus compañeras		
38	P. Diego	Entonces, aquí, efectivamente, eh alguien que me recuerde quien fue la que dijo que estos puntos iban a formar una recta perpendicular.
39	Estudiantes	Alexandra.
40	P. Diego	Alexandra y Jenny, y lo complemento Amelia diciendo que esa recta iba a pasar por el punto medio, exactamente, yo les puse a pensar que de alguna manera me dijeran con que concepto podíamos definirlo o relacionarlo, pero entonces ahí nos quedamos, no importa. Ese concepto es el que ustedes antes de ver todo esto lo conocían como la mediatriz, entonces, pila a la tarea que viene aquí, de acuerdo a estas dos características [dando a entender las dos condiciones establecidas anteriormente, la primera que sea perpendicular y segunda que pase por el punto medio] y ya sabiendo que hay algo que se llama mediatriz ¿cómo nosotros podríamos definir mediatriz? es algo similar a lo que hicimos con circunferencia ¿recuerdan? ¿Cómo a partir de estas características que dieron sus compañeras, vamos a definir el concepto de mediatriz? Cinco minuticos para que por pareja formulen una definición, pasamos al tablero voy a escribir nuevamente definición uno, definición dos, definición tres y consolidamos una grupal. Listo.
41	P. Diego	Evidentemente yo le estoy dando a usted dos características, yo le di dos características, esas características surgieron a raíz de sus planteamientos iniciando esos planteamientos con lo que hizo Yaneth y Valeria, y se complementó con lo que menciono Alexandra y su compañera Jenny, además por aquí Patricia. Bueno. A raíz de esas características que ustedes dicen encontramos que hay un concepto más grande llamado mediatriz, vamos a escuchar las definiciones que tengamos, voy a tratar de copiar las más, como las... bueno, vamos a mirar cuales podemos copia. Entonces para eso quiero que escuchemos e identifiquemos las características y las definiciones que están dando nuestras compañeras. Listo. Entonces empezamos aquí con Victoria
42	Victoria	Bueno mi compañera y yo, eh pusimos que mediatriz es recta perpendicular a un segmento que se traza en su punto medio [el P. Diego copiar esta definición en el tablero]
43	P. Diego	¿Quién más dijo? (empiezan a hablar al mismo tiempo) haber es clave escucharnos [menciona el P. Diego]
44	Camila y Jenny	Como su misma raíz lo dice es el medio o el centro de algo, en este caso de un segmento [menciona Camila] Cuando se realiza debe cumplir la condición de ser perpendicular [menciona Jenny]
45	P. Diego	Otra vez, otra vez, es que aquí hay alguien que no está dejando, niñas repito si no quieren estar aquí por mí no hay problema [les llama la atención porque no dejaban escuchar] otra vez [solicita que vuelvan a leer la definición]
46	Jenny	Como su misma raíz lo dice es el medio o el centro de algo, en este caso de un segmento, cuando se realiza debe cumplir la condición de ser perpendicular.
47	P. Diego	Listo. Que opinan de la definición de su compañera
48	Estudiantes	Muy buena [menciona una estudiante] pues está bien [menciona otra estudiante]


49	P. Diego	Otra vez, repítela. Quiero que la escuchen y la analicen sutilmente. Si es efectivamente mediatriz
50	Camila	Como su misma raíz lo dice es el medio o el centro de algo, en este caso de un segmento, cuando se realiza debe cumplir la condición de ser perpendicular
51	P. Diego	Listo, ahí en la definición de su compañera ¿nos definió que era recta? ¿Qué ese algo tenía que ser una recta? Pero que diga que diga perpendicular no significa que sea una recta. Hay que nombrar, que es ese algo que ustedes dicen ahí.
52	Jenny	Pero nosotras dijimos
53	P. Diego	No...
54	Estudiante	Pues si quieren repítanla
55	Jenny	Como su misma raíz lo dice es el medio o el centro de algo, en este caso de un segmento, cuando se realiza debe cumplir la condicione de ser perpendicular [a una sola voz con su compañera Camila]
56	P. Diego	Es el medio de algo que es un segmento, o sea el medio de un segmento, que es perpendicular, creo que hay, o sea está bien, pero hay algo, o sea, utilizar un lenguaje más geométrico. Por aquí Amelia [dando la palabra a otra estudiante]
57	Amelia	Recta que es trazada desde el punto medio de un segmento, es decir, cumple con la regla de perpendicularidad respecto a ella
58	P. Diego	Otra vez, por favor. Quiero que otra vez escuchen la definición de Amelia
59	Amelia	Recta que es trazada desde el punto medio de un segmento, es decir, cumple con la regla de perpendicularidad respecto a ella
60	P. Diego	Cuando su compañera dice, desde el punto medio quiere decir que ese es el punto de origen. Esto me cumpliría como mediatriz [realiza una representación en el tablero] ¿Cómo perpendicular?
		
61	Xiomara	No señor
62	P. Diego	Entonces, volvamos a reformular eso. ¿Quién más había levantado la mano? [Verónica dice yo]
63	Verónica	Pues nosotras escribimos que era una recta perpendicular que salía a partir del punto medio.
64	P. Diego	Repito ¿la recta nace desde aquí [señalando la construcción en el tablero, específicamente el punto medio] el punto de origen es este?
65	Leidy	Sería que pasa por un punto medio
66	P. Diego	Que pasa por un punto medio, complementa Leidy, arregle entonces la definición con lo que dice.
67	Leidy	¿Una recta perpendicular que pasaría a través del punto medio?
68	P. Diego	Formúlela, formúlela otra vez. En vez de que sea el punto medio el origen diga lo que me dijo.
69	P. Diego	Bueno, siga trabajando en eso. Señora Cecilia [estudiante que levanta la mano]
70	Cecilia	Un punto medio de un segmento, que además cumple con que los dos sean segmentos perpendiculares.
71	P. Diego	O sea, está diciendo Cecilia que es un punto medio solamente, otra vez.
72	Carolina	Un punto medio de un segmento, que además cumple con que los dos sean segmentos perpendiculares con este.
73	P. Diego	¿Están de acuerdo con la definición de su compañera? ¿Están de acuerdo, están en desacuerdo, que opinan?
74	Amelia	La puede repetir
75	P. Diego	Repítela
76	Carolina	Un punto medio de un segmento, que además cumple con que los dos sean segmentos perpendiculares con este. [al termina la lectura Amelia levanta la mano, se le da la palabra]
77	Amelia	Yo estaría, por parte en desacuerdo, porque pues, o sea, creo que me equivoco, pero si nosotros nos estamos refiriendo a un segmento como tal, en un punto medio ya estamos afirmando que son solamente dos segmentos y ahí no se especifica que aparte son otros dos segmentos, o sea tal vez este equivocada, pero tengo mi perspectiva.
78	P. Diego	Que opinan frente a lo que dice, o sea, aquí realmente lo que interesa es lo que ustedes digan acerca de lo que sus mismas compañeras opinan, Camila [la cual estaba levantando la mano para pedir la palabra]
79	Camila	Pues a mí me parece que... es que digamos, o sea, digamos de lo que yo pienso respectivamente era algo parecido a lo que decía Amelia, porque digamos ella dice que son dos segmentos y se supone que es un segmento y el otro es una recta
80	P. Diego	Es que, hasta donde entiendo lo ellas dicen que la mediatriz es un punto medio. Pero eso no es mediatriz, porque pila la mediatriz tienen que cumplir esas dos condiciones que ustedes dieron.
81	Verónica	Pues la mediatriz es la recta que pasa por el punto medio, o sea como que la atraviesa

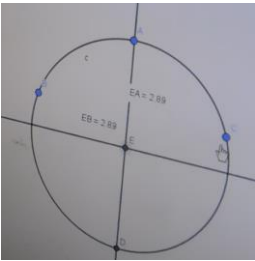

82	P. Diego	O sea, recta perpendicular que pasa por un punto medio, dice Verónica y Leidy, señora [dando la palabra a una estudiante]	
83	Xiomara	Profe una pregunta, como las líneas son infinitas [rectas corrige el P. Diego] ¿las rectas son las infinitas? ¿Profe cuáles son las infinitas las líneas o las rectas?	
84	P. Diego	Es que tú tienes líneas, pero las clasificas rectas o curvas	
85	Xiomara	A bueno, entonces, como las rectas son infinitas ¿no tiene punto medio?	
86	P. Diego	Pero es que estamos hablando del segmento	
87	Xiomara	Si, sé que estamos hablando del segmento, pero es una pregunta	
88	P. Diego	Si fuera una recta sería muy complicado llegar a encontrar su punto medio.	
89	Xiomara	Porque es infinita	
90	P. Diego	Por eso aquí estamos partiendo de un segmento. ¿Alguien más acerca de mediatriz? Profe [llama una estudiante, levantando la mano] señora	
91	Lili	Nosotras pusimos que es un segmento que al unirse en otro cumple la recta de perpendicularidad.	
92	P. Diego	Es un segmento que...	
93	Lili	Al unirse con otro cumple la regla de perpendicularidad	
94	P. Diego	¿Pero eso definiría mediatriz? O sea, es que específicamente estamos definiendo esta recta [señalando la construcción realizada al inicio de la clase] pilas, mire acá al tablero lo que yo estoy definiendo es esta recta [señalando nuevamente la construcción realizada al inicio de la clase] allá Leidy y compañía, bueno. Inicialmente su compañera Victoria con Talía dice que la mediatriz es una recta perpendicular a un segmento que se traza en un punto medio. Sale una nueva definición que es recta perpendicular que pasa por el punto medio. Pregunto ¿hay alguien que quiera aportar con otra definición de mediatriz que usted misma construyo? Teniendo en cuenta que usted está definiendo esta recta azul [señalando la construcción realizada al inicio de la clase] Sonia que escribió, por ejemplo.	
95	Sonia	Escribimos, recta perpendicular que atraviesa el segmento pasando por el punto medio	
96	P. Diego	Que atraviesa el segmento por el punto medio [repetiendo] quiere decir que está bastante relacionado aquí [señala una de las definiciones dadas por las compañeras] Listo, ya que tenemos dos únicamente... una general, como podríamos definir nosotros mediatriz con la que está arriba [señalando las dos definiciones] definición uno, definición dos que sea totalmente completa. Aquí le está diciendo que es la recta que se traza en su punto medio, algo similar a esto [nuevamente señala en el tablero] mientras que la segunda dice que es una recta perpendicular que pasa por el punto medio. Como nosotros como grupo, grado noveno B, va a definir mediatriz, definición grupal. A continuación se muestra las dos definiciones	
96	Camila	Pues a mí me parece que, digamos, más que toda la segunda definición, pues está bien definida, pero ahí le falta que pasa por un punto medio de un segmento.	
97	P. Diego	Entonces... voy de acuerdo a lo que dice Camila... "recta perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento", esto es para que lo vayan anotando en sus carpetas [mientras el copia en el tablero] listo, pilas hay algo importante y es que de mediatriz hay dos definiciones, una que es la usual que es similar a esta [señalando la construida por las estudiantes] y hay otra que se considera un hecho geométrico, o sea que nosotros, aquí lo que hicimos solamente desarrollamos una definición, que es la definición usual, la que comúnmente encontramos en los libros y demás. Si nos vamos un poco más allá tomándola como hecho geométrico tiene que ver con los puntos específicos con la construcción que ustedes tenían allá [señalando a Valeria y Yaneth] Entonces, creo que hasta la fecha de hoy hemos construido unos conceptos claves, colinealidad, interestancia, equidistancia, congruencia de segmentos esta nueva que es mediatriz, lo que significa que el día viernes ya es la actividad de cierre que es la actividad evaluativa, es decir, que usted en esa actividad usted pone en juego todo lo que aprendió. Antes de eso quiero que investiguen las dos definiciones, ya tenemos una de mediatriz, pero quiero que investiguen la otra definición que podemos encontrar, acerca de mediatriz. Listo La próxima clase entonces empezamos computador cada una pareja y se le va a entregar la actividad que va a ser evaluación.	

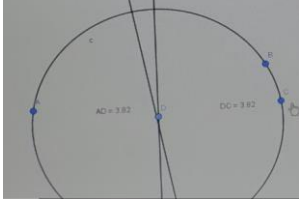
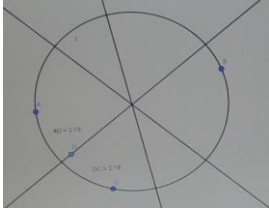
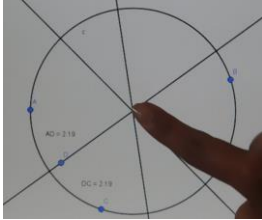
ANEXO 11: Transcripción de la clase 10

Sesión 8. Realizada el 27 de Abril de 2018

Esta clase se inició recordando la definición de mediatriz que se acordó la sesión anterior. Luego el P. Diego hizo entrega de la tarea 6; él junto con el P. Jeisson explicaron en qué consistía la nueva guía de trabajo que se les entregó. Posterior a la explicación las estudiantes iniciaron el trabajo por parejas.

