Una Exploración del Potencial para Impulsar el Desarrollo de Pensamiento Algebraico, de una Innovación Curricular que hace Énfasis en la Identificación de Estructura Matemática

Jairo Antonio Saavedra Martínez

David Fernando Tocarruncho Pineda

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Maestría en docencia de la matemática

Bogotá, 2018

Una Exploración del Potencial para Impulsar el Desarrollo de Pensamiento Algebraico, de una Innovación Curricular que hace Énfasis en la Identificación de Estructura Matemática

JAIRO ANTONIO SAAVEDRA MARTÍNEZ
CÓDIGO 2016185020
CC.80.737.175

DAVID FERNANDO TOCARRUNCHO PINEDA
CÓDIGO 2016185022
CC.7.182.331

Trabajo de Grado realizado como requisito parcial para optar al título de
Magíster en Docencia de la Matemática

Directora:
CECILIA AGUDELO VALDERRAMA
PhD. en Educación Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ, D.C.
2018

A Dios, a Alicia, a Jhon, a Samary y a José

Jairo

A Dios, a la virgencita del milagro por las n-ésimas bendiciones recibidas a SaraI, Paula y Nicolai lo más grande que tengo en mi vida todo es por ellos y para ellos.

David

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***Una exploración del potencial para impulsar el desarrollo del pensamiento algebraico, de una innovación curricular que hace énfasis en la identificación de estructura matemática***, presentada por los estudiantes:

Jairo Antonio Saavedra Martinez, Cód. 2016185020, CC. 80.737.175
David Fernando Tocarruncho Pineda, Cód. 2016185022, CC. 7182331

como requisito parcial para optar al titulo de **Magister en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada así,**

Jairo Antonio Saavedra Martinez con 43 puntos.
David Fernando Tocarruncho Pineda con 41 puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 14 días del mes de febrero de 2019.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesora: ANA CECILIA AGUDELO (UPN)

Jurados: Profesor: LEONOR CAMARGO URIBE (UPN)

Profesor: PEDRO JAVIER ROJAS (UD)

Declaración

Para todos los efectos, declaramos que el presente estudio es original y de nuestra autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos proporcionado los respectivos créditos.

David Fernando Tocarruncho Pineda

Jairo Antonio Saavedra Martínez

Reconocimientos

Infinitas gracias a Dios porque siempre nos ha guiado en todo momento, por ser fortaleza constante durante el tiempo que duró el desarrollo de este proyecto.

Reconocimiento especial a la profesora Cecilia Agudelo Valderrama por su enorme dedicación y paciencia al dirigir este trabajo de grado, ya que sin ella y sin sus valiosos aportes no hubiera sido posible la realización de este trabajo, en especial, su constancia para que nosotros desarrolláramos nuestras capacidades comunicativas. Además, gracias a ella pudimos ver un panorama distinto de lo que es ser docente, ya que cambió nuestra visión y por ende nuestras prácticas profesionales. Antes de iniciar este trabajo de grado nuestra práctica se limitaba a seguir una rutina de enseñanza que habíamos pre-establecido. A lo largo del desarrollo de este proyecto nos involucramos en un proceso de transformación personal y profesional, dado que cambió nuestra postura como educadores matemáticos, en reconocer y vivir la experiencia de sentirnos responsables de apoyar el desarrollo de procesos de cambio conceptual y actitudinal en nuestros estudiantes.

También queremos darles gracias a todos nuestros profesores que a lo largo de la especialización y la maestría nos guiaron en el proceso de formación profesional

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado en Maestría de profundización
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Una Exploración del Potencial para Impulsar el Desarrollo de Pensamiento Algebraico, de una Innovación Curricular que hace Énfasis en la Identificación de Estructura Matemática.
Autor(es)	Saavedra Martínez, Jairo Antonio; Tocarruncho Pineda, David Fernando
Director	Agudelo Valderrama, Ana Cecilia
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2018. 169p
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Pensamiento algebraico; identificación de estructura matemática; investigación acción; currículo por procesos; aprendizaje con significado y comprensión.

2. Descripción
En este trabajo de grado reportamos los resultados del proceso de aprendizaje profesional—y presentamos los elementos conceptuales y metodológicos centrales involucrados—que, con el propósito de apoyar el desarrollo de pensamiento algebraico en un grupo de estudiantes de Grado 8°, tuvo lugar en el marco de una maestría en docencia de la matemática con énfasis en el desarrollo de la práctica profesional. Con base en los resultados de una exploración inicial de las ideas matemáticas, comprensiones y necesidades de aprendizaje de *tres* grupos de estudiantes de Grado 8° (incluido el grupo con el que se pilotearon los instrumentos de recolección de información), de diferentes colegios pero de poblaciones comparativas, se diseñó, se llevó a la acción y observó una innovación curricular, con el objetivo de apoyar el desarrollo de pensamiento algebraico, en uno de los grupos (el Grupo A). Para poder identificar la efectividad de la innovación curricular, en forma paralela se recolectó información de otro de los grupos de estudiantes (el Grupo B), y también sobre componentes centrales del currículo al cual fue expuesto. Las evidencias muestran que una secuencia de actividades (innovación curricular), diseñada a partir de situaciones de la cotidianidad de los estudiantes—y tomando como base las comprensiones con que ya cuentan los estudiantes y sus necesidades de aprendizaje—mostró ser más efectiva, en el corto plazo, en apoyar el desarrollo de pensamiento algebraico que la enseñanza transmisionista y formalista, durante un año académico, observada en el Grupo B.

3. Fuentes

A continuación, presentamos los referentes bibliográficos que fueron centrales en el desarrollo de este proyecto.

Agudelo-Valderrama, C. (2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebarico.* Tunja: UPTC.

Agudelo-Valderrama, C. (2002). Promoción del pensamiento algebraico en la escuela primaria: una propuesta que cobra sentido de acuerdo con nuestras concepciones sobre el conocimiento matemático. *Aula Urbana*, No. 37, 18-19.

Agudelo-Valderrama, C. (2005). Explicaciones de ciertas actitudes hacia el cambio:las concepciones de profesores y profesoras de matemáticas colombianos sobre los factores determinantes en su práctica de enseñanza del álgebra escolar. *REVISTA EMA, 10*(2), 375-412.

Agudelo-Valderrama, C. (2007). La Creciente Brecha entre las Disposiciones Educativas Colombianas, las Proclamaciones Oficiales y las Realidades del Aula de Clase: Las concepciones de profesores de matemáticas sobre el álgebra escolar y el propósito de su enseñanza. *Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 5*(1), 43-62.

Elliot, J. (2000). *La investigacion acción en educación.* España: Morata.

Hopkins, D. (1993). *A Teacher's Guide to Classroom Research.* Buckingham: U. K.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics 11-16* (pp. 103-119). Londres: John Murray.

Mason, J. (1999). Incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: Las secuencias de Tunja. *REVISTA EMA, 4*(3), 232-246.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., y Gowar, N. (2014). *Rutas hacia el Raices del Álgebra* (Traducción y edición de Cecilia Agudelo-Valderrama). Ibague: Universidad del Tolima.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33-49.

Stenhouse, L. (1991). *Investigación y desarrollo del currículum.* Madrid: Morata.

4. Contenidos

Nuestro trabajo de grado se dividió en 7 capítulos de la siguiente manera:

Capítulo 1: La problemática. En este capítulo se describe la problemática que motivó la realización del proyecto, se justifica el trabajo propuesto a partir de su propósito central.

Capítulo 2: Nuestro marco referencial. Presentamos las perspectivas, constructos teóricos y conceptuales que alcanzamos a través del estudio de la literatura especializada y que, de acuerdo al foco de atención y al propósito de este proyecto, consideramos debían estar incluidos como elementos centrales en nuestro marco referencial.

Capítulo 3: Enfoque metodológico. Se describe nuestro enfoque metodológico, que desde un enfoque de investigación acción, acomodó un cuasi experimento para tratar de identificar la efectividad de la innovación curricular diseñada y llevada a la acción en un grupo de estudiantes de Grado 8°.

Capítulo 4. Apoyando el desarrollo de pensamiento algebraico en contextos numéricos. En este capítulo se describe el trabajo de la *primera* parte de la innovación curricular que fue diseñado para tratar de apoyar la identificación de estructura matemática desde situaciones problema en contextos numéricos. Se presentan evidencias y resultados generales de este trabajo.

Capítulo 5. Apoyando el desarrollo de pensamiento algebraico a través del trabajo con patrones figurales. De manera similar a como se estructuró el Capítulo 4, en este capítulo se describe la *segunda* parte de la innovación curricular, centrada en el trabajo con patrones figurales.

Capítulo 6. Impacto de la innovación curricular. Se presenta una comparación de los resultados obtenidos de la recolección de información del grupo de estudiantes que se llamó Grupo B (grupo control) y de los del grupo donde se desarrolló la innovación curricular (Grupo A).

Capítulo 7. Conclusiones y reflexiones. Se presentan las conclusiones y resultados obtenidos del estudio, junto con las reflexiones más relevantes que, en cuanto a nuestra práctica profesional, surgieron del proceso de aprendizaje en que nos implicó el desarrollo de este proyecto.

5. Metodología

Teniendo como plataforma el enfoque de investigación acción, y para poder establecer el aporte generado por la innovación curricular en el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes, nuestro diseño de investigación acomodó, de manera cualitativa, lo que en un paradigma positivista se llama un cuasi-experimento, ya que se tomaron dos grupos de estudiantes de grado octavo, uno del Colegio A, donde se desarrolló la innovación curricular y el otro del Colegio B, tomado como grupo control. Este cuasi-experimento fue acomodado con un énfasis cualitativo, ya que nuestro propósito era explorar las ideas matemáticas de los estudiantes, por lo que, además de haber usado un cuestionario con preguntas abiertas y con situaciones problema, se realizaron entrevistas de seguimiento al cuestionario. Para la puesta en acción de la innovación curricular con el Grupo A—cuyo propósito era apoyar el desarrollo de pensamiento algebraico—nos involucramos en el desarrollo de procesos de *indagación y reflexión* sobre lo que iba sucediendo en el aula, por razón de la actividad que nosotros, los profesores, proponíamos y organizábamos.

6. Conclusiones

- Este trabajo cambió de manera radical nuestras concepciones sobre la enseñanza de las matemáticas, es decir, nos cambió a nosotros; nos dimos cuenta que las concepciones positivistas y absolutistas de las matemáticas que teníamos no son efectivas para crear ambientes de aula que apoyen un aprendizaje con significado para los estudiantes y promuevan el desarrollo de construcción conceptual.
- A través del desarrollo de este proyecto logramos entender, y experimentar de manera personal, qué significa la proclama: 'el profesor debe ser un *constructor permanente* del currículo para poder atender las necesidades de aprendizaje de sus estudiantes' (Agudelo-Valderrama, 2000, 2005), pues antes creíamos que el currículo era algo que ya estaba decidido por agentes externos al profesor. Inconscientemente nos veíamos como los implementadores de decisiones externas a nosotros (*e.g.*, los autores de textos guía).
- Involucrarnos en la *construcción del currículo* que opera en nuestras aulas de clase, al proponernos apoyar el desarrollo de pensamiento algebraico, nos exigió embarcarnos en un proceso largo de re-aprendizaje de las matemáticas escolares involucradas en las actividades que se querían llevar al aula y, sobre todo, re-aprenderlas de tal manera que el elemento pedagógico, que permite atender y entender el pensamiento de nuestros estudiantes, estuviera implicado.
- Las evidencias obtenidas del trabajo de este proyecto señalan que en las *dos semanas* en las que se realizó la secuencia de actividades (la innovación curricular) que se diseñó, con el propósito de apoyar el desarrollo de pensamiento algebraico, y se convirtió en objeto de indagación en el aula, los estudiantes del Grupo A avanzaron mucho más que los estudiantes del grupo control, en un trabajo de *6 meses* (período durante el que se recolectó información sobre el currículo al que fue expuesto este grupo, en Grado 8°).
- La información recolectada de los estudiantes, sobre sus apreciaciones y sentimientos mientras desarrollaban la actividad de aula (después de cada sesión de clase), y el entusiasmo de ellos por el trabajo matemático propuesto (observado y registrado por nosotros) evidenciaron una conexión directa entre el aprendizaje significativo y su motivación y desarrollo de actitud positiva hacia las matemáticas.

Elaborado por:	Saavedra Martínez, Jairo Antonio; Tocarruncho Pineda, David Fernando
Revisado por:	Agudelo Valderrama, Ana Cecilia

Fecha de elaboración del Resumen:	1	12	2018

Tabla de contenido

Lista de Tablas

Lista de Figuras

Lista de Apéndices

Capítulo 1: La problemática

El propósito principal de la enseñanza de las matemáticas es "ayudar a las personas a dar sentido al mundo que les rodea . . . . Mediante el aprendizaje de las matemáticas los alumnos [desarrollan, entre otros, el *pensamiento algebraico*, que es] poderosísimo para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla; en suma, para actuar en y para ella" (Lineamientos Curriculares de Matemáticas, Ministerio de Educación Nacional-MEN, 1998, p. 18). Antes de iniciar su etapa escolar, los niños han desplegado el poder natural para identificar regularidades y darle sentido matemático al mundo que los rodea (Mason, 1999). La escuela, por tanto, tiene la tarea de apoyar e impulsar de manera efectiva la continuación del desarrollo de estas potencialidades de los niños (Agudelo-Valderrama, 2014) ya que, como lo advierten Steen (1990) y Mason (1999), detectar regularidad y patrón, y expresar generalidad son capacidades centrales en el desarrollo del pensamiento algebraico, esto es, del pensamiento matemático. Sin embargo, las evidencias obtenidas a través de nuestra práctica de enseñanza, y las que subraya la investigación, muestran que muchos estudiantes tanto de nivel escolar como del superior enfrentan grandes dificultades en el trabajo algebraico (McGregor y Stacey, 1999).

Dada una situación problema específica o tarea matemática, el pensamiento algebraico comienza a surgir cuando se reconoce la forma como las cantidades involucradas en dicha situación se relacionan, cuando al considerarse la variación en dicha situación problema se reconoce lo que puede permanecer invariante. Al identificar las cantidades involucradas en una situación problema/una tarea matemática dada, y reconocer la forma como dichas cantidades se relacionan se está centrando la atención en la estructura matemática subyacente. Si los niños se hacen conscientes de la estructura presente en una tarea matemática o en una expresión matemática específica, cuentan con un elemento conceptual que les permite considerar y/o construir otros casos (ejemplos) con la misma estructura. De esta manera se puede desarrollar la capacidad para establecer regularidades que, luego, conducen a la construcción de generalizaciones matemáticas, esto es, a ver *lo general* en *lo particular* (Mason, Graham, Pimm y Gowar, 2014). Identificar regularidades no sólo se presenta en el trabajo del aula de matemáticas, sino en muchos contextos de la vida cotidiana, pues, identificamos cómo se relacionan los componentes de una situación.

Consecuentemente, la identificación de estructura matemática, esto es, la forma como se relacionan los elementos/las cantidades/las variables involucradas en una situación/tarea matemática está en el centro del desarrollo de pensamiento algebraico. Este pensamiento resulta ser muy útil para la vida, ya que si se logra desarrollar se tendrá un poder superior en el análisis de situaciones del mundo real (Mason, 1999; MEN 1998). Pero, como se subrayó anteriormente, las evidencias muestran que muchos estudiantes no logran desarrollar pensamiento algebraico; esto sugiere que, en muchos casos, la escuela no apoya el desarrollo de las potencialidades naturales que poseen los estudiantes para identificar regularidades y desarrollar su pensamiento algebraico.

A través del desarrollo de este trabajo hemos desarrollado mayor conciencia sobre el hecho que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares está fuertemente influenciado por factores culturales, que nosotros mismos percibimos desde nuestra práctica docente, y que, además, lo señala la investigación en nuestro país (ver Agudelo-Valderrama, 2002). Algunos de estos factores son: la influencia de textos guía; la presión de las pruebas Saber 11—puesto que en muchas ocasiones los estudiantes son entrenados para contestar ciertos tipos de preguntas incluidas en esta prueba, buscando que el colegio se destaque ante la sociedad por sus buenos puntajes en el área de matemáticas; las expectativas de muchos padres de familia que mantienen arraigados los enfoques tradicionales que experimentaron en su aprendizaje de las matemáticas. Lo anterior, sin embargo, no es excusa para no resaltar el factor primordial que representamos nosotros los profesores, quienes tenemos el poder de generar un cambio en las prácticas de enseñanza y, por ende, en la educación; tenemos que asumir este reto a pesar de saber que al alcanzar unas concepciones distintas a las de los demás miembros de la comunidad educativa nos encontraremos con barreras fuertes al cambio, al ir en contra de lo que culturalmente se conoce como las matemáticas escolares—que, según nuestra propia experiencia, en el caso el álgebra de grado octavo y noveno en muchas ocasiones es, “apréndase de memoria el álgebra de Baldor”.

Los factores mencionados anteriormente mantienen una enseñanza de las matemáticas y, para nuestro foco de interés, del álgebra, basada en enfoques tradicionalistas, donde el conocimiento matemático se concibe como algo absoluto, pre-definido y terminado, que el estudiante debe recibir o adquirir. En contraste con lo anterior, el conocimiento matemático se puede concebir como el resultado de construcciones conceptuales realizadas por quien aprende (Ausubel, 1976), construcciones que pueden surgir de la actividad de aula—que toma situaciones del contexto social y cultural de los estudiantes como foco de atención y exploración, a través de la interacción de los estudiantes con sus compañeros y el profesor. Ésta es nuestra interpretación de la visión *falibilista* del conocimiento matemático defendida por Ernest (1994). Creemos que apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico no se puede limitar a que el docente transmita un listado de contenidos preestablecidos de manera jerárquica, y que el estudiante deba memorizar y posteriormente deba replicar, sin encontrarle, en la mayoría de las ocasiones, significado ni sentido a dicho contenido.

Nosotros como docentes veíamos el álgebra como un conjunto pre-establecido y jerárquico de contenidos, donde el inicio del trabajo algebraico, en un primer momento, se centraba en presentarles a los estudiantes, expresiones simbólicas (esto es, expresiones con números, letras y signos de operación; como por ejemplo: 2a + 3b), recalcándoles que en una expresión algebraica hay parte numérica y parte literal; luego *entrenábamos* a los estudiantes para que realizaran operaciones con estas expresiones—lo que conllevaba a que los estudiantes memorizaran las reglas de procedimiento que les dábamos, desconociendo realmente qué significan las letras usadas en las expresiones simbólicas y para qué las estaban usando. Por ende, percibíamos el álgebra, simplemente, como un conjunto de contenidos estáticos, jerárquicos y sin significado; contenidos, en los que aun cuando se realizara la parte procedimental correctamente, no eran comprendidos por los estudiantes, y en algunas ocasiones, según Agudelo-Valderrama (2002) y González y Pedroza (1999), tampoco por algunos docentes. Debido a esto, muchos estudiantes no desarrollan su pensamiento algebraico; en muchas ocasiones sólo estudian para pasar un examen, en el cual básicamente deben replicar lo que nosotros como docentes les hemos transmitido. Creíamos que el estudiante había aprendido porque aplicaba las reglas de procedimiento que les habíamos enseñado. Como lo veremos en el Capítulo 2, esta forma de concebir lo que es enseñar y aprender matemáticas está en correspondencia con lo que Stenhouse (1991) denomina currículo por objetivos conductuales, donde simplemente se entrena al estudiante, en nuestro caso, en la aplicación de algoritmos procedimentales dados para desarrollar ejercicios y dar respuestas correctas. Gracias a los planteamientos de Stenhouse (1991), Agudelo-Valderrama (2000, 2002) y Mason (1999), hemos comprendido que nuestras prácticas de enseñanza de las matemáticas escolares llevan a nuestros estudiantes solamente al *entrenamiento*, tal como se explicó anteriormente. Como ya se dijo, estos patrones de enseñanza no apoyan el desarrollo de las potencialidades naturales de los estudiantes y van en contravía con los fines y propósitos del sistema educativo colombiano (Ley General de Educación, 1994; MEN, 1998, 2006) que hacen énfasis en un aprendizaje para el significado, la comprensión del mundo real y el desarrollo del pensamiento crítico en los estudiantes.

Con el desarrollo de este trabajo, hoy tenemos una mayor conciencia de la razón por la cual los estudiantes muestran disgusto y ansiedad frente a todo lo que se relacione con las matemáticas, especialmente con el álgebra, esto constituye una gran preocupación para nosotros, pues los estudiantes que no aprenden matemáticas tienden a aislarse, muestran actitudes negativas hacia las matemáticas, tienen mayor probabilidad de marginarse y formar parte de los grupos menos aventajados de la sociedad (Agudelo-Valderrama, 1996). Esta situación crea un problema de tipo cognitivo, el cual, con el paso del tiempo, se convierte en un problema de tipo afectivo de los estudiantes hacia las matemáticas en general—y de ahí el disgusto de muchas personas por las matemáticas.

