MÁS DE 60 AÑOS DE PRESENCIA DE LA TRIGONOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN MEDIA COLOMBIANA. UNA MIRADA A LIBROS DE TEXTOS ESCOLARES

Carlos Alberto González Martínez

John Alejandro Mendoza Rodríguez

Universidad Pedagógica Nacional
Departamento de Matemáticas
Maestría en Docencia de la Matemática
Bogotá, Colombia
2019

MÁS DE 60 AÑOS DE PRESENCIA DE LA TRIGONOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN MEDIA COLOMBIANA. UNA MIRADA A LIBROS DE TEXTO ESCOLAR

Carlos Alberto González Martínez

John Alejandro Mendoza Rodríguez

Trabajo de grado para optar al título de **Magister en Docencia de la Matemática**

Directora

LYDA CONSTANZA MORA MENDIETA

Universidad Pedagógica Nacional
Departamento de Matemáticas
Maestría en Docencia de la Matemática
Bogotá, Colombia
2019

“Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría: en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos”.

(Acuerdo 031 del 2007. Artículo 42. Parágrafo 2.)

DEDICATORIAS

A mi amada esposa y mis adorados hijos,
que con su gran amor y paciencia
permitieron desarrollar esta investigación,
me animaron a continuar y
con su alegría me invitaron a crecer profesionalmente.
A una madre que siempre vio lo mejor en mí.
A un padre que ausente en esta tierra,
me acompaña por doquier.
CARLOS

A Dios,
Él ilumina mi camino
y da propósito a lo que hago.
…
A mi mamá,
por su apoyo incondicional.

Alejandro

AGRADECIMIENTOS

No es nada fácil sacar adelante un proyecto de estas características. Esta investigación es el resultado de mucho esfuerzo, sacrificio y de la intervención de diferentes personas que aportaron a la construcción de este escrito. En particular, agradecemos a…

… *nuestras familias*, quienes nos apoyaron y alentaron para seguir adelante.

…*Lyda Mora*, quien con su paciencia y conocimiento dirigió de la mejor manera este proyecto.

… el *colegio Calasanz*, quien nos permitió participar en diferente eventos de Matemáticas a nivel Nacional.

… los *profesores de la Maestría*, por su cercanía y aportes a la investigación.

Y, de manera particular, agradezco a mi compañero y amigo Carlos González, por su entrega y compromiso, pero sobre todo, por su gran ejemplo como profesor y persona.

Alejandro Mendoza,
Carlos González.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL	**FORMATO** **RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE**
Código: FOR020GIB	**Versión: 01**
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	**Página 1 de 10**

1. Información General

Tipo de documento	Trabajo de grado en maestría de profundización
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Más de 60 años de presencia de la Trigonometría en la Educación Media colombiana. Una mirada a libros de textos escolares
Autor(es)	González Martínez, Carlos Alberto; Mendoza Rodríguez, John Alejandro
Director	Mora Mendieta, Lyda Constanza
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional. 2018. 241 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA; LIBROS DE TEXTO; PROPÓSITOS DE LA EDUCACIÓN MEDIA; HISTORIA DEL CURRÍCULO ESCOLAR COLOMBIANO

2. Descripción

Trabajo de grado en el marco de la Maestría en Docencia de la Matemática, centrado en el análisis de la relación entre los libros de texto de Trigonometría, la historia de la Trigonometría y los propósitos de la Educación Media colombiana. Este trabajo tiene la finalidad de llevar a la reflexión sobre la función de los libros de texto de Trigonometría en relación con los propósitos de la Educación Media colombiana en los últimos 67 años. Para conducir las reflexiones se tipificó la Trigonometría de acuerdo con los problemas resueltos en la historia, se analizó el papel de la historia de la Trigonometría en los libros de texto y el tipo de problemas resueltos por los autores de los libros de texto. Con esta información se identificó la correspondencia entre las tareas resueltas por los autores de los textos de Trigonometría y los propósitos de la Educación Media.

3. Fuentes

Para realizar este estudio se consultaron las siguientes fuentes bibliográficas.

Abondano, W., Urquina, H., Beltrán, L., Suárez, A., & Rodríguez, B. (2010). *Mi aventura matemática 10.* Bogotá: editorial educativa.

Arango, E. (1949). *Memoria del Ministro de Educación Nacional.* Bogotá: Prensas del Ministerio de Educación Nacional.

Azula, R. (1951). *Memoria del Ministro de Educación Nacional.* Bogotá: Editorial Iquiema. Obtenido de http://www.idep.edu.co/wp_centrovirtual/?page_id=2544

Baldor, J. (1967). *Geometría plana y del espacio y Trigonometría.* Bilbao: Editorial Vasco Americana, S.A.

Barrantes, H., y Ruiz, Á. (1998). *La historia del comité interoamericano de educación matemática.* Bogotá, D.C.: Universidad de Costa Rica.

Bruño, G. (1939). *Álgebra y Trigonometría.* París: Editorial Bruño.

Buitrago, L., Romero, J., Ortíz, L., Gamboa, J., Morales, D., Castaño, J., & Jiménez, J. (2013). *Los Caminos del Saber. Matemáticas 10.* Bogotá: Santillana S.A.

Camargo, L. (s.f.). Estrategias Investigativas. En L. Camargo, *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática. Recursos para la captura de información y para el análisis.* Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional. .

Carvajal, A. (1958). *Memoria del Ministro de Educación al Congreso de 1958.* Bogotá: Imprenta Nacional.

Choppin, A. (2001). Pasado y presente de los manuales escolares. *Revista Educación y Pedagogía, XIII*, 209-229.

Cruz, G. (2018). *De Sirio a Ptolomeo: una problematización de las nociones trigonométricas.* Unidad Zacatenco: Cinvestav.

Dabiri, C. (2003). *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry : subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy.* Iowa: University of Iowa.

Decreto 0075. (1951). *Plan de estudios para la enseñanza secundaria.* Bogotá: Diario Oficial de la República de Colombia.

Decreto 045. (1962). *Ciclo Básico de Educación Media.* Bogotá: Diario Oficial de la República de Colombia.

Decreto 080. (1974). *Se deroga el Decreto número 045 de 1962.* Bogotá: Diario Oficial de la República de Colombia.

Decreto 1002. (1984). *Plan de Estudios para la Educación Preescolar, Básica (Primaria y Secundaria) y Media Vocacional de la Educación Formal Colombiana.* Bogotá: Diario Oficial de la República de Colombia.

Decreto 1419. (1978). *Normas y orientaciones básicas para la administración curricular en los niveles de educación pre-escolar básica (primaria y secundaria) media vocacional e intermedia profesional.* Bogotá: Diario Oficial de la República de Colombia.

Decreto 1710. (1963). *Plan de estudios de la Educación Primaria Colombiana.* Bogotá: Diario Oficial de la República de Colombia.

Decreto 2550. (1951). *Modificaciones en el Plan de Estudios de Enseñanza Secundaria.* Bogotá: Diario Oficial de la República de Colombia.

Decreto 2893. (1945). *Plan de estudios para los Colegios de Bachillerato.* Bogotá: Diario Oficial Número 26000.

Erazo, J. (2016). *Categorías de usos de la historia de las matemáticas en la educación en matemáticas.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Fernández, M., Caballero, P., y Fernández, J. (2017). El libro de texto como objeto de estudio y recurso didáctico para el aprendizaje: fortalezas y debilidades. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 201-217.

Gómez, A. (2014). Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica: Cincuenta años de reforma en el currículo colombiano de matemática en los niveles básico y medio de educación. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(38), 155-176.

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista Suma*(45), 17-28.

Graffe, G., y Orrego, G. (2013). El texto escolar colombiano y las políticas educativas durante el siglo XX. *Itinerario Educativo*, 91-113.

Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas.* Cali: Universidad del Valle.

Hirsch, C., Schoen, H., Larson, R., y Hostetler, R. (1989). *Matemáticas 5.* Bogotá: Mc Graw Hill.

Indaburo, C., Jiménez, J., y Sarmiento, C. (2016). *Aportes de la historia de las matemáticas al conocimiento didáctico del contenido del profesor de matemáticas en formación avanzada sobre las ecuaciones trigonométricas.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Ley Nº 115. (1994). *Ley General de Educación.* Bogotá: Congreso de la República de Colombia.

Londoño, N., y Bedoya, H. (1984). *Matemática Progresiva 10.* Bogotá: Norma.

Londoño, N., y Guarín, H. (1995). *Dimensión Matemática 10.* Bogotá: Grupo Editorial Norma.

Mansfield, D., y Wildberger, N. (2017). Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry. *Historia Mathematica*(44), 395-417.

Massa, M., Romero, F., y Guevara, I. (2006). Teaching mathematics through history: Some trigonometric concepts. En M. Kokowski, *The Global and the Local: The History of Science and the Cultural Integration of Europe* (págs. 150-157). Cracow, Poland.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogot: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje V.2.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Montiel, G. (2005). *Estudio sociepistemológico de la función trigonométrica.* México, DF: Instituto Politécnico Nacional.

Moreno, V. (2006). *Conexiones Matemáticas 10.* Bogotá: Norma.

Moreno, V., y Restrepo, M. (1995). *Alfa 10.* Bogotá: Norma.

Naranjo, A. (1959). *Memoria del Ministro de Educación al Congreso de 1959.* Bogotá: Imprenta Nacional.

OCDE. (2016). *Revisión de políticas nacionales de educación. La educación en Colombia.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Organización para la Cooperación y el desarrollo Económico (OCDE). (2016). *La Educación en Colombia.* París: Ministerio de Educación Nacional.

Paéz, L. (2016). *El libro de texto escolar y la tercera misión pedagógica alemana.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Picado, M., y Rico, L. (2011). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA*, 11-27.

Piñuel, J. (2002). *Epistemología, metodología y técnicas del análisis de contenido.*

Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Pulpón, A. (2010). *Historia del Papiro de Rhind y similares.*

Quiceno, H. (2001). El manual escolar: pedagogía y formas narrativas. *Revista Educación y Pedagogía*, 53-67.

Samacá, G. (2011). Los manuales escolares como posibilidad investigativa para la historia de la educación: elementos para una definición. *Revista Historia de la Educación Latinoamericana*, 199-224.

Sánchez, C. (1999). Matemáticas en Colombia en el siglo XIX. *Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 22*, 687-705.

SINC. (12 de 2018). *Una tablilla babilónica esconde la tabla trigonométrica más antigua del mundo*. Obtenido de https://www.agenciasinc.es/Noticias/Una-tablilla-babilonica-esconde-la-tabla-trigonometrica-mas-antigua-del-mundo

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA, 6*(1), 3-26.

Takeuchi, Y., Wills, D., y Guarín, H. (1984). *Hacia la Matemática. Un Enfoque Estructurado. Grado 10.* Bogotá: Editorial Temis S. A.

Várilly, J. (1995). La Geometría en su contexto histórico. *Las Matemáticas y su Enseñanza, 6*(17), 21-34. Obtenido de http://www.kerwa.ucr.ac.cr/bitstream/handle/10669/11350/Fortuna.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Vasco, C. (1987). *Las matemáticas de 8º a 11º grado.* Bogotá: Sin publicar.

Wargny, C. (1910). *Historia de las Matemáticas.*

4.Contenidos

Este documento está conformado por cinco capítulos. En el capítulo 1, **Problema de Investigación**, se desarrolló en primer lugar los aspectos que motivaron el estudio exponiendo por qué y para qué del mismo, en segundo lugar se realiza el planteamiento del problema, en tercer lugar se presentan el objetivo general y los específicos, finalmente se exponen los antecedentes investigativos clasificados en aquellos que corresponden a la historia de la Trigonometría, a los estudios realizados sobre libros de texto y a los que se han realizado sobre los propósitos de la Educación Media en Colombia.

El capítulo 2, **Marco de referencia**, presenta la historia de la Trigonometría desde los tipos de problemas abordados por diferentes culturas, de manera que se tipifica la Trigonometría en clásica, analítica y moderna siguiendo a Montiel (2005). La Trigonometría clásica aborda problemas relacionados con la medición, donde el triángulo y las relaciones entre sus lados y ángulos son fundamentales. La Trigonometría analítica aborda situaciones donde la función trigonométrica y los procesos algebraicos con las razones trigonométricas son el centro de estudio. La Trigonometría moderna hace énfasis en el uso de las funciones trigonométricas en el desarrollo de series y procesos del Análisis Matemático. Además, de la Historia de la Trigonometría, se señalan las concepciones adoptadas en este trabajo sobre los libros de texto y sus dimensiones, y finalmente se realiza un recorrido por la historia de los cambios curriculares en Colombia desde la aparición de la Trigonometría escolar, en 1951, hasta 2017. En este recorrido histórico se explicitan los propósitos de la Educación Media en diferentes etapas y se identifican algunos hitos de la Trigonometría en el currículo propuesto colombiano.

En el capítulo 3, se describe la revisión documental como la **Estrategia Metodológica** utilizada para el desarrollo del trabajo; también se nombran las fases de la investigación, los criterios tenidos en cuenta para la selección de los libros analizados y la herramienta analítica utilizada.

En el capítulo 4, **Análisis de los libros de texto de Trigonometría escolar**, se realiza en primer lugar un análisis descriptivo de los hallazgos encontrados en los libros. Para este ejercicio se dividió la revisión de los libros por etapas, las cuales se corresponden con los cambios curriculares a nivel normativo en Colombia en el periodo 1951-2017. Posteriormente, se proponen algunos elementos de reflexión y algunos interrogantes sobre: la relación entre los libros de texto-Historia de la Trigonometría-propósitos de la

Educación Media, la relación entre libros de texto-Historia del currículo escolar colombiano, la relación entre los libros de texto de Trigonometría-propósitos de la Educación Media, los tipos de referencia de las tareas resueltas en los libros de texto de Trigonometría y el uso de la tecnología en los libros de texto de Trigonometría.

Finalmente, en el capítulo 5, **Conclusiones**, se desarrollaron a partir de cinco aspectos: en relación con los objetivos propuestos, el aporte de la Historia de la Trigonometría a los libros de texto, las reformas curriculares en Colombia en el periodo 1951-2017 y el ejercicio de investigación realizado. Además, se plantean algunas inquietudes que quedan abiertas, de manera que puedan ser insumo para nuevas investigaciones o para generar debate académico sobre estos asuntos.

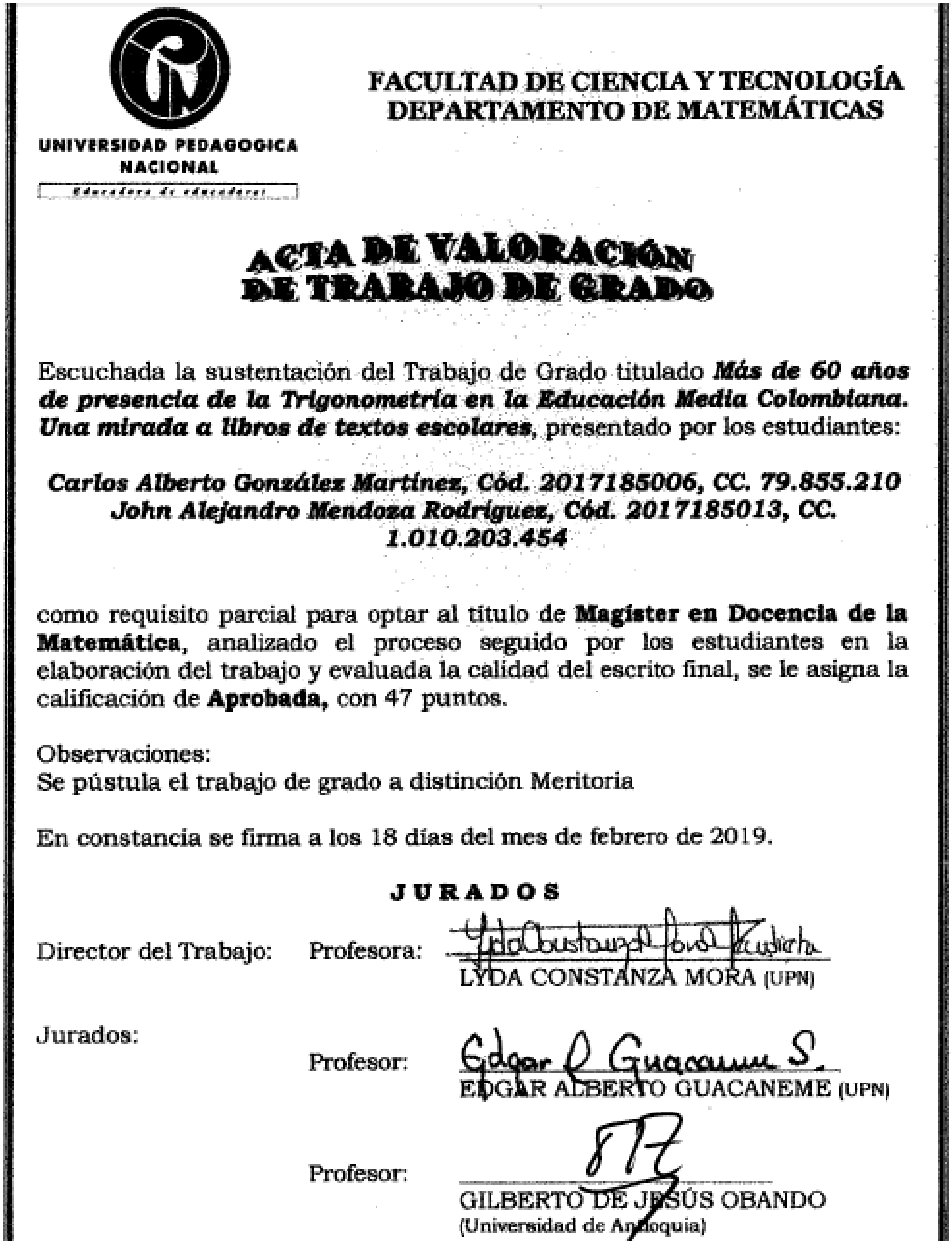
5. Metodología

Este trabajo se realizó bajo un enfoque cualitativo, una estrategia de revisión documental basada en el análisis de contenido. Los referentes teóricos permitieron crear las unidades de análisis para la revisión de las tareas resueltas por los autores: tipos de problemas de Trigonometría (clásica, analítica y moderna), propósitos de la Educación Media, tipo de referencia de la tarea (matemáticas puras, semirrealidad, situaciones de la vida real) y formato de presentación de las tareas (texto, imagen, tabla). Los criterios utilizados para la selección de los libros analizados fueron tres: i) que fueran publicados en fechas que se correspondan con las etapas identificadas en los cambios curriculares colombianos, durante el periodo 1951-2017, ii) que fueran libros publicados por editoriales colombianas y iii) que fueran libros usados en la Educación Media colombiana. Para este ejercicio investigativo se seleccionaron cuatro tareas resueltas por los autores, aleatoriamente, de cada capítulo de cada libro de Trigonometría escolar. Posteriormente se dio uso a la herramienta analítica que sirvió para realizar una descripción de los hallazgos encontrados y formular algunas reflexiones en relación con los propósitos de la Educación Media en Colombia y la función los libros de texto de Trigonometría escolar.

6.Conclusiones
Las conclusiones se desarrollaron a partir de cinco aspectos: en relación con los objetivos propuestos, el aporte de la Historia de la Trigonometría a los libros de texto, las reformas curriculares en Colombia en el periodo 1951-2017 y el ejercicio de investigación realizado. Además, se plantean algunas inquietudes que quedan abiertas, de manera que puedan ser insumo para nuevas investigaciones o para generar debate académico sobre estos asuntos. Algunas de las conclusiones son: • El conocimiento de la Historia de las Matemáticas fortalece el conocimiento disciplinar del profesor. Reconocemos que la Historia de la Trigonometría ofrece posibilidades para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Trigonometría. • La Trigonometría escolar en Colombia tiene un poco más de 60 años. Durante su vigencia se han dado pocos cambios en relación con los contenidos y las aplicaciones presentadas a los estudiantes de Educación Media. • Los libros de texto de Trigonometría escolar se han diseñado, según muestran las evidencias presentadas en el capítulo de análisis, con el propósito de preparar a los estudiantes en un campo del conocimiento, específicamente en la profundización de la Trigonometría. • En el análisis realizado a los libros de texto de Trigonometría, hemos identificado que el uso de la Historia de la Trigonometría dado en los libros de texto es “Potenciar el quehacer docente”. • Las reformas curriculares en Colombia no han ocurrido únicamente porque la comunidad académica colombiana ha pensado en el mejoramiento del sistema educativo. Las reformas se han dado en gran medida por sucesos sociales, coyunturas políticas e intereses económicos de los gobiernos.

Elaborado por:	González Martínez, Carlos Alberto; Mendoza Rodríguez, John Alejandro
Revisado por:	Mora Mendieta, Lyda Constanza

Fecha de elaboración del Resumen:	30	11	2018



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***Más de 60 años de presencia de la Trigonometría en la Educación Media Colombiana. Una mirada a libros de textos escolares***, presentado por los estudiantes:

Carlos Alberto González Martínez, Cód. 2017185006, CC. 79.855.210
John Alejandro Mendoza Rodríguez, Cód. 2017185013, CC. 1.010.203.454

como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada,** con 47 puntos.

Observaciones:
Se pústula el trabajo de grado a distinción Meritoria

En constancia se firma a los 18 días del mes de febrero de 2019.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesora: LYDA CONSTANZA MORA (UPN)

Jurados:

Profesor: Edgar A Guacaneme S.
EDGAR ALBERTO GUACANEME (UPN)

Profesor: GILBERTO DE JESÚS OBANDO
(Universidad de Antioquia)

CONTENIDO

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

La educación en Colombia ha tenido diversas transformaciones en las últimas décadas, evidenciadas en las modificaciones normativas referidas al currículo.

En la década de 1950, ya existía una gran preocupación por la calidad de lo que se enseñaban en las escuelas, especialmente en el bachillerato. Según el Ministro de Educación, Rafael Azula Barrera, era fundamental para las universidades desarrollar un curso preparatorio, ya que los estudiantes que accedían a la Educación Superior tenían una preparación deficiente (Azula, 1951). Además, se veía la necesidad de simplificar los planes de estudio y su diversificación. En la alocución realizada por Azula Barrera en la Radiodifusora Nacional, en 1951, el ministro señalaba:

> El Ministerio de Educación está interesado en poner término al mal, endémico ya, de la anarquía en los programas de bachillerato. A fin de acabar con este caos, perturbador del desarrollo normal de la enseñanza secundaria, se busca un plan de estudios sin diferenciaciones de especializaciones, sobre las bases de una cultura general mínima que lo mismo pueda ser útil al estudiante cuya única aspiración sea la de formarse una cultura para la vida que aquellos que aspiren a seguir cualquiera de las carreras profesionales u otra actividad. (Azula, 1951, p. XXIV)

Como mencionó el ministro de este periodo, fue importante generar un sistema educativo que ofreciera a los estudiantes de bachillerato, los mismos conocimientos, sin especialidades, útiles para acceder a cualquier carrera universitaria, o en su defecto para desempeñarse en otro campo, como el laboral. En consecuencia, del análisis realizado por el Ministerio de Educación Nacional de la época, acerca de la diversificación del bachillerato y de las falencias observadas en este ciclo educativo, se promulgó el Decreto 0075/51 que simplificó los planes de estudio y estableció un ciclo básico obligatorio para todos los estudiantes.

Así como surgió la preocupación nacional por la reforma al bachillerato en 1951, otros factores nacionales e internacionales dieron la posibilidad de seguir realizando reformas curriculares desde lo normativo. Por ejemplo, las recomendaciones dadas en el

Seminario Interamericano sobre Educación Secundaria realizado en Santiago de Chile en 1954 y en la Conferencia Regional de Punta del Este celebrada en 1961, fueron importantes para proponer una nueva reforma promulgada en el Decreto 45/62.

Además de las reformas mencionadas anteriormente, se han reglamentado otras reformas al currículo nacional, divulgadas en los decretos: 080/74, 1419/78 y 1002/84, así como en la Ley General de Educación, Ley 115/94. Después de 1994, se han publicado referentes curriculares como la serie Lineamientos Curriculares (1998), Estándares Básicos en Competencias (2006) y Derechos Básicos de Aprendizaje v.2. (2016).

Todas estas reformas al currículo nacional, se han generado con base en el proyecto de sociedad colombiana que los gobiernos, las instituciones educativas de nivel básico, medio y superior, y la sociedad misma, han intentado promover. Es así como en cada reforma, se han hecho explícitos los propósitos del sistema educativo, que se espera sean puestos en marcha en las aulas de las escuelas del país.

De otro lado, la enseñanza de las Matemáticas en Colombia también ha tenido diversas transformaciones en las últimas décadas. Con el surgimiento del grupo Bourbaki en la primera mitad del siglo XX y el desarrollo de la Guerra Fría, se generó un movimiento conocido como Matemática Moderna, de manera que la formación matemática se adecuara al desarrollo científico y tecnológico de las principales sociedades occidentales. Cabe resaltar que aunque Bourbaki no nació como un proyecto educativo, tuvo una gran influencia en la matemática escolar. Por supuesto, en Colombia esta oleada de modernidad tuvo su impacto en los currículos escolares. Como señala Gómez (2014) se introdujo la Teoría de Conjuntos y el estudio de estructuras algebraicas de grupo, anillo, campo y espacio vectorial, con una vigencia importante en el currículo nacional. No obstante, este enfoque fue perdiendo relevancia para dar paso a nuevas propuestas en la enseñanza de las Matemáticas. Dentro de los cambios que ha tenido la enseñanza de las Matemáticas en Colombia, se encuentra la introducción de la Trigonometría como asignatura en los planes de estudio del bachillerato. Este hecho se dio en 1951, de acuerdo con los hallazgos obtenidos en este trabajo, mediante la revisión realizada a los decretos promulgados por el Ministerio de Educación Nacional. De manera que han pasado más de 60 años de la aparición de la Trigonometría en el currículo escolar colombiano, lo cual ha sido objeto de interés de la presenta investigación.

También es importante señalar que, junto con las transformaciones del currículo nacional propuesto, los libros que han acompañado el quehacer docente, en este transcurrir de tiempo, han tenido modificaciones que se corresponden con cada una de las épocas, en las cuales se han utilizado. Por ejemplo, en la década de 1950 el libro usado para la enseñanza de la Trigonometría era el Álgebra y Trigonometría de G.M. Bruño (1939). Este texto era un compendio de teoremas y tareas propuestas para los estudiantes, que se enfocaban en el paradigma del ejercicio, es decir, trabajo sobre algoritmos. Con el paso de los años, las editoriales empezaron a diseñar libros de texto de Trigonometría con base en las propuestas del Ministerio de Educación Nacional. Actualmente encontramos textos que en su presentación señalan el uso de los Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Competencias, Derechos Básicos de Aprendizaje e incluso competencias ciudadanas, como fundamento de las situaciones resueltas por los autores y propuestas para los estudiantes. Como ejemplo de lo señalado anteriormente, se encuentra el libro de texto Mi aventura matemática 10 (Abondano, W. et al, 2010), Conexiones matemáticas 10 (Moreno, G. 2006) y Los caminos del saber Matemáticas 10 (Buitrago, L. et al. 2013), los cuales fueron usados en el análisis de este ejercio investigativo.

Ahora bien, además de la introducción de la Trigonometría escolar en Colombia, como objeto de estudio en este ejercicio investigativo, hemos optado por focalizar nuestro análisis en los aportes dados por los libros de texto de Trigonometría a los propósitos de la Educación Media colombiana en diversas etapas, desde 1951 hasta 2017. En este proceso, se identificaron seis etapas, que corresponden a las reformas curriculares del sistema educativo, en general, dadas a partir de la normatividad.

Este trabajo se ha configurado en cinco capítulos. El primero corresponde al *Problema de investigación*. En este capítulo se presenta la justificación del estudio, que da respuesta al ¿por qué? y ¿para qué? de la investigación realizada. Además, se plantea el problema de investigación, los objetivos y antecedentes investigativos.

El segundo capítulo es el *Marco de Referencia*. Se presenta la historia de la Trigonometría, la cual se narra desde los problemas que la originaron. Tales problemas estaban relacionados con la Astronomía, la Física, la Química, las Matemáticas, la Cartografía y la Topografía, entre otras ramas del conocimiento. En este capítulo se identifican tres hitos: la Trigonometría clásica, Trigonometría analítica y Trigonometría moderna. Presentamos nuestra concepción en relación con el libro de texto escolar y sus dimensiones, las concepciones de Educación Media en el periodo 1951-2017, los propósitos de la Educación Media en este mismo periodo y la historia del currículo de Trigonometría a nivel normativo. Cada uno de estos apartados, nos permitieron construir las unidades de análisis de esta investigación.

El tercer capítulo es titulado *Estrategia investigativa*. En este apartado señalamos la metodología utilizada para la construcción del trabajo, los criterios de selección de los libros de texto que analizamos, la herramienta analítica y las unidades de análisis. También mencionamos cuáles fueron las etapas identificadas en el periodo 1951-2017, en relación con la Educación Media colombiana y porqué este periodo fue el escogido para desarrollar la investigación.

En el cuarto capítulo, *Análisis de libros de texto de Trigonometría escolar*, describimos los hallazgos encontrados al aplicar la herramienta analítica sobre las tareas resueltas por los autores de cada texto. En esta sección se resalta la concepción de los autores sobre qué es Trigonometría, se tipifican las tareas resueltas por los autores, se identifica la correspondencia de las tareas con los propósitos educativos del periodo al que pertenecen los libros y se caracterizan las tareas en relación al formato de presentación y al tipo de referencia (matemáticas puras, semirrealidad y situaciones de la vida real) propuestas por Skovsmose (2000).

Finalmente, en la segunda sección del cuarto capítulo, *Algunas reflexiones sobre la concordancia entre los libros de texto escolares de Trigonometría, los propósitos de la Educación Media en diferentes épocas curriculares y otros emergentes*, presentamos cinco apartados que emergieron del análisis realizado en la primera parte del capítulo 4. Tales apartados tienen la intención de promover reflexiones acerca de las posibles relaciones entre la Historia de la Trigonometría, la Historia del currículo de Trigonometría escolar colombiano y los libros de texto utilizados en el periodo 1951-2017, de manera que se abra la posibilidad de generar un debate académico sobre la importancia de la Historia de la Trigonometría en los libros de texto y su uso en el currículo.

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo presentamos la justificación del estudio realizado, el problema que abordamos, los objetivos y algunas investigaciones relacionadas con la Historia de la Trigonometría y los manuales escolares.

1.1 MOTIVACIÓN DEL ESTUDIO

El interés inicial por el tema propuesto en este trabajo, surgió a partir de la reflexión sobre la práctica docente de uno de los autores, quien ha enseñado Trigonometría en grado décimo y evidenció la necesidad de adquirir fundamentos epistemológicos e históricos de esta rama de las Matemáticas y de los objetos que ella estudia. Durante el diálogo del equipo de trabajo sobre las posibles propuestas para desarrollar un trabajo de profundización, y, haciendo manifiesta la inquietud inicial, encontramos que los dos profesores autores de este estudio, habíamos impartido la clase de Trigonometría y para ello nos guiábamos por los planes de asignatura que nos proveían las instituciones escolares. Usábamos las secuencias propuestas por los libros de texto, sin tomar una postura sobre la pertinencia del texto y sobre el desarrollo del currículo, tan solo atendiendo a la ruta que nos mencionaban que debíamos seguir, incluso sin cuestionarnos acerca de qué es la Trigonometría, cómo surgió y por qué o para qué enseñarla en la escolaridad, por ejemplo ¿por qué en 10° y no en otro grado?

Además de lo anterior, en nuestra experiencia docente hemos encontrado que las instituciones escolares proveen al docente en ejercicio, de los referentes curriculares que alimentan los planes de estudio, en concordancia con el Proyecto Educativo Institucional (PEI). Así los docentes recibimos algunos insumos institucionales que se encuentran alineados con los Lineamientos Curriculares de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (LCM), Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (EBC), los Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas v.2 (DBA) y los libros de texto que los colegios consideran pertinente para el trabajo de los estudiantes. No obstante, reconocemos que estos insumos no son analizados, al menos en las instituciones donde hemos laborado, ni sometidos a cuestionamientos acerca de la pertinencia en el currículo. Solamente hacen parte de un “Marco referencial” para los planes de estudio escolares, que posteriormente no son usados en las propuestas de clase.

Teniendo en cuenta lo anterior, evidenciamos la necesidad de enriquecer el conocimiento del docente, en este caso la Trigonometría, pero además, notamos la necesidad de tomar una postura crítica desde nuestro rol como profesores, sobre lo que enseñamos, en relación con los propósitos educativos y los recursos que usamos, de tal forma que podamos tener argumentos fundamentados sobre las decisiones de aula, en relación con el currículo y los instrumentos que apoyan nuestras acciones, como es el caso de los libros de texto escolares.

Reconocemos que el conocimiento de la Historia de las Matemáticas es uno de los elementos que contribuye a fundamentar esas decisiones que tomamos como docentes. La Historia de las Matemáticas configura una fuente de artefactos que proveen los insumos para el aula, la reflexión y el currículo (Guacaneme, 2016, p. 215) , “es primordial que, el profesor de matemáticas, tenga un conocimiento acerca de la epistemología de un objeto matemático y de la evolución del pensamiento matemático de los individuos, ya que esto le permitiría orientar sus acciones y decisiones didácticas para interpretar y analizar dificultades en el aprendizaje de las matemáticas” (Guacaneme, 2016, p. 222). Reforzando esta idea citamos a González (2004), quien manifestó que:

> La Historia es la fuente de inspiración, autoformación y orientación en la actividad docente y al revelar la dimensión cultural de la Matemática, el legado histórico permite enriquecer su enseñanza y su integración en el conjunto de los saberes científicos, artísticos y humanísticos que constituyen la cultura. (p. 17)

En este sentido, el conocimiento de la Historia de las Matemáticas es un elemento fundamental para la toma de decisiones por parte del docente de matemáticas, ya que es él quien promueve el currículo del aula, es quien decide qué enseñar, cómo lo va a hacer, para qué y por qué lo llevará al aula. Por ello consideramos fundamental estudiar, en la Historia de las Matemáticas, sobre el surgimiento de la Trigonometría.

Un segundo aspecto importante que motiva la realización de este trabajo, es la necesidad de reconocer nuestra identidad y la de nuestra sociedad, a partir de la Historia de la educación colombiana. Es importante identificar cuáles han sido los propósitos del sistema educativo colombiano, al menos durante las últimas décadas, cuál ha sido el proyecto de sociedad que han querido desarrollar quienes dirigen nuestra nación y cómo ha respondido la escuela a dichas propuestas.

Finalmente, un tercer aspecto importante que consideró el equipo de trabajo, es reconocer los libros de texto como herramienta fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Identificamos la necesidad de analizar cómo se comunican, qué comunican los autores de los libros de texto y qué aportes realizan al desarrollo de la enseñanza de las Matemáticas.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La Educación Media en Colombia ha pasado por diversas transformaciones durante las últimas décadas, de manera que los diseños de los proyectos curriculares nacionales, han intentado corresponderse con el proyecto de sociedad, que se ha venido desarrollando durante diferentes periodos históricos. A través de los años, el Ministerio de Educación Nacional, ha divulgado los propósitos[1] que debería promover el sistema educativo en el país.

Con este panorama, es interesante preguntarse cuál ha sido el papel de las áreas de conocimiento en el desarrollo de la sociedad y qué aportes han realizado en el cumplimiento de los propósitos generales del sistema educativo. No obstante, estas inquietudes llevan a un escenario de investigación bastante amplio, que se inicia desde asuntos más específicos, por ejemplo, el papel de las Matemáticas o más detalladamente, de la Trigonometría, como asignatura escolar reconocida por todos como aquella que se enseña en 10°.

---

[1] Los propósitos del sistema educativo se divulgaron en los decretos que reglamentaban el currículo nacional hasta 1994. Posteriormente fueron divulgados en la Ley General de Educación y son los que rigen actualmente el sistema educativo del país.

Es así como decidimos acotar el problema y generar una nueva inquietud: ¿Cuáles propósitos de la Educación Media en Colombia se evidencian en las tareas desarrolladas en los libros de texto escolares de Trigonometría?

Intentar resolver este interrogante condujo a otras preguntas que se convirtieron en asuntos de interés en esta investigación. Así entonces surgieron inquietudes como ¿desde qué época apareció la Trigonometría escolar en Colombia?, ¿cuáles han sido los propósitos de la Educación Media colombiana desde la aparición de la Trigonometría en el currículo escolar?, ¿cuáles han sido los libros de texto de usados en la enseñanza de la Trigonometría?, ¿qué aportes realizan los libros de texto de Trigonometría al cumplimiento de los propósitos generales de la Educación Media?

En consecuencia, identificamos que nuestro interés particular fue reconocer la función de los libros de texto de Trigonometría, desde su aparición en el currículo propuesto, en relación con los propósitos de la Educación Media colombiana. Por tanto, este ejercicio investigativo aportará elementos de reflexión acerca del asunto que acabamos de mencionar.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GENERAL

Aportar elementos de reflexión al profesor de matemáticas sobre la función de los libros de texto escolares de Trigonometría en relación con los propósitos de la Educación Media colombiana en el periodo 1951-2017.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Identificar en la Historia de las Matemáticas el origen y evolución de la Trigonometría, haciendo énfasis en los tipos de problemas resueltos por diversas culturas.
- ✓ Identificar los hitos de la Historia del currículo de Trigonometría en Colombia.
- ✓ Identificar las dimensiones de los libros de texto de Trigonometría en relación con los hitos de la Historia del currículo de Trigonometría en Colombia.
- ✓ Reconocer los aportes de los libros de texto de Trigonometría a los propósitos de la Educación Media en Colombia en el periodo 1951-2017.

- ✓ Presentar cuestionamientos sobre la relación entre los libros de texto de Trigonometría y los propósitos de la Educación Media colombiana.

1.4 ANTECEDENTES DEL ESTUDIO

Son tres ejes fundamentales los que dirigen nuestro trabajo: la Historia de la Trigonometría, el libro de texto escolar y los propósitos de la Educación Media en Colombia. Hicimos una revisión de la literatura que existe en relación con dichos temas y destacamos las investigaciones encontradas que tienen mayor relevancia y aportan al propósito de nuestro trabajo.

1.4.1 ANTECEDENTES SOBRE LA HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA

En lo que tiene que ver con la Historia de la Trigonometría, el trabajo de doctorado de la profesora Gisela Montiel, titulado *Estudio sociepistemológico de la función trigonométrica* (2005), es un punto de referencia importante en lo que tiene que ver con el recuento del origen y el desarrollo de la Trigonometría en la Historia de las Matemáticas.

Montiel describe dos hitos fundamentales en la Historia de la Trigonometría: la Trigonometría Clásica y la Trigonometría Analítica, los cuales nos permitieron identificar los diferentes tipos de problemas que se resolvían en cada periodo por medio de herramientas trigonométricas.

Del mismo modo, el trabajo de Gerardo Cruz, nombrado como *De Sirio a Ptolomeo: una problematización de las nociones trigonométricas* (2018), bajo la dirección de la profesora Montiel, hace un recorrido cronológico por algunos antecedentes que marcaron la Historia de la Trigonometría. Se hace énfasis particular en los aportes que realizaron las diferentes culturas de la humanidad a la construcción de algunos conceptos de los que hoy conocemos como elementos de la Trigonometría.

El trabajo *Aportes de la Historia de las Matemáticas al Conocimiento Didáctico del Contenido del profesor de matemáticas en formación avanzada sobre las Ecuaciones Trigonométricas* (Indaburo, Jiménez y Sarmiento, 2016), describe algunos momentos registrados en la Historia de las Matemáticas relacionado con la Trigonometría, de manera particular, con las Ecuaciones Trigonométricas. Los autores hacen un recorrido por la

Historia desde Ptolomeo, pasando por Vietè y concluyendo con algunos autores recientes que han trabajado en Trigonometría.

También hacemos mención a la tesis de doctorado del profesor Edgar Guacaneme titulada *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas* (2016), que, pese a que no es en Historia de la Trigonometría, nos aportó en resaltar la importancia del estudio de la Historia de las Matemáticas en relación con la Educación Matemática y con la formación del profesor de Matemáticas.

En conclusión, identificamos que en la revisión bibliográfica en español que realizamos en torno a la Historia de la Trigonometría, los trabajos de la profesora Montiel son los de mayor referencia. Encontramos en su investigación, en particular en su trabajo de doctorado (Montiel, 2005), una fuente profunda de consulta en relación con el desarrollo histórico de la Trigonometría.

Y finalmente, aunque existen diferentes autores que se refieren a la importancia de la Historia de las Matemáticas en relación con la formación de profesores y la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, nos acogemos a lo presentado en el trabajo del profesor Guacaneme (2016) para justificar la importancia del estudio de la Historia de las Matemáticas para propósitos académicos.

1.4.2 ANTECEDENTES SOBRE LA REVISIÓN DEL LIBRO DE TEXTO ESCOLAR

En relación con el libro de texto escolar, son diferentes los autores que hablan sobre su importancia y su uso como herramienta pedagógica en el aula. Sin embargo, a continuación, mencionamos las investigaciones que nos permitieron soportar nuestra investigación en relación con el análisis de textos escolares.

Páez (2016) escribe un documento titulado *El libro de texto escolar y la tercera misión pedagógica alemana. Aportes a los procesos de enseñanza desde el diseño editorial en Colombia*, en donde presenta un proceso de indagación sobre el alcance y desarrollo de los libros de texto escolares elaborados en Colombia en las décadas de 1960 y 1970. La investigación realizada presenta un análisis del papel de las editoriales en relación con la construcción de los libros de texto, de acuerdo con los cambios políticos que han transformado la educación del país en las últimas décadas.

Graffe y Orrego (2013) realizan una investigación titulada *El texto escolar colombiano y las políticas educativas durante el siglo XX*, en la cual se presenta el resultado de la revisión de políticas públicas educativas relacionadas con las políticas públicas del texto escolar durante el siglo XX. Presentan el manejo que le ha dado el Estado a la producción y distribución del texto escolar a través del Ministerio de Educación Nacional, hasta la reglamentación de la industria editorial. (Graffe y Orrego, 2013, p. 92)

Samacá (2011) presenta un artículo nominado *Los manuales escolares como posibilidad investigativa para la historia de la educación: elementos para una definición*. En el documento se comparte una reflexión sobre los manuales escolares como una fuente significativa para la historia de la educación. Samacá invita al lector a retomar investigaciones fundamentadas en el análisis de los manuales escolares, con el fin de iniciar trabajos historiográficos que reconozcan la Historia de la Educación de nuestro país. Además, en esta investigación es una herramienta importante para notar las diferencias entre los constructos *Manual escolar* y *Libro de texto*.

Quiceno (2001) publica en la revista *Educación y Pedagogía* el artículo titulado *El manual escolar: pedagogía y formas narrativas*. El autor explica lo que es un manual escolar y las transformaciones que este ha sufrido con el paso del tiempo. Habla acerca de la función del manual y de su importancia como instrumento específico para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula de clase. Al igual que Samacá, Quiceno expone las características necesarias que constituyen un manual escolar y no un libro de texto.

Choppin (2001) escribe el artículo *Pasado y presente de los manuales escolares* publicado en la revista *Educación y Pedagogía*. Aunque el documento es de la misma naturaleza del de Quiceno (2001), en donde se da una definición de manual escolar, es un referente importante para nuestro trabajo debido a que, en gran parte de la bibliografía consultada sobre la función del libro de texto, es Choppin quien aparece constantemente citado en las investigaciones que se hacen al respecto. Choppin escribe sobre la función del manual escolar en la historia, el presente y el futuro de la educación, lo cual es un sustento necesario para los argumentos que exponemos en el análisis del presente documento.

En conclusión, son cuantiosas las investigaciones que reportan acerca de la función del libro de texto como una herramienta pedagógica presente en el aula. Además, se argumenta a favor de la importancia de investigar estos documentos escritos, ya que son el instrumento preferido del profesor para desarrollar su clase en el aula. Así mismo, el libro de texto considerado como el medio por el cual se desarrollan las políticas educativas propuestas por un país.

1.4.3 ANTECEDENTES SOBRE LOS PROPÓSITOS DE LA EDUCACIÓN MEDIA DEL PAÍS

Al realizar una revisión de la literatura existente en relación con los propósitos de la Educación Media en Colombia, nos encontramos con diferentes investigaciones en relación con la Historia de la Educación en Colombia, lo cual nos permitió describir los diferentes propósitos de la Educación en el periodo 1951-2017. A continuación, se mencionan los diferentes documentos.

Gómez (2014) publica en la revista *Iberoamericana de Educación Matemática* el artículo *Cincuenta años de reformas en el currículo colombiano de Matemática en los niveles básico y medio de educación*. En el documento se muestra la evolución del currículo de matemática colombiano entre los años 1951 y 2000, destacando las reformas educativas y los principales decretos que dirigieron la educación en el país y los cuales fueron los puntos de referencia para rastrear e identificar los propósitos de la educación en dicho periodo.

En el año 2014 se realizó un Foro Educativo Nacional con el foco de *Ciudadanos matemáticamente competentes* (MEN, 2014). Como resultado de dicho encuentro, surge un documento del Ministerio de Educación Nacional en el cual se expresan cuáles son los propósitos formativos de las Matemáticas y las transformaciones que ha sufrido el currículo nacional desde el año 1978, de acuerdo con la normatividad que ha regulado la educación. En este documento se explicitan algunos de los propósitos de la educación en el país.

Publicado en la Revista Colombiana de Educación en el 2011, el documento *Carlos Eduardo Vasco Uribe. Trayectoria bibliográfica de un intelectual colombiano: una mirada* *a las reformas curriculares en el país* (Molano, 2011), fue una entrevista realizada al profesor Vasco para indagar sobre su trayectoria biográfica y hablar sobre la educación colombiana en los últimos cuarenta años. Con la narración que se describe en el documento, se pueden identificar algunos de los propósitos que se pretendían alcanzar con la Educación Media en algunos periodos de tiempo específicos del país. Sin embargo, y para propósitos de nuestro trabajo, los diálogos que se presentan en el artículo entre el investigador con Vasco, no son suficientes para identificar todos los propósitos de la Educación en periodos de tiempo específicos, por lo que, aunque es un referente importante, no es completo en lo que refiere a nuestra investigación.

El documento del Ministerio de Educación Nacional diseñado para el *Programa de Transformación de la Calidad Educativa* para el periodo comprendido entre 2010-2014, tiene un apartado escrito por el profesor Vasco denominado *Los programas curriculares de matemáticas en Colombia* (MEN, 2010, p. 10). En el escrito se hace referencia a la historia de los programas curriculares de matemáticas colombianos en tres periodos específicos: el primer periodo, de 1903 a 1963, hace referencia a los programas por contenidos; el segundo periodo, de 1963 a 1993, hace alusión a los programas por objetivos; y, de 1994 hasta la fecha de publicación del documento, hace mención los programas por logros y competencias. El profesor Vasco explica situaciones que sucedieron en las instituciones educativas cuando se implementaron conceptos nuevos al currículo escolar. Por ejemplo, cuenta cómo los profesores de matemáticas pedían que se les diera capacitación para poder enseñar los programas que se ordenaban desde el Ministerio de Educación Nacional.

La profesora Clara Helena Sánchez realizó un escrito denominado *Matemáticas en Colombia en el siglo XIX* (1999), en el cual se hace un bosquejo de la Historia de las Matemáticas en Colombia en dicho periodo de tiempo. Pese a que el escrito está enfocado en rehacer los sucesos que marcaron la Educación Matemática del país a nivel superior, encontramos datos y hechos históricos que nos aportaron para el rompecabezas que intentamos construir en relación con la historia de los propósitos de la educación en Colombia en el periodo 1951-2017.

Barrante y Ruíz (1998) escriben el libro *La Historia del Comité Interamericano de Educación Matemática*, en donde se presenta la Historia de la Educación Matemática a partir de las Conferencias Interamericanas de Educación Matemática. El recuento histórico de dichas conferencias nos permitió identificar el origen de la Trigonometría en el currículo escolar colombiano. Es un documento clave para identificar los propósitos de la educación en los periodos cercanos a 1960 en nuestro país.

En conclusión, identificamos que, aunque existen diferentes autores que han aportado a la reconstrucción de la Historia de la Educación de nuestro país, ha sido el profesor Vasco quien ha escrito mayor información al respecto o quién es citado por otros autores al querer hacer aportes sobre la educación en el siglo pasado. Sin embargo, no encontramos un documento único que narre cuáles han sido los propósitos de la educación en las últimas décadas y cómo estos se han mantenido o han variado de acuerdo a las nuevas normativas que han surgido con el transcurso del tiempo y con los nuevos programas propuestos por los diferentes gobiernos. Por ello, el presente trabajo adquiere gran importancia al procurar determinar cuáles han sido esos propósitos y así aportar a la construcción de una identidad como país, a partir de la historia vivida.

Luego de realizar la revisión de antecedentes investigativos, no encontramos al menos un trabajo de investigación relativo a la Historia del currículo de Trigonometría en relación con el análisis de textos escolares de matemáticas y los propósitos de la Educación Media en Colombia en las últimas décadas. Lo anterior, nos permite aducir que el presente estudio resulta genuino y aporta resultados sustanciales al campo de la Educación Matemática en Colombia.

Por último, lo invitamos a que revise el Anexo 1, en donde se presenta una tabla con los resultados de una revisión en algunos eventos recientes de Educación Matemática en Latinoamérica. En ella, identificamos los diferentes trabajos de investigación que se han presentado en relación con la Historia de la Trigonometría, la Historia de la Educación en Colombia y la revisión de libros de texto escolar.

2. MARCO DE REFERENCIA

En este capítulo presentamos el marco de referencia, compuesto por tres secciones que nos permitirán elaborar las unidades de análisis para el estudio propuesto sobre la función de los libros de texto escolar en relación con los propósitos de la Educación Media. La primera sección es el tipo de problemas en la Historia de la Trigonometría, la segunda es la caracterización y funciones de los textos escolares y la tercera es la historia de la enseñanza de la Trigonometría en Colombia desde la normatividad, junto con los propósitos de la Educación Media en Colombia en el periodo 1951-2017.

2.1 TIPOS DE PROBLEMAS EN LA HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA

La Trigonometría es una rama de las Matemáticas que permite modelar diversas situaciones en contextos matemáticos y de la vida cotidiana. Los conceptos trigonométricos han evolucionado con el paso del tiempo respondiendo a problemas relacionados con la Astronomía, la Física, la Química, las Matemáticas, la Cartografía, la Topografía, entre otras áreas del conocimiento.

Reconocer los tipos de problemas que dieron origen a la Trigonometría y a su evolución, requiere inicialmente entender las etapas más importantes por las que ha atravesado la Trigonometría en momentos específicos de su Historia. Por esta razón, dividiremos la historia de la Trigonometría en tres momentos que marcaron un cambio significativo en ella. De acuerdo con Montiel (2005) dos de los momentos son “el de sus inicios prácticos y el de sus fundamentos teóricos” (p. 67). El primer momento corresponde a la Trigonometría como herramienta para resolver problemas reales, al cual llama Montiel *Trigonometría Clásica*; el segundo momento expone la Trigonometría simbólica y formal, considerado *Trigonometría Analítica*; el tercer momento corresponde al uso que tiene actualmente la Trigonometría en diferentes campos de estudio, como el Análisis Matemático.

El objetivo de esta sección es identificar las características de los problemas que se abordaron en diferentes momentos históricos haciendo uso de la Trigonometría, identificando su origen y evolución. Cabe resaltar que nuestro interés no es hacer un recuento exhaustivo de los sucesos que ocurrieron en torno a la Trigonometría, sino destacar los diferentes tipos de problemas que dieron cabida al surgimiento y uso de las nociones trigonométricas.

2.1.1 TRIGONOMETRÍA CLÁSICA: INICIOS PRÁCTICOS

El hombre siempre ha sentido la necesidad de explicar el mundo que lo rodea, de entender su propósito en la Tierra, de reconocer su origen, su presente y su futuro, de intentar ser feliz en un mundo que tiene comportamientos naturales periódicos y caóticamente ordenados. Para este propósito, ha intentado organizarse en comunidades sobre la tierra, dando origen a las diferentes culturas en diversas partes del mundo. Fijaremos nuestra atención principalmente en las culturas egipcias, babilónicas, chinas e hindúes, identificando la presencia de la Trigonometría.

A continuación, presentamos algunos problemas que estuvieron relacionados con la Trigonometría en cada una de las culturas mencionadas y con diferentes personajes que aportaron a la construcción de la Trigonometría, esto con el fin de identificar el surgimiento de esta rama de las Matemáticas.

2.1.1.1 CIVILIZACIÓN EGIPCIA

La civilización egipcia tiene origen en el año 3100 a.C. y finaliza en el año 332 a.C., con la conquista de Alejandro Magno. A causa de que Egipto estaba ubicado en bordes del Río Nilo, el cual se desbordaba sin falta todos los años en el mes de julio, surgieron ciertos instrumentos de medición y algunas reglas matemáticas que permitieron calcular las áreas de diferentes terrenos. Los ejemplos más conocidos del uso de las Matemáticas tienen que ver con las construcciones de las grandes pirámides, que fueron el resultado de la aplicación de la Geometría.

Actualmente se conoce la matemática egipcia debido a dos documentos encontrados en el siglo XIX: el papiro de Moscú (1850 a.C.) y el papiro de Rhind (1650 a.C.); dichos documentos presentan las Matemáticas que eran conocidas y utilizadas en aquella época. El papiro de Moscú contiene 25 problemas, mientras que el de Rhind[2] tiene 87 problemas.

Es en el papiro de Rhind donde se encuentra información relevante sobre la actividad matemática egipcia y algunos rudimentos principales de Trigonometría antigua, que se basan en cálculos para realizar las respectivas construcciones de pirámides y monumentos (Montiel, 2005). El problema 56 del papiro de Rhind expone información relevante acerca de la aparición de la Trigonometría, como por ejemplo el cálculo de pendientes, medidas de ángulos y teoría de semejanza de triángulos. A continuación, presentamos el problema 56 del papiro y su respectiva solución, expuesto en el documento de Pulpón (2010), pero haciendo adaptaciones en las unidades de medida, identificando las nociones centrales de Trigonometría que aparecen allí de manera implícita.

Problemas 56 y 60 del papiro de Rhind

¿Cuál es el seqt (corresponde al ángulo de inclinación o la pendiente de una superficie plana inclinada) de una pirámide de 250 cubits[3] de altura y 360 cubits de lado en la base?

Modificando las unidades de medida del problema, se puede replantear de la siguiente manera: ¿Cuál es la pendiente de la cara lateral de una pirámide de 112.5 m de altura y 162 m de lado en la base? (Ver ilustración 1).

---

[2] Representa la mejor fuente de información sobre matemática egipcia que se conoce. Escrito en hierático, consta de 87 problemas y sus soluciones. Nos da información sobre cuestiones aritméticas básicas, fracciones, cálculo de áreas, volúmenes, progresiones, repartos proporcionales, reglas de tres, ecuaciones lineales y trigonometría básica. Fue escrito por el escriba Ahmes aproximadamente en el 1650 a.C. a partir de escritos de 200 años de antigüedad, según reivindica Ahmes al principio del texto, aunque nos resulta imposible saber qué partes corresponden a estos textos anteriores y cuáles no. (Pulpón, 2010, p. 6)

[3] Un cubit representa un codo egipcio el cual equivale a 0.45 m.

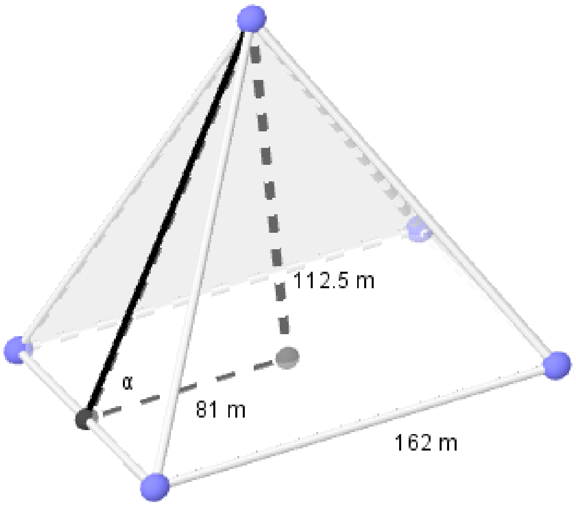


Ilustración 1. Representación del problema 56 del papiro de Rhind. Fuente: Propia

Los pasos para la solución del problema, que fueron expuestos en el mismo papiro, se dan a continuación.

I. Calcular la longitud de la mitad de un lado de la base, es decir, $\frac{1}{2}$ de 162 m, que da como resultado 81 m, el cual corresponde a la medida de uno de los catetos del triángulo rectángulo que se puede observar en la Ilustración 1.
II. Dividir 81 m entre 112.5 m, intentándose responder la pregunta de cuántas veces está la altura en el cateto del triángulo que se encontró en el paso anterior, obteniendo como resultado $\frac{18}{25}$.

Nos damos cuenta de que, para la solución del problema, el cociente $\frac{18}{25}$ hace referencia a la división entre el cateto adyacente al ángulo α y el cateto opuesto del mismo ángulo α en el triángulo rectángulo expuesto, lo cual se puede asociar, desde una mirada actual, a lo que hoy se llama *la cotangente del ángulo α*, interpretada esta como la seqt de la pirámide.

El problema 60 que se presenta en el mismo papiro es muy similar al problema que acabamos de mencionar, salvo que se cambian las respectivas medidas de la pirámide. En el problema se hace alusión a determinar medidas inaccesibles y desconocidas, haciendo uso de representaciones geométricas como lo es el triángulo rectángulo, para determinar la razón trigonométrica cotangente, como la medida del ángulo de inclinación de una de las caras laterales de la pirámide.

Los problemas 56 y 60 encontrados en el papiro de Rhind, y que muestran un indicio del origen de la Trigonometría, permiten mostrar el uso práctico que se le daba para la construcción de las pirámides. Sin embargo, la información es limitada para identificar qué otros elementos trigonométricos se utilizaban además de algunas razones trigonométricas. Según Pulpón (2010),

> Si nos planteamos las grandes edificaciones que llevaron a cabo los egipcios, fundamentalmente la construcción de pirámides, hay que tener en cuenta que, tal y como están construidas, era necesario disponer de algún mecanismo trigonométrico para resolver ciertos problemas de construcción. Un problema esencial en la construcción de estas era el de mantener la pendiente uniforme en cada una de las caras, y a su vez la misma en las 4 caras. Quizá esta necesidad es lo que llevó a los egipcios a emplear lo que denominaron "seqt", equivalente a lo que hoy conocemos por pendiente de una superficie plana inclinada. (p. 72)

En conclusión, la Trigonometría emerge en la cultura egipcia como un mecanismo que permitió la construcción de grandes edificaciones, a partir de las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo con los ángulos de inclinación de los mismos. La Trigonometría es entendida como una herramienta para usos prácticos de construcción y de medidas inaccesibles.

2.1.1.2 CIVILIZACIÓN BABILÓNICA

La civilización babilónica estuvo compuesta por diferentes pueblos de Mesopotamia que vivían entre los ríos Tigris y Éufrates. Su origen se da alrededor del año 3000 a.C. y termina en los primeros años del cristianismo. Entre sus principales aportes a las Matemáticas se encuentran: el uso del sistema sexagesimal para hacer cálculos; símbolos especiales para representar a los números naturales; aproximaciones a números como $\sqrt{2}$; algoritmos para determinar tripletas pitagóricas; fórmulas para calcular áreas y volúmenes; resolución de problemas que involucraban ecuaciones cuadráticas y cúbicas; entre otros resultados muy relevantes para las Matemáticas. Los babilonios registraron esta información por medio de tablillas de arcilla que se conservaron hasta nuestros días, disponiendo los aportes que realizaron desde la civilización a la humanidad.

En lo que concierne con la Trigonometría, en dicha civilización se tiene como referente la tablilla de barro denominada *Plimpton 322*, que fue escrita cerca del año 1800 a.C. La tableta se interpretó como una tabla trigonométrica, aunque diferentes autores consideran esto como un anacronismo y se le dé así una función diferente. Por ejemplo, Massa, Romero y Guevara (2006) consideran que las tripletas descritas en la arcilla únicamente servían para resolver triángulos rectángulos, sin acudir a cuantificar los ángulos, por lo cual, no se puede hablar de Trigonometría de manera explícita (p. 152). Sin embargo, según Mansfield y Wildberger (2017), en una investigación reciente sobre la tablilla *Plimpton* 322, consideran que en efecto se trata de la tabla trigonométrica más antigua del mundo.

Plimpton 322 es una tablilla de barro que contiene 15 filas de ternas pitagóricas, perteneciente a la cultura babilónica entre los siglos XIX y XVI a. C. La tablilla ha reaparecido con gran importancia debido al trabajo de investigación realizado por Mansfield y Wildberger (2017), en donde afirman que han descubierto que la tablilla se trata de la tabla trigonométrica más antigua y exacta de la historia de las Matemáticas, la cual posiblemente fue utilizada para realizar cálculos que permitieran hacer diversas construcciones.

> El estudio confirma que los babilonios se adelantaron en más de mil años a los griegos en la invención de la trigonometría (el estudio de los triángulos) y muestra un sofisticado y antiguo conocimiento matemático que había permanecido oculto hasta ahora. (SINC, 2018)

Es una afirmación que revoluciona parte de la Historia de las Matemáticas, ya que como lo explican los autores, “esta tablilla lleva desconcertando a los matemáticos desde hace más de 70 años, porque se dieron cuenta de que contiene un patrón especial de números llamado terna pitagórica” (Mansfield y Wildberger, 2017). Los autores intentan decir que la tablilla es una prueba de que los babilonios conocían el teorema de Pitágoras mil años antes de que naciera Pitágoras.

En la investigación se dice que Plimpton 322 es una tabla trigonométrica tan inusual y tan avanzada que incluso es superior a la trigonometría moderna. En las filas de la tablilla, dicen los investigadores, se encuentran las razones para una serie de triángulos rectángulos, con las cuales se pudieron haber medido terrenos o haber realizado cálculos arquitectónicos para realizar diferentes construcciones.

La revista SINC, en un artículo dedicado a la investigación de Mansfield y Wildberger (2017), escribe:

> La desconocida trigonometría que describe la tablilla para los triángulos rectángulos se basa en ratios o relaciones, no en ángulos ni círculos. Según los autores, es una obra matemática fascinante que demuestra el genio de sus creadores: "La tablilla no sólo contiene la tabla trigonométrica más antigua del mundo, sino que también es la única completamente precisa, debido al diferente enfoque babilónico de la aritmética y la geometría”.

Además, agrega que,

> Las tablas trigonométricas permiten usar la información de un lado de un triángulo rectángulo para determinar la de los otros dos. Hasta ahora se consideraba al astrónomo griego Hiparco, que vivió alrededor de 120 años antes de Cristo, como el padre de la trigonometría, y a su 'tabla de cuerdas' como la tabla trigonométrica más antigua.
>
> "Pero Plimpton 322 precede a Hiparco en más de 1000 años", insiste el otro autor, el profesor Norman Wildberger, quien considera que gracias a esta tablilla se abren nuevas posibilidades no sólo para la investigación matemática moderna, sino también para la educación matemática: "Nos ofrece una trigonometría más simple, más precisa, que tiene claras ventajas sobre la nuestra". (SINC, 2018)

Es un hallazgo interesante en la historia de la Trigonometría, ya que sitúa el origen de la Trigonometría mil años antes de lo que tradicionalmente se ha considerado como verdadero.

En conclusión, la cultura Babilónica tiene que aportar a la historia de la Trigonometría mucho más de lo que se la ha atribuido tradicionalmente. El hallazgo de la tablilla Plimpton 322 y la interpretación que se le ha hecho, marca un hito trascendental en las Matemáticas, al concederle la patente de la primera tabla trigonométrica de la historia.

2.1.1.3 CIVILIZACIÓN GRIEGA: ARISTARCO DE SAMOS

Aristarco de Samos (320 – 250 a.C.) fue un astrónomo de la antigua Grecia, pitagórico y discípulo de Estratón. Desarrolló mediciones por vía geométrica de las distancias de la Tierra al Sol y la Luna, así como los cálculos sobre el tamaño de dichos astros, lo cual lo llevó a concluir que el sistema geocéntrico de Aristóteles no respondía a la realidad y lo impulsó a crear un sistema heliocéntrico. En la antigüedad, el sistema de Aristarco de Samos no encontró buena acogida y permaneció olvidado hasta los tiempos de Copérnico.

Aristarco suponía que la órbita de la Luna era un círculo en cuyo centro estaba la Tierra (Ilustración 2) y que la Luna lo recorría siempre a la misma velocidad. Si el Sol estuviera lo suficientemente lejos de la Tierra, a una distancia infinita, de tal manera que los rayos del Sol llegaran siempre paralelos, los cuartos de la luna ocurrirían cuando el ángulo $Sol - Tierra - Luna$ fuera de 90º.

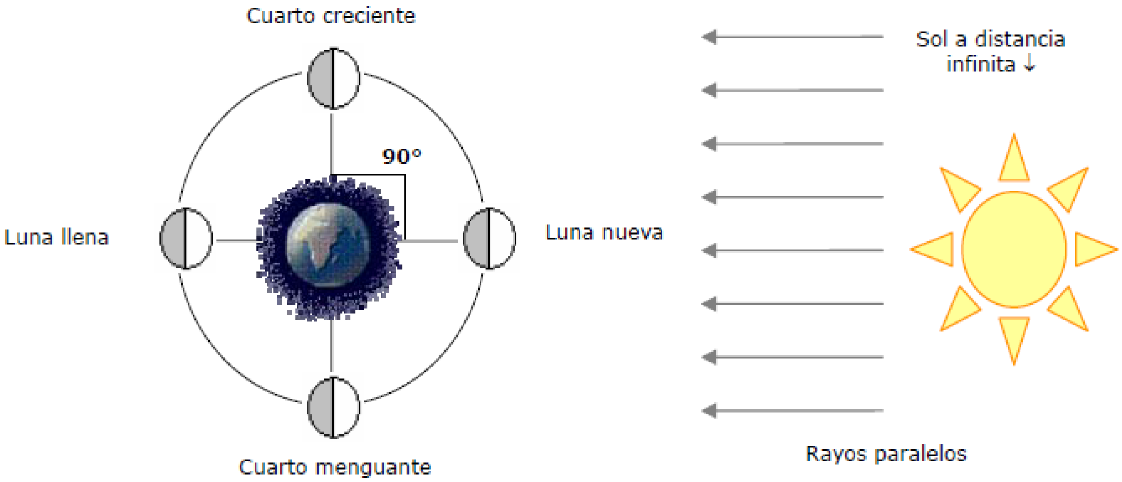


Ilustración 2. Representación de los rayos del Sol en dirección a la Tierra, si el Sol se encontrara a una distancia infinita. Fuente: (Montiel, 2005, p. 71)

Por el contrario, si el Sol se encontrara a una distancia finita, como en realidad sucede, los rayos divergen formando un ángulo α (Ilustración 3). La secuencia de las fases ya no está dividida en partes iguales lo que implica que el intervalo entre las diferentes lunas sea diferente a como se consideró en la Ilustración 2.

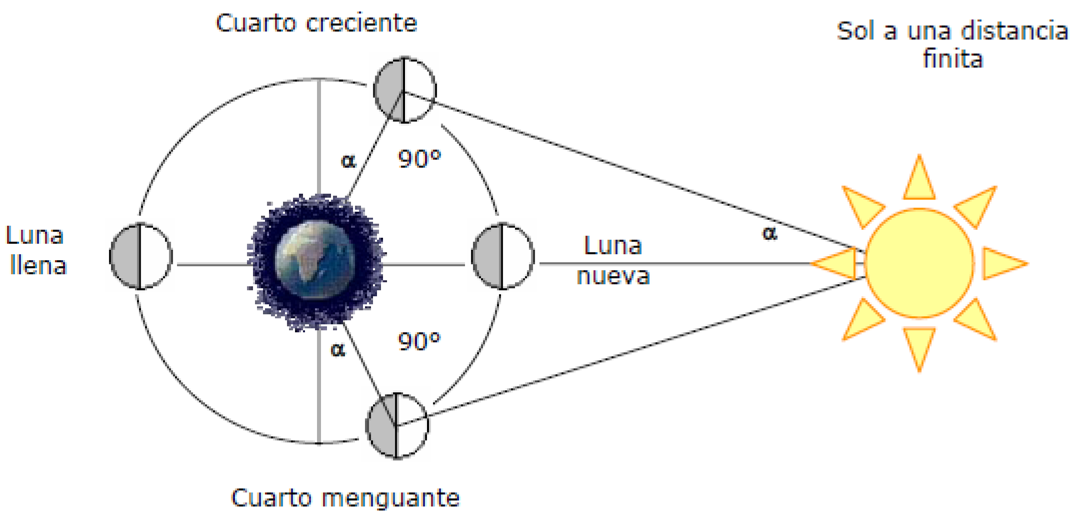


Ilustración 3. Representación de los triángulos rectángulos que se forman entre Sol-Luna-Tierra, si el sol se encuentra a una distancia finita. Fuente: (Montiel, 2005, p. 72)

Llamando A la distancia de la Tierra a la Luna y B la distancia entre la Luna y el Sol (ver Ilustración 4), Aristarco descubrió la relación que existe entre A, B y α, en lo que hoy se conoce como la razón trigonométrica tangente:

$$\tan \alpha = \frac{A}{B}$$

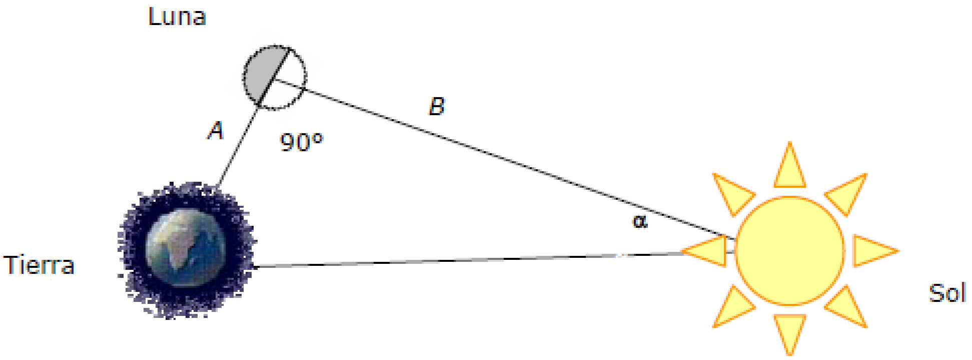


Ilustración 4. Representación de la relación entre las distancias Tierra-Luna, Luna-Sol con el ángulo formado entre Luna-Sol-Tierra. Fuente: (Montiel, 2005, p. 72)

Al determinar la medida de α de esta razón trigonométrica, se puede calcular qué tanto más lejos está el Sol de la Luna que la Luna de la Tierra. Una vez determinadas las distancias relativas del Sol y la Luna con respecto a la Tierra, Aristarco dedujo que sus tamaños deberían estar en la misma razón, partiendo del hecho de que ambos cuerpos celestes tienen aparentemente el mismo tamaño para un observador desde la Tierra que los vea desde un mismo ángulo.

En el trabajo *Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna* de Aristarco, la Proposición 7 trata sobre proporciones entre la distancia del Sol y la Luna desde la Tierra. Dicha proposición enuncia que "la distancia del Sol a la Tierra es mayor que dieciocho veces, pero menor que veinte veces, la distancia de la Luna a la Tierra". Para la solución y demostración de la proposición, Aristarco utiliza, entre otras propiedades matemáticas, el teorema de Pitágoras y la relación trigonométrica $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$. Para profundizar en los argumentos expuestos por Aristarco para la comprobación de la proposición, se puede revisar la traducción del libro original de Aristarco al portugués realizado por Machado (2016).

La Trigonometría sigue siendo utilizada con fines prácticos, esta vez, como una herramienta auxiliar de las matemáticas que permite hacer afirmaciones en relación con la Astronomía. Es válido aclarar que la simbología que utiliza actualmente la Trigonometría en ese entonces no existía; simplemente se hacía alusión a las relaciones en el triángulo rectángulo referenciándolas explícitamente al nombrar cada lado del triángulo o el respectivo ángulo del que se deseaba hacer mención. Es evidente que no existe una intención de hacer de la Trigonometría una formalización en las Matemáticas, sino que surge como una herramienta que permite desarrollar y encontrar soluciones a problemas de la vida real con los que se enfrentaba el ser humano de ese entonces: calcular distancias entre astros, por ejemplo.

Euclides y Los Elementos

El libro *Elementos* de Euclides fue creado alrededor del año 300 a.C., el cual contiene algunas proposiciones que hoy se consideran Trigonometría, y por lo cual vale la pena mencionarlas en el recuento histórico que estamos realizando. En las proposiciones I.47 y I.48 se encuentra el teorema de Pitágoras, mientras que en las proposiciones II.12 y II.13 hacen referencia al teorema de cosenos.

Libro II, Proposición 12:

En los triángulos obtusángulos, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo comprendido por un lado de los del ángulo obtuso sobre el que cae la perpendicular y la recta exterior cortada por la perpendicular, hasta el ángulo obtuso.

Libro II, Proposición 13:

En los triángulos acutángulos, el cuadrado del lado opuesto al ángulo agudo es menor que los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo agudo en dos veces el rectángulo comprendido por uno de los lados del ángulo agudo sobre el que cae la perpendicular y la recta interior cortada por la perpendicular hasta el ángulo agudo.

En un interpretación[4] moderna y con la simbología actual, podríamos expresar la afirmación de Euclides en los siguientes términos: dado un triángulo ABC no rectángulo cualquiera, siendo α, β, γ los ángulos, y a, b y c, los lados respectivamente opuestos a estos ángulos entonces:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

HIPARCO DE NICEA

Hiparco de Nicea (190-120 a.C.) es considerado el astrónomo más grande de la antigüedad. De acuerdo a Wargny (1910, p. 512), "todas las obras de Hiparco se han perdido, excepto un pequeño comentario del poema de Arato, en que habla de Astronomía. Empero, el gran tratado de Tolomeo, *el Almagesto,* reposa sobre las observaciones y escritos de Hiparco". Siguiendo a Wargny,

> Hiparco es considerado como el creador de la Trigonometría. Construyó una tabla de cuerdas que puede ser comparada con una de senos naturales; poseía un método particular para resolver los triángulos esféricos, que no ha llegado a nosotros.
>
> Se cree que la *proposición D* del libro VI de Euclides, conocida bajo el nombre de Teorema de Tolomeo, es debida a Hiparco. Su enunciado es: el rectángulo de las diagonales de un cuadrilátero inscrito, es igual a la suma de los rectángulos de los lados opuestos. (p. 512)

---

[4] Sir Thomas Heath, en la edición que realiza de los Elementos y que es publicada por Dober Publisher, presenta una interpretación diferente a ambas proposiciones.

Teorema de Tolomeo

Várilly (1995) presenta el teorema de Tolomeo en un lenguaje moderno y con algunas descripciones que permiten comprender mejor el enunciado. A continuación, presentamos la explicación realizada por Várilly:

> Teorema de Tolomeo:
>
> Si $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito en un círculo, $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$ Para ver la relevancia de este teorema para la trigonometría moderna, supóngase que BD es un diámetro de un círculo de radio 1, y sean $\alpha = \angle ABD, \beta = \angle DBC$. Entonces se tiene $BD = 2, AC = \operatorname{crd}(\alpha + \beta), \mathrm{AD} = 2 \sin \alpha$ y $CD = 2 \sin \beta$, porque los ángulos $\angle DAB$ y $\angle BCD$ son rectos. La relación que descubrió Tolomeo puede entonces escribirse, en lenguaje moderno, como
>
> $$4 \sin(\alpha + \beta) = 4 \sin \alpha \cos \beta + 4 \cos \alpha \sin \beta$$
>
> Esta es la fórmula para el seno de una suma de ángulos. (1995, p. 26-27)

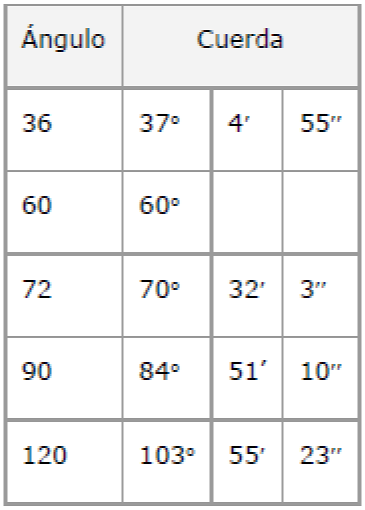
Si en verdad el teorema de Ptolomeo es basado en los escritos de Hiparco, entonces se tienen suficientes argumentos para comprender que Hiparco dominaba conceptos de Trigonometría y sus aportes fueron valiosos para el desarrollo de estas matemáticas.

En conclusión, y aunque en líneas anteriores mencionamos que existen investigaciones actuales que consideran que las tripletas pitagóricas para resolver triángulos rectángulos encontradas en la tablilla llamada Plimpton 322 es la primera tabla trigonométrica del mundo, tradicionalmente se reconoce a Hiparco de Nicea como el padre de la Trigonometría con su tabla de cuerdas que se expone en el *Almagesto* de Ptolomeo y sus otros aportes que no son totalmente reconocidos.

EL ALMAGESTO DE CLAUDIO PTOLOMEO

Ptolomeo fue un matemático, astrónomo, geómetra y físico. Acerca de su nacimiento hay cierta unanimidad en que ocurrió hacia el año 100 d.C. y que sucedió en Egipto. El escrito nombrado como "Los trece libros de la Sintaxis Matemática", conocido como el Almagesto, es la obra más importante de Ptolomeo y que lo llevó a posicionarse como el padre de la Trigonometría. El *Almagesto* compila la Astronomía matemática griega y constituye una fuente indispensable para el pensamiento desarrollado hasta el momento.