1	P. Diego	Hoy se les entregó una guía, que va se casi la actividad de cierre, listos. Entonces, ¿alguien que tenga súper presente o que concluimos que es mediatriz? Amelia. [Dándole la palabra, quien alzó la mano para pedir la palabra]
2	Amelia	Yo. Eh (...) Es una recta perpendicular a un segmento que se traza desde el punto medio.
3	P. Diego	¿De acuerdo?
4	Todas	Sí señor.
5	P. Diego	¿Sí escucharon por aquí lo que dijo Amelia? [Preguntándole a las niñas que están en el costado derecho de la clase]
6	Sandra	Una recta perpendicular que pasa por el punto medio
7	P. Diego	Listo ¿Qué características tiene esa recta? Ahí en la misma definición lo está diciendo. Tiene que ser perpendicular y al mismo tiempo tiene que pasar por el punto medio, listo. Revise su carpeta así rápidamente, revisen todo esto de interestancia, equidistancia, congruencia de segmentos; y damos inicio a la actividad.
Tiempo para que las niñas revisen sus carpetas		
8	P. Diego	La actividad dice lo siguiente: Dados tres puntos A, B y C no colineales, a partir de esos tres puntos vamos a intentar construir una circunferencia que pase por estos tres puntos. La idea es que de alguna manera usted junto con su compañera y el programa encuentre una solución a varias soluciones. Les vamos a pedir un favor y es que no utilicemos la herramienta punto medio del programa. ¿Se acuerdan que hay una herramienta que nos permite hallar el punto de un segmento o de dos puntos? Vamos a evitar utilizar esa herramienta. Fíjese que la primera pregunta ¿Se puede construir una circunferencia que contenga estos tres puntos? ¿Cómo se haría? ¿Se puede encontrar el centro de dicha circunferencia? ¿Cómo lo encontró? Y ¿Qué elementos teóricos permite justificar el procedimiento que usted haya realizado para encontrar la solución?
9	P. Jeisson	Ahí dice que tenemos que arrancar con tres puntos ¿Cierto? ¿Tres puntos con que características?
10	Todas	Que no sean colineales.
11	P. Jeisson	Y eso ¿qué quiere decir? [Señala a Sandra que pide la palabra]
12	Sandra	Que no estén en la misma recta.
13	P. Jeisson	¡Exacto! Tres puntos que no estén en la misma recta. Entonces ustedes deben partir de eso. Tres puntos. [Dibuja tres puntos en el tablero, como se muestra en la imagen]  ¿Me sirven estos tres?
14	Algunas niñas	Sí.
15	P. Jeisson	A listo, ustedes arrancan con tres y ¿qué tienen que hacer?
16	Algunas niñas	Una circunferencia.
17	P. Jeisson	¿Con qué lo van hacer? Con cualquier herramienta de ustedes encuentren en el programa. Entonces tres puntos, arrancamos con tres puntos. ¡No arrancamos con una circunferencia! Arrancamos con tres puntos, y debemos buscar una circunferencia que los contenga.
18	Sandra	¿Una circunferencia?
19	P. Jeisson	¿Será que existe o no existe? Luego, dice que dada esa circunferencia, encontrar el centro de la circunferencia. Entonces ahí tienen que utilizar toda la información que ustedes quieran.
Espacio para realizar el trabajo en parejas.		

A continuación se presenta la discusión del P. Diego con Teresa y Camila		
20	Teresa	Hacemos circunferencia por tres puntos, y le hicimos el círculo (...) circunferencia
21	P. Jeisson	Bueno ¿Qué pasa si yo arrastro, uno de los puntos A, B o C?
22	Teresa	Se mueven todos, o se agrandan el círculo. La circunferencia.
23	P. Jeisson	¿Si yo tengo tres puntos no colineales, qué puedo encontrar?
24	Camila	Pues (...), que no están en la misma recta.
25	P. Jeisson	Pero dados tres puntos no colineales ¿Qué encuentro?
26	Teresa	¿Cómo así?
27	P. Jeisson	¿Esos tres puntos no colineales que generaron?
28	Teresa	Una circunferencia.
29	P. Jeisson	¿Si yo tengo otros tres puntos diferentes?
30	Camila	Pues un arco, también una circunferencia
31	P. Jeisson	Siempre voy a tener una (...)
32	Camila	Circunferencia
33	P. Jeisson	¿Qué más hiciste?
34	Teresa	Eh (...) qué más hice. Luego Utilice el de la mediatriz. Mediatriz con los dos puntos. Y esto me dio primero la mitad de acá [Refiriéndose a la mediatriz del segmento BC] Utilizando el punto de aquí abajito [Haciendo referencia al punto D, que es el punto de intercepción de la mediatriz del segmento BC con la circunferencia] y volví a utilizar la opción de mediatriz [Mediatriz del segmento AC] para ubicar el centro. Luego puse otro punto en la mitad [Punto de intercepción de las dos mediatrices] para poder medir las distancias si son colineales (...) si tienen la misma medida, y si quedaron bien, para poder identificar el punto medio. Entonces tomando la distancia, todos quedaron iguales. [Halla la medida del punto del centro a los tres puntos iniciales] Y al mover cualquier punto las distancias son iguales. [Mueve los tres puntos iniciales]
		
35	P. Jeisson	Listo. Aquí tienes que explicar cómo lo encontraste, Y en éste último [Refiriéndose a los enunciados de la guía] decir que elementos teóricos utilizaron.
36	Teresa	La mediatriz.
37	P. Jeisson	La mediatriz.
38	Teresa	La circunferencia.
39	P. Jeisson	Listos.
A continuación se presenta la discusión del P. Diego y del P. Jeisson con Camila y Jessica		
40	Camila	Ubicamos el punto A, el punto B, y el punto C en cualquier parte de la hoja [hoja gráfica del software GeoGebra]. Luego dimos en la opción de circunferencia por tres puntos y dibujamos la circunferencia.
41	Jessica	Después como tal se formó la circunferencia
42	P. Jeisson	Listo.
43	Jessica	Después dimos clic en la opción, mediatriz. Esa mediatriz (...)
44	P. Jeisson	¿Hicieron mediatriz de quién?
45	Jessica	Del punto A y C
46	P. Jeisson	Entre el punto A Y C. Listo.
47	Jessica	Entonces, también pusimos la opción de distancia, le dimos (...) primero colocamos el punto D, en cualquier lado de la mediatriz. Cuando le dimos en esa herramienta [Distancia y longitud del Software] ahí aparecía la distancia.
48	P. Jeisson	 ¿Por qué hicieron la mediatriz de AC?
49	Camila	Porque ahí el punto A y el punto C, eran los que estaban a los lados de la circunferencia. Entonces ahí se podría hallar el punto medio.
50	P. Jeisson	Mmm ¿Por qué no, digamos de B a C? ¿Por qué no la mediatriz de B a C?


51	Camila	Mi opinión, es que digamos de A a C; o de B a C se puede hallar. De la única forma pues que no se podría de A a B.
52	P. Jeisson	¿No se puede hallar?
53	Camila	¿El punto medio? No
54	P. Jeisson	Dale, mediatriz.
55	Camila	Pues si movemos este punto acá [Moviendo el punto B, cerca al punto C]
56	Jessica	A bueno, configurando el lugar del punto.
57	P. Jeisson	¿Cuántas mediatrices yo puedo tener ahí?
58	Camila	Dos.
59	Jessica	Tres.
60	P. Jeisson	¿Tres? Muéstrenme las tres.
61	Jessica	Van dos. [Haciendo dos mediatrices.] 
62	Camila	Claro que mirándolo bien siempre va haber un punto medio.
63	Jessica	Si, son solo dos.
64	P. Jeisson	¿Con la de BC?
65	Camila	Pues digamos, que ya se movería el punto. [Hace la tercera mediatriz, luego de mover el punto C] 
66	P. Jeisson	¿Ahí que pasa niñas?
67	Jessica	Pues todas la mediatrices se están uniendo.
68	P. Jeisson	¿Todas las que?
69	Jessica	Las mediatrices.
70	P. Jeisson	¿Qué?
71	Jessica	Se están uniendo
72	P. Jeisson	¿En dónde?
73	Jessica	Comprobando que están en el punto medio.
74	P. Jeisson	O sea, ¿Ustedes que hicieron?
75	Camila	¿Cómo así?
76	P. Jeisson	¿Qué hicieron para encontrar ese punto?
77	Jessica	Pues, donde se unen todas la mediatrices.
78	P. Jeisson	¿Cuáles mediatrices?
79	Jessica	La mediatriz de A y (...) B; de A y C; y de C y B.
80	P. Jeisson	Ok. Bueno ¿dónde está el punto?
81	Jessica	[Jeimy señala la pantalla con el dedo]  Pues acá esta no.
82	Jessica	Este [Señalando el punto D]
83	P. Jeisson	Pero ese es un punto libre, Tendría que poner otro punto.
84	Jessica	Eh (...) pues se coloca el otro punto, acá [Poniendo un punto E donde Jennifer había señalado]

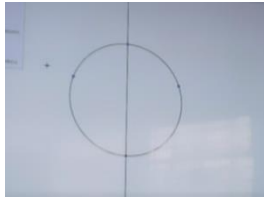
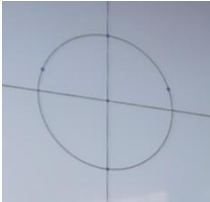
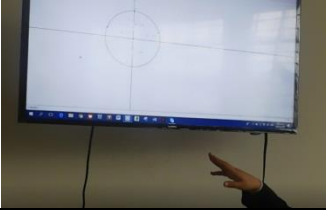
85	P. Jeisson	Bueno, ustedes dicen que ese el punto centro. ¿Cierto?
86	Jessica y Camila	Sí.
87	P. Jeisson	¿Cómo garantizan que ese es el punto centro?
88	Camila	Con la opción de distancia y longitud [Herramienta del software]
89	Jessica	Yo podría correr este punto [El punto B] y siempre van a tener la misma medida.
90	P. Jeisson	Yo no veo la misma distancia.
91	Camila	O sea, la misma distancia entre todos los puntos [Refiriéndose a los puntos A, B y C al centro E]
92	Jessica	¿Cuál es la distancia?
93	Camila	Esta sería la distancia [Señalando la medida 2,73 en la pantalla]
94	P. Jeisson	¿Y la distancia de E a A?
95	Jessica	Sería (...) Pues tocaría (...)
96	Camila	Pues es la misma distancia. [Mide la distancia del segmento EA, y arrastra el punto A]
97	P. Diego	¿Qué está pasando ahí?
98	Jessica	Tienen la misma distancia.
99	Camila	O sea, cambia la distancia. Ignorar esas distancias, porque esas las habíamos hecho mal y no comprobando que ese era el punto medio [Haciendo referencia a las distancias desde el punto D a los puntos A, B y C]
100	P. Diego	Pues bórralo. [Jennifer borra el punto D]
101	Camila	Este punto D es como un punto X
102	P. Jeisson	¿Es un punto qué?
103	Camila	Es un punto (...) que o hacia parte de la circunferencia. Es como un punto libre
104	P. Jeisson	A ok.
105	Jessica	Y ahí comprobamos, que tienen la misma medida entre estos tres puntos [Señalando los puntos A, B y C] con el punto E.
106	P. Jeisson	¿Qué me garantiza que este punto [E] es el centro?
107	Camila	La distancia.
108	P. Jeisson	¿La distancia de donde a dónde?
109	Camila	La distancia del punto medio [E] a los diferentes tres puntos [A, B y C] de la circunferencia.
110	P. Jeisson	Ok, vale niñas gracias.
111	Jessica	Bueno.


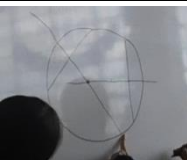

ANEXO 12: Transcripción de la clase 11

Sesión 11. Realizada el 30 de Abril de 2018

Durante la sesión 9 se dio inicio a la última tarea de la trayectoria hipotética de aprendizaje, para esta sesión algunos grupos expondrían la posible solución a aquella tarea, la sesión se divide en dos partes; la primera, en la exposición de tres grupos con tres soluciones diferentes; la segunda, en otra tarea en la cual deberían aplicar también todos los conceptos vistos durante las sesiones anteriores.


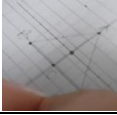


1	P. Diego	Bien ya nos podemos sentar ¡gracias! La sesión del día de hoy quiero que me presten atención, la sesión del día de hoy va a ser obviamente. Las niñas de allí [señalando un grupo] y las demás quiero que se acerquen a la pantalla del televisor.
Las estudiantes se acercan a la pantalla para observar		
2	P. Diego	Entonces hace ocho días, perdón el viernes, hicimos una actividad. Escuchen porque ya creo que estamos finalizando nuestro curso, simplemente les voy a pedir un favor y es que lo que sus compañeras vayan a hacer, de alguna manera encontremos comentarios y algunas posturas que ustedes vayan a dar frente a lo que están haciendo, ellas [señalando unos grupos], allí hay dos grupos diferentes, ellas encontraron unas soluciones al problema que se había plantado el viernes, eh (...) la idea es que escuchemos lo que ellas construyeron de alguna manera miramos si cumplió o no con el objetivo de la actividad. De acuerdo con ello les solicito que estén muy pendientes de lo que se esté presentando allá. Entonces las cositas que están haciendo las pueden dejar para más tarde, tranquilas que, la idea es que aquí este espacio lo aprovechemos. Entonces va a empezar Camila y Jenny.
3	P. Jeisson	Antes de eso pues sería también recordar, cuál era la actividad.
4	P. Diego	Alguien que recuerde la actividad en qué consistía, o por lo menos, no sin la necesidad de tener las carpetas acá como tal, sino más bien que recordamos nosotros. [Jeimy levanta la mano]
5	Jeimy	Eh (...) lo que nos pedía la actividad, era hacer tres puntos y según esos tres puntos realizar un círculo y encontrar un punto medio, ¿un punto centro?
6	P. Jeisson	¿Un círculo o una circunferencia?
7	Jeimy	Una circunferencia
8	P. Diego	¿Y esos tres puntos eran colineales o no colineales?
9	Estudiantes	No colineales
10	P. Diego	Entonces quiere decir que dados tres puntos no colineales teníamos que encontrar o pensar si había una circunferencia que los contenía, de acuerdo a eso. Observar (...) si podíamos encontrar el centro de esa circunferencia y de acuerdo a ello responder unas preguntas específicas. Esencialmente esa era la actividad. Entonces vamos a escuchar cual fue la solución de sus compañeras y nuevamente, yo creo que suena repetitivo, pero, les pido el favor que prestemos atención a lo que ellas nos van a mostrar. Listo, entonces le presento a Jenny y a Camila que nos van a mostrar la primera parte de lo que ellas construyeron.
11	Camila	Bueno nosotros primero ubicamos tres puntos en cualquier parte de la hoja [refiriéndose a la hoja nueva en GeoGebra]. Eh (...) después fuimos a buscar la opción de <i>circunferencia por tres puntos</i> y pues ahí nos daba la opción era como de dibujar la circunferencia en (...) con todos los puntos y ya después se formaba como tal circunferencia. (...) Después buscábamos la opción <i>mediatriz</i> y lo poníamos entre eh (...) [risas]
12	P. Jeisson	Solo pícalos o dale clip en cada punto [al ver que la estudiante no logra realizar la circunferencia utilizando la herramienta]
13	Camila	[Retomando] bueno entonces después buscamos la opción <i>mediatriz</i> (...) y pues lo poníamos entre el punto, pues que estaba de extremo a extremo de la circunferencia y pues ahí nos daba la mitad del (...) de la circunferencia y ya. Después, poníamos el punto, un punto entre dos, pues en la mitad porque digamos nosotros como le dábamos la opción <i>mediatriz</i> entre cada punto, pues ahí todos iban a tener el centro, entonces ahí ya se ponía un punto x . Y (...) y ya
		