Teniendo en cuenta el panorama anteriormente descrito—y apoyados en la comprensión alcanzada a través del estudio de la literatura relevante y la continua interacción y discusión con nuestra asesora sobre las prácticas de enseñanza ya descritas—vemos la necesidad de cambiar nuestros enfoques de trabajo en el aula; esto implica que el trabajo del aula debe iniciar con la exploración del pensamiento de los estudiantes, para poder involucrarnos en un proceso continuo de aprendizaje sobre su pensamiento a través de ciclos de indagación y reflexión permanentes. Nuestro proyecto se propuso involucrar a los estudiantes en situaciones o actividades donde se requiera explorar el cambio, es decir, en situaciones donde se involucre la variable de manera implícita, apoyando así el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes. En consecuencia, el propósito general de este proyecto fue*: Identificar la pertinencia de una innovación curricular cuyo objetivo es* *apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico en un grupo de estudiantes de grado 8, y el posible efecto de esta innovación en la motivación de los estudiantes por su aprendizaje.*

Justificación de este proyecto

El pensamiento algebraico es crucial en la comprensión de las matemáticas escolares; todo individuo lo necesita para desenvolverse en la vida cotidiana y como ciudadano crítico. Por lo anterior es necesario potencializar el desarrollo del pensamiento algebraico en la escuela, desde edades tempranas (Mason,1999). Según Mulligan y Mitchelmore (2009, p.33), "prácticamente toda la matemática se basa en patrones y estructuras", o como lo establece Steen (1990), las matemáticas son una ciencia que estudia todo tipo de patrones. Como lo mencionamos anteriormente, identificar la estructura matemática está en el centro del desarrollo de pensamiento algebraico y este trabajo debe empezar desde el contexto tradicionalmente llamado aritmético. Apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico y lograr una mejor comprensión de los procesos que se pueden dar en el aula, por razón del trabajo de este proyecto, aporta de manera significativa a nuestro aprendizaje profesional y nos apoya en el desarrollo de capacidades para poner en acción una enseñanza que privilegia la indagación en el aula; esto lo veremos en el Capítulo 3.

Para apoyar el desarrollo de pensamiento algebraico se hace necesario involucrar a los estudiantes en un aprendizaje significativo; Ausubel (1976) sostiene que éste tiene lugar cuando un individuo establece una relación entre los nuevos conocimientos con sus conocimientos previos, es decir, a partir de sus pre-saberes, sus potencialidades naturales, y el trabajo que hacen para superar sus concepciones erradas, los estudiantes dotan de significado los nuevos conocimientos que están construyendo; esto les permitirá crear o identificar conexiones entre el nuevo conocimiento y los conocimientos construidos en otros campos del saber y en su vida cotidiana. Si el estudiante logra crear estas conexiones, el aprendizaje será con significado y comprensión.

Estructura de este reporte

En el Capítulo 1 se describe la problemática y se justifica el desarrollo de este trabajo. Luego, en el Capítulo 2, se presentan las bases conceptuales que guiaron el desarrollo de este proyecto, el cual buscaba apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico en un grupo de estudiantes de grado octavo. El enfoque metodológico que surgió de nuestra nueva perspectiva sobre lo que es y puede ser el conocimiento matemático—su aprendizaje y enseñanza—y, por tanto, sobre el rol del profesor, se presenta en el Capítulo 3; en este capítulo también se presenta el diseño de investigación que, además de tomar como elemento básico, el diseño y puesta en acción de una la innovación curricular en un grupo de Grado 8, que se denominó Grupo A, también incluyó recolección de información paralela en otro grupo, que se denominó Grupo B, para poder comparar el progreso de los estudiantes en su desarrollo de pensamiento algebraico. En los capítulos 4 y 5 se presentan los resultados obtenidos de la puesta en acción de la innovación curricular. El Capítulo 6 presenta un análisis comparativo de los resultados del trabajo realizado en el Grupo A y los que se evidenciaron en la información recolectada en el Grupo B (grupo de control). Por último, en el Capítulo 7 se presentan conclusiones y reflexiones sobre los aspectos más relevantes, focos de atención y aprendizaje durante todo el desarrollo de nuestro trabajo de grado.

Capítulo 2: Nuestro marco referencial

Como vimos en el capítulo anterior, el problema descrito es un fenómeno complejo influenciado por muchos factores y aspectos específicos de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas escolares en lo que corresponde al inicio del trabajo algebraico. Esto nos llevó a involucrarnos en un proceso de indagación sistemática del pensamiento de los estudiantes a medida que se involucran en el desarrollo de actividades que pretenden promover el desarrollo del pensamiento algebraico. En este capítulo presentamos las perspectivas, constructos teóricos y conceptuales que alcanzamos a través del estudio de la literatura especializada, y que, de acuerdo al foco de atención y al propósito de este proyecto, consideramos deben estar incluidos como temas centrales en nuestro marco referencial, tal y como se muestra en la Figura No 2.1.

Como el propósito de este proyecto era apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico en un grupo de estudiantes de grado octavo, fue indispensable involucrarnos, clarificar y profundizar en lo que se refiere a pensar algebraicamente; lo que implicó desarrollar una comprensión más profunda de la naturaleza multifacética del concepto de variable. Además de reconocer las posibles dificultades y concepciones erradas de los estudiantes que han podido ser inducidas por el enfoque tradicional y mecanicista de la enseñanza del álgebra las actividades de la innovación curricular fueron diseñadas en contextos familiares y de fácil acceso para los estudiantes ya que nuestro propósito era apoyar el aprendizaje con significado y comprensión. Nuestro rol como docentes se centró en explorar el pensamiento de los estudiantes, para poder tomar decisiones acerca de las actividades en las que nos propusimos involucrarlos, y de esta manera poder apoyar dicho aprendizaje. Lo anterior implicó una re-conceptualización del rol del profesor como indagador del pensamiento de los estudiantes para tomar decisiones en el aula, es decir, el profesor como investigador Stenhouse (1991). Lo anterior muestra por qué los componentes de este marco referencial están conectados dinámicamente: todos con todos.

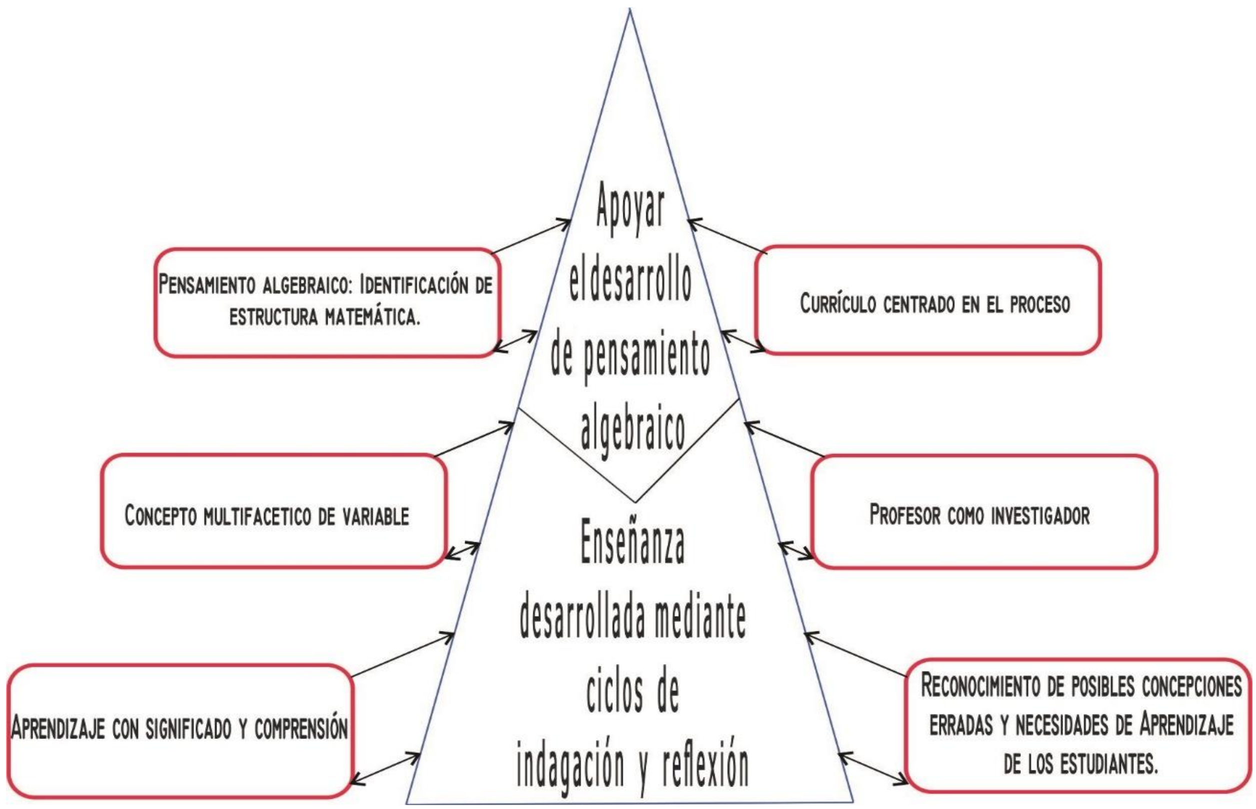


Figura No. 2.1 Nuestro marco referencial

2.1 Pensamiento Algebraico

Para describir lo que entendemos como pensamiento algebraico nos valemos de una situación problema simple la cual se inspiró en uno de los trabajos desarrollado por Agudelo-Valderrama (2000). Esta situación problema es de fácil acceso para cualquier estudiante de secundaria.

Situación Problema:

Pedro tiene un negocio donde vende papas por libras. Por cada libra que venda se gana $500, pero debe pagar $5.000 por el uso diario del puesto de ventas.

Pregunta 1. ¿Cuánto se puede ganar Pedro en un día, teniendo en cuenta que tiene que pagar por el uso del puesto de venta?

Pregunta 2. ¿Cuántas libras de papa debe vender Pedro en un día para obtener una ganancia de $20.000?

La importancia de la Pregunta 1 radica en que incita al estudiante a considerar el aspecto variable de la situación, logrando que los estudiantes puedan establecer que lo que se gana Pedro en un día de trabajo depende del número de libras de papa que pueda vender (Agudelo-Valderrama, 2000), identificando:

a) Que el valor de una libra de papa ($500) es un valor que se mantiene constante. Las cantidades que se mantienen constantes: el valor de la libra de papa, el valor que se paga por el arriendo en un día $5000.

b) Que el número de libras de papa vendidos en un día multiplicado por 500 corresponde a la cantidad de dinero recibido.

c) Y que el valor de la ganancia se obtiene de restar los $5000 del arriendo, a la cantidad de dinero recibido. La forma como se relacionan las cantidades presentes en esta situación problema se indica claramente en la siguiente expresión:

(Valor de una libra de papa × No de libras vendidas) – Valor del arriendo = Ganancia

Sin embargo, tenemos claro que para poder llegar a plantear esta estructura de manera general, los niños podrían considerar casos particulares para llegar a establecer la generalidad, el procedimiento para solucionar la Pregunta 1. Consideramos importante dedicar el espacio necesario para que los estudiantes presenten sus ideas y construcciones utilizando, en un primer momento, su lenguaje natural, tal como surgió el álgebra, según lo reportado por (Radford, 1996).

Ahora, para resolver la Pregunta 2 se puede partir de la estructura identificada en la Pregunta 1, la cual determina la ganancia de Pedro; pero en este caso la ganancia (*$20.000*) pasa de ser variable a ser una constante, es decir que se debe averiguar cuántas libras de papa vendió Pedro para conseguir la ganancia de $20.000, esto conlleva a que el número de libras de papa se convierte en una incógnita. La Pregunta 2 fue incluida en el diseño de la situación problema con el propósito de ayudar a dar sentido al uso de incógnita como una faceta de la variable, ya que haber explorado la situación en el contexto de la Pregunta 1, le proporcionó un espacio para ver que en esta pregunta tiene que usar la estructura de la expresión general que construyó para la Pregunta 1, pero que, en este caso, se trata de un número específico particular para el número de libras de papa vendida.

De lo anterior, un estudiante podría considerar, por ejemplo, que cada vez que venda 10 libras de papa la ganancia aumentará en $5000, estableciendo así una regularidad: cada vez que Pedro venda 10 libras de papa su ganancia aumentará en 5000 pesos, pero recordando que Pedro debe pagar por el uso del puesto de venta, se podrá llegar a la solución:
10 libras →0 pesos;   20 libras →5000 pesos;   50 libras→ 20000 pesos.

2.2 Identificación de estructura matemática

Ahora bien, si nos centramos en la forma como se solucionó el problema, podemos ver que la identificación de las relaciones que se puede establecer entre las cantidades involucradas en la situación problema, fueron comunicadas en la expresión:

(Valor de una libra de papa × No de libras vendidas) – Valor del arriendo = Ganancia

Esto quiere decir que identificar la forma como se relacionan las cantidades/las variables involucradas en una situación problema determinada constituye la identificación de la estructura matemática. La identificación de estructura matemática se convirtió, en este caso, en el proceso central de la construcción de una expresión general sobre el procedimiento a seguir para calcular la ganancia de Pedro. Esta expresión general puede ser vista de *cuatro* maneras diferentes. Siguiendo a Mason (1996):

- La primera manera, cuando la expresión denota un número específico, dependiendo del valor de la variable independiente.
- La segunda manera, cuando la expresión es vista como la descripción de la estructura de un número general; es decir, los números que resultan de la multiplicación de un número natural por 500 y a este producto se le ha restado 5000.
- La tercera manera, cuando la expresión representa el método/el procedimiento (Agudelo-Valderrama, 2000) para solucionar la Pregunta 1.

- Nosotros adicionamos una cuarta manera pues, como se resaltó, las tres anteriores maneras son planteadas por Mason (1996), y es cuando la expresión general, arriba presentada, hace evidente la relación de dependencia existente entre las dos variables: la relación funcional (Número de libras de papa vendidas y ganancia).

Como se evidenció anteriormente al resolver la situación problema se identificó la estructura matemática mediante las relaciones que se pudieron establecer, permitiendo construir la expresión: *500 × No de libras de papa – 5000 = ganancia*: “advertir la generalidad partiendo de lo particular”; pero recordemos que lograr este tipo de desarrollo en los estudiantes es una labor que puede demandar mucho tiempo; es por ello que el desarrollo del pensamiento algebraico debe comenzar a promoverse en los primeros grados de escolaridad y se debe seguir fomentando en cada clase de matemáticas.

Como podemos observar, la identificación de estructura matemática está en el centro del pensamiento algebraico y del pensamiento matemático en general, pues reconocemos que, tal como afirman Mulligan y Mitchelmore (1995), prácticamente toda la matemática se basa en la identificación de patrones y estructura matemática. De igual forma Mulligan y Mitchelmore identifica dos tipos de estructuras que se encuentran presentes en el desarrollo del pensamiento algebraico: estructura numérica y estructura espacial. Así mismo, Steen (1998) plantea que se pueden identificar algunos ejemplos de estructura matemática específica en lo numérico, en lo algorítmico, en la forma y en las razones, entre otras. A continuación, mostraremos dos ejemplos de identificación de estructura matemática tomada de Mason (1996) y Mulligan y Mitchelmore (1995).

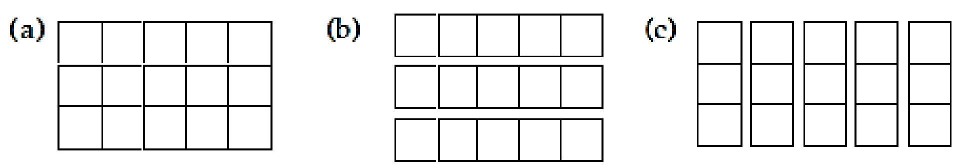
Primer ejemplo:

“Observemos la siguiente división: *9 dividido entre 4 igual a 2 y su residuo es 1*, ¿Qué otros números cumplen la condición que al dividirlos entre 4 su residuo sea 1?” se pueden identificar otros números que cumplen dicha condición, los cuales pueden ser:

$$\begin{array}{r|l} 9 & \underline{4} \\ 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 13 & \underline{4} \\ 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 17 & \underline{4} \\ 1 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 21 & \underline{4} \\ 1 & 5 \end{array}$$

Esta situación nos lleva a describir la estructura de un número en casos particulares; es decir la primera manera. En la segunda manera, se puede describir la estructura de un conjunto de números cuya relación es que al dividirse entre 4 su residuo es 1, y la tercer manera cuando se puede llegar a la regla de procedimiento la cual representa el patrón hallado de la siguiente forma: $4n + 1$ donde n es cualquier número natural y como cantidades invariantes o constantes tenemos *4 y 1*.

El segundo ejemplo de estructura espacial es tomado de Mulligan (2009). Consideremos el rectángulo que se muestra en la figura **(a)** y que se puede estructurar como se muestra en las figuras **(b)** y **(c)**:



En este rectángulo se puede establecer una estructura espacial cuando se identifican los componentes que lo constituyen y las relaciones que se pueden establecer entre dichos componentes, es decir que se reconoce estructura cuando en la figura **(a)** se identifican los cuadritos que los componen organizados en filas y las columnas. En el caso de la figura **(b)** se identifican 3 filas de 5 cuadros y de la figura **(c)** se identifican 5 columnas de 3 cuadros. Otra relación que se puede establecer es que el número de cuadrados de la figura **(a)** se puede representar como la iteración de unidades compuestas (filas), como se muestra en **(b)**; en esta estructura espacial se puede identificar una regularidad que varía de 5 en 5 y puede ser representada de manera general como un patrón ($5 \times n$ múltiplos de *5*), donde n representa cualquier número natural. De igual manera, en **(c)** se puede identificar una nueva regularidad e identificar un nuevo patrón.

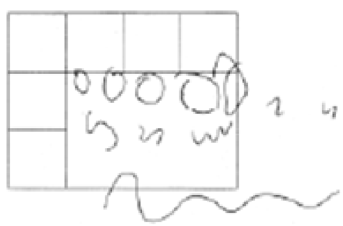
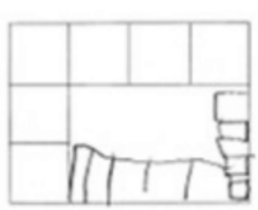
Los patrones pueden ser presentados en situaciones que están sujetas a contextos de variación y cambio, como en el problema de Pedro vendedor de papas, y los dos ejemplos anteriores. En estas situaciones se pueden encontrar, entre otras, estructuras tanto numéricas como espaciales, las cuales representan los objetos matemáticos que se estudian. Es decir, que un patrón expresa una relación estructural entre elementos de un determinado dominio generando una sucesión de signos (numéricos, gráficos, etc.) que se construyen siguiendo un regla o algoritmo, ya sea de repetición o recurrencia, como se mostró en el problema y en los ejemplos anteriores. Para Mason y colegas (2014), la identificación de patrones se puede alcanzar en diferentes momentos del pensamiento que ellos denominan: *ver, decir, registrar y probar validez*. Mediante la consideración de estos momentos se puede tratar de entender las producciones de los estudiantes e inducirlos a que analicen, reflexionen, conjeturen, asocien y establezcan relaciones matemáticas en objetos de estudio, con el propósito de apoyar el reconocimiento de secuencias y regularidades, encontrando lo general en situaciones que formulan particularidades; esto para que el estudiante logre expresar soluciones, inicialmente, en su lenguaje natural y, más adelante, incitarlos a que vean la necesidad de expresarlas de manera sincopada o simbólica. Adicional a esto, vemos que el desarrollo del pensamiento algebraico genera un cambio cognitivo en el estudiante, transformando sus constructos, enriqueciéndolos y, por ende, modificándolos y convirtiéndolos en comprensiones conceptuales, lo que genera la capacidad de resolver situaciones-problema/tareas matemáticas de mayor complejidad, y además brinda herramientas para que el estudiante interprete, cuestione, critique y evalúe el porqué de las cosas, lo cual probablemente contribuirá al desarrollo de su pensamiento crítico.

2.2.1 Niveles de pensamiento en la identificación de estructura matemática

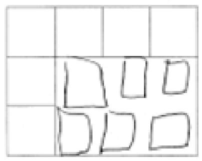
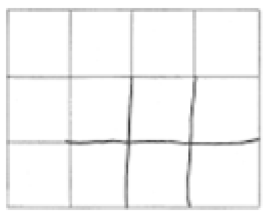
Mulligan y Mitchelmore (2009) han trabajo de manera continua en la investigación sobre el desarrollo del pensamiento de los niños cuando se les pide identificar estructura matemática; los niveles de pensamiento identificados por estos autores son relevantes para el desarrollo de este proyecto, ya que nuestro foco de atención es el desarrollo del pensamiento algebraico, apoyando la identificación de estructura matemática. Los siguientes son los 4 niveles de pensamiento que Mulligan y Michelmore (2009) establecen: *pre-estructural, emergente, estructura parcial y desarrollo estructural*. Estos niveles son descritos y ejemplificados en la Tabla No 2.1, a continuación, por medio de unas respuestas específicas dadas por los niños con los que se han desarrollado los estudios mencionados cuando se enfrentan a una situación problema específica—y una situación que nosotros establecimos, y que nos permite mostrar los 4 niveles de pensamiento que consideramos se pueden presentar en la identificación de estructura matemática en el contexto de este estudio.

Es relevante mencionar, en este punto, que para poder categorizar las respuestas y producciones matemáticas un estudiante en alguno de los niveles establecidos por Mulligan y colegas, de acuerdo a la forma como desarrolla una tarea matemática, creemos que es necesario *observar con detenimiento* la construcción del estudiante, pero también es necesario indagar en su pensamiento para tener una visión más amplia de lo que en realidad quiso hacer y está pensando.