Ptolomeo crea el sistema ptolemaico y construye la tabla de cuerdas subtendidas por los arcos de una circunferencia dividida en 360 partes cuyo diámetro supone dividido en 120 unidades, con lo cual establece el sistema sexagesimal y le permite así construir la siguiente tabla trigonométrica (Ilustración 5), para calcular las medidas de diferentes cuerdas a partir de un ángulo predeterminado, lo cual incluye en el *Almagesto*:



Ángulo	Cuerda		
36	37°	4′	55″
60	60°		
72	70°	32′	3″
90	84°	51′	10″
120	103°	55′	23″

Ilustración 5. Tabla trigonométrica que representa lo realizado por Ptolomeo. Fuente: (Montiel, 2005, p. 78)

Ptolomeo consiguió métodos para calcular longitudes de cuerda, lo que hoy se conoce como las identidades trigonométricas para el seno de la diferencia de dos ángulos, el seno de la mitad de un ángulo y el seno de la suma de dos ángulos (Montiel, 2005). El *Almagesto* se consolida como la recopilación de los principios matemáticos de dicha época, poniendo de manifiesto los primeros fundamentos geométricos-trigonométricos en que se basa la teoría para la solución de los problemas astronómicos planteados.

CONTRIBUCIONES DE LA CULTURA ÁRABE

La cultura árabe, reconociendo los conocimientos que se habían producido en otros lugares, aportó a la construcción de una ciencia propia, la Astronomía, sin dejar de lado el progreso de su herramienta auxiliar: la Trigonometría. Personajes como Regiomontano, desarrolló un tratado extenso sobre Trigonometría creando la definición del seno, así como

Copérnico, cuya obra supone el nacimiento de un nuevo paradigma en la ciencia de la Astronomía (Montiel, 2005, p. 78).

Según Massa, Romero y Guevara (2006, p. 153), el paso esencial en el desarrollo de la Trigonometría tuvo lugar con la cultura árabe, ya que sus principales contribuciones fueron la introducción de las seis relaciones trigonométricas, la demostración del teorema de Menelao en triángulos esféricos, la deducción del teorema sinusal, el teorema tangente en triángulos planos y esféricos y la construcción de nuevas tablas trigonométricas utilizando interpolación lineal y cuadrática. La Trigonometría árabe se expandió por diferentes lugares del mundo y llegó a Europa por medio del tratado *De Triangulus*, escrito por el matemático y astrónomo alemán Johann Müller conocido como Regiomontano.

En su obra, Regiomontano describe métodos para resolver triángulos planos y esféricos. Incluyó cinco libros, dos de ellos en Trigonometría plana y tres en Trigonometría esférica. "Este trabajo representó un punto de partida y, al mismo tiempo, un punto final en la historia de la Trigonometría porque a partir de este libro se publicaron varios trabajos que trataban con mayor precisión la Trigonometría hasta ahora" (Massa, Romero y Guevara, 2006, p. 153).

Un ejemplo de problemas tratados durante esta época es el teorema de Menelao, el cual utiliza específicamente propiedades trigonométricas para hacer demostraciones en el campo de la Geometría.

Teorema de Menelao

Sean ADB, AEG, DG y BE arcos de círculos máximos de una esfera, de modo que DG y BE se cortan en el punto Z y cortan también a los arcos ADB y AEG. Los cuatro arcos son menores que un semicírculo. Se cumple entonces que:

$$\frac{\sin GE}{\sin EA} = \frac{\sin GZ}{\sin ZD} \cdot \frac{\sin DB}{\sin BA}$$

La demostración de este teorema se encuentra en el libro I del *Almagesto* de Ptolomeo. En esta obra, la demostración va precedida de seis lemas que facilitan su respectiva comprensión. Los dos primeros lemas expresan relaciones entre las longitudes de los segmentos obtenidos en cortar todos los lados de un triángulo, o sus prolongaciones, por una recta cualquiera.

La historia de la Trigonometría clásica que se acabó de documentar, permite afirmar que,

> (…) los antecedentes que sentaron las culturas babilónica, egipcia y griega en sus inicios muestran que la problemática de construir un modelo a escala, con base en los datos empíricos acumulados, de una realidad macro no manipulable sienta las bases para la construcción de un cuerpo teórico que más adelante recibirá el nombre de Trigonometría. (Montiel, 2005, p. 74)

La medición y la Astronomía son entonces los escenarios en donde emergieron los problemas iniciales de la Trigonometría, en el momento en que se consideraba la localización de la Tierra, la Luna y el Sol como los vértices de un triángulo, que lleva a la construcción de modelos geométricos, en dónde el uso de las razones entre las distancias de los cuerpos celestes sienta las bases de la Trigonometría para dar aproximaciones, por ejemplo, de la tangente de ciertos ángulos a partir de las relaciones entre los catetos de un triángulo rectángulo.

La Trigonometría tiene una relación muy estrecha con la Astronomía, la construcción, sobre todo relacionadas con la religión, y la medición de tierras. Montiel (2005) expresa que:

> En sus orígenes la astronomía no trata directa y exclusivamente con la similitud de dos triángulos rectángulos. La medición, la construcción y la astronomía son algunas de las actividades donde surgen las nociones trigonométricas. Incluso, el llamado “cálculo de sombras”, bastante conocido por los antiguos, es considerado precursor de la trigonometría formal. El problema teórico que se plantearon los griegos consideraba todo triángulo (plano o esférico) inscrito en un círculo (o esfera, según el caso), con lo que cada uno de sus lados se convertía en una cuerda. Para estimar las partes del triángulo se debe encontrar la longitud de la cuerda como función del ángulo central (ángulo central medido en grados). Esta fue la tarea principal de la trigonometría por varios siglos. (p. 81)

Identificadas algunas características de los problemas que se abordaron en el primer momento de la Trigonometría, procederemos a caracterizar las nociones trigonométricas involucradas en los tipos de problemas que se abordaron en el segundo momento cuando esta se volvió simbólica y formal y pasó de lo clásico a lo analítico.

2.1.2 TRIGONOMETRÍA ANALÍTICA Y SUS FUNDAMENTOS TEÓRICOS

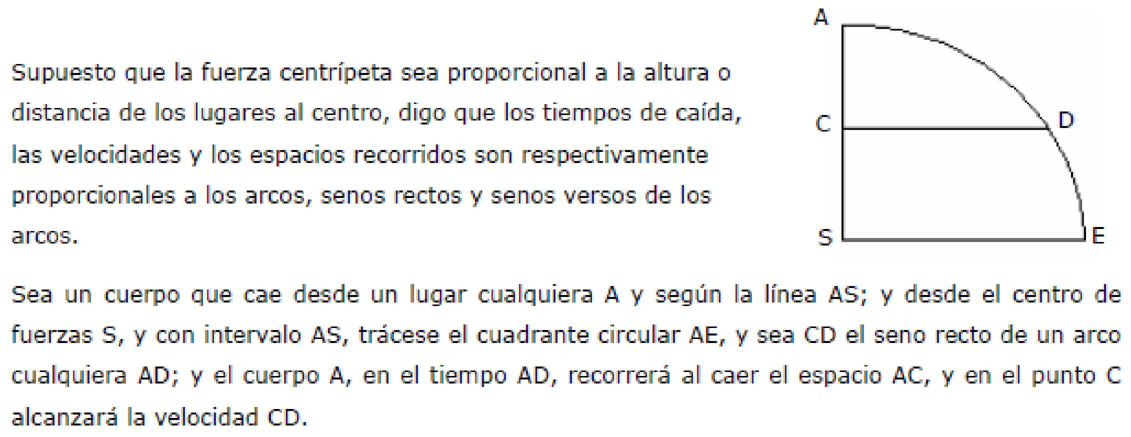
En el siglo XVII la Trigonometría toma el carácter analítico por la que se le conoce hoy en día debido al libro "Trigonometría, o una medición de cinco triángulos" de Bartolomaus Pitiscus en el año 1595. La diferencia entre esta nueva Trigonometría analítica y la Trigonometría clásica, consiste en el énfasis que se empieza a hacer en las relaciones trigonométricas dejando de lado las tablas trigonométricas. Por ejemplo, en el inicio de la Trigonometría, la periodicidad y el valor de las cuerdas estaban estrechamente vinculadas con la manera en que se repetían fenómenos astronómicos, sin embargo, cuando estas cuestiones eran aclaradas, no era necesario buscar relaciones entre las razones o proporciones encontradas en los respectivos triángulos construidos. No obstante, con el surgimiento del álgebra de Vietè se introduce simbología matemática que facilitó la lectura y escritura de textos, permitiendo que los matemáticos empezaran a aplicar métodos algebraicos a problemas que hasta la fecha solo habían sido tratados geométricamente. Es en este momento donde la Trigonometría se empieza a representar por los símbolos que conocemos actualmente, permitiendo avances teóricos en conceptos como los logaritmos, la abreviación para las razones trigonométricas y el trabajo de series infinitas a partir de nociones trigonométricas. "El estudio del infinito viene con un movimiento más grande en el quehacer matemático y que fue el impulso principal de la trigonometría analítica: la matemática se convierte en el instrumento para describir y analizar el mundo físico" (Montiel, 2005, p. 84).

La Trigonometría analítica se utilizó en este momento para resolver problemas de características muy diferentes a los que se resolvían en la Astronomía. Por ejemplo, Newton obtiene la serie infinita para el seno[5] con el fin de estudiar velocidades de cambio. En este caso, aunque se sigue teniendo como referente geométrico al triángulo inscrito en una circunferencia, el objetivo es estudiar la relación entre dos variables, el ángulo y el área

---

[5] $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

bajo la curva como cantidades específicas. La proposición XXXVIII. Teorema XII encontrado en el libro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* que habla sobre el movimiento de los cuerpos, establece lo siguiente:



Supuesto que la fuerza centrípeta sea proporcional a la altura o distancia de los lugares al centro, digo que los tiempos de caída, las velocidades y los espacios recorridos son respectivamente proporcionales a los arcos, senos rectos y senos versos de los arcos.

Sea un cuerpo que cae desde un lugar cualquiera A y según la línea AS; y desde el centro de fuerzas S, y con intervalo AS, trácese el cuadrante circular AE, y sea CD el seno recto de un arco cualquiera AD; y el cuerpo A, en el tiempo AD, recorrerá al caer el espacio AC, y en el punto C alcanzará la velocidad CD.

Ilustración 6. Proposición XXXVIII, teorema XII del libro Philosophiae *Naturalis Principia Mathematica*. Fuente: (Montiel, 2005, p. 87)

La esencia de la Trigonometría cambia sustancialmente en los objetivos de los problemas propuestos, empezando porque se están abordando no solo problemas astronómicos, sino también físicos con un lenguaje propio de las matemáticas, el cual permite el tratamiento algebraico de elementos trigonométricos, con la intención de aplicar métodos que proporcionaran expresiones para las relaciones trigonométricas conocidas en la época.

Son estos nuevos usos de las cantidades trigonométricas que hacen desaparecer el carácter original de la Trigonometría, el cual se apoyaba en representaciones geométricas que permitían describir situaciones pertenecientes a la Astronomía, la medición y la construcción. El caso del movimiento oscilatorio que condujo a la conocida Ley de Hooke[6], es un ejemplo del cambio que sufrió el uso de la Trigonometría. El estudio de las series infinitas abre las puertas a la idea de función trigonométrica, lo cual permite describir fenómenos físicos, caso contrario de la Trigonometría clásica que, a partir de la observación y registro de fenómenos, se desarrollaron técnicas que permitieron hacer cálculos y describir el entorno que rodeaba al hombre.

---

[6] La ley de Hooke establece que la fuerza que devuelve un resorte a su posición de equilibrio es proporcional al valor de la distancia que se desplaza de esa posición.

La Trigonometría analítica finalmente se utiliza para estudiar fenómenos avanzados, tales como la cuerda vibrante, series trigonométricas, la transferencia de calor, en general, lo perteneciente a la Mecánica discreta y continua. A pesar de que las nociones trigonométricas siguen siendo una herramienta auxiliar para describir una situación, los problemas cambian significativamente del momento clásico al analítico. Con la Trigonometría analítica ya no se intenta únicamente describir y registrar sucesos naturales, sino también se desarrollan teorías matemáticas que permitan profundizar y establecer relaciones entre fenómenos que suceden en la cotidianidad del hombre. Finalmente,

> El desarrollo en serie trigonométrica permitió representar una clase más general de función, que aquel que dominaba en la época, y el problema de su convergencia implicó, según Dirichlet (1805-1859), una definición de la correspondencia funcional independiente de toda forma de expresión analítica. Se inicia de este modo y de la mano de las funciones trigonométricas, otra historia, la del análisis matemático clásico. (Montiel, 2005, p. 96)

2.1.3 TRIGONOMETRÍA EN EL ANÁLISIS MATEMÁTICO

Dada la notable transformación que tuvo la Trigonometría de su época clásica al periodo analítico, su desarrollo no se detuvo allí y avanzó para convertirse ahora en una herramienta muy potente en el Análisis Matemático por medio de las funciones trigonométricas.

El Análisis Matemático, que es una rama de las Matemáticas, se encarga del estudio de los números reales, números complejos, tanto del punto de vista algebraico como topológico, así como funciones entre esos conjuntos. En esta teoría matemática, se destaca el desarrollo de la formulación rigurosa de límite, poniendo énfasis en conceptos como continuidad, integración y derivación, haciendo construcciones matemáticas que involucran sucesiones de un número infinito de elementos.

Pese a que la Trigonometría sigue siendo utilizada como una herramienta auxiliar para resolver problemas, la naturaleza de los contextos de los problemas es radicalmente diferente en comparación con el uso que tenía en la época clásica y analítica. La Trigonometría ya no es la herramienta para solucionar problemas de fenómenos que suceden en la vida real, sino es el medio para desarrollar teorías matemáticas que, probablemente en el futuro, puedan intentar explicar sucesos que ocurren en el universo.

Problemas en este periodo de la Trigonometría tienen que ver con el análisis de funciones trigonométricas, funciones hiperbólicas, derivadas de funciones, gráficas, ecuaciones trigonométricas, etc., que no necesariamente atienden a la solución de un problema que haya surgido como la necesidad de la observación y el registro, sino problemas que atienden a asuntos netamente matemáticos.

Entendemos que la esencia de la Trigonometría surgió como una herramienta para medir y construir, convirtiéndose en analítica por medio de un lenguaje simbólico y manipulación de expresiones trigonométricas, y terminar en un medio conceptual utilizado en el Análisis Matemático.

Luego de realizar el recorrido por la historia de la Trigonometría, es necesario que adoptemos una postura respecto a lo que significa Trigonometría. Al revisar el diccionario de la Real Academia Española, se define Trigonometría como el "estudio de las relaciones numéricas entre los elementos que forman los triángulos planos y esféricos" (RAE, 2017); sin embargo, y aunque puede ser cierta la definición dada, se queda muy corta en relación con el origen, uso y desarrollo que se le ha dado a la Trigonometría en cada cultura descrita en la Historia de las Matemáticas. Por esta razón, coincidimos con Gelfan y Saul (2001) al concebir la Trigonometría de la siguiente manera:

> Se origina en el estudio de la geometría cuando investigamos las relaciones de los lados en triángulos rectos semejantes, o cuando observamos la relación entre una cuerda de un círculo y su arco. Conduce a un estudio mucho más profundo de las funciones periódicas y de las llamadas funciones trascendentes, que no pueden describirse utilizando procesos algebraicos finitos. También tiene muchas aplicaciones para la Física, la Astronomía, y otras ramas de la ciencia. (…) La Trigonometría es una introducción importante al Cálculo, dónde se estudia lo que los matemáticos denominan propiedades analíticas de las funciones (citado en Dabiri, 2003, p. 13).

No solo es el estudio de los lados de un triángulo, la Trigonometría ha sido la columna vertebral de las Matemáticas, esa herramienta que permite modelar el mundo físico y avanzar en procesos abstractos propios de las Matemáticas.

A continuación, presentamos en la Tabla 1 los temas asociados a cada tipo de Trigonometría, con el fin de identificar los contenidos que se abordan en los libros de texto para hacer una relación con los tipos de problema que se revolvieron en la historia de la Trigonometría.

Tabla 1. Contenidos trigonométricos de acuerdo con el tipo de Trigonometría

Trigonometría clásica

- Mediciones de lados y ángulos de triángulos rectángulos.
- Problemas relacionados con la Astronomía.
- Medición indirecta de distancias en el contexto del círculo.
- Trabajo geométrico en nociones como el círculo, el triángulo rectángulo y la proporcionalidad.
- Cálculo de distancias inaccesibles.
- Problemas de periodo de movimiento y posición relativa.
- Prácticas empíricas y teorías predictivas.
- Medición del tiempo.
- Razones trigonométricas

Trigonometría analítica

- Problemas que involucran el lenguaje simbólico de las matemáticas.
- Manipulación y solución de identidades trigonométricas.
- Problemas de fenómenos físicos relacionados con la Mecánica.
- Círculo unitario.
- Funciones trigonométricas en un nivel descriptivo.

Trigonometría moderna

- Series infinitias de funciones trigonométricas.
- Problemas de Análisis Matemáticos.
- Cálculo diferencial e integral.
- Demostraciones matemáticas.
- Funciones trigonométricas a nivel matemático.

Fuente: Propia

2.2 EL LIBRO DE TEXTO ESCOLAR

El libro de texto escolar pasó por al menos tres transformaciones desde sus inicios hasta la actualidad. Según Quiceno (2001), en una primera etapa era conocido como *Manual de Enseñanza*, el cual fue pensado como una herramienta vinculada a las lecciones del maestro. La función de este *Manual de Enseñanza* era simplificar la escritura y el lenguaje que provenían del exterior de las escuelas. El *Manual* debía expresar de manera simple, la complejidad de los estudios de los eruditos, ya que estos eran dirigidos hacia un público especializado. Así entonces, los tratados complejos se transformaron en maneras resumidas para que los maestros los usaran en las escuelas.

En una segunda etapa, el *Manual* ya no era solo un libro que simplificaba el lenguaje y los símbolos de los eruditos. Había una relación entre él y el método. El *Manual* se convirtió en una forma adecuada para enseñar, transmitir y explicar una doctrina.

> El manual en esta segunda transformación está configurado por los mismos componentes de la escuela y de la enseñanza, imágenes para transmitir y significaciones para hallar. Como si estas instituciones pertenecieran a un mismo proyecto educativo e ilustrado. En esta segunda forma narrativa convierte al manual en un relato universal y en una imagen que puede sustituir la escuela o la enseñanza en la medida en que son equivalentes en su valor de verdad. (Quiceno, 2001, p. 54)

La tercera transformación se refiere a que este ya no es un portador de un método universal. El manual se convierte en un texto tal que su narración de tipo universal pasa a ser local, puntual y específica. Quiceno (2001) menciona que entre manual y libro de texto escolar hay una gran diferencia. El manual fue un libro producido para presentar, en forma resumida, una doctrina. Su nombre surge en una época donde no existía la imprenta y el libro se producía a mano. Cuando apareció la imprenta el manual conservó su función de presentar de forma resumida un método que se ocupaba de la enseñanza y de la escuela. Años más tarde, el manual se dirigió a los maestros, estudiantes y al personal administrativo de la escuela. Cuando se hizo imposible mantener su nombre debido a su alta producción, cambió su nombre a texto escolar. Como texto escolar, no representa una doctrina, sino que nombra las distintas actividades de la escuela, discursos, disciplinas, acciones, procesos y objetivos, representando la educación en general.

Samacá (2011) señala que el manual en el ámbito escolar se consideró texto escolar debido a las condiciones socio-históricas como la invención de la imprenta o el uso sistemático que se le ha venido dando en los sistemas educativos modernos. En palabras propias Samacá (2011) menciona que:

> De estas condiciones se desprende una acepción del manual como una obra sistemática, secuencial, de producción serial y masiva, que se encuentra ligado a la

> extensión del método de enseñanza simultáneo, ya que este exigía materiales de lectura idénticos para el trabajo homogéneo con el grupo de estudiantes. De esta forma, el manual escolar responde a las necesidades de un método educativo que hacia el siglo XIX con la creación de los sistemas educativos nacionales se incorporó como una herramienta de primer orden en los procesos educativos y socializadores. (p. 202-203).

2.2.1 EL LIBRO DE TEXTO ESCOLAR EN COLOMBIA

El libro de texto escolar en Colombia tiene su origen en la década de 1930. Los educadores laicos, hacia 1935, reaccionaron ante los manuales, debido a que los consideraban obsoletos, inútiles y poco didácticos. Propusieron nuevos libros, considerándolos libros de texto, ya que no reproducían un método universal, sino que se dirigió específicamente a una ciencia. Según Quiceno (2001)

> El libro de texto fue aquel libro producido por el Estado para los maestros y que contenía conocimientos sobre las ciencias. La ciencia se representó en forma del arte del libro, ya no como tipografía, sino como función editorial. Comenio quería que se imitara la tipografía; los liberales que se simbolizara el libro y la enseñanza como un proyecto editorial; no sólo la producción del libro en sí, sino la dimensión técnica y social del libro, usuarios, funciones, organización formal del libro, distribución, etc. El libro como naturaleza social, cultural y política. (p. 64).

Los liberales de los años treinta pensaron que organizar, editar y distribuir los libros cumplían con su función total educadora, de manera que editaron 220 mil libros sobre ciencias y artes modernas. Estos libros se organizaron en cuatro colecciones para ser distribuidos por todo el país. Cada colección de libros estaba compuesta por libros para el maestro, libros de texto, libros de literatura universal y libros de literatura colombiana. Los libros del maestro eran libros de pedagogía, cartillas sobre agricultura y cuidado de animales, cartillas sobre higiene, salud y psicología, canto, lectura, lenguaje, educación física, religión y cívica. Los libros de texto eran básicamente sobre las ciencias. Era una colección de textos sobre Aritmética, Geometría, Geografía, Zoología, Botánica, el cuerpo humano, Física, Química e Historia del comercio. Las colecciones de literatura eran libros sin especificidad, los libros de literatura universal eran para niños de 10 a 14 años de edad.

Actualmente los libros de texto son producidos por editoriales, se diseñan dos tipos de libros de texto: edición para el docente y el libro de texto de los estudiantes. La edición del docente trae además de los contenidos y tareas propuestas, sugerencias para evaluar a los estudiantes. El libro de texto de los estudiantes trae los contenidos con tareas resueltas por los autores y tareas que deben resolver los estudiantes.

2.2.2 DIMENSIONES DEL LIBRO DE TEXTO ESCOLAR

El libro escolar además de un objeto para la enseñanza es un "constructo cultural que desempeña varias funciones al mismo tiempo, lo que obliga a descomponerlo en dimensiones de análisis" (Samacá, 2011, p. 205). Según Choppin (2001, citado en Samacá, 2011), el libro de texto presenta al menos cuatro dimensiones: 1) como herramienta pedagógica, 2) como soporte de la verdad que la sociedad cree que es necesario transmitir a las nuevas generaciones, 3) como mercancía y 4) como medio de comunicación.

En primer lugar, el libro escolar como herramienta pedagógica es entendido como un instrumento destinado a facilitar el aprendizaje de los estudiantes e incluso la labor de enseñanza de los maestros. Según Samacá (2011), los investigadores de la Universidad Tecnológica de Pereira (UTP) señalan que los textos escolares reflejan las tradiciones, innovaciones e incluso las utopías pedagógicas de una época, ya que a través de ellos se expresan los objetivos y métodos pedagógicos. Además de lo anterior, la dimensión pedagógica del texto escolar también indica que es una fuente histórica en la que se pueden rastrear los proyectos y métodos pedagógicos que la sociedad ha considerado pertinente para modelar a las nuevas generaciones.

El libro de texto escolar, es una herramienta fundamental del currículo ya que hace parte de un proyecto cultural que involucra al Estado, las escuela y la sociedad. Su papel también es acercar el currículo, dispuesto por el Estado, a los maestros quienes lo utilizan diariamente en su práctica pedagógica. Según Montiel (2005, p. 30) "el libro de texto constituye para el profesor una fuente de recursos tanto para las explicaciones de clase como para el conjunto de ejercicios a resolver en el salón, para llevar tarea o para usarse en la evaluación".

Fernández y Caballero (2017) señalan que en la práctica no es el profesor quien diseña el currículo, sino que esa tarea es realizada por las editoriales cuando elaboran los manuales escolares, los que posteriormente guiarán lo que se enseña en las aulas. Así entonces, los libros de texto escolares cobran una gran importancia para el currículo propuesto y el currículo en acción, ya que son utilizados para el diseño de los planes estudio como para las secuencias de enseñanza. Según Parcerisa Arán (1996, p. 35, citado en Fernández y Caballero, 2017) en cuanto a la influencia que el libro de texto tiene en el aula,

> (…) se estima que los libros de texto llegan a condicionar de manera importante el tipo de enseñanza que se realiza, ya que muchos enseñantes lo utilizan de manera cerrada, sometiéndose al currículum específico que se refleja en él, tanto en lo que se refiere a los contenidos de aprendizaje como a la manera de enseñarlos.

En segundo lugar, el libro de texto escolar, es el soporte de las verdades que la sociedad cree que es necesario transmitir a las nuevas generaciones. Esta dimensión resalta la importancia que tiene la selección, simplificación, ordenamiento y esquematización de las fuentes usadas por quienes producen el texto y obedecen a lo que consideran en un momento dado como verdadero y necesario transmitir, para que lo aprendan las nuevas generaciones. Según Choppin (2001, citado en Samacá, 2011) lo verdadero y útil puede variar de acuerdo a los lugares, épocas, el régimen político o la confesión religiosa, lo que conduce a plantear la historicidad de los contenidos de los textos.

En tercer lugar, los libros de texto son un objeto material que hacen parte de un proceso de producción, comercialización y consumo. Esta dimensión ve el libro como una mercancía que depende, para su existencia, de un contexto económico en el que intervienen diferentes instituciones.

Finalmente, el libro de texto es un medio de comunicación por el que se difunden sistemas de valores, ideologías e imágenes de los grupos sociales emergentes en una época determinada. El libro de texto escolar puede tener “concepciones ideológicas, morales, religiosas, políticas, antropológicas y proyecto de sociedad de manera explícita o tácita” (Samacá, 2011, p. 208). De acuerdo con lo anterior, el libro de texto es un registro en el cual se pueden rastrear procesos culturales y políticos a partir de diversas perspectivas como la histórica, sociológica, antropológica y comunicacional, entre otras.

Samacá (2011) señala que los investigadores de la UTP mencionan que pensar el libro de texto escolar como vector cultural significa investirlo de la función de vehicular los valores a transmitir, donde asuntos como el diseño, la organización, jerarquización y presentación del conocimiento no solo obedecen a requerimiento pedagógicos, sino también a referente políticos, morales y culturales implícitos.

En conclusión, el libro de texto tiene diversas dimensiones que hacen de él una herramienta fundamental en la transmisión de la cultura, la identidad y las verdades que son necesarias para ayudar a forjar los valores y conocimientos que las nuevas generaciones requieren en sus procesos de formación.

2.3 LA EDUCACIÓN MEDIA EN COLOMBIA EN EL PERIODO 1951-2017

El currículo escolar colombiano, al menos durante los últimos 60 años, ha sido constantemente modificado a raíz de diversas reformas, establecidas por el MEN. En una primera etapa, hasta 1994, se promulgaron decretos que regulaban el currículo que debía impartirse en las instituciones oficiales y privadas. No obstante, a mediados de la década de los 90, se inició la promoción de la autonomía para el diseño curricular en cada institución escolar del país, de acuerdo con la Ley General de Educación, la cual estaría en consonancia con los principios de pluralidad y diversidad proclamados en la Constitución Política de 1991.

Las normativas promulgadas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y el gobierno colombiano, en el periodo 1951-2017, han reformulado los propósitos, planes de estudio, ciclos educativos obligatorios y el desarrollo curricular teniendo en cuenta los cambios sociales, los avances en tecnología, el desarrollo científico y las relaciones económicas y políticas del país con otras naciones y con organizaciones internacionales, como por ejemplo la adhesión de Colombia a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE).

Durante este periodo, se han establecido diferentes maneras de entender la Educación Media. Para presentar los cambios de concepciones que ha tenido de la Educación Media en Colombia, dividimos el periodo 1951-2017 en seis etapas, como muestra la ilustración 7:

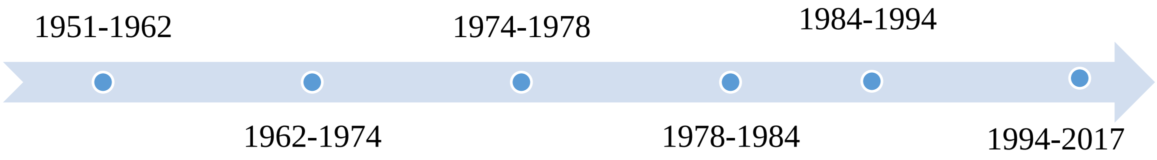


Ilustración 7. Etapas sobre las concepciones de Educación Media en Colombia a partir de la normatividad. Fuente: Propia.

2.3.1 ETAPA 1 (1951-1962). INEXISTENCIA DE LA EDUCACIÓN MEDIA

El bachillerato era considerado como un ciclo educativo completo. Los Decretos 0075/1951 y 2550/1951 del MEN, que fijaban los planes de estudio en los grados de bachillerato, no indicaban una distinción explícita entre ciclos educativos, de manera que no se hacía mención a la Educación Media. Sin embargo, esos mismos planes de estudio presentaban un plan de cultura mínima obligatoria hasta el cuarto grado de bachillerato. En los grados quinto y sexto – hoy conocidos como Educación Media- se encontraban asignaturas que no se estudiaban en los primeros cuatro grados de bachillerato.

2.3.2 ETAPA 2 (1962-1974). CREACIÓN DE LA EDUCACIÓN MEDIA (I A IV DE BACHILLERATO)

El Decreto 45/1962 menciona en su propósito: "Por el cual se establece el Ciclo Básico de Educación Media, se determina el plan de estudios para el bachillerato y se fijan calendario y normas para evaluar el trabajo escolar". En este momento se reconoce por primera vez un ciclo básico de Educación Media. Este ciclo estaba conformado por los grados I a IV de bachillerato y los grados V y VI era considerados como el segundo ciclo del bachillerato o de Educación Secundaria. Así entonces, la Educación Media de esta etapa era diferente a la que hoy conocemos.

2.3.3 ETAPA 3 (1974-1978). DOS CICLOS PARA LA EDUCACIÓN MEDIA: BÁSICO Y VOCACIONAL

El Decreto 45/1962 fue derogado por el Decreto 080/1974. Este último decreto consideró dentro de la escolaridad de Educación Media a los grados I a VI de bachillerato, sin embargo, se mencionaba en el artículo 3° que la Educación Media estaba compuesta por dos ciclos: un ciclo básico de 4 años en el que los estudiantes tendrían una formación básica y un ciclo de dos años llamado ciclo vocacional, el cual ofrecería seis modalidades de bachiller: académico, pedagógico, industrial, comercial, agropecuario y en promoción social.

2.3.4 ETAPA 4 (1978-1984). LA MEDIA VOCACIONAL: MODALIDADES DE BACHILLER

En 1978, con el Decreto 1419/1978 se reconoce por primera vez la distinción entre la Educación Básica (Primaria y Secundaria hasta 9º) como un ciclo fundamental de educación y la media vocacional (10° y 11° de bachillerato), que conduciría a tres modalidades de bachiller: en ciencias, en tecnología y en arte.

2.3.5 ETAPA 5 (1984-1994). PROPÓSITOS EXCLUSIVOS PARA LA MEDIA VOCACIONAL

El Decreto 1002/1984 reconoció al igual que el decreto anterior (Decreto 1419/1978), los grados 10° y 11° de bachillerato como la media vocacional. No obstante, los fines del sistema educativo son adjudicados a cada ciclo educativo. Es así como la educación media vocacional reconoce seis fines exclusivos, en este ciclo.

2.3.6 ETAPA 6 (1994-2017). LA EDUCACIÓN MEDIA: 10° Y 11°

La Ley General de Educación, Ley 115/1994, traería consigo cambios significativos para el diseño del currículo, así como la estructura del servicio educativo en Colombia, identificando claramente en el artículo 11 los niveles de educación formal, entendiendo la Educación Media como los dos últimos grados de bachillerato, los cuales comprenden décimo (10°) y undécimo (11°).

Las seis etapas anteriormente mencionadas, muestran cómo cada decreto que derogaba uno anterior, traía consigo una “definición” de Educación Media distinta. La etapa 6 aún se encuentra vigente, gracias a que la Ley General de Educación estableció definitivamente los grados escolares que hoy se conocen como Educación Media.

2.4 PROPÓSITOS DE LA EDUCACIÓN MEDIA COLOMBIANA EN EL PERIODO 1951-2017

A finales de la década de 1940 se concebía como propósito urgente de la educación colombiana, formar ciudadanos que participaran en el progreso de una sociedad democrática, de manera que fueran conscientes de sus responsabilidades cívicas. Según mencionó Gustavo Correa, director del Departamento de Secundaria del Ministerio de Educación durante 1949, en un informe presentado al Ministro de Educación del momento, Eliseo Arango:

> Uno de los urgentes imperativos de la escuela, el colegio y la Universidad en Colombia, debe ser el formar ciudadanos debidamente ilustrados en el cumplimiento de sus obligaciones cívicas a fin de que cada cual participe con criterio claro en el engrandecimiento de la sociedad democrática en que vivimos. El futuro del país depende en buena parte del empeño con que la educación colombiana trate de formar ciudadanos con plena conciencia de sus responsabilidades. Por esto la reforma[7] aludida trata de llenar este vacío inconcebible de los programas. (Arango, 1949, p.28-29)

No obstante, al exponer estos fines que se esperaban del sistema educativo, también se generaban inquietudes sobre cuáles deberían ser los propósitos que requería alcanzar el bachillerato[8] en las escuelas colombianas. En el mismo documento se menciona que:

> Una de las funciones fundamentales del Ministerio de Educación es la elaboración de programas para la enseñanza en todos sus grados. Al mismo tiempo que es la función fundamental es la más delicada y trascendental de todas, pues en realidad de ello depende el tipo de bachiller a que el gobierno nacional aspira para la colectividad colombiana. La fijación de programas está en realidad relacionada con las orientaciones universales de nuestra civilización. También en este punto confluyen los tradicionales problemas de determinar si el bachillerato debe tener una orientación esencialmente humanística o más bien científica y de tipo pragmático. De la misma manera surge el interrogante de si el bachillerato debe ser meramente una anticipación para la universidad, o si, por el contrario, debe

---

[7] La reforma a la cual se refiere en este momento Gustavo Correa, fue la modificación al plan de estudios de Bachillerato a través del Decreto 3408/1948. Según el decreto en mención, se intensificó la enseñanza de la Historia Patria en el grado primero y se incluyó en el grado cuarto, porque en este último no existía. Así mismo, señaló Correa que la enseñanza de esta asignatura era de gran importancia para el país.

[8] Recordemos que durante estos años no se consideraba el bachillerato como dos ciclos de aprendizaje. No fue sino hasta 1962, con el decreto 045 que aparece el término de educación media, en el cual se consideran dos ciclos, el primer ciclo con una duración de 4 años y un segundo ciclo que duraría 2 años previos a la educación superior.

> proporcionar una educación que en sí misma represente un adiestramiento adecuado qua capacite para toda la vida. (p. 26)

Al parecer los interrogantes que preocupaban, en relación con los fines educativos del bachillerato, al Ministro de Educación del gobierno de Ospina Pérez, se fueron aclarando en el siguiente mandato presidencial cuando se encontraba en el cargo de Ministro de Educación Nacional, Rafael Azula Barrera y como director del Departamento de Educación Secundaria, Carlos Arturo Caparroso. En el informe de gestión del año 1951, Caparroso presentó un nuevo plan de estudios para el bachillerato que redujo notablemente la cantidad de asignaturas en relación con las que traía el plan de estudios anterior, además se afirmó que el propósito del bachillerato superior – año quinto y sexto- era prepararse para la Educación Superior.

> Por Decreto número 0075 de enero 17 del presente año fue adoptado un nuevo plan de estudios de la Enseñanza Secundaria, (…). Sin traer mayores novedades, este nuevo plan se orienta en el sentido de procurar una simplificación en el bachillerato evidentemente provechosa (…). Contempla el nuevo plan, al lado de una regulación de un bachillerato superior, con miras hacia la universidad, una especialización en Comercio, Artes y Oficios, Magisterio Elemental, etc., eminentemente práctica. Queda así abierto el camino de algunas profesiones útiles, dentro de un bachillerato que pudiera llamarse elemental, para aquel alumnado sin pretensiones de cursar carreras universitarias. (Azula, 1951, p.90-91)

Esta idea de preparar a los estudiantes del bachillerato superior para la universidad fue cuestionada a finales de la década de 1950. El informe presentado por el ministro de educación Alonso Carvajal Peralta, en 1958, mostraba que el propósito del bachillerato superior no era únicamente preparar a los estudiantes para la universidad, sino también la adquisición de una cultura general para la vida. Carvajal (1958, p.70-71), menciona:

> No quiere decir ello que este bachillerato haya de orientarse hacia los estudios universitarios porque se quiere con él dar al estudiante una cultura general que le permita vivir decorosamente en el medio espiritual en donde ha de actuar. Pero es un hecho que este mismo diploma es requisito indispensable para el ingreso a la universidad.

Sin embargo, en 1959 el Ministro de Educación a cargo, Abel Naranjo Villegas, reforzó nuevamente la idea de que el propósito del bachillerato era preparar a los estudiantes para estudios superiores, de manera que los dos últimos años se podían realizar en una de las siguientes modalidades: normalista, vocacional agrícola, industrial, comercial, vocacional femenina y especial en humanidades. Con esta diversificación se planteaba el tipo de educación superior al que se accedería según la modalidad escogida en el bachillerato. El Proyecto de Decreto Re orgánico del Ministerio de Educación Nacional creado en 1959, mencionaba en la sección correspondiente a la Dirección General de Educación Media[9] (Naranjo, 1959, p. 58-59) que los estudiantes normalistas podrían acceder a las facultades de educación, de diplomacia y bibliotecología, los estudiantes con modalidad vocacional agrícola podrían acceder a las facultades de agronomía, medicina veterinaria y química industrial, los estudiantes con modalidad industrial podrían acceder a las facultades de matemáticas, ingeniería y arquitectura, los estudiantes con modalidad comercial podrían acceder a las facultades de ciencias económicas y administración pública, los estudiantes con modalidad vocacional femenina podrían acceder a las facultades de enfermería superior, odontología, farmacia y bacteriología, los estudiantes con modalidad especial en humanidades podrían acceder a facultades relacionadas con otras formas de educación media.

Posteriormente se emite el Decreto 45/1962, el cual fija dos ciclos para la educación secundaria, el primer ciclo de educación básica y el segundo ciclo del bachillerato. Esta normativa, a diferencia de las anteriores, pone de manifiesto 10 propósitos que se esperaban alcanzar cuando los estudiantes terminaran los seis grados de esta educación:

> Artículo 2º. Son objetivos de la Educación Secundaria o Bachillerato primordialmente, los siguientes:

---

[9] En uno de los artículos de este proyecto relacionado con la estructura de la educación media se señalaba que: “los programas de estudio para el segundo ciclo de la educación media corresponderán no solamente a la orientación conveniente para la profesión media con respecto a la cual se quiere capacitar, y para la clase de estudios académicos universitarios con respecto a los cuales dan preparación específica, sino también a la necesidad necesaria para que se haga efectiva y provechosa la orientación profesional”, luego en su parágrafo se aclara que: “los programas de estudio de que se trata este artículo serán elaborados por el Ministerio de Educación Nacional en colaboración con la Asociación Colombiana de Universidades” (Memoria del Ministro de Educación al Congreso, 1959, p. 59)

1. Continuar, ampliar e intensificar los fundamentos de cultura que suministra la enseñanza primaria.
2. Satisfacer las necesidades del adolescente en su formación intelectual, moral, religiosa, social y estética; guiarlo en su desarrollo integral y contribuir a la estructuración de su personalidad.
3. Formar en el alumno hábitos de conducta como la responsabilidad, la iniciativa, la honradez, la veracidad, la sencillez, la sinceridad, la satisfacción por el trabajo, la austeridad, la constancia, la puntualidad, la correcta presentación personal, la tolerancia, el sentido de la convivencia y del respete a la ley y a las ideas ajenas, así como el constante deseo de superación.
4. Enseñar al alumno a estudiar, y fomentarle la costumbre de hacerlo; dirigirlo en la investigación individual y colectiva, en la labor de información para perfeccionar sus conocimientos, y en el empleo honesto y útil del tiempo libre.
5. Capacitar al alumno para que a aprecie y practique el trabajo en grupo y la prefecta convivencia; para que adquiera el sentido de responsabilidad individual, familiar, cívica y social, mediante el respeto de los derechos y deberes de la persona humana, como fundamento de la democracia.
6. Ayudar al alumno a desarrollar sus potencialidades, para que pueda disfrutar individual y socialmente de una vida plena, de acuerdo con el conocimiento de la realidad nacional, sus posibilidades de desarrollo, el amor al país y a la voluntad de servirle.
7. Hacer partícipe al alumno de los bienes de la cultura universal, mediante un proceso sistemático de aprendizaje, que le permita la posesión gradual y coherente de los conocimientos, de acuerdo con las conquistas de la ciencia y en relación con su capacidad mental y los requerimientos de la sociedad de que forma parte.
8. Preparar al alumno para vivir en una sociedad en constante evolución como resultado, contra otros factores, de las transformaciones de orden cultural y social, los avances científicos y las innovaciones tecnológicas.
9. Preparar al alumno para continuar su propia formación y emprender estudios y disciplinas de nivel superior.

10. Dotar al joven de la responsabilidad, el criterio, las capacidades y conocimientos suficientes para actuar en la vida de relación y, si lo pretendiere, para desempeñar adecuadamente actividad provechosa y remunerativa.

Los propósitos que establece este decreto no hacen distinciones explícitas de los fines esperados en el primer y segundo ciclo del bachillerato. Sin embargo, se nota que los objetivos van encaminados hacia el desarrollo integral de los alumnos, en cuanto al reconocimiento y fortalecimiento de su individualidad y en cuanto a su función dentro de una sociedad. También es destacar, que el objetivo No 9 va dirigido a preparar a los alumnos para estudios universitarios, lo cual había sido un propósito común desde inicios de la década de 1950.

Este decreto tuvo vigencia durante 12 años hasta que el Decreto 080/1974 lo derogó. El Decreto 080 expone siete propósitos[10] para el bachillerato que también pretenden desarrollar la integralidad de los estudiantes:

> Artículo 2° La educación media debe proponerse:
>
> 1° Buscar el conocimiento, equilibrio e integración de valores de tipo vital, intelectual, ético, estético, social, religioso, político y utilitario como fundamento de la vida del individuo.
>
> 2° Desarrollar las facultades intelectuales y las aptitudes especificas del individuo.
>
> 3° Enseñar que la salud es condición esencial para el desenvolvimiento individual y social y que su conservación depende del conocimiento y la práctica de ciertas normas
>
> 4° Formar al individuo para hacer uso adecuado del tiempo libre a fin de recuperar el potencial de energía disminuido por la actividad diaria y lograr el enriquecimiento de su personalidad.

---

[10] Cada uno de los propósitos expuestos en el decreto 080 de 1974 son explicados con acciones concretas o implicaciones que dan a entender la propuesta del MEN en esta época. Por ejemplo, el propósito No 1: "Buscar el conocimiento, equilibrio e integración de valores de tipo vital, intelectual, ético, estético, social, religioso, político y utilitario como fundamento de la vida del individuo", se explica de la siguiente manera: "En consecuencia el alumno debe:

a) Adquirir capacidad de juicio que le permita establecer una jerarquía racional de valores entre los aspectos culturales, formativos y vocacionales;

b) Apreciar y valorar la dignidad del trabajo, sea éste de naturaleza artesanal, ¡técnica e intelectual;

c) Jerarquizar los valores del mundo interior mediante la reflexión y la autocrítica;

d) Adquirir las nociones de moral y de religión más como vivencia que como información teórica;

e) Adquirir capacidad para aceptar y renovar positivamente los valores.

> 5° Educar al alumno para ser miembro activo de la sociedad.
>
> 6° Conocer y apreciar los valores de la nacionalidad, mediante la conservación y enriquecimiento del patrimonio cultural colombiano.
>
> 7° Afianzar el principio de que la familia es la célula esencial de toda sociedad y enseñar al alumno a cumplir sus funciones como miembro responsable y digno de ella.

El propósito No 2 de este decreto enuncia que el desarrollo de las habilidades intelectuales durante el bachillerato debe permitir a los estudiantes acceder a estudios universitarios o desempeñarse en un oficio, este propósito menciona de manera explícita:

> Desarrollar las facultades intelectuales y las aptitudes especificas del individuo. En consecuencia, debe ofrecer oportunidades al alumno para:
>
> a) Adquirir formación académica y vocacional de tipo general que lo habilite para seguir estudios superiores o para desempeñar una ocupación;
>
> b) Tomar conciencia de que la educación es un proceso que dura toda la vida, para lo cual es indispensable adquirir métodos de estudio, investigación y pensamiento crítico.

Según Gómez (2014), el sistema educativo formal tuvo que ser reorganizado por las inconsistencias del decreto 1710 de 1963 y 080 de 1974 y “por la falta de continuidad entre los planes de estudio de primaria y bachillerato”. Así entonces se promulgó el decreto 1419 de 1978 que derogó el decreto 080 del 74, trayendo consigo lo que se llamaría entonces la renovación curricular y con ella once fines para el sistema educativo colombiano. El artículo 8 del 1419 menciona que la diversificación de la educación media vocacional, tiene como propósito, capacitar a los estudiantes para continuar estudios superiores o para desempeñar una función en la comunidad. No obstante, la educación media vocacional también debería atender los once fines del sistema educativo colombiano. El artículo 3° del decreto menciona que: “La programación curricular para los niveles de educación preescolar, básica (primaria y secundaria), media vocacional e intermedia profesional, deberá ceñirse a los fines del Sistema Educativo Colombiano”.

Los fines para el sistema educativo propuestos en el Decreto 1419/1978 eran los siguientes:

1. Contribuir al desarrollo equilibrado del individuo y de la sociedad sobre la base del respeto por la vida y por los derechos humanos.
2. Estimular la formación de actitudes y hábitos que favorezcan la conservación de la salud física y mental de la persona y el uso racional del tiempo.
3. Promover la participación consciente y responsable de la persona como miembro de la familia y del grupo social y fortalecer los vínculos que favorezcan la identidad y el progreso de la sociedad.
4. Fomentar el desarrollo vocacional y la formación profesional, de acuerdo con las aptitudes y aspiraciones de la persona y las necesidades de la sociedad, inculcando el aprecio por el trabajo cualquiera que sea su naturaleza.
5. Fomentar en la persona el espíritu de defensa, conservación, recuperación y utilización racional de los recursos naturales, y de los bienes y servicios de la sociedad.
6. Desarrollar en la persona capacidad crítica y analítica del espíritu científico, mediante el proceso de adquisición de los principios y métodos de cada una de las áreas del conocimiento, para que participe en la búsqueda de alternativas de solución a los problemas nacionales.
7. Promover en la persona la capacidad de crear, adoptar y transferir la tecnología que se requiere en los procesos de desarrollo del país.
8. Fomentar el desarrollo de actitudes y hábitos permanentes de superación que motivan a la persona a continuar la educación a través de su vida.
9. Fomentar el estudio de los propios valores y el conocimiento y respeto de los valores característicos de los diferentes grupos humanos.
10. Estimular el desarrollo de la mente, la capacidad de apreciación estética y propiciar un ambiente de respeto por las diferentes creencias religiosas.
11. Formar una persona moral y cívicamente responsable.

Más tarde, en mayo de 1984 el decreto 1002 ampliaría las disposiciones del decreto 1419 de 1978 y derogaría el artículo 12 de este último. El decreto 1002 sería el primero en explicitar los fines esperados para la educación media vocacional, así como para el preescolar y la educación básica[11]. Los fines planteados por el decreto 1002 para la educación media vocacional eran:

1. Afianzar el desarrollo personal, social y cultural adquirido en el nivel de Educación Básica.
2. Adquirir los conocimientos fundamentales y las habilidades y destrezas básicas, que además de prepararlo para continuar estudios superiores, lo orienten hacia un campo de trabajo.
3. Aprender a utilizar racionalmente los recursos naturales, a renovarlos e incrementarlos; a emplear adecuadamente los bienes y servicios que el medio le ofrece, a participar en los procesos de creación y adecuación de tecnología.
4. Actuar con responsabilidad, honradez, eficiencia y creatividad en el campo que le corresponda.
5. Utilizar creativa y racionalmente el tiempo libre para el sano esparcimiento, la integración social y el fomento de la salud física y mental.
6. Adquirir suficientes elementos de juicio para orientar su vida y tomar decisiones responsables.

Con la entrada de la nueva Constitución de Colombia en 1991 y atendiendo al artículo 67 de la Carta Magna, el Congreso de la República expide la Ley General de Educación en el año 1994, la cual aportaría cambios significativos al sistema educativo nacional. Los fines específicos para la educación media propuestos en esta ley son los siguientes:

> a) La profundización en un campo del conocimiento o en una actividad específica de acuerdo con los intereses y capacidades del educando;
>
> b) La profundización en conocimientos avanzados de las ciencias naturales;
>
> c) La incorporación de la investigación al proceso cognoscitivo, tanto de laboratorio como de la realidad nacional, en sus aspectos natural, económico, político y social;
>
> d) El desarrollo de la capacidad para profundizar en un campo del conocimiento de acuerdo con las
> potencialidades e intereses;

---

[11] La educación básica inicia en el grado 1° de primaria y culmina en el grado 9° de secundaria.

e) La vinculación a programas de desarrollo y organización social y comunitaria, orientados a dar solución a los problemas sociales de su entorno;

f) El fomento de la conciencia y la participación responsables del educando en acciones cívicas y de servicio social;

g) La capacidad reflexiva y crítica sobre los múltiples aspectos de la realidad y la comprensión de los valores éticos, morales, religiosos y de convivencia en sociedad, y

h) El cumplimiento de los objetivos de la educación básica contenidos en los literales b) del artículo 20, c) del artículo 21 y c), e), h), i), k), ñ) del artículo 22 de la presente Ley.

Por supuesto, aunque la ley contempla fines específicos para la educación media, también se debe atender los 13 objetivos del sistema educativo en general:

1. El pleno desarrollo de la personalidad sin más limitaciones que las que le imponen los derechos de los demás y el orden jurídico, dentro de un proceso de formación integral, física, psíquica, intelectual, moral, espiritual, social, afectiva, ética, cívica y demás valores humanos.
2. La formación en el respeto a la vida y a los demás derechos humanos, a la paz, a los principios democráticos, de convivencia, pluralismo, justicia, solidaridad y equidad, así como en el ejercicio de la tolerancia y de la libertad.
3. La formación para facilitar la participación de todos en las decisiones que los afectan en la vi da económica, política, administrativa y cultural de la Nación.
4. La formación en el respeto a la autoridad legítima y a la ley, a la cultura nacional, a la historia colombiana y a los símbolos patrios.
5. La adquisición y generación de los conocimientos científicos y técnicos más avanzados, humanísticos, históricos, sociales, geográficos y estéticos, mediante la apropiación de hábitos intelectuales adecuados para el desarrollo del saber.
6. El estudio y la comprensión crítica de la cultura nacional y de la diversidad étnica y cultural del país, como fundamento de la unidad nacional y de su identidad.

7. El acceso al conocimiento, la ciencia, la técnica y demás bienes y valores de la cultura, el fomento de la investigación y el estímulo a la creación artística en sus diferentes manifestaciones.
8. La creación y fomento de una conciencia de la soberanía nacional y para la práctica de la solidaridad y la integración con el mundo, en especial con Latinoamérica y el Caribe.
9. El desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca el avance científico y tecnológico nacional, orientado con prioridad al mejoramiento cultural y de la calidad de la vida de la población, a la participación en la búsqueda de alternativas de solución a los problemas y al progreso social y económico del país.
10. La adquisición de una conciencia para la conservación, protección y mejoramiento del medio ambiente, de la calidad de la vida, del uso racional de los recursos naturales, de la prevención de desastres, dentro de una cultura ecológica y del riesgo y la defensa del patrimonio cultural de la Nación.
11. La formación en la práctica del trabajo, mediante los conocimientos técnicos y habilidades, así como en la valoración del mismo como fundamento del desarrollo individual y social.
12. La formación para la promoción y preservación de la salud y la higiene, la prevención integral de problemas socialmente relevantes, la educación física, la recreación, el deporte y la utilización adecuada del tiempo libre, y
13. La promoción en la persona y en la sociedad de la capacidad para crear, investigar, adoptar la tecnología que se requiere en los procesos de desarrollo del país y le permita al educando ingresar al sector productivo.

A partir del recorrido realizado anteriormente por los fines de la Educación Media, desde la década de 1950 hasta 2017, se pueden establecer quince propósitos generales, perseguidos por la Educación Media. Así entonces, la Educación Media se propone:

> **P1**: Continuar con el desarrollo personal, social y cultural iniciado en los ciclos educativos previos.

P2: Promover el desarrollo integral del estudiante en las dimensiones intelectual, ética, social, estética, religiosa y política.

P3: Formar en valores éticos, morales y cívicos.

P4: Formar en hábitos de estudio personales y en autonomía.

P5: Fortalecer potencialidades en el estudiante que promuevan su propio desarrollo, el de la sociedad y el del país.

P6: Promover el aprendizaje sobre la cultura general del mundo.

P7: Preparar a los estudiantes para vivir en una sociedad en constante evolución.

P8: Preparar al estudiante para la profundización en un campo del conocimiento, para estudios universitarios y un campo de trabajo.

P9: Estimular la formación de actitudes y hábitos que favorezcan la conservación de la salud física y mental de la persona y el uso racional del tiempo libre.

P10: Fomentar el respeto por los bienes culturales de la nación, la pluralidad y los recursos naturales.

P11: Promover la participación consciente y responsable de la persona como miembro de la familia y la sociedad.

P12: Profundizar en conocimientos avanzados de las ciencias naturales.

P13: Incorporar la investigación al proceso cognoscitivo, en relación con los aspectos natural, económico, político y social.

P14: Desarrollar habilidades comunicativas para leer, comprender, escribir, escuchar y expresarse correctamente.

P15: Analizar y profundizar en el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de problemas de la ciencia, tecnología y la vida cotidiana.

La siguiente Tabla 2 relaciona los propósitos generales con cada etapa donde se realizaron reformas curriculares a nivel normativo (mencionadas anteriormente):

Tabla 2. Identificación de los propósitos generales de le Educación Media en cada etapa curricular.

ETAPA	1951-1962	1962-1974	1974-1978	1978-1984	1984-1994	1994-2017
PROPÓSITOS GENERALES	P1, P6, P8	P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8	P2, P3, P5, P9, P10, P11	P3, P4, P5, P9, P10, P11	P1, P3, P8, P9, P10	P3, P5, P8, P9, P10, P12, P13, P14, P15

Fuente: Propia.

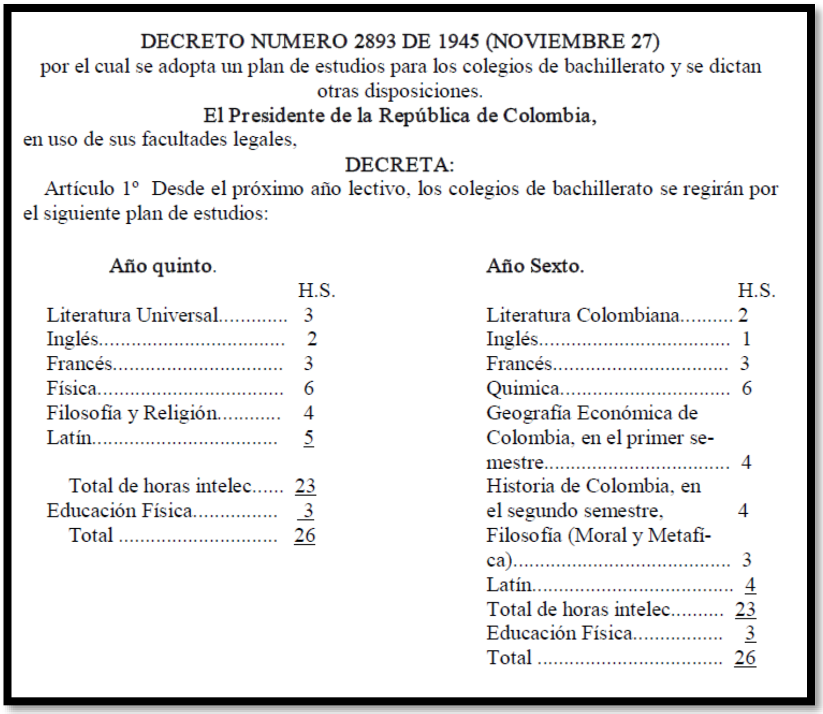
Se observa entonces que P3 y P5 han permanecido desde 1962, mientras que P8 estuvo desde 1951 hasta 1974 y luego reaparece en 1984 y continúa vigente. Así mismo P1 estuvo presente desde 1951 hasta 1962, aparece en 1984 pero vuelve a desaparecer en 1994. Además, el Sistema Educativo reconoce la importancia de los bienes culturales y de los recursos naturales, desde hace más de cuatro décadas, así que P10 aparece desde 1974 y permanece vigente.

2.5 HISTORIA DEL CURRÍCULO PROPUESTO DE TRIGONOMETRÍA EN EL PERIODO 1951-2017

Las Matemáticas han sido parte fundamental del currículo escolar en Colombia, sin embargo, hasta la década de 1940 esta área no era obligatoria para todos los grados del Bachillerato como se puede ver en la Ilustración 8. El Decreto 2893[12] de 1945 pone en evidencia que, en el año quinto de bachillerato, conocido hoy como décimo grado, no se incluye el estudio de la Trigonometría:

---

[12] Ver en anexos el decreto 2893 de 1945 completo.



DECRETO NUMERO 2893 DE 1945 (NOVIEMBRE 27)
por el cual se adopta un plan de estudios para los colegios de bachillerato y se dictan otras disposiciones.
El Presidente de la República de Colombia,
en uso de sus facultades legales,
DECRETA:

Artículo 1° Desde el próximo año lectivo, los colegios de bachillerato se regirán por el siguiente plan de estudios:

Año quinto.

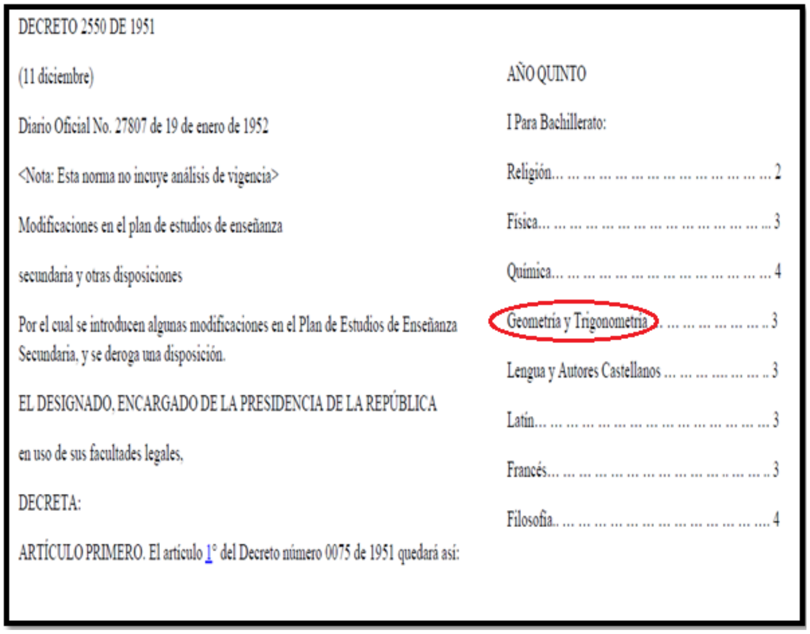
	H.S.
Literatura Universal............	3
Inglés.................................	2
Francés...............................	3
Física.................................	6
Filosofía y Religión...........	4
Latín..................................	5
Total de horas intelec......	23
Educación Física...............	3
Total	26

Año Sexto.

	H.S.
Literatura Colombiana..........	2
Inglés..................................	1
Francés................................	3
Quimica...............................	6
Geografía Económica de Colombia, en el primer semestre.................................	4
Historia de Colombia, en el segundo semestre,	4
Filosofía (Moral y Metafísica)......................................	3
Latín....................................	4
Total de horas intelec..........	23
Educación Física................	3
Total	26

Ilustración 8. Fuente: (Decreto 2893 de 1945)

Fue en el año 1951 cuando aparece por primera vez, desde la normativa (Decreto 2550/51), la inclusión de la Trigonometría en los planes de estudio de las instituciones escolares:



DECRETO 2550 DE 1951

(11 diciembre)

Diario Oficial No. 27807 de 19 de enero de 1952

<Nota: Esta norma no incuye análisis de vigencia>

Modificaciones en el plan de estudios de enseñanza

secundaria y otras disposiciones

Por el cual se introducen algunas modificaciones en el Plan de Estudios de Enseñanza Secundaria, y se deroga una disposición.

EL DESIGNADO, ENCARGADO DE LA PRESIDENCIA DE LA REPÚBLICA

en uso de sus facultades legales,

DECRETA:

ARTÍCULO PRIMERO. El artículo 1° del Decreto número 0075 de 1951 quedará así:

AÑO QUINTO

I Para Bachillerato:

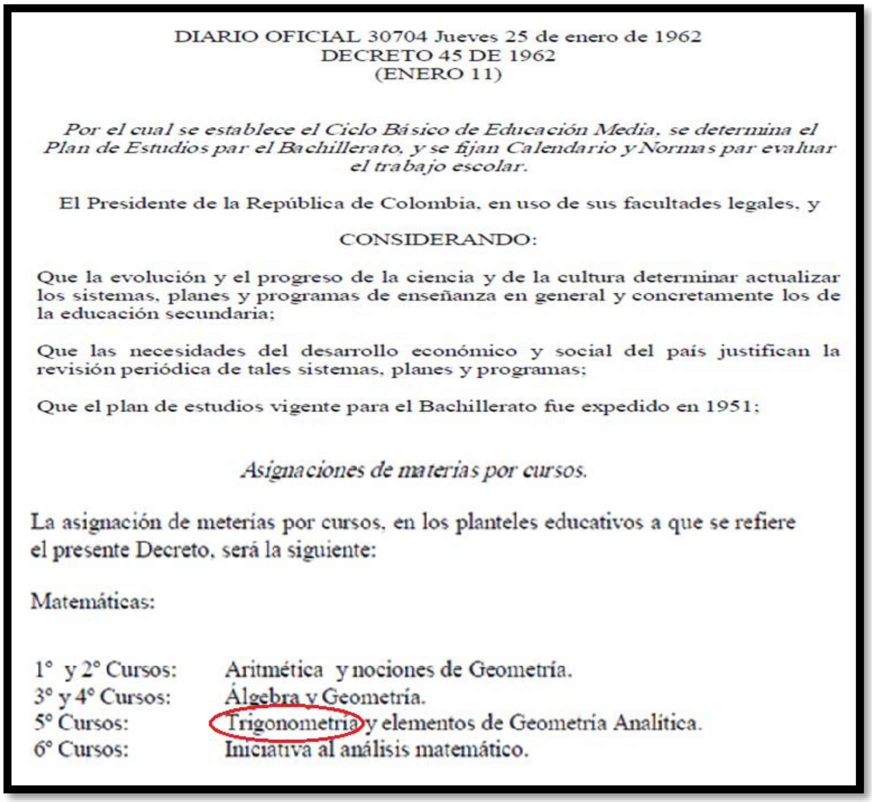
Religión...	2
Física...	3
Química...	4
Geometría y Trigonometría...	3
Lengua y Autores Castellanos	3
Latín...	3
Francés...	3
Filosofía..	4

Ilustración 9. Fuente: (Decreto 2550[13] de 1951)

---

[13] Ver en anexos el decreto 2550 de 1951 completo

En 1962, cuando se da una reforma importante a todos los planes de estudio del bachillerato - en coherencia con las recomendaciones propuestas en el Seminario Interamericano de Educación Secundaria realizado a finales de 1954 y principio de 1955 en Santiago de Chile y los compromisos adquiridos en la Conferencia Regional de Punta del Este en 1961- permanece de manera explícita la Trigonometría junto con la Geometría Analítica dentro de las asignaturas obligatorias en el grado quinto, según se menciona en el decreto 45 de 1962.



DIARIO OFICIAL 30704 Jueves 25 de enero de 1962
DECRETO 45 DE 1962
(ENERO 11)

Por el cual se establece el Ciclo Básico de Educación Media, se determina el Plan de Estudios par el Bachillerato, y se fijan Calendario y Normas par evaluar el trabajo escolar.

El Presidente de la República de Colombia, en uso de sus facultades legales, y

CONSIDERANDO:

Que la evolución y el progreso de la ciencia y de la cultura determinar actualizar los sistemas, planes y programas de enseñanza en general y concretamente los de la educación secundaria;

Que las necesidades del desarrollo económico y social del país justifican la revisión periódica de tales sistemas, planes y programas;

Que el plan de estudios vigente para el Bachillerato fue expedido en 1951;

Asignaciones de materias por cursos.

La asignación de meterías por cursos, en los planteles educativos a que se refiere el presente Decreto, será la siguiente:

Matemáticas:

1° y 2° Cursos:	Aritmética y nociones de Geometría.
3° y 4° Cursos:	Álgebra y Geometría.
5° Cursos:	Trigonometría y elementos de Geometría Analitica.
6° Cursos:	Iniciativa al análisis matemático.

Ilustración 10. Fuente: (Decreto 45[14] de 1962)

El decreto 45 de 1962 tiene vigencia hasta 1974. Durante la vigencia de este decreto y la de los siguientes, hasta el final de la década de los 80, se daban dos movimientos curriculares en la educación en matemáticas en Colombia, estos son la introducción de las Matemáticas Modernas y la renovación curricular. A pesar de ello, la Trigonometría escolar no fue abordada desde la normatividad. Es de destacar, que si bien en la década de los 80 el profesor Vasco, líder de la renovación curricular, escribió un documento en el cual presenta una propuesta para futuras políticas, y menciona a la Trigonometría, más precisamente a las

---

[14] Ver en anexos el Decreto 45 de 1962 completo

funciones trigonométricas, como herramienta para el tratamiento de los sistemas analíticos y precisa que “es mejor que el joven reinvente las ideas básicas de la Trigonometría, a través de la exploración de dispositivos mecánicos, del dibujo técnico y de la geometría analítica (o aún de las gráficas por computador si lo tiene), y que los juegos con identidades jeroglíficas puedadn quedarse para los clubes de matemáticas” (p. 190), estas ideas no fueron desarrolladas ni materializadas hasta la publicación de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas.

Reforzando lo mencionado anteriormente, el Decreto[15] 80/74 evidencia que la Trigonometría no aparece como asignatura propuesta, sino que se establece las Matemáticas como área fundamental, de manera que se halla un vacío en la línea cronológica alrededor de la presencia de la Trigonometría en el currículo propuesto. Este último hecho se mantiene hasta la actualidad.

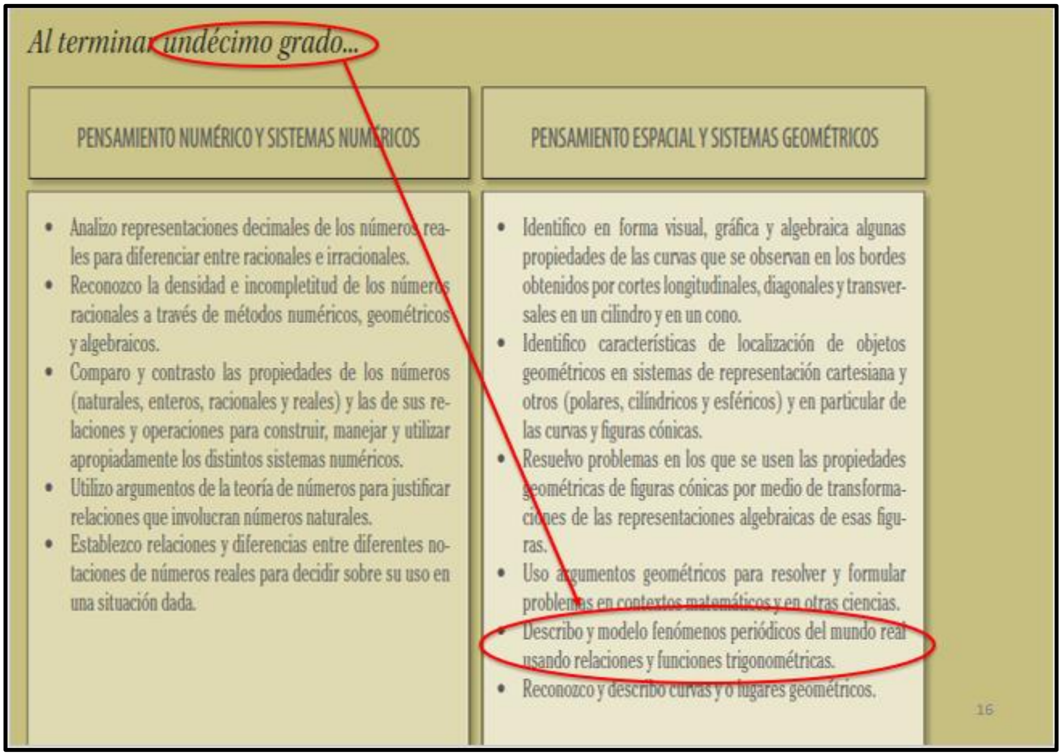
Con la entrada de la Constitución Política de 1991 y en correspondencia con la Ley 115 - Ley General de Educación- la normatividad que se venía gestando desde el gobierno nacional, se transforma en referentes curriculares y de calidad, de tal manera que el Ministerio de Educación Nacional durante las últimas dos décadas emite la serie Lineamientos Curriculares (1998), Estándares Básicos en Competencias (2006) y Derechos Básicos de Aprendizaje (2016).

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) proponen referentes para que cada institución educativa de manera autónoma diseñe su currículo. No obstante, los planes de estudio no son normados como en décadas anteriores, por tanto, el estudio de la Trigonometría no aparece allí como una asignatura o un asunto de estudio en las matemáticas escolares.

Los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (MEN, 2006) muestran los procesos generales de las Matemáticas asociados a conceptos y procedimientos que se desarrollan en diversos contextos. En lo que se refiere al estudio de la Trigonometría se evidencian dos niveles que se proponen en el último ciclo del bachillerato (educación media):

---

[15] Ver en anexos el Decreto 80 de 1974 completo.



Al terminar undécimo grado...

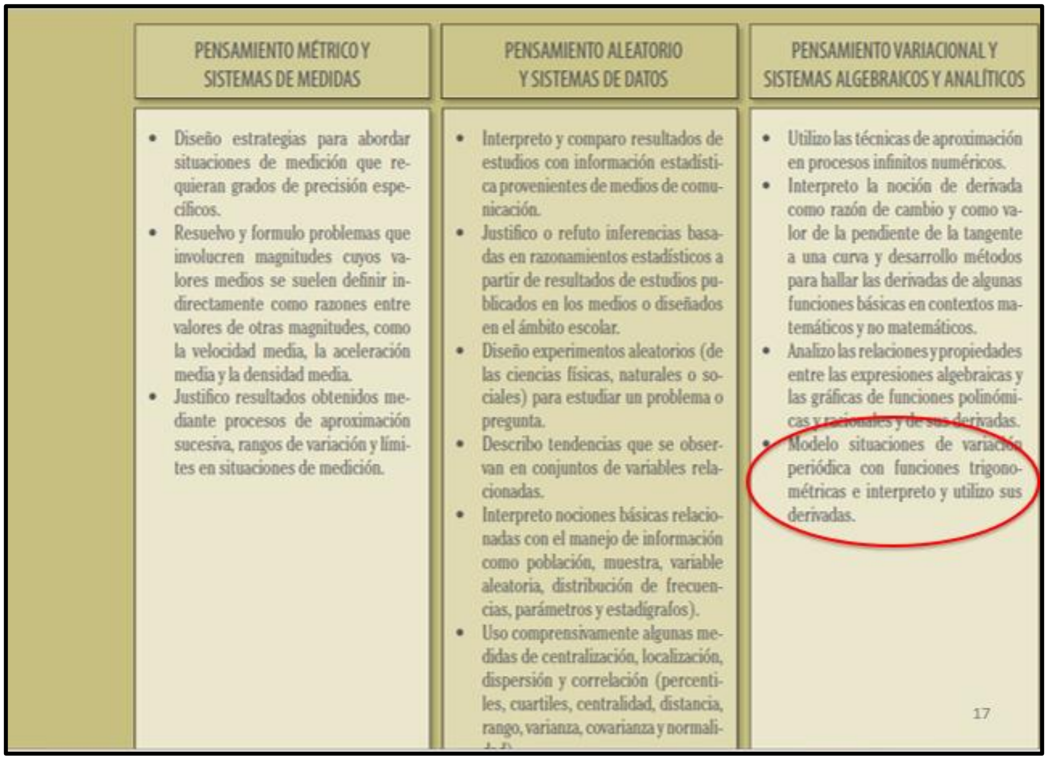
PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS

- Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales.
- Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.
- Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.
- Utilizo argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales.
- Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.

PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

- Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.
- Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.
- Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.
- Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.
- Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.
- Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.

Ilustración 11. Trigonometría en los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas en el ciclo décimo-undécimo. Fuente: (MEN, 2006, p. 88)



PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS

- Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.
- Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media.
- Justifico resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.

PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS

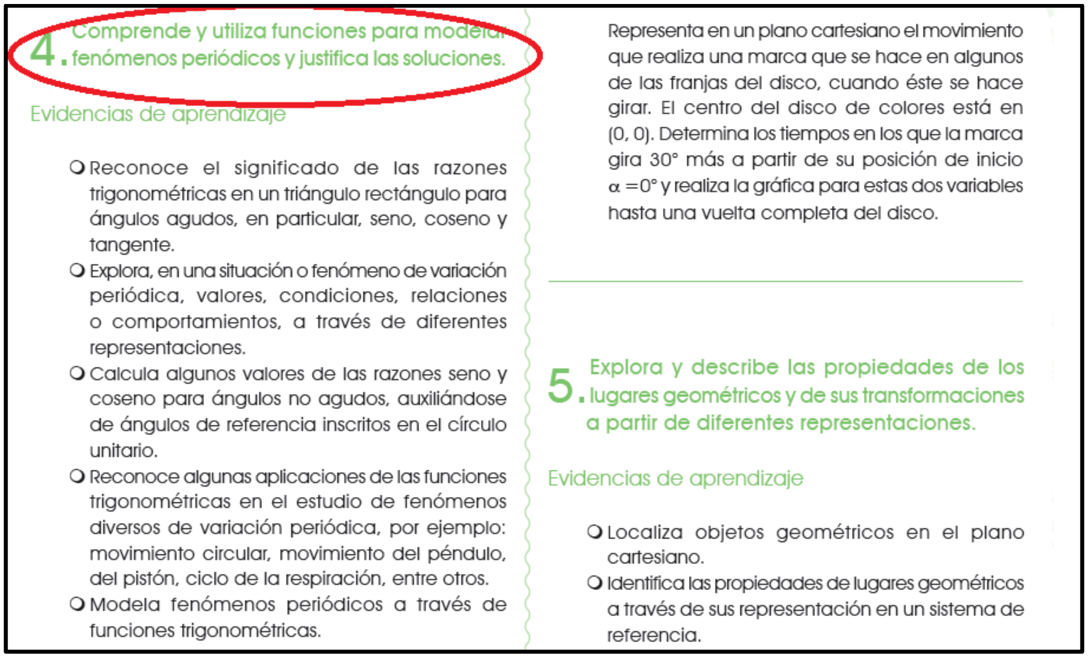
- Interpreto y comparo resultados de estudios con información estadística provenientes de medios de comunicación.
- Justifico o refuto inferencias basadas en razonamientos estadísticos a partir de resultados de estudios publicados en los medios o diseñados en el ámbito escolar.
- Diseño experimentos aleatorios (de las ciencias físicas, naturales o sociales) para estudiar un problema o pregunta.
- Describo tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas.
- Interpreto nociones básicas relacionadas con el manejo de información como población, muestra, variable aleatoria, distribución de frecuencias, parámetros y estadígrafos).
- Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normali-

PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS

- Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.
- Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.
- Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.
- Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.

Ilustración 12. Trigonometría en los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas en el ciclo décimo-undécimo. Fuente: (MEN, 2006, p. 89)

Los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016, v.2) reestructurados por el análisis realizado a la primera versión (2015) y por los aportes de la comunidad educativa, explicitan aprendizajes que año a año deben adquirir los estudiantes. Para el grado 10 se espera que los estudiantes: comprendan y utilicen funciones para modelar fenómenos periódicos y justifiquen las soluciones, para los cual las evidencias del aprendizaje son:



4. Comprende y utiliza funciones para modelar fenómenos periódicos y justifica las soluciones.

Evidencias de aprendizaje

- ❍ Reconoce el significado de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo para ángulos agudos, en particular, seno, coseno y tangente.
- ❍ Explora, en una situación o fenómeno de variación periódica, valores, condiciones, relaciones o comportamientos, a través de diferentes representaciones.
- ❍ Calcula algunos valores de las razones seno y coseno para ángulos no agudos, auxiliándose de ángulos de referencia inscritos en el círculo unitario.
- ❍ Reconoce algunas aplicaciones de las funciones trigonométricas en el estudio de fenómenos diversos de variación periódica, por ejemplo: movimiento circular, movimiento del péndulo, del pistón, ciclo de la respiración, entre otros.
- ❍ Modela fenómenos periódicos a través de funciones trigonométricas.