14	Estudiantes	¿Lo puedes medir?






15	P. Jeisson	¿Qué dices? [refiriéndose a Jeimy Salazar]	
16	Jeimy	¿Que, si lo pueden medir, lo del punto centro a un punto hacia afuera? porque no, no sabemos si en realidad es.	
17	Camila y Jenny	[Hallan las medidas de los segmentos]	
18	Camila	Bueno entonces ahí también podemos observar que todos tienen la misma distancia y pues si agrandamos o achiquitamos la circunferencia siempre va a tener también, todos van a medir lo mismo.	
19	P. Jeisson	Listo, eh... ¿tú para que querías que lo midieran? [refiriéndose a Jeimy, estudiante que había solicitado hacer esto]	
20	Jeimy	A porque no está, pues quería asegurarme que de que la medida que estaba dando si era igual en la circunferencia	
21	P. Jeisson	¿Y cómo te diste cuenta de que si era cierto? O sea, al medir que. ¿Porque te convence?	
22	Jeimy	Los puntos que ella había puesto al centro que tuvieran la misma distancia todos.	
23	P. Diego	Alguien más que quiera opinar frente a la construcción de sus compañeras. [Silencio] (...)	
24	P. Jeisson	Listo, vamos a mirar entonces la segunda solución.	
Pasa el segundo grupo a exponer			
25	Teresa	Nuestra construcción fue un poco parecida a la de nuestra compañera, nosotros hicimos lo mismo haciendo lo de los tres puntos.	
26	Diego	Espera no te están escuchando	
27	Teresa	<p>Que nuestra construcción fue un poco parecida a la de nuestra compañera ya que nosotras también iniciamos primero con los tres puntos y luego revisamos igual con la circunferencia, utilizamos la opción de la <i>circunferencia por tres puntos</i>. [La compañera realiza lo que su compañera mencionó mientras expone]. Después de la circunferencia también utilizamos <i>la mediatriz</i>, pero nosotras solo hicimos dos líneas perpendiculares, al hacer la línea perpendicular que pasa por el centro del círculo de forma... vertical.</p> <p>Le pusimos un punto [refiriéndose al punto de intersección entre la circunferencia] en la parte de abajo para que se identificara y volvimos a hacer lo mismo, pero ahora la línea que va para, la línea que aparece que es horizontal.</p> <p>De esa manera nos aparecía dos líneas perpendiculares entonces ahí le volvemos a ubicar el punto en el centro y tomamos las distancias y nos demostraba que todos los puntos eran equidistantes al punto centro. Utilizamos la mediatriz porque según la definición que teníamos. La mediatriz es un punto que nace. Bueno. Es una recta perpendicular a un segmento que nace desde un punto medio. Gracias</p>	 
27	P. Diego	¿Preguntas? [Alexandra levanta la mano]	
28	Alexandra	Es que no entiendo como tus haces ese cuarto punto, porque ahí hay cuatro puntos.	
29	Teresa	<p>Este [señalando en la pantalla el punto] el <i>D</i></p> <p>Mira, primero se hizo la mediatriz ubicando desde el punto <i>A</i> y el <i>C</i>, al hacer esa mediatriz va a aparecer una recta larga que va a ser la perpendicular a esos dos puntos, nosotras lo que hicimos fue poner un punto [refiriéndose a <i>D</i>] para poder identificar la otra mediatriz que va a ir de forma horizontal para poder ubicar el punto centro.</p>	
30	P. Jeisson	Es decir, el punto que ella encontró aquí es la intersección de la recta con la circunferencia.	
31	Teresa	¿Alguien más?	
32	P. Diego	Más preguntas, Que opinan frente a la construcción de su compañera [refiriéndose a la de Teresa] y a la construcción presentada por el grupo anterior [Camila y Jenny]	
33	Amelia	Yo pensaría que pues en este caso (...) Eh sería como más, complicada hacer, o sea, hallar, si por ejemplo lo hacemos en una hoja de papel, digamos, sería como menos complicado como hallar ese proceso que hicieron Teresa, en cambio si lo hacemos con (...) según la teoría de Camila, entonces sería como más complejo hacerlo. Según mi opinión.	
34	P. Diego	¿Más compleja esta que la anterior?	
35	Amelia	No, la de Camila	




36	Talía	¿Cómo así? ¿Te parece más difícil la de Camila?	
37	Amelia	La de Camila, no más difícil, sino que más complicada al momento de hacerlo en una hoja de papel	
38	P. Diego	[Señala a Talía quien pide la palabra]	
39	Talía	Pues... Yo quiero decir que los dos métodos estuvieron, en si bien porque, por lo que usaron mediatriz. Qué pues como había dicho Teresa en la definición pues de que estaban unidas como por un punto medio entonces eso nos ayuda encontrar el punto con la circunferencia. Lo que dice Amelia de hacerlo con una hoja de papel, pues yo creo que, si podemos usar cualquiera de los dos métodos de la misma manera, porque igual los dos te van a llevar al mismo resultado de encontrar el punto medio. Entonces se me hace que creo este es más fácil si, pero lo que hicieron como Camila y Jenny también estuvo muy bien explicado y todo y pues los dos son muy fáciles de hacer, así sea manualmente o a computador.	
40	P. Diego	Esa es una buena afirmación que deberíamos evaluar, creen que, si no tuviéramos estas herramientas tecnológicas, sería fácil construir o responder a las preguntas que sus compañeras hicieron en el computador, o ¿con regla y compas?	
41	Estudiantes	[Algunas estudiantes responden si, otras no]	
42	P. Diego	Entonces aquí Xiomara me solicito junto a su compañera Lili que ella encontró una solución, pero la va a exponer en el tablero, es decir, no va a utilizar las herramientas de GeoGebra sino el tablero. Entonces vamos a escuchar. Gracias niñas muy queridas ustedes [a las niñas que ya expusieron]	
Pasa el grupo de Xiomara y Lili			
43	Xiomara	Esto fue lo que encontramos, no lo hemos probado, pero queremos saber si sirve.	
44	Lili	Lo primero que hacemos es dibujar la circunferencia	
45	Alexandra	Shhh (pidiendo silencio)	
46	Xiomara	Vamos a dibujar lo que encontramos, vamos a dibujar dos cuerdas en cualquier parte de la circunferencia y vamos a hallar la mediatriz de ellas y después (en este caso las estoy calculando) y después vamos a trazar una línea larga, vamos a fingir que esta recta.	
46	P. Jeisson	¿La mediatriz?	
47	Xiomara	Si señor (...) y se supone, aunque creo que lo hice mal, que donde trazaba era el punto medio, lo debí haber hecho mal, pero eso fue lo que encontramos.	
48	P. Jeisson	Pues hazlo acá [refiriéndose a Geogebra]	
49	P. Diego	Ahora eso, ella dice que construye una circunferencia, encuentra dos cuerdas cualesquiera, halla el punto medio y por ahí traza la mediatriz y punto de intersección entre ellas es el punto medio. Reproduce eso mismo en el computador. Camila tiene una pregunta para ti.	
50	Camila	Pues, pues digamos, pues es que se supone que la clase pasada tu habías dicho que no se podía utilizar la opción punto medio y ellas ahí lo utilizaron.	
51	Xiomara	No, no la usamos.	
52	P. Diego	No ellas hicieron una suposición, Jeimy señora [estaba levantando la mano]	
53	Jeimy	Pero entonces yo tengo una pregunta si tú dices que tienes que hallar la mitad de una cuerda de la mediatriz, igualmente tendrías que hallar la mitad de la esta, o sea, tendrías utilizar la herramienta, o sea esa herramienta, porque igual, tiene que encontrar la mitad de la otra, para encontrar la mitad de la circunferencia.	
54	P. Jeisson	Permítame un segundito, es que digamos, a lo que nos referíamos era: no podían utilizar esta opción, aquí donde dice <i>punto medio centro</i> para la circunferencia porque ya me lo aparece sí, no habría nada que hacer ¿cierto? Lo que nosotros le limitamos fue esa opción no más, esa opción para la circunferencia ya encontraríamos muy fácil el punto medio de la circunferencia	
55	P. Diego	Vayan comentando lo que están haciendo por fa [diciéndole a Xiomara y Lili]	
56	Lili	Ya hicimos la circunferencia y estamos trazando las cuerdas.	

57	Xiomara	No, ¡no pudimos!
58	P. Jeisson	Otra vez, haz las cuerdas. Ellas quieren dibujar dos cuerdas de la circunferencia.
59	Xiomara	Y se supone, bueno nosotros habíamos pensado que ahí iba a aparecer la leticia acá, que señalaba la parte centro, para trazarla de paso así y que donde se encontrara fuera punto medio.
60	Estudiantes	Utiliza la mediatriz para que te salga [varias niñas aconsejan al grupo]
61	P. Diego	Tus compañeras dicen que utilices la mediatriz para esos segmentos
62	Xiomara	Por eso, eso es lo que necesitamos encontrar, pero aquí no hay una opción que nos facilite hallar la mediatriz. [Después de explorar se fija que si existe. La estudiante realiza la construcción en GeoGebra]
63	Lili	Ahora estamos pues sacando la mediatriz y vamos a poner un punto en la mitad.
64	Xiomara	¡Lo encontramos!
65	P. Diego	Ahora si podrías medir para saber si dan.
66	Xiomara	[Aplausos]
Minutos de silencio		
67	P. Jeisson	¿Qué opinan de la construcción hecha por sus compañeras?
68	P. Diego	Frente a la construcción que hizo su compañera, sus compañeras [corrigiendo]. Quintero ayudemos algún comentario para sus compañeras, porque me imagino que presto atención ¿cierto? O me estoy equivocando o ¿alguna de las tres? [Llamando la atención tres niñas que no estaban prestando atención al grupo. Luego Victoria levanta la mano y se le da la palabra]
69	Victoria	Pues la verdad me parece que fue una construcción bastante diferente a las que hicieron las demás compañeras, ya que usaron pues técnicas diferentes respecto a lo que digamos utilizaron, utilizaron las dos cuerdas nos plantearon como que había otra opción de que si uno pone las dos cuerdas y o sea, ubica las dos cuerdas y pone la mediatriz pues nos damos cuenta pues que en la circunferencia si se puede ver el punto central desde la perspectiva de nosotros
70	P. Diego	¿O sea que está bien porque están utilizando otras herramientas, según tú?
71	Talía	Pues yo también quería decir que usaron como otras características de la circunferencia como son las cuerdas, y, o sea, que uno las puede utilizar bien y que [risas] bueno que pues, a pesar de que la mayoría de todas las opciones que pasaron eran con mediatriz, o sea es un proceso super fácil, en el cual podemos hallar el punto medio sin la necesidad de usar la opción de punto medio.
72	P. Jeisson	Yo tengo una pregunta ¿las tres construcciones tienen algo en común? ¿Algo?
73	Estudiantes	El punto medio, la mediatriz, las perpendiculares. [Al mismo tiempo]
74	P. Jeisson	¿Las? ¿Perdón?
75	Estudiantes	La mediatriz, la perpendicular [responden al mismo tiempo]
76	P. Jeisson	El primer grupo cual fue ¿ustedes usaron mediatrices? Sí, ¿el de Teresa usó mediatrices? Y ¿en esta? También. O sea que cual era la clave para solucionar la tarea [las estudiantes responden la mediatriz] concepto que habíamos estudiado, la clase pasada ¿Qué te llevo a ti a hacer esta construcción o como encontraste esa solución?
77	Xiomara	Pues la verdad nosotros partimos, vimos que otras funciones de la circunferencia podemos utilizar, desarrollamos en (...) lo que decía ahí y las pusimos así, las cuerdas y también buscamos que, si no se hacía de esta forma había otras formas de encontrarla, pero era super diferente y eran con ecuaciones y eran super complicados y también encontramos que no está bien poner al azar un punto en el medio porque hay una probabilidad de 0,0 % de encontrar el punto medio.
78	P. Jeisson	Ok. Bueno ¿porque creen ustedes ahora que la respuesta o el truco o la estrategia estaba en construir mediatrices? ¿Por qué la solución estaba en construir mediatrices? Todas las construcciones fueron con mediatrices ¿Por qué creen?
79	Talía	Porque la mediatriz era si no estoy mal la definición es segmento seguido de punto medio entonces la mediatriz, la mediatriz como tal también tiene un punto medio entonces si lo usamos para encontrar el punto medio de la circunferencia sería más fácil por lo que pues es como la intersección de dos, no sé.
80	P. Diego	Porque creen que la mediatriz era clave para solucionar este problema, aquí ya Talía nos dio su opinión.
81	Camila	Porque la mediatriz nos da exactamente la mitad de la circunferencia y no hay necesidad de utilizar el punto medio.
82	P. Diego	Que opinan ustedes [refiriéndose a la opinión de la compañera]
83	Camila	La mediatriz nos da exactamente la mitad de la circunferencia
84	P. Diego	¡Pero las mediatrices pasan por el punto centro de un segmento! ¿Por qué al relacionarlo con la circunferencia coincide? Amelia y Xiomara