Tabla No. 2.1 Niveles de pensamiento en la identificación de estructura matemática de niños de 7 años, según Mulligan y Mitchelmore (2009)—y ejemplo ilustrativo en el contexto del trabajo de este proyecto

Ejemplo de los niveles de pensamiento enunciados por Mulligan en el caso de una pregunta particular	**Niveles de pensamiento que consideramos en el contexto de nuestro proyecto**
Tarea/Situación dada: Termine de dibujar los cuadritos que hacen falta para cubrir totalmente el rectángulo.	*Tarea/Situación dada:* El profesor preguntó cómo haríamos para adicionar mentalmente 12 + 33. Juan pasó al tablero y escribió lo siguiente: **12+33= 10+2+30+3=10+30+2+3=40+5** a). Siguiendo los pasos que utilizó Juan en la adición anterior, adicione 22**+34** b). Explique con sus palabras cómo se pueden adicionar dos números mayores de 10 y menores de 100, teniendo en cuenta el procedimiento realizado por Juan.
Nivel pre-estructural:  Las representaciones carecen de cualquier evidencia de estructura numérica o espacial, la mayoría de los ejemplos muestran características idiosincrásicas.	**Nivel Pre-estructural**: **12 + 33 =** 20 + 20 +5 No identifica la descomposición de los sumandos en unidades y decenas.
Nivel emergente:  Identifica algunos elementos relevantes de la estructura dada, pero no los representa ni espacial ni numéricamente.	**Nivel emergente:** **12 + 33 =** 10 + 2 + 30 + 3 Identifica los elementos que hacen parte de la situación, descomponiendo los sumandos en unidades y decenas, pero no logra relacionarlos.

Continúa

Nivel estructural parcial:  Identifica los elementos más relevantes de la estructura dada, pero la representación necesita adecuarse.	**Nivel estructural parcial:** **12 + 33 =** 10 + 2 + 30 + 3 = 10 + 30 +2 + 3 = 40 + 5 Identifica la forma como se descomponen los sumandos, y los relaciona, pero no comunico la regla de procedimiento utilizada por Juan, pedida en la Pregunta b).
Nivel desarrollo estructural:  Identifica y representa correctamente los elementos numéricos y espaciales presentes en la situación dada.	**Nivel desarrollo estructural:** **12 + 33 =** 10 + 2 + 30 + 3 = 40 + 10 + 2 + 3 = 40 + 5 Identifica la descomposición de los sumandos en unidades y decenas usa la conmutatividad y asociatividad de la adición. Comunica la regla de procedimiento que utilizó Juan, evidenciando e identificando la estructura matemática.

2.3 Concepto multifacético de la variable

Continuando con la situación problema, planteada al inicio de este capítulo (el problema de Pedro, vendiendo papas), y enfatizando en el hecho de que la variable está en el corazón del pensamiento algebraico (Agudelo-Valderrama, 2005), ahora centramos la atención en las tres facetas de la variable que se encuentran inmersas en el problema y en su solución. La consideración de las tres facetas constituye una parte fundamental en el diseño de situaciones problema de enseñanza que pretenden promover la identificación de estructura matemática, ya que la meta es que apoyen al estudiante en su visualización de lo general por medio de lo particular, y lo particular por medio de lo general. En una situación problema las tres facetas de la variable que se identifican son: la variable como número generalizado, la variable como incógnita y la variable en relación funcional. Para poder identificar y comprender con mayor facilidad estas facetas presentamos una tabla donde se relaciona el número de libras de papa vendidas y la ganancia, teniendo en cuenta la condición del pago por el uso diario del puesto de venta:

Numero Libras de papa vendidas	**Ganancia**
10	0
20	5.000
30	10.000
40	15.000
50	20.000
500 × # libra de papa − 5.000 = Ganancia	

La tabla muestra una relación de dependencia entre dos magnitudes: número de libras de papa y la ganancia representada en pesos, aunque aquí las manejamos como cantidades (números). Se puede determinar que lo que se gana Pedro en un día es: $Ganancia = 500 \times \# \, libra \, de \, papa - 5.000$, en este caso podemos identificar una faceta de la variable en relación funcional, donde el valor de una variable depende del valor de la otra estableciendo una relación de dependencia. Llevándola al lenguaje formal, esta relación podría representarse como: $500x - 5000 = y$, donde x representa el número de libras de papa y y la ganancia. Pero antes de llegar a establecer la relación funcional se debió construir la expresión $500 \times \# \, libra \, de \, papa - 5.000$, en la que la variable es vista/comprendida como número generalizado; esto es, la variable puede representar cualquier número. Autores como Mason (1999), expresan que el número generalizado hace referencia a "cualquier número" o "para todo número"; en el leguaje formal se puede representar como: $500x - 5000$, donde x representa cualquier número de libras de papa.

Ahora, para abordar la segunda pregunta del problema se establece que el número de libras papa que debe vender Pedro es de 50 libras para que obtenga una ganancia de $20.000, aquí se ve la variable como una incógnita; se puede calcular el valor o los valores específicos teniendo en cuenta las restricciones que se presentan en el problema. Sin embargo, este valor específico, hallado por quien soluciona el problema fue inicialmente considerado inicialmente como un número indeterminado: "cualquier número, un número general". De igual forma, podemos decir que el pensamiento algebraico fue surgiendo a través del tiempo de una manera natural, usando lenguaje natural, hasta llegar al álgebra simbólica que hoy en día manejamos (Radford, 1996). El álgebra surgió por la necesidad de resolver problemas de la cotidianidad y posteriormente evolucionó por la necesidad de generalizar métodos para solucionar situaciones problema que se asimilaban en familias de problemas, llegando al álgebra simbólica, reconociendo la versatilidad de la noción de variable: como incógnita, como número generalizado y en relación funcional. Ahora bien, analizando lo anterior nos preguntamos: ¿Por qué no seguir esta misma ruta en el aula de clase para que los estudiantes conozcan qué es el álgebra y a la vez desarrollen su pensamiento algebraico de una manera natural como lo ilustra la historia? La investigación ha mostrado que comenzar el trabajo algebraico con la variable como incógnita no resulta ser muy efectivo, aunque en la historia haya surgido de esta manera; así mismo, la investigación nos ha permitido evidenciar que una manera más efectiva de comenzar el trabajo algebraico puede ser explorando la variación por medio de la identificación de regularidades patrones y generalizaciones, es decir, ver la variable como número generalizado, lo que está en sintonía con lo que se plantea en los lineamientos y estándares curriculares de matemáticas de nuestro país.

2.4 Aprendizaje con significado y comprensión

Los lineamientos y los estándares curriculares plantean que el aprendizaje de los estudiantes debe ser significativo y con comprensión, ¿pero ¿qué es el aprendizaje con significado y comprensión? A continuación mostraremos qué entendemos por aprendizaje con significado y comprensión tomando como referente la perspectiva planteada en un primer momento por Ausubel (1976), quien establece que el aprendizaje significativo es un proceso en el cual el individuo relaciona un concepto nuevo con la estructura cognitiva que ya posee, lo que podría entenderse como la relación entre los nuevos conocimientos con sus conocimientos previos, estos conocimientos previos reciben el nombre de ideas de anclaje (Ausubel, 1976). Las ideas de anclaje del individuo dotan de significado el nuevo conocimiento que se está construyendo, facilitando el entendimiento y el significado del mismo. El nuevo conocimiento construido, que ahora también es significativo, genera una transformación en las ideas o presaberes que poseía el estudiante, modificándolos para que más adelante le permitan construir conocimientos más complejos. Reforzando lo anterior, de acuerdo con el aprendizaje significativo el individuo asocia y relaciona nuevo conocimiento a los conocimientos previos, así como con situaciones que ha experimentado en la cotidianidad y su experiencia personal.

Ahora bien, si el conocimiento que el estudiante ha construido es significativo podrá entonces crear o identificar conexiones entre el nuevo conocimiento, así como con el conocimiento construido o adquirido en otros campos del saber y también crear conexiones con su realidad y contexto. Al crear estas conexiones el aprendizaje será con comprensión. Es decir, que para dar lugar al aprendizaje significativo y con comprensión tenemos que proponer actividades que potencien dicho aprendizaje, estas actividades tienen que estar acordes al contexto del estudiante generando conexiones entre su realidad circundante y el objeto a aprender, por lo tanto nos identificamos con las concepciones de Anat Zohar (como la citan Agudelo-Valderrama y Martínez, 2015), quien afirma que: "comprender significa crear conexiones entre conceptos, conexiones entre los conceptos con que cuenta quien conoce y las formalizaciones conceptuales que está estudiando en la escuela, y conexiones entre conceptos específicos y su contexto (p. 3)". Además, Zohar argumenta que los estudiantes que se empeñan en aprender con comprensión se mantienen en una búsqueda de conexiones entre el conocimiento y las experiencias con que cuentan, así como conexiones entre conceptos de otras disciplinas específicas y de otras áreas curriculares. Por consiguiente, el aprendizaje con comprensión dota a los estudiantes de habilidades que les permiten, entender, reflexionar, analizar, entre otros procesos mentales, con el fin de modificar sus pre saberes y, por ende, evolucionar en su pensamiento.

Para clarificar un poco más lo que entendemos por aprendizaje con significado y con comprensión presentamos el ejemplo de la situación problema planteada al principio de este capítulo (el problema de las papas). Esta situación resulta cercana al contexto del estudiante debido a que en todos los barrios encontramos puestos donde venden papas por libras o de otros productos agrícolas. Además, esta situación permite que el estudiante comience a plantear una posible solución acudiendo a sus conocimientos aritméticos y a sus conocimientos de la vida cotidiana, los cuales serían sus ideas de anclaje. Estas ideas de anclaje le permiten construir o identificar una forma de estructurar la situación problema, esto es, la estructura matemática que describa cuánto se gana Pedro en un día. Así mismo, el estudiante está creando conexiones entre la identificación de estructura matemática, situaciones de la vida cotidiana y la descripción de fenómenos. Además, el problema de las papas abre la puerta a la construcción del concepto multifacético de la variable, la identificación de regularidades y patrones.

Por último, podemos decir que lo que pretende el aprendizaje con significado y con comprensión es apoyar la estructura cognitiva del estudiante con el fin de introducir elementos que tengan sentido y significado para él, a la vez que aprende y desarrolla sus capacidades y potencialidades innatas, generando conexiones entre sus presaberes y con otro tipo de aprendizaje (como el aprendizaje mecánico, el aprendizaje memorístico, entre otros.) que puede ser considerado como aprendizaje momentáneo, ya que sólo es utilizado por el estudiante para pasar una evaluación.

En conclusión, consideramos que para generar un aprendizaje con significado y con comprensión el papel del docente debe ser el de indagador de las necesidades de aprendizaje de los estudiantes y, además, el de diseñador de actividades que respondan a estas necesidades de aprendizaje y que promuevan la construcción del conocimiento por parte del estudiante; por otra parte, el papel del estudiante es ser el constructor de su propio conocimiento. Estos roles, tanto el del profesor como el del estudiante responde a lo que en la siguiente sección describiremos como el currículo centrado en el proceso.

2.5 Currículo centrado en el proceso

Basados en los planteamientos de algunos autores como Stenhouse (1991), Elliot (2000), Agudelo-Valderrama (2000), Ernest (1997), presentamos nuestra idea sobre el **currículo**. Para iniciar, de acuerdo con Agudelo Valderrama (2000, p. 7)), el currículo “se define para una sociedad, un sistema educativo, una comunidad estudiantil específica, en un memento histórico determinado”. En el caso del currículo de matemáticas, éste se determina “a partir de un conjunto de presunciones sobre la naturaleza del conocimiento matemático”, su aprendizaje y su enseñanza, de donde surgen decisiones que serán materializadas en la acción. Dichas decisiones curriculares pueden tomarse a nivel macro, (ejemplo: Lineamiento Curriculares de Matemáticas, MEN, 1998), a nivel meso, (ejemplo: Plan curricular de matemáticas de un colegio) y a nivel micro, (ejemplo: Planeación de clase por parte del profesor). Además, Agudelo Valderrama resalta que las evidencias más relevantes del currículo están representadas en *las decisiones* que se toman para el aula y *las acciones que resultan de éstas*; tales decisiones y acciones se toman en relación con las siguientes preguntas: qué enseñar, cómo enseñar y por qué enseñar.

Ahora bien, si recordamos la problemática que describimos en el Capítulo 1 y el objetivo que nos planteamos en este proyecto, vemos la necesidad de ver el currículo desde una perspectiva que se denomina currículo centrado en el proceso. Esta perspectiva surge de los planteamientos presentados por Stenhouse (1991), en los cuales se establece como base central la indagación y reflexión permanente en torno al pensamiento de los estudiantes, por parte del docente, buscando identificar las necesidades de aprendizaje de los estudiantes con el objetivo de proponer actividades que les permita contribuir a superar dichas necesidades y a monitorear la forma como los estudiantes construyen su conocimiento. Se tiene como uno de sus objetivos principales el perfeccionamiento de las prácticas como docente, volviéndose un indagador de su propia práctica profesional.

La concepción de currículo centrado en el proceso demanda por parte del docente un cambio en la forma como tradicionalmente se ha concebido la naturaleza del conocimiento matemático. Para Ernest (1997), esta visión tradicionalista se denomina *absolutista* y se caracteriza porque el conocimiento matemático es visto como un conjunto de conocimientos absolutos, puros, que son ciertos, infalibles, universales y ya definidos—conocimientos que no son permeados por la historia ni por la cultura. Esta visión absolutista genera que el conocimiento matemático sea visto por la sociedad como algo rígido, rutinario, abstracto y por ende alejado del contexto del estudiante. Por otra parte, encontramos una visión de la naturaleza del conocimiento matemático de tipo *falibilista*. Ernest describe esta posición filosófica de la naturaleza del conocimiento matemático como un conocimiento que se *crea* desde las mismas prácticas sociales; es decir, que reconoce el carácter humano que está presente en las matemáticas, dejando de lado la visión absolutista y universal del conocimiento matemático, permitiendo así que aspectos como la historia, la cultura, el mundo, las necesidades de la sociedad, y de los estudiantes, puedan convertirse en contextos y focos de atención para la construcción de los conocimientos matemáticos que los estudiantes.

Como lo veníamos explicando el currículo centrado en el proceso demanda por parte del docente una mirada falibilista de la naturaleza del conocimiento matemático, mientras que la mirada absolutista de la naturaleza del conocimiento matemático responde al currículo tradicional, que Stenhouse (1991) denomina como currículo por objetivos. Para clarificar un poco más lo que entendemos por currículo centrando en el proceso, presentamos en la Tabla No. 2.2 unas caracterizaciones de lo que consideramos un currículo por objetivos y lo que consideramos es un currículo por procesos.

Tabla No. 2.2 Currículo por objetivos vs currículo centrado en el proceso

Currículo por Objetivos	Currículo centrado en el proceso
Qué se enseña: (Contenidos disciplinares) Definición de expresiones algebraicas; términos semejantes; operaciones expresiones simbólicas; fracciones algebraicas; 10 casos de factorización; ecuaciones lineales; problemas que se solucionan con ecuaciones lineales.	**Qué se enseña:** Exploración de situaciones problema para identificar y comunicar regularidad: identificación de propiedades en contextos numéricos y espaciales; patrones y situaciones funcionales; y el desarrollo de pensamiento algebraico, desarrollo de capacidades para comunicar, argumentar, crear conjeturas y defenderlas.(Todo esto buscando crear la construcción de expresiones algebraicas, operaciones básicas con expresiones algebraicas, lo cual requiere factorización, ecuaciones lineales y situaciones funcionales)
Cómo se enseña: El profesor presenta expresiones simbólicas, realiza exposiciones sobre formalizaciones y algoritmos procedimentales con dichas expresiones, luego platea una serie de ejercicios para que apliquen los procedimientos dados. Lo anterior enfatizando en la adquisición de fluidez en el desarrollo de ejercicios tipo. Para la evaluación del trabajo de los estudiantes, el profesor centra su atención en el alcance por, parte de ellos, de un conjunto de objetivos conductuales pre especificados, como, por ejemplo: "define qué es una expresión algebraica". Hace frecuentes quices durante el desarrollo de las clases para darles una calificación.	**Cómo se enseña:** El profesor diseña situaciones problema para abordar las necesidades de aprendizaje que previamente ha identificado en sus estudiantes. Dichas actividades deberán estar al alcance de los estudiantes para que puedan poner en juego sus conocimientos previos o ideas de anclaje, y de esta forma poder construir nuevos conocimientos; lo anterior se enmarca en una meta que el profesor se propone y que no es medible con objetivos conductuales. El profesor centra su atención en identificar como están pensando sus estudiantes y como han evolucionado teniendo en cuenta el trabajo en el que el profesor los ha involucrado dentro de la clase con el fin de monitorear el pensamiento de los estudiantes y así pueda tomar decisiones.
Por qué y para qué enseñar: Los estudiantes deben adquirir la capacidad de operar expresiones literales, las definiciones formales y los casos de factorización; ya que estos temas son prerrequisitos para los temas que se verán en el siguiente grado, cada tema se enseña porque es pre requisito para el siguiente tema.	**Por qué y para qué enseñar:** Se debe apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico, ya que este modo de pensar es poderosísimo y dota al estudiante de habilidades que le permiten entender y darle sentido al mundo que lo rodea. Es decir, que el desarrollo del pensamiento algebraico promueve pensamiento crítico en los estudiantes.

Como observamos en la tabla anterior, estas decisiones dependen de la concepción que tiene el profesor sobre la naturaleza del conocimiento matemático y cómo puede ser construido por los estudiantes, y de ahí se desprende su concepción sobre el rol del profesor y la del estudiante.

Tabla No. 2. 3 Rol del profesor y del estudiante currículo por objetivos Vs. Currículo centrado en el proceso

Rol del profesor: Trasmisor de contenidos y reglas procedimentales preestablecidas, buscando que los estudiantes cumplan unos objetivos conductuales previamente definidos.	**Rol del profesor:** Indagador y generador de ambientes de aprendizaje, que le permitirán explorar el pensamiento de los estudiantes, identificando sus necesidades de aprendizaje y fortalezas, convirtiéndose en un aprendiz y no en un experto que lo sabe todo (Stenhouse, 1991). También deberá monitorear cómo los estudiantes construyen sus ideas matemáticas mientras se involucran en las actividades que con anterioridad ha preparado; esto le brinda al profesor espacios para reflexión sobre los alcances de su enseñanza y del aprendizaje que han logrado construir los estudiantes y él mismo.
Rol del estudiante: Receptor pasivo que acumula contenidos de manera lineal y jerárquica, pues así es la forma como el docente las visualiza las matemáticas, como un todo absoluto.	**Rol del estudiante:** Descubridor y constructor de su propio conocimiento, cuando se involucra de manera activa en las actividades propuestas por el profesor como lo describe (Stenhouse, 1991).

Ahora, como lo evidenciamos, uno de los factores más relevantes y que diferencian a un currículo centrado en el proceso del currículo por objetivos es el papel del profesor. Es por ello que dedicamos un espacio para explicar el rol del profesor como investigador de su propia práctica docente.

2.6 El profesor como investigador

Consideramos, entonces que, un currículo centrado en el proceso requiere que nosotros los profesores no sólo seamos los implementadores de un currículo pre-establecido, sino que además diseñaremos, implementaremos y analizaremos éste para reformularlo, vinculándonos en un proceso continuo de mejoramiento como docentes que se va a ver reflejado en nuestra práctica de enseñanza. Esta visión de profesor responde a lo que autores como Stenhouse (1991), identifican como el profesor investigador, donde el profesor se vuelve investigador de su propia práctica docente; es decir, que debe hacer parte de la investigación, buscando generar conocimiento sobre su quehacer profesional; es fundamental que el docente esté inmerso en ciclos de indagación y reflexión donde se determine un plan, una acción, observación y reflexión, los resultados obtenidos de dicho ciclo le servirán como punto de partida para realizar un nuevo ciclo de indagación y reflexión. El docente investigador se debe hallar en una permanente reflexión, cuestionando la enseñanza, el aprendizaje, la pedagogía y todo lo que gire en torno al aula de clase, el sistema educativo y hasta la vida "Sólo el profesor puede cambiar el profesor" (Stenhouse, 1991). Consideramos que el propósito del docente investigador es formular constructos teóricos a través de los ciclos de indagación en el aula que le brinden una visión y proyección de otras prácticas educativas que vislumbren cambio y construcción de conocimiento.

Teniendo en cuenta que el currículo centrado en el proceso se enfoca en los procesos de enseñanza-aprendizaje que tienen lugar en su aula, en el pensamiento de los estudiantes, y que nuestro objetivo es apoyar el desarrollo de pensamiento algebraico de un grupo de estudiantes de grado octavo, encontramos que para poder visualizar los elementos centrales de nuestra secuencia de actividades de enseñanza era preciso, primero, identificar cuáles eran las necesidades de aprendizaje, dificultades y concepciones erradas que algunos investigadores han reportado con respecto al desarrollo del pensamiento algebraico— además de las potencialidades, dificultades, concepciones erradas y necesidades de aprendizaje de los dos grupos de estudiantes que se convirtieron en focos de atención y estudio para este proyecto.

2.7 Reconocimiento de posibles concepciones erradas y necesidades de aprendizaje de los estudiantes

Gracias al trabajo desarrollado por algunos investigadores que se han enfocado en estudiar la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la escuela, se han identificado algunas concepciones erradas y dificultades que obstaculizan el desarrollo del pensamiento algebraico por parte de los estudiantes, Para comenzar Kieran (1989) identifica una serie de dificultades y necesidades de aprendizaje que se generan desde lo que él ha denominado la transición del trabajo aritmético al trabajo con el álgebra, algunas de estas dificultades y necesidades de aprendizaje giran en torno a: el significado que los estudiantes tiene sobre el signo igual, la identificación y creación de relaciones entre elementos matemáticos, la generalización de procedimientos o métodos para solucionar problemas y el significado y uso de la variable. Otros investigadores como Kuchemann (1981), Booth (2010), Mason (2014) y, han mostrado que las interpretaciones correctas que los estudiantes le dan a las letras son un factor determinante para desarrollar su pensamiento algebraico, pero las interpretaciones erradas de las letras obstaculizan el desarrollo del pensamiento algebraico. Estas dificultades y necesidades de aprendizaje también han sido evidenciadas en nuestra experiencia como docentes de matemáticas.