Representa en un plano cartesiano el movimiento que realiza una marca que se hace en algunos de las franjas del disco, cuando éste se hace girar. El centro del disco de colores está en (0, 0). Determina los tiempos en los que la marca gira 30° más a partir de su posición de inicio $\alpha = 0°$ y realiza la gráfica para estas dos variables hasta una vuelta completa del disco.

5. Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones.

Evidencias de aprendizaje

- ❍ Localiza objetos geométricos en el plano cartesiano.
- ❍ Identifica las propiedades de lugares geométricos a través de sus representación en un sistema de referencia.

Ilustración 13. Trigonometría en los Derechos Básicos de Aprendizaje (v.2) en el grado décimo. Fuente: (MEN, 2016, p. 76)

De acuerdo con la normatividad presentada anteriormente, desde la década de 1950, el estudio de la Trigonometría escolar tiene un poco más de 65 años de historia en las instituciones educativas del país. Sin embargo, cabe notar que a partir del decreto 80/74, no se designó la Trigonometría como área fundamental de conocimiento sino las Matemáticas. También es importante señalar que: 1) desde 1951 hasta 1974, los decretos relacionados con el currículo, fueron enfáticos en presentar explícitamente el estudio de la Trigonometría como área de conocimiento, 2) desde 1974 hasta 1998 no se evidencia, en la normatividad, la propuesta de asignar la Trigonometría como asignatura en la Educación Media, 3)desde 1998 hasta 2006 no se señala la Trigonometría como materia de estudio, sino que se dio relevancia a los procesos y pensamientos que se deben desarrollar en la escuela, y 4) desde 2007 hasta la actualidad, se promueven evidencias de aprendizaje que deben desarrollar los estudiantes de Educación Media, donde se involucran conceptos y procedimientos propios de la Trigonometría, como calcular valores de las razones seno y coseno para ángulos no agudos, con ayuda de ángulos de referencia inscritos en el círculo unitario. Así entonces, con los cambios curriculares, desde la normatividad, presentados anteriormente, la Trigonometría escolar ha permanecido presente, como una rama de las Matemáticas que es objeto de estudio en la Educación Media.

Además de lo anterior, es posible establecer una correpondencia entre las etapas que se seleccionaron partir de la promulgación de los decretos en el periodo 1951-2017, con las reformas curriculares dadas en la educación en Matemáticas. Se tiene entonces:

Tabla 3. Comparación entre las etapas identificadas desde la promulgación de los decretos donde esta presente la Trigoometría escolar con las reformas curriculares propuestas para la educación en Matemáticas escolares.

Etapas identificadas a partir de la promulgación de los decretos	Reformas curriculares en educación en Matemáticas
1951-1962	Centradas en resolución de problemas
1962-1974	Matemáticas Modernas
1974-1978	Matemáticas Modernas
1978-1984	Renovación curricular
1984-1994	Renovación curricular
1994-2017	Centradas en pensamientos y sistemas

Fuente: Propia

3. ESTRATEGIA INVESTIGATIVA

Este apartado tiene como fin contextualizar al lector acerca de las estrategias investigativas empleadas para el desarrollo de la investigación. Se encuentran los métodos utilizados para la construcción de categorías, el análisis de documentos y la selección y análisis de los libros escolares de Trigonometría.

Esta investigación está enmarcada en un enfoque cualitativo, teniendo en cuenta que "[…] enfatiza en la naturaleza social y cultural de las matemáticas, de su enseñanza y su aprendizaje" (Camargo, s.f., p. 47). Se presenta un análisis cualitativo de la información recolectada, haciendo énfasis en las interpretaciones de los datos a la luz de las categorías construidas.

Se pretende explorar qué pasa y qué ha pasado con los propósitos de la Educación Media colombiana a través de la revisión de textos escolares de Trigonometría utilizados en Colombia en el periodo 1951-2017, y los énfasis de la Trigonometría evidenciados en los textos a la luz de la revisión histórica realizada. Por lo tanto, el trabajo se enmarca en una estrategia de investigación naturalista, en particular, en una revisión documental.

3.1 REVISIÓN DOCUMENTAL

La investigación indaga de manera particular en la historia de la educación en matemáticas en Colombia, en particular, en la Historia de la normatividad que desde 1951 ha dirigido la educación en el país.

La revisión de la normatividad colombiana en educación se realizó de manera retrospectiva en la historia de los decretos emitidos por el Estado. Se revisaron los decretos actuales que rigen la educación en Colombia y los decretos previos que orientaron a las instituciones educativas del país. Este análisis de la normatividad condujo a la identificación del momento inicial dónde se determinó explícitamente la inclusión de la Trigonometría en el plan de estudios de las Matemáticas escolares en el país.

El Decreto 2550 de 1951 es el punto de referencia para analizar lo sucedido en los decretos posteriores al de dicho año. La sistematización de la normatividad en el periodo 1951-2017 nos permitió, inicialmente, identificar si la Trigonometría ha permanecido o no en el plan de estudios de las instituciones nacionales, y también, categorizar diferentes periodos de tiempo en relación con los objetivos propuestos por el Estado para la Educación Media del país. Los periodos de tiempo identificados son:

Tabla 4. Periodos de tiempo clasificados de 1951 a 2017

Periodo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**		
Años	1951-1962	1962-1974	1974-1978	1978-1984	1984-1994	1994-1998	1998-2006	2006-2017

Fuente: Propia.

Los mismos documentos normativos que permitieron clasificar los diferentes periodos de tiempo, de acuerdo con los cambios que sucedían en el país en la educación, permitieron extraer los 15 propósitos de la educación en Colombia. Dichos propósitos se referencian en el capítulo 2 del Marco de Referencia, y los cuáles se relacionan con cada periodo de tiempo en la Tabla 2.

Tabla 5. Identificación de los propósitos generales de le Educación Media en cada etapa curricular.

ETAPA	**1951-1962**	**1962-1974**	**1974-1978**	**1978-1984**	**1984-1994**	**1994-2017**
PROPÓSITOS GENERALES	P1, P6, P8	P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8	P2, P3, P5, P9, P10, P11	P3, P4, P5, P9, P10, P11	P1, P3, P8, P9, P10	P3, P5, P8, P9, P10, P12, P13, P14, P15

Fuente: Propia.

Los periodos de tiempo y los propósitos de la educación son categorías que se utilizarán para el análisis de los libros de texto escolar. El análisis de los libros se realizó utilizando la metodología *análisis de contenido*, la cual se explicará en la próxima sección.

3.2 ANÁLISIS DE CONTENIDO

Se seleccionaron diferentes libros de Trigonometría utilizados en la educación escolar colombiana desde 1951 a 2017, con el fin de indagar sobre los propósitos de la Educación Media (grados 10° y 11°) en Colombia en dicho periodo.

La estrategia utilizada en la revisión de documentos recibe el nombre de *análisis de contenido*, el cual consiste en el conjunto de procedimientos interpretativos de productos comunicativos, con el objetivo de elaborar y procesar datos relevantes sobre las condiciones mismas en que se han producido aquellos textos, o sobre las condiciones que pueden darse para su empleo posterior (Piñuel, 2002).

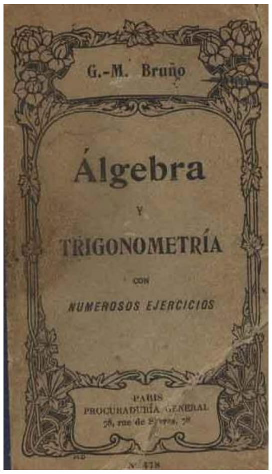
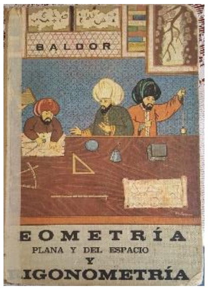
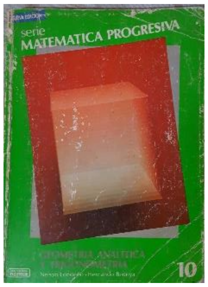
Así, "el análisis de contenido se convierte en una empresa de desocultación o revelación de la *expresión*, donde ante todo interesa indagar sobre lo escondido, lo latente, lo no aparente, lo potencial, lo inédito (lo no dicho) de todo mensaje" (Piñuel, 2002, p. 4). En ese sentido, lo que se revisa en los libros de texto no es únicamente lo que dice textualmente, sino lo que se pretende decir, en nuestro caso, indagar acerca de si las tareas propuestas por los autores se relacionan con propósitos de la Educación Escolar Media para cierto periodo de tiempo, de acuerdo con lo establecido en las normativas consultadas. Según Picado y Rico (2011), "el análisis de contenido de un texto estará centrado en subrayar y explicar determinados aspectos de las matemáticas escolares que, desde el punto de vista didáctico, son de interés para el investigador" (p. 12).

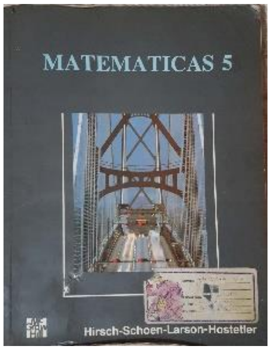
Para realizar el respectivo análisis de contenido, se seleccionaron diferentes libros de texto de acuerdo con los siguientes criterios:

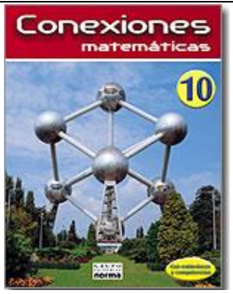
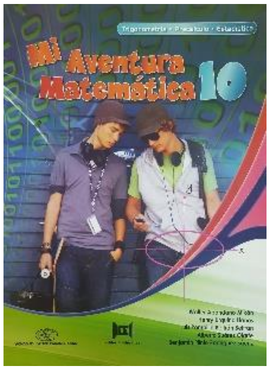
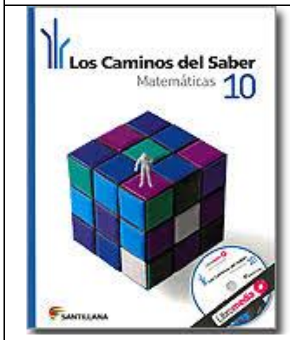
1. Dos libros de texto de Trigonometría que correspondan, en su fecha de publicación, a cada uno de los periodos categorizados de acuerdo con los propósitos de la Educación Media en Colombia. Sin embargo, para algunos periodos solo se considera un libro, debido a la dificultad para obtener los textos que cumplieran los criterios exigidos.
2. Libros de Trigonometría producidos por editoriales colombianas dirigidas a la educación escolar, lo cual se garantiza por la mención que hacen los autores de los textos en los prólogos de los libros, o porque hay conocimiento de que las editoriales son de uso exclusivo para la Educación Media del país.
3. Libros de Trigonometría de los cuales se tenga evidencia que fueron utilizados en Colombia para la educación escolar. Lo cual permite analizar libros de texto extranjeros pero que fueron consultados por los profesores para sus clases de matemáticas en 10º.

A continuación, se lista el conjunto de libros que fue seleccionado haciendo mención a los criterios que satisfacen.

Tabla 6. Libros seleccionados para el análisis.

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td>Libro: 1</td><td>Año: 1939</td><td>Autor: Bruño, G.</td><td>Etapa 1</td></tr>
<tr><td colspan="4">Nombre: Álgebra y Trigonometría</td></tr>
<tr><td colspan="4">Según Alzate, Gómez y Romero:
“Las ediciones de G-M. Bruño tuvieron una gran incidencia en la educación colombiana y en el desarrollo de una propuesta de lo que sería el texto escolar en el amplio periodo de tiempo comprendido entre 1910 y 1960, no solo en nuestro país sino también en otros países de América Latina como México, Ecuador, Bolivia, Perú y Argentina.” (2012, p. XVII)
De acuerdo con lo anterior, el libro de Bruño fue utilizado en el ámbito escolar colombiano en el periodo particular de tiempo de 1951 a 1962, el cual corresponde a la Época 1 de nuestras categorías.</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>Libro: 2</td><td>Año: 1967</td><td>Autor: Baldor, A.</td><td>Etapa 2</td></tr>
<tr><td colspan="4">Nombre: Geometría y Trigonometría</td></tr>
<tr><td colspan="4">Es el libro seleccionado para el análisis de la etapa 2. El libro es netamente geométrico e incluye la Trigonometría “como una necesidad para ajustarse a la mayoría de los programas oficiales de los países de Latinoamérica”, según es narrado en el prólogo del texto.</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>Libro: 3</td><td>Año: 1983</td><td>Autor: Takeuchi, Y., Wills, D. y Guarín, H.</td><td>Etapa 4</td></tr>
<tr><td colspan="4">Nombre: Hacia la matemática. Un enfoque estructurado</td></tr>
<tr><td colspan="4">Producido por la Editorial Temis e impreso en Bogotá. Los autores crearon los libros <i>Hacia la matemática. Un enfoque estructurado</i> para los grados décimos y undécimos del país.</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>Libro: 4</td><td>Año: 1988</td><td>Autor: Londoño, N. y Bedoya, H.</td><td>Etapa 5</td></tr>
<tr><td colspan="4">Nombre: Matemática progresiva</td></tr>
<tr><td colspan="4">Es un libro de la Editorial Norma, diseñado con el propósito de “facilitar a los estudiantes y profesores de los últimos años una visión general de la matemática en todo el ciclo básico y para que el alumno se</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">prepare para presentar las <i>Pruebas de Estado</i> y los <i>exámenes de admisión</i> a la Universidad (…)” (Takeuchi et al., 1988, prólogo).</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>Libro: 5</td><td>Año: 1989</td><td>Autor: Hirsch, C., Schoen, H., Larson, R. y Hostetler, R.</td><td>Etapa 5</td></tr>
<tr><td colspan="4">Nombre: Matemáticas 5</td></tr>
<tr><td colspan="4">El libro fue publicado por la editorial McGraw – Hill, y según los autores:
“se fundamenta no solamente en la idea de dar cumplimiento al programa del MEN. para décimo grado, sino, también en hacer que este programa tenga las especificaciones metodológicas pedagógicas y técnicas para garantizar un aprendizaje real, objetivo y con aplicaciones y que permita al estudiante la interiorización y manipulación de las fórmulas matemáticas y pueda escoger una carrera universitaria relacionada con la ciencia de las matemáticas; sin sentirse amenazado por ellas.” (Hirsch et al., Nota del editor).
Adicionalmente, tenemos certeza que el libro fue utilizado en Colombia durante la época, según cuentan algunas personas cercanas que recuerdan haber utilizado el libro cuando cursaron grado décimo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>Libro: 6</td><td>Año: 1995</td><td>Autor: Londoño y Guarín</td><td>Etapa 6</td></tr>
<tr><td colspan="4">Nombre: Dimensión matemática 10</td></tr>
<tr><td colspan="4">Es un libro producido por el grupo editorial Norma. En la presentación del texto se menciona que “los libros para el nivel de educación media de la serie <i>Dimensión Matemática</i> complementan el proceso de construcción cognitiva desarrollado en el nivel de educación básica (grados 6 a 9)”. Y complementa diciendo que,
“En la tabla de contenido de cada libro se da continuidad al tratamiento del currículo, proponiendo específicamente que la trigonometría se desarrolle en los dos grados, a saber: los fundamentos de las funciones circulares y algunas identidades, en grado décimo; los teoremas del seno y del coseno, así como sus aplicaciones, en undécimo.” (Londoño y Guarín, 1995, p. 3)</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Libro: 7</td><td>Año: 1999</td><td>Autor: Moreno y Restrepo</td><td>Etapa 6</td></tr>
<tr><td colspan="4">Nombre: Alfa 10</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">Es un libro producido por el grupo editorial Norma. Es una editorial bogotana, la cual se define a sí misma como una editorial que "(…) contribuye a mejorar la calidad del proceso educativo escolar en los niveles de preescolar, primaria y secundaria con propuestas pedagógicas efectivas fundamentadas en los lineamientos y estándares curriculares pertinentes para cada grado escolar en áreas básicas del conocimiento" (Norma, 2016).</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Libro: 8</td><td>Año: 2006</td><td>Autor: Moreno</td><td>Etapa 6</td></tr>
<tr><td colspan="4">Nombre: Conexiones matemáticas 10</td></tr>
<tr><td colspan="4">Al igual que los libros 7 y 8, el texto Conexiones matemáticas es una producción del grupo editorial Norma. Por ende, es un libro colombiano, utilizado en particular para la Educación Media Escolar del país en su respectivo periodo de tiempo de publicación.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Libro: 9</td><td>Año: 2010</td><td>Autor: Abondano et al.</td><td>Etapa 6</td></tr>
<tr><td colspan="4">Nombre: Mi aventura matemática 10</td></tr>
<tr><td colspan="4">El libro pertenece al Fondo Educativo Panamericano y su empresa distribuidora Editorial Educativa. En la carta de los autores se menciona que "este proyecto se ha construido sobre bases sólidas como los estándares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional y teniendo en cuenta los ejes conceptuales y los sistemas que la normatividad ha propuesto". Además, agregan: "nuestra propuesta va más allá de las exigencias que hace el Ministerio de Educación, al integrar pensamientos de la misma área, para lograr un mejor aprovechamiento de los espacios matemáticos de que dispone el aula" (Abondano et al., 2010, p. 3).</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Libro: 10</td><td>Año: 2013</td><td>Autor: Buitrago, Romero, Ortiz, Gamboa, Morales, Castaño y Jiménez.</td><td>Etapa 6</td></tr>
<tr><td colspan="4">Nombre: Los caminos del saber 10</td></tr>
<tr><td colspan="4">De la editorial Santilla, es un libro colombiano "que responde a las exigencias planteadas por el MEN y promueve el desarrollo de las competencias [de los estudiantes]" (Buitrago et al., p. 3).</td></tr>
</table>

Fuente: Propia.

En total son 11 libros seleccionados de acuerdo con los criterios establecidos previamente. A continuación, se presenta la rejilla que es la herramienta analítica con la cual realizamos el respectivo análisis.

3.3 HERRAMIENTA ANALÍTICA

Hacer análisis documental de los textos seleccionados requiere definir categorías de análisis que faciliten el reconocimiento y la identificación de la estructura matemática en estudio, las representaciones, los contextos y las situaciones que se proporcionan en las tareas propuestas por los autores en los textos escolares, atendiendo al objetivo de este trabajo de analizar una relación entre los textos y los propósitos de la educación.

Las categorías son construidas de acuerdo con propuestas realizadas por autores de diferentes investigaciones; también emergen en la medida en que se analizan los libros. A continuación, en la Tabla 7, se presenta la rejilla con la que se realizó el análisis, y la respectiva descripción de cada una de sus casillas.

Tabla 7. Rejilla diseñada para el análisis de textos

	Propósito de E.M.					**Caracterización del problema**					
	P1	**P2**	**…**	**P14**	**P15**	**Tipo de Referencia**			**Formato**		
						M.P.	**SR**	**S.V.R.**	**T**	**I**	**TA**
Tipo de problema clásico											
Tipo de problema analítico											
Tipo de problema moderno											

Fuente: Propia

De izquierda a derecha, se encuentra en la primera columna la categorización de los tipos de problemas encontrados en la historia de la Trigonometría: clásico, analítico y moderno. Con estas categorías se discriminan las tareas seleccionadas de los manuales de texto de acuerdo con el tipo de problema que corresponden. En la segunda columna, nominada cómo “Propósitos de E.M.”, se enuncian los 15 propósitos de la Educación Media en Colombia en el marco de referencia. De acuerdo con la época del libro de texto que se analiza, se coloca en la rejilla únicamente los propósitos que corresponden a la época en cuestión. En la tercera columna, nominada “Caracterización del problema”, se hace referencia a dos categorías: Tipo de referencia y el formato. El tipo de referencia hace alusión a si la situación que se analiza pertenece a las matemáticas puras (M.P.), a la semirrealidad (SR) o a situaciones de la vida real (S.V.R.), de acuerdo con las definiciones dadas por Skomovose (2000), las cuales fueron añadidas posteriormente a la construcción de las otras categorías. El formato se divide en tres columnas: texto (T), imagen (I) o tabla (TA). Esta información es útil para analizar la estructura escogida por los autores para presentar las tareas en cada uno de los libros.

3.4 SELECCIÓN DE LAS TAREAS

Para el análisis de las tareas propuestas en los libros de texto, únicamente se tuvo en cuenta aquellas tareas que fueron propuestas y resultas por el autor a modo de ejemplos. Inicialmente se identificaron en los libros de texto los capítulos que trataban sobre Trigonometría, y a continuación, se enumeraron secuencialmente las tareas resueltas por el autor. De cada capítulo se seleccionaron aleatoriamente cuatro tareas, las cuales se convirtieron en los datos analizados de cada capítulo. Adicionalmente, se registró información extra que dieran los autores en relación con la educación o con la historia de la Trigonometría en los prólogos o inicios de capítulos. La información que emergía de cada libro fue registrada en las respectivas rejillas de análisis. Se realizó una única rejilla para cada uno de los periodos de tiempo definidos.

Con los datos clasificados, se inició un proceso de descripción y comparación entre los diferentes textos escolares y las diferentes épocas, con el objetivo de validar o refutar la hipótesis de investigación planteada inicialmente, respecto a la relación entre lo que los autores proponen con los propósitos de la Educación Media escolar para cada periodo de tiempo. Los resultados de dichas comparaciones se presentan en el siguiente capítulo del documento.

4. ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO DE TRIGONOMETRÍA ESCOLAR

A continuación, se presenta el análisis realizado a los libros de textos escolares seleccionados utilizando las respectivas rejillas diseñadas.

4.1 ANÁLISIS DESCRIPTIVO DE LOS LIBROS DE TEXTO EN LAS ETAPAS DE LA EDUCACIÓN MEDIA

En esta sección del capítulo se presentan los análisis realizados a tareas resueltas por los autores de los capítulos correspondientes a Trigonometría de algunos libros de texto escolares que fueron usados en las etapas de la Educación Media en Colombia, identificadas en el periodo 1951-2017. Para recordarlas, se mencionan enseguida: *etapa 1* (1951-1962), *etapa 2* (1962-1974), *etapa 3* (1974-1978), *etapa 4* (1978-1984), *etapa 5* (1984-1994), *etapa 6* (1994-2017). En la *etapa* 6 se mencionan tres hitos, los cuales fueron puntos de referencia en la selección de los libros de texto. El primer hito fue la promulgación de la Ley 115, Ley General de Educación, en 1994; el segundo hito fue la publicación de la serie Lineamientos Curriculares en 1998 y el tercer hito fue la publicación de los Estándares Básicos de Competencias en 2006.

Como se mencionó en el capítulo 3 de Estrategia investigativa, se diseñó una herramienta analítica compuesta por las siguientes 3 unidades de análisis: 1) tipos de problema de trigonometría (clásico, analítico y moderno), 2) propósitos de la Educación Media en Colombia y 3) caracterización del problema (tipo de referencia[16] y formato).

Además, se presentan los contenidos de los capítulos de los libros de texto, relacionados con la Trigonometría, clasificados en Trigonometría clásica, analítica o moderna.

---

[16] El tipo de referencia corresponde a la clasificación de las tareas propuesta por Skovsmose (2000). Este autor señala que las tareas pueden ser de tres tipos: matemáticas puras (M.P.), semirrealidad (SR) y situaciones de la vida real (S.V.R.). El formato de la tarea corresponde a la manera en que esta se presenta: texto (T), imagen (I) o tabla (TA).

4.1.1 ETAPA 1 (1951-1962)

El libro de texto escrito por Bruño (1939), tiene cinco unidades relacionadas con la Trigonometría. En la primera unidad el autor no presenta alguna tarea resuelta, en las siguientes unidades las tareas resueltas son llamadas “aplicaciones” o “problemas”. Los resultados encontrados se muestran en las tablas siguientes.

Tabla 8. Contenidos clasificados en tipo de Trigonometría del libro *Algebra y Trigonometría (Bruño, 1939)*

CONTENIDOS		**Tipo de Trigonometría**	**TAREAS RESUELTAS**	**TAREAS SELECCIONADAS**
Líneas trigonométricas	Variaciones de las líneas trigonométricas. Líneas trigonométricas de dos arcos suplementarios.	Clásica	Ninguna	Ninguna
Formulas Trigonométricas	Relaciones entre las líneas trigonométricas. Adición y sustracción de arcos. Multiplicación y división de arcos.	Analítica	1 al 6	2, 3, 5, 6
Tablas Trigonométricas de Logaritmos	Construcción de las tablas trigonométricas. Uso de las tablas. Transformaciones logarítmicas	Analítica	1 al 15	4, 7, 10, 12
Resolución de Triángulos	Relación entre los elementos de un triángulo. Resolución de los triángulos rectángulos. Resolución de triángulos cualesquiera.	Clásica	1 al 12	1, 5, 8, 11
Aplicación de la Trigonometría a la Agrimensura	Aplicación de la Trigonometría a la Agrimensura.	Clásica	1 al 8	2, 4, 5, 8

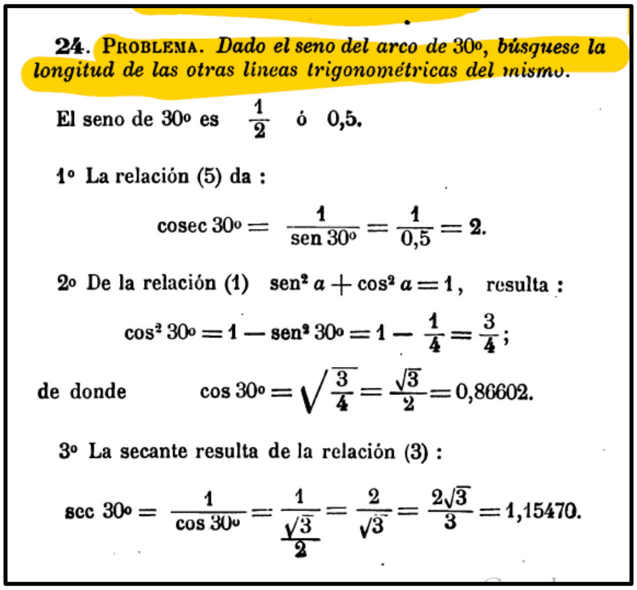
Fuente: Propia

Tabla 9. Rejilla de análisis del libro *Álgebra y Trigonometría (Bruño, 1939)*

	Propósito de E.M.			**Caracterización del problema**					
	P1	**P6**	**P8**	**Tipo de Referencia**			**Formato**		
				M.P.	**SR**	**S.V.R.**	**T**	**I**	**TA**
Tipo de problema clásico	0	0	**Profundizar en un campo del conocimiento** 16	12	**Áreas** 1 **Longitudes** 3	0	12	7	0
Tipo de problema analítico	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tipo de problema moderno	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Fuente: Propia.

El libro de texto presenta 41 tareas resueltas por el autor. Al analizar 16 de ellas se encontró que todas correspondían a “Tipos de problemas clásicos”, aunque algunas se encuentren dentro de un contenido clasificado como Trigonometría analítica, como por ejemplo la tarea L1-U2-T2[17]. Las tareas analizadas tienen el fin de encontrar el valor del seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de ángulos, por sustitución numérica, usando tablas logarítmicas e identidades trigonométricas. Además, las tareas que el autor clasifica como “problemas” tienen el fin de encontrar alturas, longitudes y distancias inaccesibles.



24. **PROBLEMA.** ***Dado el seno del arco de 30°, búsquese la longitud de las otras líneas trigonométricas del mismo.***

El seno de 30° es $\frac{1}{2}$ ó 0,5.

1° La relación (5) da :

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{1}{0{,}5} = 2.$$

2° De la relación (1) $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$, **resulta :**

$$\cos^2 30^\circ = 1 - \operatorname{sen}^2 30^\circ = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4};$$

de donde $$\cos 30^\circ = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}86602.$$

3° La secante resulta de la relación (3) :

$$\sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1{,}15470.$$

Ilustración 14. Tarea L1-U2-T2. Fuente: (*Bruño, 1939*)

Ahora bien, las tareas resueltas analizadas del libro de texto Bruño (1939), responden únicamente a P8 y dentro de este propósito, se enfocan en la profundización del conocimiento de los contenidos de la Trigonometría. No se evidencia que las tareas resueltas por el autor incluyan aspectos relacionados con el desarrollo personal, social y cultural de los estudiantes, o que tengan la intención de promover el aprendizaje de la cultura general del mundo. Tampoco es posible reconocer que dichas tareas se enfoquen en el desarrollo de matemáticas universitarias o que ayuden a preparar a los estudiantes para un campo laboral.

La mayoría de tareas analizadas, el 75% de ellas, se clasificaron tal como señala Skovsmose (2000) en el contexto de “matemáticas puras” y en el paradigma del ejercicio.

---

[17] Ver Ilustración 14.

Las tareas presentadas en la unidad “Aplicación de la Trigonometría a la Agrimensura”, son situaciones creadas por el autor relacionadas con alturas de edificios, distancias entre objetos y áreas de terrenos que hacen uso de constructos matemáticos como razones trigonométricas, teorema del seno y del coseno. Por tanto, se han clasificado en el contexto de semirrealidad.

Las tareas que tienen el propósito de realizar sustituciones numéricas, son presentadas usando texto y en ocasiones con la imagen de un triángulo que representa la situación planteada. Los “problemas” que presenta tienen texto e imagen. Sin embargo, ninguna tarea usa la representación tabular.

4.1.2 ETAPA 2 (1962-1974)

Se seleccionaron al azar 22 tareas; los respectivos resultados se muestran en las siguientes tablas.

Geometría y Trigonometría

Tabla 10. Contenidos clasificados en tipo de Trigonometría del libro *Geometría y Trigonometría (Baldor, 1967)*

Contenidos		Tipo de trigonometría	Tareas resueltas	Tareas seleccionadas
Trigonometría	Funciones trigonométricas. Valores de las funciones trigonométricas.	Clásica	1 al 3	1, 2, 3
Funciones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios, etc.	Círculo trigonométrico y líneas trigonométricas.	Clásica	1 al 4	1, 2, 3, 4
Relaciones entre las funciones trigonométricas, identidades y ecuaciones trigonométricas	Relaciones entre funciones trigonométricas. Identidades. Ecuaciones trigonométricas.	Analítica	1 al 3	1, 2, 3
Funciones trigonométricas de la suma y de la diferencia de dos ángulos	Suma y diferencia de ángulos.	Analítica	1	1
Funciones trigonométricas del ángulo duplo	Ángulos dobles.	Analítica	0	0
Resolución de triángulos	Ley del seno, del coseno y de la tangente.	Clásica	1 al 5	1, 2, 4, 5
Logaritmos. Logaritmos de las funciones trigonométricas	Logaritmos. Propiedades de logaritmos. Antilogaritmos. Tabla de logaritmos. Interpolación.	Analítico	1 al 18	1, 2, 7, 17
Aplicaciones de los logaritmos	Logaritmos para la resolución de triángulos.	Clásico	1 al 3	1, 2, 3

Fuente: Propia.

Tabla 11. Rejilla de análisis del libro *Geometría y Trigonometría (Baldor, 1967)*

	Propósito de E.M.								Caracterización del problema					
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	Tipo de Referencia			Formato		
									M.P.	SR	S.V.R.	T	I	TA
Tipo de problema clásico	0	0	0	0	0	0	0	Profundización en un campo	14	0	0	14	3	0
								14						

Tipo de problema analítico	0	0	0	0	0	0	0	Profundización en un campo 5	5	0	0	5	0	0
Tipo de problema moderno	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			

Fuente: Propia

La importancia de la Trigonometría, para Baldor, reside en la necesidad de su aplicación en la navegación, la Agrimensura y la Astronomía. Dice que "en la actualidad, lo más importante de la Trigonometría es el estudio de las propiedades de las funciones trigonométricas y por esto su estudio, en nivel superior, ha pasado a formar parte de la Teoría de funciones" (Baldor, 1967, Prólogo). Para el autor del libro de texto, la Trigonometría es una herramienta matemática que permite profundizar en otras matemáticas; considera la Trigonometría como una consecuencia de la Geometría, pero que no es como tal una rama de las matemáticas.

Las tareas analizadas permiten concluir que aproximadamente el 64% de ellas corresponden a tipos de problemas de la Trigonometría clásica, en donde la medición de ángulos y lados de triángulos son los propósitos principales de dichas tareas. Aproximadamente el 23% de las tareas analizadas corresponden a tipos de problemas de la Trigonometría analítica. Se destaca la solución de ecuaciones trigonométricas y de la demostración de identidades. El restante 13% de las tareas analizadas no corresponden con tipos de problemas propios de la Trigonometría. Son situaciones que pretenden que el estudiante conozca y se familiarice con el concepto de logaritmación.

La intención del autor, de acuerdo con las tareas analizadas, consiste en que el estudiante profundice en un campo del conocimiento matemático. En particular, el autor propende porque las tareas propuestas inicien con un nivel de complejidad mínimo, e ir aumentándolo a medida que se va explicando nuevos conceptos trigonométricos. El objetivo final del libro de texto consiste en aportar herramientas al estudiante para que pueda resolver cualquier problema de la Trigonometría, ya sea de medidas en un triángulo, o de demostración de identidades que permitan solucionar ecuaciones trigonométricas.

Las matemáticas puras son el contexto predilecto del autor para abordar las diferentes temáticas de la Trigonometría. De las tareas analizadas, no se encontró alguna que no perteneciera a dicho contexto. Como se menciona en el prólogo del libro de Baldor, el objetivo del texto consiste en presentar las *matemáticas modernas* (el uso de la Trigonometría) por medio de las *matemáticas antiguas* (la geometría euclidiana). Por esta razón, es coherente que las situaciones que se proponen en el libro de texto estén fundamentadas en contextos geométricos y algebraicos.

De las 22 tareas analizadas, solo 3 hicieron uso de una imagen como elemento auxiliar para presentar la solución de los problemas. La tendencia del autor fue utilizar el lenguaje algebraico para presentar y solucionar las respectivas situaciones planteadas.

4.1.3 ETAPA 3 (1974-1978)

Esta etapa consta de 4 años, por lo que no fue posible obtener un libro de texto que fuera publicado en este periodo de tiempo. Encontramos que existen publicaciones de ediciones posteriores de los libros que se referenciaron en las épocas anteriores, por lo que consideramos que los contenidos trabajados durante esta sección son similares a los analizados en los libros de texto de las Etapas 1 y 2.

4.1.4 ETAPA 4 (1978-1984)

El texto tiene un total de 52 ejemplos de ejercicios resueltos, y para el análisis seleccionamos al azar 19 de ellos. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Tabla 12. Contenidos clasificados en tipo de Trigonometría del libro *Hacia la Matemática. Un enfoque estructurado. Grado 10. (1983)*

Contenidos		**Tipo de trigonometría**	**Tareas resueltas**	**Tareas seleccionadas**
Puntos trigonométricos	Funciones periódicas. Función coordenada. Puntos trigonométricos.	Clásica	0	0
Funciones seno y coseno	Función seno y coseno. Rango de seno y coseno. Periodicidad de seno y coseno. Propiedades de seno y coseno.	Clásica	1	1
Tangente, cotangente, secante, cosecante	Función tangente. Propiedades de la función tangente. Funciones cotangente, secante y cosecante. Tablas de funciones circulares. Valores de las funciones circulares para cualquier *r*.	Clásica	1 al 7	2, 4, 5, 7
Funciones trigonométricas	Funciones trigonométricas. Medida de ángulos. Unidades de medida de ángulos. Medida en radianes. Longitud de un arco. Ángulo en posición normal. Razones trigonométricas. Las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Relación entre funciones circulares y	Clásica	1 al 6	2, 3, 4, 5

	trigonométricas.			
Gráficos de las funciones circulares	Gráficos de las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.	Analítica	0	0
Funciones circulares inversas	Inversas de las funciones seno, coseno y tangente.	Analítica	1 al 2	1, 2
Identidades y ecuaciones	Demostración de identidades. Identidades para ángulos dobles y medios. Ecuaciones.	Analítica	1 al 26	6, 9, 11, 14
Resolución de triángulos	Ángulo de elevación. Teorema del seno y del coseno.	Clásica	1 al 10	1, 2, 3, 6

Fuente: Propia.

Tabla 13. Rejilla de análisis del libro

	Propósitos de la educación						**Caracterización del problema**					
	P3	**P4**	**P5**	**P9**	**P10**	**P11**	**Tipo de referencia**			**Formato**		
							M.P.	**SR**	**S.V.R.**	**T**	**I**	**TA**
Clásico	0	0	0	0	0	0	8	**Física mecánica** 3	0	11	5	0
Analítico	0	0	0	0	0	0	8	0	0	8	0	0
Moderno	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Fuente: Propia

En la introducción al capítulo 8, que está denominado como “Resolución de triángulos”, los autores hacen mención al origen de la Trigonometría y a la definición que de ella consideran.

> A principios del siglo XVIII se consideraba que el objetivo fundamental de la trigonometría era el de “resolver triángulos”; es decir, dados algunos elementos de un triángulo, determinar los demás.
>
> La aplicación fundamental de esta actividad era la de resolver problemas de navegación, de astronomía y de topografía.
>
> Actualmente, la trigonometría es analítica, no una simple técnica para resolver triángulos.
>
> Esto no significa que no tenga aplicaciones, pues es de amplio uso en la teoría de la electricidad, en el estudio del calor, en mecánica analítica, etc. (Takeuchi, Wills, Guarín, p. 113)

Causa interés la concepción que tienen los autores en relación con la Trigonometría como una técnica utilizada para resolver triángulos y solucionar problemas de la vida real. Aunque reconocen la Trigonometría como una herramienta para resolver problemas de navegación, Astronomía, Topografía, electricidad, calor, Mecánica Analítica, etc., en el transcurso del libro solo aparecen situaciones en el contexto matemático. Pese a que consideran que la Trigonometría no es una simple técnica para resolver triángulos, a lo largo del texto enseñan al estudiante las diferentes técnicas trigonométricas que existen, es decir, hay una contradicción de lo que se dice en relación con las tareas propuestas.

De las tareas analizadas, el 58% de ellas corresponden a tareas que clasificamos como problemas de la Trigonometría clásica, mientras el restante 42% corresponde a tipos de problema de la Trigonometría analítica. Se percibe paridad entre los ejemplos que utilizan la Trigonometría para hallar medidas en un triángulo, con los ejemplos que promueven la manipulación algebraica de identidades y ecuaciones trigonométricas para demostrar afirmaciones.

A medida que se avanza en la lectura del texto, el nivel de dificultad de los ejemplos planteados aumenta, y obligan a utilizar conceptos aprendidos previamente en capítulos anteriores. Incluso, los autores invitan constantemente a los estudiantes a que demuestren diferentes afirmaciones que van surgiendo a lo largo del libro. De las tareas propuestas en el libro, no identificamos que se pretenda alcanzar alguno de los propósitos de la educación para ese periodo de tiempo. Por el contrario, encontramos que el objetivo del libro es alcanzar el P8, es decir, con las tareas que proponen los autores se pretende preparar al estudiante para la profundización en un campo del conocimiento, como lo es la Trigonometría, para estudios universitarios posteriores.

Constantemente se invita a los estudiantes a que demuestren afirmaciones que pertenecen netamente a un contexto de matemáticas puras. Tan solo se encontraron 3 ejemplos que pertenecían a un contexto de semirrealidad de la Física Mecánica, como por ejemplo los problemas L8-U4-T3, L8-U8-T3 y L8-U8-T6 que hacen referencia a la distancia recorrida por una partícula, la altura de un edificio y a la distancia de un puente respectivamente.

De los 19 problemas, en 5 de ellos los autores utilizan imágenes como recurso didáctico para apoyar la explicación de las respectivas situaciones.

4.1.5 ETAPA 5 (1984-1994)

Se seleccionaron aleatoriamente 43 ejemplos resueltos propuestos en los libros de texto *Matemáticas 5* (Mc Graw Hill, 1989) y *Matemática progresiva* (Londoño y Bedoya, 1988), los cuales corresponden al periodo de tiempo comprendido entre 1984 a 1994, denominado etapa 5. A continuación se presentan los resultados obtenidos de la clasificación de las tareas de acuerdo a las categorías de análisis propuestas.

Matemática progresiva

Tabla 14. Contenidos clasificados en tipo de Trigonometría del libro *Matemática progresiva (1988)*

Contenidos		**Tipo de trigonometría**	**Tareas resueltas**	**Tareas seleccionadas**
Funciones trigonométricas	Ángulos y medidas de ángulos.	Clásica	1 al 82	4, 16, 26, 30, 36, 40, 42, 51, 59, 62, 72, 73, 75, 78, 81
	Funciones de trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.	Clásica		
	Valor de las funciones trigonométricas para ángulos de 30º, 60º y 45º.	Clásica		
	Cálculo de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo.	Clásica		
	Resolución de triángulos rectángulos.	Clásica		
	Problemas de aplicación de las funciones trigonométricas en triángulos rectángulos.	Clásica		
	Funciones trigonométricas de cualquier ángulo.	Clásica		
	Teorema del seno. Teorema del coseno. Aplicaciones.	Clásica		
	Relaciones entre las funciones trigonométricas.	Clásica		
	Identidades trigonométricas.	Analítica		
	Ecuaciones trigonométricas.	Analítica		
	Fórmulas de adición y reducción de ángulos.	Analítica		
	Gráficas de las funciones trigonométricas.	Analítica		
	Funciones trigonométricas inversas.	Analítica		

Fuente: Propia

Matemáticas 5

Tabla 15. Contenidos clasificados en tipo de Trigonometría del libro *Matemáticas 5 ()*

Contenidos		**Tipo de trigonometría**	**Tareas resueltas**	**Tareas seleccionadas**
Funciones trigonométricas	Funciones seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente. Radianes.	Clásica	1 al 33	4, 6, 16, 23
Identidades trigonométricas	Suma y diferencias de ángulos. Ángulo doble y medio. Producto y suma de ángulos.	Analítica	1 al 30	2, 7, 22, 24
Las funciones circulares y sus gráficas	Gráficas de las funciones trigonométricas. Amplitud y periodo.	Analítica	1 al 31	6, 10, 17, 23
Inversos de las funciones trigonométricas, funciones circulares y trigonométricas	Inversas de las funciones trigonométricas. Ecuaciones trigonométricas.	Analítica	1 al 17	3, 1, 7, 6
Triángulos y trigonometría	Resolución de triángulos rectángulos. Ley de senos y cosenos. Aplicaciones en fotografía.	Clásica	1 al 20	6, 8, 13, 16
Vectores y trigonometría	Aplicaciones en problemas de desplazamiento, velocidad, fuerza y trabajo.	Clásica	1 al 15	2, 4, 13, 15
Números complejos y trigonometría	Forma trigonométrica de los números complejos. Teorema de Moivre.	Analítica	1 al 21	2, 11, 9, 12

Fuente: Propia

Tabla 16. Rejilla de análisis de los libros Matemática Progresiva y Matemáticas 5

	Propósito de E.M.					**Caracterización del problema**					
	P1	**P3**	**P8**	**P9**	**P10**	**Tipo de Referencia**			**Formato**		
						M.P.	**SR**	**S.V.R.**	**T**	**I**	**TA**
Tipo de problema clásico	0	0	**Profundizar campo conocimiento** 22 **Campo de trabajo** 1	0	0	18	**Física Mecánica** 5 **Topografía** 1	0	25	16	1
Tipo de problema analítico	0	0	**Profundizar campo conocimiento** 20	0	0	18	**Física mecánica** 1	0	18	5	2
Tipo de problema moderno	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Observaciones											
6 problemas que no tienen relación con trigonometría. 3 problemas que se resolvieron haciendo uso de una calculadora.											

Fuente: Propia

En el libro de *Matemática progresiva* se hace referencia a la Trigonometría como una parte de la Geometría que se ocupa de formular relaciones entre las medidas de los ángulos y lados de un triángulo. Para Londoño y Bedoya, la Trigonometría

> (…) surgió para resolver inicialmente problemas de astronomía por parte de los griegos (Hiparco, 180-125 a.C.). Posteriormente, el hombre la ha empleado para calcular áreas, distancias, trayectorias y en el estudio de la mecánica, etc., con base en la resolución de triángulos. (1988, p. 1)

De manera similar, en el libro *Matemáticas 5*, los autores escriben en el prefacio que la Trigonometría es “la disciplina que estudia y aplica clases específicas de funciones”. Complementan diciendo que:

> La trigonometría surgió hace 3000 años, como medio para resolver diversos problemas de navegación y agricultura. Las funciones trigonométricas se utilizan en la actualidad para describir y analizar fenómenos periódicos como mareas, ondas sonoras y voltaje eléctrico. El concepto básico para poder aplicar la trigonometría en casos como los anteriores, es el sistema de coordenadas dentro de un plano. El

> sistema de coordenadas rectangulares es una herramienta importante para especificar posiciones y determinar distancias. (1989, p. 1)

Los autores coinciden en que la Trigonometría surge como el medio para resolver problemas de la vida real. Sin embargo, pese a que se mencionan diferentes situaciones en que interceden herramientas de la Trigonometría, en el transcurso del libro son muy pocos los ejemplos que retoman dichos contextos.

En relación con los tipos de problema de la Trigonometría que se abordan en los libros de texto se puede determinar que existe equilibrio entre los problemas clásicos y los problemas analíticos. De las 43 situaciones, 23 de ellas corresponden a tipos de problemas clásicos, mientras que las otras 20 situaciones hacen referencia a tipos de problemas analíticos.

Los ejemplos seleccionados de los libros de texto, permiten observar que los autores promueven situaciones en las que los estudiantes profundizan en diferentes aspectos propios de la Trigonometría. Los resultados son contundentes en mostrar que los ejemplos de los libros de texto analizados se relacionan directamente con la primera parte del propósito 8: *Preparar al estudiante para la profundización en un campo del conocimiento*.

Se encontró un único ejemplo que apuntaba a la formación del estudiante en un campo de trabajo. La situación, encontrada en L10-U1-T23, hace referencia al trabajo que realiza un topógrafo, en relación con hacer el levantamiento del plano para la construcción de un puente que cruce un río, haciendo uso de un instrumento denominado *teodolito*.

De los 43 ejemplo analizados, 36 de ellos corresponden a situaciones en contextos netamente matemáticos. Los otros 7 ejemplos proponen las situaciones en un contexto de semirrealidad, en donde se utilizan contextos de la Física Mecánica tales como el concepto de movimiento, fuerza, torque, etc. Pese a que en los prefacios de los libros se exponía la Trigonometría como el medio para solucionar problemas de la vida real, el desarrollo de los textos enfatiza en el estudio de situaciones que atienden netamente cuestiones de las matemáticas puras.

El uso de las imágenes para apoyar los ejemplos propuestos es un factor importante en la forma en que se presentan las situaciones. De los 43 ejemplos, 21 de ellos utilizaron las imágenes como un recurso visual para solucionar la situación propuesta.

Los autores de los textos concuerdan en implementar el uso de las calculadoras como una herramienta importante para determinar cálculos de diferentes medidas de ángulos. Realizan tutoriales para explicar cómo utilizar los botones de la calculadora para obtener los datos requeridos. Encontramos 3 tareas que se resuelven haciendo uso del dispositivo electrónico.

Sin embargo, no todos los problemas que aparecen dentro de los capítulos de Trigonometría se pueden considerar como conceptos propios de la materia. Por ejemplo, se encontraron problemas que consistían en determinar si una ecuación era una función, en hallar rangos y dominios de funciones lineales, en determinar la inversa de una función lineal y verificar si era inyectiva, en realizar operaciones con vectores o en determinar las soluciones de una ecuación cuadrática. Estos contenidos fueron utilizados por los autores como una estrategia didáctica para abordar conceptos de la Trigonometría a partir de conceptos que se han estudiado en cursos anteriores.

4.1.6 ETAPA 6 – PRIMER HITO (1994-1998)

Después de la nueva carta constitucional de 1991, se promulgó la Ley General de Educación en 1994. Cuatro años más tarde el Ministerio de Educación Nacional publicó la serie Lineamientos Curriculares (MEN, 1998).

Para el análisis en este periodo, se tomó el libro *Dimensión Matemática 10* del Grupo Editorial Norma. Los capítulos 3 y 4 corresponden a Trigonometría.

Dimensión Matemática 10 (Londoño y Guarín, 1995)

Tabla 17. Contenidos clasificados en tipo de Trigonometría del libro *Dimensión Matemática 10 (Londoño y Guarín, 1995)*

CONTENIDOS		**Tipo de Trigonometría**	**TAREAS RESUELTAS**	**TAREAS SELECCIONADAS**
Funciones Circulares	Función punto trigonométrico. Funciones circulares. Propiedades de las funciones seno y coseno. Curvas representativas de las funciones circulares seno y coseno. Otras funciones circulares. Funciones cotangente, secante y	Clásica	1 al 8	2, 4, 5, 8

	cosecante. Funciones circulares inversas.			
Trigonometría Plana	Funciones trigonométricas. Identidades trigonométricas. Identidades fundamentales para la suma y la diferencia. Identidades para ángulos de medidas 2α y $\frac{\alpha}{2}$. Identidades que transforman en producto la suma y la diferencia de senos y cosenos y viceversa. Ecuaciones trigonométricas.	Analítica	1 al 24	2, 4, 13, 23

Fuente: Propia

Tabla 18. Rejilla de análisis del libro *Dimensión Matemática 10 (Londoño y Guarín, 1995)*

	Propósito de E.M.									Caracterización de la tarea					
	P3	P5	P8	P9	P10	P12	P13	P14	P15	Tipo de Referencia			Formato		
										M.P.	SR	S.V.R.	T	I	TA
Tipo de problema clásico	0	0	Profundizar en un campo del conocimiento 4	0	0	0	0	0	0	8	0	0	8	3	0
Tipo de problema analítico	0	0	Profundizar en un campo del conocimiento 4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tipo de problema moderno	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Observaciones															

Fuente: Propia

El libro de texto que presenta Londoño y Guarín (1995), tiene siete capítulos de los cuales dos de ellos corresponden a Trigonometría (capítulos 3 y 4). En el primer capítulo de Trigonometría, los autores señalan la importancia de ella para representar fenómenos periódicos

> En física son muchos los fenómenos periódicos que se presentan, como por ejemplo los movimientos vibratorios, las ondas sonoras, las ondas hertzianas (…). Estos son fenómenos periódicos que se expresan por medio de funciones circulares o combinación de ellas. Londoño y Guarín (1995, p.82).

Más adelante mencionan la utilidad de la Trigonometría en la medida topográfica de terrenos, la navegación aérea y marítima. Además de lo anterior, los autores señalan que “la Trigonometría está dedicada, ante todo, a medidas y relaciones numéricas que existen entre los lados y ángulos de un triángulo y su aplicación al cálculo de diversos elementos” (p. 118).

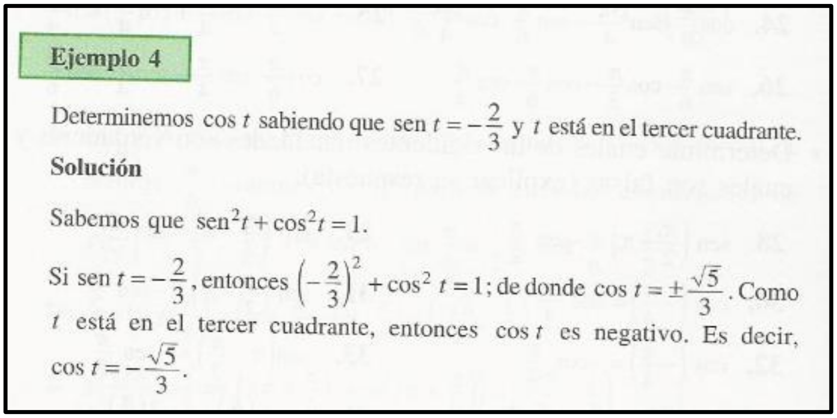
Otro aspecto a señalar, es que el libro presenta 32 tareas resueltas por el autor. Al analizar ocho de estas, se encontró que están distribuidas en tipos de problemas clásicos y analíticos de manera equitativa. Las tareas analizadas tienen como intenciones representar radianes en el plano cartesiano, encontrar razones trigonométricas a partir de otras dadas, hallar funciones inversas y demostrar identidades.

En relación con los propósitos de este periodo, 1994-1998, los cuales fueron establecidos de forma explícita en la Ley General de Educación, se ubicaron dentro de los propósitos generales P3, P5, P8, P9, P10, P12, P13, P14 y P15. Las tareas analizadas se clasificaron únicamente en el propósito general P8 y dentro de este, en la profundización de un campo del conocimiento. No se evidencia que el propósito general P15: “Analizar y profundizar en el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de problemas de la ciencia, tecnología y la vida cotidiana”, sea promovido a partir de las tareas resueltas por los autores, ya que no se usan situaciones de la ciencia, la tecnología y la vida cotidiana.

En cuanto a la caracterización de las tareas, se estableció que todas se encuentran enmarcadas en el tipo de referencia matemática puras. Aún, cuando los autores señalan al inicio de cada capítulo la importancia de la Trigonometría en contextos de la física y la navegación, ninguna de las tareas resueltas presenta escenarios diferentes a la resolución de ejercicios netamente matemáticos. Un ejemplo de lo mencionado anteriormente es la tarea L17-U3-T4[18].

---

[18] Las tareas analizadas del libro Dimensión matemática 10 se pueden observar en los anexos.



Ejemplo 4

Determinemos $\cos t$ sabiendo que $\operatorname{sen} t = -\frac{2}{3}$ y t está en el tercer cuadrante.

Solución

Sabemos que $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$.

Si $\operatorname{sen} t = -\frac{2}{3}$, entonces $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 t = 1$; de donde $\cos t = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$. Como t está en el tercer cuadrante, entonces $\cos t$ es negativo. Es decir, $\cos t = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ilustración 15. Tarea L17-U3-T4. Fuente: (*Londoño y Guarín, 1995*)

El otro aspecto concerniente a la caracterización de las tareas es el formato de presentación. De este se evidenció que en algunos casos la tarea se presenta únicamente usando texto y en otros casos el texto viene acompañado de imagen, no hay uso de tablas para la presentación de la tarea.

4.1.7 ETAPA 6 – SEGUNDO HITO (1998-2006)

La serie Lineamientos Curriculares (1998) marcó un hecho importante para el currículo escolar colombiano. Aunque la Ley General de Educación promovió el diseño del currículo de acuerdo a las necesidades de la población, atendiendo a la diversidad, no fue sino los Lineamientos Curriculares de Matemáticas los referentes que divulgó el MEN para la construcción de los currículos en las escuelas.

Para el análisis en este periodo se tomó los libros *Alfa 10* (Moreno y Restrepo, 1999) y *Conexiones matemáticas 10* (Moreno, 2006).

Tabla 19. Contenidos clasificados en tipo de Trigonometría del libro *Alfa 10 (Moreno y Restrepo, 1999)*

CONTENIDOS		Tipo de Trigonometría	TAREAS RESUELTAS	TAREAS SELECCIONADAS
Razones trigonométricas	Ángulos y sistemas de medición. Triángulos rectángulos. Razones trigonométricas. Identidades fundamentales.	Clásica	1 al 19	2, 8, 10, 15
Funciones trigonométricas	Funciones circulares. Ángulos de referencia. Gráficas de las funciones seno y coseno. Gráficas de las funciones tan, cot, sec, cosec.	Analítica	1 al 12	3, 6, 8,11
Funciones trigonométricas inversas	Funciones inversas. Inversa del seno. Inversa del coseno. Inversa de tangente.	Analítica	1 al 21	4, 7, 10, 16
Identidades y ecuaciones	Identidades. Funciones para adición y	Analítica	1 al 18	1, 5, 8, 16

	multiplicación de ángulos. Ecuaciones trigonométricas. Identidades para adiciones y multiplicaciones. Transformaciones e identidades armónicas. Ley de cosenos y de senos.			

Fuente: Propia

Tabla 20. Contenidos clasificados en tipo de Trigonometría del libro *Conexiones matemáticas 10 (Moreno, 2006)*

CONTENIDOS		**Tipo de Trigonometría**	**TAREAS RESUELTAS**	**TAREAS SELECCIONADAS**
Razones trigonométricas	Ángulos y sistemas de medición. Distancia entre puntos. Razones trigonométricas. Identidades trigonométricas fundamentales.	Clásica	1 al 8	1, 3, 5, 8
Funciones trigonométricas	Funciones circulares. Ángulos de referencia. Gráficas de las funciones seno y coseno. Gráficas de las funciones tan, cot, sec, cosec.	Analítica	1 al 2	1, 2
Funciones trigonométricas inversas	Concepto de función inversa. Inversa del seno. Inversa del coseno. Inversa de tangente.	Analítica	1 al 4	1, 2, 3, 4
Identidades y ecuaciones	Identidades. Funciones para adición y multiplicación de ángulos. Ecuaciones trigonométricas. Identidades para adiciones y multiplicaciones. Transformaciones. Ley de cosenos y de senos.	Analítica	1 al 4	1, 2, 3, 4

Fuente: Propia

Tabla 21. Rejilla de análisis de los libros *Alfa 10 (Moreno y Restrepo, 1999)* y *Conexiones matemáticas 10 (Moreno, 2006)*

<table>
<tr><th rowspan="3"></th><th colspan="8">Propósito de E.M.</th><th colspan="7">Caracterización de la tarea</th></tr>
<tr><th rowspan="2">P3</th><th rowspan="2">P5</th><th rowspan="2">P8</th><th rowspan="2">P9</th><th rowspan="2">P10</th><th rowspan="2">P12</th><th rowspan="2">P13</th><th rowspan="2">P14</th><th rowspan="2">P15</th><th colspan="3">Tipo de Referencia</th><th colspan="3">Formato</th></tr>
<tr><th>M.P.</th><th>SR</th><th>S.V.R.</th><th>T</th><th>I</th><th>TA</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Tipo de problema clásico</td><td rowspan="8">0</td><td rowspan="8">0</td><td rowspan="2">Profundizar en un campo del conocimiento</td><td rowspan="8">0</td><td rowspan="8">0</td><td rowspan="8">0</td><td rowspan="8">0</td><td rowspan="8">0</td><td rowspan="7">Profundizar en el razonamiento lógico para solucionar situaciones de la vida cotidiana o de otras ciencias</td><td rowspan="8">5</td><td>Coordenadas geográficas</td><td rowspan="8">0</td><td rowspan="8">10</td><td rowspan="8">10</td><td rowspan="8">0</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="6">10</td><td>Física Mecánica</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>Distancias/ Elevaciones</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>Navegación</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Tipo de problema analítico</td><td>0</td><td>0</td><td>Profundizar en un campo del conocimiento</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>Profundizar en el razonamiento lógico para</td><td>16</td><td>Física Mecánica</td><td>0</td><td>17</td><td>2</td><td>0</td></tr>
</table>

			17						solucionar situaciones de la vida cotidiana o de otras ciencias		1				
									1						
Tipo de problema moderno	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Observaciones La tarea 8 de la unidad 2 del libro 13 es una tarea de sustitución numérica y operaciones entre números reales La tarea 4 de la unidad 3 del libro 13 es una tarea que corresponde al concepto de función La tarea 7 de la unidad 3 del libro 13 es una tarea correspondiente al uso de la calculadora La tarea 3 de la unidad 1 del libro 14 es una tarea que corresponde al concepto de distancia entre dos puntos en el plano															

Fuente: Propia

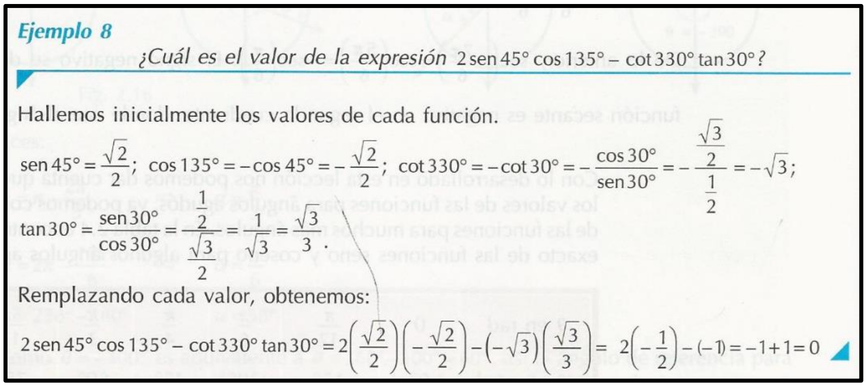
El libro de texto *Alfa 10* (Moreno y Restrepo, 1999) tiene diez capítulos, de los cuales los primeros cuatro corresponden a Trigonometría. El primer capítulo se cataloga dentro de la Trigonometría clásica, debido a que la mayoría de contenidos y tareas resueltas están relacionadas con la medición. Los tres capítulos restantes corresponden al estudio de las funciones trigonométricas, su representación gráfica en el plano, y las identidades, que se enmarcan dentro de la Trigonometría analítica.

Este libro presenta al inicio del primer capítulo una corta sección, en la cual se señala cómo surgió la Trigonometría. Un pequeño recuento histórico, indica que la Astronomía dio nacimiento a la Trigonometría. También se reconoce la importancia del trabajo de los egipcios, babilonios, de Hiparco y Menelao, en el desarrollo de la Trigonometría. Otro de los aspectos que se señala en la primera sección del libro, es el uso de la Trigonometría. Según los autores, esta es útil en la resolución de triángulos, en el cálculo de longitudes, en la navegación, en la termodinámica, electricidad y mecánica. Moreno y Restrepo (1999) reconocen que inicialmente la Trigonometría se usó en problemas de Astronomía y navegación, y posteriormente, ha sido una herramienta en el desarrollo de otras ciencias.

En contraste, el libro de texto *Conexiones matemáticas 10* (Moreno, 2006), tiene ocho capítulos, de los cuales los primeros cuatro corresponden a Trigonometría. Presenta la misma distribución en cuanto a contenidos y el tipo de Trigonometría en el que se clasifican los capítulos, que el libro *Alfa 10*.

Moreno (2006), a diferencia de Moreno y Restrepo (1999), no hace mención de la Historia de la Trigonometría durante los capítulos respectivos. Tampoco señala lo que concibe por Trigonometría ni la utilidad de esta.

Los autores del libro *Alfa 10* presentan 70 tareas resueltas, de las cuales se analizaron 16. El libro *Conexiones matemáticas 10* presenta 18 tareas resueltas, de las cuales se analizaron 14. Se identificó que tres tareas (L8-U2-T8, L8-U3-T4 y L9-U1-T3) no corresponden a Trigonometría.



Ejemplo 8

¿Cuál es el valor de la expresión $2 \operatorname{sen} 45° \cos 135° - \cot 330° \tan 30°$*?*

Hallemos inicialmente los valores de cada función.

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};\quad \cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \cot 330° = -\cot 30° = -\frac{\cos 30°}{\operatorname{sen} 30°} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3};$$

$$\tan 30° = \frac{\operatorname{sen} 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Remplazando cada valor, obtenemos:

$$2 \operatorname{sen} 45° \cos 135° - \cot 330° \tan 30° = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - (-1) = -1 + 1 = 0$$

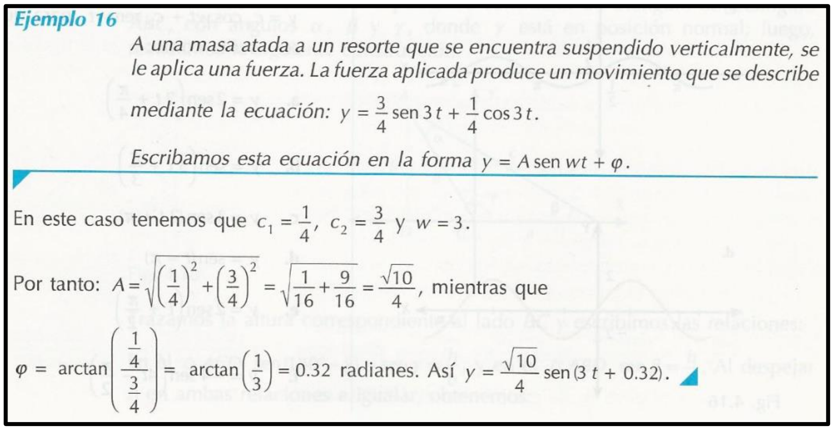
Ilustración 16. Tarea L8-U2-T8. Fuente: (*Moreno y Restrepo, 1999*)

En el caso de L8-U2-T8 (ver Ilustración 16), aunque aparecen las razones seno, coseno, tangente y cotangente, la finalidad de la tarea es realizar una sustitución numérica y a partir de ella operar números reales para encontrar el valor de una expresión. L8-U3-T4, es una tarea para relacionar una gráfica de una función, que no es trigonométrica, con el tipo de función. Moreno y Restrepo (1999), señalan que el interés de este tipo de ejercicios es la relación que hay entre las funciones uno a uno con las funciones inversas, en palabras de los autores, "estamos interesados en las funciones uno a uno porque esta condición asegura la existencia de su función inversa" (p. 76). L9-U1-T3, es una tarea que tiene el fin de encontrar la distancia entre dos puntos del plano, usando la fórmula de la distancia. Además de las tareas mencionadas anteriormente, también se identificó una tarea (L8-U3-T7), que corresponde al uso de la calculadora para encontrar la medida de un ángulo a través de la función inversa.

En relación con los tipos de problemas, se determinó que hay una distribución equitativa de la cantidad de tareas resueltas de tipo clásico y analítico. Diez de ellas corresponden a Trigonometría clásica, 17 de ellas a Trigonometría analítica y las otras 3 no corresponden a Trigonometría.

En relación con los propósitos de este periodo, se determinó que la mayoría de tareas responden a P8. Sin embargo, hay algunas tareas (L8-U1-T10, L8-U3-T16, L8-U4-T16 y L9-U1-T8[19]) que empiezan a responder al propósito P15: *Analizar y profundizar en el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de problemas de la ciencia, tecnología y la vida cotidiana*. Tres de las tareas anteriores, están relacionadas con medición dentro de un contexto de tipo cotidiano; no son situaciones relacionadas con la ciencia o la tecnología.

En la Ilustración 17 se expone la tarea L8-U4-T16, la cual está relacionada con la modelación de situaciones de otra ciencia.



Ejemplo 16

A una masa atada a un resorte que se encuentra suspendido verticalmente, se le aplica una fuerza. La fuerza aplicada produce un movimiento que se describe mediante la ecuación: $y = \frac{3}{4}\,\text{sen}\,3t + \frac{1}{4}\cos 3t$.

Escribamos esta ecuación en la forma $y = A\,\text{sen}\,wt + \varphi$.

En este caso tenemos que $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{3}{4}$ y $w = 3$.

Por tanto: $A = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$, mientras que

$\varphi = \arctan\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = 0.32$ radianes. Así $y = \frac{\sqrt{10}}{4}\,\text{sen}\,(3t + 0.32)$.

Ilustración 17. Tarea L8-U4-T16. Fuente: (*Moreno y Restrepo, 1999*)

En relación con la caracterización del problema, se identificó que la mayoría de tareas están relacionadas con las *matemáticas puras*. Cinco de ellas correspondientes a la Trigonometría clásica y dieciséis a la Trigonometría analítica. No obstante, seis tareas corresponden al tipo de referencia *semirrealidad*. Las tareas resueltas por los autores tienen fines como: encontrar coordenadas geográficas usando los conceptos latitud y longitud en la esfera terrestre, modelar situaciones de la física mecánica relacionadas con el movimiento y la fuerza, encontrar distancias y alturas y resolver situaciones de navegación marítima. Las tareas catalogadas en la Trigonometría analítica, en su gran mayoría, son tareas de *matemáticas puras*. Esto se debe a que estas corresponden a la demostración de

---

[19] Ver Anexos

identidades trigonométricas, solución de ecuaciones trigonométricas y representación gráficas de funciones en el plano. Cinco de las diez tareas catalogadas en Trigonometría clásica corresponden a *matemáticas puras* y las otras a *semirrealidad*. Los problemas clásicos de la Trigonometría tienen su origen en la Astronomía, navegación y distancias inaccesibles, haciendo uso de triángulos para su solución, lo que permite a los autores diseñar tareas con objetos cotidianos y de otras ciencias.

En cuanto al formato de presentación, se identificó la presencia de imágenes que respaldan las tareas resueltas. Todas las tareas clasificadas en la Trigonometría clásica, usaron texto e imagen. En el caso de las tareas clasificadas en la Trigonometría analítica, la mayoría fueron presentadas a partir de texto. Las imágenes resultan siendo importantes porque ayudan a la comprensión de las explicaciones dadas por los autores y para reconocer el contexto sobre el que se desarrolla cada tarea.

4.1.8 ETAPA 6 – TERCER HITO (2006-2017)

Después de 8 años de publicados los Lineamientos Curriculares, se divulgan los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006). Estos serían otro referente curricular, para que las instituciones educativas pudieran diseñar sus planes de estudio.

Los libros de texto escogidos en esta etapa fueron *Mi aventura matemática 10* (Abondano, Beltrán, Rodríguez, Suárez y Urquina, 2010) y *Los caminos del saber Matemáticas 10* (Buitrago et al., 2013).

Tabla 22. Contenidos clasificados en tipo de Trigonometría del libro *Mi aventura matemática 10 (Abondano et al., 2010)*

CONTENIDOS		**Tipo de Trigonometría**	**TAREAS RESUELTAS**	**TAREAS SELECCIONADAS**
Razones trigonométricas	Ángulos coterminales. Medidas de ángulos en grados. Medidas de ángulos en radianes. Aplicación de la medida de ángulos. Razones trigonométricas. Solución de triángulos rectángulos. Funciones trigonométricas. Ley de los senos. Ley de los cosenos.	Clásica	1 al 26	5, 13, 19, 24
Funciones trigonométricas de números reales	Circunferencia trigonométrica unitaria. Funciones trigonométricas en la circunferencia unitaria. Gráficas de las funciones seno y coseno. Curvas sinusoidal y cosenoidal trasladadas. Gráficas de las funciones tangente y cotangente.	Analítica	1 al 33	2, 9, 20, 27

	Gráficas de las funciones secante y cosecante. Función seno inverso. Función coseno inverso. Otras funciones inversas.			
Identidades y ecuaciones trigonométricas	Identidades trigonométricas básicas. Identidades para la suma y diferencia de ángulos. Identidades para ángulos dobles y ángulos medios. Fórmulas de producto a suma y suma a producto. Ecuaciones trigonométricas.	Analítica	1 al 40	7, 15, 28, 36

Fuente: Propia

Tabla 23. Contenidos clasificados en tipo de Trigonometría del libro *Los caminos del saber. Matemáticas 10. (Buitrago et al., 2013)*

CONTENIDOS		**Tipo de Trigonometría**	**TAREAS RESUELTAS**	**TAREAS SELECCIONADAS**
Funciones trigonométricas	Ángulos. Triángulos. Funciones trigonométricas Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.	Clásica	1 al 27	2, 6, 15, 22
Gráficas de las funciones trigonométricas	Líneas trigonométricas. Gráficas de las funciones trigonométricas. Análisis de las gráficas. Funciones trigonométricas inversas.	Analítica	1 al 14	3, 7, 12, 14
Aplicaciones de las funciones trigonométricas	Solución de triángulos rectángulos. Solución de triángulos no rectángulos. Ley del seno. Ley del coseno. Área de un triángulo. Vectores.	Clásica	1 al 25	4, 9, 16, 21
Trigonometría analítica	Identidades trigonométricas. Ecuaciones trigonométricas.	Analítica	1 al 42	12, 23, 31, 39

Fuente: Propia

Tabla 24. Rejilla de análisis de los libros *Mi aventura matemática 10 (Abondano et al., 2010)* y *Los caminos del saber. Matemáticas 10. (Buitrago et al., 2013)*

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="9">Propósitos de E. M.</td><td colspan="6">Caracterización del problema</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P3</td><td rowspan="2">P5</td><td rowspan="2">P8</td><td rowspan="2">P9</td><td rowspan="2">P10</td><td rowspan="2">P12</td><td rowspan="2">P13</td><td rowspan="2">P14</td><td rowspan="2">P15</td><td colspan="3">Tipo de referencia</td><td colspan="3">Formato</td></tr>
<tr><td>M.P.</td><td>SR</td><td>S.V.R.</td><td>T</td><td>I</td><td>TA</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Tipo de problema clásico</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="2">Profundizar en un campo del conocimiento</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">Profundizar en el razonamiento lógico para solucionar situaciones de la vida</td><td rowspan="3">5</td><td>Física Mecánica</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">10</td><td rowspan="3">10</td><td rowspan="3">0</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Distancias/ Elevaciones</td></tr>
</table>

									cotidiana o de otras ciencias 4		2 Navegación 2				
Tipo de problema analítico	0	0	Profundizar en un campo del conocimiento 15	0	0	1	0	0	Profundizar en el razonamiento lógico para solucionar situaciones de la vida cotidiana o de otras ciencias 1	14	Física Mecánica 1	0	15	5	1
Tipo de problema moderno															
Observaciones La tarea 5 de la unidad 1 del libro 15 es una tarea relacionada con operaciones del sistema sexagesimal La tarea 13 de la unidad 1 del libro 15 es una tarea de velocidad que no se relaciona con la Trigonometría La tarea 2 de la unidad 2 del libro 15 es una tarea que corresponde al concepto de función															

Fuente: Propia

El libro de texto *Mi aventura matemática 10* (Abondano et al., 2010) tiene seis capítulos, de los cuales 3 de ellos corresponden a Trigonometría. El primer capítulo fue clasificado en Trigonometría clásica, ya que la mayoría de los contenidos están relacionados con la medición y modelación de situaciones a partir de triángulos. Los siguientes dos capítulos tienen mayor relación con el trabajo de funciones trigonométricas, gráficas e identidades, lo que caracteriza la Trigonometría analítica.

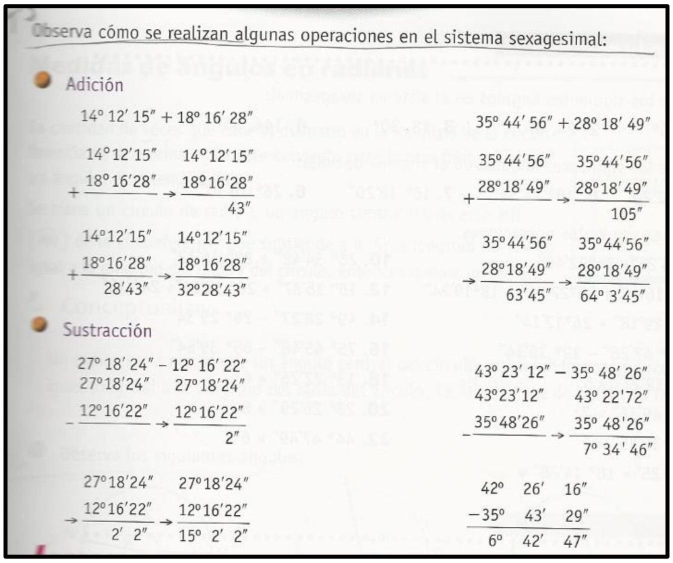
El libro presenta, al iniciar el capítulo 2, la concepción de los autores sobre Trigonometría y sus usos. Así entonces, señalan que la Trigonometría estudia las relaciones entre ángulos y lados de triángulos. También le dan el carácter de ciencia: “La Trigonometría es la ciencia cuyo objeto es la resolución numérica de triángulos, teniendo en cuenta sus seis elementos principales: sus tres lados y tres ángulos” (Abondano et al. 2010, p. 67). Además de lo anterior, señalan en un corto párrafo algunos aspectos de la historia de la Trigonometría. Identifican a Hiparco, Ptolomeo y Aristarco como protagonistas en el desarrollo de esta rama de las Matemáticas.

El libro de texto *Los caminos del saber Matemáticas 10* (Buitrago et al., 2013) tiene siete capítulos, de los cuales cuatro de ellos (capítulos 2, 3, 4 y 5) corresponden a

Trigonometría. Los capítulos 2 y 4 del libro fueron clasificados dentro de la Trigonometría clásica y los capítulos 3 y 5 en Trigonometría analítica. Al iniciar el capítulo 2, Buitrago et al. (2013) señalan que la Trigonometría se aplica en diversas ramas de la Física como la mecánica, termodinámica, electromagnetismo, entre otras. También indica que es útil en la aviación, la navegación y la ingeniería civil para calcular distancias y medidas de ángulos. Los autores no definen qué es la Trigonometría.

A lo largo de los capítulos, Buitrago et al. (2013), presentan algunas notas de historia de la Trigonometría puestas en las márgenes derecha o izquierda de ciertas páginas del texto.

El libro *Mi aventura matemática 10* (Abondano et al., 2010), presenta 99 tareas resueltas por los autores, de la cuales se analizaron 12. El libro *Los caminos del saber Matemáticas 10 (*Buitrago et al., 2013*)* presenta 108 tareas de las que se analizaron 16. Se identificó que tres tareas (L10-U1-T5, L10-U1-T13 y L10-U2-T2) no corresponden a Trigonometría. Ver Ilustración 18.