85	Amelia	Pues según mi opinión, o sea, sé que no tiene nada que ver con lo que dijo Camila, pero según yo, eso no solo tiene que ver, tiene que pasar por la mitad de una circunferencia sino también por un segmento y una recta, además eso como que nos demuestra como la medida entre el centro y los ángulos de las demás tanto rectas como segmentos.
86	Xiomara	A lo que se refería Camila, ella decía que al momento de partir en la mitad propia la circunferencia y pasar la mediatriz por esa línea al obtener dos líneas perpendiculares hay era donde se encuentra (...)
87	P. Diego	Encontrar las mediatrices de los segmentos. Ahora una pregunta adicional, si nos preguntaran que conceptos geométricos de los que vimos antes de llegar a esta actividad, ¿Qué podríamos decir? ¿Cuáles de esos conceptos utilizamos para solucionar el problema? Leidy que los está diciendo por aquí
88	Leidy	Equidistancia
89	P. Diego	Equidistancia ¿Dónde ves la equidistancia?
90	Leidy	En, en la distancia del punto medio a los otros puntos [Haciendo referencia a la distancia del centro a cada uno de los puntos no colineales que pertenecen a la circunferencia]
91	P. Diego	¿Están de acuerdo?
92	Estudiantes	Si...
93	P. Diego	Cual otro ¿Amelia?
94	Amelia	Los puntos no colineales
95	P. Diego	Puntos no colineales ¿y qué me dicen los puntos no colineales?
96	Amelia	Que no están en la misma recta
97	P. Diego	¿Que otro concepto de los vistos utilizamos en la tarea?
98	Teresa	Utilizamos el punto medio, mediatriz, circunferencia, colinealidad, equidistancia
99	P. Diego	O sea, Teresa ya los nombro todos. ¿Qué relación hay entre la circunferencia y la equidistancia?
100	Teresa	Que para construir una circunferencia se necesita que todos los puntos sean equidistantes respecto a un punto medio
101	P. Jeisson	¿Entonces porque era importante la pregunta que hacía Jeimy? [Hace referencia a la pregunta de la intervención 16]
102	Teresa	Porque se necesitaba que todos los puntos fueran equidistantes para comprobar que fuera punto medio para verificar que la circunferencia estaba bien.
103	P. Jeisson	Listos.
Se da por finalizada la socialización de la tarea 6 y se da inicio a la tarea 7		
104	Victoria	Punto que equidista de los extremos de un triángulo
105	P. Jeisson	Si, punto que equidista los extremos de un triángulo, listo ahora tienen que construir un triángulo y encontrar utilizando todo lo que hemos visto, encontrar el circuncentro del triángulo que construyeron y deben justificar su construcción. ¿Sí? Circuncentro ¿cuál es la definición?
106	Estudiantes	Punto que equidista de los extremos de los extremos de un triángulo
107	P. Jeisson	Exacto, entonces tengo que encontrar un punto, dibujo un triángulo, ¿Cuántos vértices tienen un triángulo?
108	Estudiantes	Tres
109	P. Jeisson	Tengo que encontrar un punto que equidiste ¿Qué quiere decir que equidiste?
110	Victoria	Que sean a la misma distancia
111	P. Jeisson	Que sean a la misma distancia [afirmando lo dicho por Victoria]. Listo, hay que encontrar un circuncentro, un punto que equidiste a los extremos y justificar su respuesta.
112	Alexandra	Toca como hacer un punto que equidiste de los lados
113	Patricia	Toca hacer un punto y de ese punto hacer un triángulo [clarificando la actividad]
114	P. Jeisson	Traten de recordar todo lo que hicimos, listo. Niñas inician con un triángulo, dibujan un triángulo y deben encontrar un punto que equidiste de los extremos ¿sí? Un punto que equidiste y tienen que justificar, tienen que justificar los pasos que ustedes hicieron.
Se da inicio al trabajo por parejas, por tal motivo los profesores pasaran por los grupos solucionando dudas.		
115	Patricia	Una pregunta ¿uno hace un triángulo, el punto debe equidistar de este, este y este? [Señalando en su hoja los vértices del triángulo que construyó] pero o sea lo tiene que tener afuera o adentro.
116	P. Jeisson	Listo niñas, hay que mirar donde queda ese punto.
117	P. Jeisson	Niñas, Alexandra [refiriéndose a una estudiante] dale no les va a alcanzar el tiempo.
Trabajo por parejas		
118	P. Jeisson	Para todas niñas ¿es clave utilizar qué? ¿Qué será lo clave ahí?
119	Estudiantes	La mediatriz ...

120	P. Jeisson	Ok.	
Minutos de silencio y trabajo por parejas			
121	P. Jeisson	Chicas lo importante es la justificación que ustedes den, la justificación (...)	
En un grupo donde observa el P. Jeisson			
122	P. Jeisson	¿Es perpendicular? [Se refiere a la mediatriz de uno de los lados del triángulo que la estudiante construye con regla]	
123	Marisol	No	
124	P. Jeisson	Como garantizo que sea perpendicular	
125	Alexandra	¿Porque se cruza?	
En otro grupo			
126	P. Jeisson	¿Qué están tratando de hacer?	
127	Sonia	Estamos tratando de sacarle mediatriz al (...)	
128	P. Jeisson	¿Al qué?	
129	Sonia	Al triángulo	
130	P. Jeisson	Al triangulo [repetiendo lo que menciona la estudiante] ¿entonces que es la mediatriz?	
131	Sonia	Una línea...	
132	P. Jeisson	Una línea no es una... bueno	
133	Sonia	Una recta	
134	P. Jeisson	Una recta [buscando que las estudiantes completen la información]	
135	Viviana	Que pasa por el punto centro [al mismo tiempo que su compañera]	
136	Sonia	Que atraviesa el punto centro [al mismo tiempo que su compañera]	
137	P. Jeisson	Exacto que pasa por el punto centro, entonces sobre qué, entonces marquémolos A, B y C . [Ayudando a las estudiantes a ubicar los puntos] pasemos a construir la mediatriz de \overline{AB} ¿cierto? ¿Tiene que pasar primero por donde?	
138	Viviana	Por el centro...	
139	P. Jeisson	Por el centro [afirmando] no ¿Qué es la mediatriz, otra vez?	
140	Viviana	Una recta que pasa por el centro	
141	Sonia	Del triangulo	
142	P. Jeisson	No	
143	Viviana	Del triángulo [afirmando lo que menciona la compañera]	
142	P. Jeisson	No es del triángulo, ¿la mediatriz de qué? ¿A que le hallo una mediatriz? A un segmento [respondiendo así mismo]	
En otro grupo			
143	Talía	¿Qué si así está bien? [llama al P. Diego mostrándole lo que realizo]	
144	P. Jeisson	No sé, justificame, explicame.	
145	Talía	O sea, comenzamos, hicimos como lo mismo que las compañeras hicieron en el círculo, pero en el triángulo, obviamente que esta es la mediatriz de \overline{BC}	
145	P. Jeisson	¿Cómo la hallaron?	
146	Talía y Victoria	Pues trazando una línea ...	
147	P. Jeisson	Bueno listo	
148	Talía	Y como A , obviamente A , necesita tener otro punto para poder sacar la otra mediatriz, entonces ubicamos un punto aquí [señalando su construcción] de igual, como de la misma, en el mismo segmento de A , entonces lo ubicamos aquí y es el punto D , y el punto A , la mediatriz del punto A con el punto D , pues es esta y ese sería el centro	
149	P. Jeisson	¿Y cómo justificarías eso? Que si es...	
150	Victoria	Pero no se supone que la clave es la mediatriz...	
Otro grupo en el cual se realiza una interacción			
151	Lili	O sea, es que digamos, así como le explicaste a ella [señalando una compañera] digamos yo hago aquí la circunferencia [la estudiante tiene construido un triángulo y trata de trazar la circunferencia en la cual los extremos del triángulo estén en ella], sí. Y tendría que hallar la mediatriz, por acá y por acá [señala los lados del triángulo] algo así, porque eso me quedo súper chueco y le hago un puntico en la mitad que ese sería el circuncentro que hay nos están pidiendo que hallemos [señala la tarea]	

152	P. Jeisson	Repítelo, otra vez	
153	Lili	Se supone que hacemos el triangulo	
154	P. Jeisson	Hazlo aquí, hazlo aquí en este triángulo [el P. Diego señala una nueva hoja]	
155	Lili	Xiomara, hazlo aquí querida [refiriéndose a Xiomara]	
156	Xiomara	¿Qué cosa perdón?	
157	Lili	La bolita esa. [refiriéndose a la circunferencia]	
158	Xiomara	Pero espera, porque hagamos un equilátero [la estudiante empieza a construir un triángulo]	
159	Lili	Eso es un triángulo todo chueco [risas]	
160	Xiomara	Es la pirámide cayéndose [risas]	
161	P. Jeisson	Cuando lo tengan me llaman y grabamos listo	
Un grupo llama al P. Jeisson.			
162	Jenny Q	Es que era para preguntarte, lo que pasa es que nosotras utilizamos una técnica no muy técnica, ¿no importa lo que hayamos utilizado para hallar ese punto?	
163	P. Jeisson	No ¿Qué hicieron?	
164	Jenny	Yo digo que no tiene nada que ver con lo que vimos, porque contamos en cuadros.	
165	P. Jeisson	Pues hay que, no ahí hay que utilizar los elementos anteriores	
166	Camila	Pero si solo tenemos regla	
167	P. Jeisson	Sí, se puede hacer	
168	Jenny	Sí, bueno	
El P. Diego se devuelve al grupo de Xiomara y Lili			
169	P. Jeisson	Dime	
170	Lili	Nosotras hicimos, bueno el triángulo, después le sacamos dos puntos aquí [señalando los puntos] hicimos dos líneas, dos segmentos [corrige]	
171	Xiomara	Aquí también la mediatriz [señala la construcción]	
172	P. Jeisson	¿La mediatriz? ¿De quién?	
172	Xiomara	Sacamos la mediatriz de este segmento, de este segmento y de este segmento [la estudiante señala los tres lados del triángulo] y las extendimos, suponiendo que esto es una línea recta y donde se cruzan	 
174	P. Jeisson	Ok, si, ¿y cómo saben que ese punto es, ahí no me va a dar exacto? ¿Cómo me pueden ustedes argumentar de que ese es el punto medio, utilizando las definiciones que ya usamos, que ya tenemos?	
175	Lili	Pues porque eh... no se	
176	Xiomara	Pues lo que nosotros hicimos fue...	
177	P. Jeisson	Sí, bueno y ahí entonces que	
178	Xiomara	Bueno entonces, lo que nosotras propusimos fue...	
179	P. Jeisson	Retómame otra vez que fue lo que hiciste	
180	Xiomara	Nosotras lo que hicimos fue bueno claro, hacer el triángulo, hicimos un triángulo equilátero, eh... tomamos la mediatriz	
181	P. Jeisson	¿Cómo encontraron la mediatriz?	
182	Xiomara	Nosotras con la regla, longitud distancia.	
183	P. Jeisson	Sí	
184	Xiomara	Nosotras tomamos la medida, digamos en este caso eran cuatro centímetros [la estudiante mide uno de los lados del triángulo] si no estoy mal, si cuatro [confirmando la medida con la regla] y paso por el dos, hicimos eso con cada uno de los segmentos con AB , BC y AC [la estudiante señala cada uno de los lados] y podemos concluir que...	
185	P. Jeisson	Pero que, bueno la mediatriz es que pasa por el punto medio ¿y qué más?	
186	Xiomara	La mediatriz entonces, paso por el punto medio y pudimos definir	

187	P. Jeisson	¿Pero que más es la mediatriz? Para construir la mediatriz era que pasara por el punto medio como ustedes lo hicieron, pero ¿qué más?	
188	Xiomara	Debe estar a la misma distancia de los segmentos, de los... extremos	
189	P. Jeisson	Listo, pero cuál era la otra condición ¿cualquier recta que pasara por el punto medio? Una recta...	
190	Xiomara	Cualquier recta... uhm...	
191	P. Jeisson	Una recta	
192	Xiomara y Lili	Una recta perpendicular [afirman las dos al tiempo]	
193	P. Jeisson	Una recta perpendicular, ¿Cómo hicieron la perpendicularidad ahí?	
194	Lili	Pues, ah... pues nosotras, ¡ay no se! Pues nosotras hicimos primero una recta, un segmento y lo dejamos como en un punto medio, hicimos otro segmento y llegamos y lo trazamos hasta donde estaba el otro y lo mismo con el otro. [durante la explicación de la estudiante señaló la construcción realizada]	
195	Xiomara	Donde se unían y entonces la perpendicularidad, como nosotras la podemos hallar por medio de la cuadrícula que tiene la hoja entonces de AB al momento de pudimos ubicar cual estaba a los noventa grados cada uno y después de hallar esto, vimos que todos se trazaron.	
196	P. Jeisson	Bueno, bueno, hicieron mediatrices de los tres segmentos.	
197	Xiomara	Si señor	
198	P. Jeisson	¿Y cuál es el punto que equidista? ¿Cuál es el circuncentro?	
199	Lili	El circuncentro sería este [señala la construcción el punto hallado] donde se unen.	
200	P. Jeisson	Hagámoslo	
201	Xiomara y Lili	Donde se unen [mencionan la dos]	
202	P. Jeisson	¿Todo ese es el circuncentro?	
203	Xiomara	No señor, bueno lo hicimos chiquito, lo hicimos grande pero solo es el chiquito	
204	Lili	Pues si es ese, pero pues para disimular que es ese	
205	P. Jeisson	Bueno para disimular, bueno encontramos el punto ¿y ahora ustedes como me justifican eso?	
206	Xiomara	Pues lo que nosotros habíamos pensado era que, con tu ayuda, que entonces el punto circuncentro equidista de BC	
207	Lili	Equidista de BC , eh... también equidista de AB también equidista de AC [señala cada lado del triángulo en la construcción]	
208	P. Jeisson	¿Y entonces cumple la definición?	
209	Xiomara	Si señor	
210	P. Jeisson	O sea, que me pide la definición de circuncentro.	
211	Xiomara	Circuncentro, punto que equidista de los extremos de un triángulo y al momento en que nosotros vemos acá entonces podríamos decir que están a la misma medida que sería de dos centímetros. [la estudiante señala el punto hallado y cada uno de los extremos del triángulo]	
212	P. Jeisson	Pero bueno ahí no hay medidas, ¿Cómo garantizo que es la misma medida? Lo que estaban diciendo ustedes ahorita	
213	Xiomara	Sí que equidistan de los extremos	
214	P. Jeisson	¿Pero porque equidistan?	
215	Lili	Porque están a la misma distancia	
216	P. Jeisson	A la misma distancia, pero (...) ¿quién me garantiza que está a la misma distancia?	
217	Lili	Pues el triángulo, ¿no? [risas]	
218	P. Jeisson	¿Entonces?	
219	Xiomara	La mediatriz	
220	P. Jeisson	¿Porque la mediatriz?	
221	Lili	Porque es la que nos ayuda a hallar donde están las, los extremos ¿no?	