2.7.1 Comprensión de conceptos aritméticos básicos

La aritmética tiene una fuerte relación con el álgebra, autores como Radford (1996), afirman que la aritmética junto con la geometría contribuyeron al surgimiento del álgebra, además la aritmética puede facilitar el desarrollo de algunos conceptos en el álgebra escolar, es decir que el trabajo aritmético es imprescindible para potencializar el desarrollo del pensamiento algebraico, esto es reafirmado por Mason (2010) quien muestra a la aritmética generalizada como una ruta hacia el álgebra, donde el estudiante que está familiarizado y maneja correctamente los algoritmos, propiedades y relaciones aritméticas contará con una mejor disposición para abordar el trabajo con el álgebra, puesto que el estudiante no lo verá como un tema nuevo sino como una continuidad del trabajo que ha venido desarrollando con anterioridad. Pero lo anterior no garantiza que los estudiantes que han tenido éxito aritmético lo tendrán también en el álgebra, esto debido a las concepciones erradas que los estudiantes pueden desarrollar en la transición de la aritmética al álgebra. Por lo anterior, podemos concluir que es indispensable que el estudiante tenga una compresión aritmética profunda para que no se le dificulte el trabajo algebraico y, por ende, se pueda potencialice se pensamiento algebraico.

2.7.2 Significado del signo igual

En las matemáticas el signo igual es empleado en diferentes ramas y contextos, por lo cual podemos observar que no existe una concepción única de este símbolo dados los múltiples campos de estudio de esta ciencia. Por lo tanto, el contexto en que se encuentra es indispensable para determinar el significado del signo (=), puesto que en ocasiones tenemos expresiones como $2 + 3$ o $10 - 5$ consideradas como expresiones distintas, no obstante, si se establece una relación de equivalencia por medio del signo (=), pasarían a ser expresiones equivalentes. (Freudenthal, 1994; Wilhelmi, Godino y Lacasta, en prensa).

Desde los primeros años en la escuela los estudiantes se encuentran con el signo igual haciendo uso de éste en diferentes contextos. Algunos autores como Molina, Booth, entre otros, identifican que algunos estudiantes siempre que encuentran el signo igual lo interpretan como: "Hay que hacer algo" para encontrar un resultado. Por lo general se considera que hay que operar las expresiones que están a lado izquierdo del igual y que la respuesta de esta expresión siempre debe estar situada al lado derecho del signo igual, esta es una concepción que se presta para interpretaciones equivocas y para múltiples confusiones que conducen a los estudiantes a cometer errores en la manipulación de expresiones. Un ejemplo claro es cuando tenemos expresiones como: $7 = 4 + 3$, algunos estudiantes podrían considerar que está al revés o que se encuentra mal escrita. Creemos que es importante que el estudiante reconozca que el signo igual se puede leer de izquierda a derecha y asimismo de derecha a izquierda, es decir, de una manera bidireccional; por lo tanto, cuando el estudiante logra reconocer e interpretar esta propiedad probablemente está desarrollando su pensamiento algebraico.

2.7.3 Significado que los estudiantes le dan a las letras

Como lo habíamos mencionado anteriormente algunos investigadores como Kuchemann 1981), Booth (2010), Mason, (2014), han mostrado que las interpretaciones correctas que los estudiantes le dan a las letras son un factor determinante para desarrollar su pensamiento algebraico, pero las interpretaciones erradas de las letras obstaculizan el desarrollo del pensamiento algebraico. Booth (2010) evidencia en sus investigaciones que el significado que el estudiante le da a las letras genera algunas dificultades en el aprendizaje del álgebra, ya que no entienden que las letras representan números, y por lo tanto, tienden a manejar la letra de varias formas; esto lo podemos observar a continuación, donde mostramos las diferentes clases de interpretaciones que Kuchemann (1981) identificó en un grupo de estudiantes:

1. *Ignoran la letra completamente* $3n + 4 = 7$
2. *Letra como objeto: Al hallar el perímetro de un triángulo equilátero cuyo lado mide e unidades, responden* eee.

3. *Saben que la letra representa números: piensan que hay reglas que determinan que números representan letras, y que además hay una correspondencia entre el orden de las letras del alfabeto y los números* $a = 1, b = 2, \ldots$
4. *Piensan que una letra siempre representa un solo valor particular que tienen que hallar* $x + 5 = 8$*, no comprenden que existe la posibilidad de que la letra represente número en general como* $a + b = b + a$ *o un rango específico de valores.*
5. *Tienen la concepción de que si son diferentes letras siempre representan diferentes números, consideran que* $a + b + c$ *nunca es igual a* $a + m + c$.
6. *Piensan que la letra representa números enteros y nunca pueden ser fracciones o decimales.*
7. *Pueden declarar que las letras representan números. Pero a pesar de ello le dan un manejo como objetos especialmente cuando simplifican expresiones como* $2a + 3b + 4a$*, ellos inventan reglas como sumar los números y luego escribir las letras* $9aba$*. (Mason, 2014)*

También destacamos el trabajo realizado por Booth (1984), donde nos muestra que uno de los factores determinantes para que los estudiantes no desarrollen su pensamiento algebraico y no le den sentido al álgebra son las concepciones erradas que los estudiantes han desarrollado cuando manejan la letra en el álgebra. Gracias a estos y otros autores hemos podido evidenciar y comprender de una manera más profunda los factores que inciden en la falta de comprensión que los estudiantes presentan con relación al trabajo algebraico.

De igual forma, autores como Mason (1985) nos reafirma la imagen que la mayoría de las personas tiene sobre el álgebra *"La experiencia algebraica es aburrida, difícil, sin sentido y confusa"* pero también nos muestra las raíces o las rutas que los docentes podemos tomar para enfrentar el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar. Las cuatro raíces que establece este autor son la aritmética generalizada, posibilidades y restricciones, reordenamiento manipulación y expresión de la generalidad.

Por otro lado, para nosotros la variable es el motor del álgebra escolar en grado octavo, ya que todas las temáticas que se plantean para este grado giran en torno a la variable, por esta razón es primordial que los docentes resaltemos la importancia que tiene la variable desde una perspectiva diferente al álgebra prefabricada que se ha venido impartiendo durante toda la vida. Para ello es necesario mostrar el carácter multifacético de la variable, lo cual puede ser evidenciado por medio de situaciones propias de las matemáticas y de otras ciencias, y, por qué no, de la vida cotidiana, esto permitirá apoyar el desarrollo de pensamiento algebraico.

Ahora bien, teniendo en cuenta el trabajo que hemos desarrollado hasta este momento, podemos afirmar que gran parte de las dificultades, concepciones erradas y necesidades de aprendizaje de los estudiantes, los cuales se describieron anteriormente, tienen que ver con la identificación y construcción de estructura matemática, es decir que si se comienza a trabajar y brindar la importancia que autores como Mason y Mulligan le dan a la identificación de estructura matemática, se podría responder a las necesidades de aprendizaje de los estudiantes y así mismo, apoyar el desarrollo de su pensamiento algebraico.

Capítulo 3. Enfoque metodológico

Como docentes en ejercicio realizamos una exploración sistemática de los procesos de razonamiento de los estudiantes cuando se involucran en la solución de situaciones problema que requieren identificar la estructura matemática subyacente; esto implicó que nosotros como profesores nos comprometiéramos de forma importante en el desarrollo de procesos de aprendizaje profesional, tal como lo resaltamos en el marco referencial. Estamos hablando del desarrollo de ciclos de *indagación* en el aula y reflexión; es decir, después de haber identificado el pensamiento matemático de los estudiantes, se tomaron decisiones sobre la enseñanza para llevarlas a la acción y, luego, reflexionar sobre ésta. Esta forma de abordar nuestro rol como profesores está en sintonía con el desarrollo de ciclos de *investigación acción* que, según lo planteado por Elliot (1991), son necesarios cuando pretendemos poner en acción un currículo que centra su atención en los procesos que se dan en el aula (Stenhouse, 1998; Hopkins, 1993).

Teniendo como plataforma de trabajo el enfoque de investigación acción, para poder establecer el aporte en el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes de la innovación curricular que construimos en este proyecto, nuestro diseño de investigación acomodó, de manera cualitativa, lo que en un paradigma positivista se llama un cuasi-experimento (Rodríguez, 2011)—cuasi-experimento porque se trabajó con dos grupos de estudiantes de grado octavo: uno en un colegio de Bogotá, en el que se puso en acción la innovación curricular diseñada, *Grupo A*; el otro en un colegio de Tunja, en el que, de manera paralela, se recolectó información a lo largo del año escolar 2017, *Grupo B* o grupo de control. Los grupos de estudiantes fueron identificados como grupos comparables, al tenerse en cuenta: i) el medio socioeconómico de las familias de los estudiantes (Estratos 1 y 2), las condiciones y características de los colegios en su planta física y recursos educativos, y los contenidos curriculares que habían sido objeto de enseñanza en el año escolar anterior (en Grado 7).

Hacemos énfasis en que este cuasi-experimento fue acomodado con un énfasis cualitativo, ya que nuestro propósito era explorar las ideas matemáticas de los estudiantes, por lo que, además de haber usado un cuestionario con preguntas abiertas y con situaciones problema de fácil acceso para los estudiantes, se realizaron entrevistas de seguimiento al cuestionario para tratar de entender mejor el pensamiento de los estudiantes, al contestar el cuestionario. Nuestro diseño de investigación se presenta en la Sección 3.1. Seguidamente, en la Sección 3.2, describimos los ciclos básicos de investigación acción que desarrollamos a lo largo del proceso de diseño, puesta en acción, y reflexión retroactiva de la innovación curricular. En la Sección 3.3 se describen las formas de recolección de información. Una descripción general de la innovación curricular diseñada y llevada la acción es el objeto de la Sección 3.4, y en la Sección 3.5 explicamos la forma como se llevó a cabo el proceso de análisis de la información recolectada. Finalmente, en la sección 3.6, se plantean algunos asuntos que tienen que ver con la ética y la autenticidad de la información recolectada.

3.1. Diseño de investigación

Como lo manifestamos anteriormente, para poder establecer el efecto de la innovación curricular en el aprendizaje de los estudiantes, nuestro diseño de investigación incluyó un cuasi-experimento; esto es—después de la exploración inicial de las ideas matemáticas de los estudiantes tanto del Grupo A como del Grupo B—mientras en el Grupo A se desarrollaba la innovación curricular, en el Grupo B se recolectaba información sobre el trabajo desarrollado en la clase de matemáticas. La exploración inicial de las ideas matemáticas de los estudiantes se llevó a cabo mediante la aplicación de un cuestionario, que se llamó *"Cuestionario inicial"* y una entrevista de seguimiento al cuestionario. Este cuestionario se volvió a aplicar—esta vez como "Cuestionario final" lo mismo que su entrevista de seguimiento—al final del desarrollo en el aula de la innovación curricular, en el Grupo A, y hacia finales del año escolar 2017 en el Grupo B o grupo de control.

En la Figura 3.1 se describen, de manera esquemática, las etapas y actividades que se llevaron a cabo en el proceso de desarrollo de este proyecto en el que. Mientras se ponía en acción la innovación curricular con un grupo de estudiantes del Grupo A, y se recolectaba información en un grupo comparable, el Grupo B, nosotros los profesores desarrollábamos ciclos de indagación en el aula y reflexión—ciclos esenciales en el enfoque de investigación acción.

.

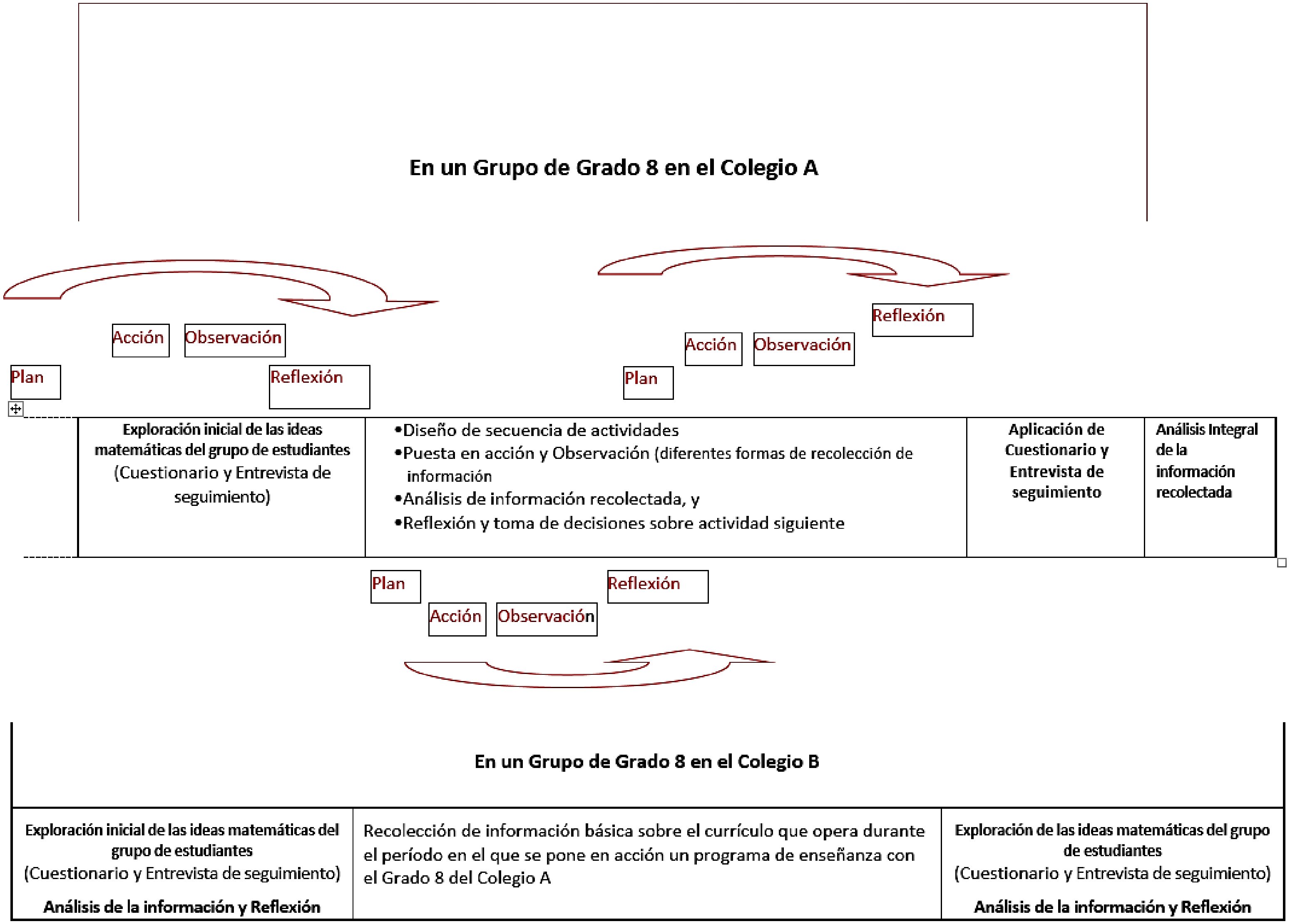


Figura No. 3.1 ***Diseño de investigación***

3.2 El enfoque de investigación acción

Según Hopkins (1993), el modelo original propuesto por Kurt Lewin en 1946 se compone de cuatro fases centrales: plan, acción, observación y reflexión. Hopkins resalta que este modelo surgió de la necesidad de involucrar grupos de personas en un trabajo colectivo para tratar de abordar problemas sociales; luego, este modelo fue adaptado y redefinido al contexto educativo por varios educadores. Entre ellos destacamos a Elliot (1991), quien propuso las fases, que de manera resumida describimos a continuación:

- Identificación de una idea general o problemática
- Reconocimiento y redefinición de la problemática
- Plan, acción y observación
- Reflexión y redefinición del plan

Elliot en el planteamiento de su modelo hace énfasis en la reflexión constante, a medida que se desarrollan las fases tanto de planeación como de acción, como lo intenta mostrar Ponte (1995) en su modelo, el cual está basado en los principios establecidos en el modelo de Elliot (1991).

El proceso de explorar el pensamiento de los estudiantes, antes de tomar decisiones sobre el proceso de enseñanza (PLANEAR), llevar a la ACCIÓN tales decisiones de enseñanza, y observar lo que sucede en el aula—esto es, en el pensamiento y producciones de los estudiantes (OBSERVAR: recolectar información)—y ANALIZAR la información recolectada para y tomar nuevas decisiones (REFLEXIONAR) tiene relación con los enfoques de trabajo en el aula que propone Stenhouse (1991), como “el currículo por procesos”. El profesor se convierte en un investigador de su propia práctica docente, tomando como punto de partida el conocimiento, las dificultades y fortalezas identificadas en sus estudiantes; diseña ambientes de aprendizaje que apoyen la construcción conceptual por parte de los estudiantes, y monitorea la forma como los estudiantes progresan o no en el desarrollo de comprensión, dándose espacio para reflexionar permanentemente sobre la efectividad de sus propuestas de enseñanza, el aprendizaje de sus estudiantes y la de él mismo, y buscando siempre su perfeccionamiento como docente.

En la Figura No. 3.2 se muestra el esquema que construimos y que guió nuestro trabajo a través del enfoque de investigación acción; dicho esquema tomó como referente el modelo planteado por Ponte (1995), en coherencia con el propósito de nuestro proyecto. A continuación, describimos, de manera breve, los ciclos de trabajo que desarrollamos y caracterizamos como ciclos de investigación acción.

Idea general de la problemática. Como lo subrayamos en el Capítulo 1, el problema que motivó el desarrollo de este proyecto fue la identificación de las dificultades que un gran porcentaje de nuestros estudiantes de Grado 8° presentan en el trabajo algebraico. De manera consistente con los hallazgos de Agudelo-Valderrama (2000), los estudiantes no le encuentran sentido a lo que hacen en álgebra, lo que genera en ellos actitudes negativas hacia las matemáticas en general. Esta situación ha persistido en nuestras aulas debido a los enfoques tradicionales y mecanicistas que no generan espacios de aprendizaje para que los estudiantes se involucren realmente en la construcción de significado y sentido para su aprendizaje de las matemáticas.

Exploración inicial de las ideas matemáticas de los estudiantes. Las ideas matemáticas de los estudiantes fueron exploradas inicialmente a través de un cuestionario con preguntas abiertas, y de entrevistas de seguimiento a dicho cuestionario. Las entrevistas fueron desarrolladas con un subgrupo de estudiantes, de cada uno de los dos grupos de Grado 8 (Grupo A (16) y Grupo B (28)), con los que se trabajó en este proyecto, y se hicieron con el propósito de comprender mejor el pensamiento de ellos al responder el cuestionario; dichas entrevistas fueron desarrolladas con dos estudiantes de cada uno de los niveles de pensamiento matemático/comprensión identificados, de acuerdo a sus respuestas en el cuestionario.

Reconocimiento del problema en el contexto donde se desarrolló nuestro proyecto. El análisis de la información recolectada a través del Cuestionario y la entrevista de seguimiento con el propósito de explorar las ideas matemáticas de los estudiantes, mostró que el 90% correspondiente a 40 estudiantes de los grupos A y B:

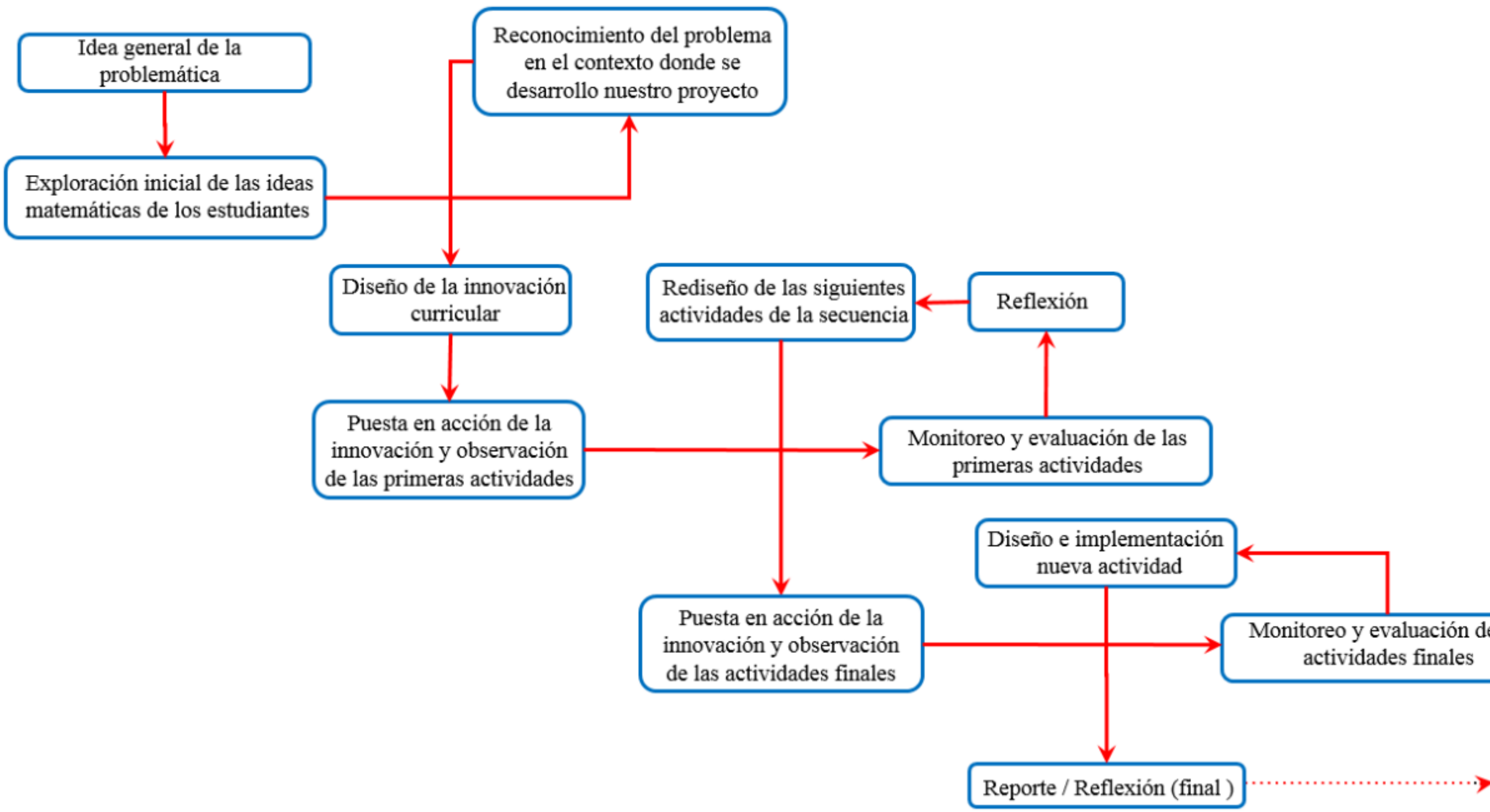


Figura No. 3.2 Ciclos de investigación-acción descritos mediante adaptación del modelo de Ponte (1995)

Realizan las operaciones indicadas, pero se evidencia que:

- El significado que le dan al signo igual está limitado al de un operador.
- Ausencia de reconocimiento del uso de símbolos (letras) para expresar/representar generalizaciones sobre relaciones entre cantidades que cambia/varían.
- Gran dificultad para comunicar su pensamiento (i.e., describir, de manera oral y escrita, las estrategias de trabajo que utilizan para solucionar tareas matemáticas.