Observa cómo se realizan algunas operaciones en el sistema sexagesimal:

Adición

$14^\circ\,12'\,15'' + 18^\circ\,16'\,28''$

$$+\begin{array}{r} 14^\circ 12'15'' \\ 18^\circ 16'28'' \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 14^\circ 12'15'' \\ 18^\circ 16'28'' \\ \hline 43'' \end{array}$$

$$+\begin{array}{r} 14^\circ 12'15'' \\ 18^\circ 16'28'' \\ \hline 28'43'' \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 14^\circ 12'15'' \\ 18^\circ 16'28'' \\ \hline 32^\circ 28'43'' \end{array}$$

$35^\circ\,44'\,56'' + 28^\circ\,18'\,49''$

$$+\begin{array}{r} 35^\circ 44'56'' \\ 28^\circ 18'49'' \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 35^\circ 44'56'' \\ 28^\circ 18'49'' \\ \hline 105'' \end{array}$$

$$\rightarrow\begin{array}{r} 35^\circ 44'56'' \\ 28^\circ 18'49'' \\ \hline 63'45'' \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 35^\circ 44'56'' \\ 28^\circ 18'49'' \\ \hline 64^\circ\,3'45'' \end{array}$$

Sustracción

$27^\circ\,18'\,24'' - 12^\circ\,16'\,22''$

$$-\begin{array}{r} 27^\circ 18'24'' \\ 12^\circ 16'22'' \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 27^\circ 18'24'' \\ 12^\circ 16'22'' \\ \hline 2'' \end{array}$$

$$\rightarrow\begin{array}{r} 27^\circ 18'24'' \\ 12^\circ 16'22'' \\ \hline 2'\;2'' \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 27^\circ 18'24'' \\ 12^\circ 16'22'' \\ \hline 15^\circ\;2'\;2'' \end{array}$$

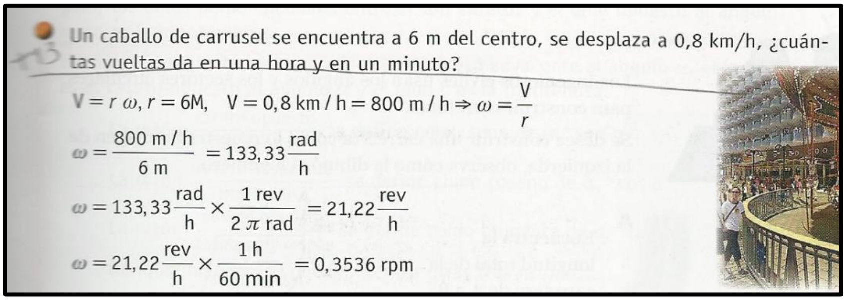
$43^\circ\,23'\,12'' - 35^\circ\,48'\,26''$

$$-\begin{array}{r} 43^\circ 23'12'' \\ 35^\circ 48'26'' \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 43^\circ\,22'72'' \\ 35^\circ\,48'26'' \\ \hline 7^\circ\,34'\,46'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} 42^\circ & 26' & 16'' \\ -35^\circ & 43' & 29'' \\ \hline 6^\circ & 42' & 47'' \end{array}$$

Ilustración 18. Tarea L10-U1-T5. Fuente: (*Abondano et, al, 2010*)

La tarea L10-U1-T5 (ver Ilustración 19), es una tarea que corresponde a operaciones de números en el sistema sexagesimal,



Un caballo de carrusel se encuentra a 6 m del centro, se desplaza a 0,8 km/h, ¿cuántas vueltas da en una hora y en un minuto?

$V = r\,\omega,\ r = 6M,\quad V = 0{,}8\ \mathrm{km/h} = 800\ \mathrm{m/h} \Rightarrow \omega = \frac{V}{r}$

$\omega = \frac{800\ \mathrm{m/h}}{6\ \mathrm{m}} = 133{,}33\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{h}}$

$\omega = 133{,}33\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{h}} \times \frac{1\ \mathrm{rev}}{2\,\pi\ \mathrm{rad}} = 21{,}22\frac{\mathrm{rev}}{\mathrm{h}}$

$\omega = 21{,}22\frac{\mathrm{rev}}{\mathrm{h}} \times \frac{1\ \mathrm{h}}{60\ \mathrm{min}} = 0{,}3536\ \mathrm{rpm}$

Ilustración 19. Tarea L10-U1-T13. Fuente: (*Abondano et, al, 2010*)

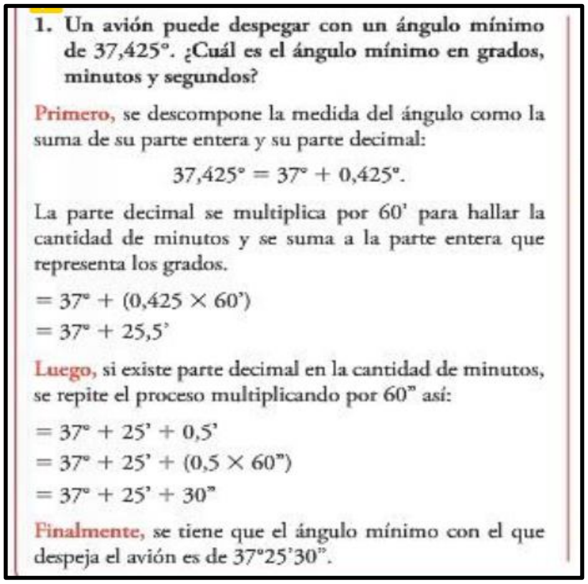
La tarea L10-U1-T13 corresponde a la Física, donde los lados y ángulos del triángulo no están presentes. Aunque es una tarea de medición, no usa las razones trigonométricas en su solución, de manera que no está catalogada dentro de la Trigonometría. En el caso de L10-U2-T2, es una tarea que corresponde al concepto de función, se pide representar gráficamente la función $f(x) = \frac{1}{x}$. Lo anterior se debe a que las gráficas de las funciones trigonométricas son estudiadas en la Trigonometría analítica, por tanto, saber cómo se grafican funciones es un requisito para graficar funciones trigonométricas.

En relación con los tipos de problemas, se identificó que la cantidad de tareas que corresponden a Trigonometría clásica son aproximadamente el 35,7% del total, mientras que la cantidad de tareas correspondientes a Trigonometría analítica son 53,5%. De las 28 tareas analizadas, tres no son de Trigonometría. También se evidenció que la cantidad de tareas resueltas por los autores, aumentaron considerablemente en relación con etapas anteriores.

En relación con los propósitos de la educación media de esta etapa, se identificó que la mayoría de tareas resueltas por los autores se relacionan con P8. No obstante, las tareas L11-U2-T2, L11-U2-T6 (Ilustración 20), L11-U4-T4, L11-U4-T16 y L11-U3-T4[20] se relacionan con P12, ya que usan contextos cotidianos y de otras ciencias.

---

[20] Ver Anexos.



1. Un avión puede despegar con un ángulo mínimo de 37,425°. ¿Cuál es el ángulo mínimo en grados, minutos y segundos?

Primero, se descompone la medida del ángulo como la suma de su parte entera y su parte decimal:

$$37{,}425° = 37° + 0{,}425°.$$

La parte decimal se multiplica por 60’ para hallar la cantidad de minutos y se suma a la parte entera que representa los grados.

$= 37° + (0{,}425 \times 60')$
$= 37° + 25{,}5'$

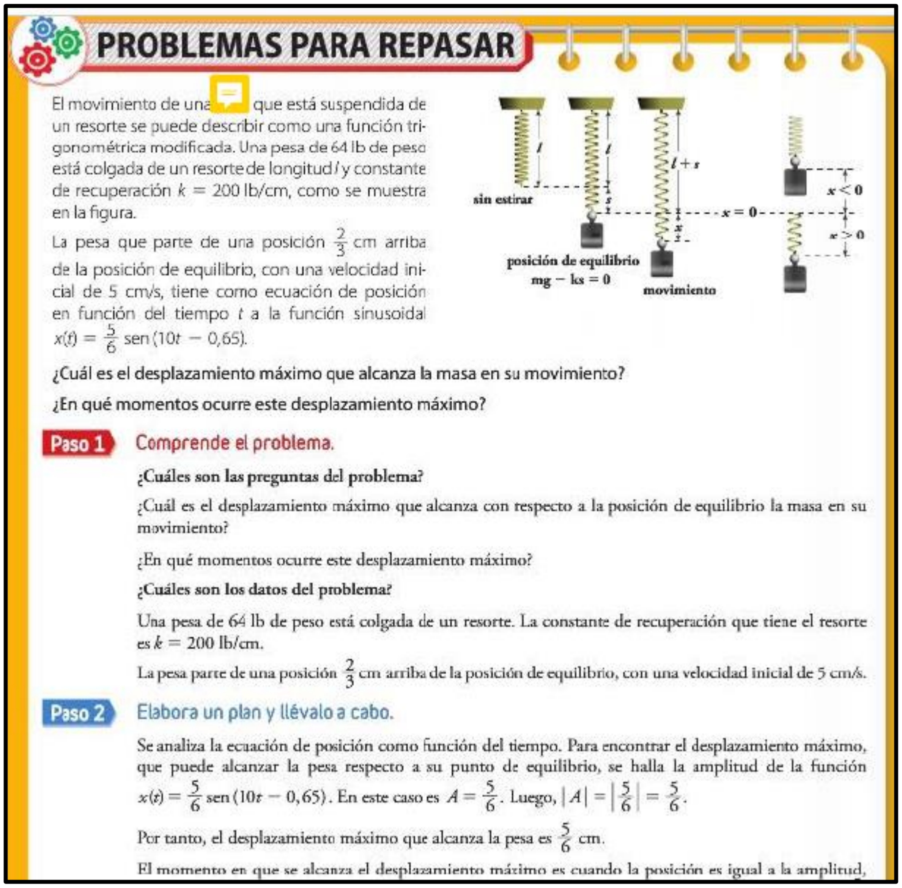
Luego, si existe parte decimal en la cantidad de minutos, se repite el proceso multiplicando por 60” así:

$= 37° + 25' + 0{,}5'$
$= 37° + 25' + (0{,}5 \times 60'')$
$= 37° + 25' + 30''$

Finalmente, se tiene que el ángulo mínimo con el que despeja el avión es de 37°25’30”.

Ilustración 20. Tarea L11-U2-T2. Fuente: (*Buitrago et, al, 2013*)

También se identificó en dos de las tareas analizadas, L11-U2-T6 y L11-U3-T14 (Ilustración 21), que corresponden al propósito P12: *Profundizar en conocimientos avanzados de las ciencias naturales*. Estas tareas usan la Trigonometría, clásica y analítica, para solucionar situaciones concernientes a la Física mecánica, pues los contextos involucrados son movimiento circular y movimientos con resortes.



PROBLEMAS PARA REPASAR

El movimiento de una que está suspendida de un resorte se puede describir como una función trigonométrica modificada. Una pesa de 64 lb de peso está colgada de un resorte de longitud l y constante de recuperación $k = 200$ lb/cm, como se muestra en la figura.

La pesa que parte de una posición $\frac{2}{3}$ cm arriba de la posición de equilibrio, con una velocidad inicial de 5 cm/s, tiene como ecuación de posición en función del tiempo t a la función sinusoidal $x(t) = \frac{5}{6}\,\text{sen}\,(10t - 0{,}65)$.

¿Cuál es el desplazamiento máximo que alcanza la masa en su movimiento?

¿En qué momentos ocurre este desplazamiento máximo?

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuál es el desplazamiento máximo que alcanza con respecto a la posición de equilibrio la masa en su movimiento?

¿En qué momentos ocurre este desplazamiento máximo?

¿Cuáles son los datos del problema?

Una pesa de 64 lb de peso está colgada de un resorte. La constante de recuperación que tiene el resorte es $k = 200$ lb/cm.

La pesa parte de una posición $\frac{2}{3}$ cm arriba de la posición de equilibrio, con una velocidad inicial de 5 cm/s.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Se analiza la ecuación de posición como función del tiempo. Para encontrar el desplazamiento máximo, que puede alcanzar la pesa respecto a su punto de equilibrio, se halla la amplitud de la función $x(t) = \frac{5}{6}\,\text{sen}\,(10t - 0{,}65)$. En este caso es $A = \frac{5}{6}$. Luego, $|A| = \left|\frac{5}{6}\right| = \frac{5}{6}$.

Por tanto, el desplazamiento máximo que alcanza la pesa es $\frac{5}{6}$ cm.

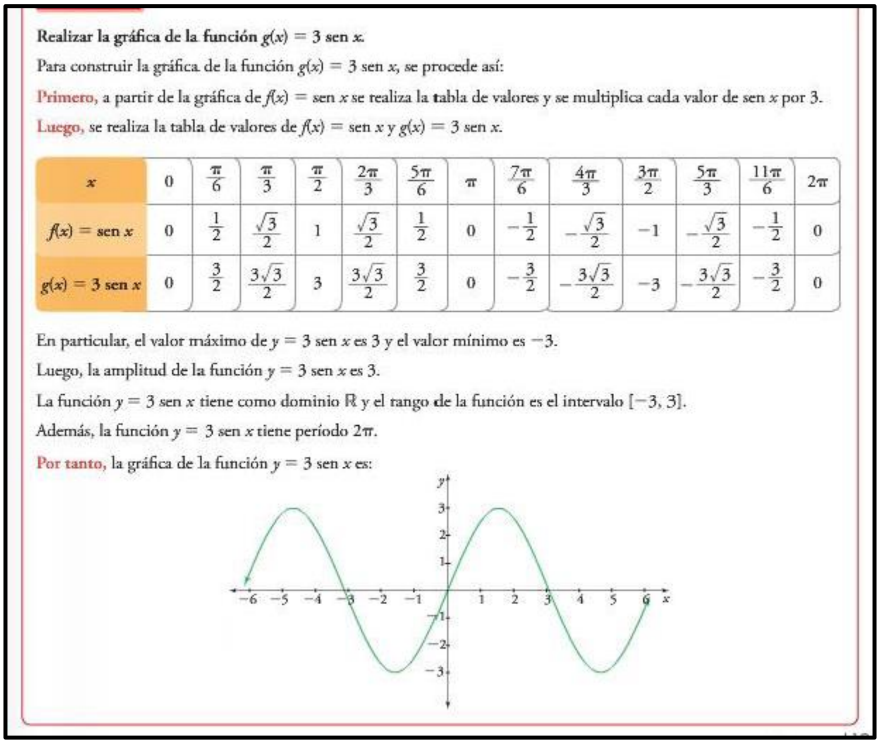
El momento en que se alcanza el desplazamiento máximo es cuando la posición es igual a la amplitud,

*Ilustración 21.*Tarea L11-U3-T14. Fuente: (*Buitrago et, al, 2013*)

El libro *Mi aventura matemática 10* (Abondano et al., 2010), tiene en su inicio una presentación del libro en relación con el tipo de actividades y anexos que para los autores son importantes en la formación integral de las personas. Así entonces, presentan secciones de ciber matemática, cátedra de emprendimiento y competencias ciudadanas, entre otras. Frente a las competencias ciudadanas, Abondano et al. (2010) señalan "A lo largo de todo el texto se enuncian y recomiendan competencias ciudadanas para crear conciencia colectiva de los estudiantes" (p. 7). El propósito P3: *Formar en valores éticos, morales y cívicos*, tiene relación con la propuesta de los autores acerca de incluir las competencias ciudadanas a lo largo del texto. Sin embargo, las tareas analizadas no tienen relación con P3. Durante la revisión del libro, en lo que concierne a la Trigonometría, se encontró en la página 89 un anexo (recuadro) en el margen derecho que indica: "Competencias ciudadanas: Utilizo distintas formas de expresión para promover y defender los derechos humanos en mi contexto escolar y comunitario" y en la página 144 otro anexo al margen izquierdo que dice: "Competencias ciudadanas: Conozco y respeto las normas de tránsito".

Estas notas que se incluyen al margen, no están articuladas con los contenidos tratados a lo largo del texto, tan solo son notas adicionales.

Ahora bien, en cuanto a la caracterización de las tareas, 19 de ellas pertenecen a las *matemáticas puras* y 6 de ellas a *semirrealidad*. La mayoría de tareas resueltas por los autores tiene texto e imagen. Se nota la importancia de presentar las tareas acompañadas de imágenes. En esta etapa a diferencia de las anteriores, se encontró que una de las tareas se presentaba a partir de una tabla (L11-U3-T7, ver ilustración 22). Sin embargo, la mayoría de tareas se siguen presentando únicamente con texto e imagen.



Realizar la gráfica de la función $g(x) = 3$ sen x.

Para construir la gráfica de la función $g(x) = 3$ sen x, se procede así:

Primero, a partir de la gráfica de $f(x) =$ sen x se realiza la tabla de valores y se multiplica cada valor de sen x por 3.

Luego, se realiza la tabla de valores de $f(x) =$ sen x y $g(x) = 3$ sen x.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$f(x) =$ sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$g(x) = 3$ sen x	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	3	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	-3	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0

En particular, el valor máximo de $y = 3$ sen x es 3 y el valor mínimo es -3.

Luego, la amplitud de la función $y = 3$ sen x es 3.

La función $y = 3$ sen x tiene como dominio $\mathbb{R}$ y el rango de la función es el intervalo $[-3, 3]$.

Además, la función $y = 3$ sen x tiene período 2π.

Por tanto, la gráfica de la función $y = 3$ sen x es:

Ilustración 22. Tarea L11-U3-T7. Fuente: (*Buitrago et, al, 2013*)

4.2 ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LA CONCORDANCIA ENTRE LOS LIBROS DE TEXTO ESCOLARES DE TRIGONOMETRÍA Y LOS PROPÓSITOS DE LA EDUCACIÓN EN MATEMÁTICAS EN DIFERENTES ÉPOCAS CURRICULARES

En este apartado del capítulo presentamos algunas reflexiones que emergen de los hallazgos encontrados en la sección anterior. Las reflexiones expuestas en esta sección se han clasificado en cinco secciones: 1) relaciones entre los propósitos de la Educación Media y los libros de texto de Trigonometría, 2) relación entre los libros de texto escolares, la Historia de la Trigonometría y los propósitos de la Educación Media, 3) relaciones de la Historia del currículo de Trigonometría escolar colombiano con los libros de texto de Trigonometría, 4) tipos de referencia de las tareas resueltas en los libros de texto y 5) uso de la tecnología en los libros de texto de Trigonometría. Dentro de cada sección se exponen algunos interrogantes, llamados e*lementos de reflexión*, que tienen el propósito de motivar el debate académico y la reflexión pedagógica sobre estos asuntos.

4.2.1 RELACIONES ENTRE LOS PROPÓSITOS DE LA EDUCACIÓN MEDIA Y LOS LIBROS DE TEXTO DE TRIGONOMETRÍA

A través de las reformas curriculares dadas desde 1951, se han promulgado los propósitos de la Educación Media. Todos ellos, se categorizaron en 15 propósitos generales enunciados en el capítulo 2 de este trabajo.

Con esta información, resulta interesante preguntarse si los libros de texto de Trigonometría, analizados en cada etapa, respondieron a los propósitos que se establecían para la Educación Media. Con el análisis realizado en el apartado anterior se evidenció que las tareas resueltas por los autores de los textos, en las cuatro primeras etapas, promovían únicamente y de forma parcial P8, *preparar al estudiante para la profundización en un campo del conocimiento, para estudios universitarios y un campo de trabajo*. El énfasis de las tareas resueltas por los autores, en este periodo de tiempo fue *preparar al estudiante para la profundización en un campo del conocimiento*. En la quinta y sexta etapa, nuevamente se atiende a P8, sin embargo, en el tercer hito de la sexta etapa también se promueve P15, *analizar y profundizar en el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de problemas de la ciencia, tecnología y la vida cotidiana*.

Estos resultados muestran que los libros de texto han sido pensados y diseñados para promover el aprendizaje de los contenidos de Trigonometría y sus aplicaciones, sin otro propósito más allá de este. No obstante, en el periodo 2006-2017, parece que surge la inquietud de integrar asuntos relacionados con competencias ciudadanas al proceso de enseñanza y aprendizaje de la Trigonometría a partir de los libros de texto.

Por ejemplo, en la presentación del libro *Mi aventura Matemática 10* (Abondano et, al, 2010) los autores señalan que “A lo largo del texto se enuncian y recomiendan competencias ciudadanas para crear conciencia colectiva entre los estudiantes" (p. 7). Sin embargo, a lo largo de los capítulos de Trigonometría aparecen solo dos recuadros, al margen, relacionados con esta propuesta de los autores. En sus propias palabras señalan:

> Competencias ciudadanas. Contribuyo a que los conflictos entre personas y entre grupos se manejen de manera pacífica y constructiva mediante la aplicación de estrategias basadas en el diálogo y la negociación. (Abondano et, al, 2010, p. 39)

Esta nota sobre competencias ciudadanas aparece en medio de la explicación del valor de las funciones trigonométricas para ángulos notables (0°, 30°, 45°, 60° y otros). No se evidencia alguna relación entre el desarrollo del contenido y la nota al margen. El uso de las competencias ciudadanas, en este caso, es únicamente proveer una información al estudiante.

Ahora bien, en el caso del libro *Conexiones matemáticas 10* (Moreno, 2006), el autor menciona, en la presentación del Taller de competencias, que "los ejercicios identificados con la bandera de Colombia indican las competencias ciudadanas que se pueden vivenciar en el desarrollo de los temas" (p. 6). Sin embargo, en la revisión realizada no se encontró algún ejercicio que tuviera la bandera de Colombia. Parece ser que, para el autor, los temas propuestos en Trigonometría no permiten ayudar a desarrollar competencias ciudadanas.

Elemento de reflexión No. 1.

¿Los libros de texto de Trigonometría deben promover los propósitos generales de la Educación Media colombiana?

El libro de texto tiene diferentes dimensiones, según mencionamos en el marco referencial de este trabajo. Una de ellas señala que el libro de texto es un soporte de las verdades que la sociedad cree que es necesario transmitir de generación en generación. Entonces, valdría la pena preguntarse si los propósitos de la Educación Media son esas verdades que sean necesarias transmitir entre generaciones. O tal vez la verdad, que se desean transmitir de generación en generación, sean únicamente los contenidos relacionados con la Trigonometría.

Por ejemplo, P11, *promover la participación consciente y responsable de la persona como miembro de la familia y la sociedad*, encierra las obligaciones de cada individuo con su familia y la sociedad. Esta es una verdad necesaria transmitir de generación en generación. Sin embargo, los libros de texto de Trigonometría ¿pueden ayudar a transmitir esta verdad? No obstante, hay otros propósitos en la Educación Media que se pueden promover a partir de los libros de texto de Trigonometría. Por ejemplo, P3, *formar en valores éticos, morales y cívicos*, es un propósito que se puede promover a partir de propuestas en proyectos donde el trabajo sea colaborativo. Los autores podrían acudir al tipo de referencia *semirrealidad* o *situaciones de la vida real*, para diseñar en las tareas propuestas a los estudiantes proyectos que además de profundizar en el conocimiento específico de la Trigonometría, también promueva un trabajo en el cual los estudiantes desarrollen valores como la responsabilidad, la corresponsabilidad, la honestidad, el esfuerzo y la cooperación.

Así mismo P10, *fomentar el respeto por los bienes culturales de la nación, la pluralidad y los recursos naturales*, es un propósito que se puede abordar desde el desarrollo de proyectos y que posibilita el fortalecimiento de la identidad de los estudiantes como colombianos, que reconocen la pluralidad y que, además, fomenta la consciencia de conservar los recursos naturales.

4.2.2 RELACIÓN ENTRE LOS LIBROS DE TEXTO DE TRIGONOMETRÍA, LA HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA Y LOS PROPÓSITOS DE LA EDUCACIÓN MEDIA

El análisis realizado a los libros de texto de Trigonometría evidenció que algunos autores utilizan la Historia de la Trigonometría como introducción a los contenidos que desarrollan. Presentan de forma muy resumida algunos hechos que dieron origen a la Trigonometría clásica y después intentan relacionarlos con las tareas que deben resolver los estudiantes. Sin embargo, a lo largo de las secciones de los textos, la historia no aparece, perdiendo la relevancia dada en una primera instancia.

Es importante resaltar que el libro analizado en la primera etapa (1951-1962), carece de comentarios y narraciones relacionadas con la historia de la Trigonometría.

Mencionado lo anterior, es pertinente preguntarse ¿cuál es el papel de la Historia de la Trigonometría en los libros de texto? Parece que los autores de los libros de texto usan la Historia como narraciones anecdóticas, de manera que los estudiantes puedan conocer "algo" sobre la génesis de esta rama de las Matemáticas. Boero (1989, citado en Erazo, 2016, p. 25), señala que la Historia de las Matemáticas permite la introducción de un nuevo concepto matemático a partir de notas históricas, así que uno de sus usos es para "Potenciar el quehacer docente". Esto nos conduce a inferir que la Historia de la Trigonometría en los libros de texto, tiene la finalidad de ayudar al docente a introducir nuevos conceptos. Además, la Historia que se muestra en los libros de texto, únicamente se refiere a los problemas de medidas inaccesibles que desarrollaron culturas antiguas. No hay evidencia que revele la transición de la Trigonometría clásica hacia la analítica o la moderna.

Elemento de reflexión No. 2.

¿Qué elementos puede aportar la Historia de la Trigonometría mencionada en los libros de texto de Trigonometría, al cumplimiento de los propósitos de la Educación Media?

En primer lugar, de acuerdo con la categorización realizada a los propósitos de la Educación Media entre 1951 y 2017, encontramos que el uso dado a la Historia de la Trigonometría en los textos, atiende al propósito 6 (P6): *Promover el aprendizaje sobre la cultura general del mundo.* Sin embargo, P6 aparece únicamente en las etapas 1 y 2, desde 1951 hasta 1974. En esta época, los autores de los libros de texto no usaron la historia de la Trigonometría, como recurso de enseñanza y aprendizaje, dentro de los libros. Luego, aunque uno de los propósitos de la época pudiera abordarse desde la historia de la Trigonometría narrada en los libros de texto, estos no develan su uso.

Ahora bien, en segundo lugar, la Trigonometría es una herramienta usada muy frecuentemente por la Física. Las tareas que se resuelven en Física están asociadas, en su mayoría, a la Trigonometría analítica. Sin embargo, los libros de texto analizados no señalan cómo, cuándo o por qué la Trigonometría ayudaba a resolver otras tareas, que no fueran de medición. Esto supone pensar que el uso de la historia de la Trigonometría en los libros de texto, es básicamente para contar una corta narración de "algo" que sucedió hace muchos siglos.

Señalado lo anterior, nos atrevemos a proponer que algunos de los problemas que surgieron en la historia de la Trigonometría puedan ser parte de las tareas resueltas por los autores en los textos y con ellos ayudar a fortalecer algunos propósitos de la Educación

Media. Por ejemplo, cómo se dio paso de la Trigonometría clásica a la analítica. Entonces, se podría promover el propósito P12, *profundizar en conocimientos avanzados de las ciencias naturales*, de manera que haya consciencia sobre la importancia de la Trigonometría analítica en contextos de la Física. También se podría promover P13, *incorporar la investigación al proceso cognoscitivo, en relación con los aspectos natural, económico, político y social*, buscando que la Historia de la Trigonometría sea un asunto que promueva la investigación en el aula. Así mismo abordar P15, *analizar y profundizar en el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de problemas de la ciencia, tecnología y la vida cotidiana*, fortaleciendo los procesos de razonamiento en Trigonometría a partir de la Historia.

4.2.3 RELACIONES DE LA HISTORIA DEL CURRÍCULO DE TRIGONOMETRÍA ESCOLAR COLOMBIANO CON LOS LIBROS DE TEXTO DE TRIGONOMETRÍA

Como ya se ha mencionado, el currículo escolar colombiano de Trigonometría, ha pasado por diferentes etapas en el periodo 1951-2017. En la década de 1950, dónde aparece la Trigonometría en los planes de estudio del bachillerato, se utilizaron libros de texto escritos por autores extranjeros como es el caso de Bruño y Anfossi. Este hecho se mantuvo, al menos hasta mediados de la década de 1980. En 1988, Nelson Londoño y Hernando Bedoya, autores colombianos, escriben para la editorial Norma el libro Matemática Progresiva.

Para esta época, la enseñanza de la Trigonometría en las instituciones escolares llevaba un poco más de 30 años. No obstante, la producción de libros de texto de Trigonometría escolar era mínima. ¿Por qué se daba este suceso?

Más tarde, después de la promulgación de la Ley General de Educación, aumenta la producción de libros de texto de Trigonometría. Parece que referentes como los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias, generan la producción de textos. Profesores de Educación Media se lanzan a escribir para las editoriales.

Además, se evidencia que los libros de texto de Trigonometría, en la última etapa (1998-2017), introducen en las tareas propuestas para los estudiantes, asuntos como pensamientos, refiriéndose a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Así, los autores de los libros de texto, señalan en cada tarea propuesta el "tipo" de pensamiento (numérico-variacional, geométrico-métrico, aleatorio) que ayuda a desarrollar. También mencionan, al inicio de cada sección los Estándares Básicos de Competencias que los estudiantes alcanzaran y otros asuntos como los procesos matemáticos. Sin embargo, en las tareas resueltas por los autores, no se señala el tipo de pensamiento o el Estándar Básico de Competencia que desarrolla.

De acuerdo con lo anterior, se nota que los libros de texto de Trigonometría escritos en la última década, han procurado responder a los referentes curriculares que se han propuesto desde el Ministerio de Educación.

Por ejemplo, el libro Mi aventura matemática 10, menciona en su "Presentación" varios aspectos relacionados con los referentes curriculares de la etapa correspondiente. En palabras de Abondano et. al (2010) señala que:

> Cada unidad comienza con la presentación preliminar del número de la unidad, tipo de pensamiento a desarrollar y el tema principal. Aparecen los estándares de calidad, correspondientes a los logros, las competencias y los temas propios de la unidad. (p. 4)

En este apartado, se hace mención a tipo de pensamiento, estándares y competencias. Estos constructos aparecen por primera vez en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y Estándares Básicos de Competencias, de manera que los referentes curriculares influyen en el contenido de los textos. Más adelante los autores de este mismo texto señalan que "Saber hacer. Es una sección de ejercicios y problemas que estimulan la comunicación matemática y la modelación". (Abondano et. al, p. 6). En este apartado se mencionan los procesos saber hacer, comunicación y modelación, como asuntos importantes en la propuesta del texto. En consecuencia, se puede establecer el uso de los referentes curriculares de Matemáticas para la elaboración del texto.

Así mismo el libro Conexiones matemáticas 10 (2006), señala en su presentación "Conoce tu libro", que hay una sección llamada "Taller de competencias", en la cual el autor menciona:

> Taller de competencias. Ejercicios variados que te permiten aplicar los contenidos estudiados. Se clasifican de acuerdo con el proceso al que corresponden:

> comunicación, resolución de problemas, razonamiento lógico y conexiones. (Moreno, 2006, p. 6).

En la última etapa analizada (etapa 6-hito 3), se puede establecer que los EBC, aunque han sido un referente curricular, se han adoptado, por parte de las instituciones escolares, como estándares de obligatorio cumplimiento, de manera que sobre estos se diseñan los planes de estudio. En consecuencia, las editoriales también diseñan los libros de texto con estos parámetros, usando además los pensamientos que proponen los Lineamientos Curriculares de Matemática para clasificar las tareas que se proponen a los estudiantes.

Elemento de reflexión No. 3.

¿Es necesario que se diseñen los libros de texto de Trigonometría escolar, atendiendo a las reformas curriculares del sistema educativo?

Tal como se ha observado en algunos apartados de este trabajo, las reformas curriculares han ocurrido por causa de sucesos sociales, políticos y económicos. Por ejemplo, la Ley General de Educación derogó el Decreto 1002/84 gracias a la nueva Constitución Nacional de 1991. Así mismo, el Decreto 45/62, de forma indirecta, se promulgó teniendo en cuenta los sucesos políticos que influyeron en los sistemas educativos de la época, como la lucha entre Estados Unidos y Rusia por conquistar el espacio. También, la intención del gobierno de hacer parte de la OCDE ha llevado a nuevas formulaciones curriculares como los DBA.

Entonces, sí el currículo propuesto ha estado influenciado por diversos sucesos, es coherente pensar que herramientas para poner el currículo en acción, como los libros de texto escolares, también deban ser transformadas en correspondencia con los mismos sucesos y, en consecuencia, puestas a favor de las necesidades de la sociedad y de los propósitos del sistema educativo en general.

4.2.4 TIPOS DE REFERENCIAS DE LAS TAREAS RESUELTAS EN LOS LIBROS DE TEXTO

De acuerdo con la información presentada en las herramientas analíticas del capítulo anterior, se evidencia que la mayoría de tareas resueltas por el autor están clasificadas en la referencia *Matemáticas puras*. En una cantidad mucho menor, las tareas clasificadas en *Semirrealidad* y ninguna clasificada en *Situaciones de la vida real*.

Se nota que, durante el periodo analizado, los autores de los textos mantienen de forma predilecta las tareas relacionadas con contextos netamente matemáticos. También se puede identificar que los modelos de tareas clasificadas en *Semirrealidad*, no varían entre etapas. A lo largo de ellas se encuentran, en los libros de texto, tareas relacionadas con alturas de edificios, árboles, aviones, distancias entre barcos y movimientos oscilatorios.

Elemento de reflexión No. 4.

Ahora, la pregunta es ¿qué pasa con las tareas relacionadas con *situaciones de la vida real*?, ¿es posible encontrar este tipo de situaciones donde la Trigonometría pueda ser la herramienta de solución?

Según Skovsmose (2000), las situaciones de la vida real no son ficticias. Surgen de escenarios reales, por tanto, tiene mayor sentido para el profesor y el estudiante. En el caso de la Trigonometría clásica, es posible llevar a los estudiantes a escenarios reales donde realicen también mediciones de alturas o de inclinaciones, como se hace en Topografía. Así que las tareas resueltas y propuestas, en los libros de texto, pueden hacer uso de datos reales, no inventados por el autor, de manera que los estudiantes modelen situaciones y las resuelvan con Trigonometría.

En el caso de la Trigonometría analítica, el contexto predilecto es la Física. El estudio de las ondas acústicas y ópticas usa la Trigonometría para modelar y resolver diversas situaciones. ¿Pueden los autores de los libros de texto de Trigonometría usar datos reales de estos contextos, para resolver y proponer tareas en los libros?

4.2.5 USO DE LA TECNOLOGÍA EN LOS LIBROS DE TEXTO DE TRIGONOMETRÍA

Un asunto emergente del análisis de los libros de texto, es la incorporación de herramientas tecnológicas propuestas en los textos para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje. De acuerdo con los libros analizados, se evidenció que en el libro Alfa 10 (Moreno y Restrepo, 1999), según mencionan los autores en la presentación, "algunos talleres incluyen ejercicios de manejo de calculadora como una herramienta tecnológica en el proceso de aprendizaje" (p. 7). El libro Mi aventura matemática 10 (Abondano et, al, 2010) también presenta una sección de "Ciber matemática", en la que según los autores esta sección "brinda al estudiante unas herramientas para que utilice la informática como complemento en su formación matemática" (p. 7). El libro Los caminos del saber señala en su presentación que:

> El proyecto Caminos del saber es un programa de educación que te ofrece múltiples recursos impresos y digitales, para que adquieras conocimientos y desarrolles habilidades que te permitan enfrentar los retos del futuro. ¿Qué te ofrece el programa de matemáticas? Un libro del estudiante (…). Un sitio web (…). Un libro DVD media. (Buitrago et al, 2013, p. 3)

Se hace evidente que hace más de una década, es reconocida la importancia del uso de herramientas tecnológicas como complemento de los aprendizajes que proponen los libros de texto. Así entonces surge el siguiente elemento de reflexión.

Elemento de reflexión No. 5

¿La intención de promover el uso de herramientas tecnológicas a partir de los libros de texto de Trigonometría, ayuda a fortalecer los propósitos de la Educación Media?

De acuerdo con la categorización realizada a los propósitos de la Educación Media, P7, *preparar a los estudiantes para vivir en una sociedad en constante evolución*, se identifica que este propósito se relaciona, entre otros aspectos, con la intención de promover herramientas tecnológicas desde los libros de texto. Sabemos que la tecnología es un campo que se desarrolla y evoluciona rápidamente, así mismo la sociedad evoluciona a la par. Sin embargo, P7 aparece en la etapa 1962-1974 y luego desaparece. En los propósitos de la Educación Media de la Ley General de Educación no se señala alguno relacionado con el uso de la tecnología. No obstante, en los propósitos del Sistema Educativo en general que enuncia la ley, el objetivo 9 señala que:

> El desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca el avance científico y tecnológico nacional, orientado con prioridad al mejoramiento cultural y de la calidad de la vida de la población, a la participación en la búsqueda de alternativas de solución a los problemas y al progreso social y económico del país. (Ley General de Educación, 1994)

Este objetivo, dirigido a todos los grados del sistema educativo, se promueve desde los libros de texto de Trigonometría, a través de la propuesta de los autores sobre el uso de herramientas como calculadoras, software y páginas web sugeridas, como se mencionó anteriormente. El uso de herramientas tecnológicas en la solución de tareas propuestas en los libros de texto ayuda a la conjeturación, el planteamiento de hipótesis, verificación y modelación de situaciones, lo que a su vez ayuda a fortalecer la capacidad reflexiva y analítica de los estudiantes. Además, los introduce en un ambiente de herramientas virtuales y en la comprensión de un sistema lógico, que es usado frecuentemente en la cotidianidad.

Con lo expuesto en los párrafos anteriores, es posible concluir que la incorporación de herramientas tecnológicas propuestas en los libros de texto, ayuda al fortalecimiento de al menos uno de los propósitos del sistema educativo. De esta manera, el libro de texto de Trigonometría resulta siendo una ayuda importante, no solo para el desarrollo de conocimientos matemáticos, sino para favorecer fines importantes de una sociedad que evoluciona y cambia rápidamente.

5. CONCLUSIONES

El propósito general del ejercicio investigativo es aportar a las reflexiones sobre la función de los libros de texto de Trigonometría en relación con los propósitos de la Educación Media en el periodo 1951-2017. Para desarrollar esta finalidad, analizamos tareas resueltas en libros de texto correspondientes a seis etapas de la Educación Media, descritas en el capítulo anterior. Identificamos en las tareas analizadas el tipo de Trigonometría al cual están asociadas; para ello fue necesario remitirnos a la historia de la Trigonometría. También identificamos los propósitos de la Educación Media que son favorecidos por las tareas en cada etapa señalada, de manera que fue necesario revisar la historia del currículo propuesto en Colombia.

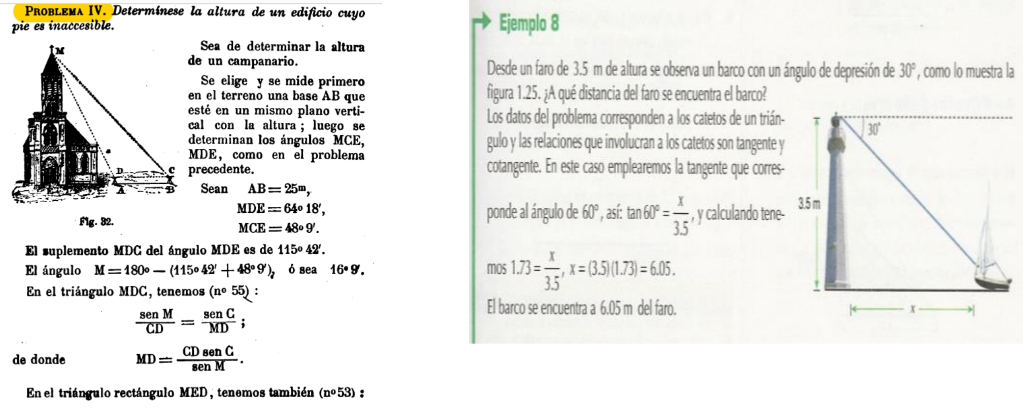
En este capítulo señalaremos conclusiones obtenidas en relación con los objetivos propuestos, el aporte de la Historia de la Trigonometría a los libros de texto, las reformas curriculares en Colombia en el periodo 1951-2017 y el ejercicio de investigación realizado. Además, se plantean algunas inquietudes que quedan abiertas, de manera que puedan ser insumo para nuevas investigaciones o para generar debate académico sobre estos asuntos.

5.1 CONCLUSIONES SOBRE LOS OBJETIVOS PROPUESTOS

En seguida presentamos las conclusiones realizadas sobre los objetivos específicos propuestos que ayudaron a dar respuesta al objetivo general.

- El conocimiento de la Historia de las Matemáticas fortalece el conocimiento disciplinar del profesor. Identificar los sucesos que dieron origen a problemas de la humanidad y cómo las Matemáticas ayudaron a resolverlos o los resolvieron, permite que el docente comprenda por qué y cómo se utilizan los hechos, conceptos y procedimientos asociados a tales sucesos y problemas. En nuestro caso, la historia de la Trigonometría nos permitió identificar los problemas que le dieron su origen, cómo los resolvieron algunas culturas y en qué momento cambió el tipo de problemas que se resolvían con la Trigonometría. De manera que identificamos tres tipos de Trigonometría (clásica, analítica y moderna) en la historia. Además de identificar sucesos importantes en la Historia de la Trigonometría y usarla para ampliar nuestros conocimientos, podemos hacer uso de ella para "Potenciar el quehacer docente". Como señala Erazo (2016), la Historia de las Matemáticas permite la introducción de un nuevo concepto matemático a partir de notas históricas, ofrece contextos para la construcción de conceptos y habilidades matemáticas y favorece el diálogo con los estudiantes (p. 25). En fin, reconocemos, que la Historia de la Trigonometría ofrece posibilidades para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Trigonometría.

- La Trigonometría escolar en Colombia tiene un poco más de 60 años. Durante su vigencia se han dado pocos cambios en relación con los contenidos y las aplicaciones presentadas a los estudiantes de Educación Media. Aparece la Trigonometría en el currículo propuesto en 1951 y según lo evidenciado en el libro de texto de G. M. Bruño (1939), se estudian las líneas trigonométricas, las tablas logarítmicas, las razones trigonométricas, la resolución de triángulos rectángulos y no rectángulos y las aplicaciones en agrimensura. Posteriormente, en la siguiente etapa, se incluye el estudio del círculo trigonométrico, las identidades y el estudio de funciones trigonométricas. Estos contenidos se mantienen durante las siguientes épocas analizadas hasta la actualidad. Las tareas resueltas y propuestas en los libros no tienen variaciones significativas entre etapas, se siguen presentando tareas con el propósito de realizar mediciones de alturas y ángulos, así como tareas relacionadas con los movimientos ondulatorios. Un ejemplo de este asunto es el que se muestra en la Ilustración 23:



Problema IV. *Determínese la altura de un edificio cuyo pie es inaccesible.*

Sea de determinar la altura de un campanario.

Se elige y se mide primero en el terreno una base AB que esté en un mismo plano vertical con la altura; luego se determinan los ángulos MCE, MDE, como en el problema precedente.

Sean $AB = 25^m$,

$MDE = 64^o\,18'$,

$MCE = 48^o\,9'$.

Fig. 32.

El suplemento MDC del ángulo MDE es de 115° 42'.

El ángulo $M = 180^o - (115^o\,42' + 48^o\,9')$, ó sea $16^o\,9'$.

En el triángulo MDC, tenemos (nº 55):

$$\frac{\text{sen } M}{CD} = \frac{\text{sen } C}{MD};$$

de donde $$MD = \frac{CD \text{ sen } C}{\text{sen } M}.$$

En el triángulo rectángulo MED, tenemos también (nº53):

Ejemplo 8

Desde un faro de 3.5 m de altura se observa un barco con un ángulo de depresión de 30°, como lo muestra la figura 1.25. ¿A qué distancia del faro se encuentra el barco?

Los datos del problema corresponden a los catetos de un triángulo y las relaciones que involucran a los catetos son tangente y cotangente. En este caso emplearemos la tangente que corresponde al ángulo de 60°, así: $\tan 60° = \frac{x}{3.5}$, y calculando tenemos $1.73 = \frac{x}{3.5}$, $x = (3.5)(1.73) = 6.05$.

El barco se encuentra a 6.05 m del faro.

Ilustración 23. Comparación de las tareas L1-U5-T4 (Bruño, 1939) y L9-U1-T8 (Moreno, 2006)

A pesar de las distintas épocas seleccionadas y de las distintas reformas curriculares centradas en la resolución de problemas, en el auge de las Matemáticas Modernas, en la propuesta de la renovación curricular y en el desarrollo de pensamientos que formulan los Lineamientos Curriculares, no se evidencian cambios frente a las tareas propuestas por los autores en los libros de texto de Trigonometría. Los ejercicios se centran en el paradigma de Matemáticas Puras como lo expone Skovsmose (2000).

No obstante, un hito importante de la historia de la Trigonometría escolar en Colombia, está relacionado con la promulgación de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998). Estos referentes no centran la importancia del aprendizaje de las Matemáticas en el estudio de contenidos, incluso no mencionan la Trigonometría como una rama fundamental en la escuela, sino que se promueven el desarrollo de pensamientos a través de ciertos procesos específicos como el razonamiento, la comunicación y la modelación, entre otros. Sin embargo, cuando se establecen los Estándares Básicos por Competencias (MEN, 2006), la Trigonometría vuelve aparecer como contenido fundamental en las Matemáticas de la Educación Media.

- Desde la aparición de la Trigonometría escolar en el currículo propuesto, parece que hubiera sufrido algunos cambios importantes, pero no ha sido así, ya que esta rama de las Matemáticas siempre ha estado presente y los contenidos, así como las aplicaciones propuestas se han mantenido durante varias décadas.
- Como se mencionó en el capítulo titulado “Referentes Teóricos”, los libros de texto tienen cuatro dimensiones. Estas dimensiones estuvieron presentes en los libros de Trigonometría de cada una de las etapas analizadas. La dimensión pedagógica, como herramienta de apoyo para los procesos de enseñanza y aprendizaje, se hace evidente cuando los autores de los textos mencionan en sus presentaciones las maneras en que se han diseñado los libros y los recursos adicionales para apoyar al docente y al estudiante. La dimensión relacionada con la transmisión de verdades de generación en generación, se evidencia a partir de las pocas transformaciones de los libros de texto entre etapas. Como mencionamos en la conclusión anterior, hay contenidos que se mantienen durante décadas, lo cual parece importante para los

autores de los textos. Sí los contenidos se mantienen, es porque es fundamental que cada generación los conozca y los estudie. La dimensión acerca de que el libro de texto es un medio de comunicación que difunde un sistema de valores o un proyecto de sociedad, es más evidente en los libros escritos durante la última década. En estos libros se explicita la importancia de incluir aspectos como competencias ciudadanas, uso de herramientas tecnológicas y desarrollo de competencias matemáticas. Lo anterior refleja algunos propósitos de un sistema educativo, que ayudan a desarrollar el proyecto de sociedad que el gobierno y las instituciones tienen pensado. En fin, durante el ejercicio investigativo fue posible identificar las dimensiones de los libros de texto en cada una de las etapas analizadas.

- Los libros de texto de Trigonometría escolar se han diseñado, según muestran las evidencias presentadas en el capítulo de análisis, con el propósito de preparar a los estudiantes para la profundización en un campo del conocimiento, específicamente la profundización en Trigonometría. Sin embargo, durante la última década, se han escrito libros de texto de Trigonometría que agregan algunos aspectos con el fin de aportar al fortalecimiento de las competencias ciudadanas y el desarrollo de habilidades relacionadas con el uso de herramientas tecnológicas. No obstante, la intención de promover las competencias ciudadanas desde los libros de texto de Trigonometría, carece de articulación con los procesos y contenidos matemáticos. Aparecen como notas curiosas que pierden relevancia en la densidad de la teoría y las tareas presentadas. Es importante que los autores de los libros de texto desarrollen mejores estrategias, que permitan promover una Trigonometría al favorecimiento de los aspectos democráticos, sociales y culturales, relacionados con las competencias ciudadanas.
- Con la Constitución Política de 1991, el reconocimiento a la pluralidad y a la diversidad generó un cambio importante en el sistema educativo colombiano. El currículo debe ser diseñado por las instituciones escolares atendiendo a su contexto cultural promoviendo la identidad de las regiones. En este sentido, quienes diseñan el currículo son los profesores, los cuales identifican las necesidades de su comunidad y buscan solventarlas a partir del Proyecto Educativo Institucional. Con

este panorama, los libros de texto escolar cobran una gran importancia, ya que hacen parte de los insumos de los maestros en el diseño del currículo.

- El análisis de las tareas resueltas por los autores de los libros de texto de Trigonometría, posibilitaron generar cuestionamientos acerca de las relaciones entre los textos, los propósitos de la Educación Media, la historia de la Trigonometría y la historia del currículo propuesto. Estos cuestionamientos pueden generar diferentes percepciones en los posibles lectores, de manera que algunos pueden estar de acuerdo con las afirmaciones planteadas en este trabajo o rebatir las ideas presentadas. Un asunto fundamental con este ejercicio investigativo, es promover el debate académico y la continuidad en la investigación acerca de temas relacionados con el propósito general de este trabajo. Más adelante presentaremos otros cuestionamientos que quedan abiertos para futuras investigaciones.

5.2 CONCLUSIONES SOBRE EL APORTE DE LA HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA A LOS LIBROS DE TEXTO

- La Historia de las Matemáticas tiene diferentes usos tal como señala Erazo (2016). En el análisis realizado a los libros de texto de Trigonometría, en este ejercicio investigativo, hemos identificado como uso específico de la Historia de la Trigonometría en ellos: “Comprender la génesis de un objeto” y en un nivel de profundidad como señala Siu y Tzanakis (2004, citado en Erazo 2016, p. 21) “Alusión a la Historia de las Matemáticas”. El uso específico de la Historia de la Trigonometría se evidencia, generalmente, al inicio del texto, ya que en las primeras páginas se narran algunos aspectos como: qué tipos de problemas originaron la Trigonometría, quienes fueron los representantes principales y cuáles fueron sus aportes, entre otros. Por ejemplo, Abondano et al (2010, p.14) presentan que la obra más importante de Ptolomeo es el Almagesto, en la cual la Trigonometría está desarrollada en los capítulo 10 y 11 del libro primero. Además de esta nota mencionan que uno de los resultados más importantes es “*en un cuadrilátero ABCD inscrito en una circunferencia, la suma de los productos de los lados opuestos es iagual al producto de las diagonales*”. Aunque este uso específico de la HM va dirigido al docente, como señala Erazo (2016, p. 42), la presentación de situaciones como la mencionada anteriormente (en los libros de texto) puede hacer pasar dificultades a los estudiante para comprender la necesidad de su aprendizaje y puede generar un ambiente en el cual se vislumbre la importancia de identificar la génesis de dicho objeto matemático, como es el caso del resultado de Ptolomeo. Ahora bien, esta narración alude a referencias históricas de la obra y de matemáticos, de manera que el nivel de profundidad es "Alusión a HM". En el libro escrito por Abondano et al (2010) y otros de los analizados en este trabajo, se presentan notas históricas y anécdotas relacionadas con la Trigonometría y los personajes más representativos. Se puede establecer entonces que la Historia de la Trigonometría en los libros analizados pueden motivar el trabajo del docente y de los estudiantes. En nuestro caso, nos generó inquietud sobre cómo se resolvieron los problemas expuestos, en qué contexto se dieron y cuales fueron las dificultades presentadas en este proceso. Esperamos en un futuro profundizar sobre estos aspectos y enriquecer nuestras aulas de clase.

- Los autores de los libros de texto pueden hacer uso de la historia de la Trigonometría recontextualizando problemas resueltos por diferentes culturas, de manera que los estudiantes conozcan la naturaleza de esta rama de las matemáticas y pueda profundizar en su estudio.

5.3 CONCLUSIONES SOBRE LAS REFORMAS CURRICULARES EN COLOMBIA EN EL PERIODO 1951-2017

Las reformas curriculares en Colombia no han ocurrido únicamente porque la comunidad académica colombiana ha pensado en el mejoramiento del sistema educativo. Las reformas se han dado en gran medida por sucesos sociales, coyunturas políticas, intereses económicos de los gobiernos. Por ejemplo, el Decreto 45/62 se elaboró teniendo en cuenta situaciones académicas, sociales y políticas que se venían dando en la época. Eventos como la segunda guerra mundial, el lanzamiento del Sputnik y la lucha por el espacio entre Estados Unidos y Rusia, fueron detonantes para alertar al mundo sobre la necesidad de un desarrollo científico y tecnológico de las naciones con el propósito de defender su soberanía. Esta alerta provocó que los sistemas educativos de los países tuvieran modificaciones, poniendo su atención en ciencias como la Física y las Matemáticas. Es así como se desarrollaron seminarios y conferencias promoviendo la actualización de los currículos. En esa época tuvo lugar el Seminario Interamericano sobre Educación Secundaria en Santiago de Chile, la Conferencia Regional de Punta del Este y el Primer Seminario sobre problemas del bachillerato celebrado en la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Tunja. Estos eventos influyeron en la elaboración del Decreto 45/62.

Otro aspecto importante en las reformas curriculares colombianas, está relacionado con la introducción de las Matemáticas Modernas y la renovación curricular. Pues estos movimientos no tuvieron una influencia en la Trigonometía escolar, al menos desde la normatividad. El profesor Carlos Vasco realizó una propuesta que finalmente no se desarrolló debido a la Constitución de 1991, pues con ella se dio paso a la Ley General de Educación la cual promueve el desarrollo del currículo por parte de las instituciones escolares y no por parte del estado, el que era el encargado de definir el currículo colombiano.

Como señalamos anteriormente, en 1991 se promulga la Nueva Constitución Política de Colombia lo que dio paso a la creación de la Ley General de Educación, Ley 115/94 y posteriormente promovió la elaboración de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas. En la última década el gobierno ha manifestado la intención de hacer parte de la Organización para el Desarrollo Económico Europeo (OCDE), de tal forma que se han promulgado referentes como los Estándares Básicos por Competencias y los Derechos Básicos de Aprendizaje.

Los DBA (MEN, 2016), establecen un nuevo hito en las reformas atendiendo a que se constituyen en una orientación legislativa para los colegios oficiales, creando una contradicción entre la Ley 115 y el Decreto 501/17. Por una parte la Ley 115 promueve la autonomía de las instituciones para el diseño del currículo en relación con el reconocimiento de la diversidad y pluralidad, y por otro lado el Decreto 501/17 en los artículos 2.3.3.6.1.7 y 2.3.3.6.2.4 establece la obligatoriedad de los DBA dentro del currículo escolar.

Además de lo anterior y como se mencionó en la sección 2.5 “Historia del currículo propuesto de Trigonometría en el periodo 1951-2017” es posible establecer una correspondencia entre las etapas que se seleccionaron partir de la promulgación de los decretos con las reformas curriculares dadas en la educación en Matemáticas. Durante la etapa 1 (1951-1962) la reforma curricular presente estaba centrada en la resolución de problemas. En las etapas 2 y 3 (1962-1974 y 1974-1978) se encontraba en auge la inclusión de las Matemáticas Modernas en los curriculos escoles. En las Etapas 4 y 5 (1978-1984 y 1994-1994), el profesor Vasco propuso la renovación curricular que finalmente no se dio para el bachillerato. En la Etapa 6 (1994-2017) se promulgaron los Lineamientos Curriculares de Matemáticas con el enfoque del desarrollo de pensamientos y sistemas.

Con todas las reformas curriculares dadas en Colombia, es coherente pensar que los libros de texto deben hacer parte de estas transformaciones. Los libros deben ser puestos a favor de las necesidades de la sociedad, deben ser pertinentes para el proyecto de sociedad que se necesita desarrollar en cada época y por tanto deben promover los propósitos del sistema educativo.

5.4 CONCLUSIONES SOBRE EL EJERCICIO INVESTIGATIVO

- La selección de libros de las primeras etapas nos permitió construir algunas categorías de análisis, sin embargo, fue solo en el transcurso de la revisión de los textos escolares cuando fue necesario complementar la rejilla de análisis para poder identificar otras características que estaban presentes en los textos escolares.
- Los objetivos específicos propuestos para este ejercicio investigativo fueron un poco ambiciosos. Algunos de ellos, por sí mismos, darían para un trabajo de investigación independiente. Las problemáticas abordadas, tienen cada una el sufiente grado de complejidad para ser por sí mismas un trabajo autónomo, por ejemplo los aspectos históricos de la Trigonometría, el análisis curricular de la Trigonometría en Colombia o el análisis de la presencia de la Trigonometría en los libros de texto colombianos. Esto llevó a que algunos apartados del documento presentaran análisis muy generales.
- En los antecedentes teóricos se revisaron aquellos relacionados con los libros de texto de Matemáticas. Por ejemplo, el documento elaborado por Roberto Vidal y que luego fue presentado en el XIII CIAEM acerca de los libros de texto de Matemáticas. No obstante esta información no fue suficiente para los propósitos de

este trabajo, por eso fue necesario recurrir a otros documentos, de manera que fuera posible establecer los constructos necesarios en este ejercicio investigativo.

5.5 CUESTIONES ABIERTAS

- ¿Es fundamental para la sociedad y la escuela que los libros de texto respondan a los propósitos generales del sistema educativo?
- Si los libros no son diseñados en relación con los propósitos del sistema educativo ¿son funcionales?
- Si el libro de texto no se usa en los procesos de enseñanza y aprendizaje ¿es posible promover los propósitos del sistema educativo?
- ¿Se pueden apartar los libros de texto de Matemáticas de los propósitos del sistema educativo y desarrollar las competencias que necesita un ciudadano para desenvolverse en el mundo?

BIBLIOGRAFÍA

Abondano, W., Urquina, H., Beltrán, L., Suárez, A., & Rodríguez, B. (2010). *Mi aventura matemática 10.* Bogotá: editorial educativa.

Arango, E. (1949). *Memoria del Ministro de Educación Nacional.* Bogotá: Prensas del Ministerio de Educación Nacional.

Azula, R. (1951). *Memoria del Ministro de Educación Nacional.* Bogotá: Editorial Iquiema. Obtenido de http://www.idep.edu.co/wp_centrovirtual/?page_id=2544

Baldor, J. (1967). *Geometría plana y del espacio y Trigonometría.* Bilbao: Editorial Vasco Americana, S.A.

Barrantes, H., y Ruiz, Á. (1998). *La historia del comité interoamericano de educación matemática.* Bogotá, D.C.: Universidad de Costa Rica.

Bruño, G. (1939). *Álgebra y Trigonometría.* París: Editorial Bruño.

Buitrago, L., Romero, J., Ortíz, L., Gamboa, J., Morales, D., Castaño, J., & Jiménez, J. (2013). *Los Caminos del Saber. Matemáticas 10.* Bogotá: Santillana S.A.

Camargo, L. (s.f.). Estrategias Investigativas. En L. Camargo, *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática. Recursos para la captura de información y para el análisis.* Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional. .

Carvajal, A. (1958). *Memoria del Ministro de Educación al Congreso de 1958.* Bogotá: Imprenta Nacional.

Choppin, A. (2001). Pasado y presente de los manuales escolares. *Revista Educación y Pedagogía, XIII*, 209-229.

Cruz, G. (2018). *De Sirio a Ptolomeo: una problematización de las nociones trigonométricas.* Unidad Zacatenco: Cinvestav.

Dabiri, C. (2003). *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry : subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy.* Iowa: University of Iowa.

Decreto 0075. (1951). *Plan de estudios para la enseñanza secundaria.* Bogotá: Diario Oficial de la República de Colombia.

Decreto 045. (1962). *Ciclo Básico de Educación Media.* Bogotá: Diario Oficial de la República de Colombia.

Decreto 080. (1974). *Se deroga el Decreto número 045 de 1962.* Bogotá: Diario Oficial de la República de Colombia.

Decreto 1002. (1984). *Plan de Estudios para la Educación Preescolar, Básica (Primaria y Secundaria) y Media Vocacional de la Educación Formal Colombiana.* Bogotá: Diario Oficial de la República de Colombia.

Decreto 1419. (1978). *Normas y orientaciones básicas para la administración curricular en los niveles de educación pre-escolar básica (primaria y secundaria) media vocacional e intermedia profesional.* Bogotá: Diario Oficial de la República de Colombia.

Decreto 1710. (1963). *Plan de estudios de la Educación Primaria Colombiana.* Bogotá: Diario Oficial de la República de Colombia.

Decreto 2550. (1951). *Modificaciones en el Plan de Estudios de Enseñanza Secundaria.* Bogotá: Diario Oficial de la República de Colombia.

Decreto 2893. (1945). *Plan de estudios para los Colegios de Bachillerato.* Bogotá: Diario Oficial Número 26000.

Erazo, J. (2016). *Categorías de usos de la historia de las matemáticas en la educación en matemáticas.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Fernández, M., Caballero, P., y Fernández, J. (2017). El libro de texto como objeto de estudio y recurso didáctico para el aprendizaje: fortalezas y debilidades. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 201-217.

Gómez, A. (2014). Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica: Cincuenta años de reforma en el currículo colombiano de matemática en los niveles básico y medio de educación. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(38), 155-176.

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista Suma*(45), 17-28.

Graffe, G., y Orrego, G. (2013). El texto escolar colombiano y las políticas educativas durante el siglo XX. *Itinerario Educativo*, 91-113.

Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas.* Cali: Universidad del Valle.

Hirsch, C., Schoen, H., Larson, R., y Hostetler, R. (1989). *Matemáticas 5.* Bogotá: Mc Graw Hill.

Indaburo, C., Jiménez, J., y Sarmiento, C. (2016). *Aportes de la historia de las matemáticas al conocimiento didáctico del contenido del profesor de matemáticas en formación avanzada sobre las ecuaciones trigonométricas.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Ley Nº 115. (1994). *Ley General de Educación.* Bogotá: Congreso de la República de Colombia.

Londoño, N., y Bedoya, H. (1984). *Matemática Progresiva 10.* Bogotá: Norma.

Londoño, N., y Guarín, H. (1995). *Dimensión Matemática 10.* Bogotá: Grupo Editorial Norma.

Mansfield, D., y Wildberger, N. (2017). Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry. *Historia Mathematica*(44), 395-417.

Massa, M., Romero, F., y Guevara, I. (2006). Teaching mathematics through history: Some trigonometric concepts. En M. Kokowski, *The Global and the Local: The History of Science and the Cultural Integration of Europe* (págs. 150-157). Cracow, Poland.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogot: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje V.2.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Montiel, G. (2005). *Estudio sociepistemológico de la función trigonométrica.* México, DF: Instituto Politécnico Nacional.

Moreno, V. (2006). *Conexiones Matemáticas 10.* Bogotá: Norma.

Moreno, V., y Restrepo, M. (1995). *Alfa 10.* Bogotá: Norma.

Naranjo, A. (1959). *Memoria del Ministro de Educación al Congreso de 1959.* Bogotá: Imprenta Nacional.

OCDE. (2016). *Revisión de políticas nacionales de educación. La educación en Colombia.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Organización para la Cooperación y el desarrollo Económico (OCDE). (2016). *La Educación en Colombia.* París: Ministerio de Educación Nacional.

Paéz, L. (2016). *El libro de texto escolar y la tercera misión pedagógica alemana.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Picado, M., y Rico, L. (2011). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA*, 11-27.

Piñuel, J. (2002). *Epistemología, metodología y técnicas del análisis de contenido.* Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Pulpón, A. (2010). *Historia del Papiro de Rhind y similares.*

Quiceno, H. (2001). El manual escolar: pedagogía y formas narrativas. *Revista Educación y Pedagogía*, 53-67.

Samacá, G. (2011). Los manuales escolares como posibilidad investigativa para la historia de la educación: elementos para una definición. *Revista Historia de la Educación Latinoamericana*, 199-224.

Sánchez, C. (1999). Matemáticas en Colombia en el siglo XIX. *Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 22*, 687-705.

SINC. (12 de 2018). *Una tablilla babilónica esconde la tabla trigonométrica más antigua del mundo*. Obtenido de https://www.agenciasinc.es/Noticias/Una-tablilla-babilonica-esconde-la-tabla-trigonometrica-mas-antigua-del-mundo

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA, 6*(1), 3-26.

Takeuchi, Y., Wills, D., y Guarín, H. (1984). *Hacia la Matemática. Un Enfoque Estructurado. Grado 10.* Bogotá: Editorial Temis S. A.

Várilly, J. (1995). La Geometría en su contexto histórico. *Las Matemáticas y su Enseñanza, 6*(17), 21-34. Obtenido de http://www.kerwa.ucr.ac.cr/bitstream/handle/10669/11350/Fortuna.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Vasco, C. (1987). *Las matemáticas de 8º a 11º grado.* Bogotá: Sin publicar.

Wargny, C. (1910). *Historia de las Matemáticas.*

ANEXOS

ANEXO 1. INVESTIGACIONES EN HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA Y SU PRESENCIA EN EL CURRÍCULO ESCOLAR PRESENTADAS EN EVENTOS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LOS ÚLTIMOS AÑOS

Tabla 25

Eventos en Educación Matemática

Evento	Investigaciones en historia de la Trigonometría y su presencia en el currículo escolar	Autor (es)	No. del evento, año y país
Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe (CEMACYC)	El pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: el caso de las relaciones trigonométricas.	Ferney Tavera Acevedo; Jhony Alexander Villa-Ochoa.	I CEMACYC, 2013, República Dominicana.
	Resumen. En el presente documento reportamos parte de los resultados obtenidos de una investigación que centró su atención en el estudio de algunos tópicos de la trigonometría plana presente en los libros de texto de matemáticas de la Educación Media (15 - 18 años). En particular, nos propusimos interpretar la manera en que los libros de texto de matemáticas ponen de relieve los aspectos variacionales en estos tópicos. A través de la técnica del análisis de contenido pudimos observar que generalmente esta temática se desarrolla a través de expresiones algebraicas para calcular "datos fijos y desconocidos" de un triángulo; los resultados del estudio muestran la necesidad de diseñar propuestas alternativas, en las cuales se haga hincapié en la visualización de relaciones "dinámicas" y funcionales entre los ángulos y los lados de un triángulo.		
Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIEM)	Teoría de situaciones didácticas (TSD) y trigonometría, una investigación de aprendizaje en matemática en la enseñanza media.	Gutenberg Ferreira; María Lane; Herlane Araújo	VIII CIEM, 2017, Madrid, España.
	Resumen. Este trabajo tiene como objetivo discutir la aplicabilidad de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) en problemas trigonométricos,		

con el propósito de instigar el aprendizaje, haciendo del estudiante un investigador. Entendemos la Trigonometría como el estudio de los triángulos y de las relaciones entre sus lados y ángulos, percibiendo que en la vida escolar la Trigonometría es también asociada a la facilidad en saber diferenciar y operacionalizar sus más diversos elementos y relaciones. Para ello, se definieron los siguientes objetivos de forma específica: discutir situaciones-problemas en Trigonometría; analizar los caminos utilizados para dicha resolución; mediar el aprendizaje sugiriendo nuevas formas de resolución. Siendo así, se tiene como problemática orientadora: de que ¿cómo los estudiantes perciben los métodos de resolución de problemas trigonométricos según los presupuestos de la TSD? Se tomó por hipótesis que la dificultad sentida por el estudiante es gradualmente reducida a partir de las investigaciones y mediaciones sugeridas por la TSD. Esta investigación fue aplicada con estudiantes de la escuela secundaria del IFCE (campus Juazeiro del Norte), a través de talleres, lanzando problemas trigonométricos que instigaron al alumnado a proponer nuevos métodos de solución viendo la mediación del conocimiento formado por él y el profesor.

El objeto matemático triángulo en teoremas de Regiomontanus: Un estudio de sus demostraciones mediadas por Geogebra.	Celina Abar; Luis Felipe Mod	VIII CIEM, 2017, Madrid, España.

Resumen. Esta investigación es el resultado de una disertación de Maestría Académica y tiene como objetivo investigar teoremas de Regiomontanus, sobre los triángulos, con la utilización del software GeoGebra. Regiomontanus (1436-1476) fue un matemático cuya producción contribuyó especialmente en el desarrollo de la Trigonometría con la obra De Triangulus Omnimodis Libre Quinque, publicado en 1533 y que es el foco de esta investigación. En el Libro I de esta obra, se encuentran teoremas cuyas demostraciones involucran construcciones de triángulos cumplidos algunas condiciones dadas. Las demostraciones de algunos de estos teoremas son analizadas por la mediación de los movimientos dinámicos del GeoGebra en la perspectiva de las funciones de la demostración según Villares. Se observa la necesidad de recorrer los diferentes papeles de la demostración y la importancia de la utilización de GeoGebra como instrumento de

investigaciones en las que es posible identificar que algunas posibilidades no están contempladas en las demostraciones de Regiomontanus. A la investigación, en su desarrollo, también indica posibilidades de cómo un legado de la Historia de las Matemáticas puede tornarse una actividad de investigación en el aula.		
Relato de clase interdisciplinar: una actividad práctica por medio de la matemática y astronomía	Flavio Borges; Tatiane Xavier	VIII CIEM, 2017, Madrid, España.
Resumen. El trabajo presenta una experiencia de clase desarrollada interdisciplinariamente entre Matemáticas y Geografía. Participan en la actividad estudiantes de 6º año de la enseñanza fundamental II, privilegiando contenidos de Matemática y Geografía interdisciplinaria. El objetivo está pautado en realizar actividades prácticas astronómicas que apuntan a auxiliar el proceso de enseñanza aprendizaje de escuelas públicas. Los materiales didácticos presentes en la enseñanza pública brasileña tienen como característica la ausencia de interdisciplinariedad y aprendizaje significativo. La confección del reloj solar, adaptado matemáticas y geográficamente a la capital brasileña, proporciona la formación gradual del conocimiento científico. Abordan los conceptos, equinoccio, solsticio, traslación, latitud, longitud, medida, ángulo, distancia, perpendicularidad, circunferencia, triángulo, semejanza, regla de tres y la trigonometría.		
Desarrollo del pensamiento trigonométrico en la transición de la razón trigonométrica a la función trigonométrica	Olivia Schulz; Gisela Montiel.	VIII CIEM, 2017, Madrid, España.
Resumen. En el marco de una investigación de doctorado se estudia el desarrollo del pensamiento trigonométrico en la transición de la razón trigonométrica a la función trigonométrica, en el nivel bachillerato, se realizó una revisión bibliográfica del tema desde los antecedentes históricos, dificultades reportadas y propuestas de experiencias didácticas; con la intención de plantear una propuesta desde la teoría Socioepistemológica que nos oriente a problematizar el saber matemático que se presenta en esta transición. La revisión bibliográfica dará luz para reconocer los fundamentos teóricos que se utilizarán en el desarrollo del trabajo de investigación; la		

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td colspan="3">metodología que se pretende utilizar es la de experimentos de diseño, dado que nos proponemos diseñar tareas de intervención en el aula basados en una trayectoria hipotética de aprendizaje fundamentada en investigaciones antecedentes. La investigación está en la etapa de la fundamentación teórica, contemplando de momento los constructos de razonamiento covariacional, la construcción social del conocimiento trigonométrico y las aproximaciones e ideas básicas inherentes de la Geometría en el aprendizaje de la Trigonometría. Las siguientes etapas de la investigación contemplan fundamentar la trayectoria hipotética de aprendizaje, el diseño de tareas, la puesta en escena del diseño instruccional, la recolección y análisis de datos.</td></tr>
<tr><td>Emergencia de las nociones trigonométricas: un estudio sociohistórico</td><td>Gerardo Cruz; Gisela Montiel.</td><td>VIII CIEM, 2017, España.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Resumen. La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) sostiene que el conocimiento matemático, en tanto producción social, no fue diseñado para ser enseñado. Por tal motivo, su introducción en el sistema educativo produce discursos, denominados genéricamente discurso Matemático Escolar (dME). Consecuencia del dME asociado a la trigonometría –llamado discurso Trigonométrico Escolar (dTE)– emerge el fenómeno de aritmetización de la trigonometría, en el que las relaciones trigonométricas se disocian de las construcciones geométricas, que históricamente les dieron origen y además las preceden de manera general en los programas y planes de estudio, y se convierten en el proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados del triángulo. Atendiendo esta problemática, y desde la perspectiva que ofrece la TSME, hemos comenzado un proyecto de investigación cuya intención final es el rediseño del dTE en el contexto de la formación inicial docente en Honduras. La primera etapa de este proyecto consiste en realizar una problematización en un contexto histórico de las razones trigonométricas a partir del análisis sociohistórico y documental de los preliminares matemáticos del Almagesto de Ptolomeo. De los fundamentos, métodos y resultados de esta primera etapa pretendemos dar cuenta en este espacio.</td></tr>
<tr><td>La medición indirecta de distancias y las nociones trigonométricas: una</td><td>Gerardo Cruz; Gisela Montiel.</td><td>VIII CIEM, 2017, Madrid,</td></tr>
</table>

	experiencia de aula con profesores en formación		España.
	Resumen. En este espacio se comparten los resultados de una visita académica llevada a cabo en la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Honduras. Misma que consistió en un taller con estudiantes del segundo año del Profesorado en Matemáticas que cursan el espacio pedagógico de Trigonometría y Geometría Analítica, y de dos reuniones con el docente a cargo de dicho espacio. La revisión bibliográfica y la problematización de la matemática en un contexto histórico –llevadas a cabo en el marco de un proyecto de tesis en desarrollo– nos permitieron ubicar algunos fenómenos didácticos asociados a la enseñanza y aprendizaje de las nociones trigonométricas, así como elementos sociohistóricos trascendentales en la construcción de las mismas, estos constituyeron el fundamento de diseño de las actividades del taller, denominado Medición Indirecta de Distancias. Como resultado, el taller permitió a los participantes confrontar el significado aritmético asociado a la razón trigonométrica, como la división de longitudes de los lados de un triángulo, y al mismo tiempo reflexionar, mediante el trabajo geométrico, sobre la naturaleza particular de la relación no proporcional que se establece entre un ángulo y la longitud que subtiende.		
	Un análisis de la historia de la trigonometría en algunos libros didácticos de matemática del año 9 evaluados por el PNLD	Saul Martins López; Ana Carolina Costa.	VII CIEM, 2013, Montevideo, Uruguay.
	Resumen. El libro didáctico de Matemáticas sigue siendo uno de los recursos más utilizados por los profesores y alumnos de la Enseñanza Fundamental y Medio, aunque hoy tecnologías como las pizarras interactivas y las tabletas permean nuestra sala de clase. En este sentido, sigue siendo constante la dificultad conceptual de algunos contenidos de la Matemática por parte de los alumnos. La enseñanza y el aprendizaje de Trigonometría no es diferente. Conceptos como seno, coseno y tangente que pasan la vida académica de esos alumnos dejando a veces profundas huellas. Uno de los rechazos muchos discutidos por los investigadores brasileños es la utilización de la Historia de la Matemáticas para desmitificar el carácter negativo de las matemáticas tratando de humanizarla. Nuestro estudio busca analizar en tres colecciones		

	de libros didácticos de Matemáticas del 9º año de la Enseñanza Fundamental indicadas en la Guía del Libro Didáctico producido por el PNLD / ME observando el contenido de Trigonometría en el Triángulo Rectángulo en una perspectiva de la Historia de la Historia Matemáticas. Así, percibimos que, en las colecciones analizadas, poco encontramos recortes que implican pasajes del contenido por medio de la Historia de las Matemáticas. Algunos registros que aparecen están relacionados con hechos curiosos del contenido, no conectado a la potencialidad real que la historia de la matemática puede ser utilizada.		
Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME)	Análisis Histórico-Epistemológico en la Educación Matemática	Fabián Romero; Flor Rodríguez; Sara Henao.	RELME 30, 2016, México.
	Resumen. Investigadores en el campo de la Educación Matemática han señalado la importancia de realizar estudios históricos-epistemológicos de los conceptos matemáticos, incluso existe una amplia discusión sobre los aportes de la historia de la matemática en los procesos de enseñanza-aprendizaje de los conceptos. En parte, esto responde a la problemática de la consideración de los conceptos sin una contextualización histórica. En este artículo, mostramos dos investigaciones cuyo objetivo fue realizar un estudio histórico-epistemológico sobre la constitución de conceptos de la matemática, a saber, las ecuaciones diferenciales ordinarias y las series trigonométricas de Fourier. Se discutirá además sobre la metodología de la investigación histórica.		
	Emergencia de las nociones trigonométricas en el almagesto	Gerardo Cruz-Márquez; Gisela Montiel Espinosa	RELME 30, 2016, México.
	Resumen. Como primera etapa de un proyecto de investigación cuya intención final es el rediseño del discurso Trigonométrico Escolar en el contexto de la formación inicial docente en Honduras, nos planteamos una problematización de lo trigonométrico en un escenario histórico. Dicha problematización consta de un análisis sociohistórico y documental del Almagesto de Ptolomeo, obra en la que la Trigonometría emerge como geometrización de los fenómenos celestes. Si bien este análisis no ha concluido, nos ha permitido ser conscientes de la influencia de las		

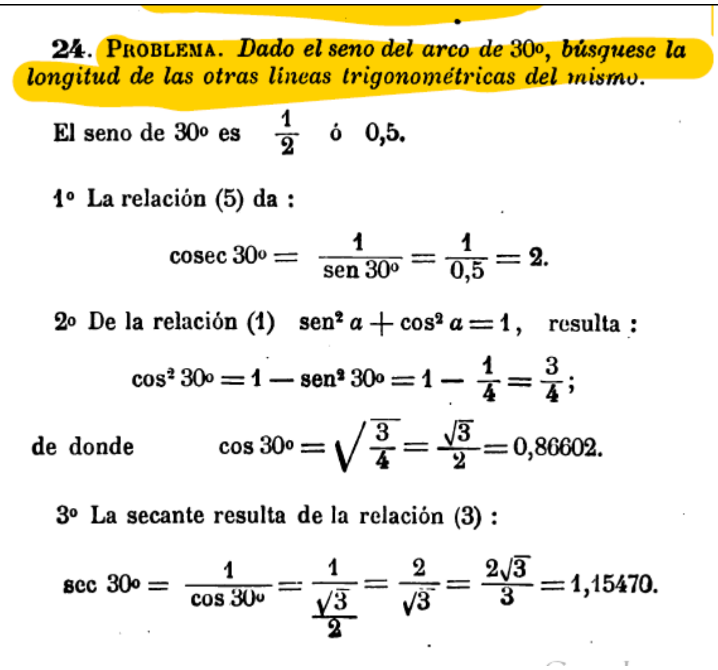
	circunstancias sociales, culturales e institucionales en la estructura, racionalidad y lenguaje utilizado por Ptolomeo en el Almagesto, y en la emergencia y evolución de nociones trigonométricas en la dicha obra.		
	Problematización de la geometría en la génesis histórica de la trigonometría	Olivia Schulz; Gisela Montiel.	RELME 30, 2016, México.
	Resumen. Presentamos el avance de una investigación que busca estudiar la transición de la trigonometría en un contexto estático-geométrico (cuerdas y razones trigonométricas) a la trigonometría en un contexto dinámico-variacional (función trigonométrica), en el nivel medio superior. El avance se centra en un análisis documental de fuentes históricas relativas a la Geometría y a la Trigonometría, con la finalidad de establecer una base de conocimientos necesarios y problemáticas que contextualicen su construcción y resignificación. La finalidad de esta problematización es devolver los procesos de construcción geométrica que le dan sentido y razón de ser al aprendizaje de la Trigonometría.		
Encuentro colombiano de matemática educativa (ECME)	Unidad Cognitiva entre los procesos de argumentación y demostración en trigonometría	Jorge Fiallo	ECME 13, 2013, Bogotá, Colombia.
	Resumen. Con el objetivo de analizar la unidad o ruptura cognitiva como una herramienta que permita, entre otras cosas, identificar las dificultades y los avances que se presentan en los procesos de argumentación y de demostración en el contexto de aprendizaje de las razones trigonométricas en un sistema de geometría dinámica, presentamos algunos ejemplos del análisis de la existencia de unidad o ruptura cognitiva presente en la resolución de varios problemas de trigonometría. Analizamos, detallamos y explicamos cada uno de los elementos del sistema de referencia y de la estructura para proponer cinco casos de unidad o ruptura cognitiva de acuerdo con nuestra caracterización de los términos argumentación y demostración. Planteamos algunas hipótesis que surgen como nuevos aportes a la investigación del estudio de la unidad cognitiva y al proceso de demostración.		
Encuentro de geometría y sus aplicaciones.	El paso de la razón a la función trigonométrica: revisión de algunos elementos históricos en la	Carlos León	XX Encuentro de Geometría, Bogotá,

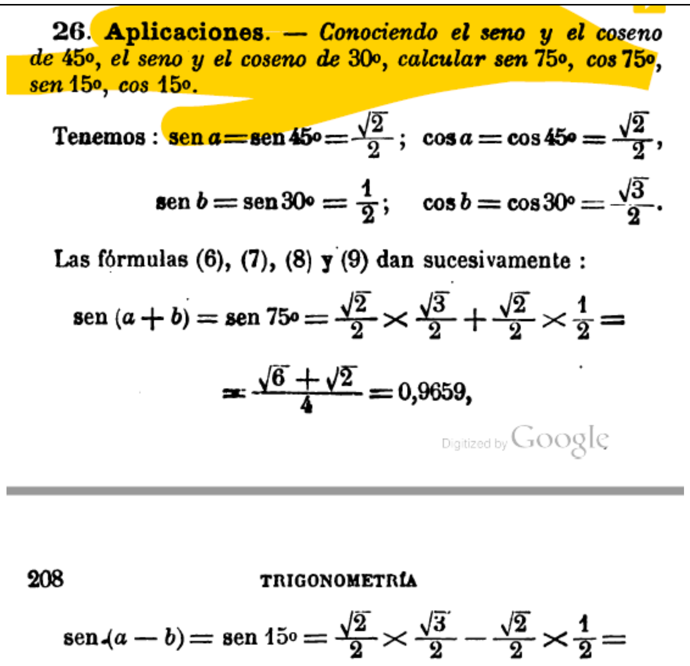
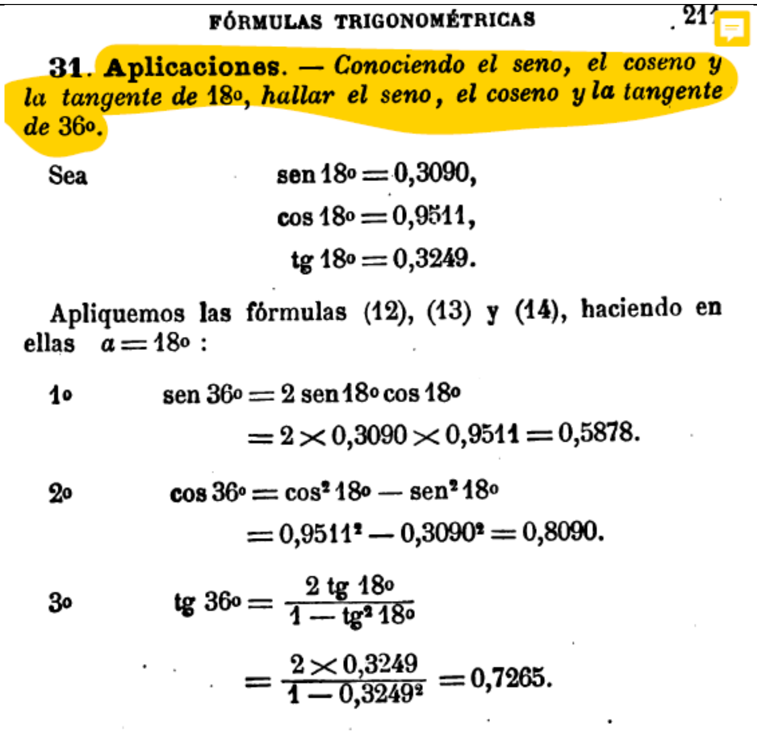
	construcción de la función trigonométrica.	Colombia.
	Resumen. La noción de función trigonométrica ha estado asociada a diversas prácticas que la han convertido en un concepto complejo que tiene sus orígenes en los primeros cálculos astronómicos y que adquiere su formalización con el planteamiento de respuestas a problemas generados en contextos físicos. El análisis de los episodios asociados a la evolución del concepto de función trigonométrica nos permite identificar una serie de herramientas que se vuelven pertinentes para el planteamiento de escenarios en donde se resignifiquen algunas características de la función en torno a su uso y a una nueva interpretación de la misma.	