222	Xiomara	Lo que nosotros hicimos después de hacer el triángulo fue, hallar las mediatrices, es decir la línea perpendicular de cada uno donde los unimos, la mediatriz lo que nos certifica es que el punto medio va a estar a la misma distancia de AB , BC y AC
223	P. Jeisson	O sea, te voy a hacer una pregunta ¿Cómo sé que D [refiriéndose al circuncentro hallado] o que argumentos tú me das para que D , este D que tu haces, este a la misma distancia de B y C
224	Lili	Por la mediatriz ¿no?
225	P. Jeisson	¿Porque por la mediatriz?
226	Xiomara	La mediatriz
227	Lili	Porque gracias a la mediatriz uno puede dar como conclusión que están a la misma distancia. Digo yo
228	Xiomara	Llegar a la conclusión, claro. Porque la mediatriz lo que planea es formar las dos líneas perpendiculares en cada uno de los segmentos dados al momento en que todos se unen, como están justo en el medio de los segmentos de un triángulo, podemos llegar a esa conclusión.
229	P. Jeisson	Ok
230	Xiomara	Entonces, como la perpendicularidad, la mediatriz perdón, es una línea recta y al ser líneas infinitas cada uno de los puntos que van uniéndola y la van conformando van a ser de la misma forma equidistante a los segmentos del triángulo.
231	P. Jeisson	Okey, sí. Vale
Se termina el tiempo de trabajo por parejas y ahora se realizará una pequeña socialización del trabajo realizado durante todas las sesiones		
232	P. Diego	Bueno la profe [Refiriéndose a la profesora de la siguiente clase] me cedió cinco minuticos, les había comentado que entre la clase del viernes y la clase de hoy, eran de las últimas actividades o encuentros que íbamos a tener junto al profe Jair y entonces principalmente tanto el como yo queremos agradecerles por haber participado en esta investigación, créanme que todos los comentarios, las discusiones, los debates que se hicieron durante las sesiones de clase, son bastante provechosos para nosotros y antes de irnos, pues, agradecerles pero también queremos escuchar sus opiniones frente a lo que se realizó en las clases; uno eso, saber si estuvieron de acuerdo, que les pareció las actividades, si este espacio les apporto, si aprendieron, si no aprendieron. Si usted vio junto a su compañera o a nivel grupal si de alguna manera se desarrollaron competencias ciudadanas como el respeto por la palabra, el escuchar a sus compañeras, esencialmente en estos cinco minutos queremos que ustedes sean las que hablen frente a las conclusiones de si el curso como lo llevamos apporto o no apporto, entonces voluntariamente si alguien quiere participar con su opinión, entonces levanta la mano.
233	Amelia	Pues yo pienso, o sea según, así como una forma de oficio, por decirlo así, yo creo que saber todos estos términos, estos conceptos fue como más lúdico tanto para nosotras como para los profesores, ya que nos dimos cuenta de que se puede haber otra manera de no solo representarlo en el cuaderno o en la hoja de papel, sino también representarlo en una aplicación o así algo digital.
234	P. Diego	Listo, gracias. Alguien más que quiera dar su aporte para concluir con este espacio.
235	Sandra	Eh... pues a mí me parece muy importante porque tuvimos como otro espacio para aprender nuevas cosas, porque utilizamos herramientas como el GeoGebra y pues fue algo nuevo porque entonces había más herramientas y nos ayudó como a indagar más objetivos que tenían la clase.
236	P. Diego	Listo, gracias. Alguien más que quiera aportar con su opinión, frente a las competencias ciudadanas que de alguna manera se evidenció, si se respetaron la palabra, si por lo contrario no, si el pensar en una postura crítica frente a lo que le estaba mostrando su compañera le sirvió o no le sirvió.
237	Sonia	Pues digamos con respecto a eso, pues yo sí sentí que se respetaba mucho la palabra y pues digamos uno podía decir como su aporte o su opinión según lo que uno pensara pues de acuerdo a como se hacía la construcción, pues, o sea sabiendo que el resto del grupo la iba a debatir, pero pues de alguna manera buena, como para ver qué cosas que tal vez pudo tener mal, pero que de pronto tu no habías notado, entonces como que el resto te debatía sobre tu opinión y pues eso.
238	P. Diego	Muchas gracias, alguien más para terminar
239	Xiomara	Yo pienso la verdad que, si respetamos la palabra, pudimos dar nuestros puntos de vista y lo que opinábamos frente a algo. Me gusto la actividad porque pienso que desarrollamos el pensamiento crítico y tener una postura frente a las cosas, no solamente esperar a llegar con una definición, apréndesela de memoria y ya, sino aplicarla, también resolverla nosotros mismos.
240	P. Diego	Listo. Muchas gracias a ustedes.
Se finaliza la sesión		

ANEXO 13: Planeación de la tarea 1

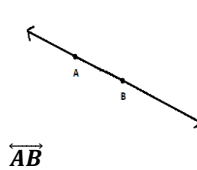
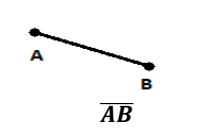
Tarea 1: Nociones básicas	
IDENTIFICACIÓN	
Conceptos por trabajar	Nociones básicas: Punto, recta, segmento. Definiciones: Colinealidad, interestancia, equidistancia, congruencia de segmentos
Objetivo(s) de enseñanza	Lograr que los estudiantes se familiaricen con algunas nociones y definiciones básicas de la geometría euclidiana.
Competencias matemáticas y ciudadanas	Se espera que en la aplicación de la tarea se promuevan las siguientes competencias: Matemáticas: pensar y razonar, comunicar, representar. Ciudadanas: cognitiva, comunicativa e integradora.
Tipo de Incertidumbre	Posiblemente se genere el siguiente tipo de incertidumbre <i>Camino desconocido o conclusión cuestionable</i> . Ya que permite la indagación y exploración de una tarea en un programa de geometría dinámica y de la cual pueden surgir varias conjeturas por parte de los estudiantes. Se espera que esta tarea genere incertidumbre relacionada con el <i>camino desconocido o conclusión cuestionable</i> . Ya que para su solución es necesario el uso de un programa de geometría dinámica (GeoGebra) que por medio de sus herramientas se puede explorar y así llegar a más de una posible solución. Que al momento de socializarlas posiblemente se presenten discusiones entre los estudiantes por alguna solución que ellos consideren cuestionar; ya sea por la manera como se llegó a la solución o cuestionando alguna condición que pedía la tarea.
Manejo de las posibles Dificultades	Durante toda la sesión de clase se irán haciendo rondas por cada una de las parejas con el fin de ir supervisando el trabajo de cada una de los estudiantes, y al mismo tiempo ir orientando a aquellas que presenten dificultades y tenga dudas ya sea de la actividad, o el manejo del software.
RECURSOS	
Material que utiliza	<ul style="list-style-type: none"> • Guía #1: Nociones básicas. • Un computador por parejas con el software GeoGebra. • Video-beam.
DESCRIPCIÓN DE LA CLASE- GUÍA DE TRABAJO	
<p>Esta primera tarea está conformada por tres ítems. El primero consiste en revisar una tabla en la cual se presentan las tres nociones básicas (Punto, recta y segmento) que se asumen en esta trayectoria; deben identificar su representación gráfica y simbólica, seguidamente los estudiantes deberán explorar el software GeoGebra para identificar herramientas del programa que permitan la construcción de estos objetos geométricos, reportando un paso a paso de cómo realizaron la construcción. Luego de que los estudiantes finalicen el trabajo por parejas se hará una puesta en común para identificar posibles soluciones, pero a la vez solucionar inquietudes.</p> <p>Posterior a esta socialización se les hará entrega a los estudiantes una fotocopia que contiene la definición, la representación gráfica y simbólica de los siguientes términos: colinealidad, interestancia, equidistancia y congruencia de segmentos. El objetivo es que los estudiantes se familiaricen con algunos términos y el lenguaje matemático que se utilizarán para el desarrollo de las siguientes tareas. Además, se pretende generar discusión sobre lo que se está entendiendo por cada una de las definiciones allí presentadas.</p> <p>Para finalizar esta primera tarea, se presenta el segundo ítem en el que también es necesario hacer uso del software, para dar solución, con esta parte de la tarea se quiere que los estudiantes reconozcan las condiciones para que dos segmentos sean congruentes y logren encontrar herramientas del programa para construir estos objetos. Se le pedirá a varios grupos que expongan su solución a la clase, para que los demás niños analicen, comenten y discutan sobre la validez de cada solución.</p>	
GUÍA DE TRABAJO	
1) Con el apoyo de software GeoGebra complete la siguiente tabla.	

Noción Básica	Representación Simbólica-Gráfica	Describa paso a paso la construcción que realizó en Geogebra.
Punto		
Recta		
Segmento		

- 2) Con el apoyo de software GeoGebra complete la siguiente tabla.
- En Geogebra construya un segmento;
 - En Geogebra construya otro segmento que sea congruente al que construyó en el punto anterior.
 - Explique cómo lo construyó, y que herramientas utilizó.
 - Si arrastra uno de los extremos del segmento dado, el que se construyó sigue siendo congruente.
 - Construya un segmento congruente al inicial, que sin importar el arrastre siga siendo congruente.

POSIBLES SOLUCIONES

- 1) En relación con el primer ítem, se presenta la tabla con algunas posibles soluciones:

Noción Básica	Representación Simbólica-Gráfica	Describa paso a paso la construcción que realizó en Geogebra.
Punto	• A	Ir a la barra de herramientas, dar clic en el segundo icono. Seleccionar la opción punto, dar clic sobre la ventana gráfica.
Recta		Solución 1: Con el punto A que se construyó en el ejercicio anterior, construir otro punto B, y con la herramienta recta unir esos dos puntos. Solución 2: Ir a la barra de herramientas, dar clic en el tercer icono. Seleccionar la opción recta, dar clic sobre la ventana gráfica, mover el cursor a otro lugar de la pantalla y volver a dar clic.
Segmento		Solución 1: Con el punto A que se construyó en el primer ejercicio, construir otro punto B, y con la herramienta segmento unir esos dos puntos. Solución 2: Ir a la barra de herramientas, dar clic en el tercer icono. Seleccionar la opción segmento, dar clic sobre la ventana gráfica, mover el cursor a otro lugar de la pantalla y volver a dar clic.

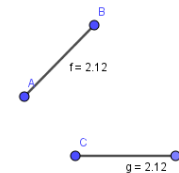
- 2) En relación con el ítem algunas posibles soluciones son:

Solución 1:

Construir el segmento AB .

Utilizar la herramienta “Segmento de longitud dada”

Ingresa la variable que representa la medida del segmento AB .

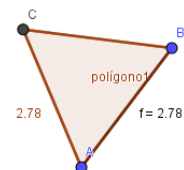


Solución 2:

Construir el segmento AB .

Construir la circunferencia con centro en A y radio AB .

Construir el segmento AC , donde C es un punto de la circunferencia.

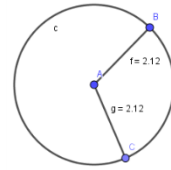


Solución 3:

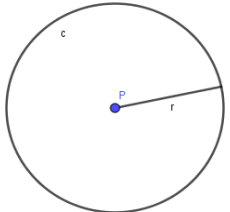
Construir el segmento AB .

Utilizar la herramienta “Polígono regular” seleccionar el segmento AB .

Ingresa la cantidad de lados del polígono a construir (Para este caso, tres lados)



ANEXO 14: Planeación de la tarea 2

Tarea 2: Definición de circunferencia	
IDENTIFICACIÓN	
Conceptos por trabajar	Definición de circunferencia.
Objetivo(s) de enseñanza	Promover la construcción de la definición de circunferencia con ayuda del software Geogebra.
Competencias matemáticas y ciudadanas	Se espera que en la aplicación de la tarea se promuevan las siguientes competencias: Matemáticas: argumentar, representar. Ciudadanas: cognitiva, integradoras.
Tipo de Incertidumbre	Se espera que el tipo de incertidumbre que se genere sea <i>afirmaciones encontradas</i> , ya que el objetivo de esta tarea es la construcción de la definición de circunferencia. Las estudiantes ya tienen unas ideas o creencias sobre qué es, lo que probablemente dé lugar a discusiones sobre dicha definición.
Manejo de las posibles Dificultades	Para las posibles dificultades que se presenten en torno al concepto de circunferencia, o sobre el manejo del software que presenten las estudiantes los investigadores estarán atentos para orientar y dar explicaciones a las dificultades.
RECURSOS	
Material que utiliza	<ul style="list-style-type: none"> • Guía #2: Def. de circunferencia • Un computador por parejas con el software GeoGebra. • Video-beam.
DESCRIPCIÓN DE LA CLASE- GUÍA DE TRABAJO	
Con esta tarea se busca que las estudiantes a partir de la construcción de una circunferencia en Geogebra y midiendo la distancia que hay entre el centro y varios puntos que pertenecen a la circunferencia, identifiquen la condición que cumplen todos los puntos que pertenecen a una misma circunferencia, y establezcan una definición para este objeto geométrico. Después de la puesta en común y la socialización del trabajo hecho en parejas establecer una definición grupal.	
GUÍA DE TRABAJO	
<p>En GeoGebra construya una circunferencia con centro en P y radio cualquiera, a partir de esta construcción contesta las siguientes preguntas:</p> <ol style="list-style-type: none"> a) Seleccione un punto de la circunferencia, mida la distancia que hay desde este punto al centro. ¿cuál es la distancia? b) Seleccione un segundo punto de la circunferencia, y mida la distancia que hay hasta el centro. ¿cuál es la distancia? c) Realice este procedimiento con más puntos de la circunferencia; ¿Qué se puede observar con respecto a la distancia de esos puntos al centro? d) Como definirás circunferencia: 	 <p>El diagrama muestra una circunferencia con un punto central etiquetado como 'P'. Una línea segmentada que conecta el punto 'P' con el borde de la circunferencia está etiquetada como 'r', representando el radio. El borde de la circunferencia está etiquetado como 'c'.</p>
POSIBLES SOLUCIONES	
<p>Algunas definiciones para circunferencia que pueden surgir son:</p> <p>D1. Circunferencia: Conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo.</p> <p>D2. Circunferencia: Conjunto de puntos que están a la misma distancia de un punto fijo.</p> <p>D3. Circunferencia: Línea curva cuyos puntos están a la misma distancia del centro.</p> <p>D4. Circunferencia: Figura plana conformada por puntos que están a la misma distancia de un punto fijo.</p>	