Diseño de la innovación curricular. Teniendo en cuenta los resultados subrayados en el párrafo anterior, se tomaron decisiones de enseñanza. Esto es, se diseñó una secuencia de actividades—una innovación curricular—para tratar de abordar las necesidades de aprendizaje de los estudiantes, que fueron identificadas en cerca del 90% de los estudiantes de los grupos, se diseñaron 7 situaciones problema que tenían como objetivo apoyar procesos de construcción conceptual, de acuerdo con las dificultades detectadas, y aportar al desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes. Las primeras tres situaciones problema que se diseñaron partían de contextos aritméticos simples, teniendo en cuenta las potencialidades naturales de los estudiantes. Las otras cuatro situaciones problema se diseñaron a partir de contextos que son cercanos a los estudiantes, donde debían involucrarse en la identificación y comunicación de regularidades y patrones figurales.

Puesta en acción y observación de la innovación de la primera actividad. La Actividad I de la secuencia se desarrolló con el Grupo A (ver la Figura No. 4. 1 en el Capítulo siguiente) en dos sesiones de clase durante la tercera semana del mes de Julio de 2017. En estas sesiones de trabajo, los estudiantes pusieron en juego sus conocimientos, habilidades aritméticas e imaginación para resolver las tres situaciones problema que conforman la Actividad I. Se destacaron la participación activa, el trabajo colaborativo y el entusiasmo de la mayoría de los estudiantes, y las propuestas de conteo ofrecidas por los estudiantes al intentar resolver las situaciones problema presentadas. Los resultados y las conclusiones a las que llegaron gracias al desarrollo de esta actividad se presentan en el Capítulo 4.

Monitoreo y evaluación de las primeras actividades. Para llevar a cabo el monitoreo se utilizaron como instrumentos de recolección de información las hojas de trabajo de los estudiantes, la observación directa en cada una de las sesiones, la información recolectada en un diario de campo, audio grabaciones de las sesiones, la interacción que se generó en cada una de las sesiones entre los estudiantes y los profesores, entrevistas de seguimiento a un grupo de estudiantes y un cuestionario de satisfacción al terminar cada actividad.

Reflexión: A la luz de nuestro marco conceptual fueron analizados los constructos desarrollados por los estudiantes en las tres primeras situaciones de la Actividad I, y se identificó el potencial de este tipo de actividades donde los estudiantes usan sus ideas matemáticas de manera natural y espontánea, permitiéndoles construir su propio conocimiento, específicamente en la identificación y creación de estructura matemática.

Cabe resaltar que durante todo este proceso se mantuvo una reflexión constante sobre lo que acontecía en cada una de las sesiones de clase, y sobre los análisis iniciales de la información recolectada con cada uno de los instrumentos de recolección de información. Los resultados y las conclusiones a las que se llegaron, gracias al desarrollo de las actividades, se presentan en los Capítulos 4 y 5.

Rediseño de las siguientes actividades (actividades finales) de la secuencia. Teniendo en cuenta las construcciones que realizaron los estudiantes en la primera actividad y su posterior análisis, pudimos evidenciar las potencialidades que ellos tenían en torno a la identificación y comunicación de estructura matemática. Por esta razón decidimos centrar nuestra atención en la forma cómo los estudiantes utilizan la identificación de estructura matemática para reconocer y comunicar regularidades en situaciones problema.

Puesta en acción y observación de las actividades finales. Las Actividades II, III y IV de la secuencia de actividades se implementaron con el grupo de estudiantes del Colegio A (ver Figuras 5.1 y 5.2 en el Capítulo 5). Estas tres actividades se desarrollaron en cuatro sesiones en la última semana del mes de Julio de 2017. Lo que pretendimos en estas sesiones de trabajo era que los estudiantes identificaran estructura numérica y espacial por medio de situaciones contextualizadas; es decir, relacionadas con el entorno del estudiante, sobre la problemática ambiental que actualmente afecta nuestro planeta, y sobre cómo se puede identificar estructura en un entorno dinámico como Microsoft Excel. Como era de esperar se destacó la participación activa, las conjeturas y conclusiones a las que llegaron los estudiantes gracias al desarrollo de las actividades. (Ver capítulo 5)

Monitoreo y evaluación de las actividades finales. Se utilizaron los mismos instrumentos de recolección de información empleados en las tres primeras situaciones; dicha información fue extraída ya analizada; convirtiéndose en información primaria la cual nos sirvió como evidencia para mostrar la efectividad de nuestro trabajo. (Ver Apéndice No.1)

Diseño e implementación nueva actividad. Se diseñó e implementó una nueva actividad cuya idea central se basó, en las regularidades identificadas por un subgrupo de estudiantes cuando realizaban el trabajo de la Actividad I. Los resultados de esta actividad mostraron un proceso sustancial en la identificación de estructura matemática por parte de los estudiantes y estos resultados son objeto de una publicación que se consolidará en 2019.

Reporte y reflexión. Con base en la información obtenida en las etapas anteriores, se analizó dicha información con el fin generar un reporte en el cual se evidencien los resultados obtenidos de forma sistemática y clara, y así determinar si la secuencia de actividades apoyó o no apoyó el desarrollo del pensamiento algebraico, para en un futuro iniciar un nuevo ciclo de investigación acción.

3.3 Recolección de información

Para poder contar con información sobre los procesos de pensamiento de los estudiantes durante el desarrollo del trabajo del proyecto, se establecieron formas e instrumentos de recolección de información, los cuales se describen a continuación.

Instrumentos de recolección de información

Cuestionario inicial: Nuestro primer instrumento de recolección de información fue el cuestionario inicial que fue utilizado para la exploración tanto inicial como final del pensamiento matemático de los estudiantes al abordar tareas específicas que consideramos importantes en el trabajo matemático. El cuestionario se puede dividir en dos partes. La primera parte está compuesta por tres preguntas que requieren analizar y reconocer el significado del signo igual, la descomposición y manipulación de expresiones aritméticas y la propiedad conmutativa de la suma y de la multiplicación; estas tres actividades fueron tomadas de Agudelo-Valderrama (2000). La segunda parte está compuesta por tres preguntas que requieren identificar y comunicar regularidades y patrones en contextos numéricos y espaciales. Cabe resaltar que los resultados obtenidos de la aplicación de este cuestionario inicial sirvieron como bases de referencia para el diseño de la innovación curricular.

Entrevista de seguimiento al cuestionario: En la entrevista de seguimiento se formularon diferentes preguntas a los estudiantes, teniendo en cuenta lo que contestaron en cada pregunta del cuestionario inicial y lo que iban respondiendo a medida que se desarrollaba la entrevista. Esto con el propósito de tener un referente del pensamiento matemático de los estudiantes que hacían parte de cada uno de los dos grupos (colegio A y colegio B). Conviene resaltar que una vez sistematizados los resultados del cuestionario se identificaron grupos de estudiantes que mostraban diferentes niveles de comprensión. A partir de este hallazgo se seleccionó un niño y una niña como representantes de cada nivel, teniendo en cuenta cómo habían justificado las situaciones problema. Debemos resaltar que estas entrevistas de seguimiento sirvieron como bases de referencia para el diseño de la innovación curricular.
Los resultados obtenidos de la aplicación de este cuestionario inicial sirvieron como bases de referencia para el diseño de la innovación curricular.

Observación directa: Realizamos la observación en cada sesión llevando un registro sistemático en un diario de campo. Allí se tomó nota de los aspectos más relevantes que surgieron en cada actividad; centrando nuestra atención en las actitudes y en el pensamiento de los estudiantes cuando desarrollaban las actividades que hacen parte de la innovación curricular; luego, los registros de la observación se analizaron detenidamente y se determinaron cuáles de los eventos o aspectos allí consignados fueron los más relevantes en cada una de las sesiones, en relación con nuestro foco de atención. Por otro lado, el diario de campo fue la herramienta que nos permitió tomar decisiones respecto a si fue o no pertinente seguir con la secuencia como se tenía planteada o, si había lugar a alguna reformulación.

Audio grabaciones: Se audio grabó cada una de las sesiones que hicieron parte de la innovación curricular, así como las entrevistas de seguimiento a los cuestionarios. Luego, este audio grabaciones se transcribieron e hicieron parte de la información primaria, permitiéndonos monitorear el desarrollo del pensamiento de los estudiantes.

Hojas de trabajo: Se realizó un análisis sobre las construcciones (escritas en las hojas) que realizaron los estudiantes en la secuencia de actividades, con el fin de categorizarlos en niveles de pensamiento (Mulligan y colega, 2009) cuando desarrollaban cada actividad.

Cuestionario final: Después de haber implementado la secuencia de actividades con el grupo de estudiantes del colegio A, se desarrolló el mismo cuestionario inicial en los dos grupos Colegio A y Colegio B, esto con el propósito de medir el impacto generado por la innovación curricular en el grupo de estudiantes del Colegio A.

Entrevista de seguimiento al cuestionario final: Con respecto a la entrevista de salida, se tuvo en cuenta el análisis del diario de campo, las audio-grabaciones y las hojas de trabajo de los estudiantes del colegio A, esto con el fin de monitorear el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes y conocer aún más su pensamiento matemático después de haber implementado la innovación curricular.

Recolección de información sobre aspectos afectivos del grupo de estudiantes*:* Recolectamos información sobre el aspecto motivacional y afectivo del grupo de estudiantes donde se desarrolló la innovación por medio de una encuesta diseñada a propósito, que se aplicó seis (6) veces, esto es, al final de cada sesión de clase; también se cuenta con las evidencias del entusiasmo y comportamiento que se registraron en las audiograbaciones de cada clase, y en nuestros diarios de campo. Como se reporta en el Capítulo 6, la *asignatura preferida* por parte del grupo de estudiantes (Grupo A) fue Matemáticas, ya que en el colegio se acostumbra a realizar, cada periodo, una encuesta a los estudiantes en la que se recoge información sobre aspectos generales del estudiante, incluyendo la pregunta: *Cuál fue su materia preferida en este bimestre*.

3.4 Análisis de la información

El análisis de la información se realizó de manera continua y fluida a lo largo del proceso de trabajo descrito en nuestro diseño de investigación. Para analizar la información recolectada en la exploración de las ideas matemáticas de los estudiantes, inicialmente se digitalizaron las estrategias empleadas por los estudiantes fueron calcificadas a través de descriptores. Esos descriptores nos ayudaron a establecer niveles de comprensión. Se identificaron tres niveles de compresión en las respuestas ofrecidas por los estudiantes en el cuestionario; de estos niveles fueros seleccionados dos estudiantes representativos de cada nivel para realizar la entrevista de seguimiento al cuestionario. Esto se realizó con los estudiantes tanto del grupo A como del grupo B.

Durante el desarrollo de la secuencia de actividades se tomaba la información recolectada tanto en las hojas de trabajo de los estudiantes, el diario de campo, la observación directa, y las audio-grabaciones con el propósito de considerarla de manera integrada y analizarla con el fin de tomar decisiones sobre le trabajo necesario para continuar apoyando a los estudiantes en su desarrollo conceptual de acuerdo con el propósito de cada actividad.

Para el análisis de la información tomamos como referente los hallazgos encontrados a través de los instrumentos de recolección de información. Esta información se convirtió en la información primaria de nuestra investigación la cual sintetizamos y sometimos a un análisis profundo y exhaustivo con el fin de entender cómo piensan o como son los procesos de pensamiento de los estudiantes para así poder determinar si se apoyó o no el desarrollo del pensamiento algebraico.

La información brindada por cada estudiante se digitalizó, tabuló y examinó, convirtiéndose en información primaria (Ver Apéndice No. 1). Teniendo en cuenta las construcciones realizadas por los estudiantes en las actividades propuestas se crearon unos descriptores, los cuales ubicaban las producciones de los estudiantes en diferentes niveles de pensamiento de acuerdo a lo que realizaban y comunicaban. Los descriptores fueron analizados para determinar si podían ser ubicados dentro de alguno de los niveles de pensamiento estructural identificados por Mulligan y Mitchelmore (2009), descritos e ilustrados para el foco conceptual de este proyecto en el Capítulo

2, o si era necesario crear o acomodar descriptores y niveles de pensamiento específicos para este trabajo.

Al final buscamos comparar la información con el fin de encontrar conexiones entre los resultados obtenidos del grupo intervenido con el grupo control, con el propósito de conocer si se vio un cambio o cambios en el pensamiento algebraico de los estudiantes para finalmente sacar conclusiones y así tomar decisiones acerca de la enseñanza-aprendizaje.

3.5 La innovación curricular

Para la construcción de la secuencia de actividades, además del propósito el cual era apoyar el desarrollo de pensamiento algebraico de los estudiantes, teníamos dos referentes centrales: el marco referencial y las necesidades de aprendizaje que fueron identificadas durante la exploración inicial de sus ideas matemáticas.

Del marco referencial destacamos que un aprendizaje significativo y con comprensión tiene lugar cuando los estudiantes se involucran activamente en la exploración de situaciones problema cercanas a su realidad y de fácil acceso; lo que les permite abordarlas con las ideas y conocimientos que ya tienen; además de esto resaltamos el rol del profesor como diseñador de ambientes de aprendizaje, monitoreando el pensamiento de los estudiantes a medida que se desarrollan actividades en el aula. Las necesidades de aprendizaje de los estudiantes inicialmente identificados a través del cuestionario inicial y en la entrevista de seguimiento estuvieron representadas en:

- Creen que el signo igual se utiliza únicamente para expresar resultados entre operaciones y no para establecer relaciones entre cantidades.
- No reconocen la propiedad conmutativa de suma ni de la multiplicación.
- Tiene gran dificultad para comunicar su pensamiento y explicar los métodos que utilizan para solucionar preguntas dadas.

Planeación de la secuencia de las sesiones de trabajo

Como los resultados de la exploración del pensamiento inicial de los estudiantes tanto del grupo A como del Grupo B mostraron que los estudiantes tenían grandes deficiencias en su trabajo aritmético como se explicó en la sección anterior, decidimos que la primera parte de la secuencia de actividades centra la atención en identificar la propiedad conmutativa de la suma y de la multiplicación, y ese contexto el reconocimiento del signo igual como un signo que permite expresar equivalencias entre expresiones. Las tres actividades son presentadas en el Capítulo 4.

La segunda parte de la secuencia de actividades buscaba centrar la atención de los estudiantes en la identificación y comunicación de regularidades por medio de situaciones por medio de situaciones del mundo real. La primera situación fue tomada de Agudelo Valderrama (2000) y consistía en identificar patrones de embaldosado; la segunda la diseñamos con el propósito de abordar crear conciencia en los estudiantes acerca de la conservación del medio ambiente; la última situación fue creada utilizando hojas de cálculo de Excel con el propósito que los estudiantes experimenten el reconocimiento del uso del lenguaje Excel para representar cantidades que cambian de manera conectada.
Para la construcción de la secuencia de actividades identificamos dos pilares principales, los cuales son:

3.6. Autenticidad y ética de la investigación

La "autenticidad" como requerimiento que tiene que ver con la calidad de una investigación (Kadijevich, 2011; Varela, 2016), en el caso de este trabajo de indagación o investigación en el aula, nos lleva a preguntarnos si los resultados obtenidos y presentados en este reporte representan o describen el pensamiento de los estudiantes que participaron en el estudio. Al respecto, declaramos lo siguiente:

- La información fue recolectada sistemáticamente a través de instrumentos y formas de recolección de información, como el cuestionario, que fue construido con ítems tomados de estudios de autores expertos en el área específica que enfocamos. Para la entrevista de seguimiento al cuestionario, nos preparamos a través del análisis de las respuestas que los estudiantes dieron en el cuestionario, y la identificación de las preguntas y focos de atención que requerían mayor exploración de su pensamiento—todo ello bajo la continua asesoría de nuestra directora.

- Además, tanto el cuestionario como la entrevista de seguimiento—fueron objeto de pilotaje con un grupo de Grado 8 de un contexto escolar comparable al de los dos grupos de estudiantes (los Grupos A y B) con quienes se desarrolló el estudio principal, aquí reportado.

- Las actividades y las hojas de trabajo de los estudiantes, que fueron usadas durante el desarrollo de la secuencia de actividades, fueron diseñadas en completa dirección y discusión con nuestra asesora, y atendiendo a los referentes teóricos planteados en el Capítulo 2.

- Los resultados se establecieron a través de la contrastación de la información obtenida en diferentes momentos, y a través de las diferentes formas de recolección de información, descritas en la sección titulada "Recolección de información.

En cuanto a la ética de la investigación, resaltamos lo siguiente. Como se ha subrayado anteriormente, indagar en el aula, en el pensamiento de los estudiantes es parte integral y clave del trabajo que debe realizar el profesor para tomar decisiones sobre la enseñanza. En este proyecto, sin embargo, se realizó una indagación sistemática en las aulas de clase de grupos de estudiantes de Grado 8°, quienes, además de ser menores de edad, no eran nuestros estudiantes; por ello obtuvimos el consentimiento de parte de sus profesores, a través de documento escrito, después de haberles explicado de qué se trataba el proyecto, la recolección de información y las condiciones de confidencialidad de la información recolectada. La innovación curricular fue desarrollada con un grupo de estudiantes (Grupo A) que era totalmente desconocido para el profesor.

A través del desarrollo de este proyecto nos hicimos conscientes de la importancia de garantizar la confidencialidad de la información obtenida en un estudio como éste, y de hacerlo explícito ante los estudiantes, ya que de esta manera se muestra respeto a los estudiantes participantes. Los nombres de los estudiantes participantes fueron eliminados de los cuestionarios y reemplazados por códigos. Ni el nombre del colegio, ni los nombres de ninguno de los estudiantes participantes aparecen en las transcripciones de las entrevistas ni en los reportes de las demás actividades de recolección de información desarrolladas.

Las cartas de consentimiento, firmadas por los profesores de los dos grupos de Gado 8 de los que no éramos sus profesores se encuentran en el Apéndice No. 2

Capítulo 4. Apoyando el desarrollo de pensamiento algebraico en contextos numéricos

En este capítulo mostramos los resultados obtenidos después de haber desarrollado en el aula, del Grupo A de estudiantes, las tres situaciones que conforman la Actividad I, a la que nos referimos en el Capítulo 3, como “Primera parte” de nuestra innovación curricular. Recordemos que la secuencia de trabajo de este proyecto inició explorando el pensamiento matemático de los estudiantes por medio de un cuestionario y su respectiva entrevista de seguimiento. En la Sección 4.1, se muestran los resultados obtenidos de la exploración inicial del pensamiento de los estudiantes, a través de las tres primeras preguntas del cuestionario inicial—las cuales buscaban explorar el pensamiento de los estudiantes cuando abordan situaciones que requieren la identificación de estructura matemática en contextos numéricos— así como de su entrevista de seguimiento. En la Sección 4.2 presentamos y explicamos nuestra innovación curricular en lo que corresponde a su primera parte, junto con los resultados obtenidos de su puesta en acción. (Ver planeación Apéndice 9).

4.1 Resultados de la exploración inicial del pensamiento numérico de los estudiantes al abordar tareas matemáticas específicas

Iniciamos esta sección presentando las tres primeras preguntas del cuestionario inicial y sus propósitos.

Pregunta No. 1

$\boldsymbol{2 \times 6 = 4 \times 3}$ *y* $\boldsymbol{7 \times 4 = 26 + 2}$ *son ejemplos de igualdades.*

Escribe otros tres (3) ejemplos de igualdades como éstas.

La pregunta No. 1 tenía el propósito de evidenciar si los estudiantes percibían al igual como un símbolo que les permite expresar equivalencias entre expresiones aritméticas.

Pregunta 2:

Si alguna de las expresiones aritméticas listadas a continuación es equivalente o igual a la expresión: **765 – 497 + 879, señálela y explique por qué es equivalente.**

765 – 879 + 497

497 +765 – 879

765 + 497 – 879

879 – 497 + 765

La pregunta No. 2 tenía dos propósitos; el primero era determinar si los estudiantes reconocían expresiones aritméticas equivalentes, y el segundo, evidenciar qué nivel de comprensión tenían respecto a las operaciones (suma y resta) de números enteros.