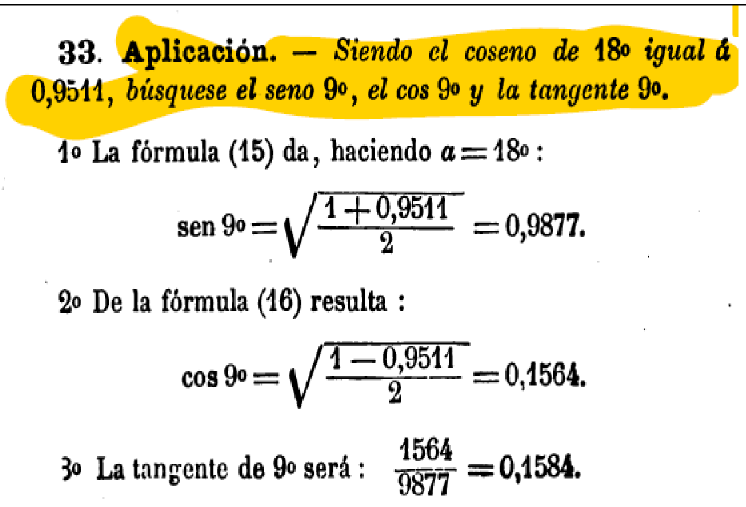
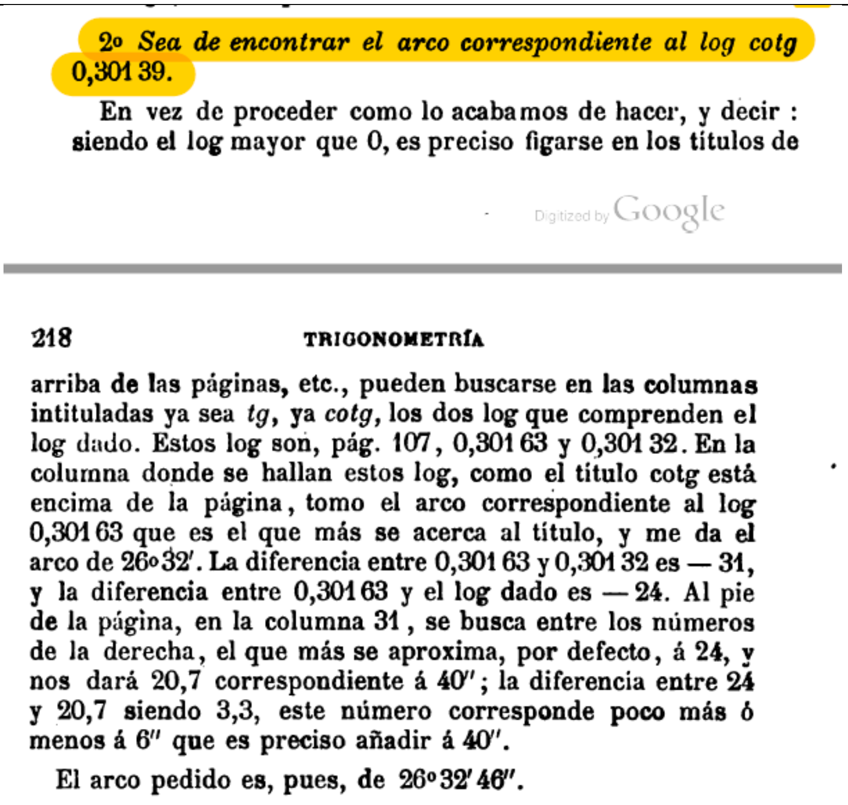
Nota. Documentos encontrados en las memorias de los diferentes eventos en Educación Matemática que se han realizado en los últimos 5 años

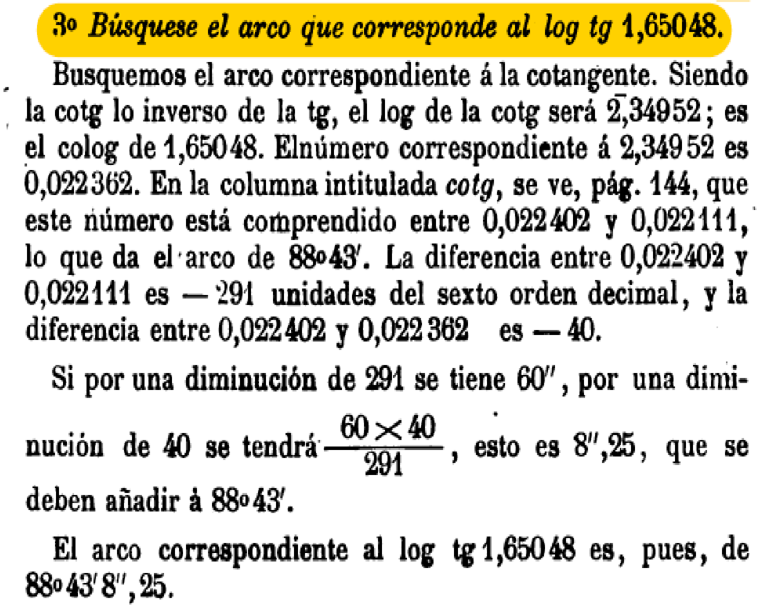
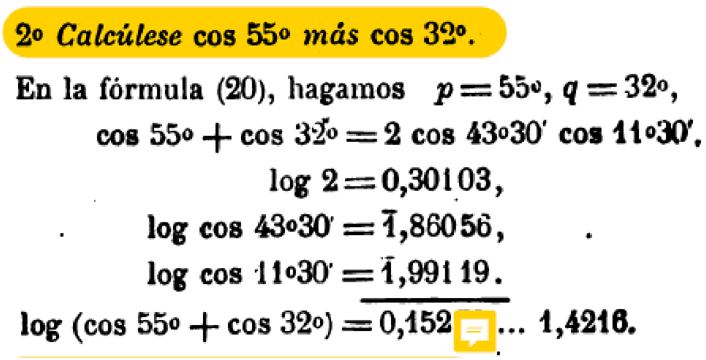
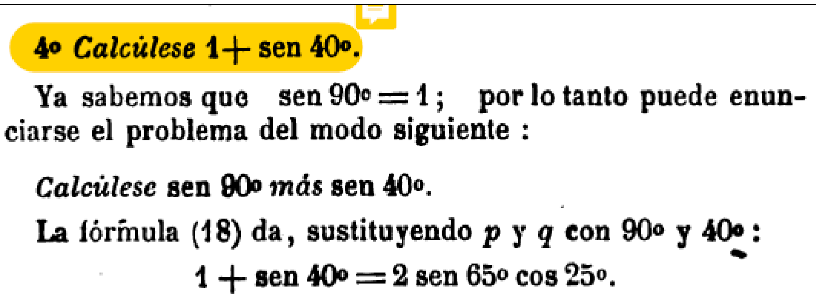
ANEXO 2. ALGUNAS TAREAS RESUELTAS POR LOS AUTORES SELECCIONADAS DE LOS LIBROS DE TEXTO DE TRIGONOMETRÍA EN EL PERIODO 1951-2017.

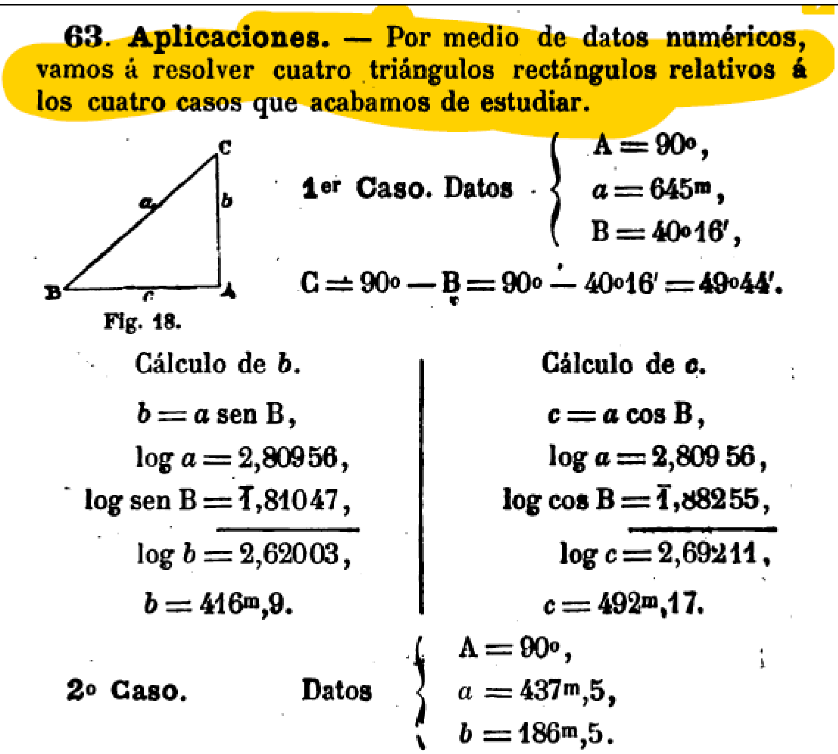
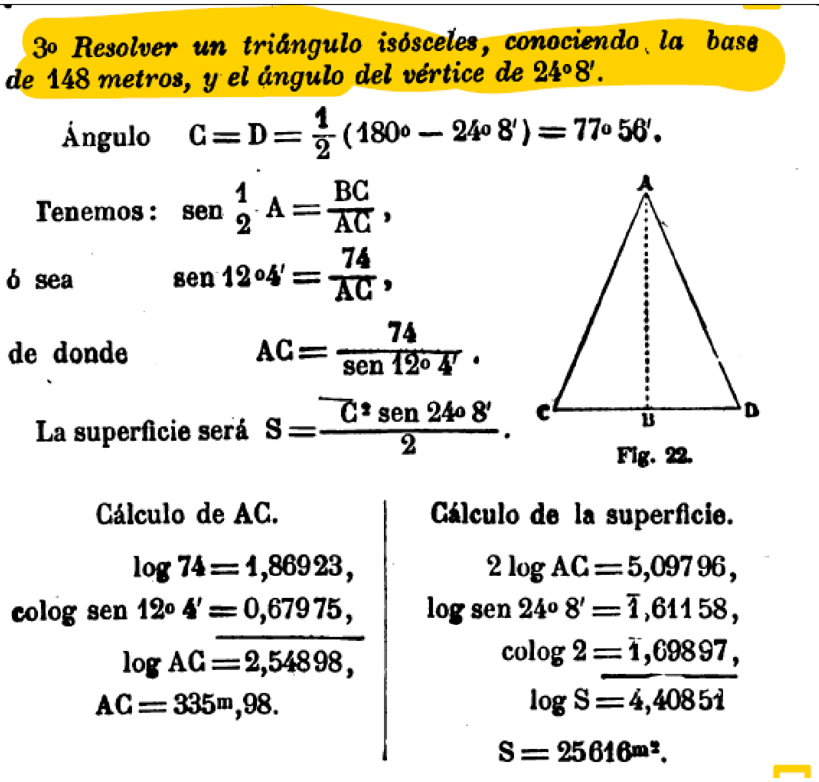
ETAPA 1. (1951-1962). LIBRO ALGEBRA Y TRIGONOMETRÍA (G. M. BRUÑO, 1939)

L1-U2-T2	 24. PROBLEMA. *Dado el seno del arco de 30º, búsquese la longitud de las otras líneas trigonométricas del mismo.* El seno de 30º es $\frac{1}{2}$ ó 0,5. 1º La relación (5) da: $\text{cosec } 30^{\circ} = \frac{1}{\text{sen } 30^{\circ}} = \frac{1}{0,5} = 2.$ 2º De la relación (1) $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$, resulta: $\cos^2 30^{\circ} = 1 - \text{sen}^2 30^{\circ} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; de donde $\cos 30^{\circ} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,86602.$ 3º La secante resulta de la relación (3): $\sec 30^{\circ} = \frac{1}{\cos 30^{\circ}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1,15470.$

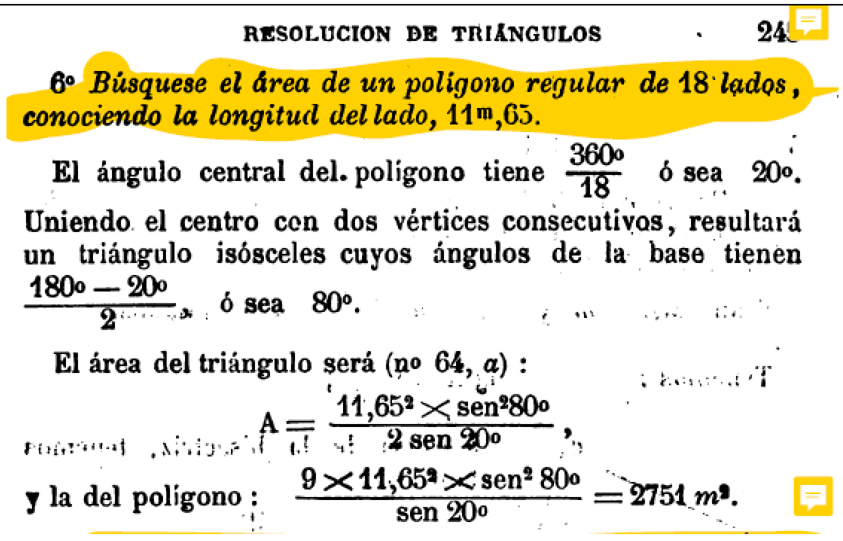
L1-U2-T3	 **26**. **Aplicaciones**. — *Conociendo el seno y el coseno de 45°, el seno y el coseno de 30°, calcular sen 75°, cos 75°, sen 15°, cos 15°.* Tenemos : $\text{sen}\, a = \text{sen}\, 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos a = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{sen}\, b = \text{sen}\, 30° = \frac{1}{2}$; $\cos b = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Las fórmulas (6), (7), (8) y (9) dan sucesivamente : $\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\, 75° = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} =$ $= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = 0{,}9659,$ Digitized by Google 208 TRIGONOMETRÍA $\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}\, 15° = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} =$
L1-U2-T5	 FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS 21 **31**. **Aplicaciones**. — *Conociendo el seno, el coseno y la tangente de 18°, hallar el seno, el coseno y la tangente de 36°.* Sea $\text{sen}\, 18° = 0{,}3090,$ $\cos 18° = 0{,}9511,$ $\text{tg}\, 18° = 0{,}3249.$ Apliquemos las fórmulas (12), (13) y (14), haciendo en ellas $a = 18°$: 1° $\text{sen}\, 36° = 2\, \text{sen}\, 18° \cos 18°$ $= 2 \times 0{,}3090 \times 0{,}9511 = 0{,}5878.$ 2° $\cos 36° = \cos^2 18° - \text{sen}^2 18°$ $= 0{,}9511^2 - 0{,}3090^2 = 0{,}8090.$ 3° $\text{tg}\, 36° = \frac{2\, \text{tg}\, 18°}{1 - \text{tg}^2\, 18°}$ $= \frac{2 \times 0{,}3249}{1 - 0{,}3249^2} = 0{,}7265.$

L1-U2-T6	 **33. Aplicación.** — *Siendo el coseno de 18° igual á 0,9511, búsquese el seno 9°, el cos 9° y la tangente 9°.* 1° La fórmula (15) da, haciendo $a = 18°$: $\text{sen } 9° = \sqrt{\frac{1+0,9511}{2}} = 0,9877.$ 2° De la fórmula (16) resulta : $\cos 9° = \sqrt{\frac{1-0,9511}{2}} = 0,1564.$ 3° La tangente de 9° será : $\frac{1564}{9877} = 0,1584.$
L1-U3-T4	 2° *Sea de encontrar el arco correspondiente al log cotg 0,301 39.* En vez de proceder como lo acabamos de hacer, y decir : siendo el log mayor que 0, es preciso figarse en los títulos de Digitized by Google arriba de las páginas, etc., pueden buscarse en las columnas intituladas ya sea *tg*, ya *cotg*, los dos log que comprenden el log dado. Estos log son, pág. 107, 0,301 63 y 0,301 32. En la columna donde se hallan estos log, como el título cotg está encima de la página, tomo el arco correspondiente al log 0,301 63 que es el que más se acerca al título, y me da el arco de 26° 32′. La diferencia entre 0,301 63 y 0,301 32 es — 31, y la diferencia entre 0,301 63 y el log dado es — 24. Al pie de la pàgina, en la columna 31, se busca entre los números de la derecha, el que más se aproxima, por defecto, á 24, y nos dará 20,7 correspondiente á 40″; la diferencia entre 24 y 20,7 siendo 3,3, este número corresponde poco más ó menos á 6″ que es preciso añadir á 40″. El arco pedido es, pues, de 26° 32′ 46″.

L1-U3-T7	 **3° *Búsquese el arco que corresponde al log tg* 1,65048.** Busquemos el arco correspondiente á la cotangente. Siendo la cotg lo inverso de la tg, el log de la cotg será $\bar{2},34952$; es el colog de 1,65048. Elnúmero correspondiente á 2,34952 es 0,022362. En la columna intitulada *cotg*, se ve, pág. 144, que este número está comprendido entre 0,022402 y 0,022111, lo que da el arco de 88°43′. La diferencia entre 0,022402 y 0,022111 es -291 unidades del sexto orden decimal, y la diferencia entre 0,022402 y 0,022362 es -40. Si por una diminución de 291 se tiene 60″, por una diminución de 40 se tendrá $\frac{60 \times 40}{291}$, esto es 8″,25, que se deben añadir á 88°43′. El arco correspondiente al log tg 1,65048 es, pues, de 88°43′8″,25.
L1-U3-T10	 **2° *Calcúlese* cos 55° *más* cos 32°.** En la fórmula (20), hagamos $p = 55^{\circ}$, $q = 32^{\circ}$, $\cos 55^{\circ} + \cos 32^{\circ} = 2 \cos 43^{\circ}30' \cos 11^{\circ}30'.$ $\log 2 = 0{,}30103,$ $\log \cos 43^{\circ}30' = \bar{1}{,}86056,$ $\log \cos 11^{\circ}30' = \bar{1}{,}99119.$ $\log (\cos 55^{\circ} + \cos 32^{\circ}) = 0{,}152$[illegible]… 1,4216.
L1-U3-T12	 **4° *Calcúlese* 1 + sen 40°.** Ya sabemos que $\operatorname{sen} 90^{\circ} = 1$; por lo tanto puede enunciarse el problema del modo siguiente : *Calcúlese* sen 90° *más* sen 40°. La fórmula (18) da, sustituyendo p y q con 90° y 40° : $1 + \operatorname{sen} 40^{\circ} = 2 \operatorname{sen} 65^{\circ} \cos 25^{\circ}.$

L1-U4-T1	 **63. Aplicaciones.** — Por medio de datos numéricos, vamos á resolver cuatro triángulos rectángulos relativos á los cuatro casos que acabamos de estudiar. Fig. 18. **1er Caso.** Datos $\begin{cases} A = 90^\circ, \\ a = 645^m, \\ B = 40^\circ 16', \end{cases}$ $C = 90^\circ - B = 90^\circ - 40^\circ 16' = 49^\circ 44'$. Cálculo de *b*. $b = a \operatorname{sen} B,$ $\log a = 2{,}80956,$ $\log \operatorname{sen} B = \bar{1}{,}81047,$ $\log b = 2{,}62003,$ $b = 416^m{,}9.$ Cálculo de *c*. $c = a \cos B,$ $\log a = 2{,}80956,$ $\log \cos B = \bar{1}{,}88255,$ $\log c = 2{,}69211,$ $c = 492^m{,}17.$ **2o Caso.** Datos $\begin{cases} A = 90^\circ, \\ a = 437^m{,}5, \\ b = 186^m{,}5. \end{cases}$
L1-U4-T5	 3o *Resolver un triángulo isósceles, conociendo la base de 148 metros, y el ángulo del vértice de 24°8'.* Ángulo $C = D = \frac{1}{2}(180^\circ - 24^\circ 8') = 77^\circ 56'.$ Tenemos: $\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \frac{BC}{AC},$ ó sea $\operatorname{sen} 12^\circ 4' = \frac{74}{AC},$ de donde $AC = \frac{74}{\operatorname{sen} 12^\circ 4'}.$ La superficie será $S = \frac{\overline{C}^2 \operatorname{sen} 24^\circ 8'}{2}.$ Fig. 22. Cálculo de AC. $\log 74 = 1{,}86923,$ $\operatorname{colog} \operatorname{sen} 12^\circ 4' = 0{,}67975,$ $\log AC = 2{,}54898,$ $AC = 335^m{,}98.$ Cálculo de la superficie. $2 \log AC = 5{,}09796,$ $\log \operatorname{sen} 24^\circ 8' = \bar{1}{,}61158,$ $\operatorname{colog} 2 = \bar{1}{,}69897,$ $\log S = 4{,}40851$ $S = 25616^{m^2}.$
L1-U4-T8	

<table>
<tr>
<td></td>
<td>



RESOLUCION DE TRIÁNGULOS 24

6° ***Búsquese el área de un polígono regular de 18 lados, conociendo la longitud del lado, 11m,65.***

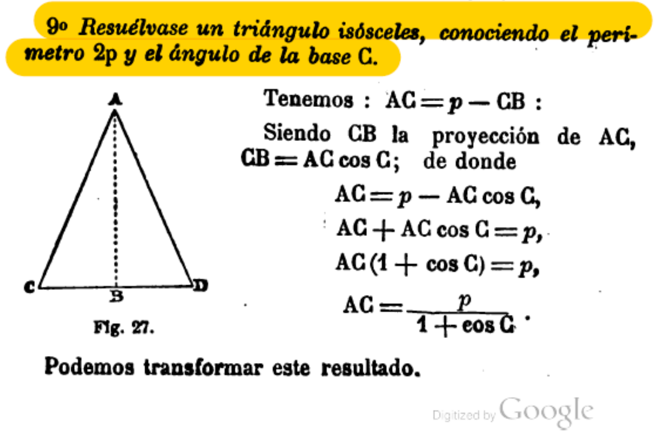
El ángulo central del polígono tiene $\frac{360°}{18}$ ó sea 20°. Uniendo el centro con dos vértices consecutivos, resultará un triángulo isósceles cuyos ángulos de la base tienen $\frac{180° - 20°}{2}$, ó sea 80°.

El área del triángulo será (nº 64, *a*) :

$$A = \frac{11,65^2 \times \text{sen}^2 80°}{2 \text{ sen } 20°},$$

y la del polígono : $\frac{9 \times 11,65^2 \times \text{sen}^2 80°}{\text{sen } 20°} = 2751 \, m^2.$

</td>
</tr>
<tr>
<td>L1-U4-T11</td>
<td>



9° ***Resuélvase un triángulo isósceles, conociendo el perímetro 2p y el ángulo de la base C.***

Fig. 27.

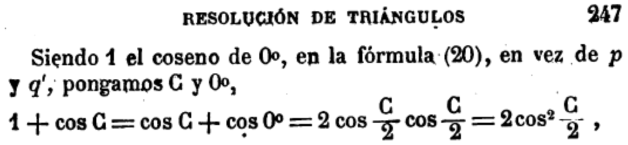
Tenemos : $AC = p - CB$:

Siendo CB la proyección de AC, $CB = AC \cos C$; de donde

$$AC = p - AC \cos C,$$
$$AC + AC \cos C = p,$$
$$AC (1 + \cos C) = p,$$
$$AC = \frac{p}{1 + \cos C}.$$

Podemos transformar este resultado.

Digitized by Google

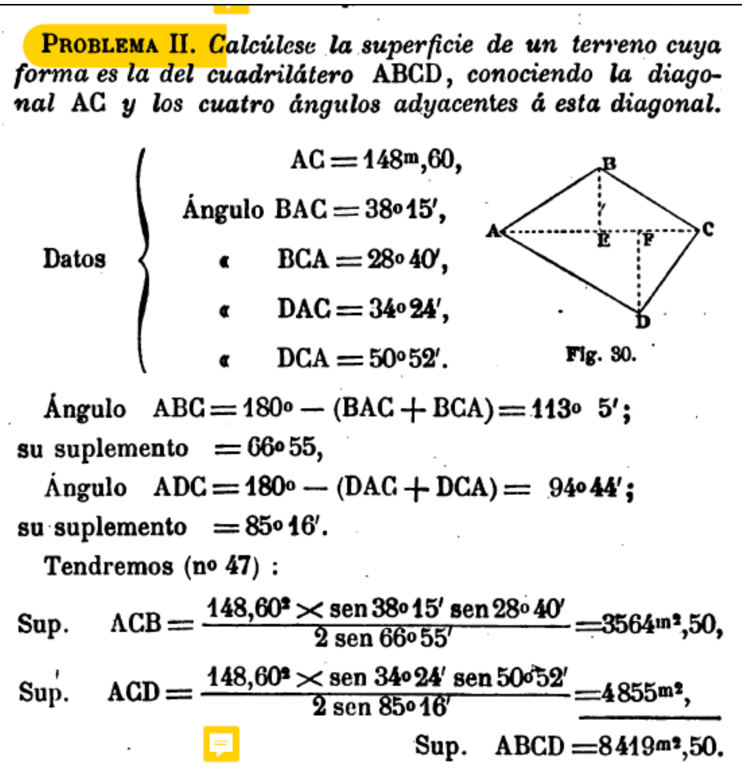
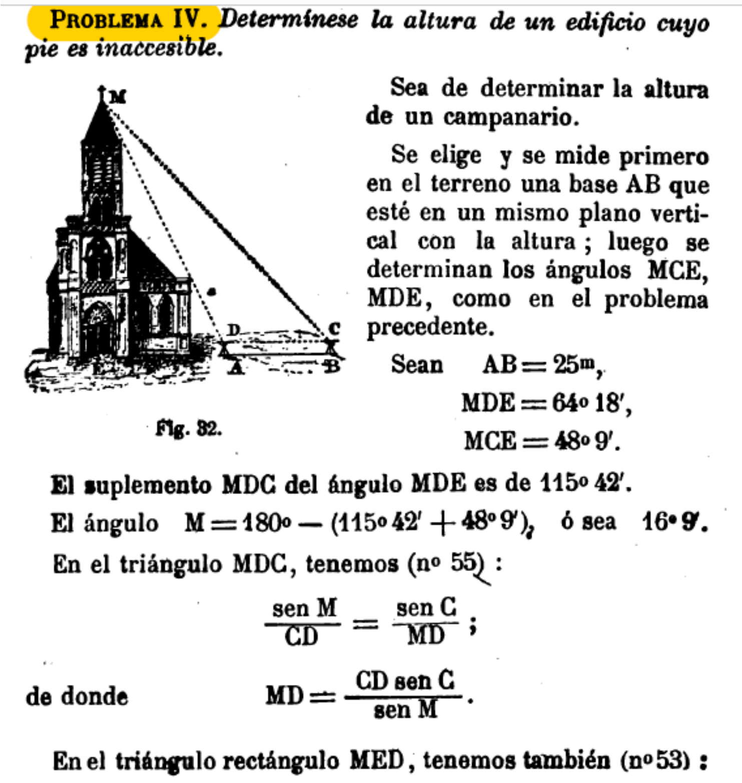


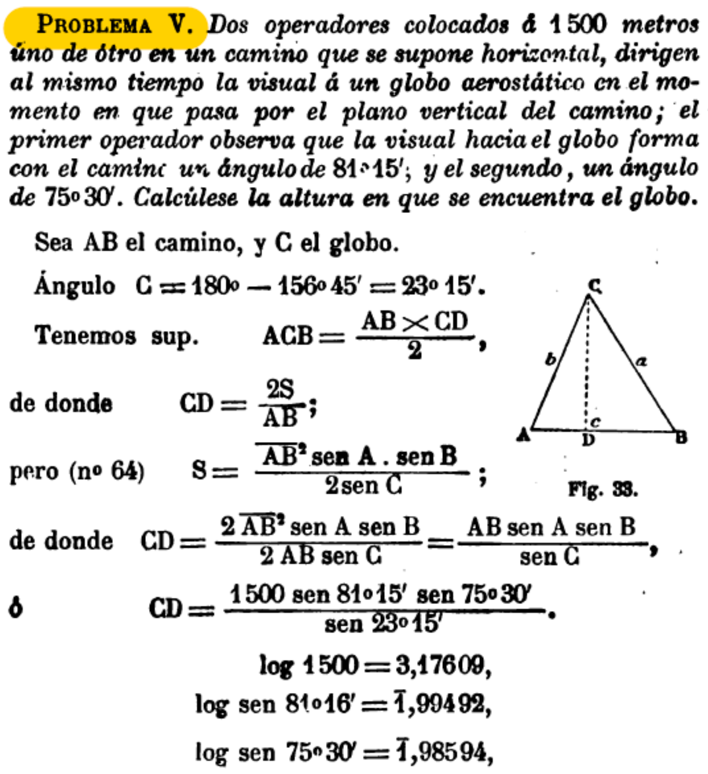
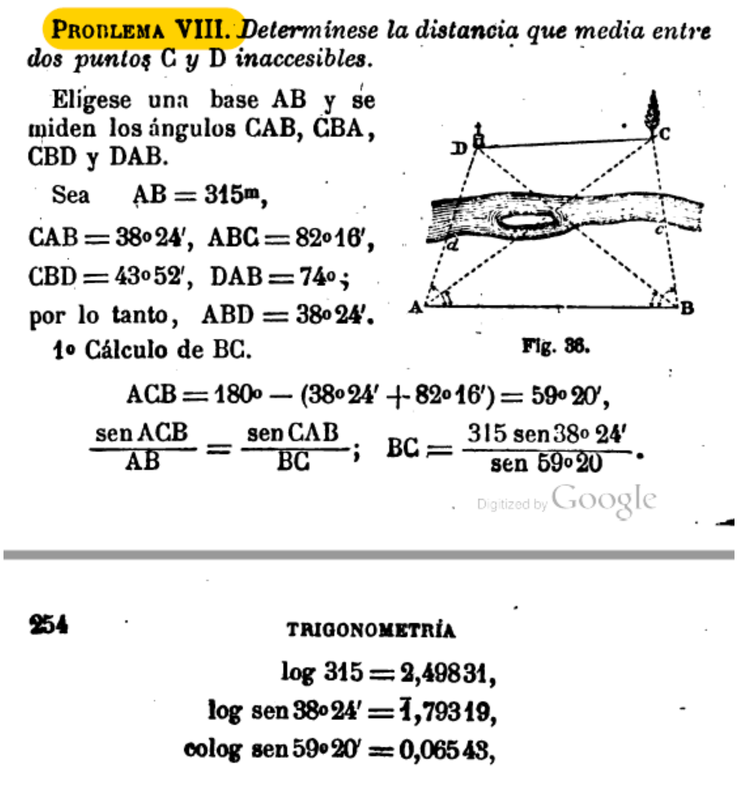
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS 247

Siendo 1 el coseno de 0°, en la fórmula (20), en vez de p y q', pongamos C y 0°,

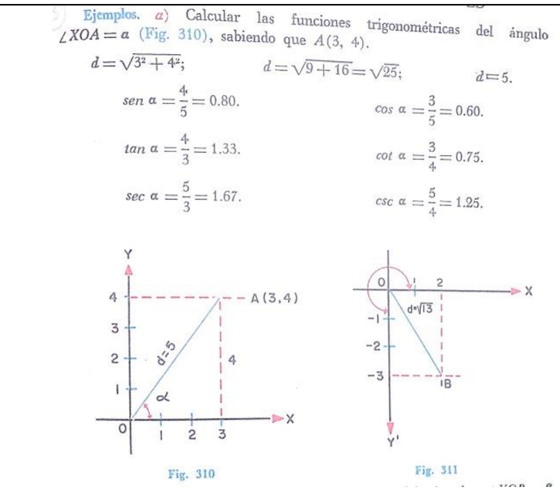
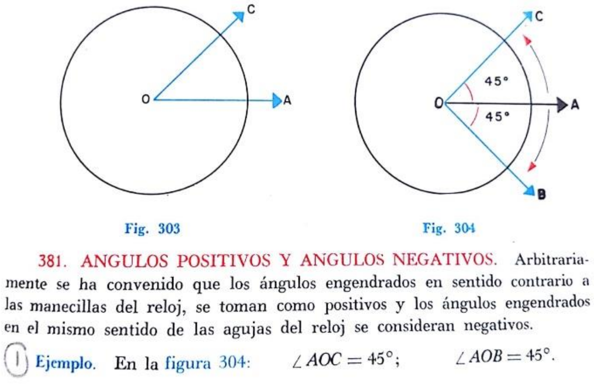
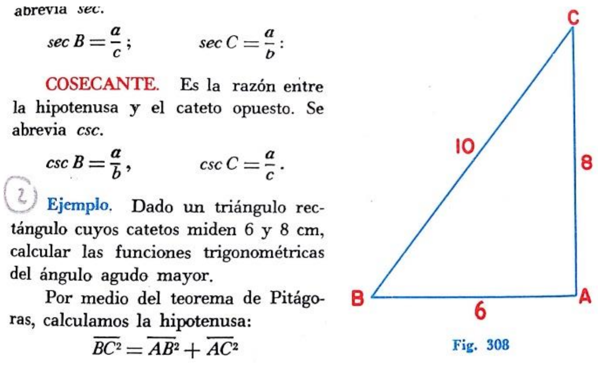
$$1 + \cos C = \cos C + \cos 0° = 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \cos^2 \frac{C}{2},$$

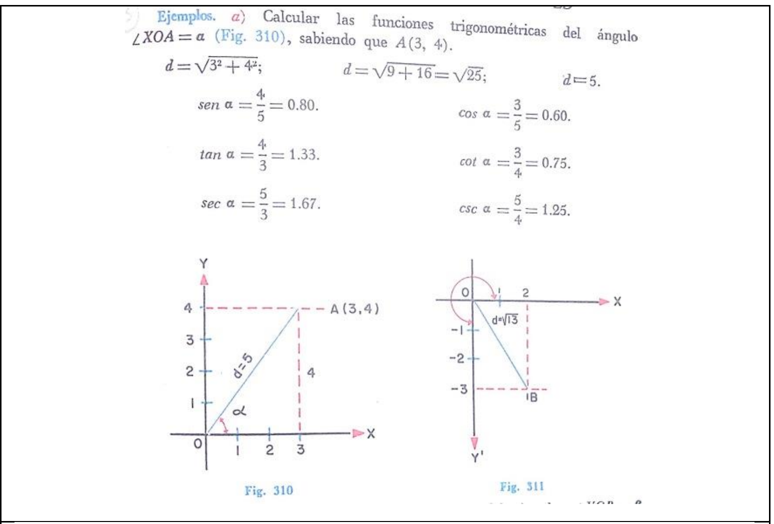
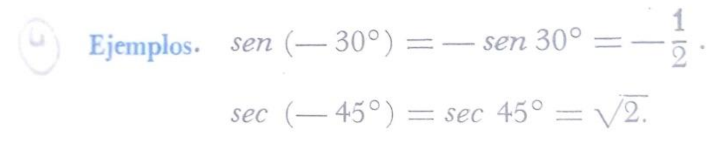
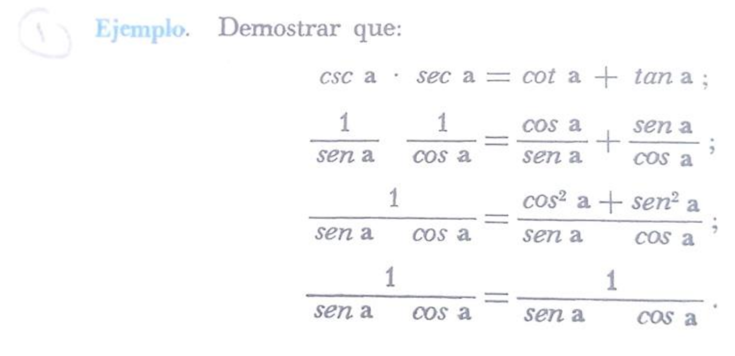
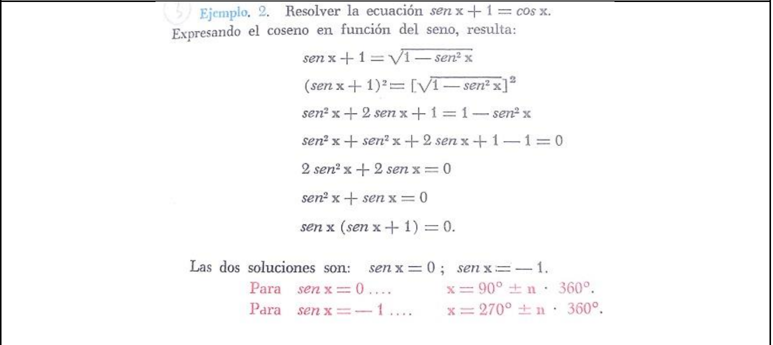
</td>
</tr>
<tr>
<td>L1-U5-T2</td>
<td></td>
</tr>
</table>

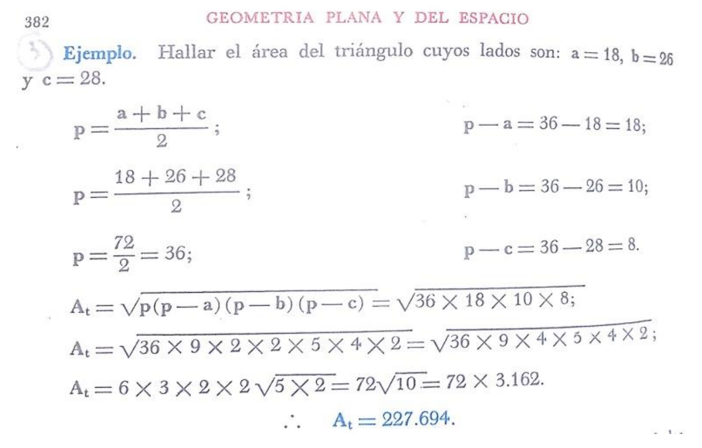
	 **Problema II.** *Calcúlese la superficie de un terreno cuya forma es la del cuadrilátero ABCD, conociendo la diagonal AC y los cuatro ángulos adyacentes á esta diagonal.* Datos { $AC = 148^{m},60$, Ángulo $BAC = 38°15'$, « $BCA = 28°40'$, « $DAC = 34°24'$, « $DCA = 50°52'$. **Fig. 30.** Ángulo $ABC = 180° - (BAC + BCA) = 113°\ 5'$; su suplemento $= 66°55$, Ángulo $ADC = 180° - (DAC + DCA) = 94°44'$; su suplemento $= 85°16'$. Tendremos (nº 47) : $\text{Sup. } ACB = \frac{148,60^2 \times \text{sen } 38°15' \text{ sen } 28°40'}{2 \text{ sen } 66°55'} = 3564^{m^2},50,$ $\text{Sup. } ACD = \frac{148,60^2 \times \text{sen } 34°24' \text{ sen } 50°52'}{2 \text{ sen } 85°16'} = 4855^{m^2},$ $\text{Sup. } ABCD = 8419^{m^2},50.$
L1-U5-T4	 **Problema IV.** *Determínese la altura de un edificio cuyo pie es inaccesible.* Sea de determinar la altura de un campanario. Se elige y se mide primero en el terreno una base AB que esté en un mismo plano vertical con la altura; luego se determinan los ángulos MCE, MDE, como en el problema precedente. Sean $AB = 25^{m}$, $MDE = 64°18'$, $MCE = 48°9'$. **Fig. 32.** El suplemento MDC del ángulo MDE es de 115° 42'. El ángulo $M = 180° - (115°42' + 48°9')$, ó sea $16°9'$. En el triángulo MDC, tenemos (nº 55) : $\frac{\text{sen } M}{CD} = \frac{\text{sen } C}{MD}$; de donde $MD = \frac{CD \text{ sen } C}{\text{sen } M}$. En el triángulo rectángulo MED, tenemos también (nº 53) :

L1-U5-T5	 **Problema V.** *Dos operadores colocados á 1 500 metros uno de otro en un camino que se supone horizontal, dirigen al mismo tiempo la visual á un globo aerostático en el momento en que pasa por el plano vertical del camino; el primer operador observa que la visual hacia el globo forma con el camino un ángulo de 81°15'; y el segundo, un ángulo de 75°30'. Calcúlese la altura en que se encuentra el globo.* Sea AB el camino, y C el globo. Ángulo $C = 180° - 156°45' = 23°15'$. Tenemos sup. $ACB = \frac{AB \times CD}{2}$, de donde $CD = \frac{2S}{AB}$; pero (nº 64) $S = \frac{\overline{AB}^2 \text{ sen } A \,.\, \text{sen } B}{2 \text{ sen } C}$; de donde $CD = \frac{2\,\overline{AB}^2 \text{ sen } A \text{ sen } B}{2\, AB \text{ sen } C} = \frac{AB \text{ sen } A \text{ sen } B}{\text{sen } C}$, ó $CD = \frac{1500 \text{ sen } 81°15' \text{ sen } 75°30'}{\text{sen } 23°15'}$. $\log 1500 = 3{,}17609$, $\log \text{sen } 81°16' = \bar{1}{,}99492$, $\log \text{sen } 75°30' = \bar{1}{,}98594$, Fig. 33.
L1-U5-T8	 **Problema VIII.** *Determínese la distancia que media entre dos puntos C y D inaccesibles.* Elígese una base AB y se miden los ángulos CAB, CBA, CBD y DAB. Sea $AB = 315^m$, $CAB = 38°24'$, $ABC = 82°16'$, $CBD = 43°52'$, $DAB = 74°$; por lo tanto, $ABD = 38°24'$. 1º Cálculo de BC. $ACB = 180° - (38°24' + 82°16') = 59°20'$, $\frac{\text{sen } ACB}{AB} = \frac{\text{sen } CAB}{BC}$; $BC = \frac{315 \text{ sen } 38°24'}{\text{sen } 59°20}$. Digitized by Google $\log 315 = 2{,}49831$, $\log \text{sen } 38°24' = \bar{1}{,}79319$, $\text{colog sen } 59°20' = 0{,}06543$, Fig. 36.

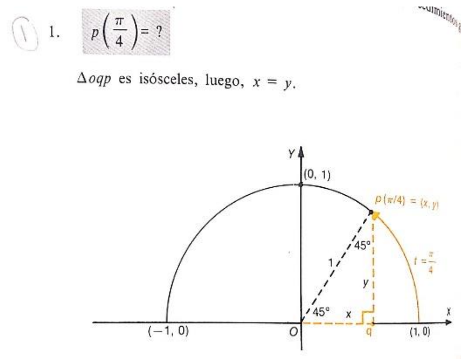
ETAPA 2 Y 3. (1962-1987). LIBRO GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA (BALDOR, 1967)

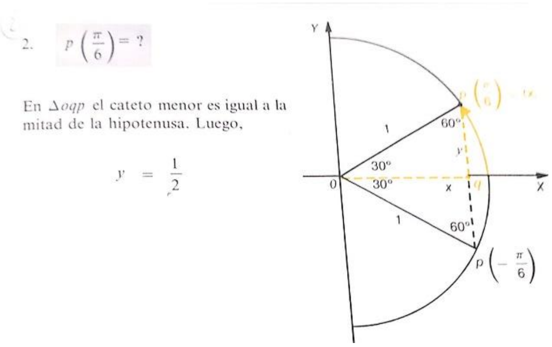
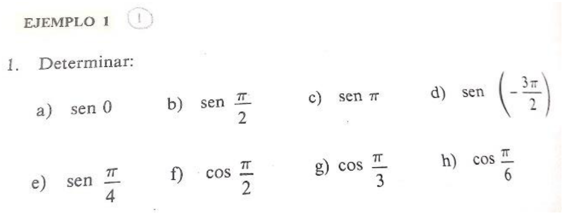
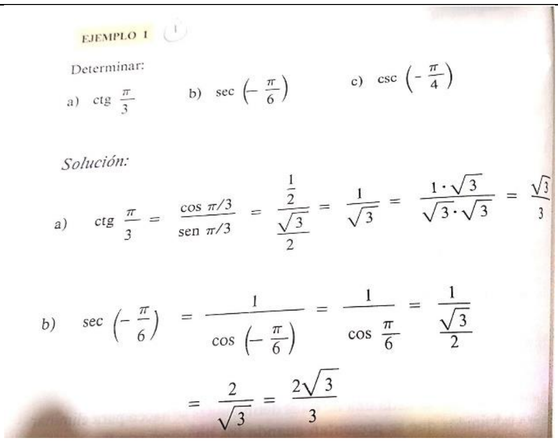
L2-U1-T3	 **Ejemplos.** *a*) Calcular las funciones trigonométricas del ángulo $\angle XOA = \alpha$ (Fig. 310), sabiendo que $A(3,\ 4)$. $d = \sqrt{3^2 + 4^2}$; $d = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$; $d = 5$. $sen\ \alpha = \frac{4}{5} = 0.80.$ $cos\ \alpha = \frac{3}{5} = 0.60.$ $tan\ \alpha = \frac{4}{3} = 1.33.$ $cot\ \alpha = \frac{3}{4} = 0.75.$ $sec\ \alpha = \frac{5}{3} = 1.67.$ $csc\ \alpha = \frac{5}{4} = 1.25.$ Fig. 310 Fig. 311
L2-U1-T1	 Fig. 303 Fig. 304 381. ANGULOS POSITIVOS Y ANGULOS NEGATIVOS. Arbitrariamente se ha convenido que los ángulos engendrados en sentido contrario a las manecillas del reloj, se toman como positivos y los ángulos engendrados en el mismo sentido de las agujas del reloj se consideran negativos. ① **Ejemplo.** En la figura 304: $\angle AOC = 45°$; $\angle AOB = 45°$.
L2-U1-T2	 abrevia *sec*. $sec\ B = \frac{a}{c}$; $sec\ C = \frac{a}{b}$: COSECANTE. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto. Se abrevia *csc*. $csc\ B = \frac{a}{b}$, $csc\ C = \frac{a}{c}$. ② **Ejemplo.** Dado un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8 cm, calcular las funciones trigonométricas del ángulo agudo mayor. Por medio del teorema de Pitágoras, calculamos la hipotenusa: $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ Fig. 308

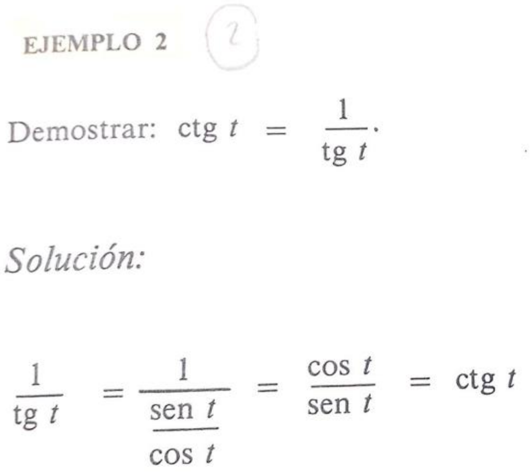
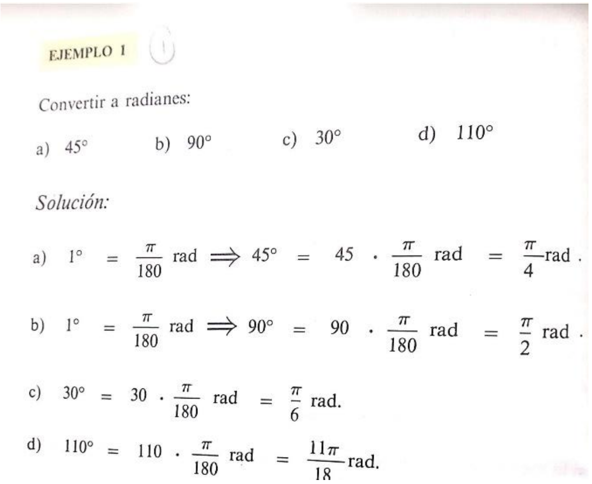
L2-U1-T3	 **Ejemplos.** *a*) Calcular las funciones trigonométricas del ángulo $\angle XOA = \alpha$ (Fig. 310), sabiendo que $A(3,\ 4)$. $d = \sqrt{3^2 + 4^2}$; $d = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$; $d = 5$. $sen\ \alpha = \frac{4}{5} = 0.80.$ $cos\ \alpha = \frac{3}{5} = 0.60.$ $tan\ \alpha = \frac{4}{3} = 1.33.$ $cot\ \alpha = \frac{3}{4} = 0.75.$ $sec\ \alpha = \frac{5}{3} = 1.67.$ $csc\ \alpha = \frac{5}{4} = 1.25.$ Fig. 310 Fig. 311
L2-U2-T4	 **Ejemplos.** $sen\ (-30°) = -sen\ 30° = -\frac{1}{2}.$ $sec\ (-45°) = sec\ 45° = \sqrt{2}.$
L2-U3-T1	 **Ejemplo.** Demostrar que: $csc\ a \cdot sec\ a = cot\ a + tan\ a;$ $\frac{1}{sen\ a} \quad \frac{1}{cos\ a} = \frac{cos\ a}{sen\ a} + \frac{sen\ a}{cos\ a};$ $\frac{1}{sen\ a \quad cos\ a} = \frac{cos^2\ a + sen^2\ a}{sen\ a \quad cos\ a};$ $\frac{1}{sen\ a \quad cos\ a} = \frac{1}{sen\ a \quad cos\ a}.$
L2-U3-T3	 **Ejemplo. 2.** Resolver la ecuación $sen\,x + 1 = cos\,x$. Expresando el coseno en función del seno, resulta: $sen\,x + 1 = \sqrt{1 - sen^2 x}$ $(sen\,x + 1)^2 = [\sqrt{1 - sen^2 x}]^2$ $sen^2 x + 2\,sen\,x + 1 = 1 - sen^2 x$ $sen^2 x + sen^2 x + 2\,sen\,x + 1 - 1 = 0$ $2\,sen^2 x + 2\,sen\,x = 0$ $sen^2 x + sen\,x = 0$ $sen\,x\,(sen\,x + 1) = 0.$ Las dos soluciones son: $sen\,x = 0$; $sen\,x = -1$. Para $sen\,x = 0$ .... $x = 90° \pm n \cdot 360°.$ Para $sen\,x = -1$ .... $x = 270° \pm n \cdot 360°.$

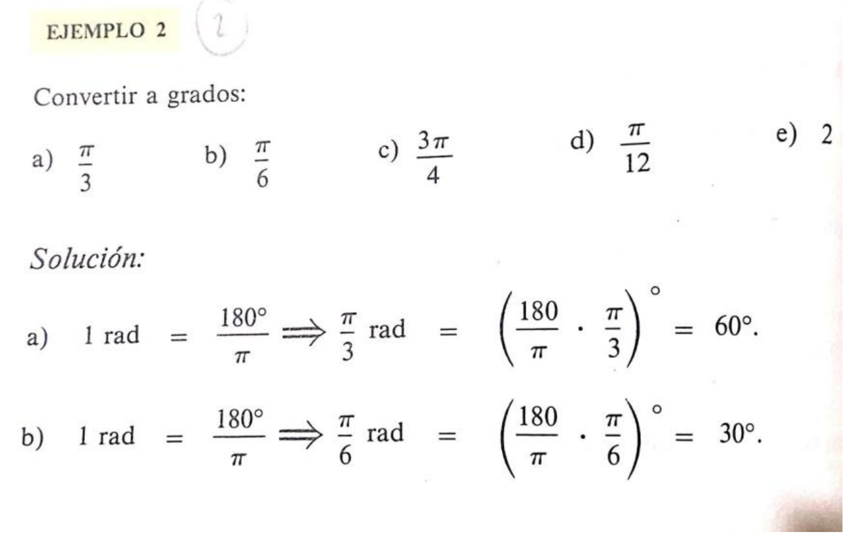
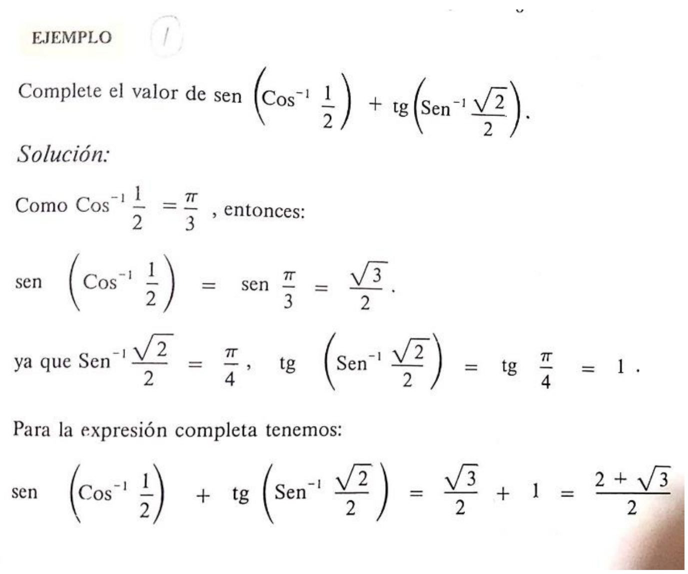
L2-U6-T3	 382 GEOMETRIA PLANA Y DEL ESPACIO ③ **Ejemplo.** Hallar el área del triángulo cuyos lados son: $a = 18$, $b = 26$ y $c = 28$. $p = \frac{a+b+c}{2}$; $p - a = 36 - 18 = 18$; $p = \frac{18+26+28}{2}$; $p - b = 36 - 26 = 10$; $p = \frac{72}{2} = 36$; $p - c = 36 - 28 = 8$. $A_t = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{36 \times 18 \times 10 \times 8}$; $A_t = \sqrt{36 \times 9 \times 2 \times 2 \times 5 \times 4 \times 2} = \sqrt{36 \times 9 \times 4 \times 5 \times 4 \times 2}$; $A_t = 6 \times 3 \times 2 \times 2\sqrt{5 \times 2} = 72\sqrt{10} = 72 \times 3.162$. $\therefore \quad A_t = 227.694$.

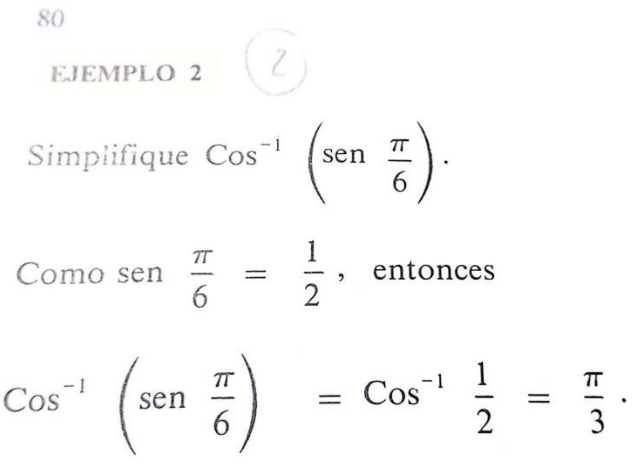
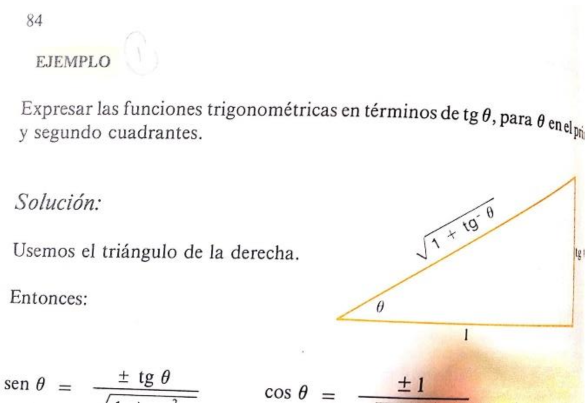
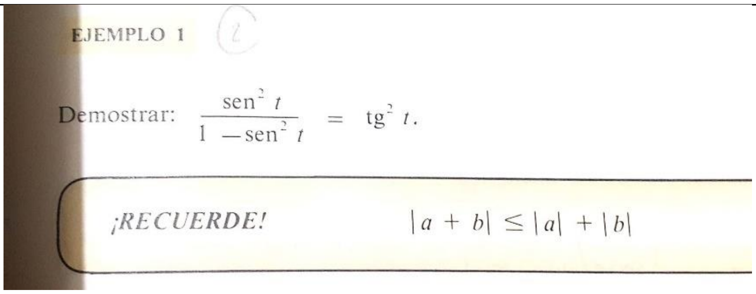
ETAPA 4. (1974-1978). LIBRO HACIA LA MATEMÁTICA. UN ENFOQUE ESTRUCTURADO. (TAKEUCHI, WILLS Y GUARÍN, 1983)

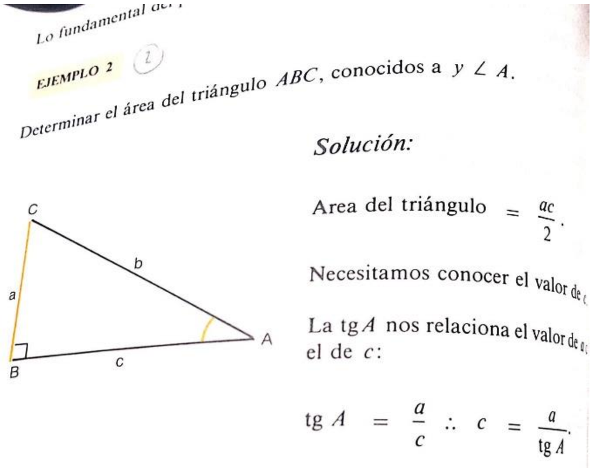
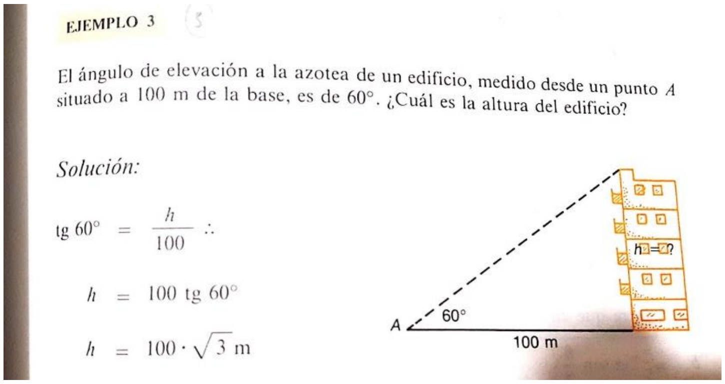
L3-U1-T1	 ① 1. $p\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$ Δoqp es isósceles, luego, $x = y$.

L3-U1-T2	 2. $p\left(\frac{\pi}{6}\right) = ?$ En Δoqp el cateto menor es igual a la mitad de la hipotenusa. Luego, $y = \frac{1}{2}$
L3-U2-T1	 **EJEMPLO 1** 1. Determinar: a) sen 0 b) sen $\frac{\pi}{2}$ c) sen π d) sen $\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ e) sen $\frac{\pi}{4}$ f) cos $\frac{\pi}{2}$ g) cos $\frac{\pi}{3}$ h) cos $\frac{\pi}{6}$
L3-U3-T1	 **EJEMPLO 1** Determinar: a) ctg $\frac{\pi}{3}$ b) sec $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ c) csc $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ *Solución:* a) $\text{ctg } \frac{\pi}{3} = \frac{\cos \pi/3}{\text{sen } \pi/3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $= \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

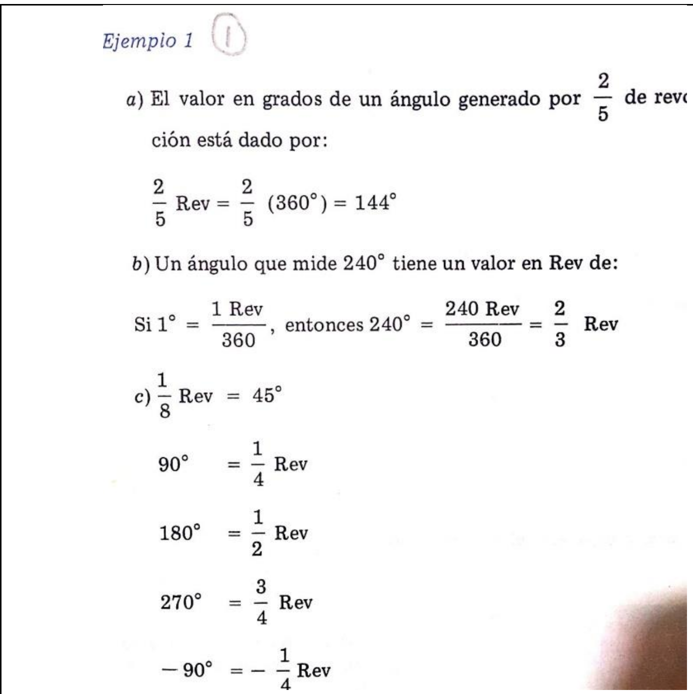
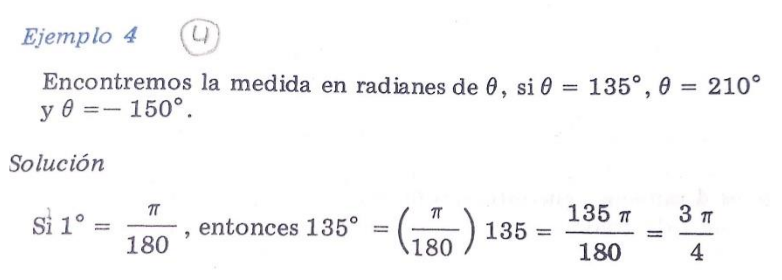
L3-U3-T2	 EJEMPLO 2 ② Demostrar: $\text{ctg}\ t = \dfrac{1}{\text{tg}\ t}$. *Solución:* $\dfrac{1}{\text{tg}\ t} = \dfrac{1}{\dfrac{\text{sen}\ t}{\cos t}} = \dfrac{\cos t}{\text{sen}\ t} = \text{ctg}\ t$
L3-U4-T1	 EJEMPLO 1 ① Convertir a radianes: a) 45° b) 90° c) 30° d) 110° *Solución:* a) $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}\ \text{rad} \Longrightarrow 45^\circ = 45 \cdot \dfrac{\pi}{180}\ \text{rad} = \dfrac{\pi}{4}\text{rad}$. b) $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}\ \text{rad} \Longrightarrow 90^\circ = 90 \cdot \dfrac{\pi}{180}\ \text{rad} = \dfrac{\pi}{2}\ \text{rad}$. c) $30^\circ = 30 \cdot \dfrac{\pi}{180}\ \text{rad} = \dfrac{\pi}{6}\ \text{rad.}$ d) $110^\circ = 110 \cdot \dfrac{\pi}{180}\ \text{rad} = \dfrac{11\pi}{18}\text{rad.}$

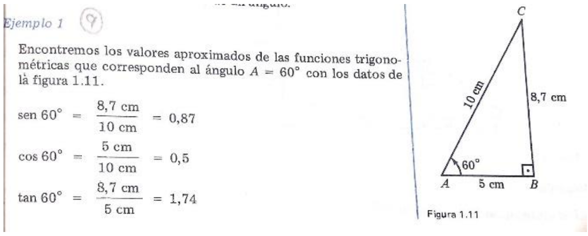
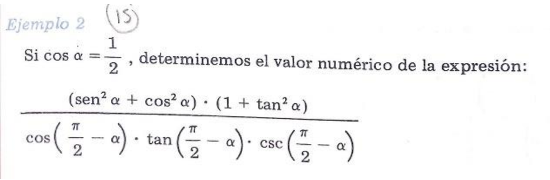
L3-U4-T2	 **EJEMPLO 2** ② Convertir a grados: a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{3\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{12}$ e) 2 *Solución:* a) $1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} \Longrightarrow \frac{\pi}{3} \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3}\right)^{\circ} = 60°.$ b) $1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} \Longrightarrow \frac{\pi}{6} \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6}\right)^{\circ} = 30°.$
L3-U6-T1	 **EJEMPLO** ① Complete el valor de sen $\left(\text{Cos}^{-1} \frac{1}{2}\right) + \text{tg}\left(\text{Sen}^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$ *Solución:* Como $\text{Cos}^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, entonces: $\text{sen} \left(\text{Cos}^{-1} \frac{1}{2}\right) = \text{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ ya que $\text{Sen}^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\text{tg} \left(\text{Sen}^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \text{tg} \frac{\pi}{4} = 1 .$ Para la expresión completa tenemos: $\text{sen} \left(\text{Cos}^{-1} \frac{1}{2}\right) + \text{tg} \left(\text{Sen}^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

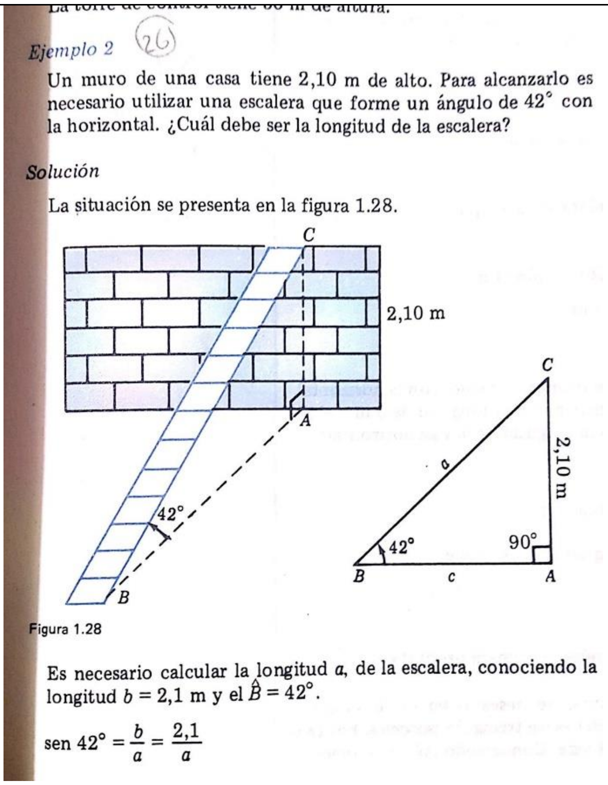
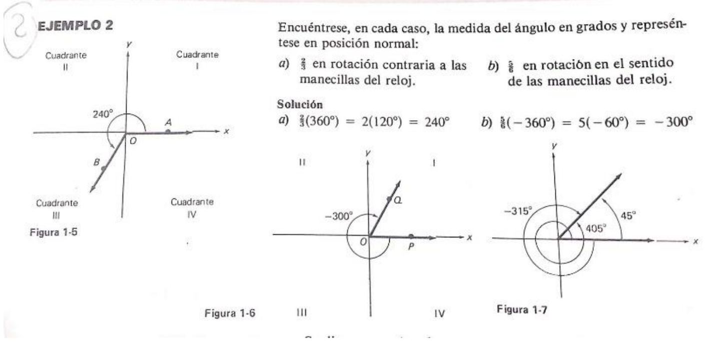
L3-U6-T2	 80 **EJEMPLO 2** ② Simplifique $\text{Cos}^{-1}\left(\text{sen}\ \frac{\pi}{6}\right)$. Como sen $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, entonces $\text{Cos}^{-1}\left(\text{sen}\ \frac{\pi}{6}\right) = \text{Cos}^{-1}\ \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.
L3-U7-T1	 84 **EJEMPLO** ① Expresar las funciones trigonométricas en términos de tg θ, para θ en el pri y segundo cuadrantes. *Solución:* Usemos el triángulo de la derecha. Entonces: $\text{sen}\,\theta = \frac{\pm\ \text{tg}\,\theta}{\ }$ $\qquad$ $\cos\theta = \frac{\pm 1}{\ }$
L3-U7-T2	 **EJEMPLO 1** ② Demostrar: $\frac{\text{sen}^2\,t}{1 - \text{sen}^2\,t} = \text{tg}^2\,t$. *¡RECUERDE!* $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

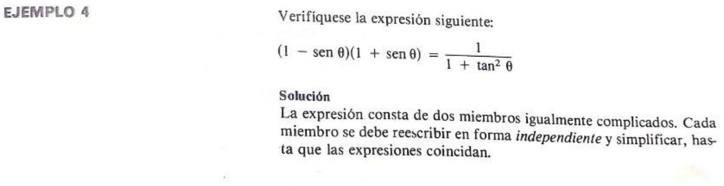
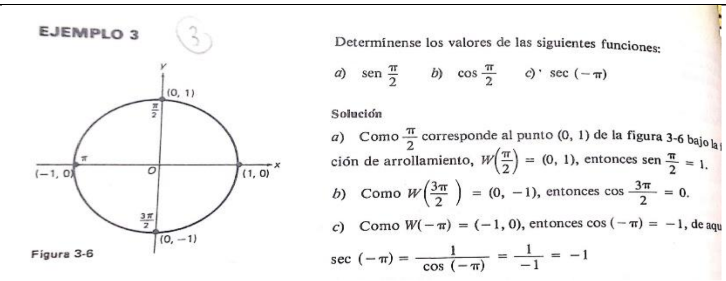
L3-U8-T2	 Lo fundamental de **EJEMPLO 2** ② *Determinar el área del triángulo* ABC, conocidos a $y \angle A$. ***Solución:*** Area del triángulo $= \frac{ac}{2}$. Necesitamos conocer el valor de La tg A nos relaciona el valor de el de c: $\text{tg } A = \frac{a}{c} \therefore c = \frac{a}{\text{tg } A}$.
L3-U8-T3	 **EJEMPLO 3** ⑤ El ángulo de elevación a la azotea de un edificio, medido desde un punto A situado a 100 m de la base, es de 60°. ¿Cuál es la altura del edificio? *Solución:* $\text{tg } 60° = \frac{h}{100} \therefore$ $h = 100 \text{ tg } 60°$ $h = 100 \cdot \sqrt{3} \text{ m}$

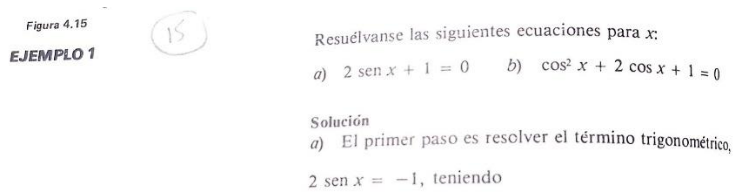
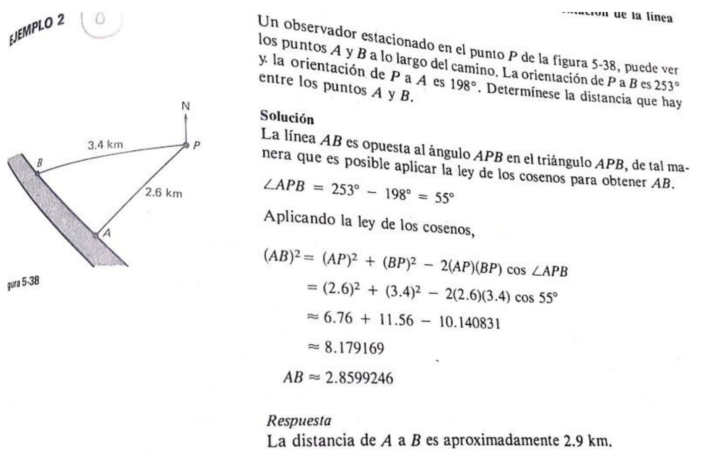
Etapa 5. (1984-1994). Libro Matemática Progresiva (Londoño y Bedoya, 1988) y Libro Matemáticas 5 (Hirsch, E.T., 1989)

L4-U1-T1	 *Ejemplo 1* ① a) El valor en grados de un ángulo generado por $\frac{2}{5}$ de rev ción está dado por: $\frac{2}{5}$ Rev = $\frac{2}{5}$ (360°) = 144° b) Un ángulo que mide 240° tiene un valor en Rev de: Si 1° = $\frac{1 \text{ Rev}}{360}$, entonces 240° = $\frac{240 \text{ Rev}}{360} = \frac{2}{3}$ Rev c) $\frac{1}{8}$ Rev = 45° 90° = $\frac{1}{4}$ Rev 180° = $\frac{1}{2}$ Rev 270° = $\frac{3}{4}$ Rev − 90° = − $\frac{1}{4}$ Rev
L4-U1-T4	 *Ejemplo 4* ④ Encontremos la medida en radianes de θ, si $\theta = 135°$, $\theta = 210°$ y $\theta =- 150°$. *Solución* Si 1° = $\frac{\pi}{180}$, entonces 135° = $\left(\frac{\pi}{180}\right) 135 = \frac{135\,\pi}{180} = \frac{3\,\pi}{4}$

L4-U1-T9	 *Ejemplo 1* (9) Encontremos los valores aproximados de las funciones trigonométricas que corresponden al ángulo $A = 60°$ con los datos de la figura 1.11. $\text{sen } 60° = \dfrac{8{,}7 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 0{,}87$ $\cos 60° = \dfrac{5 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 0{,}5$ $\tan 60° = \dfrac{8{,}7 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 1{,}74$ Figura 1.11
L4-U1-T15	 *Ejemplo 2* (15) Si $\cos \alpha = \dfrac{1}{2}$, determinemos el valor numérico de la expresión: $\dfrac{(\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot (1 + \tan^2 \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \csc\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$