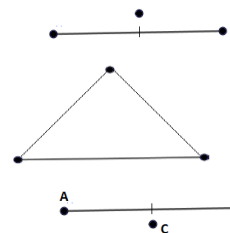
ANEXO 15: Planeación de la tarea 3

<i>Tarea 3: Definición de Punto medio</i>	
IDENTIFICACIÓN	
Conceptos por trabajar	Definición de punto medio
Objetivo(s) de enseñanza	Lograr que los estudiantes reconozcan las condiciones necesarias para establecer si un punto es o no es el punto medio de un segmento, y que logren saber cómo construirlo en el software GeoGebra.
Competencias matemáticas y ciudadanas	Se espera que en la aplicación de la tarea se promuevan las siguientes competencias: Matemáticas: representar y razonar. Ciudadanas: cognitivas e integradoras.
Tipo de Incertidumbre	En la aplicación de esta tarea se espera que se genere incertidumbre de tipo afirmaciones encontradas las estudiantes deberán aplicar la definición de punto medio a partir de ejemplos, esto dará lugar a reclamaciones o afirmaciones entre los grupos pues depende de la comprensión de las condiciones y las creencias explicaran en sus propias palabras lo que significa la definición.
Dificultades y soluciones posibles	A medida que se vayan presentando dificultades ya sea en el manejo del programa Geogebra, o de la tarea como tal, los investigadores se acercaran aquellas estudiantes que lo requieren, para realizar preguntas que las orienten y se pueden solucionar las dudas o problemas que tengan. Un posible error que pueden cometer las estudiantes es que no nombren los diferentes puntos, para esto el profesor deberá hacer explícito esta situación.
RECURSOS	
Material que utiliza	<ul style="list-style-type: none"> • Guía #3: Definición de punto medio. • Un computador por parejas con el software GeoGebra. • Video-beam.
DESCRIPCIÓN DE LA CLASE- GUÍA DE TRABAJO	
En esta tarea se les presentará a las estudiantes las dos condiciones que hacen parte de la definición de punto medio. Luego, se le pedirá a ellas que propongan ejemplos gráficos de puntos que no cumplan una o las dos condiciones que determinan la definición de punto medio; posteriormente, deben proponer ejemplos de puntos que si satisfacen las dos condiciones; cabe aclarar que para la solución de esta primera parte de la tarea no se hace uso del software. Finalmente, en GeoGebra deben explorar y construir el punto medio de un segmento, explicando paso a paso la construcción y las herramientas que utilizaron. Finalizado este trabajo por parejas, se destinará un espacio de la clase para escuchar las soluciones de algunos grupos, y la intervención de las demás niñas para opinar y discutir sobre lo expuesto.	
GUÍA DE TRABAJO	
<p>D. Punto medio: A es punto medio del \overline{BC} si cumple las siguientes condiciones:</p> <ol style="list-style-type: none"> $B - A - C$ A equidista de B y C <ol style="list-style-type: none"> 1) Proponga un ejemplo donde se cumpla la primera condición, pero no la segunda, explique su ejemplo. 2) Proponga un ejemplo donde se cumpla la segunda condición, pero no la primera, explique su ejemplo. 3) Proponga un ejemplo donde no se cumpla ninguna de las dos condiciones, explique su ejemplo 4) Proponga dos ejemplos donde se cumpla las dos condiciones, explique su ejemplo 5) En Geogebra, ¿Se puede encontrar el punto medio de un segmento? Explique. 	
POSIBLES SOLUCIONES	
<p>1) Para el primer enunciado algunas soluciones serían las que se presentan a continuación, teniendo en cuenta que las estudiantes pueden dibujar cualquier segmento en diferentes posiciones.</p> <p>Solución 1: Dibujar un segmento cualquiera y ubicar un punto sobre el segmento.</p> <p>Solución 2: Dibujar un segmento cualquiera y ubicar un punto muy cercano a uno de los extremos del segmento</p> <p>Solución 3: Dibujar el segmento, localizar donde queda la mitad de la mitad de este, y ubicar el punto solicitado muy cercano a la mitad.</p> <p>Solución 4: Realizar cualquiera de las anteriores soluciones, pero colocando los nombres correspondientes a los puntos.</p>	

2) Para el segundo enunciado se pueden dar las siguientes soluciones²⁴

Solución 1: Dibujar el segmento, localizar donde queda la mitad de la mitad de este, y ubicar el punto solicitado en la parte superior (o inferior) de la marca.

Solución 2: Dibujar el segmento, tratar de dibujar un triángulo isósceles, para encontrar el punto solicitado



Solución 3: Realizar cualquiera de las anteriores soluciones, pero colocando los nombres correspondientes a los puntos.

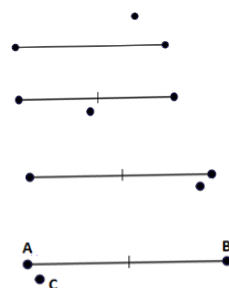
3) Para encontrar el punto que no cumple ninguna de las dos condiciones de la definición de punto medio, se pueden presentar las siguientes soluciones.

Solución 1: Dibujar el segmento, y ubicar un punto que a simple vista no pertenezca al segmento y que la distancia de este punto a los extremos sea distinta.

Solución 2: Dibujar el segmento, y localizar donde queda la mitad de dicho segmento y ubicar un punto que solicitado cerca a la mitad del segmento y más cerca a uno de los extremos.

Solución 3: Dibujar el segmento, ubicar el punto solicitado muy cercano a uno de los extremos del segmento, pero que no esté en el segmento.

Solución 4: Realizar cualquiera de las soluciones anteriores, pero nombrando los puntos.

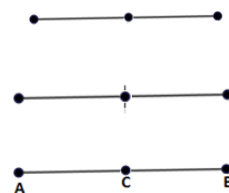


4) Algunas posibles soluciones de ejemplos de punto medio son las que se presentan a continuación:

Solución 1: Dibujar el segmento, y ubicar el punto pedido en el segmento que a simple vista esté a la misma distancia de los extremos.

Solución 2: Dibujar el segmento, marcar la mitad del segmento usando regla o doblado de papel y ubicar el punto sobre la marca realizada.

Solución 3: Realizar cualquiera de las dos soluciones anteriores, pero utilizando el lenguaje simbólico para nombrar los puntos.

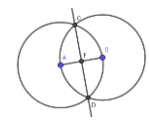


5) Para este último ítem de la tarea el estudiante debe hacer uso de del software GeoGebra, escribir un paso a paso de como encontró el punto medio de un segmento dado. La siguientes son las posibles soluciones:

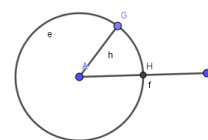
Solución 1: Construir el segmento AB , de la barra de herramientas seleccionar la opción dos y posterior elegir la herramienta “Punto medio o centro” seleccionar los extremos del segmento.



Solución 2: Construir el segmento AB , luego hacer una circunferencia con centro en A y radio AB , hacer una segunda con centro en B y radio AB . Trazar la recta que pasa por los puntos de intersección de las dos circunferencias. Poner un punto de intersección entre la recta y el segmento.

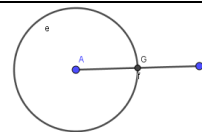


Solución 3: Construir el segmento AB con medida f , seleccionar la herramienta “Segmento de longitud dada” y construir un segmento con un punto de extremo en A y longitud $f/2$. Hacer la circunferencia con centro en A y radio AG con la herramienta “Circunferencia (centro-punto)”. El punto de intersección entre el segmento AB y la circunferencia es el punto medio del segmento AB

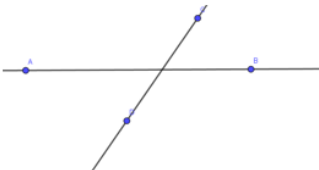
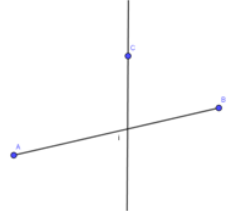
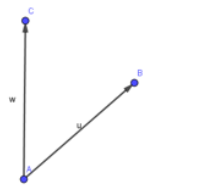
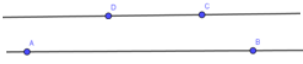
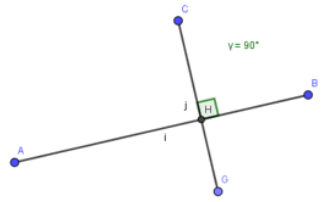
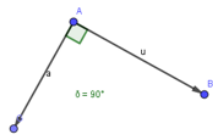
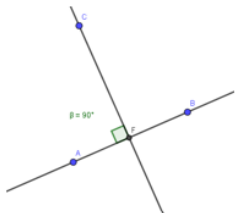


²⁴ Consideraremos en este trabajo las soluciones donde no se utilice la notación matemática, pero también aquellas que si hacen uso de la notación. Aclarando que un error de las estudiantes es no poner nombres a los diferentes puntos.

Solución 4: Construir el segmento AB con medida f , seleccionar la herramienta “Circunferencia (centro-radio)” y construir la circunferencia con centro A y radio $f/2$. El punto de intersección es el punto medio del segmento AB .



ANEXO 16: Planeación de la tarea 4

<i>Tarea 4: Definición de perpendicularidad</i>		
IDENTIFICACIÓN		
Conceptos trabajar por	Definición de perpendicularidad	
Objetivo(s) de enseñanza de	Construir la definición de perpendicularidad a través de ejemplos y contraejemplos a partir de los conocimientos previos de las estudiantes.	
Competencias matemáticas y ciudadanas y	Se espera que en la aplicación de la tarea se promuevan las siguientes competencias: Matemáticas: argumentar, comunicar, representar. Ciudadanas: cognitiva, comunicativa e integradora.	
Tipo Incertidumbre de	Se espera que la tarea genere incertidumbre relacionada con afirmaciones encontradas , teniendo en cuenta que las estudiantes seguramente ya han trabajado con anterioridad la definición de perpendicularidad lo cual implica la posible existencia de creencias sobre esta lo que posiblemente provocará una discusión de lo que es y no es perpendicularidad para los diferentes grupos de trabajo.	
Dificultades y soluciones posibles y	Durante la presentación de la guía de trabajo para esta sesión los investigadores estarán atentos frente a los comentarios de las estudiantes explorando el pensamiento de las estudiantes frente a los que están observando con el fin de aclarar dudas durante la posible comparación entre cada caso y posterior construcción de la definición.	
RECURSOS		
Material que utiliza	<ul style="list-style-type: none"> • Guía #4: definición de perpendicularidad. • Un computador por parejas con el software GeoGebra. • Video-beam. 	
DESCRIPCIÓN DE LA CLASE		
<p>La tarea con relación a la definición de perpendicularidad es contraria a la actividad anterior, porque se le presentará al estudiante una secuencia de imágenes de rectas, rayos y segmentos que son perpendiculares, pero también otros que no son, las estudiantes deben clasificar dichas imágenes en dos grupos y explicar cuál fue el criterio para la clasificación, adicionalmente deberá escribir una posible definición de perpendicularidad de acuerdo a la clasificación realizada anteriormente. Se finalizará con una puesta en común entre las diferentes respuestas, cerrando la discusión cuando, entre todo el grupo, se consolide la definición de perpendicularidad.</p>		
GUÍA DE TRABAJO		
<p>Caso 1: No son perpendiculares</p> 	<p>Caso 4: No son perpendiculares</p> 	<p>Caso 6: No son perpendiculares</p> 
<p>Caso 2: No son perpendiculares</p> 	<p>Caso 5: Son perpendiculares</p> 	<p>Caso 7: Son perpendiculares</p> 
<p>Caso 3: Son perpendiculares</p> 	<p>Defina que es perpendicularidad: _____</p> <p>_____</p>	
POSIBLES SOLUCIONES		

Solución 1: se espera que la estudiante con apoyo de las imágenes presentadas en cada caso, por medio de la visualización reconozca e identifique las características y condiciones que permiten que una recta sea perpendicular a otra, teniendo en cuenta la medida del ángulo que se forma en la intersección de estas. A continuación, se muestran algunas de las posibles definiciones que pueden surgir por parte de las estudiantes a partir de visualizar cada caso.


D1. Perpendicular: rectas que se intersecan en un punto.

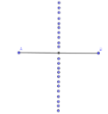

D2. Perpendicular: recta que se interseca a otra y forma cuatro ángulos.

D3. Perpendicular: rectas que se intersecan y forman un ángulo de 90°

D4. Perpendicular: dos rectas son perpendiculares si al intersecarse en un punto forman ángulos de 90° .