Pregunta 3:

Algunas veces los cálculos mentales pueden hacerse más fácilmente si expresamos los números dados de otra forma; por ejemplo, al sumar los números 13 y 24, podemos hacerlo de la siguiente manera:

13 + 24 = 10 + 3 + 20 + 4 = 10 + 20 + 3 + 4 = 30 + 7 = 37.

Siguiendo la forma como se trabajó en el ejemplo anterior para sumar 13 y 24, adiciona los siguientes números:

31 + 16 = ...

32 + 49 =..

La pregunta No. 3 tenía como propósito evidenciar si los estudiantes reconocían que los sumandos se pueden descomponer y reagruparse en decenas y unidades, utilizando las propiedades conmutativa y asociativa de la suma.

Como se puede ver en la Tabla No. 4.1 los resultados que obtuvimos en las tres primeras preguntas y la información recolectada en la entrevista de seguimiento ha dicho cuestionario nos mostró que:

El 37% del Grupo A; es decir 6 estudiantes, identifican al igual como un signo que les permite representar equivalencias; además, las profundizaciones alcanzadas a través de la entrevista de seguimiento nos mostraron que 3 de los 6 estudiantes entrevistados creen que: “Si hay un signo igual significa que tengo encontrar un resultado”. (Ver entrevistas en el Apéndice No 4).

También pudimos observamos que el 80% del Grupo A; es decir 13 estudiantes en la pregunta No. 2, no seleccionaron ninguna de las opciones presentadas, o escogieron expresiones que no eran equivalentes a la dada; además, la mayoría de los cálculos que realizaron entre números enteros eran erróneos. En la entrevista de seguimiento se evidenció el desconocimiento por parte de los estudiantes del uso del signo igual para expresar equivalencia. Conjuntamente, para 5 de los 6 estudiantes entrevistados, la única forma de saber *si dos expresiones son equivalentes es desarrollando las operaciones;* En la entrevista también se evidenció que los estudiantes tienen dificultades para sumar números enteros, especialmente cuando intervienen negativos y positivos.

Por otro lado en la pregunta No. 3, el 69 % del Grupo A; es decir 11 estudiantes, no identificaron la descomposición de lo sumados en unidades y decenas para facilitar el cálculo mental, como se había planteado; 4 de los 6 estudiantes entrevistados evidenciaron ausencia de comprensión en cuanto a la forma como se había realizado la descomposición en el ejemplo dado; es decir que desconocían la estructura dada, y su único objetivo era llegar a un resultado descomponiendo los sumandos como a ellos les parecía; pero 2 de los estudiantes entrevistados—los que representaban el nivel superior identificado en la análisis de la información recolectada en el cuestionario—reconocieron la forma como estaban descompuesto los sumandos en el ejemplo, y nos explicaron su comprensión sobre la forma como se debían descomponer los sumandos para posteriormente encontrar el resultado.

A continuación, en la Tabla. No. 4.1 se muestra el consolidado de los resultados obtenidos de las preguntas 1, 2 y 3 del cuestionario inicial por el grupo de estudiantes donde se realizó la innovación curricular, el Grupo A; además, se incluyen datos generales obtenidos a través de la entrevista de seguimiento al cuestionario.

.

Tabla No. 4.1 Resultados de la exploración de las ideas matemáticas de los estudiantes en las preguntas 1, 2 y 3 del cuestionario inicial en y su entrevista de seguimiento al Grupo A (16 estudiantes)

Cuestionario inicial			Entrevista de seguimiento		
Propósito de las preguntas	**Descriptores de las respuestas de los estudiantes**	**Porcentaje**	**Propósito entrevista seguimiento**	**Descriptores**	**Número de estudiantes**
Pregunta No. 1: Explorar el pensamiento de los estudiantes entorno a las concepciones que tiene del uso del signo igual.	**D1:** No responde o escribe expresiones que no son equivalentes.	**37%**	Continuar explorando el pensamiento de los estudiantes para entender por qué contestaron las preguntas del cuestionario como lo hicieron	**D1:** Confirman que el signo igual solo es utilizado para dar respuestas.	**3 de 6**
	D2: Imita o hace una réplica de las expresiones dadas.	**13%**		**D2:** Explica que lo que hace se basa en repetir lo que estaba en el ejemplo dado	**1 de 6**
	D3: Plantea ejemplos de equivalencia diferentes a los presentados en la pregunta. Ejemplo: 20 – 10 = 5 × 2	**50%**		**D3:** Justifican que dos expresiones pueden ser equivalentes si los números tiene el mismo signo pero están en diferente lugar.	**2 de 6**
Pregunta No. 2: Explorar el pensamiento de los estudiantes entorno al reconocimiento de propiedades conmutativa de la suma.	**D1:** No responde o escoge una expresión errada.	**80%**	Indagar en el pensamiento de los estudiantes entorno a su comprensión sobre cómo se identifican expresiones equivalentes	**D1:** Indican que toca hacer las operaciones de los dos lados y ya pero que ninguna daba el resultado de la dada.	**4 de 6**
	D2: Realiza todas las operaciones para expresar la equivalencia	**6%**		**D2:** Manifiestan que se debe operar todos los números, si da el mismo resultado son equivalentes, además indican que es la única forma para saberlo ya que las operaciones toca hacerlas.	**1 de 6**
	D3: Identifica la expresión equivalente sin hacer las operaciones. Ejemplo: “*la expresión d es equivalente porque tiene los mismos números en diferente orden y con los mismos signos”*	**14%**		**D3:** Dice que pueden ser equivalentes si están los mismos números, pero que tiene que tener el mismo signo y que no importa si están en diferente orden.	**1 de 6**
Pregunta No. 3: Explorar el pensamiento de los estudiantes en cuanto al reconocimiento de la conmutatividad y asociatividad de la suma	**D1:** No responde o descompone los números de manera inadecuada, llegando a un resultado erróneo	**19%**	Indagar en el pensamiento de los estudiantes entorno a su comprensión sobre cómo identifica estructura en una situación determinada.	**D1:** Indican que la forma como se descompone puede ser cualquiera lo importante es realizar las sumas y llegar a un resultado, porque si hay operaciones toca hacerlas.	**2 de 6**
	D2: Encuentra el resultado sin realizar la descomposición requerida o realiza la descomposición, pero el resultado es erróneo	**50%**		**D2:** Manifestaron que remplazaran los números como les pareció, ya que lo importante era llegar al resultado correcto de la suma.	**3 de 6**
	D3: Realiza las descomposiciones de forma adecuada y encuentra el resultado. Ejemplo: 31+16=30+1+10+6=30+10+1+6=40+7=47	**31%**		**D3:** Dice que lo importante es entender el ejemplo para realizar la actividad y que nos quede bien, dividir en unidades y decenas, unirlas y sumarlas	**1 de 6**

En conclusión, ¿Qué aprendimos de la exploración inicial del pensamiento de los estudiantes en torno a las preguntas 1, 2 y 3 del cuestionario inicial? El común denominador de los resultados obtenidos mostró que el pensamiento aritmético de la mayoría de los estudiantes está arraigado en la realización de cálculos numéricos; ven el signo igual como un símbolo que pide dar una respuesta. Por otro lado, se evidenció que el 70% de los estudiantes del Grupo A presentan dificultad para reconocer cuándo dos expresiones aritméticas son equivalentes ya que, para ellos, la única forma de verificarlo es realizando las operaciones indicadas, desconociendo propiedades básicas de la suma y de la multiplicación (conmutativa, asociativa). Por esta razón, en discusión con nuestra asesora se decidió que en un primer momento era necesario involucrar a los estudiantes en actividades que les ayudaran a ampliar el significado del signo igual en el contexto de expresiones aritméticas que ellos mismos crearan o plantearan, y al reconocimiento de la propiedad conmutativa de la suma y de la multiplicación.

4.2 Desarrollo en el aula de la primera parte de la innovación curricular (La Actividad I)

Como ya se dijo, la primera parte de la innovación curricular (La Actividad I) estaba compuesta de tres situaciones donde se pedía contar las unidades dadas en las situaciones planteadas. El propósito de esta actividad era explorar las formas de conteo que proponían los estudiantes para luego llevarlos a la realización de los registros del planteo de las operaciones (adiciones y/ multiplicaciones) que hicieron para el conteo. En la Figura No. 4.1 se presentan, las tres situaciones que conforman la Actividad I. Cada una de las situaciones dadas, constituía una Hoja de Trabajo para cada estudiante, ya que estas hojas representaban un instrumento de recolección de información. Lo mismo sucedió con las actividades y Hojas de Trabajo de los estudiantes que se referencian en el Capítulo 5.

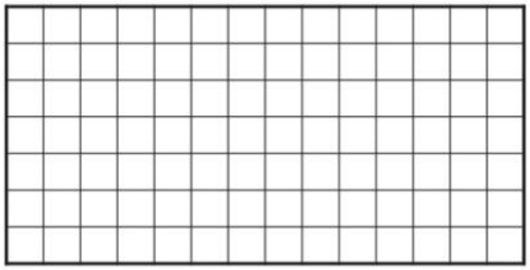
ACTIVIDAD I

SITUACIÓN NÚMERO 1

a)¿Cuántos cuadritos hay en el rectángulo que se presenta a continuación?

b) Explícanos cómo contaste para dar respuesta al punto anterior.

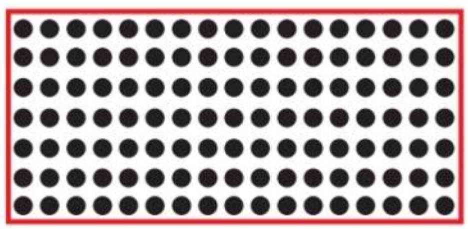
c)¿Podrías contar los cuadritos de otra u otras maneras ? Explícanos cómo lo harías.



SITUACIÓN NÚMERO 2

a)¿Cuántos puntos hay en el rectángulo?¿Cómo contaste? Explícanos

b)¿Podrías contar los puntos de una manera diferente a como ya los contaste?
¿Cómo lo harías, explícanos?



SITUACIÓN NÚMERO 3

En la siguiente figura se muestra la forma como Juan guarda sus canicas en una caja de forma rectangular. Él y sus amigos juegan con ellas los fines de semana. Hoy decidió solamente jugar con las canicas de color azul.

a)¿Con cuántas canicas azules juega Juan?

b)¿Cómo contaste las canicas con las que juega Juan?

c)¿Existen otras maneras de contar las canicas con las que juega Juan?
Explícanos cómo lo harías

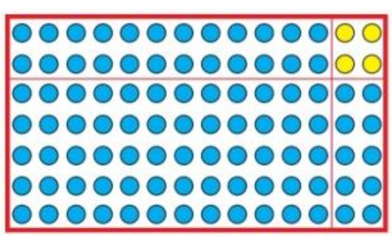


Figura No 4.1 Actividad I

4.2.1 La estructura planeada para las sesiones de clase

Para el desarrollo de las clases en la que los estudiantes del Grupo A tienen que trabajar en actividades como la presentamos en la Figura No. 4.1 visualizamos tres momentos:

Momento 1. Se entregará a cada estudiante una Hoja de Trabajo (donde está impresa la Situación a enfocar; ver la Figura No. 4.1). Se les pedirá a los estudiantes que lean mentalmente las preguntas que hacen parte de la actividad, luego se les preguntará: ¿Qué entendieron de la lectura realizada?; ¿Qué se pide hacer en cada una de las situaciones? Si durante el desarrollo de la actividad, los estudiantes tienen preguntas o dudas con respecto a lo que están haciendo, nosotros estaremos atentos a responderlas. Inicialmente, los estudiantes contestarán de manera individual las preguntas de cada una de las situaciones; mientras se desarrolla este proceso, se observará la manera como los estudiantes contestan las preguntas e interactuaremos de manera directa con ellos.

Momento 2. Cuando todos los estudiantes terminen de contestar las preguntas, les pediremos que se organicen en parejas para que discutan las construcciones y resultados que cada uno obtuvo al contestar las preguntas que hacen parte de cada una de las situaciones.

Momento 3. Se realizará la socialización general, donde los estudiantes expondrán las estrategias empleadas en cada situación teniendo en cuenta la realimentación hecha por nosotros y la interacción de los demás estudiantes.

En consecuencia, durante el desarrollo de la clase, nuestra atención como profesores estuvo en tratar de identificar aspectos como:

- Qué entienden los estudiantes cuando se les hace una pregunta.
- En qué centran su atención cuando trabajan para contestar las preguntas.
- Cómo comunican lo que piensan y lo que hacen.

4.2.2 Ampliando el significado del signo igual e identificando propiedades básicas de la suma y de la multiplicación

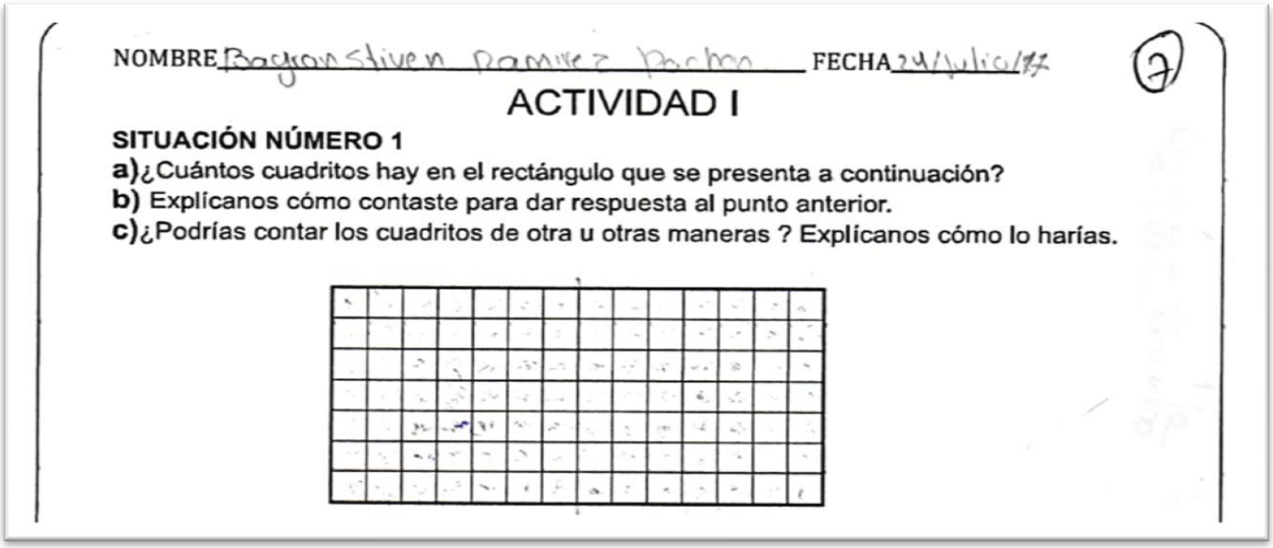
Durante el desarrollo de Actividad I, en el trabajo de los Momentos 1 y 2 los profesores nos concentramos en identificar oportunidades de interacción con los estudiantes para motivarlos a que centraran la atención en la representación de las operaciones involucradas en sus formas de conteo; esto con la intención de preparar el terreno para, más adelante, empezar a considerar y discutir propiedades básicas de las operaciones planteadas por los estudiantes.

A continuación, describimos las estrategias que los estudiantes utilizaron al enfrentarse a cada una de las tres situaciones que hacen parte de la Actividad I, tanto en el Momento 1 como en el Momento 2 de la clase; además determinamos el porcentaje de estudiantes que empleó dicha estrategia. Posteriormente, presentamos y analizamos los aspectos relevantes que surgieron en la socialización, es decir en el Momento 3. Por último, las construcciones realizadas por los estudiantes serán contrastadas y analizadas con los niveles de pensamiento identificados por Mulligan y Mitchelmore (2009).

4.2.2.1 Estrategias de conteo utilizadas por los estudiantes en los Momentos 1 y 2 de la clase

En la situación No. 1

Contaron cuadro a cuadro: En el desarrollo de la primara situación evidenciamos que 6 estudiantes es decir el 37% utilizaron esa estrategia. Vimos a los estudiantes contar uno a uno, lo cual quedó plasmado en las hojas de trabajo resultando llenas de puntos o marcas; es aquí donde intervenimos y les preguntamos si había formas más efectivas de contar; esta pregunta generó en los grupos nuevas ideas para abordar la situación.


NOMBRE Bayron Stiven Ramirez Pachon FECHA 24/julio/17

ACTIVIDAD I

SITUACIÓN NÚMERO 1

a)¿Cuántos cuadritos hay en el rectángulo que se presenta a continuación?

b) Explícanos cómo contaste para dar respuesta al punto anterior.

c)¿Podrías contar los cuadritos de otra u otras maneras ? Explícanos cómo lo harías.

Figura No 4.2 Conteo cuadro a cuadro- Actividad 1 -Situación 1

Contaron el número de cuadros por filas o por columnas y después sumaron el total de filas o columnas: Evidenciamos que el 62% del grupo A, es decir 10 estudiantes, tomaron como unidad de medida el número de cuadros por fila o el número de cuadros por columna, para después sumar: 7 veces 14, o 14 veces 7, como se evidencia a continuación (Ver el Apéndice No. 5)

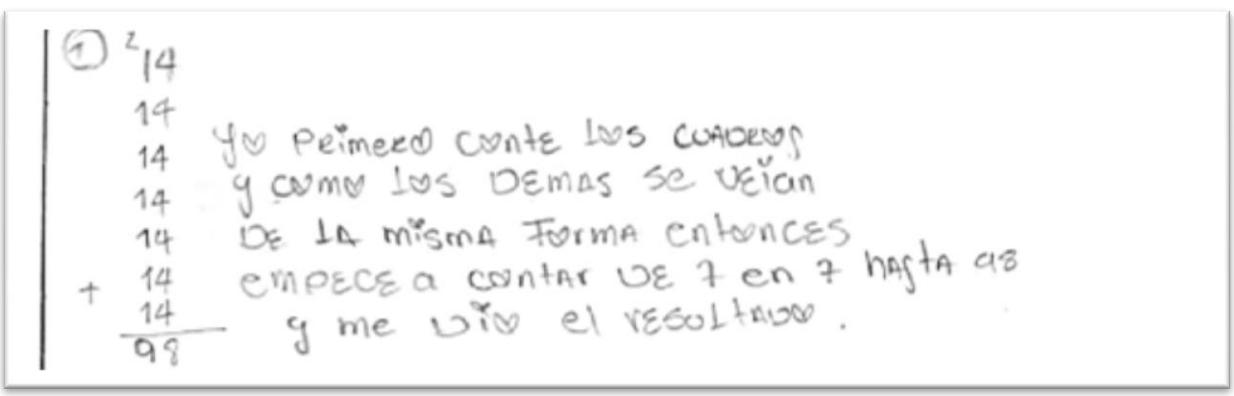


Figura No 4.3 Conteo por unidades compuestas -Actividad I - Situación 1

Transcripción del texto Figura No. 4.3: yo primero conté los cuadrados y como los demás se veían de la misma forma entonces empecé a contar de 7 en 7 hasta 98 y me dío el resultado**.**

Multiplicaron: 4 estudiantes del Grupo A; es decir, el 25% optaron por multiplicar el número de cuadros de la base por el número de cuadros de la altura para encontrar el número total de cuadros contenidos en el rectángulo, como se muestra a continuación. Un estudiante manifestó que observó el número de filas y el número de columnas y las multiplicó.

Figura No 4.4 Conteo por multiplicación - Actividad I - Situación 1

Transcripción del texto Figura No. 4.4: observe las columnas y las filas y multiplique 14 ×7 para saber cuántos cuadros ahí**.**

Dividieron el rectángulo en Partes (Por mitad, en 4 zonas etc.): 10 estudiantes del Grupo A; es decir el 62 %, optaron por dividir el rectángulo en partes, uno de los estudiantes dividió el rectángulo en 4 partes, obteniendo cuatro zonas con dos tamaños diferentes, para luego contar el número de cuadros y hacer la suma, como se evidencia a continuación.

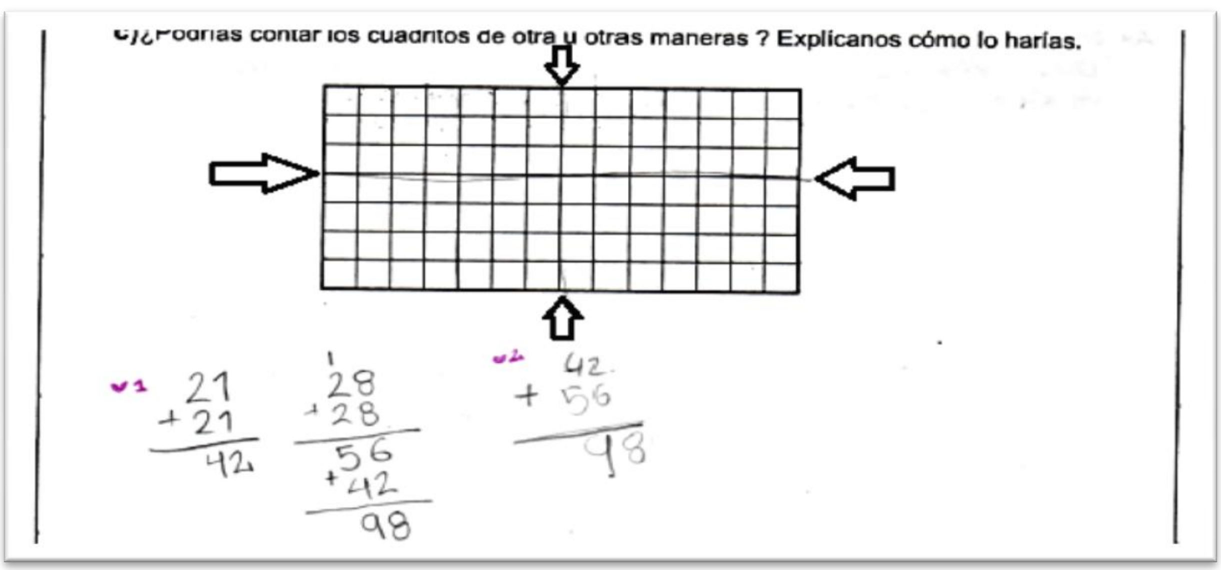


Figura No 4.5 División en zonas para contar - Actividad I - Situación 1

Contaron los cuadros formando una L. 4 estudiantes del Grupo A; es decir el 25% hicieron conteos formando una L; cuando contaron todos los cuadros que cubrían el rectángulo se dieron cuenta que cada vez que hacían una L, se iba descontando el número de cuadritos de 2 en 2.