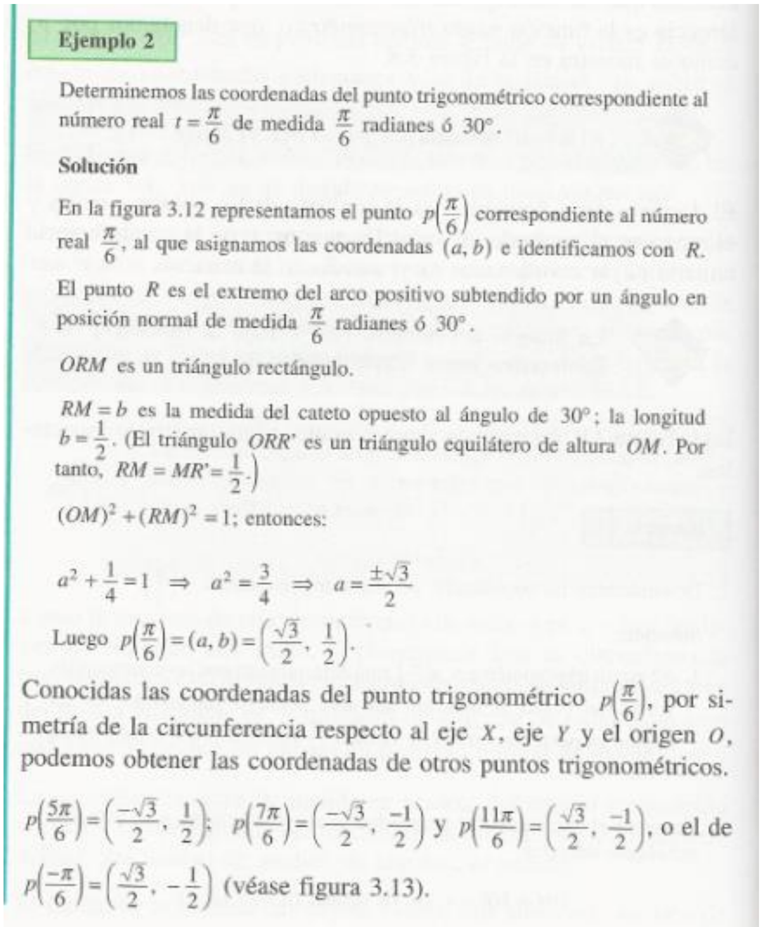
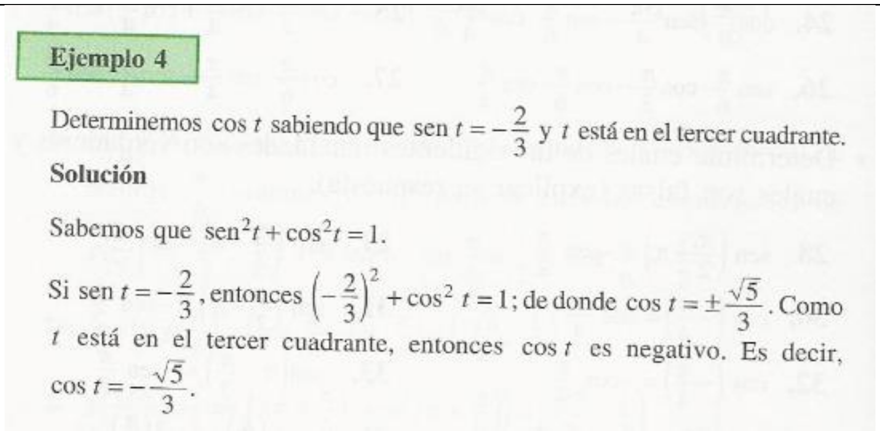
L4-U1-T26	 *Ejemplo 2* (26) Un muro de una casa tiene 2,10 m de alto. Para alcanzarlo es necesario utilizar una escalera que forme un ángulo de 42° con la horizontal. ¿Cuál debe ser la longitud de la escalera? *Solución* La situación se presenta en la figura 1.28. Figura 1.28 Es necesario calcular la longitud a, de la escalera, conociendo la longitud $b = 2{,}1$ m y el $\hat{B} = 42°$. $\text{sen } 42° = \frac{b}{a} = \frac{2{,}1}{a}$
L5-U1-T2	 2 **EJEMPLO 2** Encuéntrese, en cada caso, la medida del ángulo en grados y represéntese en posición normal: *a)* $\frac{2}{3}$ en rotación contraria a las manecillas del reloj. *b)* $\frac{5}{6}$ en rotación en el sentido de las manecillas del reloj. **Solución** *a)* $\frac{2}{3}(360°) = 2(120°) = 240°$ *b)* $\frac{5}{6}(-360°) = 5(-60°) = -300°$ Figura 1-5 Figura 1-6 Figura 1-7

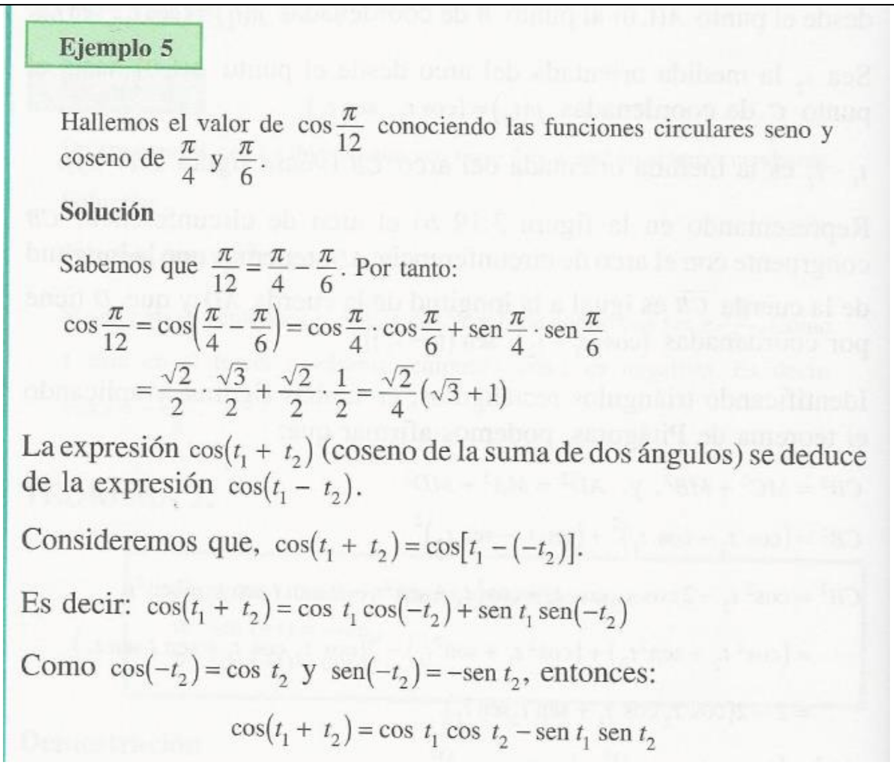
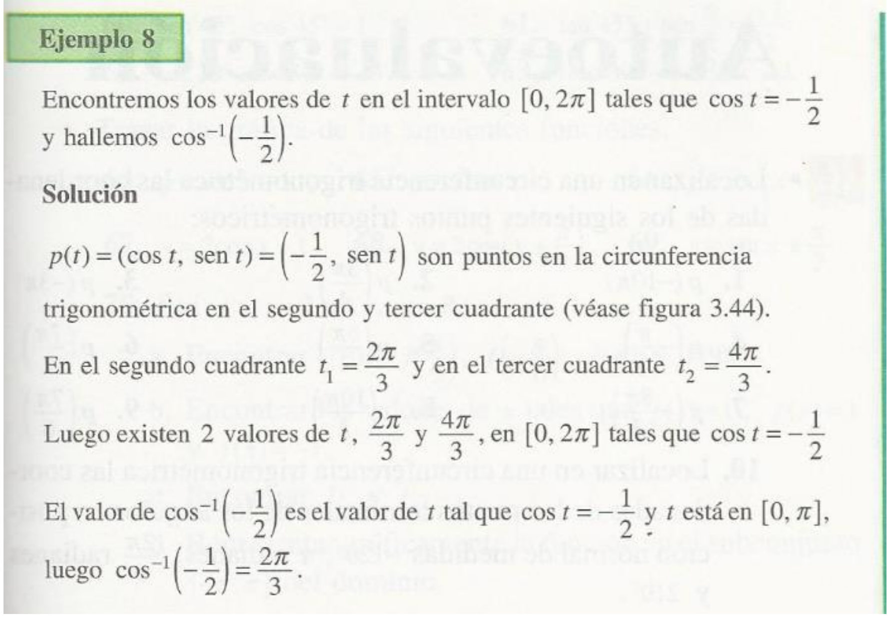
L5-U2-T8	 **EJEMPLO 4** Verifíquese la expresión siguiente: $(1 - \operatorname{sen} \theta)(1 + \operatorname{sen} \theta) = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$ **Solución** La expresión consta de dos miembros igualmente complicados. Cada miembro se debe reescribir en forma *independiente* y simplificar, hasta que las expresiones coincidan.
L5-U3-T3	 **EJEMPLO 3** ③ Figura 3-6 Determínense los valores de las siguientes funciones: *a*) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$ *b*) $\cos \frac{\pi}{2}$ *c*)' $\sec(-\pi)$ **Solución** *a*) Como $\frac{\pi}{2}$ corresponde al punto (0, 1) de la figura 3-6 bajo la ción de arrollamiento, $W\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$, entonces $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$. *b*) Como $W\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1)$, entonces $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$. *c*) Como $W(-\pi) = (-1, 0)$, entonces $\cos(-\pi) = -1$, de aqu $\sec(-\pi) = \frac{1}{\cos(-\pi)} = \frac{1}{-1} = -1$

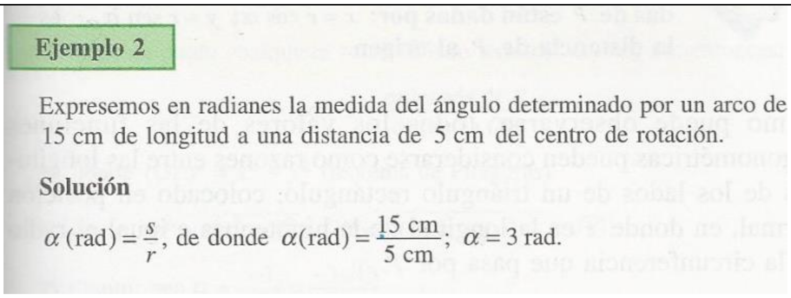
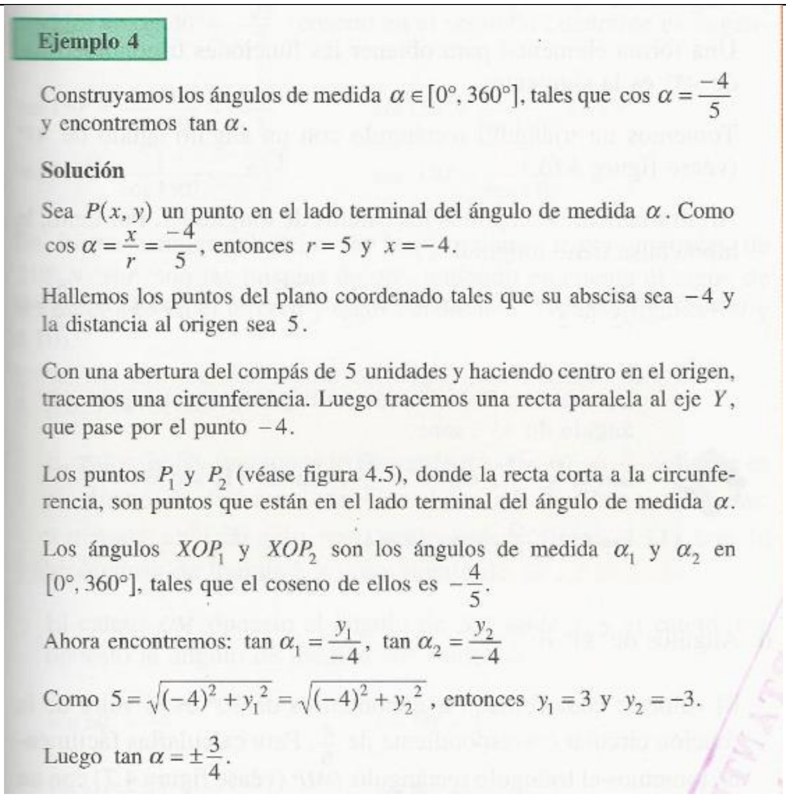
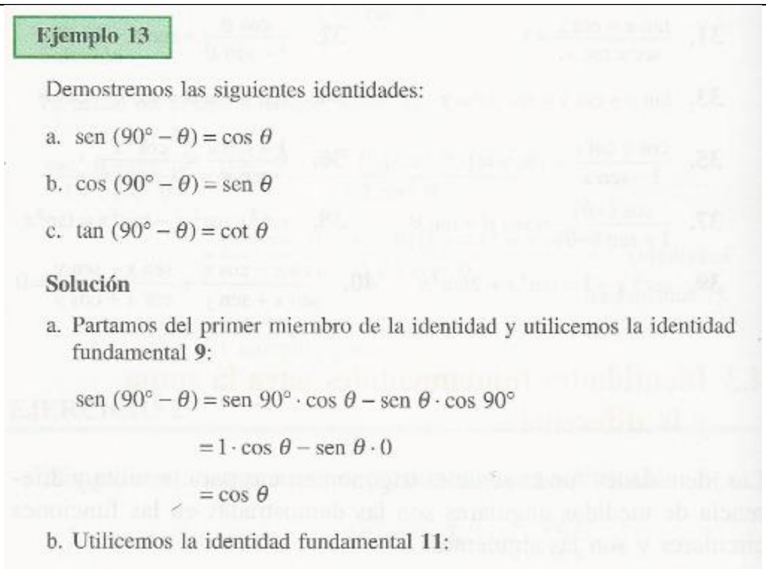
L5-U4-T15	 Figura 4.15 **EJEMPLO 1** 15 Resuélvanse las siguientes ecuaciones para x: *a*) $2 \text{ sen } x + 1 = 0$ *b*) $\cos^2 x + 2 \cos x + 1 = 0$ **Solución** *a*) El primer paso es resolver el término trigonométrico, $2 \text{ sen } x = -1$, teniendo
L5-U5-T8	 gura 5-38 EJEMPLO 2 0 ación de la línea Un observador estacionado en el punto P de la figura 5-38, puede ver los puntos A y B a lo largo del camino. La orientación de P a B es 253° y. la orientación de P a A es 198°. Determínese la distancia que hay entre los puntos A y B. **Solución** La línea AB es opuesta al ángulo APB en el triángulo APB, de tal manera que es posible aplicar la ley de los cosenos para obtener AB. $\angle APB = 253° - 198° = 55°$ Aplicando la ley de los cosenos, $(AB)^2 = (AP)^2 + (BP)^2 - 2(AP)(BP) \cos \angle APB$ $= (2.6)^2 + (3.4)^2 - 2(2.6)(3.4) \cos 55°$ $\approx 6.76 + 11.56 - 10.140831$ ≈ 8.179169 $AB \approx 2.8599246$ *Respuesta* La distancia de A a B es aproximadamente 2.9 km.

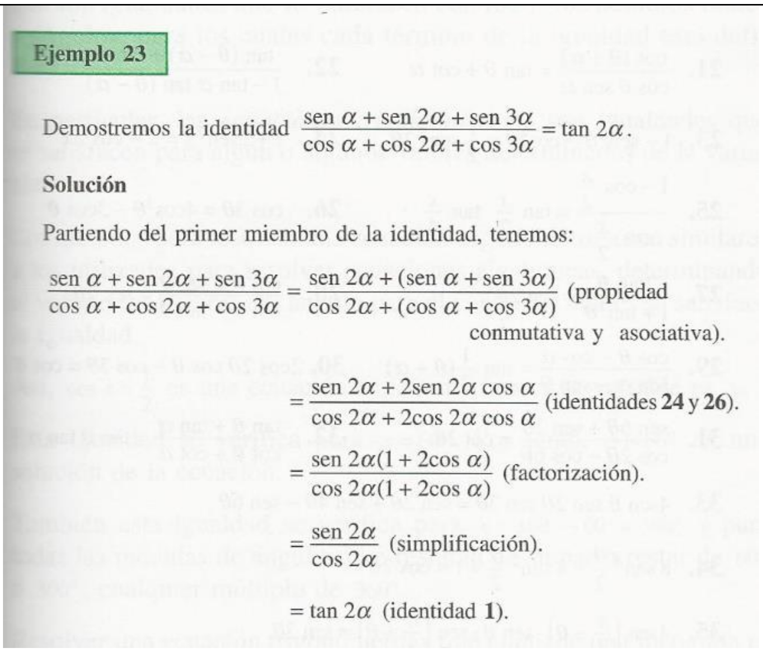
ETAPA 6. PRIMER HITO. (1994-1998).

Libro *Dimensión Matemática 10 (Londoño y Guarín, 1995)*

L7-U3-T2	 **Ejemplo 2** Determinemos las coordenadas del punto trigonométrico correspondiente al número real $t=\frac{\pi}{6}$ de medida $\frac{\pi}{6}$ radianes ó 30°. **Solución** En la figura 3.12 representamos el punto $p\left(\frac{\pi}{6}\right)$ correspondiente al número real $\frac{\pi}{6}$, al que asignamos las coordenadas (a, b) e identificamos con R. El punto R es el extremo del arco positivo subtendido por un ángulo en posición normal de medida $\frac{\pi}{6}$ radianes ó 30°. ORM es un triángulo rectángulo. $RM=b$ es la medida del cateto opuesto al ángulo de 30°; la longitud $b=\frac{1}{2}$. (El triángulo ORR' es un triángulo equilátero de altura OM. Por tanto, $RM=MR'=\frac{1}{2}$.) $(OM)^2+(RM)^2=1$; entonces: $a^2+\frac{1}{4}=1 \Rightarrow a^2=\frac{3}{4} \Rightarrow a=\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$ Luego $p\left(\frac{\pi}{6}\right)=(a, b)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Conocidas las coordenadas del punto trigonométrico $p\left(\frac{\pi}{6}\right)$, por simetría de la circunferencia respecto al eje X, eje Y y el origen O, podemos obtener las coordenadas de otros puntos trigonométricos. $p\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $p\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ y $p\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$, o el de $p\left(\frac{-\pi}{6}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (véase figura 3.13).
L7-U3-T4	 **Ejemplo 4** Determinemos $\cos t$ sabiendo que $\operatorname{sen} t=-\frac{2}{3}$ y t está en el tercer cuadrante. **Solución** Sabemos que $\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t=1$. Si $\operatorname{sen} t=-\frac{2}{3}$, entonces $\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\cos^2 t=1$; de donde $\cos t=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$. Como t está en el tercer cuadrante, entonces $\cos t$ es negativo. Es decir, $\cos t=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

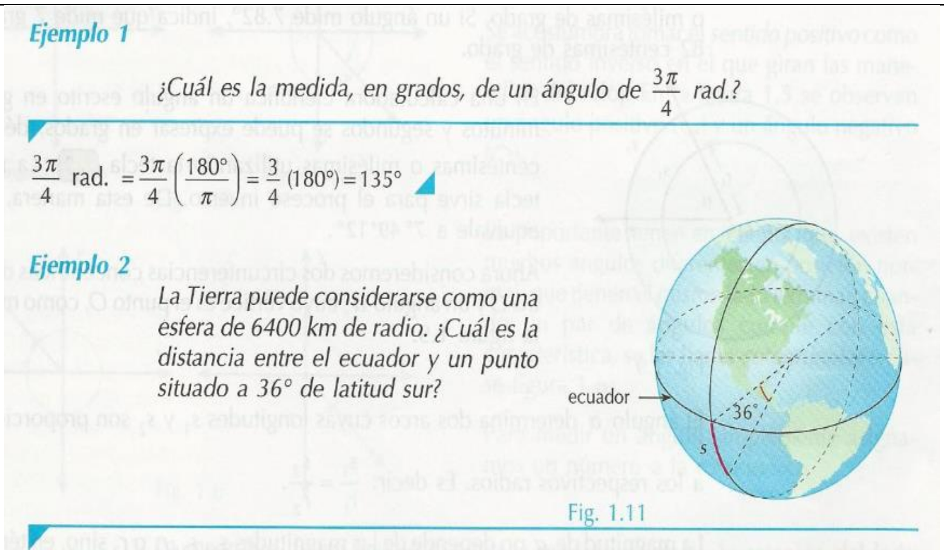
L7-U3-T5	 **Ejemplo 5** Hallemos el valor de $\cos\frac{\pi}{12}$ conociendo las funciones circulares seno y coseno de $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{6}$. **Solución** Sabemos que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$. Por tanto: $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ La expresión $\cos(t_1+t_2)$ (coseno de la suma de dos ángulos) se deduce de la expresión $\cos(t_1-t_2)$. Consideremos que, $\cos(t_1+t_2)=\cos[t_1-(-t_2)]$. Es decir: $\cos(t_1+t_2)=\cos t_1\cos(-t_2)+\operatorname{sen} t_1\operatorname{sen}(-t_2)$ Como $\cos(-t_2)=\cos t_2$ y $\operatorname{sen}(-t_2)=-\operatorname{sen} t_2$, entonces: $\cos(t_1+t_2)=\cos t_1\cos t_2-\operatorname{sen} t_1\operatorname{sen} t_2$
L7-U3-T8	 **Ejemplo 8** Encontremos los valores de t en el intervalo $[0,2\pi]$ tales que $\cos t=-\frac{1}{2}$ y hallemos $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$. **Solución** $p(t)=(\cos t,\ \operatorname{sen} t)=\left(-\frac{1}{2},\ \operatorname{sen} t\right)$ son puntos en la circunferencia trigonométrica en el segundo y tercer cuadrante (véase figura 3.44). En el segundo cuadrante $t_1=\frac{2\pi}{3}$ y en el tercer cuadrante $t_2=\frac{4\pi}{3}$. Luego existen 2 valores de t, $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$, en $[0,2\pi]$ tales que $\cos t=-\frac{1}{2}$ El valor de $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ es el valor de t tal que $\cos t=-\frac{1}{2}$ y t está en $[0,\pi]$, luego $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

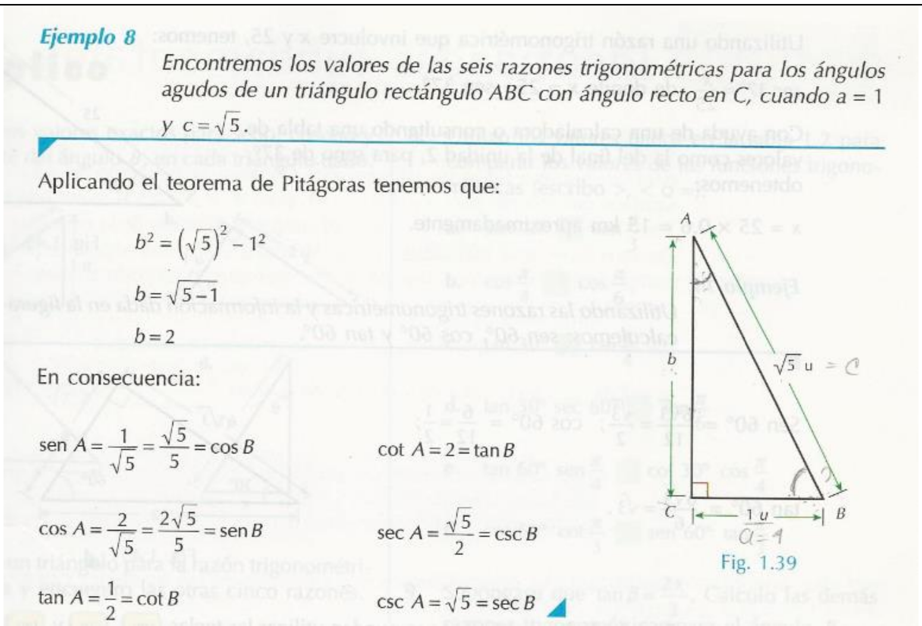
L7-U4-T2	 **Ejemplo 2** Expresemos en radianes la medida del ángulo determinado por un arco de 15 cm de longitud a una distancia de 5 cm del centro de rotación. **Solución** $\alpha\,(\text{rad}) = \frac{s}{r}$, de donde $\alpha(\text{rad}) = \frac{15\text{ cm}}{5\text{ cm}}$; $\alpha = 3$ rad.
L7-U4-T4	 **Ejemplo 4** Construyamos los ángulos de medida $\alpha \in [0°, 360°]$, tales que $\cos\alpha = \frac{-4}{5}$ y encontremos $\tan\alpha$. **Solución** Sea $P(x, y)$ un punto en el lado terminal del ángulo de medida α. Como $\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{-4}{5}$, entonces $r = 5$ y $x = -4$. Hallemos los puntos del plano coordenado tales que su abscisa sea -4 y la distancia al origen sea 5. Con una abertura del compás de 5 unidades y haciendo centro en el origen, tracemos una circunferencia. Luego tracemos una recta paralela al eje Y, que pase por el punto -4. Los puntos P_1 y P_2 (véase figura 4.5), donde la recta corta a la circunferencia, son puntos que están en el lado terminal del ángulo de medida α. Los ángulos XOP_1 y XOP_2 son los ángulos de medida α_1 y α_2 en $[0°, 360°]$, tales que el coseno de ellos es $-\frac{4}{5}$. Ahora encontremos: $\tan\alpha_1 = \frac{y_1}{-4}$, $\tan\alpha_2 = \frac{y_2}{-4}$ Como $5 = \sqrt{(-4)^2 + {y_1}^2} = \sqrt{(-4)^2 + {y_2}^2}$, entonces $y_1 = 3$ y $y_2 = -3$. Luego $\tan\alpha = \pm\frac{3}{4}$.
L7-U4-T13	 **Ejemplo 13** Demostremos las siguientes identidades: a. $\text{sen}\,(90° - \theta) = \cos\theta$ b. $\cos\,(90° - \theta) = \text{sen}\,\theta$ c. $\tan\,(90° - \theta) = \cot\theta$ **Solución** a. Partamos del primer miembro de la identidad y utilicemos la identidad fundamental **9**: $\text{sen}\,(90° - \theta) = \text{sen}\,90° \cdot \cos\theta - \text{sen}\,\theta \cdot \cos 90°$ $= 1 \cdot \cos\theta - \text{sen}\,\theta \cdot 0$ $= \cos\theta$ b. Utilicemos la identidad fundamental **11**:

L7-U4-T23	 **Ejemplo 23** Demostremos la identidad $\frac{\text{sen } \alpha + \text{sen } 2\alpha + \text{sen } 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \tan 2\alpha$. **Solución** Partiendo del primer miembro de la identidad, tenemos: $\frac{\text{sen } \alpha + \text{sen } 2\alpha + \text{sen } 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \frac{\text{sen } 2\alpha + (\text{sen } \alpha + \text{sen } 3\alpha)}{\cos 2\alpha + (\cos \alpha + \cos 3\alpha)}$ (propiedad conmutativa y asociativa). $= \frac{\text{sen } 2\alpha + 2\text{sen } 2\alpha \cos \alpha}{\cos 2\alpha + 2\cos 2\alpha \cos \alpha}$ (identidades **24** y **26**). $= \frac{\text{sen } 2\alpha(1 + 2\cos \alpha)}{\cos 2\alpha(1 + 2\cos \alpha)}$ (factorización). $= \frac{\text{sen } 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ (simplificación). $= \tan 2\alpha$ (identidad **1**).

ETAPA 6. SEGUNDO HITO. (1998-2006).

Libro *Alfa 10 (Moreno y Restrepo, 1999)*

L8-U1-T2	 ***Ejemplo 1*** *¿Cuál es la medida, en grados, de un ángulo de $\frac{3\pi}{4}$ rad.?* $\frac{3\pi}{4}$ rad. $= \frac{3\pi}{4}\left(\frac{180°}{\pi}\right) = \frac{3}{4}(180°) = 135°$ ***Ejemplo 2*** *La Tierra puede considerarse como una esfera de 6400 km de radio. ¿Cuál es la distancia entre el ecuador y un punto situado a 36° de latitud sur?* Fig. 1.11

<table>
<tr>
<td>L8- U1-T8</td>
<td>


Ejemplo 8

Encontremos los valores de las seis razones trigonométricas para los ángulos agudos de un triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en C, cuando a = 1 y $c=\sqrt{5}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$b^2=\left(\sqrt{5}\right)^2-1^2$$

$$b=\sqrt{5-1}$$

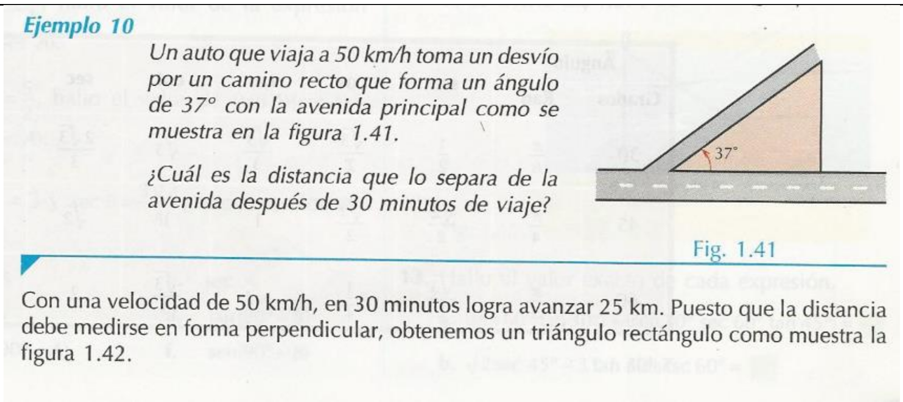
$$b=2$$

En consecuencia:

$\operatorname{sen} A=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}=\cos B$ $\qquad$ $\cot A=2=\tan B$

$\cos A=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}=\operatorname{sen} B$ $\qquad$ $\sec A=\frac{\sqrt{5}}{2}=\csc B$

$\tan A=\frac{1}{2}=\cot B$ $\qquad$ $\csc A=\sqrt{5}=\sec B$

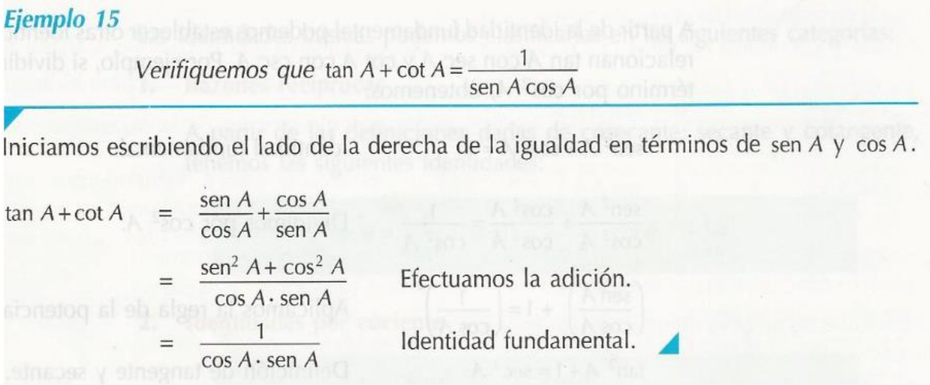
Fig. 1.39
</td>
</tr>
<tr>
<td>L8-U1-T10</td>
<td>


Ejemplo 10

Un auto que viaja a 50 km/h toma un desvío por un camino recto que forma un ángulo de 37° con la avenida principal como se muestra en la figura 1.41.

¿Cuál es la distancia que lo separa de la avenida después de 30 minutos de viaje?

Fig. 1.41

Con una velocidad de 50 km/h, en 30 minutos logra avanzar 25 km. Puesto que la distancia debe medirse en forma perpendicular, obtenemos un triángulo rectángulo como muestra la figura 1.42.
</td>
</tr>
<tr>
<td>L8-U1-T15</td>
<td>


Ejemplo 15

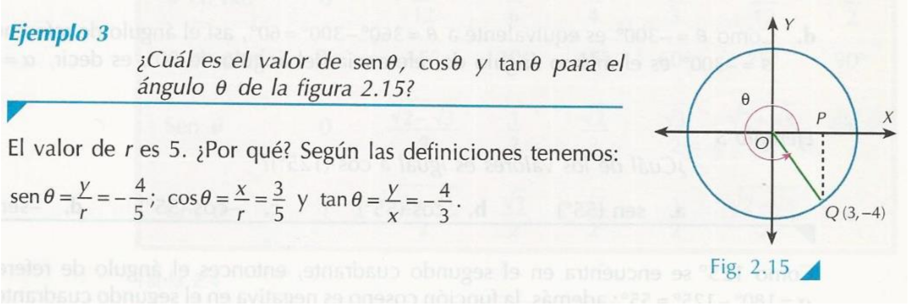
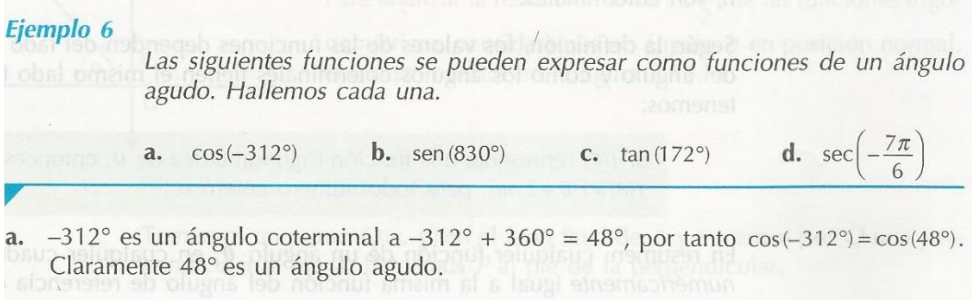
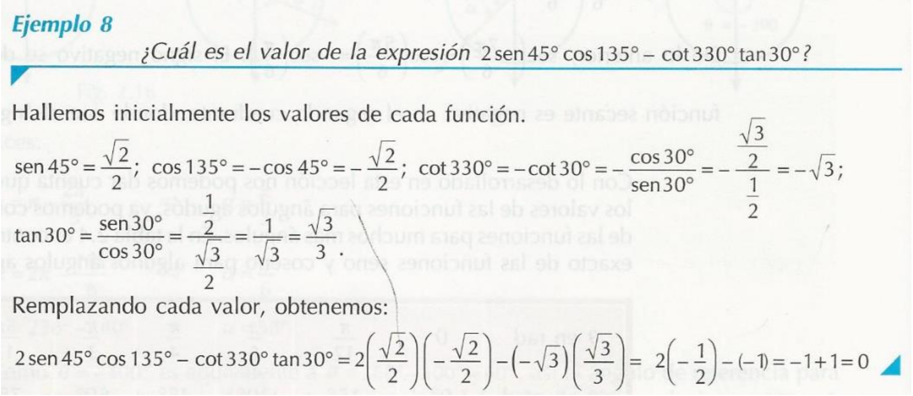
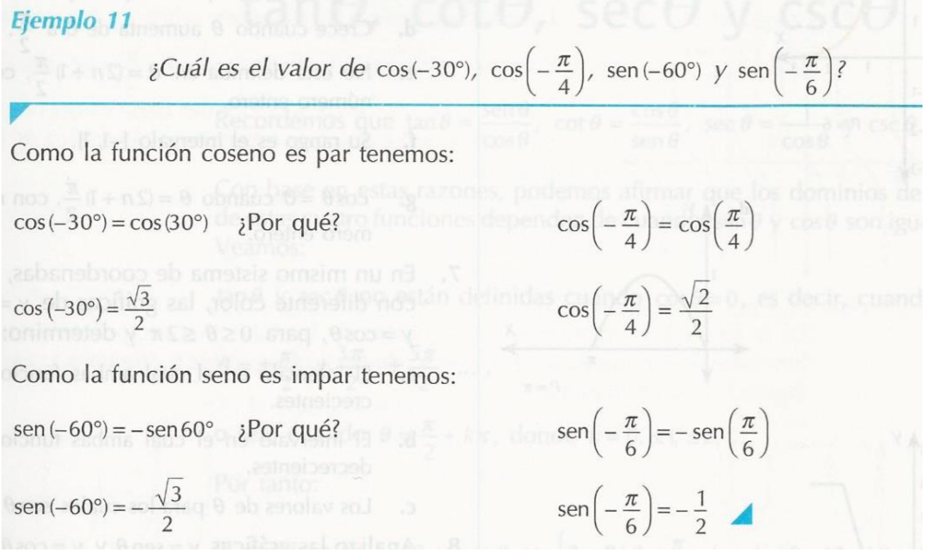
Verifiquemos que $\tan A+\cot A=\frac{1}{\operatorname{sen} A\cos A}$

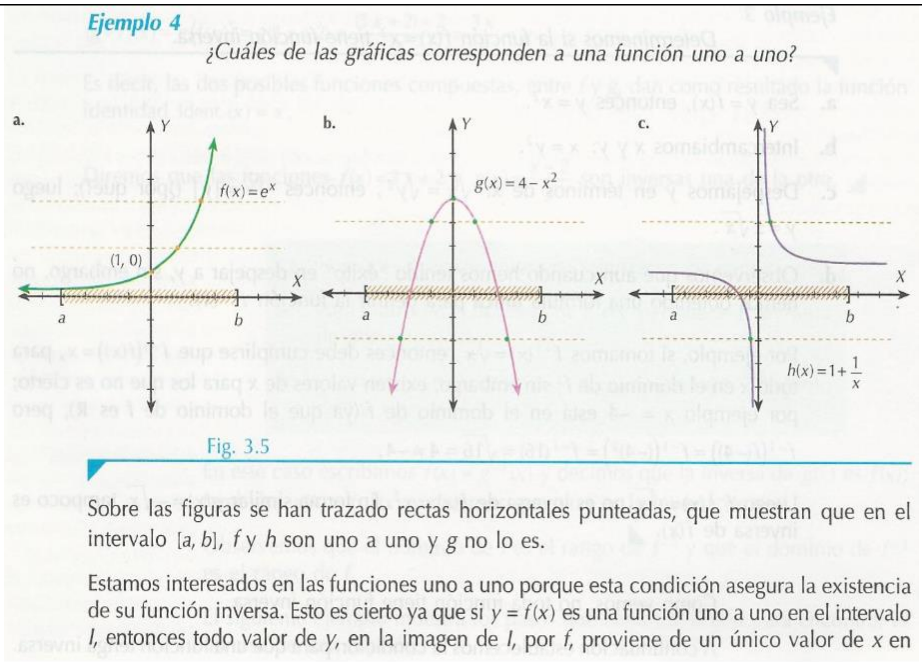
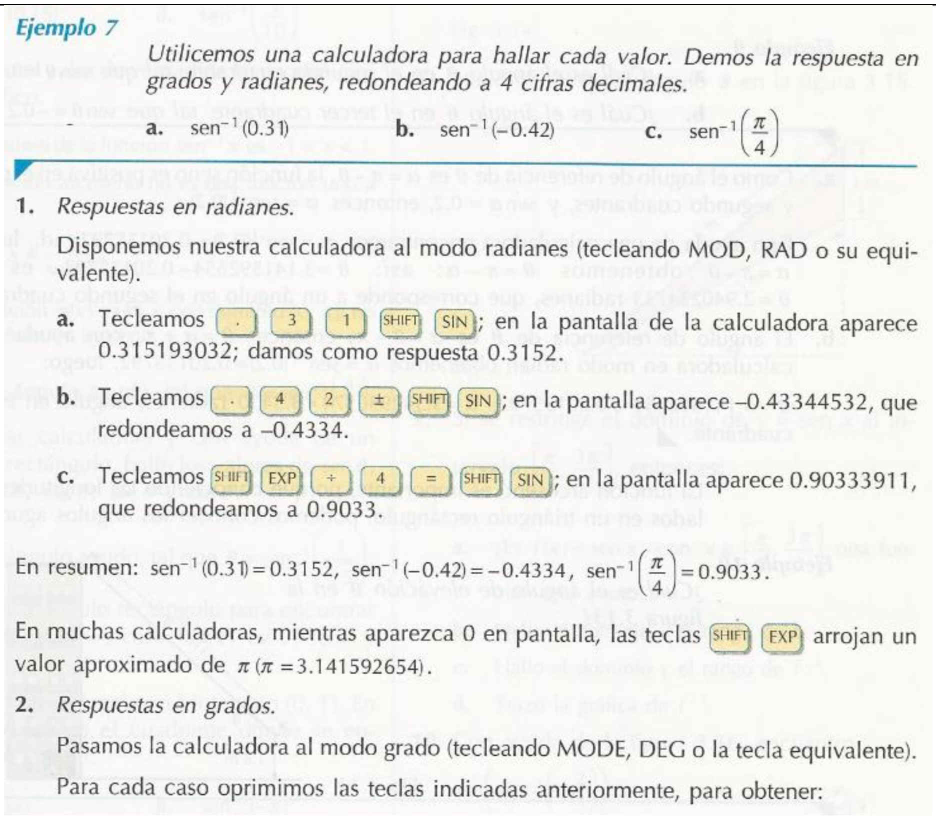
Iniciamos escribiendo el lado de la derecha de la igualdad en términos de $\operatorname{sen} A$ y $\cos A$.

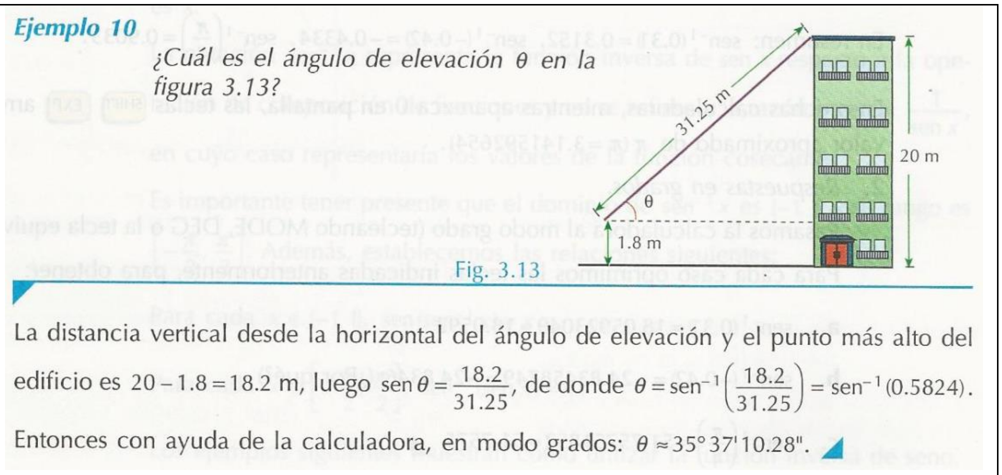
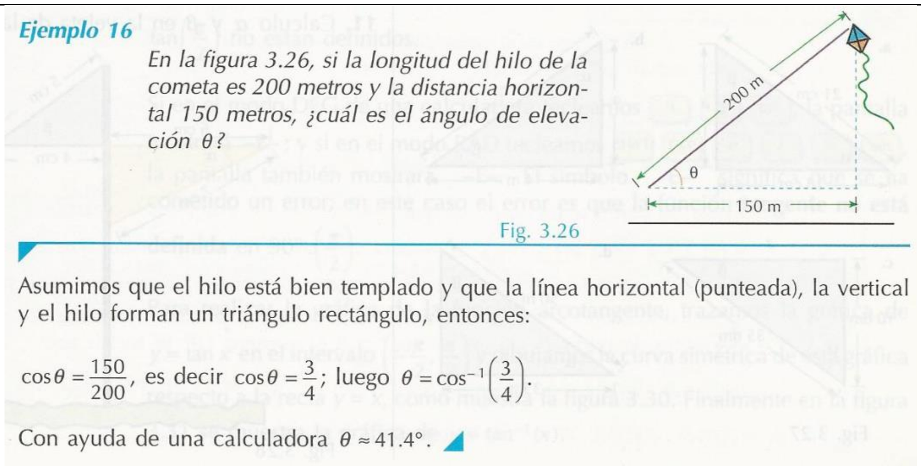
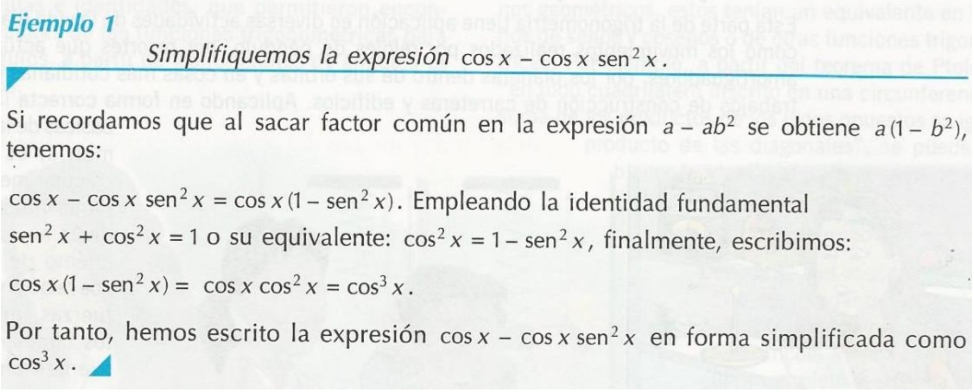
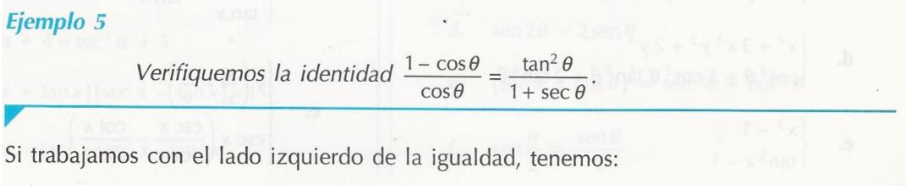
$$\tan A+\cot A=\frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}$$

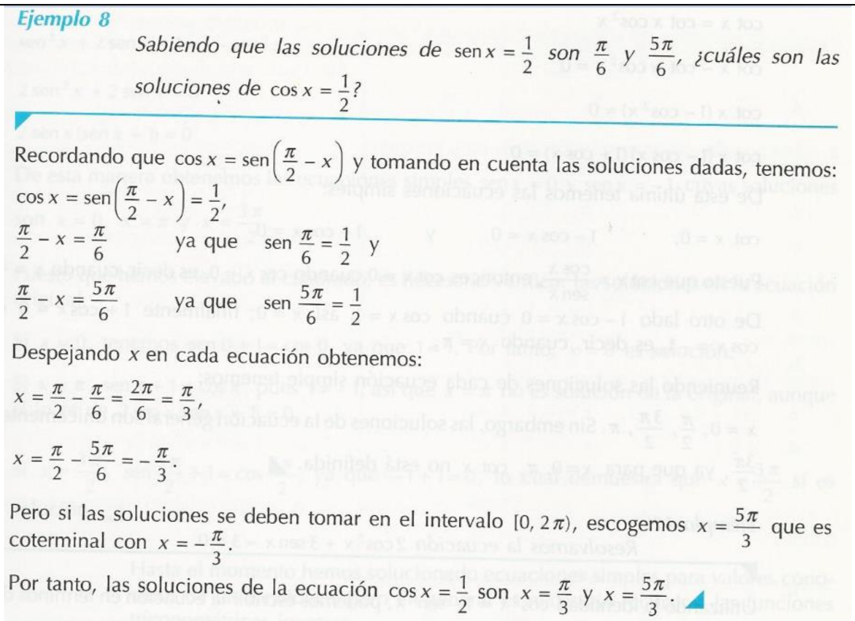
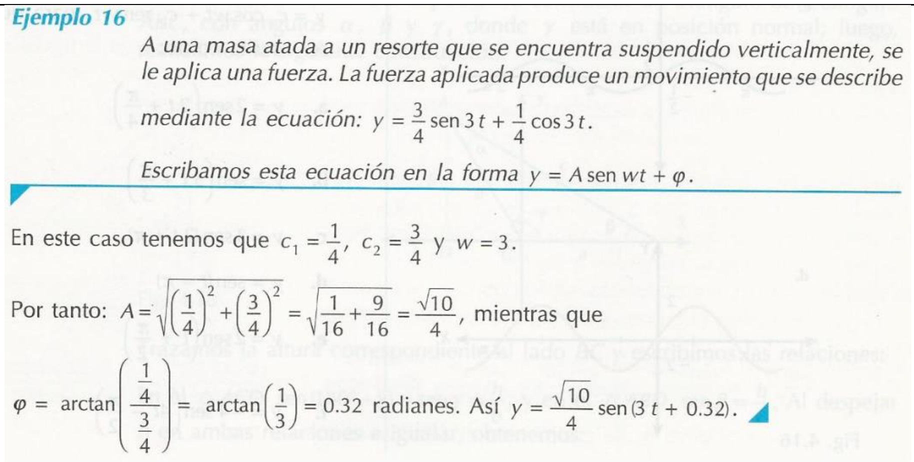
$$=\frac{\operatorname{sen}^2 A+\cos^2 A}{\cos A\cdot\operatorname{sen} A} \quad \text{Efectuamos la adición.}$$

$$=\frac{1}{\cos A\cdot\operatorname{sen} A} \quad \text{Identidad fundamental.}$$
</td>
</tr>
</table>

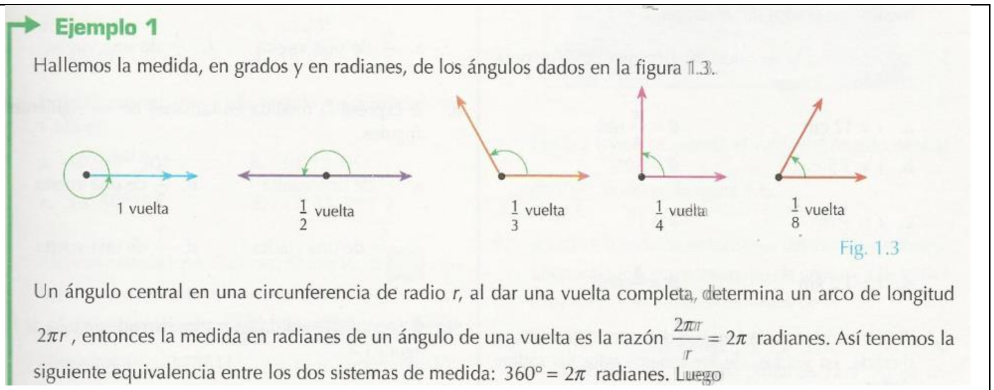
L8-U2-T3	 ***Ejemplo 3*** *¿Cuál es el valor de* $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ *y* $\tan\theta$ *para el ángulo* θ *de la figura 2.15?* El valor de r es 5. ¿Por qué? Según las definiciones tenemos: $\operatorname{sen}\theta=\frac{y}{r}=-\frac{4}{5}$; $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{3}{5}$ y $\tan\theta=\frac{y}{x}=-\frac{4}{3}$. Fig. 2.15
L8-U2-T6	 ***Ejemplo 6*** *Las siguientes funciones se pueden expresar como funciones de un ángulo agudo. Hallemos cada una.* **a.** $\cos(-312°)$ **b.** $\operatorname{sen}(830°)$ **c.** $\tan(172°)$ **d.** $\sec\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ **a.** –312° es un ángulo coterminal a –312° + 360° = 48°, por tanto $\cos(-312°)=\cos(48°)$. Claramente 48° es un ángulo agudo.
L8-U2-T8	 ***Ejemplo 8*** *¿Cuál es el valor de la expresión* $2\operatorname{sen}45°\cos135°-\cot330°\tan30°$*?* Hallemos inicialmente los valores de cada función. $\operatorname{sen}45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos135°=-\cos45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cot330°=-\cot30°=-\frac{\cos30°}{\operatorname{sen}30°}=-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$; $\tan30°=\frac{\operatorname{sen}30°}{\cos30°}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Remplazando cada valor, obtenemos: $2\operatorname{sen}45°\cos135°-\cot330°\tan30°=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}\right)-(-1)=-1+1=0$
L8-U2-T11	 ***Ejemplo 11*** *¿Cuál es el valor de* $\cos(-30°)$, $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\operatorname{sen}(-60°)$ *y* $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$*?* Como la función coseno es par tenemos: $\cos(-30°)=\cos(30°)$ ¿Por qué? $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $\cos(-30°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ Como la función seno es impar tenemos: $\operatorname{sen}(-60°)=-\operatorname{sen}60°$ ¿Por qué? $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $\operatorname{sen}(-60°)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

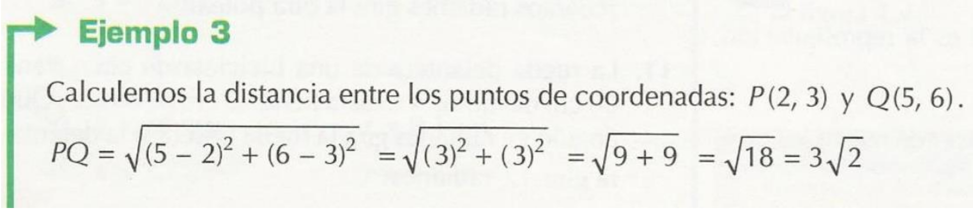
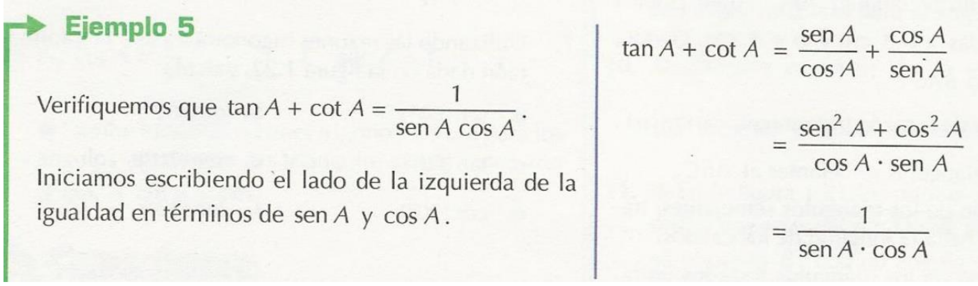
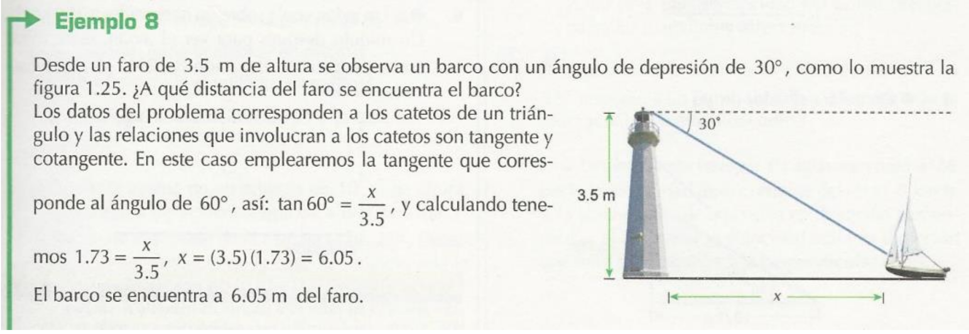
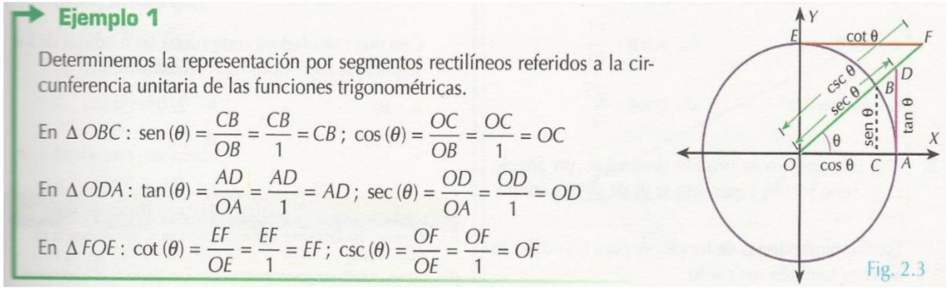
L8-U3-T4	 **Ejemplo 4** *¿Cuáles de las gráficas corresponden a una función uno a uno?* Fig. 3.5 Sobre las figuras se han trazado rectas horizontales punteadas, que muestran que en el intervalo $[a, b]$, f y h son uno a uno y g no lo es. Estamos interesados en las funciones uno a uno porque esta condición asegura la existencia de su función inversa. Esto es cierto ya que si $y = f(x)$ es una función uno a uno en el intervalo I, entonces todo valor de y, en la imagen de I, por f, proviene de un único valor de x en
L8-U3-T7	 **Ejemplo 7** *Utilicemos una calculadora para hallar cada valor. Demos la respuesta en grados y radianes, redondeando a 4 cifras decimales.* **a.** $\text{sen}^{-1}(0.31)$ **b.** $\text{sen}^{-1}(-0.42)$ **c.** $\text{sen}^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **1.** *Respuestas en radianes.* Disponemos nuestra calculadora al modo radianes (tecleando MOD, RAD o su equivalente). **a.** Tecleamos $\boxed{.}\ \boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{SIN}}$; en la pantalla de la calculadora aparece 0.315193032; damos como respuesta 0.3152. **b.** Tecleamos $\boxed{.}\ \boxed{4}\ \boxed{2}\ \boxed{\pm}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{SIN}}$; en la pantalla aparece −0.43344532, que redondeamos a −0.4334. **c.** Tecleamos $\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{EXP}}\ \boxed{\div}\ \boxed{4}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{SIN}}$; en la pantalla aparece 0.90333911, que redondeamos a 0.9033. En resumen: $\text{sen}^{-1}(0.31) = 0.3152$, $\text{sen}^{-1}(-0.42) = -0.4334$, $\text{sen}^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.9033$. En muchas calculadoras, mientras aparezca 0 en pantalla, las teclas $\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{EXP}}$ arrojan un valor aproximado de π $(\pi = 3.141592654)$. **2.** *Respuestas en grados.* Pasamos la calculadora al modo grado (tecleando MODE, DEG o la tecla equivalente). Para cada caso oprimimos las teclas indicadas anteriormente, para obtener:

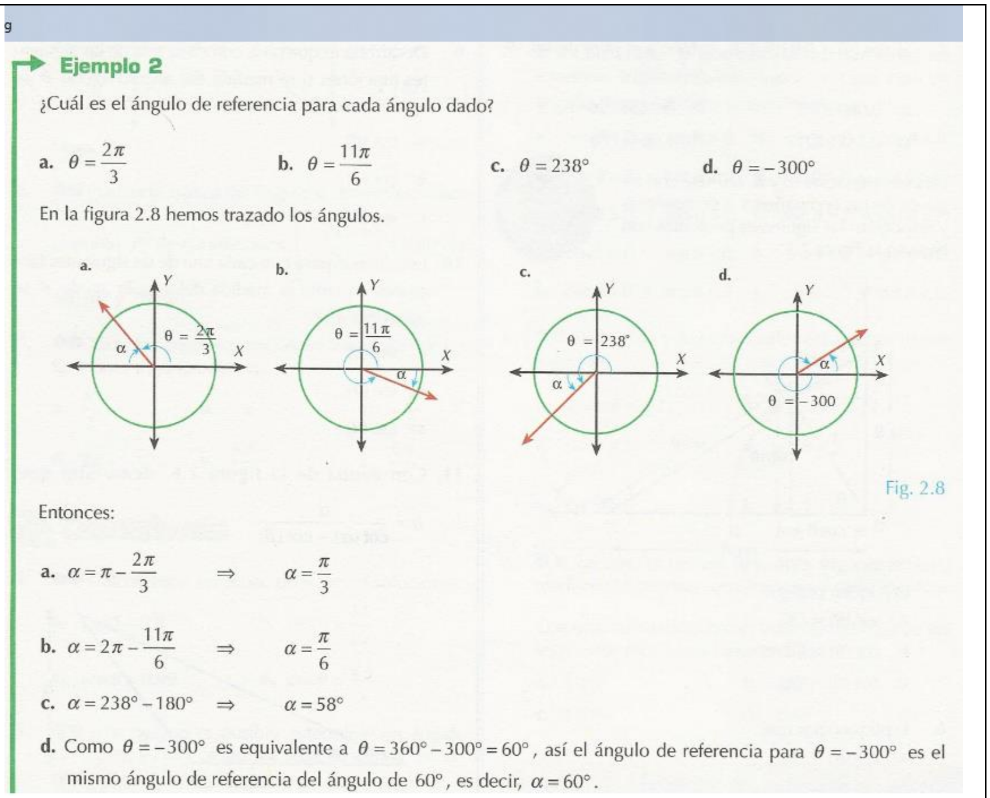
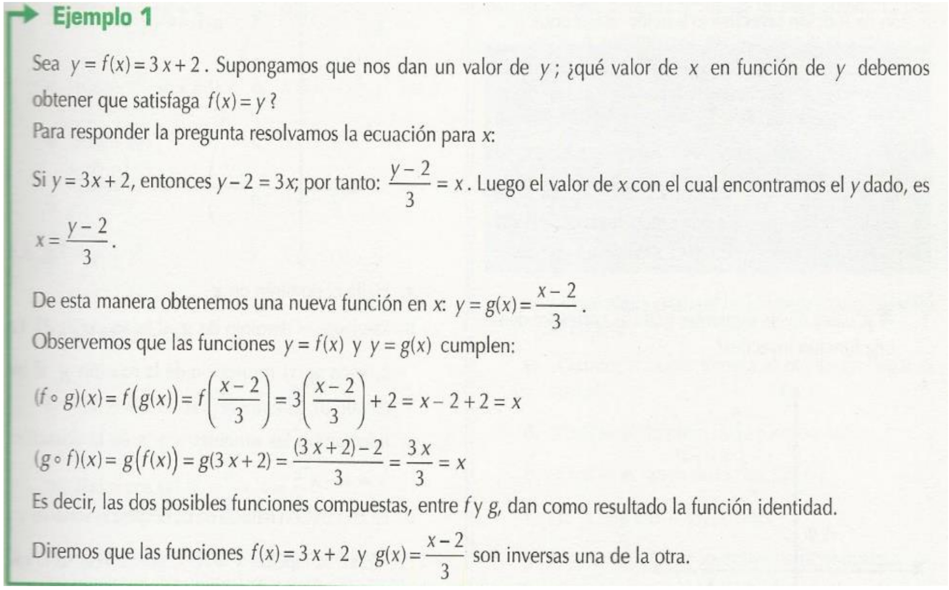
L8-U3-T10	 **Ejemplo 10** *¿Cuál es el ángulo de elevación* θ *en la figura 3.13?* Fig. 3.13 La distancia vertical desde la horizontal del ángulo de elevación y el punto más alto del edificio es $20-1.8=18.2$ m, luego $\operatorname{sen}\theta=\frac{18.2}{31.25}$, de donde $\theta=\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{18.2}{31.25}\right)=\operatorname{sen}^{-1}(0.5824)$. Entonces con ayuda de la calculadora, en modo grados: $\theta\approx 35°37'10.28''$.
L8-U3-T16	 **Ejemplo 16** *En la figura 3.26, si la longitud del hilo de la cometa es 200 metros y la distancia horizontal 150 metros, ¿cuál es el ángulo de elevación* θ*?* Fig. 3.26 Asumimos que el hilo está bien templado y que la línea horizontal (punteada), la vertical y el hilo forman un triángulo rectángulo, entonces: $\cos\theta=\frac{150}{200}$, es decir $\cos\theta=\frac{3}{4}$; luego $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$. Con ayuda de una calculadora $\theta\approx 41.4°$.
L8-U4-T1	 **Ejemplo 1** *Simplifiquemos la expresión* $\cos x-\cos x\operatorname{sen}^2 x$. Si recordamos que al sacar factor común en la expresión $a-ab^2$ se obtiene $a(1-b^2)$, tenemos: $\cos x-\cos x\operatorname{sen}^2 x=\cos x(1-\operatorname{sen}^2 x)$. Empleando la identidad fundamental $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$ o su equivalente: $\cos^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x$, finalmente, escribimos: $\cos x(1-\operatorname{sen}^2 x)=\cos x\cos^2 x=\cos^3 x$. Por tanto, hemos escrito la expresión $\cos x-\cos x\operatorname{sen}^2 x$ en forma simplificada como $\cos^3 x$.
L8-U4-T5	 **Ejemplo 5** *Verifiquemos la identidad* $\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}=\frac{\tan^2\theta}{1+\sec\theta}$. Si trabajamos con el lado izquierdo de la igualdad, tenemos:

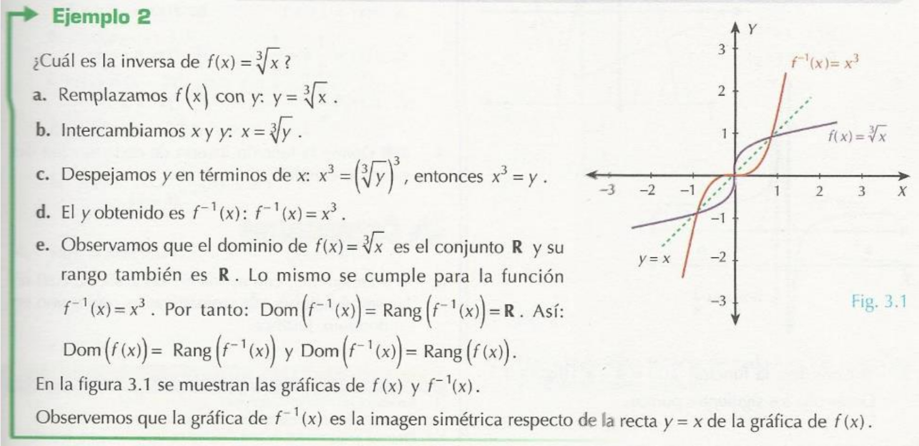
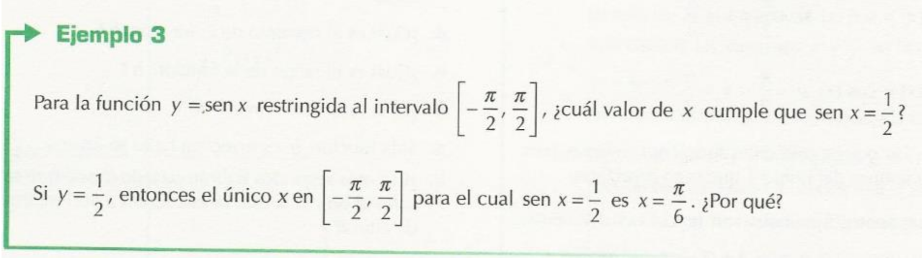
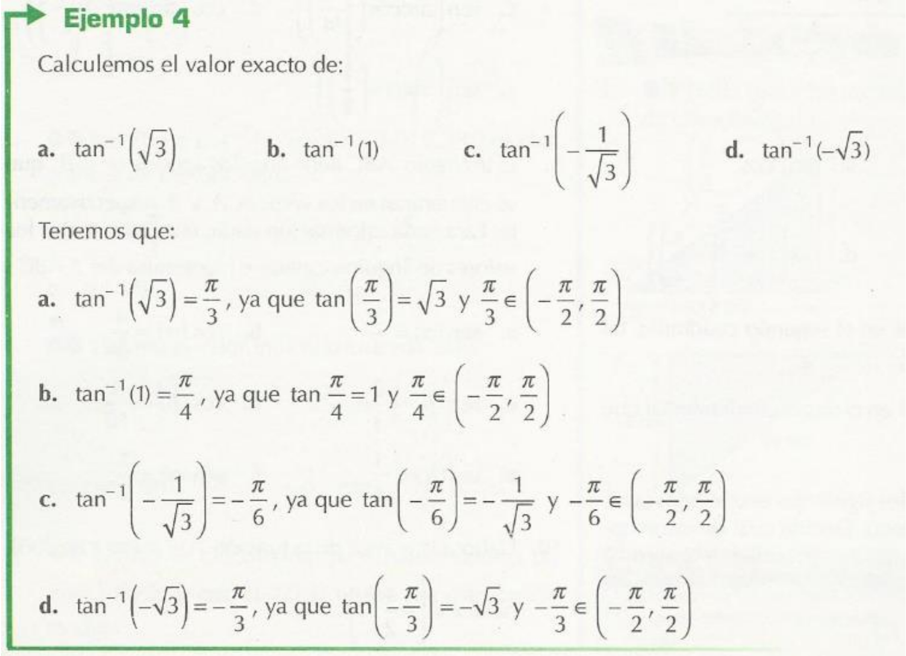
L8-U4-T8	 **Ejemplo 8** *Sabiendo que las soluciones de* $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ *son* $\frac{\pi}{6}$ *y* $\frac{5\pi}{6}$, *¿cuáles son las soluciones de* $\cos x = \frac{1}{2}$*?* Recordando que $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ y tomando en cuenta las soluciones dadas, tenemos: $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{6}$ ya que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y $\frac{\pi}{2} - x = \frac{5\pi}{6}$ ya que $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ Despejando x en cada ecuación obtenemos: $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$. Pero si las soluciones se deben tomar en el intervalo $[0, 2\pi)$, escogemos $x = \frac{5\pi}{3}$ que es coterminal con $x = -\frac{\pi}{3}$. Por tanto, las soluciones de la ecuación $\cos x = \frac{1}{2}$ son $x = \frac{\pi}{3}$ y $x = \frac{5\pi}{3}$.
L8-U4-T16	 **Ejemplo 16** *A una masa atada a un resorte que se encuentra suspendido verticalmente, se le aplica una fuerza. La fuerza aplicada produce un movimiento que se describe mediante la ecuación:* $y = \frac{3}{4} \operatorname{sen} 3t + \frac{1}{4} \cos 3t$. *Escribamos esta ecuación en la forma* $y = A \operatorname{sen} wt + \varphi$. En este caso tenemos que $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{3}{4}$ y $w = 3$. Por tanto: $A = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$, mientras que $\varphi = \arctan\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = 0.32$ radianes. Así $y = \frac{\sqrt{10}}{4} \operatorname{sen}(3t + 0.32)$.

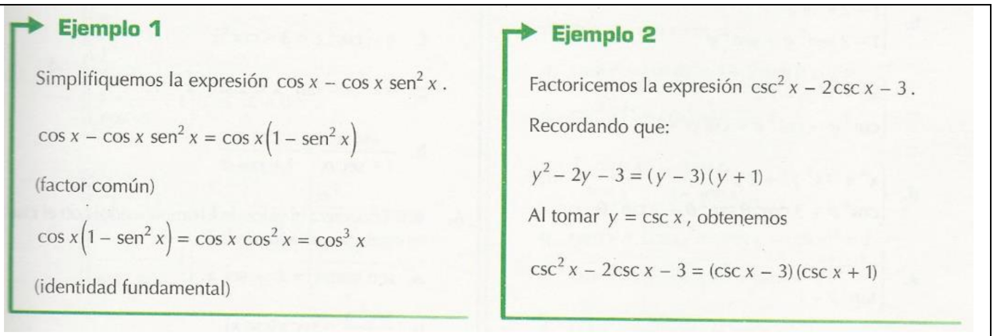
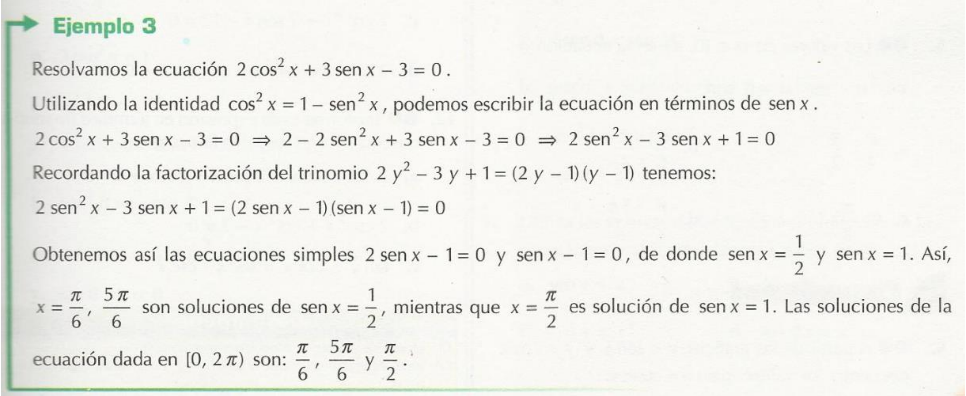
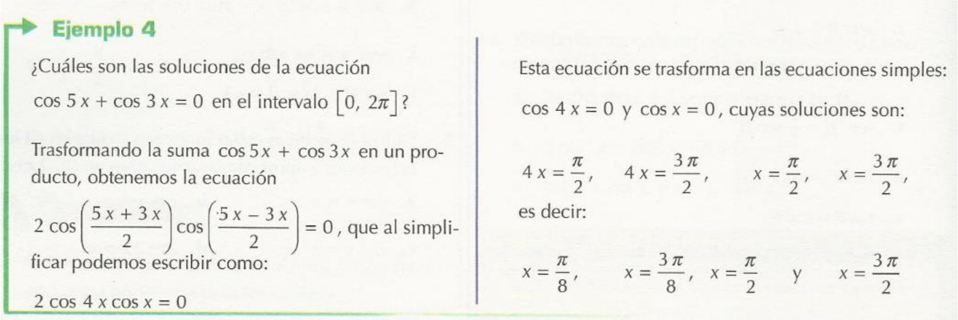
Libro *Conexiones matemáticas 10 (Moreno, 2006)*

L9-U1-T1	 **Ejemplo 1** Hallemos la medida, en grados y en radianes, de los ángulos dados en la figura 1.3. Fig. 1.3 Un ángulo central en una circunferencia de radio r, al dar una vuelta completa, determina un arco de longitud $2\pi r$, entonces la medida en radianes de un ángulo de una vuelta es la razón $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ radianes. Así tenemos la siguiente equivalencia entre los dos sistemas de medida: $360° = 2\pi$ radianes. Luego

L9-U1-T3	 **Ejemplo 3** Calculemos la distancia entre los puntos de coordenadas: $P(2, 3)$ y $Q(5, 6)$. $PQ = \sqrt{(5-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
L9-U1-T5	 **Ejemplo 5** Verifiquemos que $\tan A + \cot A = \frac{1}{\operatorname{sen} A \cos A}$. Iniciamos escribiendo el lado de la izquierda de la igualdad en términos de $\operatorname{sen} A$ y $\cos A$. $\tan A + \cot A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}$ $= \frac{\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A}{\cos A \cdot \operatorname{sen} A}$ $= \frac{1}{\operatorname{sen} A \cdot \cos A}$
L9-U1-T8	 **Ejemplo 8** Desde un faro de 3.5 m de altura se observa un barco con un ángulo de depresión de 30°, como lo muestra la figura 1.25. ¿A qué distancia del faro se encuentra el barco? Los datos del problema corresponden a los catetos de un triángulo y las relaciones que involucran a los catetos son tangente y cotangente. En este caso emplearemos la tangente que corresponde al ángulo de 60°, así: $\tan 60° = \frac{x}{3.5}$, y calculando tenemos $1.73 = \frac{x}{3.5}$, $x = (3.5)(1.73) = 6.05$. El barco se encuentra a 6.05 m del faro.
L9-U2-T1	 **Ejemplo 1** Determinemos la representación por segmentos rectilíneos referidos a la circunferencia unitaria de las funciones trigonométricas. En ΔOBC: $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{CB}{OB} = \frac{CB}{1} = CB$; $\cos(\theta) = \frac{OC}{OB} = \frac{OC}{1} = OC$ En ΔODA: $\tan(\theta) = \frac{AD}{OA} = \frac{AD}{1} = AD$; $\sec(\theta) = \frac{OD}{OA} = \frac{OD}{1} = OD$ En ΔFOE: $\cot(\theta) = \frac{EF}{OE} = \frac{EF}{1} = EF$; $\csc(\theta) = \frac{OF}{OE} = \frac{OF}{1} = OF$ Fig. 2.3

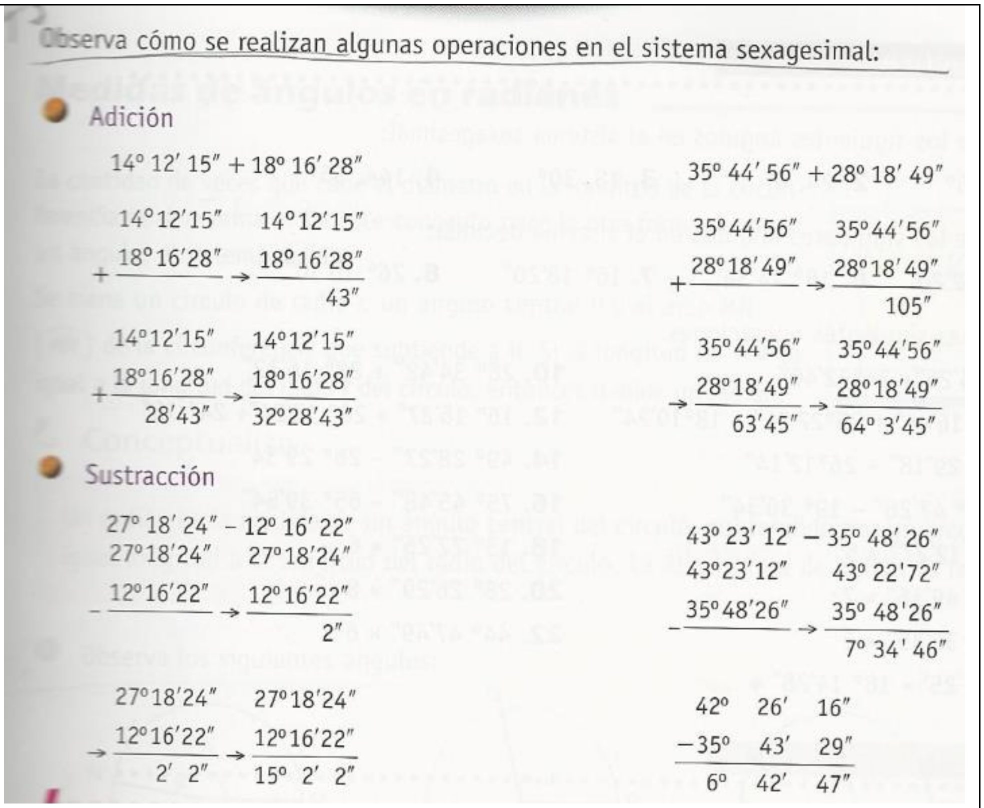
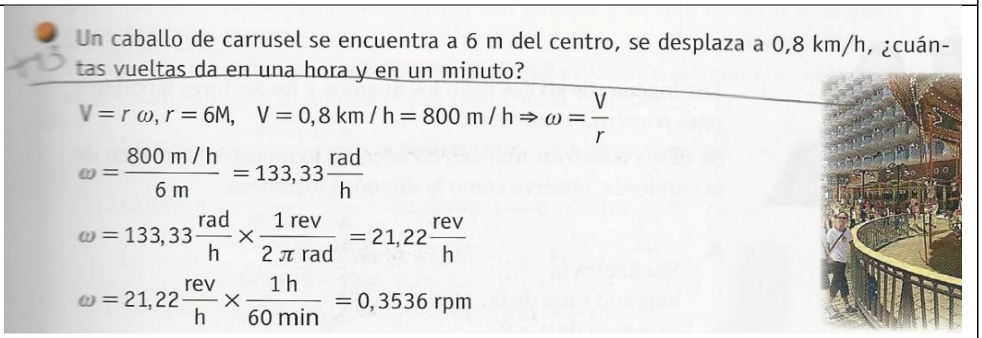
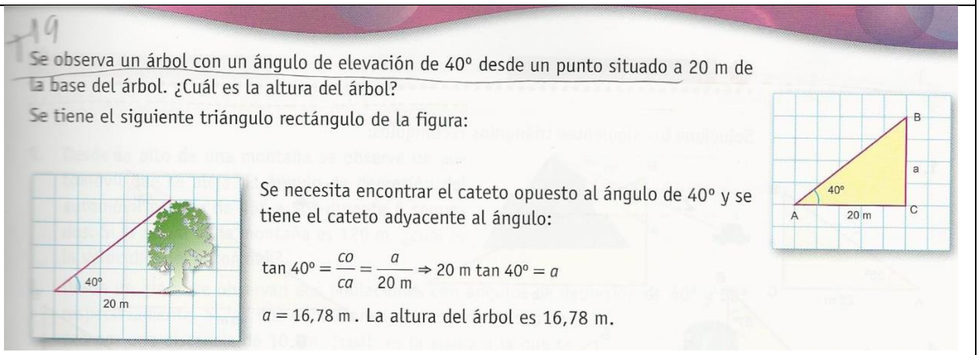
L9-U2-T2	 **Ejemplo 2** ¿Cuál es el ángulo de referencia para cada ángulo dado? **a.** $\theta=\frac{2\pi}{3}$ **b.** $\theta=\frac{11\pi}{6}$ **c.** $\theta=238°$ **d.** $\theta=-300°$ En la figura 2.8 hemos trazado los ángulos. Fig. 2.8 Entonces: **a.** $\alpha=\pi-\frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha=\frac{\pi}{3}$ **b.** $\alpha=2\pi-\frac{11\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \alpha=\frac{\pi}{6}$ **c.** $\alpha=238°-180° \quad \Rightarrow \quad \alpha=58°$ **d.** Como $\theta=-300°$ es equivalente a $\theta=360°-300°=60°$, así el ángulo de referencia para $\theta=-300°$ es el mismo ángulo de referencia del ángulo de $60°$, es decir, $\alpha=60°$.
L9-U3-T1	 **Ejemplo 1** Sea $y=f(x)=3x+2$. Supongamos que nos dan un valor de y; ¿qué valor de x en función de y debemos obtener que satisfaga $f(x)=y$? Para responder la pregunta resolvamos la ecuación para *x*: Si $y=3x+2$, entonces $y-2=3x$; por tanto: $\frac{y-2}{3}=x$. Luego el valor de *x* con el cual encontramos el *y* dado, es $x=\frac{y-2}{3}$. De esta manera obtenemos una nueva función en *x*: $y=g(x)=\frac{x-2}{3}$. Observemos que las funciones $y=f(x)$ y $y=g(x)$ cumplen: $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=f\left(\frac{x-2}{3}\right)=3\left(\frac{x-2}{3}\right)+2=x-2+2=x$ $(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=g(3x+2)=\frac{(3x+2)-2}{3}=\frac{3x}{3}=x$ Es decir, las dos posibles funciones compuestas, entre *f* y *g*, dan como resultado la función identidad. Diremos que las funciones $f(x)=3x+2$ y $g(x)=\frac{x-2}{3}$ son inversas una de la otra.