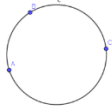
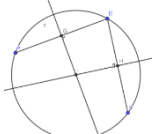
ANEXO 17: Planeación de la tarea 5

Tarea 5: Definición de mediatriz	
IDENTIFICACIÓN	
Conceptos trabajar <i>por</i>	Definición de mediatriz
Objetivo(s) enseñanza <i>de</i>	Construir la definición de mediatriz a partir de los objetos geométricos revisados en las sesiones anteriores.
Competencias matemáticas ciudadanas <i>y</i>	Se espera que en la aplicación de la tarea se promuevan las siguientes competencias: Matemáticas: pensar y razonar, comunicar, representar. Ciudadanas: cognitiva, comunicativa, emocional.
Tipo Incertidumbre <i>de</i>	Posiblemente en la aplicación de la tarea se genere incertidumbre de tipo resultados no verificables fácilmente, ya que las estudiantes quizás no lleguen a una respuesta rápida, además que la solución a la que lleguen no sea la esperada por ellas. Puede que encuentren los puntos que equidistan de los extremos, pero al mover alguno de ellos ya no cumpla con la condición mencionada en la tarea.
Dificultades soluciones posibles <i>y</i>	Durante la interacción por parte de las estudiantes en el momento de observar y analizar la guía, los investigadores frecuentemente pasaran por las parejas atendiendo las dudas e inquietudes que surjan teniendo en cuenta que esta tarea es una de las más importantes. Seguramente surgirán dudas ya que esta actividad inicia solicitando a las estudiantes hallar puntos sin utilizar regla y compas, ni GeoGebra.
RECURSOS	
Material que utiliza	<ul style="list-style-type: none"> • Guía #5: definición de mediatriz • Un computador por parejas con el software GeoGebra. • Video-beam.
DESCRIPCIÓN DE LA CLASE	
La tarea cinco se relaciona con la construcción de la definición de mediatriz de un segmento, se harán preguntas con el fin de hallar puntos de dicha recta; se pretende que las estudiantes encuentren 5 o 6 puntos de la mediatriz, y logren identificar que dichos puntos pertenecen a la misma recta, se espera que uno a más grupos logre hacer esta conjetura y la puedan sustentar delante de sus compañeras con el fin de generar procesos de justificación. Cuando los estudiantes logren identificar dicha recta, se les pedirá que exploren con el software GeoGebra las diferentes características con el fin de llegar a la definición de mediatriz.	
GUÍA DE TRABAJO	
<p>1) Dado el siguiente segmento.</p> <p>a) Sin usar regla, compás o Geometría dinámica (GeoGebra) ¿existe un punto que equidiste de los puntos <i>A</i> y <i>B</i>? Sí, No o No se sabe. Explique su respuesta.</p> <p>b) Grafique la situación anterior en Geogebra</p> <p>c) ¿Usando Geogebra puede encontrar otro punto que equidiste de los puntos <i>A</i> y <i>B</i>? Si, No o no se sabe. Justifique su respuesta</p> <p>d) ¿Existen más puntos que equidisten de <i>A</i> y <i>B</i>?</p> <ul style="list-style-type: none"> • ¿Cuántos encontró? • ¿Cómo los encontró? _____ 	
POSIBLES SOLUCIONES	
En este punto de la actividad dependiendo de lo que las estudiantes hayan explorado y descubierto se puede llegar a dos posibles definiciones de mediatriz:	

<p>Mediatriz Def 1: La mediatriz del segmento \overline{AB} es el conjunto de todos los puntos que equidistan de A y B.</p>	
<p>Mediatriz Def 2: La mediatriz del segmento \overline{AB} es la recta perpendicular que contiene el punto medio del segmento.</p>	

En caso tal que se llegue a las dos, el docente en este momento deberá fomentar discusión, participación, justificaciones y/o explicaciones para decidir cuál de las dos se asumirá como definición y cual como hecho geométrico.

ANEXO 18: Planeación de la tarea 6

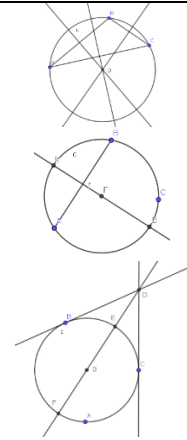
Tarea 6: Tres puntos-circunferencia	
IDENTIFICACIÓN	
Conceptos por trabajar	Definición de mediatriz, circunferencia, punto medio, relación de perpendicularidad.
Objetivo(s) de enseñanza	Proponer una tarea en la cual las estudiantes utilicen las definiciones construidas durante la trayectoria hipotética de aprendizaje y permita evidenciar la adquisición de estas.
Competencias matemáticas y ciudadanas	Se espera que en la aplicación de la tarea se promuevan las siguientes competencias: Matemáticas: pensar y razonar, argumentar, representar. Ciudadanas: cognitiva, comunicativa e integradora.
Tipo de Incertidumbre	Se espera en esta tarea generar incertidumbre de dos tipos camino cuestionable y resultados no verificables . El primero, porque las estudiantes utilizarán un programa de geometría dinámica para solucionar la tarea y puede que durante este trabajo de exploración surjan posibles conjeturas que generen debate en la clase. El segundo, porque la solución que presenten las estudiantes puede que no sea la propuesta por los demás grupos o quizás no sepan cómo comprobar que la solución es correcta, por tal motivo puede que se genere algún tipo de discusión que implique la participación activa de las estudiantes.
Dificultades y soluciones posibles	Durante la solución de la tarea las estudiantes pueden presentar varias dudas respecto a la construcción de una circunferencia a partir de tres puntos no colineales, al igual que durante la localización del punto centro de esta. En este caso los investigadores estarán al tanto de la exploración que realicen las estudiantes para poder orientar las posibles soluciones que surjan en el momento.
RECURSOS	
Material que utiliza	<ul style="list-style-type: none"> • Guía #6: tres puntos- circunferencia • Un computador por parejas con el software GeoGebra. • Video-beam.
DESCRIPCIÓN DE LA CLASE- GUÍA DE TRABAJO	
Con la tarea seis se pretende que las estudiantes resuelvan una situación donde el tiempo de solución es mayor que las actividades anteriores, debido a que aumenta el grado de complejidad y de incertidumbre. Esta consiste en que dados tres puntos no colineales construir una circunferencia y encontrar el centro de esta. Al finalizar el trabajo por parejas, se destinará un tiempo para la socialización y explicación de las posibles soluciones, donde se les pedirá a las estudiantes que hagan uso de los elementos teóricos estudiados durante las actividades anteriores.	
GUÍA DE TRABAJO	
Dados tres puntos no colineales 5) ¿Se puede completar la circunferencia? ¿Cómo se haría? 6) ¿Se puede encontrar el centro dicha circunferencia? 7) ¿Cómo lo encontró? 8) ¿Qué elementos teóricos permite justificar el procedimiento anterior?	
POSIBLES SOLUCIONES	
5) ¿Se puede completar la circunferencia? ¿Cómo se haría Solución 1: Es posible que los estudiantes intenten de manera intuitiva realizar una circunferencia que una los tres puntos, esto quizás sin concebir que existe un punto centro para que la circunferencia quede bien construida. Solución 2: dados tres puntos no colineales A, B y C . En GeoGebra buscar la herramienta <i>circunferencia por tres puntos</i> , dar clic a cada punto y el programa automáticamente construirá la circunferencia. 	
6) ¿Se puede encontrar el centro dicha circunferencia? Solución 1: Dados tres puntos no colineales A, B y C , construir la circunferencia C , construir el segmento \overline{AB} , construir el segmento \overline{BC} , hallar punto medio de cada segmento G y H , respectivamente, construir la mediatriz de cada segmento, trazar el punto de intersección J el cual será el centro de la circunferencia C . 	

Solución 2: Dados los tres puntos no colineales A, B y C , construir los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$, trazar la mediatriz de los tres segmentos, hallar el punto de intersección el cual va a ser centro de la circunferencia.

Solución 3: Dados los tres puntos no colineales A, B y C , unir los puntos A y B , formando el segmento \overline{AB} , hallar la mediatriz f , de este segmento, trazar puntos de intersección entre la circunferencia y la mediatriz construida D y E , hallar el punto medio de la cuerda \overline{DE} , este punto será el centro de la circunferencia.

Solución 4:

Dados los tres puntos no colineales A, B y C , construir la circunferencia c , trazar la tangente de la circunferencia que pase por el punto B , realizar lo mismo con el punto C , hallar el punto de intersección D entre las dos tangentes, hallar la bisectriz del ángulo $\angle BDC$, trazar punto de intersección entre la bisectriz y la circunferencia, puntos E y F , hallar el punto medio G , el cual será el centro de la circunferencia.



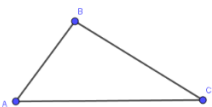
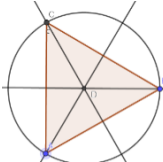
7) *¿Cómo lo encontró?*

Se espera que las estudiantes utilicen argumentos para justificar como hallaron el centro de la circunferencia construida dados tres puntos no colineales

8) *¿Qué elementos teóricos permite justificar el procedimiento anterior?*

En esta pregunta se pretende que los estudiantes utilicen las definiciones construidas y revisadas durante la trayectoria hipotética de aprendizaje tales como (punto medio, perpendicularidad, mediatriz etc.)

ANEXO 19: Planeación de la tarea 7

<i>Tarea 7: Mediatrices del triángulo</i>	
IDENTIFICACIÓN	
Conceptos por trabajar	Definición de mediatriz, punto medio, relación de perpendicularidad.
Objetivo(s) de enseñanza	Proponer una tarea en la cual las estudiantes utilicen las definiciones construidas durante la trayectoria hipotética de aprendizaje y permita evidenciar la adquisición de estas.
Competencias matemáticas y ciudadanas	Se espera que en la aplicación de la tarea se promuevan las siguientes competencias: Matemáticas: comunicar, representar Ciudadanas: cognitiva, comunicativa e integradora.
Tipo de Incertidumbre	En esta tarea se espera generar incertidumbre de tipo resultados no verificables fácilmente , las estudiantes no contarán con el software de geometría dinámica para realizar las construcciones necesarias y llegar a una posible solución, sin embargo, con base a los conocimientos adquiridos durante las sesiones anteriores quizás lleguen a una solución rápida lo que no se garantiza es que el resultado sea el que ellas esperan.
Dificultades y soluciones posibles	Esta tarea consiste en encontrar un punto que equidiste de los vértices de un triángulo. A diferencia de las tareas anteriores, esta no se hará uso del software GeoGebra, con esto se espera que se genere mayor incertidumbre en el momento de entender y comprender la situación para hallar un punto que cumpla con la condición dada y es que este equidiste de los extremos del triángulo. Los docentes investigadores estarán atentos frente a las dudas que surjan por parte de las estudiantes durante la búsqueda de este punto.
RECURSOS	
Material que utiliza	<ul style="list-style-type: none"> • Guía #7: Nociones básicas. • Reglas y hojas blancas.
DESCRIPCIÓN DE LA CLASE- GUÍA DE TRABAJO	
En esta sesión al igual que la anterior se buscará que los estudiantes utilicen las definiciones construidas durante la trayectoria hipotética de aprendizaje y puedan aplicarlas en una situación específica, además se solicitará justificar cada una de las construcciones realizadas para llegar a la solución de la situación dada por los investigadores. En esta oportunidad se propone un triángulo y se pedirá que por parejas hallen un punto que equidiste de los extremos del triángulo dado. Agregando la justificación del porque ese punto hallado cumple con la condición dada.	
GUÍA DE TRABAJO	
Dado el triángulo ABC	
	
<ol style="list-style-type: none"> 1) ¿Existe un punto que equidiste de los extremos? Justifique su respuesta 2) ¿Qué elementos teóricos le permite a justificar el punto anterior? Explique porque 	
POSIBLES SOLUCIONES	
<p>Solución 1: De manera intuitiva buscando el centro del triángulo.</p> <p>Solución 2: Dibujamos un triángulo cualquiera ABC.</p> <p>Se traza las mediatrices de los lados del triángulo. Se halla el punto de intersección de las mediatrices este punto será el circuncentro del triángulo. El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.</p>	
	

ANEXO 20: Permisos legales y administrativos

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	FORMATO	
	CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN	
Código: FOR026INV	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 02-06-2016	Página 1 de 2	

Vicerrectoría de Gestión Universitaria
Subdirección de Gestión de Proyectos – Centro de Investigaciones CIUP
Comité de Ética en la Investigación

En el marco de la Constitución Política Nacional de Colombia, la Resolución 0546 de 2015 de la Universidad Pedagógica Nacional y demás normatividad aplicable vigente, considerando las características de la investigación, se requiere que usted lea detenidamente y si está de acuerdo con su contenido, exprese su consentimiento firmando el siguiente documento:

PARTE UNO: INFORMACIÓN GENERAL DEL PROYECTO

Facultad, Departamento o Unidad Académica	Facultad de ciencia y tecnología, Departamento de matemáticas; maestría en docencia de la matemática.
Título del proyecto de investigación	Las definiciones como elementos para favorecer la argumentación y las competencias ciudadanas en la clase de geometría. (temporal)
Descripción breve y clara de la investigación	Esta investigación pretende aplicar una secuencia de actividades que generan incertidumbre que buscan favorecer el proceso de definir y argumentar como también fortalecer algunas competencias ciudadanas en la clase de geometría.
Descripción de los posibles riesgos de participar en la investigación	Algunas ideas no se tendrán en cuenta por efectos de interés, es decir, no todo lo que se mencione durante las clases será para su posterior análisis.
Descripción de los posibles beneficios de participar en la investigación	Participar en una investigación académica de alto nivel, aportar ideas que beneficiarán a los investigadores para realizar su respectivo análisis, abrir otros espacios académicos (aula de sistemas) que fortalecerán la enseñanza de la geometría.
Datos generales del investigador principal	Nombre(s) y Apellido(s): Diego Guerrero Garay
	N° de Identificación: 1022361156
	Correo electrónico: dguerrerog@upn.edu.co
	Dirección: Carrera 70# 2a-24


PARTE DOS: CONSENTIMIENTO INFORMADO

Yo: Olga Lucia Bustos Rodriguez

Mayor de edad, identificado con Cédula de Ciudadanía N° 52442295 de Bogotá

Con domicilio en la ciudad de: Bogotá Dirección: Carretera 5A N° 11-38 sur

Teléfono y N° de celular: 333 22 43 Correo electrónico: csjcoordinacionacademica@gmail.com

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	FORMATO
	CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN
Código: FOR026INV	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 02-06-2016	Página 2 de 2

Declaro que:

1. He sido invitado(a) a participar en el estudio o investigación de manera voluntaria.
2. He leído y entendido este formato de consentimiento informado o el mismo se me ha leído y explicado.
3. Todas mis preguntas han sido contestadas claramente y he tenido el tiempo suficiente para pensar acerca de mi decisión de participar.
4. He sido informado y conozco de forma detallada los posibles riesgos y beneficios derivados de mi participación en el proyecto.
5. No tengo ninguna duda sobre mi participación, por lo que estoy de acuerdo en hacer parte de esta investigación.
6. Puedo dejar de participar en cualquier momento sin que esto tenga consecuencias.
7. Conozco el mecanismo mediante el cual los investigadores garantizan la custodia y confidencialidad de mis datos, los cuales no serán publicados ni revelados a menos que autorice por escrito lo contrario.
8. Autorizo expresamente a los investigadores para que utilicen la información y las grabaciones de audio, video o imágenes que se generen en el marco del proyecto.
9. Sobre esta investigación me asisten los derechos de acceso, rectificación y oposición que podré ejercer mediante solicitud ante el investigador responsable, en la dirección de contacto que figura en este documento.