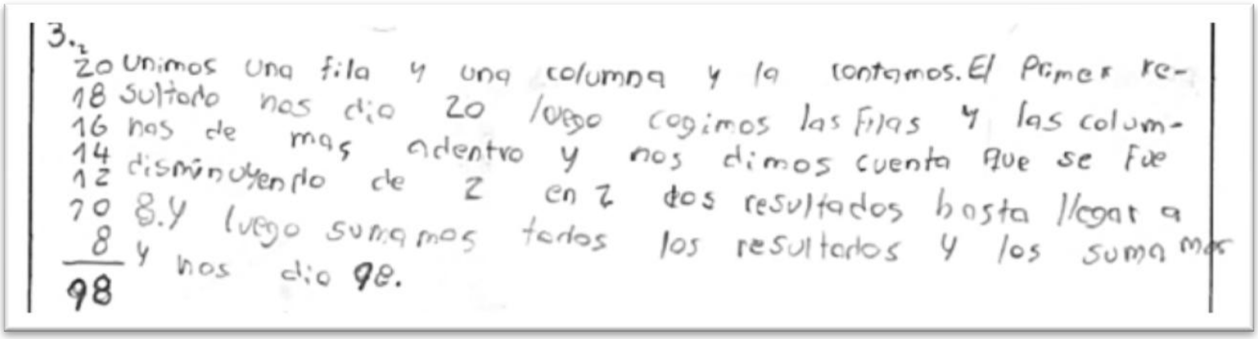


Figura No 4.6 Formas alternativas de conteo - Actividad I - Situación 1

Transcripción del texto de la Figura No. 4.6: Unimos una fila y una columna y contamos. El primer resultado nos dio 20 luego cogimos las filas y las columnas de más adentro y nos dimos cuenta que se fue disminuyendo de 2 en 2 los resultados hasta llegar a 8 y luego sumamos todos los resultados y los sumamos nos dio 98**.**

En la situación No. 2

Contaron los puntos de la fila, luego los de la columna y los multiplicaron: Evidenciamos que el 69% del Grupo A, es decir 11 estudiantes utilizaron esta estrategia de multiplicar número de puntos en la fila por el número de puntos en la columna para encontrar el número de puntos presentes en el triángulo.

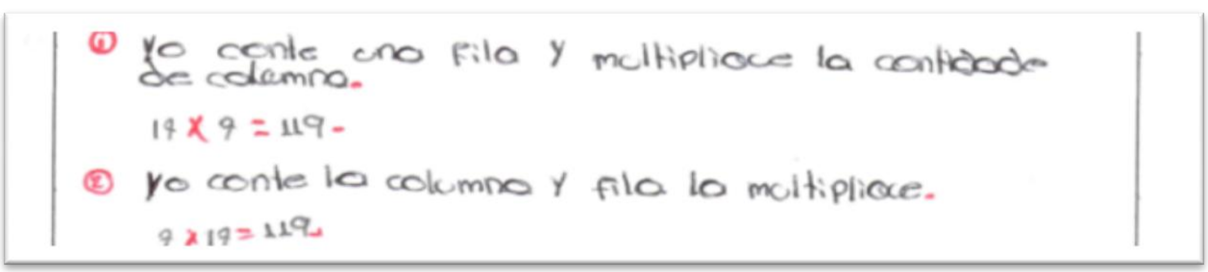


Figura No 4.7 Conteo de puntos fila y columna - Actividad I - situación 2

Transcripción del texto Figura No. 4.7:1. Yo multiplique una fila y multiplique la cantidad de columnas 19 × 9 = 119.

2. yo conté la columna y fila la multipliqué 9 × 19 = 119

En este punto de la actividad evidenciamos que los estudiantes ya estaban reconociendo la propiedad conmutativa de la multiplicación, puesto que en la interacción nos manifestaron que la multiplicación de fila por columna o columna por fila daba el mismo resultado.

Dividieron el rectángulo pasando líneas, ya sean horizontales o verticales, encontrando áreas más pequeñas dentro del rectángulo y después las sumaron: 4 estudiantes del Grupo A; es decir el 25% dividieron el rectángulo empleando líneas horizontales y verticales, encontrando el número de puntos por zonas para después sumarlos y obtener el total de puntos del rectángulo (Ver información primaria Apéndice No. 1)

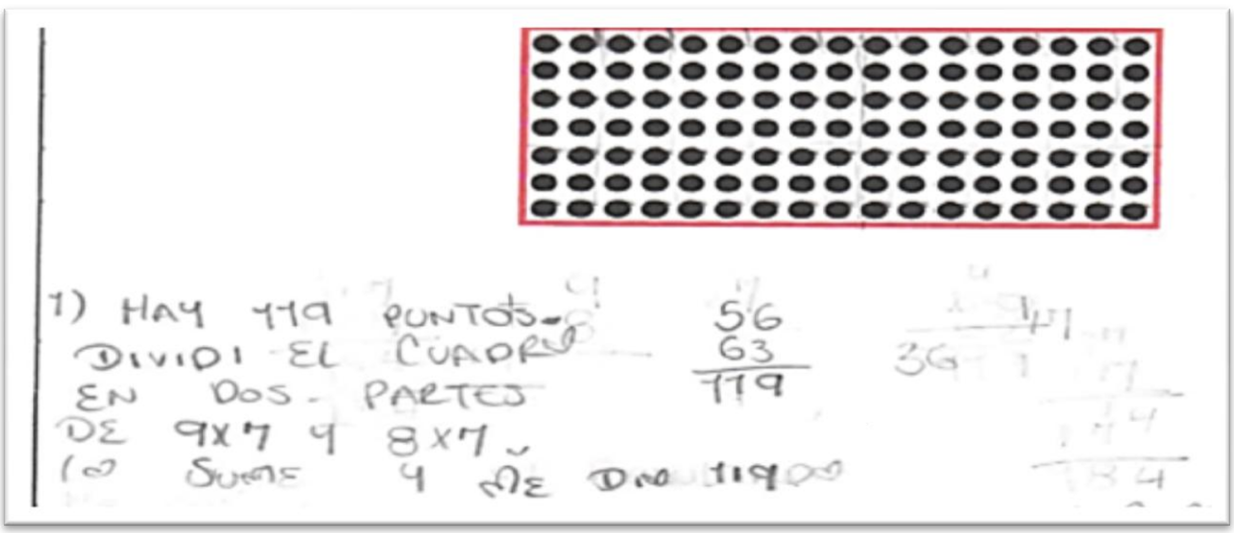


Figura No 4.8 Dividieron con líneas y contaron. Actividad 1, situación 2

Transcripción del texto Figura No 4.8:1 hay 119 puntos dividí el cuadrado en dos partes de 9 × 8 y 8 ×7. Los sume y me dio 119. 56 + 63 = 119.

Emplearon procedimientos de conteo alternativos (constructivos), haciendo grupos de 4 puntos, haciendo eles, contando los puntos del perímetro del rectángulo, etc.

Pudimos evidenciar que 10 estudiantes, es decir el 62% de los estudiantes optaron por un conteo alternativo empleando “eles” o haciendo grupos de puntos con el fin de dar respuesta a las preguntas planteadas en esta situación

Figura No 4.9 Conteo alternativo de puntos. Actividad I Situación 2

Transcripción del texto Figura No 4.9: 1 yo conté la figura en forma de una n y en la forma que iba bajando el número : 29 + 25 + 21 + 17 + 13 + 9 + 5 = 119

En la situación No. 3

Multiplicaron 14 x 7 y restaron 4: Evidenciamos que 12 estudiantes del Grupo A, es decir el 75 % identificaron la estructura espacial, la cual fue representada numéricamente por medio de una multiplicación y una resta. (Número de canicas de la fila por número de canicas por columna, menos el número de canicas amarillas.)

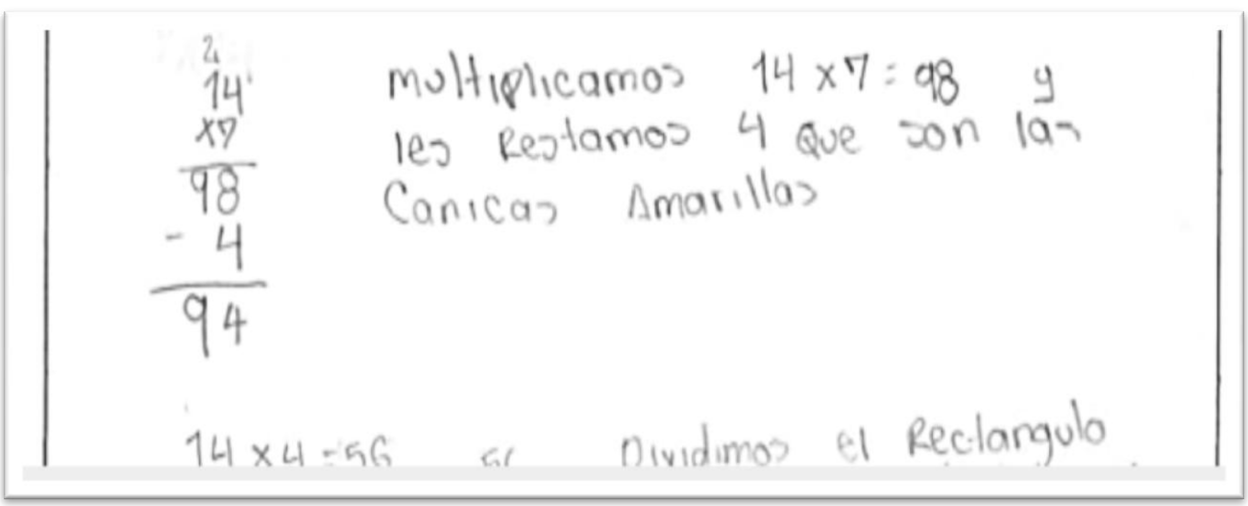


Figura No 4.10 Conteo por multiplicación Actividad I Situación 3

Transcripción del texto Figura No 4.10: multiplico 14 × 7 = 98 y les resto 4 que son las canicas amarillas

Dividieron el rectángulo en regiones, contando el número de puntos de cada región y los sumaron omitiendo la región de las canicas amarillas: Observamos que 10 estudiantes del Grupo A, es decir el 62% identifican la estructura espacial establecida por las líneas de división presentes en la figura, encontrando el número de canicas por zonas multiplicando el número de canicas que tiene la base por el número de canicas que tiene la altura, después sumaron estos resultados omitiendo las canicas amarillas.

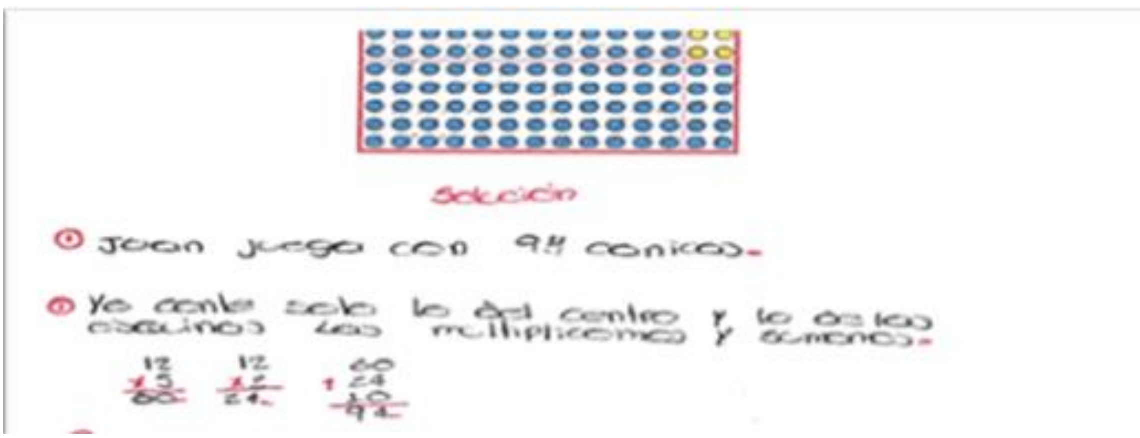


Figura No 4. 11 Conteo por regiones. Actividad I Situación 3

Transcripción del texto Figura No 4.11: 1. Juan juega con 94 canicas.2. yo conté solo la del centro y las de las esquinas las multiplicamos y sumamos

$12 \times 5 = 60$ $\quad$ $12 \times 2 = 24$ $\quad$ $60 + 24 + 10 = 94$

Dividieron el rectángulo en regiones contando el número de puntos de cada región, incluyendo las canicas amarillas y las canicas azules, después sumaron dichas regiones y al final restaron las 4 canicas amarillas: 4 estudiantes del Grupo A, es decir 25 % no se limitaron a las líneas presentadas dentro del rectángulo, sino que trazaron nuevas líneas verticales y horizontales dividiendo el rectángulo en dos partes, para después encontrar el número de puntos de las dos zonas, y al final los sumaron y restaron 4.

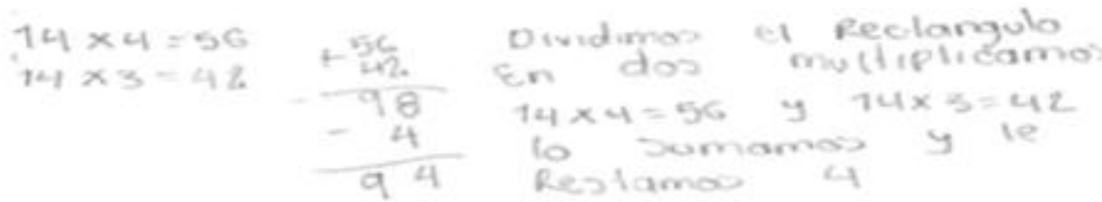


Figura No 4.12 Conteo por regiones, restando puntos amarillos. Situación 3

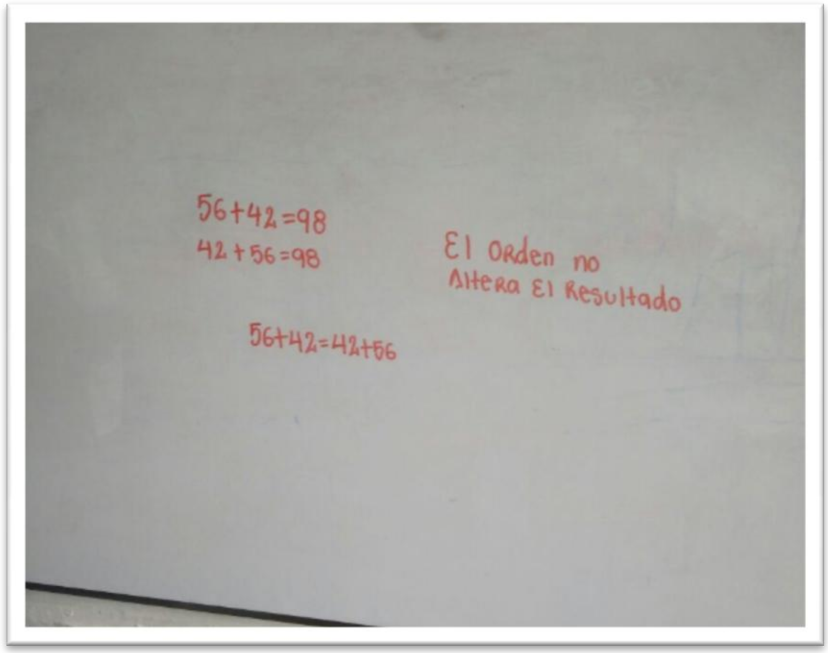
Transcripción del texto Figura No 4.12: $14 \times 4 = 56$ $14 \times 3 = 42$ $52 + 42 - 4 = 94$ dividimos el rectángulo en dos multiplicamos $14 \times 4 = 56$ y $14 \times 3 = 42$ los sumamos y le restamos 4

4.2.2.2 Estrategias de conteo utilizadas por los estudiantes en el Momento 3 de la clase

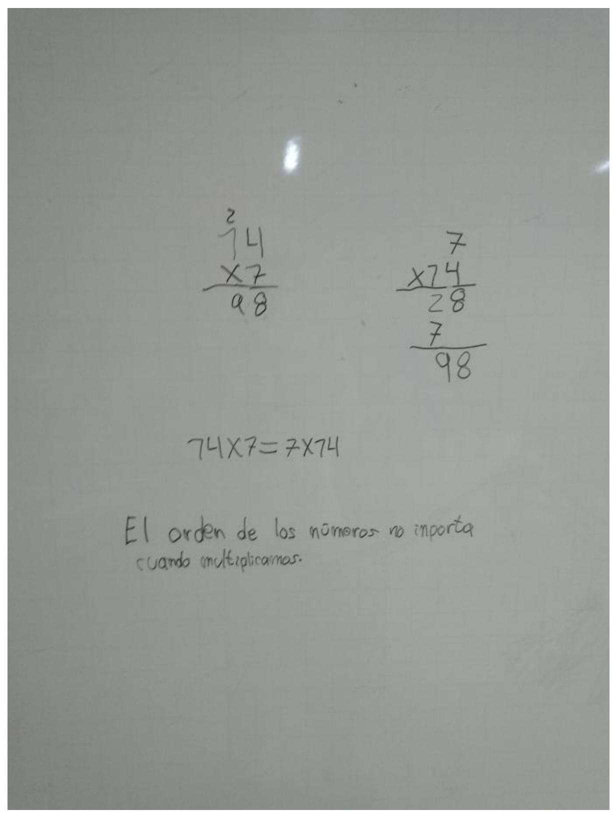
En las socializaciones generales, después del trabajo individual y el trabajo en parejas, algunos estudiantes pasaron al tablero a exponer los diferentes recursos que habían empleado para dar solución a las preguntas planteadas en cada una de las situaciones, mostrando los resultados más relevantes. Llegaron a ciertas conclusiones que permitieron a los demás estudiantes comenzar a observar generalización y a identificar estructura matemática, permitiendo de esta forma ampliar el significado que tenían del signo igual entorno a lo que es la equivalencia, además de identificar la propiedad conmutativa tanto de la suma como de la multiplicación y la visualización de regularidades.

A continuación, mostramos algunos fragmentos de las socializaciones, donde se evidencia lo que realizaron los estudiantes y algunos de los diálogos que se presentaron entre los profesores y los estudiantes cuando intervinieron. En el Apéndice No. 1 se presenta más información primaria correspondiente al trabajo de este “momento”).

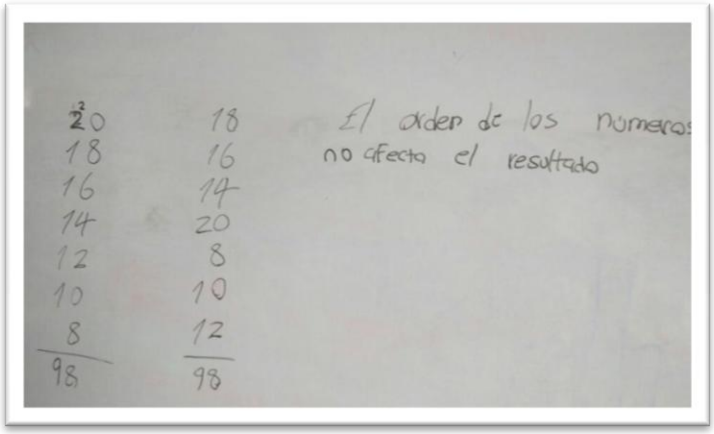
En los siguientes fragmentos de la socialización, se evidencia la forma como los estudiantes lograron identificar la propiedad conmutativa de la suma y de la multiplicación por medio de las actividades de conteo.



Profesor 1: Listo, ¿qué pasa si sumas 46 más 56, o 56 más 46, dará lo mismo?
En coro: Sí, da lo mismo.
Profesor 1: ¿Están seguros?
Karol: Sí profe, da lo mismo.
Profesor 1: ¿Por qué creen que eso pasa?
Karol: Porque en la suma el orden no importa porque se está sumando lo mismo.
Profesor 1: ¿Qué piensan los demás?
Nicol: El orden de los números no altera el resultado.
Kevin: Multiplicar 14 por 7.
Profesor 2: ¿Cuánto da eso?
Coro: 98
Profes 2: Listo, esa fue una de las formas que nos mostró Karen. 14 por 7, ¿cuánto da eso?
Coro: 98
Profesor 2: Pero Karen también hizo lo siguiente.
Coro: Multiplicó al revés, 7 por 14.
Profesor 2: ¿Y cuánto le dio?
Coro: 98
Profesor 2: ¿O sea que en la multiplicación también se cumple eso, no importa el orden, da el mismo resultado?
Coro: Sí profe, no importa el orden, da el mismo resultado.
Profesor 2: Y se cumple para…
Coro: Todos los números.