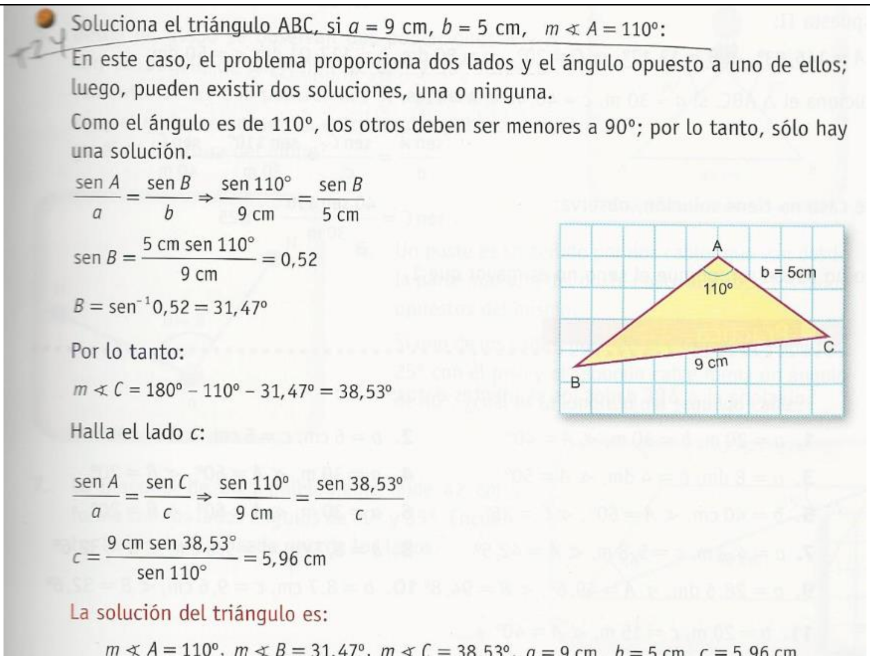
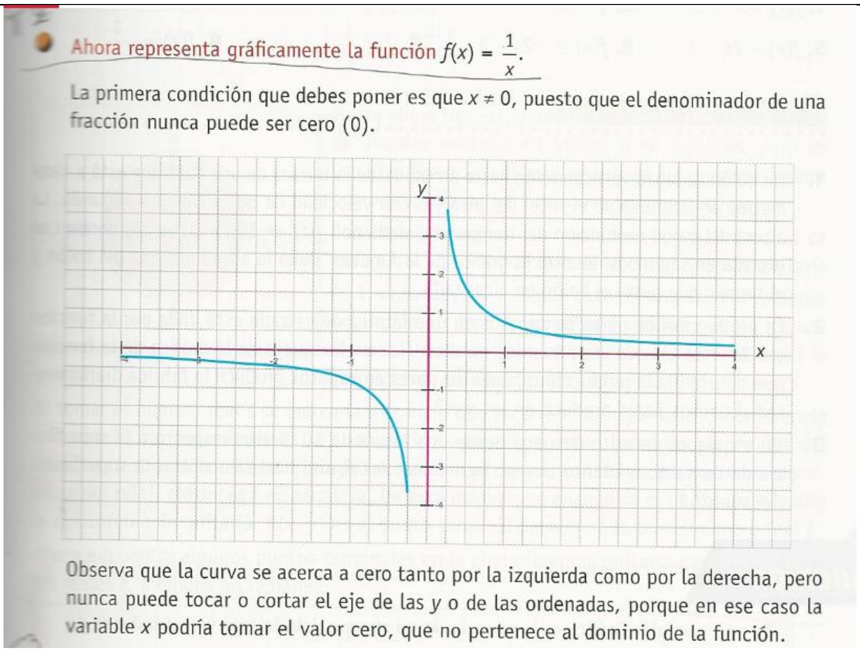
L9-U3-T2	 **Ejemplo 2** ¿Cuál es la inversa de $f(x)=\sqrt[3]{x}$? **a.** Remplazamos $f\left(x\right)$ con y: $y=\sqrt[3]{x}$. **b.** Intercambiamos x y y: $x=\sqrt[3]{y}$. **c.** Despejamos y en términos de x: $x^3=\left(\sqrt[3]{y}\right)^3$, entonces $x^3=y$. **d.** El y obtenido es $f^{-1}(x)$: $f^{-1}(x)=x^3$. **e.** Observamos que el dominio de $f(x)=\sqrt[3]{x}$ es el conjunto **R** y su rango también es **R** . Lo mismo se cumple para la función $f^{-1}(x)=x^3$. Por tanto: $\text{Dom}\left(f^{-1}(x)\right)=\text{Rang}\left(f^{-1}(x)\right)=\mathbf{R}$. Así: $\text{Dom}\left(f(x)\right)=\text{Rang}\left(f^{-1}(x)\right)$ y $\text{Dom}\left(f^{-1}(x)\right)=\text{Rang}\left(f(x)\right)$. En la figura 3.1 se muestran las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$. Observemos que la gráfica de $f^{-1}(x)$ es la imagen simétrica respecto de la recta $y=x$ de la gráfica de $f(x)$. Fig. 3.1
L9-U3-T3	 **Ejemplo 3** Para la función $y=\operatorname{sen} x$ restringida al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, ¿cuál valor de x cumple que $\operatorname{sen} x=\frac{1}{2}$? Si $y=\frac{1}{2}$, entonces el único x en $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ para el cual $\operatorname{sen} x=\frac{1}{2}$ es $x=\frac{\pi}{6}$. ¿Por qué?
L9-U3-T4	 **Ejemplo 4** Calculemos el valor exacto de: **a.** $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ **b.** $\tan^{-1}(1)$ **c.** $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ **d.** $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ Tenemos que: **a.** $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}$, ya que $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ y $\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ **b.** $\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$, ya que $\tan\frac{\pi}{4}=1$ y $\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ **c.** $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}$, ya que $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ **d.** $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$, ya que $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ y $-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

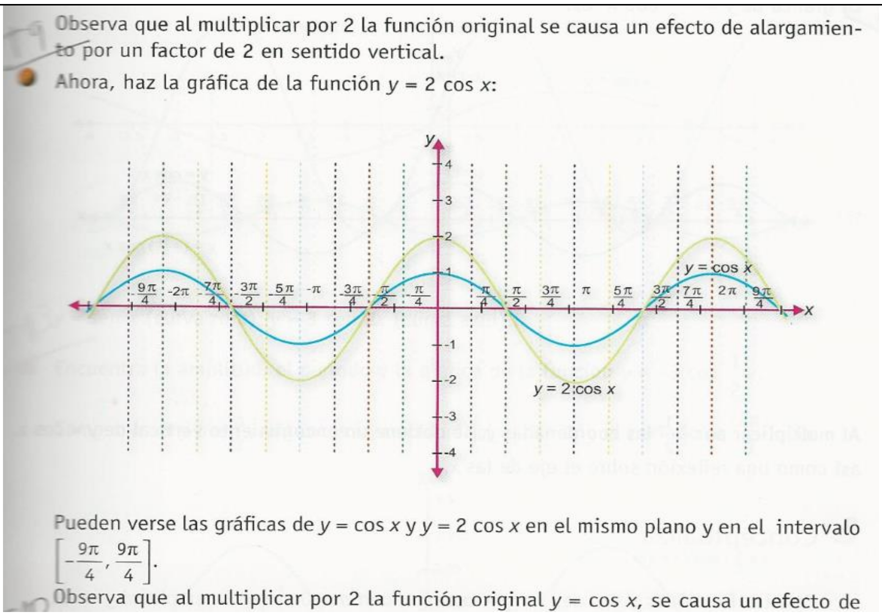
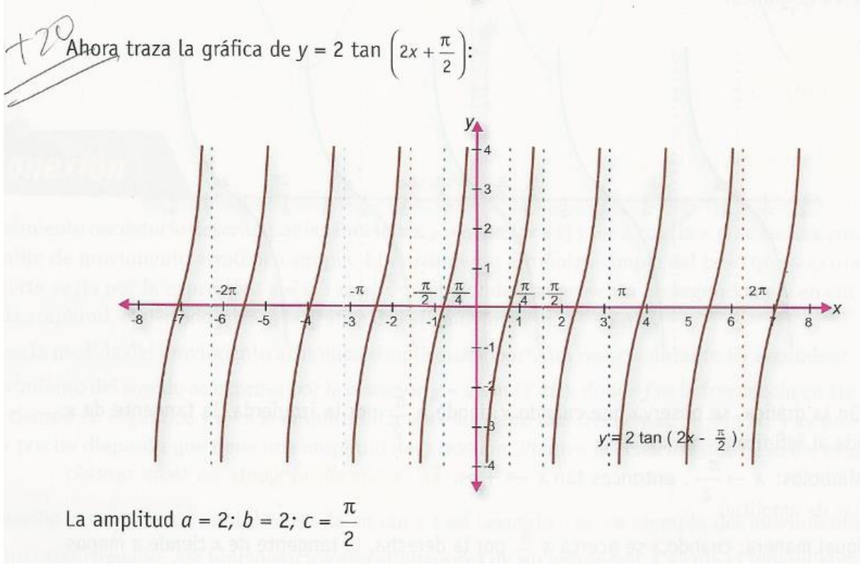
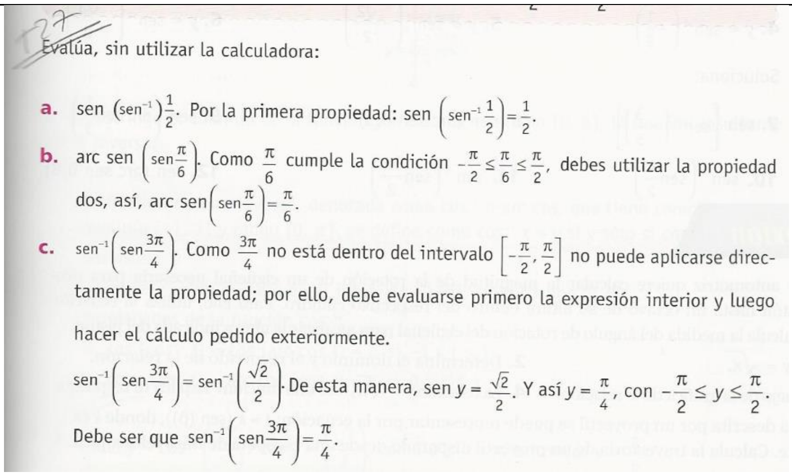
L9-U4-T1 L9-U4-T2	 **Ejemplo 1** Simplifiquemos la expresión $\cos x - \cos x \operatorname{sen}^2 x$. $\cos x - \cos x \operatorname{sen}^2 x = \cos x\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)$ (factor común) $\cos x\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) = \cos x \cos^2 x = \cos^3 x$ (identidad fundamental) **Ejemplo 2** Factoricemos la expresión $\csc^2 x - 2\csc x - 3$. Recordando que: $y^2 - 2y - 3 = (y-3)(y+1)$ Al tomar $y = \csc x$, obtenemos $\csc^2 x - 2\csc x - 3 = (\csc x - 3)(\csc x + 1)$
L9-U4-T3	 **Ejemplo 3** Resolvamos la ecuación $2\cos^2 x + 3\operatorname{sen} x - 3 = 0$. Utilizando la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, podemos escribir la ecuación en términos de $\operatorname{sen} x$. $2\cos^2 x + 3\operatorname{sen} x - 3 = 0 \Rightarrow 2 - 2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x - 3 = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 1 = 0$ Recordando la factorización del trinomio $2y^2 - 3y + 1 = (2y-1)(y-1)$ tenemos: $2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 1 = (2\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x - 1) = 0$ Obtenemos así las ecuaciones simples $2\operatorname{sen} x - 1 = 0$ y $\operatorname{sen} x - 1 = 0$, de donde $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen} x = 1$. Así, $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ son soluciones de $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, mientras que $x = \frac{\pi}{2}$ es solución de $\operatorname{sen} x = 1$. Las soluciones de la ecuación dada en $[0, 2\pi)$ son: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{2}$.
L9-U4-T4	 **Ejemplo 4** ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $\cos 5x + \cos 3x = 0$ en el intervalo $\left[0, 2\pi\right]$? Trasformando la suma $\cos 5x + \cos 3x$ en un producto, obtenemos la ecuación $2\cos\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right) = 0$, que al simplificar podemos escribir como: $2\cos 4x \cos x = 0$ Esta ecuación se trasforma en las ecuaciones simples: $\cos 4x = 0$ y $\cos x = 0$, cuyas soluciones son: $4x = \frac{\pi}{2}, \quad 4x = \frac{3\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{3\pi}{2},$ es decir: $x = \frac{\pi}{8}, \quad x = \frac{3\pi}{8}, \quad x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$

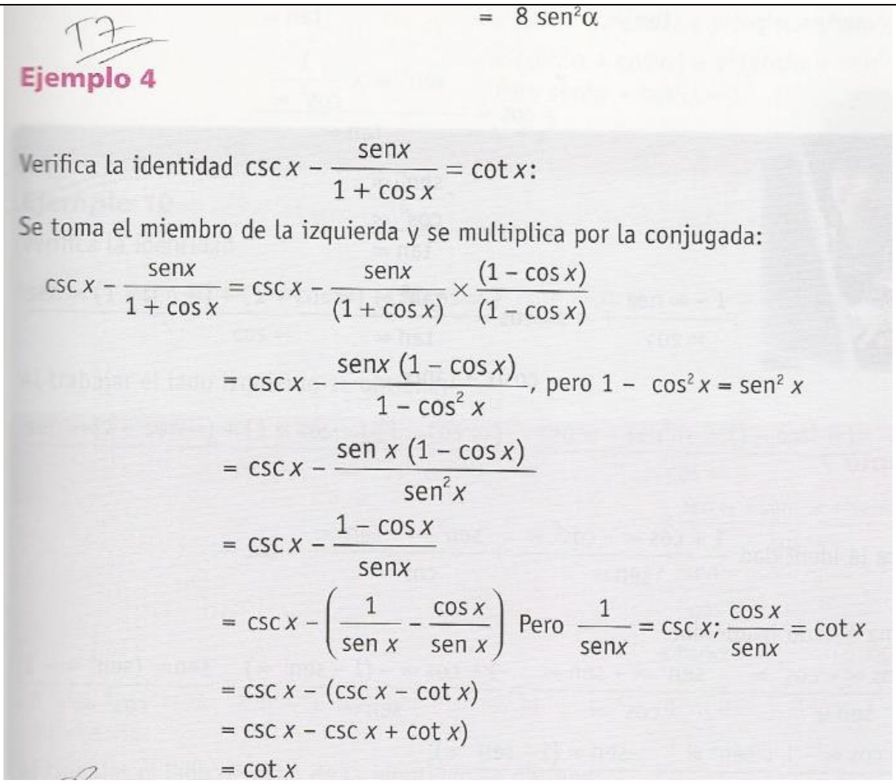
ETAPA 6. TERCER HITO. (2006-2017).

Libro *Mi aventura matemática 10 (Abondano et al., 2010)*

L10-U1-T5	 Observa cómo se realizan algunas operaciones en el sistema sexagesimal: **Adición** $14^\circ 12' 15'' + 18^\circ 16' 28''$ $\begin{array}{r} 14^\circ12'15'' \\ +\ 18^\circ16'28'' \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 14^\circ12'15'' \\ 18^\circ16'28'' \\ \hline 43'' \end{array}$ $\begin{array}{r} 14^\circ12'15'' \\ +\ 18^\circ16'28'' \\ \hline 28'43'' \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 14^\circ12'15'' \\ 18^\circ16'28'' \\ \hline 32^\circ28'43'' \end{array}$ $35^\circ 44' 56'' + 28^\circ 18' 49''$ $\begin{array}{r} 35^\circ44'56'' \\ +\ 28^\circ18'49'' \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 35^\circ44'56'' \\ 28^\circ18'49'' \\ \hline 105'' \end{array}$ $\begin{array}{r} 35^\circ44'56'' \\ \rightarrow\ 28^\circ18'49'' \\ \hline 63'45'' \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 35^\circ44'56'' \\ 28^\circ18'49'' \\ \hline 64^\circ 3'45'' \end{array}$ **Sustracción** $27^\circ 18' 24'' - 12^\circ 16' 22''$ $\begin{array}{r} 27^\circ18'24'' \\ -\ 12^\circ16'22'' \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 27^\circ18'24'' \\ 12^\circ16'22'' \\ \hline 2'' \end{array}$ $\begin{array}{r} 27^\circ18'24'' \\ \rightarrow\ 12^\circ16'22'' \\ \hline 2'\ 2'' \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 27^\circ18'24'' \\ 12^\circ16'22'' \\ \hline 15^\circ\ 2'\ 2'' \end{array}$ $43^\circ 23' 12'' - 35^\circ 48' 26''$ $\begin{array}{r} 43^\circ23'12'' \\ -\ 35^\circ48'26'' \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 43^\circ 22'72'' \\ 35^\circ 48'26'' \\ \hline 7^\circ 34' 46'' \end{array}$ $\begin{array}{rrr} 42^\circ & 26' & 16'' \\ -35^\circ & 43' & 29'' \\ \hline 6^\circ & 42' & 47'' \end{array}$
L10-U1-T13	 T13 Un caballo de carrusel se encuentra a 6 m del centro, se desplaza a 0,8 km/h, ¿cuántas vueltas da en una hora y en un minuto? $V = r\,\omega,\ r = 6M,\quad V = 0{,}8\ km/h = 800\ m/h \Rightarrow \omega = \frac{V}{r}$ $\omega = \frac{800\ m/h}{6\ m} = 133{,}33\frac{rad}{h}$ $\omega = 133{,}33\frac{rad}{h} \times \frac{1\ rev}{2\,\pi\ rad} = 21{,}22\frac{rev}{h}$ $\omega = 21{,}22\frac{rev}{h} \times \frac{1\ h}{60\ min} = 0{,}3536\ rpm$
L10-U1-T19	 T19 Se observa un árbol con un ángulo de elevación de 40° desde un punto situado a 20 m de la base del árbol. ¿Cuál es la altura del árbol? Se tiene el siguiente triángulo rectángulo de la figura: Se necesita encontrar el cateto opuesto al ángulo de 40° y se tiene el cateto adyacente al ángulo: $\tan 40^\circ = \frac{co}{ca} = \frac{a}{20\ m} \Rightarrow 20\ m \tan 40^\circ = a$ $a = 16{,}78\ m$. La altura del árbol es 16,78 m.

L10-U1-T24	 T24 Soluciona el triángulo ABC, si $a = 9$ cm, $b = 5$ cm, $m \sphericalangle A = 110°$: En este caso, el problema proporciona dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos; luego, pueden existir dos soluciones, una o ninguna. Como el ángulo es de 110°, los otros deben ser menores a 90°; por lo tanto, sólo hay una solución. $\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} \Rightarrow \frac{\text{sen } 110°}{9 \text{ cm}} = \frac{\text{sen } B}{5 \text{ cm}}$ $\text{sen } B = \frac{5 \text{ cm sen } 110°}{9 \text{ cm}} = 0{,}52$ $B = \text{sen}^{-1} 0{,}52 = 31{,}47°$ Por lo tanto: $m \sphericalangle C = 180° - 110° - 31{,}47° = 38{,}53°$ Halla el lado c: $\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } C}{c} \Rightarrow \frac{\text{sen } 110°}{9 \text{ cm}} = \frac{\text{sen } 38{,}53°}{c}$ $c = \frac{9 \text{ cm sen } 38{,}53°}{\text{sen } 110°} = 5{,}96 \text{ cm}$ La solución del triángulo es: $m \sphericalangle A = 110°$, $m \sphericalangle B = 31{,}47°$, $m \sphericalangle C = 38{,}53°$, $a = 9$ cm, $b = 5$ cm, $c = 5{,}96$ cm
L10-U2-T2	 T2 Ahora representa gráficamente la función $f(x) = \frac{1}{x}$. La primera condición que debes poner es que $x \neq 0$, puesto que el denominador de una fracción nunca puede ser cero (0). Observa que la curva se acerca a cero tanto por la izquierda como por la derecha, pero nunca puede tocar o cortar el eje de las y o de las ordenadas, porque en ese caso la variable x podría tomar el valor cero, que no pertenece al dominio de la función.

L10-U2-T9	 T9 Observa que al multiplicar por 2 la función original se causa un efecto de alargamiento por un factor de 2 en sentido vertical. ● Ahora, haz la gráfica de la función $y = 2 \cos x$: Pueden verse las gráficas de $y = \cos x$ y $y = 2 \cos x$ en el mismo plano y en el intervalo $\left[-\frac{9\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$. Observa que al multiplicar por 2 la función original $y = \cos x$, se causa un efecto de
L10-U2-T20	 T20 Ahora traza la gráfica de $y = 2 \tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$: La amplitud $a = 2$; $b = 2$; $c = \frac{\pi}{2}$
L10-U2-T27	 T27 Evalúa, sin utilizar la calculadora: **a.** $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\right)\frac{1}{2}$. Por la primera propiedad: $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. **b.** $\operatorname{arc\,sen}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$. Como $\frac{\pi}{6}$ cumple la condición $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$, debes utilizar la propiedad dos, así, $\operatorname{arc\,sen}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$. **c.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$. Como $\frac{3\pi}{4}$ no está dentro del intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ no puede aplicarse directamente la propiedad; por ello, debe evaluarse primero la expresión interior y luego hacer el cálculo pedido exteriormente. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. De esta manera, $\operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Y así $y = \frac{\pi}{4}$, con $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Debe ser que $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$.

<table>
<tr>
<td>L10-U3-T7</td>
<td>


$= 8\ \text{sen}^2\alpha$

T7

Ejemplo 4

Verifica la identidad $\csc x - \dfrac{\text{sen}x}{1 + \cos x} = \cot x$:

Se toma el miembro de la izquierda y se multiplica por la conjugada:

$$\csc x - \frac{\text{sen}x}{1 + \cos x} = \csc x - \frac{\text{sen}x}{(1 + \cos x)} \times \frac{(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)}$$

$$= \csc x - \frac{\text{sen}x\ (1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x}, \text{ pero } 1 - \cos^2 x = \text{sen}^2 x$$

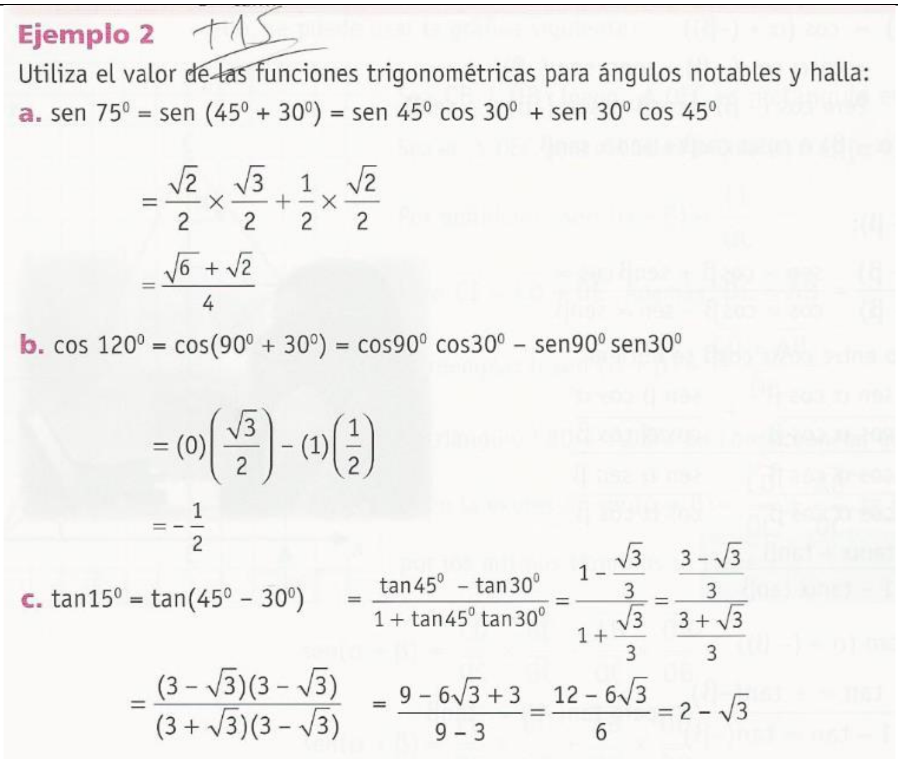
$$= \csc x - \frac{\text{sen}\ x\ (1 - \cos x)}{\text{sen}^2 x}$$

$$= \csc x - \frac{1 - \cos x}{\text{sen}x}$$

$$= \csc x - \left(\frac{1}{\text{sen}\ x} - \frac{\cos x}{\text{sen}\ x}\right) \quad \text{Pero } \frac{1}{\text{sen}x} = \csc x;\ \frac{\cos x}{\text{sen}x} = \cot x$$

$$= \csc x - (\csc x - \cot x)$$

$$= \csc x - \csc x + \cot x)$$

$$= \cot x$$
</td>
</tr>
<tr>
<td>L10-U3-T15</td>
<td>


Ejemplo 2 t15

Utiliza el valor de las funciones trigonométricas para ángulos notables y halla:

a. $\text{sen } 75^0 = \text{sen } (45^0 + 30^0) = \text{sen } 45^0 \cos 30^0 + \text{sen } 30^0 \cos 45^0$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

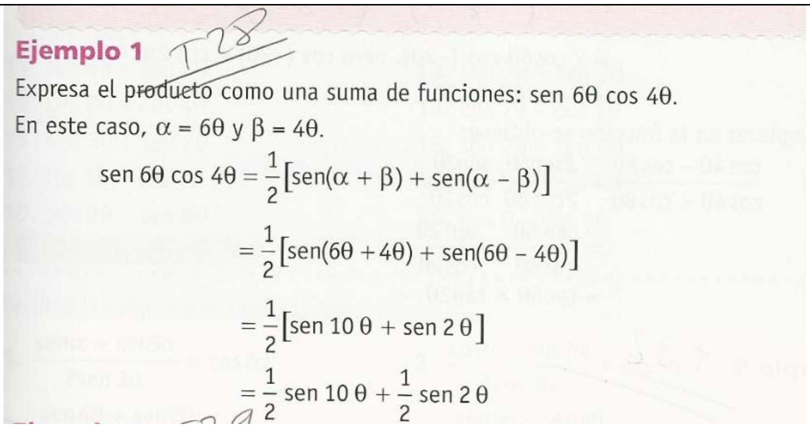
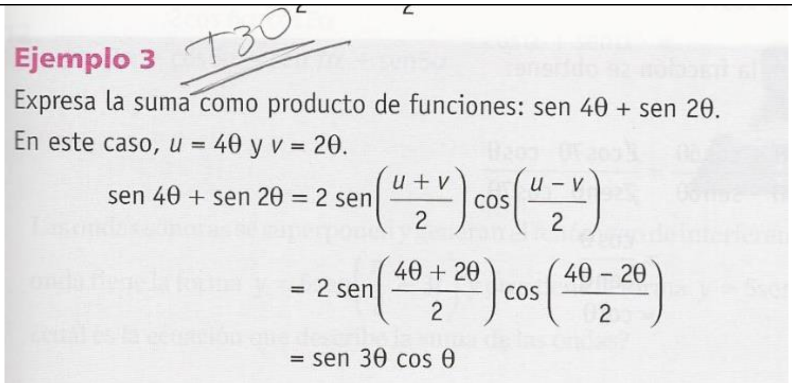
b. $\cos 120^0 = \cos(90^0 + 30^0) = \cos 90^0 \cos 30^0 - \text{sen}90^0\,\text{sen}30^0$

$$= (0)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (1)\left(\frac{1}{2}\right)$$

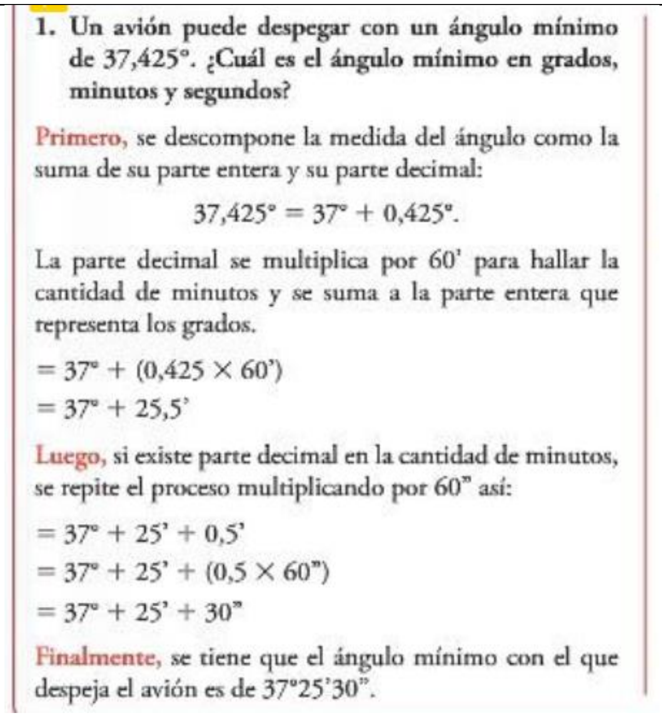
$$= -\frac{1}{2}$$

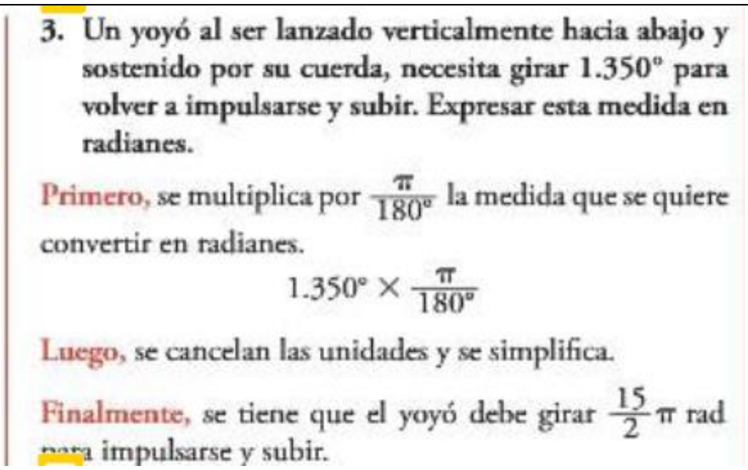
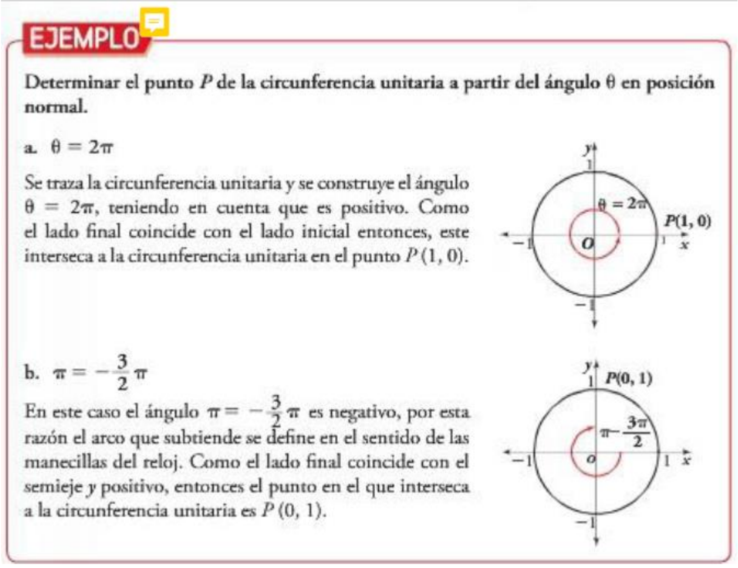
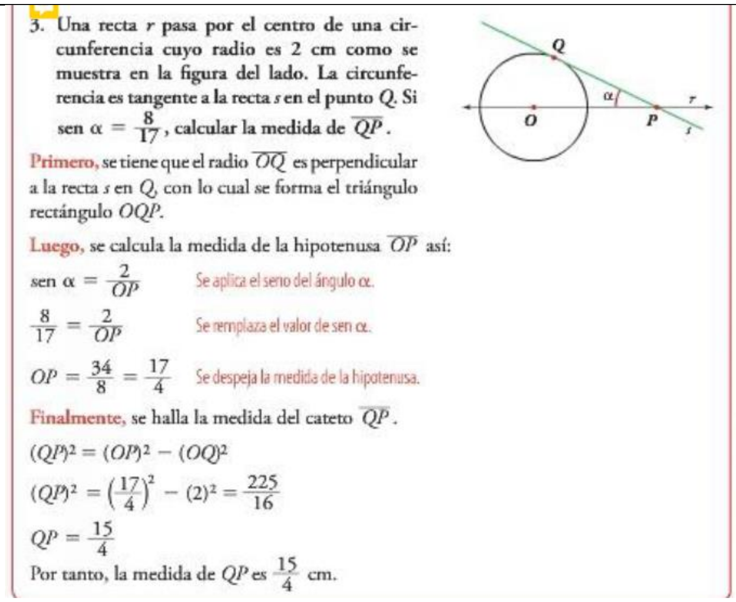
c. $\tan 15^0 = \tan(45^0 - 30^0) \quad = \dfrac{\tan 45^0 - \tan 30^0}{1 + \tan 45^0 \tan 30^0} = \dfrac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}}{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}}$

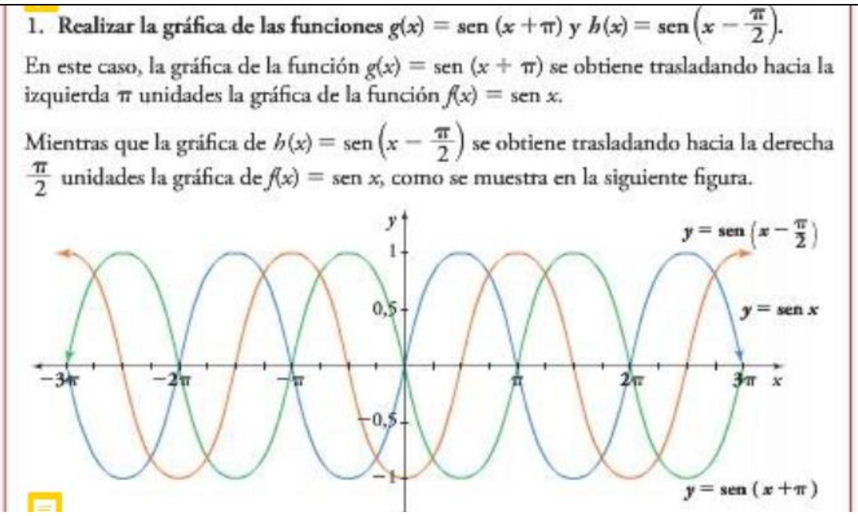
$$= \frac{(3 - \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}$$
</td>
</tr>
</table>

L10-U3-T28	 **Ejemplo 1** T28 Expresa el producto como una suma de funciones: sen 6θ cos 4θ. En este caso, $\alpha = 6\theta$ y $\beta = 4\theta$. $\text{sen } 6\theta \cos 4\theta = \frac{1}{2}[\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta)]$ $= \frac{1}{2}[\text{sen}(6\theta + 4\theta) + \text{sen}(6\theta - 4\theta)]$ $= \frac{1}{2}[\text{sen } 10\,\theta + \text{sen } 2\,\theta]$ $= \frac{1}{2}\,\text{sen } 10\,\theta + \frac{1}{2}\,\text{sen } 2\,\theta$
L10-U3-T30	 **Ejemplo 3** T30 Expresa la suma como producto de funciones: sen 4θ + sen 2θ. En este caso, $u = 4\theta$ y $v = 2\theta$. $\text{sen } 4\theta + \text{sen } 2\theta = 2\,\text{sen}\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$ $= 2\,\text{sen}\left(\frac{4\theta + 2\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{4\theta - 2\theta}{2}\right)$ $= \text{sen } 3\theta \cos \theta$

Libro *Los caminos del saber Matemáticas 10 (Buitrago et al., 2013)*

L11-U2-T2	 **1. Un avión puede despegar con un ángulo mínimo de 37,425°. ¿Cuál es el ángulo mínimo en grados, minutos y segundos?** **Primero,** se descompone la medida del ángulo como la suma de su parte entera y su parte decimal: 37,425° = 37° + 0,425°. La parte decimal se multiplica por 60' para hallar la cantidad de minutos y se suma a la parte entera que representa los grados. = 37° + (0,425 × 60') = 37° + 25,5' **Luego,** si existe parte decimal en la cantidad de minutos, se repite el proceso multiplicando por 60" así: = 37° + 25' + 0,5' = 37° + 25' + (0,5 × 60") = 37° + 25' + 30" **Finalmente,** se tiene que el ángulo mínimo con el que despeja el avión es de 37°25'30".

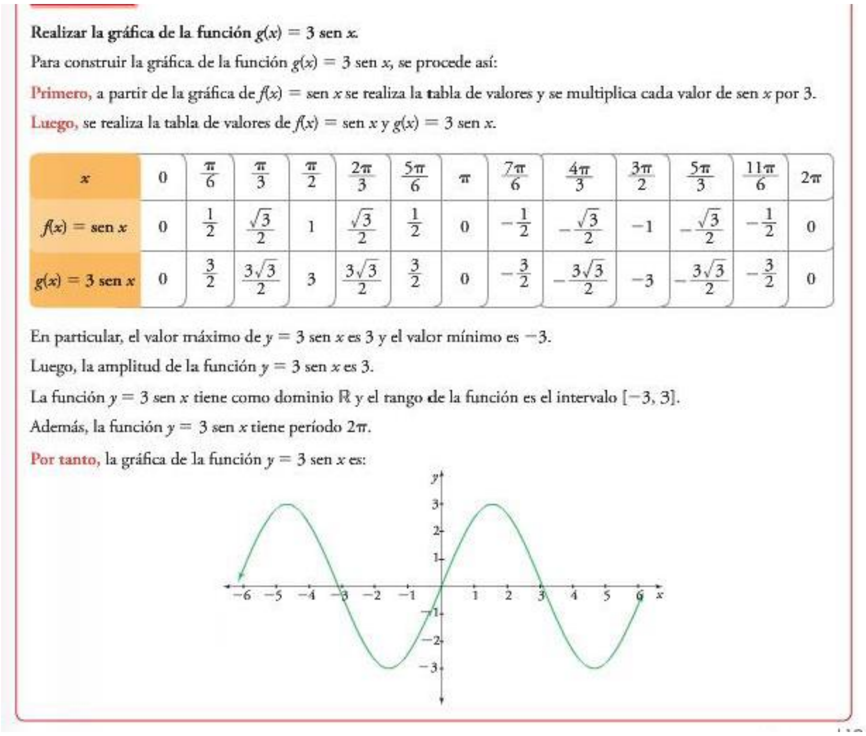
L11-U2-T6	 **3. Un yoyó al ser lanzado verticalmente hacia abajo y sostenido por su cuerda, necesita girar 1.350° para volver a impulsarse y subir. Expresar esta medida en radianes.** Primero, se multiplica por $\frac{\pi}{180°}$ la medida que se quiere convertir en radianes. $$1.350° \times \frac{\pi}{180°}$$ Luego, se cancelan las unidades y se simplifica. Finalmente, se tiene que el yoyó debe girar $\frac{15}{2}\pi$ rad para impulsarse y subir.
L11-U2-T15	 EJEMPLO **Determinar el punto P de la circunferencia unitaria a partir del ángulo θ en posición normal.** a. $\theta = 2\pi$ Se traza la circunferencia unitaria y se construye el ángulo $\theta = 2\pi$, teniendo en cuenta que es positivo. Como el lado final coincide con el lado inicial entonces, este interseca a la circunferencia unitaria en el punto $P(1, 0)$. b. $\pi = -\frac{3}{2}\pi$ En este caso el ángulo $\pi = -\frac{3}{2}\pi$ es negativo, por esta razón el arco que subtiende se define en el sentido de las manecillas del reloj. Como el lado final coincide con el semieje y positivo, entonces el punto en el que interseca a la circunferencia unitaria es $P(0, 1)$.
L11-U2-T22	 **3. Una recta r pasa por el centro de una circunferencia cuyo radio es 2 cm como se muestra en la figura del lado. La circunferencia es tangente a la recta s en el punto Q. Si sen $\alpha = \frac{8}{17}$, calcular la medida de $\overline{QP}$.** Primero, se tiene que el radio $\overline{OQ}$ es perpendicular a la recta s en Q, con lo cual se forma el triángulo rectángulo OQP. Luego, se calcula la medida de la hipotenusa $\overline{OP}$ así: $\text{sen } \alpha = \frac{2}{OP}$ Se aplica el seno del ángulo α. $\frac{8}{17} = \frac{2}{OP}$ Se remplaza el valor de sen α. $OP = \frac{34}{8} = \frac{17}{4}$ Se despeja la medida de la hipotenusa. Finalmente, se halla la medida del cateto $\overline{QP}$. $(QP)^2 = (OP)^2 - (OQ)^2$ $(QP)^2 = \left(\frac{17}{4}\right)^2 - (2)^2 = \frac{225}{16}$ $QP = \frac{15}{4}$ Por tanto, la medida de QP es $\frac{15}{4}$ cm.

<table>
<tr>
<td>L11-U3-T3</td>
<td>


1. Realizar la gráfica de las funciones $g(x) = \text{sen}\ (x + \pi)$ y $h(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

En este caso, la gráfica de la función $g(x) = \text{sen}\ (x + \pi)$ se obtiene trasladando hacia la izquierda π unidades la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}\ x$.

Mientras que la gráfica de $h(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ se obtiene trasladando hacia la derecha $\frac{\pi}{2}$ unidades la gráfica de $f(x) = \text{sen}\ x$, como se muestra en la siguiente figura.

</td>
</tr>
<tr>
<td>L11-U3-T7</td>
<td>


Realizar la gráfica de la función $g(x) = 3\ \text{sen}\ x$.

Para construir la gráfica de la función $g(x) = 3\ \text{sen}\ x$, se procede así:

Primero, a partir de la gráfica de $f(x) = \text{sen}\ x$ se realiza la tabla de valores y se multiplica cada valor de sen x por 3.

Luego, se realiza la tabla de valores de $f(x) = \text{sen}\ x$ y $g(x) = 3\ \text{sen}\ x$.

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{6}$</td><td>$\frac{\pi}{3}$</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td>$\frac{2\pi}{3}$</td><td>$\frac{5\pi}{6}$</td><td>π</td><td>$\frac{7\pi}{6}$</td><td>$\frac{4\pi}{3}$</td><td>$\frac{3\pi}{2}$</td><td>$\frac{5\pi}{3}$</td><td>$\frac{11\pi}{6}$</td><td>2π</td></tr>
<tr><td>$f(x) = \text{sen}\ x$</td><td>0</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>1</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>0</td><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>$-\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>-1</td><td>$-\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>$-\frac{1}{2}$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$g(x) = 3\ \text{sen}\ x$</td><td>0</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$\frac{3\sqrt{3}}{2}$</td><td>3</td><td>$\frac{3\sqrt{3}}{2}$</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>0</td><td>$-\frac{3}{2}$</td><td>$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$</td><td>-3</td><td>$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$</td><td>$-\frac{3}{2}$</td><td>0</td></tr>
</table>

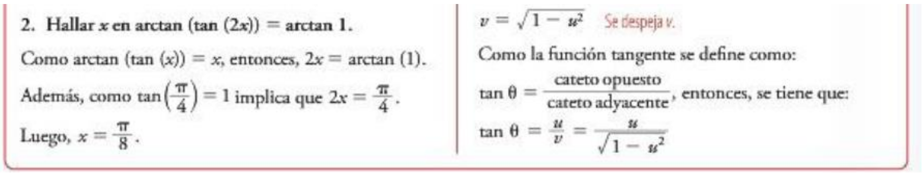
En particular, el valor máximo de $y = 3\ \text{sen}\ x$ es 3 y el valor mínimo es -3.

Luego, la amplitud de la función $y = 3\ \text{sen}\ x$ es 3.

La función $y = 3\ \text{sen}\ x$ tiene como dominio $\mathbb{R}$ y el rango de la función es el intervalo $[-3, 3]$.

Además, la función $y = 3\ \text{sen}\ x$ tiene período 2π.

Por tanto, la gráfica de la función $y = 3\ \text{sen}\ x$ es:

</td>
</tr>
<tr>
<td>L11-U3-T12</td>
<td>


2. Hallar x en arctan (tan $(2x)$) = arctan 1.

Como arctan (tan (x)) = x, entonces, $2x$ = arctan (1).

Además, como $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ implica que $2x = \frac{\pi}{4}$.

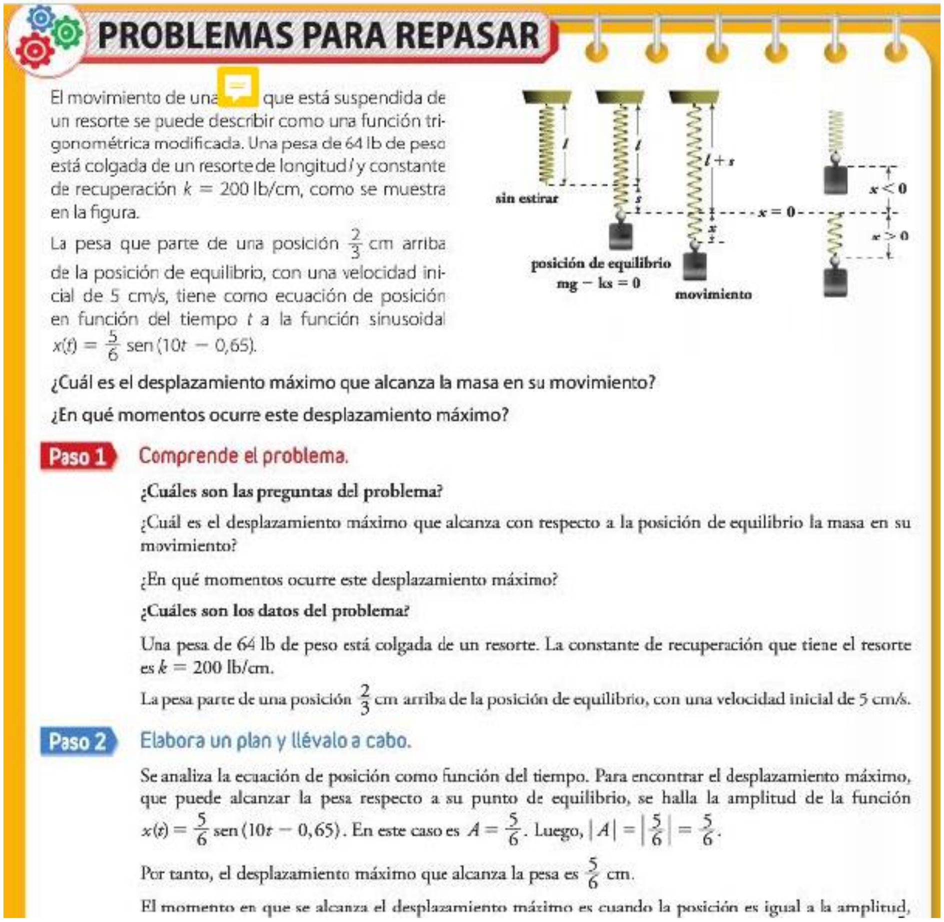
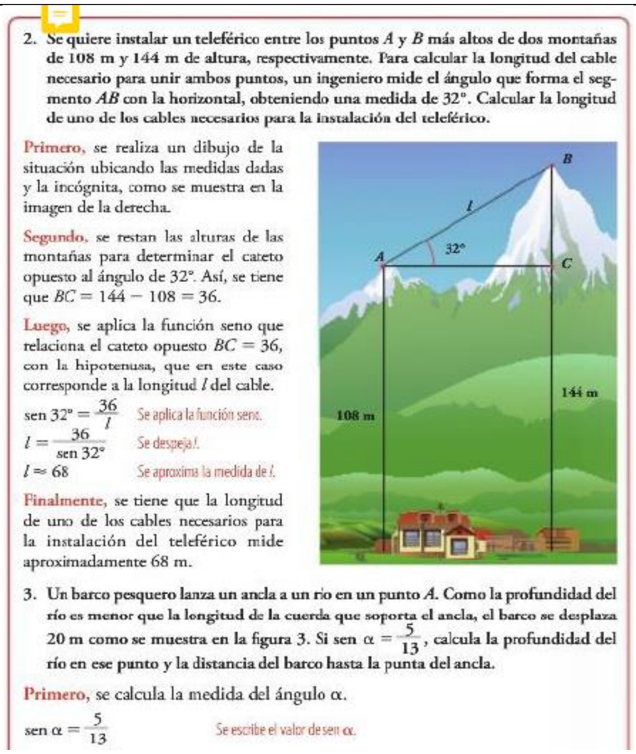
Luego, $x = \frac{\pi}{8}$.

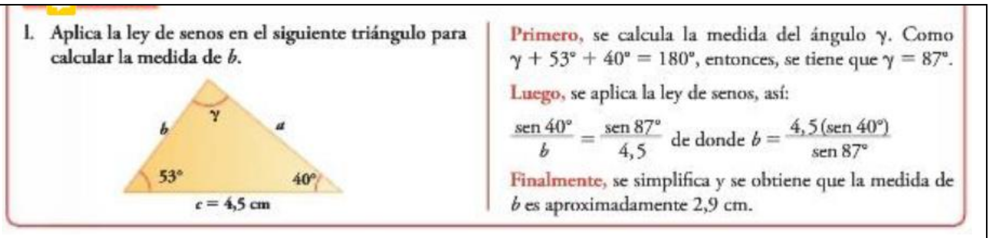
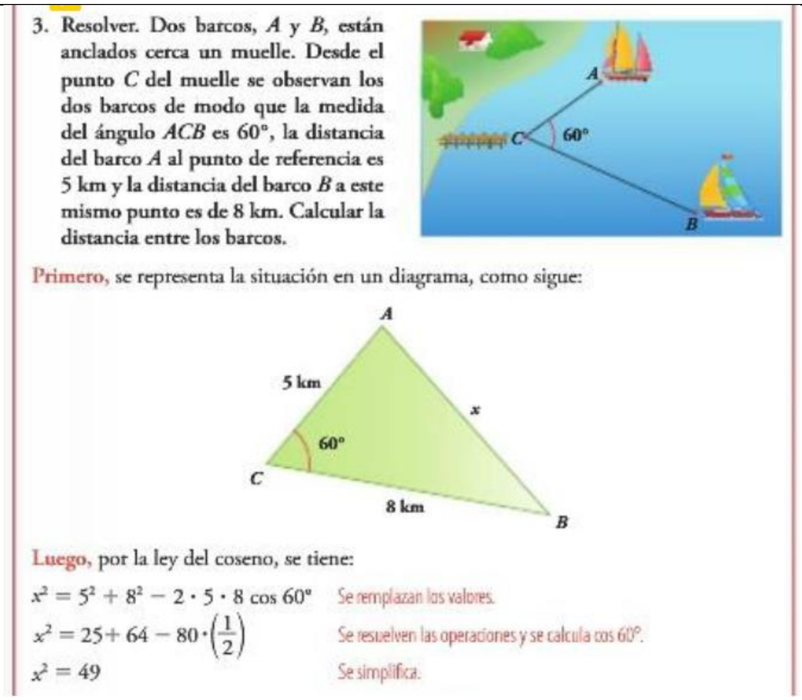
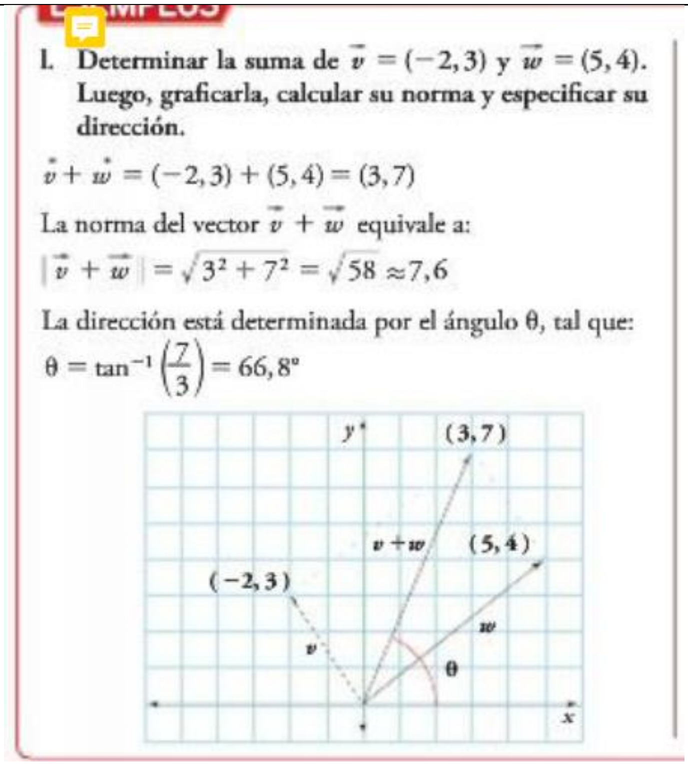
$v = \sqrt{1 - u^2}$ Se despeja v.

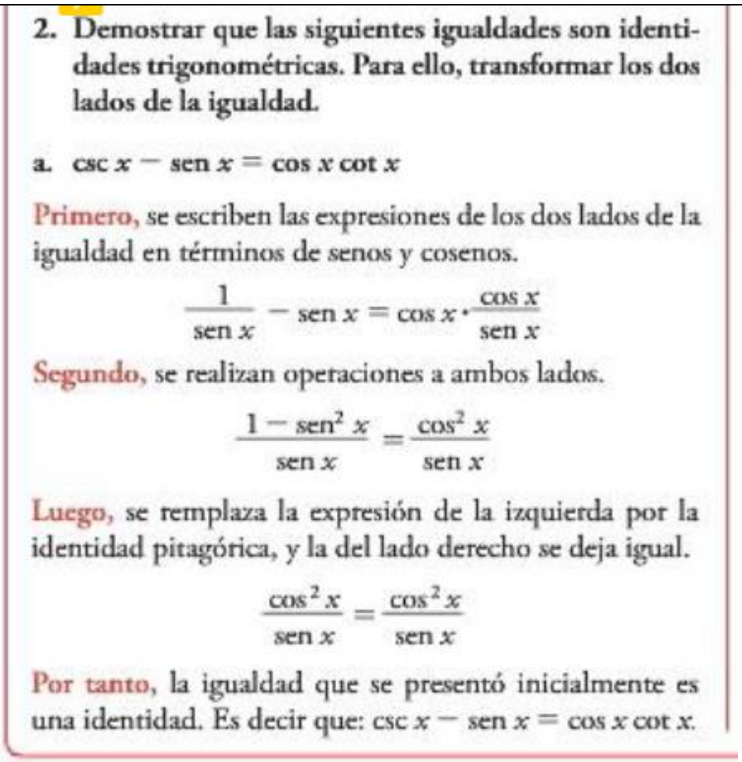
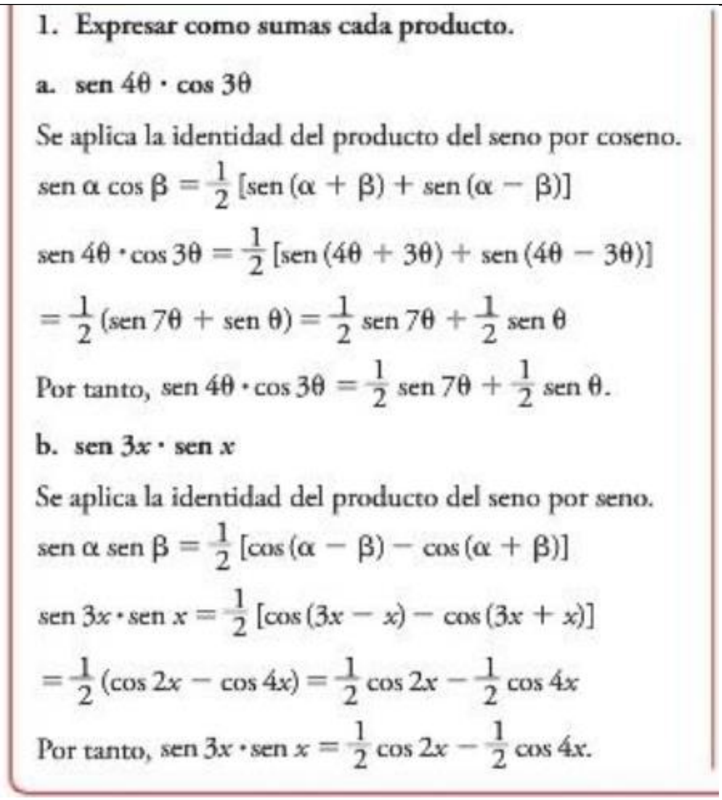
Como la función tangente se define como:

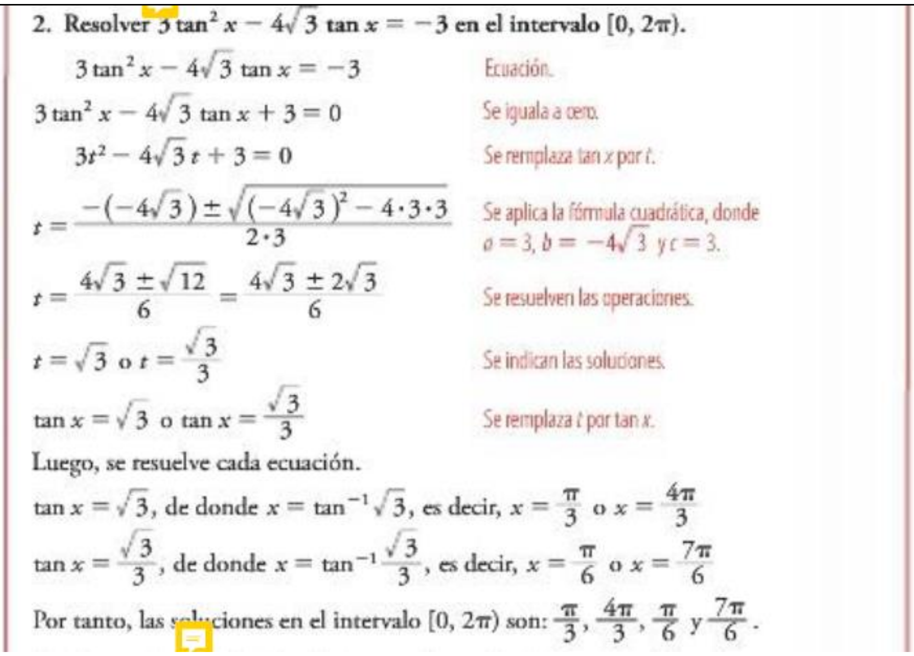
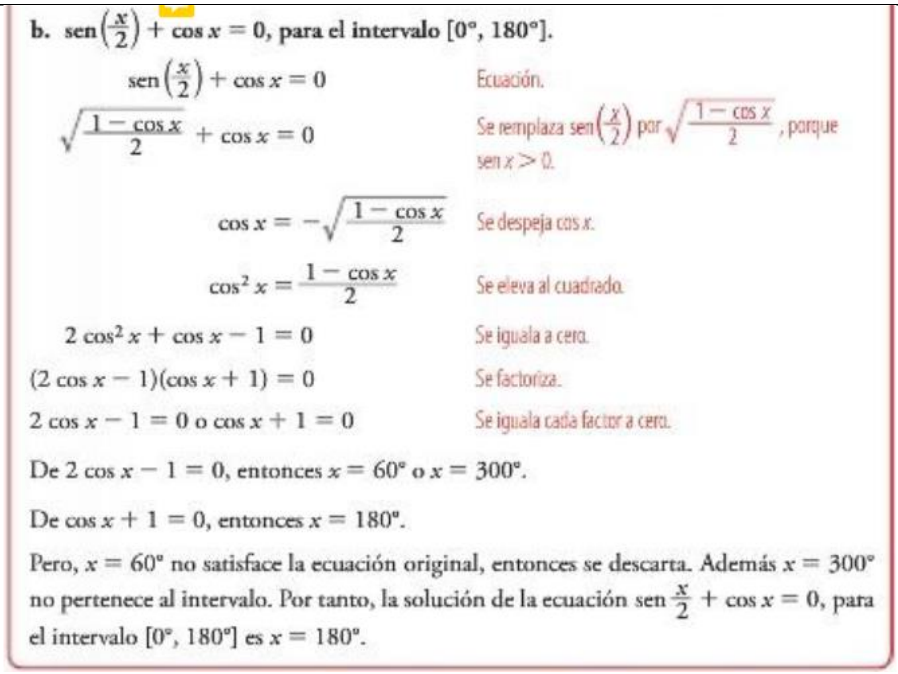
$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$, entonces, se tiene que:

$\tan\theta = \frac{u}{v} = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}}$
</td>
</tr>
</table>

L11-U3-T14	 **PROBLEMAS PARA REPASAR** El movimiento de una [illegible] que está suspendida de un resorte se puede describir como una función trigonométrica modificada. Una pesa de 64 lb de peso está colgada de un resorte de longitud l y constante de recuperación $k = 200$ lb/cm, como se muestra en la figura. La pesa que parte de una posición $\frac{2}{3}$ cm arriba de la posición de equilibrio, con una velocidad inicial de 5 cm/s, tiene como ecuación de posición en función del tiempo t a la función sinusoidal $x(t) = \frac{5}{6}$ sen $(10t - 0{,}65)$. **¿Cuál es el desplazamiento máximo que alcanza la masa en su movimiento?** **¿En qué momentos ocurre este desplazamiento máximo?** **Paso 1** Comprende el problema. **¿Cuáles son las preguntas del problema?** ¿Cuál es el desplazamiento máximo que alcanza con respecto a la posición de equilibrio la masa en su movimiento? ¿En qué momentos ocurre este desplazamiento máximo? **¿Cuáles son los datos del problema?** Una pesa de 64 lb de peso está colgada de un resorte. La constante de recuperación que tiene el resorte es $k = 200$ lb/cm. La pesa parte de una posición $\frac{2}{3}$ cm arriba de la posición de equilibrio, con una velocidad inicial de 5 cm/s. **Paso 2** Elabora un plan y llévalo a cabo. Se analiza la ecuación de posición como función del tiempo. Para encontrar el desplazamiento máximo, que puede alcanzar la pesa respecto a su punto de equilibrio, se halla la amplitud de la función $x(t) = \frac{5}{6}$ sen $(10t - 0{,}65)$. En este caso es $A = \frac{5}{6}$. Luego, $\lvert A \rvert = \left\lvert \frac{5}{6} \right\rvert = \frac{5}{6}$. Por tanto, el desplazamiento máximo que alcanza la pesa es $\frac{5}{6}$ cm. El momento en que se alcanza el desplazamiento máximo es cuando la posición es igual a la amplitud,
L11-U4-T4	 **2. Se quiere instalar un teleférico entre los puntos A y B más altos de dos montañas de 108 m y 144 m de altura, respectivamente. Para calcular la longitud del cable necesario para unir ambos puntos, un ingeniero mide el ángulo que forma el segmento AB con la horizontal, obteniendo una medida de 32°. Calcular la longitud de uno de los cables necesarios para la instalación del teleférico.** **Primero,** se realiza un dibujo de la situación ubicando las medidas dadas y la incógnita, como se muestra en la imagen de la derecha. **Segundo,** se restan las alturas de las montañas para determinar el cateto opuesto al ángulo de 32°. Así, se tiene que $BC = 144 - 108 = 36$. **Luego,** se aplica la función seno que relaciona el cateto opuesto $BC = 36$, con la hipotenusa, que en este caso corresponde a la longitud l del cable. sen $32° = \frac{36}{l}$ Se aplica la función seno. $l = \frac{36}{\text{sen } 32°}$ Se despeja l. $l \approx 68$ Se aproxima la medida de l. **Finalmente,** se tiene que la longitud de uno de los cables necesarios para la instalación del teleférico mide aproximadamente 68 m. **3. Un barco pesquero lanza un ancla a un río en un punto A. Como la profundidad del río es menor que la longitud de la cuerda que soporta el ancla, el barco se desplaza 20 m como se muestra en la figura 3. Si sen $\alpha = \frac{5}{13}$, calcula la profundidad del río en ese punto y la distancia del barco hasta la punta del ancla.** **Primero,** se calcula la medida del ángulo α. sen $\alpha = \frac{5}{13}$ Se escribe el valor de sen α.

L11-U4-T9	 1. Aplica la ley de senos en el siguiente triángulo para calcular la medida de *b*. **Primero,** se calcula la medida del ángulo γ. Como $\gamma + 53° + 40° = 180°$, entonces, se tiene que $\gamma = 87°$. **Luego,** se aplica la ley de senos, así: $\frac{\text{sen } 40°}{b} = \frac{\text{sen } 87°}{4,5}$ de donde $b = \frac{4,5(\text{sen } 40°)}{\text{sen } 87°}$ **Finalmente,** se simplifica y se obtiene que la medida de *b* es aproximadamente 2,9 cm.
L11-U4-T16	 3. Resolver. Dos barcos, *A* y *B*, están anclados cerca un muelle. Desde el punto *C* del muelle se observan los dos barcos de modo que la medida del ángulo *ACB* es 60°, la distancia del barco *A* al punto de referencia es 5 km y la distancia del barco *B* a este mismo punto es de 8 km. Calcular la distancia entre los barcos. **Primero,** se representa la situación en un diagrama, como sigue: **Luego,** por la ley del coseno, se tiene: $x^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos 60°$ Se remplazan los valores. $x^2 = 25 + 64 - 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$ Se resuelven las operaciones y se calcula cos 60°. $x^2 = 49$ Se simplifica.
L11-U4-T21	 1. Determinar la suma de $\vec{v} = (-2, 3)$ y $\vec{w} = (5, 4)$. Luego, graficarla, calcular su norma y especificar su dirección. $\vec{v} + \vec{w} = (-2, 3) + (5, 4) = (3, 7)$ La norma del vector $\vec{v} + \vec{w}$ equivale a: $\lvert \vec{v} + \vec{w} \rvert = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58} \approx 7,6$ La dirección está determinada por el ángulo θ, tal que: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{7}{3}\right) = 66,8°$

L11-U5-T12		 **2. Demostrar que las siguientes igualdades son identidades trigonométricas. Para ello, transformar los dos lados de la igualdad.** **a.** $\csc x - \text{sen}\, x = \cos x \cot x$ **Primero,** se escriben las expresiones de los dos lados de la igualdad en términos de senos y cosenos. $\frac{1}{\text{sen}\, x} - \text{sen}\, x = \cos x \cdot \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}$ **Segundo,** se realizan operaciones a ambos lados. $\frac{1 - \text{sen}^2 x}{\text{sen}\, x} = \frac{\cos^2 x}{\text{sen}\, x}$ **Luego,** se remplaza la expresión de la izquierda por la identidad pitagórica, y la del lado derecho se deja igual. $\frac{\cos^2 x}{\text{sen}\, x} = \frac{\cos^2 x}{\text{sen}\, x}$ **Por tanto,** la igualdad que se presentó inicialmente es una identidad. Es decir que: $\csc x - \text{sen}\, x = \cos x \cot x$.
L11-U5-T23		 **1. Expresar como sumas cada producto.** **a.** $\text{sen}\, 4\theta \cdot \cos 3\theta$ Se aplica la identidad del producto del seno por coseno. $\text{sen}\, \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\text{sen}\, (\alpha + \beta) + \text{sen}\, (\alpha - \beta)]$ $\text{sen}\, 4\theta \cdot \cos 3\theta = \frac{1}{2} [\text{sen}\, (4\theta + 3\theta) + \text{sen}\, (4\theta - 3\theta)]$ $= \frac{1}{2} (\text{sen}\, 7\theta + \text{sen}\, \theta) = \frac{1}{2} \text{sen}\, 7\theta + \frac{1}{2} \text{sen}\, \theta$ Por tanto, $\text{sen}\, 4\theta \cdot \cos 3\theta = \frac{1}{2} \text{sen}\, 7\theta + \frac{1}{2} \text{sen}\, \theta$. **b.** $\text{sen}\, 3x \cdot \text{sen}\, x$ Se aplica la identidad del producto del seno por seno. $\text{sen}\, \alpha\, \text{sen}\, \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$ $\text{sen}\, 3x \cdot \text{sen}\, x = \frac{1}{2} [\cos (3x - x) - \cos (3x + x)]$ $= \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 4x) = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x$ Por tanto, $\text{sen}\, 3x \cdot \text{sen}\, x = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x$.

L11-U5-T31	 2. Resolver $3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\tan x = -3$ en el intervalo $[0, 2\pi)$. $3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\tan x = -3$ Ecuación. $3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$ Se iguala a cero. $3t^2 - 4\sqrt{3}t + 3 = 0$ Se remplaza tan x por t. $t = \frac{-(-4\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 - 4\cdot 3\cdot 3}}{2\cdot 3}$ Se aplica la fórmula cuadrática, donde $a = 3$, $b = -4\sqrt{3}$ y $c = 3$. $t = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{4\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{6}$ Se resuelven las operaciones. $t = \sqrt{3}$ o $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Se indican las soluciones. $\tan x = \sqrt{3}$ o $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Se remplaza t por tan x. Luego, se resuelve cada ecuación. $\tan x = \sqrt{3}$, de donde $x = \tan^{-1}\sqrt{3}$, es decir, $x = \frac{\pi}{3}$ o $x = \frac{4\pi}{3}$ $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, de donde $x = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}$, es decir, $x = \frac{\pi}{6}$ o $x = \frac{7\pi}{6}$ Por tanto, las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ son: $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ y $\frac{7\pi}{6}$.
L11-U5-T39	 b. $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \cos x = 0$, para el intervalo $[0°, 180°]$. $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \cos x = 0$ Ecuación. $\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} + \cos x = 0$ Se remplaza $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ por $\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$, porque $\operatorname{sen} x > 0$. $\cos x = -\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ Se despeja cos x. $\cos^2 x = \frac{1 - \cos x}{2}$ Se eleva al cuadrado. $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ Se iguala a cero. $(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$ Se factoriza. $2\cos x - 1 = 0$ o $\cos x + 1 = 0$ Se iguala cada factor a cero. De $2\cos x - 1 = 0$, entonces $x = 60°$ o $x = 300°$. De $\cos x + 1 = 0$, entonces $x = 180°$. Pero, $x = 60°$ no satisface la ecuación original, entonces se descarta. Además $x = 300°$ no pertenece al intervalo. Por tanto, la solución de la ecuación $\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos x = 0$, para el intervalo $[0°, 180°]$ es $x = 180°$.

ANEXO 3. HERRAMIENTAS UTILIZADAS PARA REALIZAR EL ANÁLISIS DE LOS LIBROS DE TEXTO DE TRIGONOMETRÍA.

ETAPA 1. (1951-1962)

	Propósito de E. M.	Caracterización del problema

	P1	P6	P8	Tipo de referencia			Formato		
				M.P.	SR	S.V.R.	T	I	TA
Tipo de problema clásico			Profundizar en un campo del conocimiento L1-U2-T2 L1-U2-T3 L1-U2-T5 L1-U2-T6 L1-U3-T4 L1-U3-T7 L1-U3-T10 L1-U3-T12 L1-U4-T1 L1-U4-T5 L1-U4-T8 L1-U4-T11 L1-U5-T2 L1-U5-T4 L1-U5-T5 L1-U5-T8	L1-U2-T2 L1-U2-T3 L1-U2-T5 L1-U2-T6 L1-U3-T4 L1-U3-T7 L1-U3-T10 L1-U3-T12 L1-U4-T1 L1-U4-T5 L1-U4-T8 L1-U4-T11	Áreas L1-U5-T2 Longitudes L1-U5-T4 L1-U5-T5 L1-U5-T8		L1-U2-T2 L1-U2-T3 L1-U2-T5 L1-U2-T6 L1-U3-T4 L1-U3-T7 L1-U3-T10 L1-U3-T12 L1-U4-T1 L1-U4-T5 L1-U4-T8 L1-U4-T11	L1-U4-T1 L1-U4-T5 L1-U4-T11 L1-U5-T2 L1-U5-T4 L1-U5-T5 L1-U5-T8	
Tipo de problema analítico									
Tipo de problema moderno									
Observaciones									
La unidad 1 del libro no presenta tareas resueltas.									