En constancia el presente documento ha sido leído y entendido por mí en su integridad de manera libre y espontánea.


Firma,



Nombre: Olga Lucía Bustos R.
 Identificación: C.C-52.442.295.Pta
 Fecha: 5 marzo de 2018.

La Universidad Pedagógica Nacional agradece sus aportes y su decidida participación

Consentimiento padres


	FORMATO	
	CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA LA PARTICIPACIÓN EN INVESTIGACIONES ADULTO RESPONSABLE DE NIÑOS Y ADOLESCENTES	
Código: FOR025INV	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 02-06-2016	Página 1 de 3	

Vicerrectoría de Gestión Universitaria
Subdirección de Gestión de Proyectos – Centro de Investigaciones CIUP
Comité de Ética en la Investigación

En el marco de la Constitución Política Nacional de Colombia, la Ley 1098 de 2006 – Código de la Infancia y la Adolescencia, la Resolución 0546 de 2015 de la Universidad Pedagógica Nacional y demás normatividad aplicable vigente, considerando las características de la investigación, se requiere que usted lea detenidamente y si está de acuerdo con su contenido, exprese su consentimiento firmando el siguiente documento:

PARTE UNO: INFORMACIÓN GENERAL DEL PROYECTO

Facultad, Departamento o Unidad Académica	Facultad de ciencia y tecnología, Departamento de matemáticas; maestría en docencia de la matemática.	
Título del proyecto de investigación	Las definiciones como elementos para favorecer la argumentación y las competencias ciudadanas en la clase de geometría. (temporal)	
Descripción breve y clara de la investigación	Esta investigación pretende aplicar una secuencia de actividades que generan incertidumbre que buscan favorecer el proceso de definir y argumentar como también fortalecer algunas competencias ciudadanas en la clase de geometría.	
Descripción de los posibles riesgos de participar en la investigación	Algunas ideas no se tendrán en cuenta por efectos de interés, es decir, no todo lo que se mencione durante las clases será para su posterior análisis.	
Descripción de los posibles beneficios de participar en la investigación.	Participar en una investigación académica de alto nivel, aportar ideas que beneficiarán a los investigadores para realizar su respectivo análisis, abrir otros espacios académicos (aula de sistemas) que fortalecerán la enseñanza de la geometría.	
Datos generales del investigador principal	Nombre(s) y Apellido(s) : Diego Guerrero Garay	
	N° de Identificación: 1022361156	Teléfono:
	Correo electrónico: dguerrerog@upn.edu.co	
	Dirección: carrera 5 a # 11-38	

	FORMATO CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA LA PARTICIPACIÓN EN INVESTIGACIONES ADULTO RESPONSABLE DE NIÑOS Y ADOLESCENTES
	Código: FOR025INV Versión: 01
Fecha de Aprobación: 02-06-2016 Página 2 de 3	

PARTE DOS: CONSENTIMIENTO INFORMADO

Yo Gloria Moreno Avila mayor de edad, identificado con Cédula de Ciudadanía N° 5144306 de Bogota, con domicilio en la ciudad de Bogota.
 Dirección: Kra 7C # 1e 47 Sur Teléfono y N° de celular: 012595 2622542672
 Correo electrónico: _____

Como adulto responsable del niño(s) y/o adolescente (s) con:

Nombre(s) y Apellidos:	Tipo de Identificación	N°
<u>Sofia Franco Moreno</u>	<u>TI</u>	<u>0001299 828</u>

Autorizo expresamente su participación en este proyecto y

Declaro que:

1. He sido invitado(a) a participar en el estudio o investigación de manera voluntaria.
2. He leído y entendido este formato de consentimiento informado o el mismo se me ha leído y explicado.
3. Todas mis preguntas han sido contestadas claramente y he tenido el tiempo suficiente para pensar acerca de mi decisión de participar.
4. He sido informado y conozco de forma detallada los posibles riesgos y beneficios derivados de mi participación en el proyecto.
5. No tengo ninguna duda sobre mi participación, por lo que estoy de acuerdo en hacer parte de esta investigación.
6. Puedo dejar de participar en cualquier momento sin que esto tenga consecuencias.
7. Conozco el mecanismo mediante el cual los investigadores garantizan la custodia y confidencialidad de mis datos, los cuales no serán publicados ni revelados a menos que autorice por escrito lo contrario.
8. Autorizo expresamente a los investigadores para que utilicen la información y las grabaciones de audio, video o imágenes que se generen en el marco del proyecto.
9. Sobre esta investigación me asisten los derechos de acceso, rectificación y oposición que podré ejercer mediante solicitud ante el investigador responsable, en la dirección de contacto que figura en este documento.


Como adulto responsable del menor o adolescente autorizo expresamente a la Universidad Pedagógica Nacional utilizar sus datos y las grabaciones de audio, video o imágenes que se generen, que reconozco haber conocido previamente a su publicación en: Biblioteca central de Universidad Pedagógica Nacional.

En constancia, el presente documento ha sido leído y entendido por mí, en su integridad de manera libre y espontánea. Firma el adulto responsable del niño o adolescente,

Gloria Moreno Avila

Nombre del adulto responsable del niño o adolescente: _____

N° Identificación: 5144306 Fecha: _____

	FORMATO	
	CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA LA PARTICIPACIÓN EN INVESTIGACIONES ADULTO RESPONSABLE DE NIÑOS Y ADOLESCENTES	
Código: FOR025INV	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 02-06-2016	Página 3 de 3	

Firma del Testigo: Katalina Franco Moreno
Nombre del testigo: Katalina Franco M.
Nº de identificación: 023 711 502
Teléfono: 7 55 85 11

Declaración del Investigador: Yo certifico que le he explicado al adulto responsable del niño o adolescente la naturaleza y el objeto de la presente investigación y los posibles riesgos y beneficios que puedan surgir de la misma. Adicionalmente, le he absuelto ampliamente las dudas que ha planteado y le he explicado con precisión el contenido del presente formato de consentimiento informado. Dejo constancia que en todo momento el respeto de los derechos del menor o el adolescente será prioridad y se acogerá con celo lo establecido en el Código de la Infancia y la Adolescencia, especialmente en relación con las responsabilidades de los medios de comunicación, indicadas en el Artículo 47.

En constancia firma el investigador responsable del proyecto,

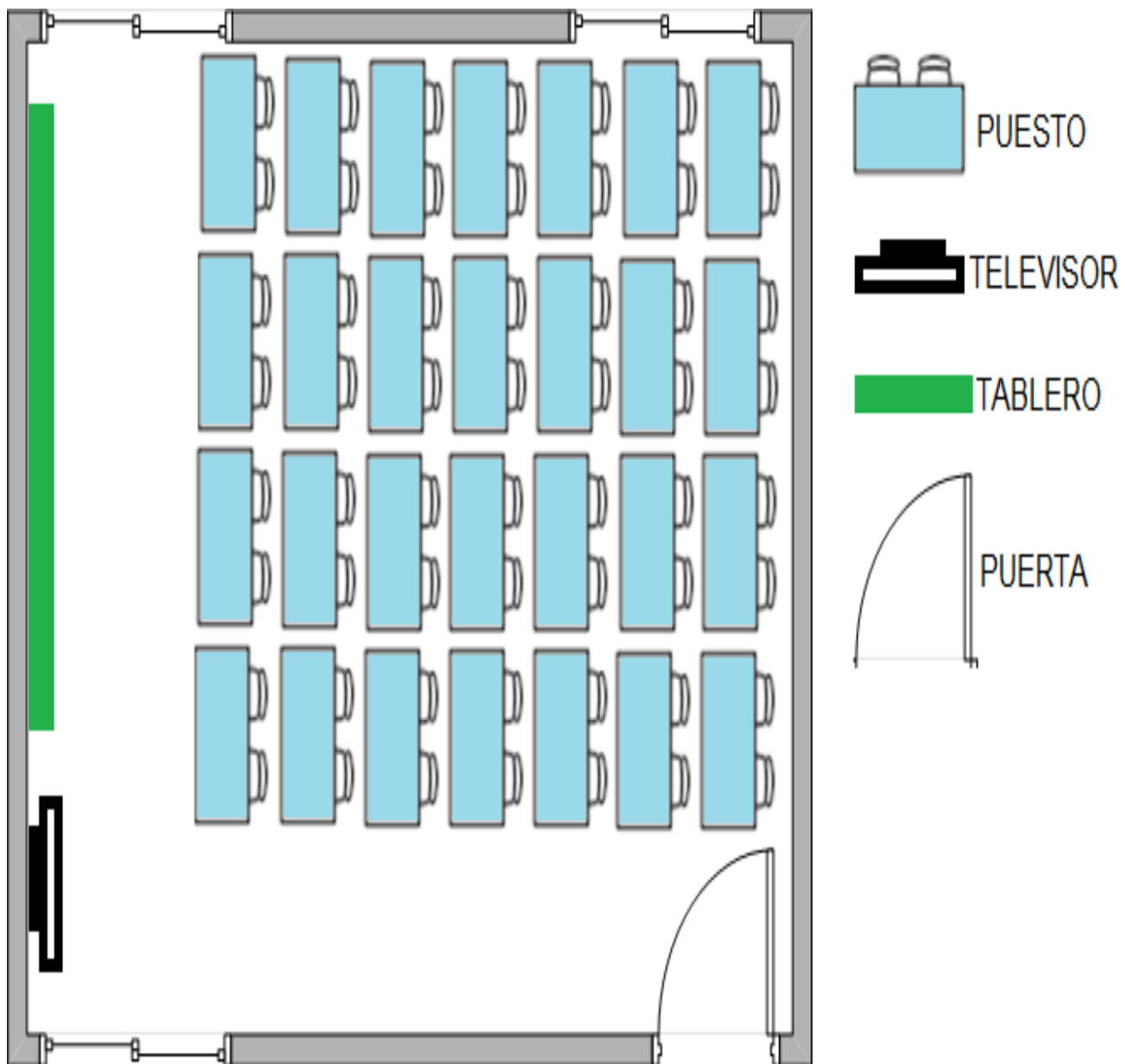
Diego Guerrero Garay
Nombre del Investigador responsable: Diego Guerrero Garay
Nº Identificación: 1022361156
Fecha: Marzo 2018

La Universidad Pedagógica Nacional agradece sus aportes y su decidida participación

ANEXO 21: Croquis del aula de sistemas



ANEXO 22: Croquis del salón de clase



ANEXO 23: Trabajos finales

¿Que aprendí de mis compañeros y que valores se evidenciaron?

Lo que aprendí de mis compañeros fue que se debieron respetar las opiniones de todos, a demás cuando decíamos si estábamos de acuerdo o no con lo que opinaban mis compañeros frente a un concepto o construcción en Geogebra, creo que cada opinión que se hizo en cada sesión de clase, fue muy bueno e hizo que quedara más la investigación y que todo quedara más claro, fue una manera de construir por nosotros mismos, nueva concepción de geometría, los valores que se evidenciaron fue el respeto, la solidaridad, el esfuerzo, la responsabilidad, honestidad, y agradecimiento.

Clases De Geometría Pasadas Vs Clases De Geometría Actuales

Las clases de geometría actuales son más motivadoras e interesantes e innovadoras, ya que se presentaron nuevos métodos de enseñanza, los cuales hacen que la estudiante este con mayor disposición para la clase, además se utilizó el método virtual y se presentó la clase en un lugar distinto, donde las estudiantes podían debatir las diversas soluciones a cada caso de problemas que planteaban los profesores y podían dar a conocer sus puntos de vistas y dudas; en cambio la clase de geometría pasada era menos interesantes ya que se presentaban los mismos temas.


¿QUE MEJORAS HA TENIDO LA CLASE CON RESPECTO AL AÑO?

COMO:
-GEOGEBRA.

Allí aprendimos herramientas que nos han facilitado el entendimiento y nos muestra la geometría mas amena, práctica a diferencia de lo que veníamos acostumbrados.

Con respecto a las clases del año pasado, antes aprendíamos con el tablero y esto hacia mas difícil el entendimiento y mas prolongadas y poco interesantes las clases, en cambio durante este periodo fueron muy amenas y productivas, descubrimos diferentes medios y plataformas interactivas.

GeoGebra



¿QUE APRENDI DE MIS COMPAÑERAS?

De mis compañeras aprendí demasiadas cosas importantes ya que cada una me aportó algo diferente puesto que cada una tenía su punto de vista y opiniones valiosas que aportar para la clase, aprendí a respetar la palabra de ellas y de los docentes.

¿QUE VALORES DESARROLLAMOS DURANTE LAS SESIONES?

LOS VALORES FUERON:

- La responsabilidad se evidencio al entregar los trabajos actividades y guías.
- El respeto se evidencio al saber opinar y escuchar la opinión de los demás.
- La tolerancia se evidencio al no molestarse cuando una compañera estuvo en desacuerdo con su opinión.

Comparación de clases.

Las clases de este año fueron muy divertidas y muy didácticas, fue una manera de aprender utilizando herramientas tecnológicas y ver desde otra perspectiva la geometría, en cambio las clases del año pasado eran demasiado comunes una explicación del tema, taller y utilizábamos los elementos normales, regla, transportador, compás, etc, pienso que si se implementaron las clases en sala de informática como se realizó en el proyecto utilizando Geogebra, es una manera distinta y novedosa de enseñar geometría y así descubrir cosas que no se pueden lograr con tan solo un lápiz y un cuaderno, y que podemos llegar a conclusiones y conceptos buenos con la ayuda de la tecnología.