ETAPA 2 Y 3. (1962-1974) (1974-1978)

	Propósito de E.M.									Caracterización del problema					
	3	5	8	9	10	12	13	14	15	Tipo de Referencia			Formato		
										M.P.	SR	S.V.R	T	I	T

	🟥	🟦	🟪	🟧	🟨							.			A
Tipo de problema clásico			P6.2-L13-U1-EJ8 E6.2-L13-U2-EJ2						P6.2-L13-U1-EJ8 E6.2-L13-U2-EJ2	E6.2-L13-U2-EJ2	E6.2-L13-U1-EJ8		E6.2-L13-U1-EJ8 E6.2-L13-U2-EJ2	E6.2-L13-U1-EJ8 E6.2-L13-U2-EJ2	
Tipo de problema analítico															
Tipo de problema moderno															

ETAPA 4. (1978-1984)

Tipo de tareas de trigonometría	CONTENIDOS	EJEMPLOS RESUELTOS	TAREAS SELECCIONADAS
Contenidos de trigonometría clásica	Puntos trigonométricos	0	0
	Funciones seno y coseno	1	1
	Tangente, cotangente, secante, cosecante.	1 al 7	2, 4, 5, 7
Contenidos de trigonometría analítica	Funciones trigonométricas	1 al 6	2, 3, 4, 5
	Gráficos de las funciones circulares	0	0
	Funciones circulares	1 al 2	1, 2

	inversas		
	Identidades y ecuaciones	1 al 26	6, 9, 11, 14
	Resolución de triángulos	1 al 10	1, 2, 3, 6

	Propósitos de la educación						**Caracterización del problema**					
							Tipo de referencia			**Formato**		
	P3	**P4**	**P5**	**P9**	**P10**	**P11**	**M.P.**	**SR**	**S.V.R.**	**T**	**I**	**TA**
Clásico			**Desarrollo propio** L8-U2-T1 L8-U3-T4 L8-U3-T5 L8-U3-T7 L8-U4-T2 L8-U4-T3 L8-U4-T4 L8-U8-T1 L8-U8-T2 L8-U8-T3 L8-U8-T6 **Desarrollo de la sociedad** **Desarrollo del país**				L8-U2-T1 L8-U3-T4 L8-U3-T5 L8-U3-T7 L8-U4-T2 L8-U4-T4 L8-U8-T1 L8-U8-T2	**Física mecánica** L8-U4-T3 L8-U8-T3 L8-U8-T6		L8-U2-T1 L8-U3-T4 L8-U3-T5 L8-U3-T7 L8-U4-T2 L8-U4-T3 L8-U4-T4 L8-U8-T1 L8-U8-T2 L8-U8-T3 L8-U8-T6	L8-U3-T5 L8-U8-T1 L8-U8-T2 L8-U8-T3 L8-U8-T6	

Analítico		**Hábitos de estudio**	**Desarrollo propio**				L8-U3-T2 L8-U4-T5 L8-U6-T1 L8-U6-T2 L8-U7-T6 L8-U7-T9 L8-U7-T11 L8-U7-T14			L8-U3-T2 L8-U4-T5 L8-U6-T1 L8-U6-T2 L8-U7-T6 L8-U7-T9 L8-U7-T11 L8-U7-T14		
			L8-U3-T2 L8-U4-T5 L8-U6-T1 L8-U6-T2 L8-U7-T6 L8-U7-T9 L8-U7-T11 L8-U7-T14									
			Desarrollo de la sociedad									
			Desarrollo del país									
Moderno												

ETAPA 5. (1984-1994)

	Propósito de E.M.					**Caracterización del problema**					
	P1	**P3**	**P8**	**P9**	**P10**	**Tipo de Referencia**			**Formato**		
						M.P.	**SR**	**S.V.R.**	**T**	**I**	**TA**
Tipo de problema			**Profundizar campo conocimiento**			L9-U1-	**Física. Mecánica**		L9-U1-	L9-U1-	L10-U4-

clásico			L9-U1-T4 L9-U1-T16 L9-U1-T26 L9-U1-T30 L9-U1-T36 L9-U1-T40 L9-U1-T42 L10-U1-T4 L10-U1-T6 L10-U1-T16 L10-U4-T3 L10-U4-T6 L10-U4-T7 L10-U5-T6 L10-U5-T8 L10-U5-T13 L10-U5-T16 L10-U6-T2 L10-U6-T4 L10-U6-T13 L10-U6-T15 L10-U7-T9 **Estudios universitarios** **Campo de trabajo** L10-U1-T23			T4 L9-U1-T16 L9-U1-T36 L9-U1-T40 L9-U1-T42 L10-U1-T6 L10-U1-T16 L10-U2-T2 L10-U2-T7 L10-U4-T3 L10-U4-T6 L10-U4-	L9-U1-T26 L9-U1-T30 L10-U5-T8 L10-U5-T13 L10-U6-T15 **Topografía** L10-U1-T23		T4 L9-U1-T16 L9-U1-T26 L9-U1-T30 L9-U1-T36 L9-U1-T40 L9-U1-T42 L10-U1-T6 L10-U1-T16 L10-U1-T23 L10-U2-T2 L10-U2-	T26 L9-U1-T30 L10-U1-T6 L10-U1-T16 L10-U1-T23 L10-U2-T22 L10-U4-T3 L10-U5-T6 L10-U5-T8 L10-U5-T13 L10-U5-T16 L10-U6-	T3

						T7 L10-U5-T6 L10-U5-T16 L10-U6-T2 L10-U6-T4 L10-U6-T13 L10-U7-T9			T7 L10-U2-T22 L10-U4-T3 L10-U4-T6 L10-U4-T7 L10-U5-T6 L10-U5-T8 L10-U5-T13 L10-U5-T16 L10-U6-T2 L10-U6-T4 L10-U6-T13	T2 L10-U6-T4 L10-U6-T13 L10-U6-T15 L10-U7-T9	

									L10-U6-T15 L10-U7-T9		
Tipo de problema analítico			**Profundizar campo conocimiento**			L9-U1-T51 L9-U1-T59 L9-U1-T62 L9-U1-T72 L9-U1-T73 L9-U1-T75 L9-U1-T78 L9-U1-T81	**Física mecánica**		L9-U1-T51 L9-U1-T59 L9-U1-T62 L9-U1-T72 L9-U1-T73 L9-U1-T75 L9-U1-T78 L9-U1-T81	L10-U1-T4 L10-U3-T10 L10-U3-T17 L10-U3-T23 L10-U4-T1	L10-U3-T10 L10-U3-T17
			L9-U1-T51 L9-U1-T59 L9-U1-T62 L9-U1-T72 L9-U1-T73 L9-U1-T75 L9-U1-T78 L9-U1-T81 L10-U2-T2 L10-U2-T7 L10-U2-T22 L10-U2-T24 L10-U3-T6 L10-U3-T10 L10-U3-T17 L10-U3-T23 L10-U4-T1 L10-U7-T2 L10-U7-T11 L10-U7-T12				L10-U2-T22				
			Estudios universitarios			L10-U1-T4			L10-U1-T4		

			Campo de trabajo			L10-U2-T24 L10-U3-T6 L10-U3-T10 L10-U3-T17 L10-U3-T23 L10-U4-T1 L10-U7-T2 L10-U7-T11 L10-U7-T12			L10-U2-T24 L10-U3-T6 L10-U3-T10 L10-U3-T17 L10-U3-T23 L10-U4-T1 L10-U7-T2 L10-U7-T11 L10-U7-T12		
Tipo de problema moderno											

Observaciones

L10-U1-T4 es un problema que consiste en determinar si una ecuación dada es una función.

L10-U1-T6 es un problema que consiste en determinar rango y dominio de una función. Además, se debe verificar si es inyectiva.

L10-U4-T1 es un problema que consiste en determinar la inversa de una función lineal.

L10-U6-T2, L10-U6-T4 son problemas que corresponden a operaciones con vectores.

L10-U7-T2 es un problema que consiste en determinar las soluciones de una ecuación cuadrática.

L9-U1-T26, L10-U4-T3, L10-U4-T7 son tareas que se resuelven haciendo uso de la calculadora.

ETAPA 6. PRIMER HITO. (1994-1998)

	Propósitos de E. M.									Caracterización del problema					
	P3	P5	P8	P9	P10	P12	P13	P14	P15	Tipo de referencia			Formato		
										M.P.	SR	S.V.R.	T	I	TA
Tipo de problema clásico			Profundizar en un campo del conocimiento L7-U3-T2 L7-U3-T4 L7-U4-T2 L7-U4-T4							L7-U3-T2 L7-U3-T4 L7-U3-T5 L7-U3-T8 L7-U4-T2 L7-U4-T4 L7-U4-T13 L7-U4-T23			L7-U3-T2 L7-U3-T4 L7-U3-T5 L7-U3-T8 L7-U4-T2 L7-U4-T4 L7-U4-T13 L7-U4-T23	L7-U3-T2 L7-U3-T8 L7-U4-T4	
Tipo de problema analítico			Profundizar en un campo del conocimiento												

			L7-U3-T5 L7-U3-T8 L7-U4-T13 L7-U4-T23												
Tipo de problema moderno															
Observaciones															

ETAPA 6. SEGUNDO HITO. (1998-2006)

	Propósitos de E. M.									Caracterización del problema					
	P3	P5	P8	P9	P10	P12	P13	P14	P15	Tipo de referencia			Formato		
										M.P.	SR	S.V.R.	T	I	TA
Tipo de problema clásico			Profundizar en un campo del conocimiento L8-U1-T2 L8-U1-T8 L8-U1-T10 L8-U2-T3 L8-U3-T7 L8-U3-T10 L8-U3-T16 L9-U1-T1 L9-U1-T8 L9-U2-T2						Profundizar en el razonamiento lógico para solucionar situaciones de la vida cotidiana o de otras ciencias L8-U1-T10 L8-U3-T16 L9-U1-T8	L8-U1-T8 L8-U2-T3 L8-U3-T7 L9-U1-T1 L9-U2-T2	Coordenadas geográficas L8-U1-T2 Física Mecánica L8-U1-T10 Distancias/ Elevaciones L8-U3-T10 L8-U3-T16 Navegación L9-U1-T8		L8-U1-T2 L8-U1-T8 L8-U1-T10 L8-U2-T3 L8-U3-T7 L8-U3-T10 L8-U3-T16 L9-	L8-U1-T2 L8-U1-T8 L8-U1-T10 L8-U2-T3 L8-U3-T7 L8-U3-T10 L8-U3-T16 L9-	

													U1-T1 L9-U1-T8 L9-U2-T2	U1-T1 L9-U1-T8 L9-U2-T2	
Tipo de problema analítico			Profundizar en un campo del conocimiento L8-U1-T15 L8-U2-T6 L8-U2-T11 L8-U4-T1 L8-U4-T5 L8-U4-T8 L8-U4-T16 L9-U1-T5 L9-U2-T1 L9-U3-T1 L9-U3-T2 L9-U3-T3 L9-U3-T4 L9-U4-T1 L9-U4-T2 L9-U4-T3 L9-U4-T4						Profundizar en el razonamiento lógico para solucionar situaciones de la vida cotidiana o de otras ciencias L8-U4-T16	L8-U1-T15 L8-U2-T6 L8-U2-T11 L8-U4-T1 L8-U4-T5 L8-U4-T8 L9-U1-T5 L9-U2-T1 L9-U3-T1 L9-U3-T2 L14-U3-T3 L14-U3-T4 L14	Física Mecánica L8-U4-T16		L8-U1-T15 L8-U2-T6 L8-U2-T11 L8-U4-T1 L8-U4-T5 L8-U4-T8 L8-U4-T16 L9-U1-T5 L9-U2-T1 L9-U3-T1 L9-U3-T2	L9-U2-T1 L9-U3-T2	

										-U4-T1 L9-U4-T2 L9-U4-T3 L9-U4-T4			L9-U3-T3 L9-U3-T4 L9-U4-T1 L9-U4-T2 L9-U4-T3 L9-U4-T4		
Tipo de problema moderno															
Observaciones La tarea 8 de la unidad 2 del libro 13, es una tarea de sustitución numérica y operaciones entre números reales La tarea 4 de la unidad 3 del libro 13, es una tarea que corresponde al concepto de función La tarea 7 de la unidad 3 del libro 13, es una tarea correspondiente al uso de la calculadora La tarea 3 de la unidad 1 del libro 14, es una tarea que corresponde al concepto de distancia entre dos puntos en el plano															

Etapa 6. Tercer hito. (2006-2017)

	Propósitos de E. M.									Caracterización del problema					
	P3	P5	P8	P9	P10	P12	P13	P14	P15	Tipo de referencia			Formato		
										M.P.	SR	S.V.R.	T	I	TA
Tipo de problema clásico			Profundizar en un campo del conocimiento L10-U1-T19 L10-U1-T24 L11-U2-T2 L11-U2-T6			L11-U2-T6			Profundizar en el razonamiento lógico para solucionar situaciones de la vida cotidiana o de otras ciencias	L10-U1-T24 L11-U2-T15 L11-U2-	Física Mecánica L16-U2-T6 Distancias / Elevaciones L10-U1-T19		L10-U1-T19 L10-U1-T24 L11-U2-	L10-U1-T19 L10-U1-T24 L11-U2-	

			L11-U2-T15 L11-U2-T22 L11-U4-T4 L11-U4-T9 L11-U4-T16 L11-U4-T21						 L11-U2-T2 L11-U2-T6 L11-U4-T4 L11-U4-T16	T22 L11-U4-T9 L11-U4-T21	L11-U4-T4 Navegación L11-U4-T16 L11-U2-T2		T2 L11-U2-T6 L11-U2-T15 L11-U2-T22 L11-U4-T4 L11-U4-T9 L11-U4-T16 L11-U4-T21	T2 L11-U2-T6 L11-U2-T15 L11-U2-T22 L11-U4-T4 L11-U4-T9 L11-U4-T16 L11-U4-T21	
Tipo de problema analítico			Profundizar en un campo del conocimiento L10-U2-T9 L10-U2-T20 L10-U2-T27 L10-U3-T7 L10-U3-T15 L10-U3-T28 L10-U3-T30			L11-U3-T14			Profundizar en el razonamiento lógico para solucionar situaciones de la vida cotidiana o de otras ciencias L11-U3-T14	L10-U2-T9 L10-U2-T20 L10-U2-T27 L10-U3-T7 L10-	Física Mecánica L11-U3-T14		L10-U2-T9 L10-U2-T20 L10-U2-T27 L10-U3-T7 L10-	L10-U2-T9 L10-U2-T20 L11-U3-T3 L11-U3-T7 L11-	L11-U3-T7

			L11-U3-T3 L11-U3-T7 L11-U3-T12 L11-U3-T4 L11-U5-T12 L11-U5-T23 L11-U5-T31 L11-U5-T39							U3-T15 L10-U3-T28 L10-U3-T30 L11-U3-T3 L11-U3-T7 L11-U3-T12 L11-U5-T12 L11-U5-T23 L11-U5-T31 L11-U5-T39			U3-T15 L10-U3-T28 L10-U3-T30 L11-U3-T3 L11-U3-T7 L11-U3-T12 L11-U3-T14 L11-U5-T12 L11-U5-T23 L11-U5-T31 L11-U5-T39	U3-T14	
Tipo de problema moderno															

Observaciones
La tarea 5 de la unidad 1 del libro 15, es una tarea relacionada con operaciones del sistema sexagesimal
La tarea 13 de la unidad 1 del libro 15, es una tarea de velocidad que no se relaciona con la Trigonometría
La tarea 2 de la unidad 2 del libro 15, es una tarea que corresponde al concepto de función

ANEXO 4. DECRETOS QUE REGLAMENTABAN EL CURRÍCULO EN EL PERIODO 1951-1994.

DECRETO 0075 DE 1951

Diario Oficial No. 27518 sábado 27 de enero de 1951

DECRETO NUMERO 0075 DE 1951 (ENERO 17)
Por el cual se adopta el Plan de Estudios para la enseñanza secundaria y se dictan otras disposiciones.

El presidente de la República de Colombia, En uso
de sus facultades legales,

DECRETA:

Artículo 1º Fíjese el siguiente Plan de Estudios para los establecimientos de enseñanza secundaria del país.

AÑO PRIMERO

I. Cultura mínima obligatoria (para todos los colegios).

	Horas semanales	
Aritmética	5	
Castellano y Redacción	4	
Ortografía	2	
Religión	3	
Geografía de Colombia y su relación con América	4	
	18	18

II. Para bachillerato (exclusivamente):

a) Francés	4	
b) Tiempo libre para distribuir en intensificación de materiales, en otras enseñanzas, en estudio organizado y en actividades		

educativas (educación física, urbanidad y educación cívica)	13	
III. Para otras ramas de secundaria, distintas del bachillerato (comercio, artes y oficios, magisterio, elemental, labores agropecuarias, cultura doméstica), a voluntad de los colegios	17	
	35	35

AÑO SEGUNDO

I- Cultura mínima obligatoria (para todos):		
Aritmética	5	
Castellano y Redacción	4	
Ortografía	2	
Geografía Universal	5	
Religión	3	
Historia de Colombia y su relación con América	4	
	23	23
II- Para bachillerato (exclusivamente):		
a) francés	4	
b) Tiempo libre para distribuir conforme a lo indicado en el año primero	8	
III- Para otras ramas de secundaria, a voluntad de los colegios	12	
	35	35

AÑO TERCERO

I- Cultura mínima obligatoria (para todos)		
Contabilidad	4	
Preceptiva literaria y redacción castellana	3	
Biología (vegetal y animal)	4	
Religión	3	
Inglés	4	
Historia Universal	4	
	22	22

II- Para bachillerato (exclusivamente):

a) Algebra	4	
b) Tiempo libre para distribuir conforme a lo indicado en el año primero	9	
III- Para otras ramas de secundaria, a voluntad de los colegios	13	
	35	35

AÑO CUARTO

I- Cultura mínima obligatoria (para todos)		
Anatomía, fisiología e higiene humanas	4	
Literatura Universal, y en especial la española	4	
Inglés	5	
Historia Universal	4	
Religión	2	
	19	
II- Para bachillerato (exclusivamente):		
a) Algebra	3	
b) Geometría	4	
c) Tiempo libre para distribuir conforme a lo indicado en el año primero	9	
III- Para otras ramas de secundaria, a voluntad de los colegios	16	
	35	35

AÑO QUINTO

I- Para bachillerato (todos):		
Física	4	
Química	4	
Geometría	3	
Filosofía	4	
Religión	2	
Geografía de Colombia (curso superior)	3	
	23	24
Los alumnos que van para Derecho, Filología o Filosofía Y Letras, cursarán 4 horas semanales de latín	4	
II- Para intensificar materias o enseñar otras según la carrera,		

Para estudio organizado y actividades educativas	7	11

AÑO SEXTO

I- Para bachillerato (todos):		
Física	4	
Química	4	
Filosofía	4	
Castellano Superior	4	
Literatura Colombiana	2	
Historia de Colombia (curso superior)	4	
Inglés	4	
	26	26
Los alumnos que van para Derecho, Filología o Filosofía y Letras, cursarán 4 horas semanales de latín	4	
II- Para intensificación de materias, consulta de bibliotecas, Estudio organizado, etc.	5	5
	35	35

Artículo 2º Para ingresar en el primer año de enseñanza secundaria, es necesario que el alumno haya aprobado el quinto año de la escuela primaria creado en sustitución del Año Preparatorio y que tenga una edad mínima de doce años o los cumpla durante el proceso del curso.

Artículo 3º Los colegios que realicen el Plan de Estudios en ramas de enseñanza secundaria distintas del bachillerato, como comercio, artes y oficios, magisterio elemental, cultura doméstica, etc., podrán conferir a sus alumnos al terminar el cuarto año, los siguientes títulos, según la orientación que hayan seguido:

1º A los que hubieren estudiado artes y oficios, el de “Expertos” que los acredita para ingresar en los Institutos Técnicos Superiores Industriales.

2º A los que hubiesen preparado para el magisterio, el de “Certificado de Competencia para el magisterio elemental”, que los acredita para desempeñar cargos docentes elementales, y para matricularse en el quinto año de las Escuelas Normales Regulares.

3º A los que hubieren cursado comercio, el de “Expertos” que los acredita para ingresar en los Institutos Técnicos Superiores de Comercio.

Para que tales títulos sean refrendados oficialmente es menester que los colegios se ciñan a los programas adoptados por el Ministerio de Educación y sean aprobados por éste.

Artículo 4º Las materias que se cursen darán lugar a dos exámenes intermedios, cuya reglamentación hará el Ministerio de Educación. Las calificaciones de dichos exámenes contribuirán a la formación de la nota previa, de cuyo cómputo harán parte los resultados de otras actividades escolares, según lo determine el Ministerio de Educación.

Artículo 5º Ningún colegio oficial podrá abrir cursos de primero a cuarto año inclusive, con menos de 20 alumnos en cada uno de ellos, ni tampoco podrán funcionar los años quinto y sexto con un número inferior de 15 estudiantes cada uno.

Artículo 6º El Ministerio de Educación se abstendrá de dar curso a los certificados de alumnos de sexto año que no hubieren aprobado íntegramente las materias de los cursos anteriores.

Artículo 7º Cerradas las matrículas en la forma legal establecida, no podrá autorizarse a ningún colegio el ingreso de nuevos alumnos, salvo el caso de cambio de domicilio de la familia de un Municipio a otro, o el de enfermedad debidamente comprobada.

Artículo 8º Autorizase al Ministerio de Educación para fijar, por resolución especial, los programas correspondientes al Plan de Estudios que por el presente Decreto se establece, como también para dictar las disposiciones que juzgue necesarias para articular los estudios del pensum vigente con los que determine este Decreto.

Artículo 9º El Plan de Estudios que fija el presente Decreto entrará en vigencia en el me de octubre del año en curso para los colegios del Valle del Cauca y Nariño, y en febrero de este año para los del resto del país.

Artículo 10. Deróguense los Decretos marcados con los números 2087 de 1945 y 3645 de 1947, y las demás disposiciones contrarias a las contenidas en el presente Decreto.

Comuníquese y publíquese.
Dado en Bogotá a 17 de enero de 1951.

LAUREANO GOMEZ

El Ministro de Educación Nacional.
Antonio ALVAREZ RESTREPO

DECRETO 2550 DE 1951

DECRETO 2550 DE 1951

(11 diciembre)

Diario Oficial No. 27807 de 19 de enero de 1952

<Nota: Esta norma no incluye análisis de vigencia>

Modificaciones en el plan de estudios de enseñanza secundaria y otras disposiciones

Por el cual se introducen algunas modificaciones en el Plan de Estudios de Enseñanza Secundaria, y se deroga una disposición.

EL DESIGNADO, ENCARGADO DE LA PRESIDENCIA DE LA REPÚBLICA

en uso de sus facultades legales,

DECRETA:

ARTÍCULO PRIMERO. El artículo 1° del Decreto número 0075 de 1951 quedará así:

AÑO PRIMERO

I. Cultura Mínima Obligatoria (para todos los Colegios):

Horas semanales.

Religión… … … … … … … … … … … … … … 3

Aritmética… … … … … … … … … … … … …. 5

Castellano y redacción… … … … … … … … …. 4

Ortografía… … … … … … … … … …. … … … 2

Inglés… … … … … … … … … … … … …. … … .. 2

Historia de Colombia y Nociones de América… …. 4

Geografía de Colombia y Nociones de América…. 4

_____ _____

24 24

II. Para Bachillerato (exclusivamente): Tiempo libre para distribuir en intensificación de materias, en otras enseñanzas, en estudio organizado y en actividades educativas… … …. … … … … … 11

III. Para otras Ramas de Secundaria, distintas del Bachillerato

(Comercio, Artes y Oficios, Magisterio Elemental, Labores

Agropecuarias, Cultura Doméstica), a voluntad de los colegios. ____ 11

_____

35 35

AÑO SEGUNDO

I. Cultura Mínima Obligatoria (para todos los Colegios):

Religión… …. …. … … .. … … … … … … … …. 3

Aritmética… ... … … … … … … … … …. … …. 5 castellano y redacción… … … … … … … … … ... 5

Ortografía…. ….. … …. … … … … … … …... 3

Inglés… … … …. … … … … … … … … … … … 3

Geografía Universal… … … … … … … … … …. 3

Nociones de Ciencias… … … … … … … … … …. 2

24 24

II Para Bachillerato (exclusivamente):

Tiempo libre para distribuir conforme a lo indicado en el año primero…… …. … … … … … … … … … … … 11

III Para otras Ramas de Secundaria (a voluntad de los Colegios): … … …. … .. … …. .. … … … …. ___ 11

35 35

AÑO TERCERO

I. Cultura Mínima Obligatoria (para todos los Colegios):

Religión… … … …. … … … … … … … … … … … 3

Contabilidad. … … … … … … … … … … … … … 2

Preceptiva literaria y redacción… … … … … … … 3

Inglés… … … …. … … …. … … … … … … .. … 4

Historia Universal… …. …. …. …. … … … …. … 3

Geografía Universal … … …. … … … … … … … 3

Botánica y Zoología… … …. … … … … … … …. 3

21 21

II Para Bachillerato (exclusivamente):

a) Algebra… … … …. … … … … … … … … …. 3

b) Tiempo libre para distribuir conforme a lo indicado en el año primero …

…. … … … … … … … … … 11

III Para otras Ramas de Secundaria, a voluntad de los

Colegios … … … … … … … … … … … … … … 14

35 35

AÑO CUARTO

I. Cultura Mínima Obligatoria (para todos los Colegios):

Religión… …. … … … … … … … … … … … … 2

Literatura Universal… … … … … … … … … …. 3

Francés… … … … … … … … … … … … … …. 3

Inglés … … … … … … … … … … … … … … … 4

Historia Universal… … … … … … … … … … …. 3

Anatomía, Fisiología e Higiene humanas… … … … 3

18 18

II Para Bachillerato (exclusivamente):

a) Algebra… … … … … … … … … … … … … ... 3

b) Geometría … … … …. … …. … … … … … … . 4

c) Tiempo libre para distribuir conforme a lo indicado en el año primero. 10

III Para otras Ramas de Secundaria, a voluntad de los

Colegios… … … … … … … … … … … … … …. 17

35 35

AÑO QUINTO

I Para Bachillerato:

Religión… … … … … … … … … … … … … … 2

Física… … … … … … … … … … … … … … ... 3

Química… … … … … … … … … … … … … … 4

Geometría y Trigonometría … … … … … … … .. 3 Latín**¡Error! Marcador no definido.**

Francés...195

Filosofía...196

Lengua y Autores Castellanos … … … …. … … .. 3

25 25

II Para intensificar materias o enseñar otras según la carrera, para estudio organizado y actividades educativas 10 10

35 35

AÑO SEXTO

I. Para Bachillerato:

Religión … … …. …. … … … … … … … … … .. 1

Física… … … … … … … … … … … … … … … 4

Química… … … … … … … … … … … … … …. 3

Literatura colombiana e hispanoamericana… … …. 2

Latín… …. … … … … … … .. … … … .. … … ... 3

Francés… … … … … … … … … … … … … …. 4

Filosofía… … … … … … … … … …. … … … . 3

Historia de Colombia. … … … … … … … … …. 3

Geografía de Colombia… … … … … … … … …. 2

25 25

II Para intensificación de materias, consulta de bibliotecas, estudio organizado, etc.… … … … … … … … … … … 10 10

35 35

ARTÍCULO SEGUNDO. Autorizase al Ministerio de Educación para acomodar, por resolución especial, las anteriores modificaciones, en el próximo año lectivo.

ARTÍCULO TERCERO. Derogase el artículo 7° del Decreto 0075 de 1951.

Comuníquese y publíquese.

Dado en Bogotá a 11 de diciembre de 1951.

ROBERTO URDANETA ARBELAEZ

El Ministro de Educación,

RAFAEL AZULA BARRERA

Disposiciones analizadas por Avance Jurídico Casa Editorial Ltda. en.
en.
Última actualización: 27 de agosto de 2017

DECRETO 045 DE 1962.

DIARIO OFICIAL 30704 jueves 25 de enero de 1962
DECRETO 45 DE 1962 (ENERO 11)

Por el cual se establece el Ciclo Básico de Educación Media, se determina el Plan de Estudios para el Bachillerato, y se fijan Calendario y Normas para evaluar el trabajo escolar.

El presidente de la República de Colombia, en uso de sus facultades legales, y

CONSIDERANDO:

Que la evolución y el progreso de la ciencia y de la cultura determinar actualizar los sistemas, planes y programas de enseñanza en general y concretamente los de la educación secundaria;

Que las necesidades del desarrollo económico y social del país justifican la revisión periódica de tales sistemas, planes y programas;

Que el plan de estudios vigente para el Bachillerato fue expedido en 1951;

Que el Seminario Interamericano sobre Educación Secundaria, de Santiago de Chile, recomendó modificaciones en los métodos y características del presente nivel de enseñanza, muchas de las cuales se incorporan en el presente Decreto:

Que, en los capítulos sobre Bachillerato, de las bases para el Plan Quinquenal Educativo Colombiano, también se hacen recomendaciones similares;

Que en la conferencia regional de Punta del Este. Colombia se comprometió a realizar reformas estructurales y a extender los beneficios de la educación secundaria al mayor número;

Que el Ministerio de Educación ha venido experimentando en los Colegios Pilotos modalidades del plan de estudios que se va a expedir;

Que la Junta Asesora del Ministerio de Educación emitió concepto favorable al proyecto de reforma del plan de estudios de educación secundaria, elaborado por la División de Educación Media y por la Oficina de Planeamiento, Coordinación y Evaluación del Ministerio;

Que el Gobierno presentó al examen de la opinión pública tal propuesta;

Que dicho proyecto fue enviado en consulta a entidades culturales y gremiales, y a educadores, y sometido a la consideración del I Seminario sobre problemas del Bachillerato, auspiciados por la Asociación Colombiana de Universidades, celebrado en la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, con sede en Tunja, y

Que tanto los resultados de la a consulta, como las conclusiones del Seminario y posteriores deliberaciones, coinciden en la conveniencia de las reformas propuestas, DECRETA:

La enseñanza Media

Artículo 1º. Denomínese Enseñanza Media la etapa de formación educativa general y profesional, de naturaleza y extensión variables, según sus objetivos, posterior a la enseñanza primaria y anterior a estudios superiores.

Parágrafo. Corresponden a las Enseñanza Media, la Educación Secundaria propiamente dicha o Bachillerato, y todas las escuelas vocacionales de grado medio, para cuyo ingreso se requiere haber cursado la enseñanza primaria completa o una parte de la educación secundaria.

Objetivos de la Educación Secundaria o Bachillerato.

Artículo 2º. Son objetivos de la Educación Secundaria o Bachillerato primordialmente, los siguientes:

1. Continuar, ampliar e intensificar los fundamentos de cultura que suministra la enseñanza primaria.
2. Satisfacer las necesidades del adolescente en su formación intelectual, moral, religiosa, social y estética; guiarlo en su desarrollo integral y contribuir a la estructuración de su personalidad.
3. Formar en el alumno hábitos de conducta como la responsabilidad, la iniciativa, la honradez, la veracidad, la sencillez, la sinceridad, la satisfacción por el trabajo, la austeridad, la constancia, la puntualidad, la correcta presentación personal, la tolerancia, el sentido de la convivencia y del respete a la ley y a las ideas ajenas, así como el constante deseo de superación.
4. Enseñar al alumno a estudiar, ¡y fomentarle la costumbre de hacerlo; dirigirlo en la investigación individual y colectiva, en la labor de información para perfeccionar sus conocimientos, y en el empleo honesto y útil del tiempo libre.
5. Capacitar al alumno para que a aprecie y practique el trabajo en grupo y la prefecta convivencia; para que adquiera el sentido de responsabilidad individual, familiar, cívica y social, mediante el respeto de los derechos y deberes de la persona humana, como fundamento de la democracia.
6. Ayudar al alumno a desarrollar sus potencialidades, para que pueda disfrutar individual y socialmente de una vida plena, de acuerdo con el conocimiento de la realidad nacional, sus posibilidades de desarrollo, el amor al país y a la voluntad de servirle.
7. Hacer partícipe al alumno de los bienes de la cultura universal, mediante un proceso sistemático de aprendizaje, que le permita la posesión gradual y coherente de los conocimientos, de acuerdo con las conquistas de la ciencia y en relación con su capacidad mental y los requerimientos de la sociedad de que forma parte.
8. Preparar al alumno para vivir en una sociedad en constante evolución como resultado, contra otros factores, de las transformaciones de orden cultural y social, los avances científicos y las innovaciones tecnológicas.

9. Preparar al alumno para continuar su propia formación y emprender estudios y disciplinas de nivel superior.
10. Dotar al joven de la responsabilidad, el criterio, las capacidades y conocimientos suficientes para actuar en la vida de relación y, si lo pretendiere, para desempeñar adecuadamente actividad provechosa y remunerativa.

Parágrafo. Los objetivos no específicos del Bachillerato lo son en término generales, de la Enseñanza Media en sus diversos ciclos.

Ciclo básico de Enseñanza Media.

Artículo 3º. La enseñanza Media tendrá un ciclo básico de cuatro años de estudios. Dicha etapa de cultura general consolidará y ampliará los conocimientos suministrados por la escuela primaria. Propiciará igualmente la exploración de las aptitudes e intereses de los educandos para orientarlos hacia las modalidades del II Ciclo de Enseñanza Media, para las cuales constituye requisito previo indispensable, inclusive para la incorporación a las carreras intermedias y a lasa estudios de magisterio primario.

Parágrafo. El alumno que haya terminado y aprobado los estudios del mencionado ciclo, recibirá en Certificado de Aprobación del Ciclo Básico de Enseñanza Media.

Plan de Estudios.

Artículo 4º. El plan mínimo para el ciclo básico de enseñanza media, será el siguiente:

Asignaturas.	Horas Año por Cursos.				Total.
	I	II	III	IV	
1. Educación Religiosa y Moral.	90	90	90	60	330
2. Castellano y Literatura………	150	150	150	150	600
3. Matemáticas………………….	150	120	150	210	630
4. Ciencias Naturales……………	60	60	60	120	300
5. Estudios Sociales…………….	150	210	210	120	690
6. Idiomas Extranjeros…………	90	90	90	90	360
7. Artes Industriales y Educación. para el Hogar…………………	60	60	60	60	240
8. Educación Estética……………	60	60	60	60	240
9. Educación Física………………	60	60	60	60	240
10. Actividades Programáticas e intensificaciones…………….	270	240	210	210	930
Totales………………….	1.140	1.140	1.140	1.140	4.560

Ciclos de la Educación Secundaria o Bachillerato.

Artículo 5º. La Educación Secundaria o Bachillerato es una de las varias modalidades que forman el nivel de la Enseñanza Media.

Los Estudios de Bachillerato se cursarán en un lapso de seis años, distribuidos en dos períodos coordinados, El primero corresponderá al Ciclo Básico de Enseñanza Media, y el segundo a los V y VI años de Educación Secundaria.

Artículo 6º. El segundo ciclo o periodo complementario de la cultura general, cumplirá las oportunidades para lograr un trabajo remunerativo y socialmente útil. Será, además, una etapa previa para estudios profesionales de nivel superior.

Comprenderá:

a) Un núcleo de materias de carácter obligatorio, y

b) Un conjunto de materias optativas que los Colegio puedan ofrecer con dos posibilidades: Intensificación de grupos de asignaturas afines o introducción de nuevas, una y otra con base en las aptitudes, vocación e inclinaciones de los alumnos, y de acuerdo con la carrera presumible.

Parágrafo. El alumno que haya terminado y aprobado los estudios del Segundo Ciclo, recibirá el Diploma de Bachiller.

Artículo 7º. El plan mínimo se de estudios para el Segundo Ciclo o período de Enseñanza Secundaria o Bachillerato, será el siguiente:

Asignaturas.	Horas Año Por Cursos.		Total.
1. Educación Religiosa y Moral……………………..	60	30	90
2. Psicología…………………	60	---	60
3. Filosofía………………….	90	120	210
4. Estudios Sociales…………	---	60	60
5. Castellano y Literatura……	90	90	180
6. Idiomas Extranjeros………	150	150	300
7. Matemáticas……………....	90	60	150
8. Física…………………….	120	120	240
9. Química………………….	120	120	240
10. Actividades Co-programáticas E intensificaciones………	360	330	690
Totales……	1.140	1.140	2.280

Asignaciones de materias por cursos.

La asignación de meterías por cursos, en los planteles educativos a que se refiere el presente Decreto, será la siguiente:

Matemáticas:

1º y 2º Cursos: Aritmética y nociones de Geometría.

3º y 4º Cursos: Álgebra y Geometría.

5º Cursos: Trigonometría y elementos de Geometría Analítica.

6º Cursos: Iniciativa al análisis matemático.

Castellano y Literatura:

1º a 4º Cursos: inglés.

5º y 6º Cursos: inglés y francés

Ciencias Naturales:

1er . Curso: Introducción a las Ciencias.
2º Curso: Biología Vegetal.
3º Curso: Biología Animal.
4º Curso: Anatomía y Fisiología Humanas y Salud.
5º Curso: Física, Nociones de Mineralogía y Químico Inorgánica.
6º Curso: Física, Química de Carbono.

Estudios Sociales:
1er. Curso:
- a) Geografía Física y Humana aplicada a Colombia.
- b) Prehistoria General y Americana aplicada a Colombia.
- c) Civismo y Urbanidad.

2º Curso:
- a) Geografía del Antiguo Continente, Oceanía y Regiones Polares.
- b) Historia Antigua y de le Edad Media.

3º Curso:
- a) Geografía de América.
- b) Historia Moderna, Contemporánea y de América.

4º Curso: Geografía e Historia de Colombia.
6º Curso: Instituciones Colombianas y Civismo Internacional.

Psicología:
5º Curso: Psicología.
Filosofía:

5º y 6º Cursos: Filosofía.

Educación Religiosa y Moral:

1º a 6º Cursos: Educación Religiosa y Moral.

Educación Física:

1º a 6º Cursos: Gimnasia educativa y deportes.

Educación Estética:

1º a 6º Cursos: Coros, apreciación musical, Caligrafía (1º y 2º Cursos), Dibujo.

Artes, Actividades co-Programáticas e Intensificaciones.

Artículo 9º. Las Artes Industriales y la Educación para el Hogar, en el Ciclo Básico de Enseñanza Media, comprenderán aquellas actividades optativas que al propio tiempo que imparten conocimientos, fomentan habilidades y destrezas vocacionales, tales como mecanografía, fotografía, encuadernación, aeromodelismo, mecánica, carpintería, radio, actividades agrícolas, juguetería, modelado, culinaria, primeros auxilios, los colegios optarán libremente por las artes que se ajusten mejor a su orientación. La opción se referirá a la escogencia de una o más de ellas por parte de los alumnos.

Parágrafo. En las libretas de calificación deberán figurar observaciones sobre el trabajo de los alumnos en estas actividades.

Artículo 10. Entiéndase por actividades co-Programáticas todas aquellas en que, con sentido educativo, interviene la iniciativa de los alumnos y completan su educación e intelectual, social y estética. Entre otras, se recomienda periodos de estudio dirigido, biblioteca, clubes, centros literarios, Cruz Roja, excursiones escolares, orientación vocacional, dramatizaciones, centros cooperativos y labores de acción comunal.

Artículo 11. La intensificación de las materias afines, correspondientes al Segundo Ciclo, se hará en tres direcciones, así:

1. Ciencias Matemáticas y física.
2. Ciencias Biológicas y Química.
3. Humanidades (Estudios sociales, Historia de Colombia, Letras, inclusive latín).

Parágrafo. Es entendido que dichas intensificaciones no tendrán ningún sentido de especificación, y que el título de Bachillerato dará derecho para escoger cualquier clase de estudios superiores.

Artículo 12. Los Colegios tendrán libertad para ordenar las intensificaciones, tomando en cuenta la orientación vocacional en cada caso individual, y las posibilidades de profesorado y dotación de equipo.

Horario intensidades semanales.

Artículo 13. El Ministerio de Educación determinará por medio de resoluciones, las intensidades semanales para los planteles oficiales, sobre la base de 37 semanas anuales de labores como mínimo, inclusive los períodos de exámenes. Dentro de este lapso se destinarán por lo menos, 1.140 horas de trabajo en clase, laboratorios, actividades co-programáticas e intensificaciones.

Programas de estudio.

Artículo 14. El Ministerio de Educación queda autorizado para tomar las medidas necesarias y concernientes a la elaboración y revisión de los programas.

Artículo 15. Los programas de estudio serán elaborados en función de los objetivos asignados a la enseñanza media y a la educación secundaria, de acuerdo con el proceso siguiente:

1. Fundamentación del programa para cada asignatura o grupos de asignaturas afines.
2. Programas sintéticos para cada asignatura.
3. Programas analíticos que incluirá, a más del contenido, indicaciones didácticas y bibliografía para profesores y alumnos, y estará precedido de los respectivos objetivos específicos.
4. Distribución del programa en unidades de trabajo a título de orientación y guía.
5. Orientación a los profesores sobre selección y elaboración de textos escolares.

Artículo 16. Los contenidos de las asignaturas del Ciclo Básico de Enseñanza Media deberán seleccionarse y graduarse partiendo del nivel de conocimiento propios del 5º año de enseñanza primaria.

Artículo 17. El conjunto de conocimiento del Ciclo Básico de Enseñanza Media deberá estructurarse como una unidad de cultura, necesaria para iniciar estudios de las diversas modalidades de la enseñanza media y de algunas de las Carreras Intermedias.

Año lectivo.

Artículo 18. El año lectivo en los establecimientos de Educación Primaria, Media, Normalista y Superior, no Universitaria, será el siguiente:

Sector Centro Oriental.

I Período: Del 1º de febrero al 20 de junio, incluidos 8 días de vacaciones durante la Semana Santa.
Vacaciones intermedias: del 21 de junio al 7 de julio.

II Período: A partir del 8 de julio. Los exámenes se iniciarán el 2 de noviembre, y las actividades escolares podrán clausurarse después del 15 de mismo mes.

Sector Suroccidental.

I Período: Del 1º de octubre al 20 de diciembre.
Vacaciones intermedias: del 21 de diciembre al 7 de enero.

II Período: A partir del 8 de enero. Los exámenes finales se iniciarán el 1º de julio, y las tareas docentes podrán clausurarse después del 15 de julio.

Parágrafo. Es entendido que el período de exámenes forma parte de las tareas escolares e implica la asistencia habitual de los alumnos al plantel.

Evaluación del trabajo escolar.

Artículo 19. Para presentar a examen final en cualquier asignatura, será necesario tener por lo menos cinco calificaciones mensuales, se el contenido de materia del programa ha sido distribuido en un quimestre, y nueve, si en todo el año lectivo. Dichas calificaciones mensuales será el resultado de la valoración de lecciones, tareas, trabajos personales, presentación de cuadernos y pruebas objetivas practicadas en horas de clase.

Parágrafo 1º. El promedio de las calificaciones así obtenidas, se tomará como nota previa anual, con valor del 60% de la calificación definitiva. El 40 % restante corresponderá al examen final.

Parágrafo 2º. Cuando el resultado de alguna nota previa anual fuere inferior a dos (2), no se podrá presentar examen final de dicha materia, y la calificación definitiva será la misma de la previa.

Artículo 20. Para presentarse al examen final se requiere, por parte de los alumnos, haber asistido por lo menos al 90% de las horas de clase fijadas en el Plan de Estudios a que se refiere el presente Decreto.

Parágrafo. En casos de inasistencia mayor al 10%, debida a casos fortuitos o de fuerza mayor, debidamente comprobados, la justificación deberá presentarse a la consideración del Ministerio de Educación.

Artículo 21. todos los establecimientos de educación de que trata el presente Decreto, están obligados a adoptar libretas escolares individuales, aparte de los boletines que se quiera enviar periódicamente, en las cuales se consignará las calificaciones de que trata el artículo 19, y las observaciones sobre asistencia, comportamiento y esfuerzo, para información regular de los padres de familia o acudientes.

Artículo 22. A los alumnos que cambien de Colegio al final del primer período, en cualquiera de los sectores, les serán reconocidas las calificaciones previas, para la continuación de sus estudios. La certificación de tales calificaciones será obligatoria por parte de los planteles, y uno causará ninguna erogación.

Artículo 23. El Plan de estudios consignado en los artículos 6º y 7º del presente Decreto, entrará en vigencia a partir del 1º de febrero de 1962, para el Sector Centro Oriental, y del 1º de octubre del mismo año, para el Sector Sur- Occidental.
Autorizase al Ministerio de Educación Nacional para que, por resoluciones, dicte las normas para la implantación gradual de las disposiciones contenidas en el presente Decreto.

Artículo 24. El Ministerio de Educación determinará el lapso correspondiente a los ciclos de los Bachilleratos Técnicos y Nocturno, sobre la base del Plan de Estudios contenido en este Decreto.

Artículo 25. Derogase las disposiciones contrarias a lo establecido en el presente Decreto.

Comuníquese y cúmplase.

Dado en Bogotá, D.E., a 11 de enero de 1962. ALBERTO LLERAS

El Ministro de Educación Nacional, Jaime Posada.

DECRETO 080 DE 1974.

DIARIO OFICIAL 34038 lunes 11 de marzo de 1974
DECRETO NUMERO 080 DE 1974
(enero 22)
por el cual se deroga el Decreto número 045 de 1962 y se dictan otras disposiciones sobre Educación Media.

El presidente de la República de Colombia, en uso de sus facultades legales y en especial de las que le confiere el ordinal 12 del artículo 120 de la Constitución Nacional, y

CONSIDERANDO:

Que el Gobierno Nacional, para mejorar la calidad de la educación media y atender a su mayor demanda, ha venido estudiando un plan fundamental mínimo de estudios, en consonancia con las modernas tendencias educativas y las necesidades del país;

Que es aconsejable adoptar planes de estudio flexibles que permitan a las instituciones educativas de este nivel darse su propia fisonomía y ofrecer diversas alternativas en los campos humanísticos, científico o técnico.

Que el Ministerio de Educación viene experimentando un plan de estudios de enseñanza diversificada en el nivel medio, cuyas experiencias conviene aprovechar en la educación nacional, y

Que el Ministerio de Educación recibió concepto favorable de Universidades, institutos del sector educativo y representantes del sector no oficial que fueron consultados,

DECRETA:

Artículo 1° Se entiende por educación media la etapa de formación educativa, posterior a la educación elemental, durante la cual el alumno tiene la oportunidad de complementar su formación integral, identificar sus intereses, aptitudes y habilidades y capacitarse prácticamente para continuar estudios superiores o desempeñar más eficientemente una determinada función en su comunidad.

Artículo 2° La educación media debe proponerse:

1° Buscar el conocimiento, equilibrio e integración de valores de tipo vital, intelectual, ético, estético, social, religioso, político y utilitario como fundamento de la vida del individuo. En consecuencia, el alumno debe:

a) Adquirir capacidad de juicio que le permita establecer una jerarquía racional de valores entre los aspectos culturales, formativos y vocacionales;
b) Apreciar y valorar la dignidad del trabajo, sea éste de naturaleza artesanal, técnica e intelectual;
c) Jerarquizar los valores del mundo interior mediante la reflexión y la autocrítica; Adquirir las nociones de moral y de religión más como vivencia que como información teórica;
d) Adquirir capacidad para aceptar y renovar positivamente los valores. 2° Desarrollar las facultades intelectuales y las aptitudes especificas del individuo. En consecuencia, debe ofrecer oportunidades al alumno para:
a) Adquirir formación académica y vocacional de tipo general que lo habilite para seguir estudios superiores o para desempeñar una ocupación;
b) Tomar conciencia de que la educación es un proceso que dura toda la vida, para lo cual es indispensable adquirir métodos de estudio, investigación y pensamiento crítico.

3° Enseñar que la salud es condición esencial para el desenvolvimiento individual y social y que su conservación depende del conocimiento y la práctica de ciertas normas para lo cual el alumno debe:

a) Valorar la importancia de la salud en el desarrollo de todo su potencial humano y practicar las normas que rigen su conservación y mejoramiento;
b) Adquirir hábitos que favorezcan su salud física y mental.

4° Formar al individuo para hacer uso adecuado del tiempo libre a fin de recuperar el potencial de energía disminuido por la actividad diaria y lograr el enriquecimiento de su personalidad.

5° Educar al alumno para ser miembro activo de la sociedad, lo que implica:

a) Aprender a vivir en un orden social democrático;
b) Comprender el papel que le corresponde desempeñar como miembro de un país en proceso de desarrollo;
c) Adquirir actitudes y hábitos de cooperación y de trabajo en equipo, dentro de las concepciones de convivencia y mutua tolerancia.
d) Comprender que el bienestar de cada individuo y el progreso de la comunidad, son la meta máxima de toda sociedad.

6° Conocer y apreciar los valores de la nacionalidad, mediante la conservación y enriquecimiento del patrimonio cultural colombiano.

7° Afianzar el principio de que la familia es la célula esencial de toda sociedad y enseñar al alumno a cumplir sus funciones como miembro responsable y digno de ella.

Artículo 3° La educación media comprenderá dos ciclos, a saber:

1° Ciclo básico de cuatro años de duración en el cual los estudiantes recibirán la misma formación académica fundamental y comprenderá, a su vez, dos períodos: el de exploración vocacional en los años primeros y segundo y el de iniciación vocacional en los años tercero y cuarto, y

2° Ciclo vocacional de dos años de duración que ofrecerá las siguientes opciones:

a) Bachillerato académico;
b) Bachillerato pedagógico o formación normalista;
c) Bachillerato industrial;
d) Bachillerato comercial;
e) Bachillerato agropecuario;
f) Bachillerato en promoción social.

Artículo 4° El plan fundamental mínimo para la educación media será el siguiente:

Áreas	Asignaturas	Grados (Horas – clase)					
		I	II	III	IV	V	VI
Sociales.							
Educación Ética, Moral y Religiosa... ….		3	3	3	2	1	1
Filosofía.						3	3
Historia…. . …..		2	2	2	3		
Geografía. . .. . …..		2	2	2	3		
Comportamiento y Salud.						2	2
Idiomas…. . ….. ...							
Español. . .. . ….. . .. . …..		4	4	4	4	4	4
Un idioma extranjero (electivo).		3	3	3	3	3	3
Ciencias Naturales. . .. . ….. . ..		3	3	3	3		
Química. . .. . …..						3	3

Física. . .. . …..					3	3
Matemáticas.	5	5	5	5	3	3
Educación Física.	2	2	2	2	2	2
Educación Estética.	2	2	2	2	2	2
Vocacionales y Técnicas.	4	4	4	4	5	5
Intensificaciones (Optativas).	5	5	5	4	4	4
	35	35	35	35	35	35

Artículo 5° Llámense actividades vocacionales y técnicas aquellas que al propio tiempo que imparten conocimientos, fomentan habilidades y destrezas ocupacionales tales como mecanografía, radiotecnia, actividades agrícolas, juguetería, modelado, culinaria, primeros auxilios, explotación de recursos marinos, técnica de conservación de recursos naturales, etc.

Artículo 6° Las horas destinadas a intensificaciones optativas las dedicará cada plantel a intensificar e incluir aquellas asignaturas de su propia elección, conforme al espíritu del presente Decreto, pero su utilización con estos propósitos será obligatoria.

Artículo 7° Autorizase al Ministerio de Educación para que, sobre la base del Plan Fundamental Mínimo para la Educación Media, señale los currículos específicos para los institutos de bachillerato, escuelas normales, institutos industriales y de comercio, planteles agropecuarios y demás carreras profesionales medias existentes o que puedan establecerse, para que fije la distribución del año lectivo y ordene todo lo relativo a la reglamentación del presente Decreto.

Parágrafo. Autorizase al Ministerio de Educación Nacional para implantar gradualmente, a partir del presente año, el plan de estudios adoptado por este Decreto.

Artículo 8° El presente Decreto rige desde la fecha de su expedición y deroga el Decreto número 045 de 1962 y las demás disposiciones que le sean contrarias.

Comuníquese y cúmplase.

Dado en Bogotá, D.E., a 22 de enero de 1974.

MISAEL PASTRANA BORRERO

El Ministro de Educación Nacional, Juan Jacobo Muñoz Delgado.

DECRETO 1419 DE 1978.

DIARIO OFICIAL 35070 martes 8 de agosto de 1978
DECRETO NUMERO 1419 DE 1978
(julio17)

por el cual se señalan las normas y orientaciones básicas para la administración curricular en los niveles de educación pre-escolar básica (primaria y secundaria) media vocacional e intermedia profesional.

El presidente de la República de Colombia, en uso de las facultades que le confiere el ordinal 12 del artículo 120 de la Constitución Nacional, y

CONSIDERANDO:

Que es función del Gobierno establecer los marcos legales para el diseño y la administración curricular.

Que por medio del Decreto ley 023 de 1978 se reestructuró el sistema educativo nacional,

DECRETA:

Artículo 1° De los conceptos fundamentales.

El ordenamiento establecido en el presente Decreto constituye el marco legal para el mejoramiento cualitativo de la ecuación formal en los niveles de pre-escolar básica (primaria y secundaria), media vocacional e intermedia profesional.

Artículo 2° Para efectos del presente Decreto se entiende por currículo el conjunto planeado y organizado de actividades, en el que participan alumnos, maestros y comunidad para el logro de los fines y objetivos de la educación.

Artículo 3° De los fines del sistema educativo.

La programación curricular para los niveles de educación pre-escolar, básica (primaria y secundaria), media vocacional e intermedia profesional, deberá ceñirse a los fines del Sistema Educativo Colombiano. Se consideran fines del Sistema Educativo Colombiano los siguientes:

1. Contribuir al desarrollo equilibrado del individuo y de la sociedad sobre la base del respeto por la vida y por los derechos humanos.

2. Estimular la formación de actitudes y hábitos que favorezcan la conservación de la salud física y mental de la persona y el uso racional del tiempo.
3. Promover la participación consciente y responsable de la persona como miembro de la familia y del grupo social y fortalecer los vínculos que favorezcan la identidad y el progreso de la sociedad.
4. Fomentar el desarrollo vocacional y la formación profesional, de acuerdo con las aptitudes y aspiraciones de la persona y las necesidades de la sociedad, inculcando el aprecio por el trabajo cualquiera que sea su naturaleza.

5. Fomentar en la persona el espíritu de defensa, conservación, recuperación y utilización racional de los recursos naturales, y de los bienes y servicios de la sociedad.
6. Desarrollar en la persona capacidad crítica y analítica del espíritu científico, mediante el proceso de adquisición de los principios y métodos de cada una de las áreas del conocimiento, para que participe en la búsqueda de alternativas de solución a los problemas nacionales.
7. Promover en la persona la capacidad de crear, adoptar y transferir la tecnología que se requiere en los procesos de desarrollo del país.
8. Fomentar el desarrollo de actitudes y hábitos permanentes de superación que motivan a la persona a continuar la educación a través de su vida.
9. Fomentar el estudio de los propios valores y el conocimiento y respeto de los valores característicos de los diferentes grupos humanos.
10. Estimular el desarrollo de la mente, la capacidad de apreciación estética y propiciar un ambiente de respeto por las diferentes creencias religiosas.
11. Formar una persona moral y cívicamente responsable.

Artículo 4° De las características del currículo.

Para el logro de los fines propuestos en el artículo anterior el currículo debe conducir a una acción educativa que responda a las siguientes características:

1. El proceso educativo debe estar centrado en el alumno, para que éste se desarrolle armónica e integralmente como persona y como miembro de la comunidad.
2. Los programas educativos deben mantener el equilibrio entre conceptualización teórica y aplicación práctica del conocimiento.
3. La programación curricular debe constituir un sistema dinámico que concurra a la formación personal y a la integración social.
4. El proceso educativo debe promover el estudio de los problemas y acontecimientos actuales de la vida nacional e internacional.

Artículo 5° De los componentes y características de los programas curriculares.

Los componentes de los programas curriculares para cada área o asignatura en los niveles de pre-escolar, básica (primaria y secundaria), media vocacional e intermedia profesional serán los siguientes:

a. Justificación.
b. Estructura conceptual.
c. Objetivos generales y específicos.
d. Contenidos básicos.
e. Alternativas de actividades y metodologías.
f. Materiales y medios educativos.
g. Indicadores de evaluación.

Parágrafo. En el diseño, experimentación y aplicación de los programas curriculares se deben tomar en cuenta características tales como flexibilidad, articulación, graduación, integridad, secuencia, unidad y equilibrio, de acuerdo con los objetivos educacionales que se persiguen en cada nivel, área o asignatura.

Artículo 6° De las características de los currículos por niveles.

En los niveles de educación pre-escolar, y básica – primaria, el proceso educativo se realizará en forma integrada, y se iniciará la orientación vocacional.

Artículo 7° En el ciclo de educación básica secundaria el proceso educativo se realizará en forma integrado por áreas, se adecuará al nivel de especificidad requerido y se intensificará la orientación vocacional de acuerdo con los diversos tipos de bachillerato para facilitar al alumno la elección de modalidad en la educación media vocacional. La continuidad entre el ciclo primario y el secundario del nivel de educación básico se asegurará mediante la estructuración secuencial y progresiva del currículo.

Artículo 8° En el ciclo de educación media vocacional el proceso educativo se orientará hacia la diversificación por modalidades y comprende:

a. Un núcleo común que cubre las áreas básicas del conocimiento y continúa el enriquecimiento científico y humanístico de los ciclos anteriores.
b. La diversificación por modalidades vocacionales que permite capacitar prácticamente al alumno para continuar estudios superiores o para desempeñar una determinada función en su comunidad.

Parágrafo. El núcleo común es obligatorio para todos los estudiantes de las diversas modalidades.

Artículo 9°. El proceso de enseñanza en las modalidades vocacionales de que trata el artículo anterior, se diseñará y aplicará de acuerdo con las siguientes características:

a) Incluirá, además de la enseñanza teórica, la enseñanza práctica en cada modalidad según sus características;
b) Ejercitará en la tecnología propia de la modalidad;
c) Pondrá a los alumnos en contacto con la realidad ocupacional y profesional.
d) Orientará al alumno paulatinamente hacia los sectores de la producción y a la comprensión de los problemas de la economía y del desarrollo nacional.

Artículo 10. La educación media vocacional conduce al grado de bachiller. Se diversificará en los siguientes tipos de bachillerato.

a) Bachillerato en Ciencias.
b) Bachillerato en Tecnología.
c) Bachillerato en Arte.

El Bachillerato en Ciencias ofrece las siguientes modalidades:

1. Ciencias Matemáticas.
2. Ciencias Naturales.
3. Ciencias Humanas.

El bachillerato en Tecnología o aplicado ofrece las siguientes modalidades.

4. Pedagógica.
5. Industrial.
6. Agropecuaria.
7. Comercial.
8. Salud y Nutrición.
9. Educación Física y Recreación.
10. Promoción de la Comunidad.

El bachillerato en Arte ofrece las siguientes modalidades:

11. Bellas Artes.
12. Artes Aplicadas.

Artículo 11. Del título de bachiller.

La culminación y aprobación de estudios de educación media vocacional, cualquiera que sea el tipo de modalidad, da derecho al respectivo grado de bachiller. El diploma de bachiller certifica idoneidad para el ingreso a la Universidad y a las otras instituciones educativas que ofrezcan programas posteriores a la educación media vocacional.

Artículo 12. De cómo se ofrecerán y ejecutarán programas.

Los planteles educativos oficiales o privados ofrecerán como mínimo dos tipos de bachillerato, con una modalidad en cada uno de ellos, previa aprobación del Ministerio de Educación. Para la selección de las modalidades se tendrán en cuenta las necesidades sociales, económicas y culturales de la región.

Parágrafo. Concédase a los planteles educativos plazo de un (1) año contado a partir de la vigencia de las disposiciones que adopten los planes y programas de estudio, para presentar al Ministerio de Educación Nacional proyectos de diversificación que incluyan las modalidades seleccionadas y la programación respectiva en cuanto a dotación y selección de personal docente y un plazo de un (1) año para poner dichos proyectos en ejecución a partir de la fecha en que el Ministerio autorice al plantel para ofrecer las modalidades.

Artículo 13. La decisión sobre las modalidades que deben funcionar en los planteles oficiales de educación media vocacional quede reservada al Ministerio de Educación Nacional, de acuerdo con las necesidades regionales y con las posibilidades del sector. Igualmente, el Ministerio de Educación Nacional reglamentará la adopción y ejecución de modalidades vocacionales en los planteles educativos no oficiales de tal manera que se procure alcanzar los objetivos de la diversificación.

Artículo 14. Los planteles educativos no oficiales que ofrezcan los niveles de educación media vocacional podrán recurrir a cualquiera de los siguientes sistemas para implantar la diversificación de que trata el artículo 10 de este Decreto:

a. La organización dentro del mismo plantel de las diferentes modalidades de bachillerato que se van a ofrecer.

b. La integración entre dos o más planteles de modo que los alumnos puedan cursar en un plantel las asignaturas del núcleo común y en otro las asignaturas del programa diversificado. En este caso, los planteles que se integren firmarán un convenio estipulando las obligaciones de cada parte y la forma de expedir el respectivo diploma.

c. La delegación por parte del plantel educativo en una institución especializada que tenga aprobación oficial, mediante convenio escrito para la preparación y evaluación de los alumnos en las asignaturas correspondientes al programa diversificado. En este caso, el plantel educativo se hará cargo de la preparación y evaluación de los alumnos en las asignaturas del núcleo común, y expedirá el respectivo diploma de bachiller sobre la base de una certificación de aprobación del programa de formación vocacional expedido por la institución respectiva.

Parágrafo. Para la integración o delegación de que trata el presente artículo se requiere resolución previa de autorización del Ministerio de Educación Nacional.

Artículo 15. Los Centros Auxiliares de Servicios Docentes que organice el Ministerio de Educación Nacional prestarán su cooperación a los planteles que impartan educación diversificada, de acuerdo a sus posibilidades y a la programación que se establezca.

Artículo 16. De los niveles de educación que pueden ofrecer los planteles educativos.

Los niveles de educación pre-escolar, básica primaria, básica secundaria, media vocacional e intermedia profesional, pueden organizarse todos en un mismo plantel o cada uno en planteles independientes.

Artículo 17. El ciclo de educación intermedia profesional se considera como una continuación en forma articulada de las modalidades vocacionales del ciclo de educación media vocacional. También puede ser considerado como un independiente ofrecido por entidades oficiales o privadas, al cual se ingresará después de haber obtenido el bachillerato en cualquier modalidad, caso en el cual será necesario cumplir una etapa de nivelación previa a la iniciación del ciclo de acuerdo con los prerrequisitos que exija la rama profesional elegida.

Artículo 18. La aprobación del ciclo de estudios de nivel intermedio profesional da derecho al título de técnico profesional intermedio en la rama profesional correspondiente.

Artículo 19. De la reglamentación y adopción de planes y programas curriculares.

Los planes y programas de estudio, la intensidad horaria y los calendarios escolares para los distintos niveles y grados del sistema, se reglamentarán de acuerdo con los resultados del proceso de experimentación y evaluación sistemática realizada por el Ministerio de Educación Nacional o por las Secretarías de Educación con autorización del Ministerio de Educación Nacional.

Parágrafo. La aplicación de los nuevos programas curriculares se hará en forma paulatina por niveles y grados de acuerdo con los resultados de la experimentación y una vez hayan sido adoptados oficialmente, serán revisados y ajustados periódicamente de acuerdo con la evaluación sistemática.

Artículo 20. Los planes y programas de qué trata el presente Decreto, serán expedidos por el Gobierno.

Parágrafo 1° Autorizase al Ministerio de Educación Nacional, para reglamentar la experimentación de planes y programas de estudio antes de ser adoptados por el Gobierno.

Parágrafo 2° El Ministerio de Educación Nacional autorizará por resolución la vigencia de planes curriculares diferentes a los que rigen para el sistema educativo en sus diferentes niveles, con base en el análisis de las características especiales del programa propuesto. Esta autorización cobijará programas permanentes que ofrecen modalidades no contempladas en este Decreto, o que presentan cambios en la intensificación de algunas asignaturas o en la duración total del programa.

Parágrafo 3° Solamente podrán funcionar como programas o planteles experimentales los que cuenten con una resolución de aprobación de la experimentación expedida por el Ministerio de Educación Nacional.

Artículo 21. De la formación y capacitación de docentes.

La formación y capacitación del docente se hará en función del proceso educativo del alumno, por lo cual la estructura de los programas curriculares tanto para la formación como para la capacitación de docentes deberá responder a la estructura de los programas curriculares para los alumnos.

Artículo 22. La capacitación y actualización hacen parte del ejercicio docente y tendrá por objeto asegurar el rendimiento escolar y la eficacia de la enseñanza y del aprendizaje.

Parágrafo. El Ministerio de Educación Nacional organizará el sistema de capacitación de que tratan los artículos 21 y 22 del presente Decreto de tal manera que comprenda el trabajo de planeación de la enseñanza y las actividades de actualización y perfeccionamiento.

Artículo 23. Disposiciones varias.

Para la elaboración de los programas curriculares en las diferentes áreas, el Ministerio de Educación Nacional buscará aprovechar los aportes de las instituciones especializadas del sector educativo y de otros sectores. Para el área de Educación Física y Recreación, los programas curriculares se elaborarán con la asesoría del Instituto Colombiano de la Juventud y el Deporte –Coldeportes-. Para el área de Educación Estética y Artística, los programas curriculares se elaborarán con la asesoría del Instituto Colombiano de Cultura-Colcultura-.

Parágrafo. El Ministerio de Educación Nacional trabajará con el Instituto Colombiano de Cultura –Colcultura-, en la organización de las bibliotecas escolares.

Artículo 24. La Educación religiosa se ajustará a las normas concordatarias vigentes y a sus respectivas reglamentaciones.

Artículo 25. Los planteles educativos oficiales, deben funcionar para ambos sexos. Aquellos que en la fecha de expedición de este Decreto funcionan para un solo sexo, harán la conversión a un plantel mixto cuando la adecuación de los aspectos físicos lo permita.

Parágrafo. El Ministerio de Educación Nacional se reserva el derecho de resolver la situación de los planteles que requieran un tratamiento especial en la materia.

Artículo 26. El diseño arquitectónico y la dotación de los planteles educativos que se construyan o se equipen a partir de la fecha de expedición de este Decreto deben tener en cuenta en sus especificaciones tanto la composición mixta de los alumnos como la integración de la enseñanza práctica y teórica, de acuerdo con los programas curriculares que se adopten.

El Ministerio de Educación Nacional de común acuerdo con el ICCE, definirá las especificaciones para construcción y dotación a que se refiere este artículo.

Artículo 27. Mientras el Gobierno adopta nuevos planes y programas de estudio mantienen vigentes los actuales.

Artículo 28. El presente Decreto rige a partir de la fecha de su expedición.

Comuníquese y cúmplase.

Dado en Bogotá, D.E., a 17 de julio de 1978.

ALFONSO LOPEZ MICHELSEN

El Ministro de Educación Nacional,

Rafael Rivas Posada.

DECRETO 1002 DE 1984.

DIARIO OFICIAL 36615 viernes 18 de mayo de 1984
DECRETO NUMERO 1002 DE 1984
(abril 24)
por el cual se establece el Plan de Estudios Para la Educación Preescolar, Básica (Primaria y Secundaria) y Media Vocacional de la Educación Formal Colombiana.

El presidente de la República de Colombia, en ejercicio de las facultades que le confiere el artículo 120 de la Constitución Política, y

CONSIDERANDO:

Que es función del Gobierno establecer los marcos legales generales del Plan de Estudios de la Educación Formal;

Que el centro del proceso educativo es la persona como tal y como miembro de la sociedad y que la educación debe responder a sus características y necesidades, a los avances científicos y tecnológicos y a la integración de los centros educativos con la comunidad;

Que el Decreto ley 088 de 1976 reestructurara el Sistema Educativo colombiano y que en consecuencia es necesario establecer planes de educación formal que garanticen la secuencia y coherencia de esta estructura y favorezcan el desarrollo armónico del alumno;

Que el Ministerio de Educación Nacional debe tener en cuenta los resultados de las experiencias e innovaciones curriculares que se vienen realizando en los distintos niveles del Sistema Educativo;

Que el Plan de Estudios para la Educación Preescolar, Básica (Primaria y Secundaria) y Media Vocacional, debe tener en cuenta los fines del Sistema Educativo colombiano y las orientaciones para la Administración Curricular establecidos en el Decreto 1419 de 1978,

DECRETA:

Capítulo I

Definición y objetivos.

Artículo 1° Establéese el Plan de Estudios para la Educación Preescolar, Básica (Primaria y Secundaria) y Media Vocacional en todos los centros educativos de Educación Formal del país, tal como se especifica en los siguientes artículos:

Parágrafo. Para los efectos del presente Decreto se entiende por Plan de Estudios el conjunto estructurado de definiciones, principios, normas y criterios que, en función de los fines de la educación, orienta el proceso educativo mediante la formulación de objetivos por niveles, la determinación de áreas y modalidades, la organización y distribución del tiempo y establecimiento de lineamientos metodológicos, criterios de evaluación y pautas de aplicación y administración.

Artículo 2° De acuerdo con el Decreto ley 088 de 1976 y con los fines establecidos en el artículo 3° del Decreto 1419 de 1978. la familia, la comunidad y las autoridades, integrarán esfuerzos para crear ambientes propicios que permitan al alumno lograr los siguientes objetivos:

En la Educación Preescolar:

-Desarrollar integral y armónicamente sus aspectos biológico, sensomotor, cognitivo y socio-afectivo, y en particular la comunicación, la autonomía y la creatividad, y con ello propiciar un aprestamiento adecuado para su ingreso a la Educación Básica.

En la Educación Básica (Primaria y Secundaria):

-Reconocer sus potencialidades físicas, intelectuales y emocionales y desarrollarlas, armónica y equilibradamente, para asumir con decisión y acierto la solución de sus problemas como individuo y como miembro de la comunidad.

-Identificar y valorar los factores que influyen en el desarrollo social, cultural, económico y político del país y participar crítica y creativamente en la solución de los problemas y el desarrollo de la comunidad, teniendo en cuanta los principios democráticos de la nacionalidad colombiana.

-Adquirir conocimientos, habilidades y destrezas, a través de las distintas experiencias educativas, que contribuyan a su formación personal, cívico social, cultural, científica, tecnológica, ética y religiosa, y le faciliten organizar un sistema de actitudes y valores, en orden a un efectivo compromiso con el desarrollo nacional.

En la Educación Media Vocacional:

-Afianzar el desarrollo personal, social y cultural adquirido en el nivel de Educación Básica.

-Adquirir los conocimientos fundamentales y las habilidades y destrezas básicas, que además de prepararlo para continuar estudios superiores, lo orienten hacia un campo de trabajo.

-Aprender a utilizar racionalmente los recursos naturales, a renovarlos e incrementarlos; a emplear adecuadamente los bienes y servicios que el medio le ofrece, a participar en los procesos de creación y adecuación de tecnología.

-Actuar con responsabilidad, honradez, eficiencia y creatividad en el campo que le corresponda.

-Utilizar creativa y racionalmente el tiempo libre para el sano esparcimiento, la integración social y el fomento de la salud física y mental.

-Adquirir suficientes elementos de juicio para orientar su vida y tomar decisiones responsables.

Capítulo II

Áreas y modalidades

Artículo 3° Para los efectos del presente Decreto se entiende por área de formación el conjunto estructurado de conceptos, habilidades, destrezas, valores y actitudes afines, relacionados con un ámbito determinado de la cultura, y anteriormente desglosados en materias y asignaturas.

Las áreas de formación se clasifican en: comunes, las que ofrecen formación general a todos los alumnos en la Educación Básica y Media Vocacional, y propias, las que contribuyen a orientar al alumno hacia una formación específica en alguna modalidad de la Educación Media Vocacional.

Artículo 4° En la Educación Preescolar se buscará el logro de los objetivos mediante la vinculación de la familia y la comunidad a la tarea de mejorar las condiciones de vida de los niños y mediante actividades integradas que se ajusten a los siguientes lineamientos: aprovechar y convertir en ambiente educativo la realidad social en que vive el niño; utilizar los recursos y materiales propios de la comunidad; adecuar el contenido y duración de las actividades a los intereses de los niños de acuerdo con sus características de desarrollo; utilizar el juego como actividad básica; propiciar el trabajo en grupo, el espíritu de cooperación y amistad y el desarrollo de la autonomía del niño y además servir como apresamiento para la educación básica primaria.

Parágrafo. En la Educación Preescolar no se determinarán áreas ni grados específicos.

Artículo 5° Las áreas comunes para la Educación Básica Primaria son:

- Ciencias naturales y salud.
- Ciencias sociales.
- Educación estética.
- Educación física, recreación y deportes.
- Educación religiosa y moral.
- español y literatura.
- Matemáticas.

Artículo 6° En la Educación Básica Secundaria, además de las áreas anteriores, se incluyen como áreas comunes la de educación en tecnología y la correspondiente a un idioma extranjero.

Parágrafo. Se entiende por educación en tecnología la que tiene por objeto la aplicación racional de los conocimientos y la adquisición y ejercicio de habilidades y destrezas que contribuyan a una formación integral, faciliten la articulación entre educación y trabajo, y permitan al alumno utilizar de manera efectiva los bienes y servicios que le ofrece el medio.

Artículo 7° El área de educación en tecnología, que cada centro educativo establecerá en Básica Secundaria, debe seguir una secuencia organizada y mantener la debida continuidad a través de todos los grados. Esta área estará preferentemente orientada hacia la o las modalidades elegidas por el Centro Educativo.

Artículo 8° En la Educación Media Vocacional se continúan desarrollando las áreas de la Educación Básica Secundaria y se adicionan la de filosofía como área común y las áreas propias de la o las modalidades elegidas. El Ministerio de Educación Nacional creará estímulos para la apertura de modalidades distinta de las ciencias matemáticas, ciencias naturales y ciencias humanas.

Artículo 9° Como elementos importantes del proceso de aprendizaje, se organizarán en los centros educativos actividades complementarias en cada área o grupo de áreas en función de los intereses y necesidades de los alumnos y de la comunidad.

Artículo 10. La orientación escolar es inherente a todas las áreas y grados y debe facilitar a los alumnos la interpretación, integración y proyección de sus experiencias, en función de su desarrollo personal y social. La orientación vocacional como parte de la escolar se debe desarrollar a través de todo el proceso educativo y facilitar al estudiante el conocimiento de sus aptitudes e intereses, de las necesidades de la comunidad y de las oportunidades que le ofrece el medio, con el fin de que pueda tomar decisiones responsables sobre su futuro.

Capítulo III

Organización y distribución del tiempo.

Artículo 11. La intensidad mínima para cada uno de los grados y áreas de la Educación Básica (Primaria y Secundaria) y de la Media Vocacional se contabilizará en horas netas de 60 minutos de trabajo escolar.

Los totales mínimos semanales y anuales de horas netas de 60 minutos de trabajo escolar, sin contar los períodos de descanso, serán los siguientes:

	Horas semanales	Horas anuales
Educación Básica Primaria... ...	25	1.000
Educación Básica Secundaria. ...	30	1.200
Educación Media Vocacional. ...	30	1.200

Parágrafo 1° En la Educación Preescolar, cuando se utilice la alternativa escolarizada, la intensidad mínima será de 20 horas semanales, o sea de 800 horas anuales. Pero se podrán utilizar otras alternativas distintas a la escolarizada, que permitan a la mayoría de los niños el acceso a la Educación Preescolar.

Parágrafo 2° Las horas netas de 60 minutos de trabajo escolar se distribuirán en unidades didácticas cuya duración deberá adecuarse a las exigencias pedagógicas del alumno y del área.

Parágrafo 3° Para los centros educativos de Educación Básica Secundaria y Media Vocacional que al momento de la aplicación de este Plan de Estudios estén autorizados para laborar en tres jornadas, el total mínimo semanal será de 25 horas netas de 60 minutos.

Artículo 12. En la Educación Media Vocacional, como requisito para obtener el diploma de bachiller, los alumnos deberán prestar a la comunidad por un tiempo no inferior a 80 horas de trabajo escolar, alguno de los servicios de alfabetización, de promoción de la comunidad, de recreación y deporte, de tránsito, u otros similares, que cada centro educativo planeará, desarrollará y controlará adecuadamente, fuera del tiempo señalado en el artículo anterior.

Artículo 13. A partir del presente Decreto no se autorizarán nuevas jornadas continuas en los centros educativos del país.
Los centros educativos con jornadas continuas ya existentes serán objeto de evaluación para efectos de legalización de cada una de las jornadas o regreso a la jornada completa ordinaria.

Artículo 14. Con el propósito de incrementar la retención escolar, el Ministerio de Educación Nacional, podrá autorizar calendarios escolares diferentes a los vigentes, especialmente en las zonas rurales.

Capítulo IV

Lineamientos metodológicos y de evaluación.

Artículo 15. En la Educación Básica y en la Media Vocacional las áreas se desarrollarán atendiendo a los principios de integración y a las orientaciones de los programas curriculares.

Artículo 16. El Ministerio de Educación Nacional promoverá en los centros educativos debidamente calificados y autorizados, experiencias pedagógicas que conduzcan a la adopción de nuevos métodos que mejoren el proceso de aprendizaje y estimulará a las facultades de ciencias de la educación para que impulsen y asesoren dichas experiencias.

Artículo 17. Las autorizaciones de planes y programas diferentes de los que rigen en general para el sistema educativo formal del país que están contempladas en el artículo 20, parágrafo 2° del Decreto 1419 de 1978, deberán expedirse sobre la base de las características de los planes y programas propuestas, y de las calidades de los centros educativos en que éstos vayan a implementarse, especificando las condiciones que deban cumplir tales centros para adoptar dichos planes y programas.

Artículo 18. El Ministerio de Educación Nacional podrá autorizar la expansión de las innovaciones educativas una vez comprobada su utilidad y eficacia tal y como lo está haciendo en la actualidad Escuela Nueva.

Artículo 19. La evaluación es parte esencial del proceso educativo y como tal no debe limitarse a la asignación de notas y a la promoción, sino que deberá programarse y desarrollarse para cada unidad didáctica en sus procesos y resultados con el propósito de mejorar la calidad del aprendizaje.

Capítulo V

Aplicación y administración del Plan de Estudios.

Artículo 20. El Ministerio de Educación Nacional reglamentará la aplicación gradual del presente Plan de Estudios y de los programas que lo especifiquen para cada nivel y grado, de tal manera que se tenga en cuenta las características de las regiones, la disponibilidad de textos, de guías y demás materiales curriculares y la suficiente capacitación de los docentes.

Artículo 21. El Ministerio de Educación Nacional queda autorizado para reglamentar, por medio de resoluciones, todos los aspectos relativos a la aplicación del presente Decreto.

Artículo 22. El presente Decreto rige a partir de la fecha de su expedición y deroga el artículo 12 del Decreto 1419 de 1978 y las disposiciones que le sean contrarias. Para los centros educativos, niveles y grados que por efecto de la implementación gradual del presente Decreto aún no queden sujetos a estas disposiciones, continuarán en vigencia provisional las reglamentaciones anteriormente existentes.

Comuníquese y cúmplase.
Dado en Bogotá, D. E., a 24 de abril de 1984.

BELISARIO BETANCUR

El Ministro de Educación Nacional,

Rodrigo Escobar Navia.