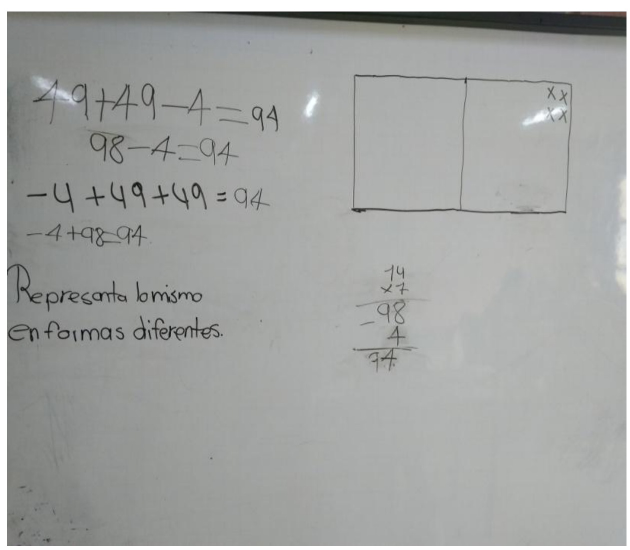
Nos llamó la atención cómo los estudiantes identifican diferentes estructuras con el fin de contar el número de cuadros**:**



Ramón: Fusionamos la fila y la columna, la fila más grande y la que sigue.
Profesor 1: Ramón explícale otra vez al profe.
Ramón: Tomamos una columna y una fila sumamos los cuadritos, nos da 20, va disminuyendo de dos en dos. La siguiente nos da 18 y así sumamos y nos da.
Profesor 1: Y si los sumas en otro orden, ¿da lo mismo?
Ramón: Sí.
Profesor 1: ¿Qué se puede concluir entonces?
Ramón: El orden de los números[1] no altera el resultado.

En el siguiente fragmento de la socialización podemos evidenciar como los estudiantes comienzan a construir el significado de equivalencia entre expresiones matemáticas; además, se comienza a ampliar el significado que le dan los estudiantes al signo igual, ya no solo como un símbolo que les indica que tienen que encontrar un resultado, sino como un símbolo que también les permite establecer relaciones de equivalencia.

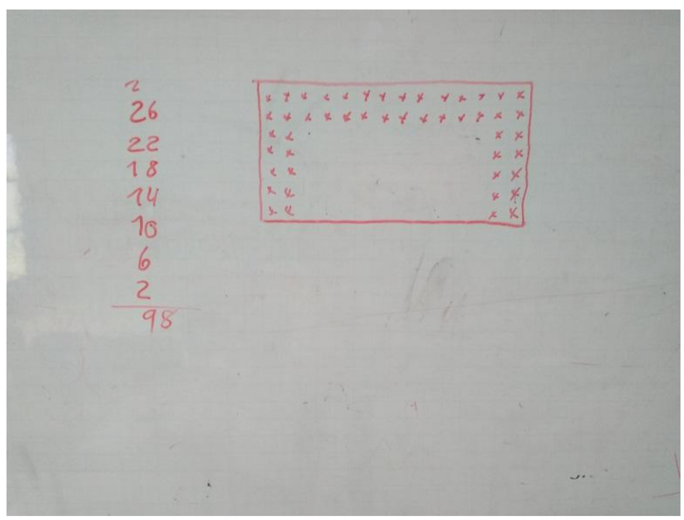
Profesor 2: ¿Ahora, ¿quién pasa?
Paula: Yo, lo partí por la mitad y me dio 49 y el otro lado 49 pero como solo eran las azules les quito 4 y me dio 94, es decir que 49+49-4=94



Profesor 2: Una pregunta para todos. Si yo quito el cuatro y lo coloco al frente, ¿qué pasa? el resultado cambia o sigue dando el mismo resultado.
Paula: Sigue dando el mismo resultado.
Profesor 2: Por ejemplo ¿49 – 4 + 49 cuánto da? ¿qué dicen ustedes? ¿da lo mismo? ¿cambia?
Nicol: Da el mismo resultado porque son los mismos números y tiene los mismos signos.
Profesor 2: **¿**entonces, si coloco 49 + 4 - 49, da lo mismo?

Paula: Es diferente por qué cambió los signos.
Profesor 1: La cuenta fue 49 + 49 y te dio 98, ahora que pasa si invierto los números 98 - 4 cuanto me da.
Coro: 94 canicas.
Profesor 1: Pero si los invierto por ejemplo 4 – 98, ¿me daría lo mismo?
Yifran: No da negativo.
Profesor 1: Pero si lo ponemos así -4 + 98, ¿cuánto nos da?
Paula: Da lo mismo.
Profesor 2 ¿qué podemos decir entonces de 98-4 y de -4+98? ¿que son iguales?
Coro: No
Profesor 2: Entonces ¿qué podemos decir.?
Paula: Que representan lo mismo en formas diferentes.
Profesor 2: Entonces ¿qué podemos decir?
Bairon: Que son equivalentes porque dan el mismo, pero son diferentes porque están en diferente orden.
Profesor 2: Es claro para todos, que dan el mismo resultado, pero están en diferente orden, por eso podemos decir ¿que son qué?
Coro: Equivalentes.

Además, esta primera actividad permitió que los estudiantes comenzaran a identificar regularidades, ya que identificaron estructura espacial y la comunicaron utilizando lenguaje natural, como se evidencia en el siguiente fragmento de la socialización.



Profesor 1: ¿Alguien nos quiere explicar lo que hizo Bairon?
Anderson: Yo. Comenzó a contar hacia abajo formando como una c volteada.
Bairon: Sólo conté dos veces porque la más grande era 26 y la segunda 22.
Profesor 1: ¿Y no contó más?
Bairon: No, porque me di cuenta que había una secuencia que disminuía cada vez de a 4 cuadritos.
Profesor 1: ¿Cuánto le dio la primera, la segunda, la tercera, la cuarta la quinta, la sexta y la última?
Bairon: 26, 22, 18, 14, 10, 6 y la última 2.
Profesor 2: Muy bien Bairon. ¿Alguien quiere pasar?
Ramón: Yo. Hice algo parecido, yo tomé una fila y una columna las uní y comencé a contar los cuadritos, me dio 20, conté la que seguía y me dio 18 y me di cuenta se iba reduciendo de 2 en 2 hasta llegar a 8 y la suma da 98.

4.3 Análisis de los resultados Actividad I

En la siguiente tabla se consolidan y analizan los resultados obtenidos de la primera situación de la Actividad I. Además, se establece una categorización según los niveles de pensamiento propuestos en el Capítulo 2, de acuerdo con la estrategia empleado por parte del estudiante para abordar dicha situación en los tres momentos. Esta información fue recolectada y analizada gracias a las hojas de trabajo, audio grabaciones, la observación directa e interacción con los estudiantes en los tres momentos que se dividió cada sección de clase. *Cabe resaltar que algunos estudiantes se ubicaron en más de un nivel de comprensión al involucrarse en la secuencia de actividades*.

}

Tabla No. 4.2 Análisis resultados de Actividad I, situación 1

Niveles de pensamiento descritos Capítulo 2	Estrategia empleada	Información recolectada de la observación directa, interacción con los estudiantes, audio grabaciones.
Pre-estructural: las representaciones carecen de cualquier evidencia de estructura numérica o espacial.	Contaron cuadro por cuadro.	Los 6 estudiantes que utilizaron este recurso no evidenciaron ninguna relación entre los elementos presentados en esta situación. Inicialmente contaron cuadro a cuadro cometiendo errores de conteo debido al gran número de cuadros, posteriormente evidenciaron que existían formas más efectivas para contar.
Estructural parcial: Identifica los elementos más relevantes de la estructura dada, pero la representación necesita adecuarse.	Contaron el número de cuadros por fila o por columna y después sumaron el total de filas o columnas.	Los 10 estudiantes que utilizaron este recurso reconocen algunos elementos de la estructura como las filas o las columnas, las cuales fueron vistas como unidades compuestas para poderlas sumar, esto les permitió reconocer la propiedad conmutativa de la suma. Es decir, que los estudiantes evidenciaron algunos aspectos de la estructura, pero la forma como la presentaron no es completa. Evidenciamos que los estudiantes optaron por contar el número de cuadros de las filas o el número de cuadros de las columnas, después efectuaron la suma del número de cuadros de las filas o de las columnas. Además, identificaron que al realizar esta suma en diferente orden obtenían el mismo resultado. Evidenciamos que los estudiantes identificaron la propiedad conmutativa de la suma.
Desarrollo estructural: Identifica y representa correctamente los elementos numéricos y espaciales presentes	Multiplicaron 14×7 o 7×14.	Los 4 estudiantes que utilizaron este recurso reconocen las relaciones que se establecen entre número de filas y número de columnas para poder encontrar el número de cuadros del rectángulo, además, esto les permitió reconocer la propiedad conmutativa de la multiplicación, es decir que los estudiantes evidencian aspectos de la estructura y además la forma como la presentan es completa. Una

en la situación dada.		alumna argumentó lo siguiente: "Yo conté una columna, sume 7 veces 14 y después lo conté al revés, 14 veces 7. Identifiqué que lo podía contar *al revés"*. Luego dijo que se podían cambiar de lugar, o sea cambiarles el orden, y que el resultado sería el mismo. (Identificó la propiedad conmutativa de la multiplicación) Por otro lado, un estudiante manifestó que: "A través de una suma se daría la multiplicación". Reconocemos que el estudiante está identificando la relación que se puede establecer entre la estructura aditiva con la estructura multiplicativa en el conjunto de los números naturales.
	Dividieron el rectángulo en partes (por mitad, en 4 zonas, entre otros).	Los 10 estudiantes que utilizaron este recurso reconocen las relaciones que se establecen entre el número de filas y el número de columnas cuando subdividen el rectángulo en rectángulos más pequeños para poder encontrar el número de cuadros del rectángulo original, además, esto les permitió reconocer la propiedad conmutativa de la suma y de la multiplicación, es decir que los estudiantes evidencian aspectos de la estructura y además la forma como la presentan es completa. Evidenciamos que los estudiantes dividieron el rectángulo empleando líneas horizontales y verticales, subdividiendo el rectángulo en rectángulos de menor tamaño para así facilitar el conteo por medio de sumas o multiplicaciones. (Esto permitió que los estudiantes comenzaran a reconocer la propiedad conmutativa de la suma y de la multiplicación).
	Contaron los cuadros formando unas "L" o contando todos los cuadros del perímetro del rectángulo, además lograron identificar que se iban descontando de 2 en 2 a medida que disminuía el tamaño de las "L":	Los 4 estudiantes que utilizaron este recurso evidencia las relaciones que establecen entre los elementos del rectángulo, filas, columnas, formando o estableciendo diferentes figuras, mostrando diferentes estructuras tanto numéricas como espaciales, para así poder encontrar el número de cuadros del rectángulo original, además esto les permitió reconocer algunos patrones, es decir que los estudiantes

	(20+18+16+…+8=98) o con el perímetro de 8 en 8. (38+30+22+8=98)	evidencian aspectos de la estructura y, además, la forma como la presentan es completa. Los estudiantes identificaron formas de contar visualizando algunas figuras como unas “L”, o disminuyendo el número de cuadros que la conformaron, identificando de esta manera 7 “eles” de diferente tamaño, decreciendo de 2 en 2; algo similar a esto hicieron los estudiantes que identificaron que podían contar formando rectángulos; en el primer caso eran los cuadrados que conformaban el perímetro, y así sucesivamente hasta llegar a una línea de 8 cuadros, identificando la regularidad de que la cantidad de cuadros de cada rectángulo iba disminuyendo en 8 cuadrados sucesivamente.

Algunos ejemplos de la información primaria recolectada se pueden ver en Apéndices No. 1. La identificación de estructura numérica y espacial por medio de situaciones de conteo, nos dejó algunas ideas que se presentan a continuación en el resumen.

4.4 Resumen

En este Capítulo 4 mostramos lo resultados obtenidos en las tres primeras preguntas de la exploración inicial y los resultados obtenidos en la primera parte de la innovación curricular, la cual se desarrolló en las dos sesiones que se tenían planeadas. Para iniciar, cabe resaltar la motivación que generó cada una de las actividades y por ende la participación activa por parte de los estudiantes. El trabajo desarrollado por los estudiantes en cada uno de los momentos, como se puede observar en la Tabla No 4.2, nos mostró que los estudiantes lograron reconocer al **igual** como un símbolo que les permite identificar y expresar cuándo dos expresiones matemáticas son equivalentes. De igual forma, el trabajo desarrollado con el signo **igual** permitió que los estudiantes construyeran el significado de la propiedad conmutativa, tanto de la suma como de la multiplicación; esto se evidenció en el trabajo realizado por los estudiantes en cada una de las situaciones planteadas, la interacción con los docentes y lo reportado en el audio grabaciones. Considerando los resultados obtenidos en el proceso de la aplicación de las tres situaciones que componen la Actividad I y la comparación de los resultados del cuestionario inicial y del cuestionario de salida del grupo de Bogotá y del grupo de Tunja, pudimos evidenciar que hubo una evolución en el pensamiento algebraico de los estudiantes que hicieron parte del Grupo A, (Ver el Capítulo 6). A partir de una misma actividad que involucra el conteo, 14 de los 16 estudiantes lograron ubicarse en diferentes niveles de pensamiento que se establecieron en el Capítulo 2, puesto que iniciaron en un nivel pre estructural, como lo es contar cuadro por cuadro, hasta llegar a un nivel más avanzado, desarrollo estructural, en el que ya lograban formular patrones de conteo.

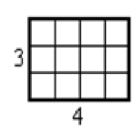
Capítulo 5 Apoyando el desarrollo de pensamiento algebraico a través del trabajo con patrones figúrales

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos después de haber implementado las tres últimas actividades que hacen parte de nuestra innovación curricular con los estudiantes del Grupo A, las cuales centraban la atención en apoyar el desarrollo de pensamiento algebraico en los estudiantes a través del trabajo con patrones figurales; además, una de las actividades buscaba generar conciencia en los estudiantes sobre la problemática ambiental que hay en la actualidad, especialmente en lo que se refiere al uso desmedido de botellas plásticas, así como la importancia del reciclaje, buscando de esta forma la preservación del medio ambiente. Nuestro punto de referencia para la creación de la segunda parte de la innovación curricular estuvo representado en los resultados obtenidos en las tres últimas preguntas del cuestionario inicial, los cuales se presentan en la Sección 5.1. En la Sección 5.2 mostramos y explicamos la segunda parte de nuestra innovación curricular, algunos apartes del trabajo desarrollado en el aula. (Ver planeación Apéndice 9)

5.1 Resultados de la exploración del pensamiento de los estudiantes en el contexto espacial

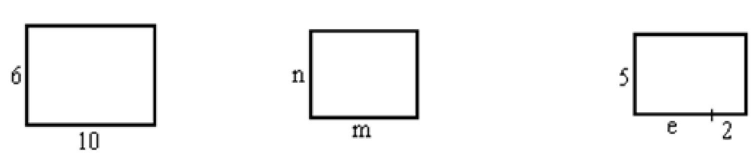
Iniciamos esta sección presentando las 3 últimas preguntas del Cuestionario inicial, y sus propósitos.

Pregunta 4:



El área de este rectángulo es igual a 3×4.

Escriba una expresión que represente el área de cada uno de los tres siguientes rectángulos.



La pregunta No.4 tenía el propósito de explorar el pensamiento de los estudiantes en torno al uso de las letras cuando representan un número general y se debe operar con este.

Pregunta 5:

Ésta es una sucesión de figuras hechas con pequeños cuadrados:

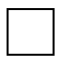


Figura No. 1

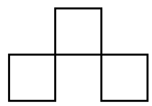


Figura No. 2

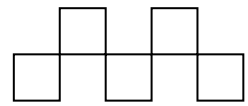


Figura No. 3

a) Dibuja la Figura No. 4.

b) ¿Cuántos cuadraditos hay en la Figura No. 7? ______________________

c) ¿Cuántos cuadraditos hay en la Figura No. 13? _____________________

d) ¿Cuántos cuadraditos hay en la Figura No. 100? ____________________

e) Describe lo que hiciste para encontrar el número de cuadraditos de la Figura No. 100.

f) Escribe una regla a seguir para hallar el número de cuadritos en la Figura No. 1000 (o en cualquier otro número de figura).

La pregunta No.5 fue tomada de Agudelo-Valderrama (2005) la cual tenía el propósito de observar de qué manera los estudiantes identifican un patrón a partir de una secuencia y la manera cómo lo pueden comunicar.

Pregunta 6

Observa los números de la siguiente tabla, luego responde las preguntas dadas.

x	y
1	5
2	6
3	7
4	8
5	9
6	…
7	11
8	…

a). Cuando ***x*** vale 2, ¿cuánto vale ***y***?

____

b). Cuando ***x*** vale 6, ¿cuánto vale ***y***?

____

c). Cuando ***x*** vale 100, ¿cuánto vale ***y***?

____

d). Describe con tus propias palabras qué haces para encontrar el valor de ***y*,** conociendo el valor de ***x***.

e). Escribe una ecuación que exprese algebraicamente la regla que describiste con palabras en el punto anterior.

La pregunta No.6 tenía como propósito explorar el pensamiento de los estudiantes cuando se enfrentan a una situación donde deben identificar la forma como se relacionan dos magnitudes, y donde una de ellas depende de la otra.

Como se puede ver en la Tabla No. 5.1, los resultados que obtuvimos en las tres últimas preguntas del cuestionario inicial y la información recolectada en la entrevista de seguimiento a dicho cuestionario, nos mostró que:

El 25% de estudiantes del Grupo A; es decir 4 estudiantes tienen dificultades para expresar el área de un rectángulo; por otro lado, un 50% de estudiantes del Grupo A, no acepta el símbolo literal para representar un número general al expresar el área de un rectángulo cuando se combinan letras y números en su base o altura. Dos de los estudiantes entrevistados argumentaron que: "es confuso porque no sabemos eso de la e con el 2*",* lo que representaba la base del rectángulo; por eso ellos crearon expresiones que no representaban el área del rectángulo, algunos de hecho no tuvieron en cuenta la "e", otros multiplicaron 5 × e × 2. En la entrevista, dos estudiantes dijeron: "las letras son números desconocidos". Por último, dos de los estudiantes manifestaron que: "como las letras son cualquier número, puedo asignar el valor que yo quiera a la letra." (Ver Apéndice No 5)

En la pregunta número 5, se identificó que el 37% de estudiantes del Grupo A , encuentra la cantidad de cuadros de las figuras iniciales por medio de su representación gráfica; es decir, identifican la regularidad (los cuadros aumenta de 2 en 2, de una figura a la otra) pero, si la figura tiene demasiados cuadros y no se puede dibujar, entonces no logran identificar la cantidad de cuadros en la figura; esto último se ratificó en la entrevista, ya que cinco estudiantes manifestaron: "es difícil porque hay que dibujar muchos cuadros para encontrar los cuadros de la figura 100 y de la figura 1000"; lo anterior nos permite evidenciar que a los estudiantes les cuesta generar una expresión que represente la regularidad encontrada. Por otro lado, tan sólo el 12 % de estudiantes del Grupo A comunican los procesos que realizan de manera escrita o verbal cuando contestaron la pregunta; es decir, que identificaron el patrón y describieron como una generalización. Finalmente, el 25% del grupo de estudiantes describieron una regla para encontrar el número de cuadros de cualquier figura en la secuencia dada en la pregunta número 5.

En la pregunta número 6 los resultados obtenidos nos mostraron que el 13% del grupo de estudiantes escribió la regla que conecta a x y y utilizando un lenguaje formal; un ejemplo de ello es: "$x + 4 = y$". En la entrevista, tres estudiantes afirman haber observado que el número de cuadros aumentaba de 2 en 2 de una figura a la otra, es decir que describía los resultados de la tabla.

A continuación, en la Tabla. No. 5.1 se muestra el consolidado de los resultados obtenidos de las Preguntas 4, 5 y 6 del cuestionario inicial por el grupo de estudiantes donde se realizó la innovación curricular, el Grupo A. Además, se incluye datos generales obtenidos a través de la entrevista de seguimiento al cuestionario.

Tabla No 5.1 Resultados de la exploración inicial de las ideas matemáticas de los estudiantes en las Preguntas 4, 5 y 6 del cuestionario inicial y entrevista de seguimiento del Grupo A

Cuestionario inicial			**Entrevista de seguimiento**		
Propósito preguntas	**Descriptores de las respuestas de los estudiantes**	**Porcentaje**	**Propósito de la entrevista seguimiento**	**Descriptores**	**Número de estudiantes**
Pregunta No.4: Explorar el pensamiento de los estudiantes en torno a la interpretación y al uso de las letras cuando representan un número general y se debe operar.	**D1:** No responde o expresa de forma errónea las áreas indicadas.	**25%**	Indagar en el pensamiento de los estudiantes sobre la comprensión que tienen al expresar el área de un rectángulo, cuando sus catetos son números, letras y números, y letras.	**D1:** Expresan que para encontrar el área de un rectángulo se suman los lados.	**2 de 6**
	D2: Expresa únicamente el área del rectángulo cuyos lados están representados con números de una manera adecuada, o encuentra su resultado numérico.	**25%**		**D2:** Manifiestan que se multiplican los lados de los rectángulos que tienen números, como el que está en el ejemplo.	**2 de 6**
	D3: Expresa el área de uno de los dos rectángulos cuyos lados están representados por letras o letras y números de manera adecuada.	**50%**			
	D4: Expresa las áreas de todos los rectángulos de manera apropiada.	**0%**		**D3:** Ratifican que para expresar el área se multiplica base por altura, y que si hay número y letra se cambia la letra por un número cualquiera.	**2 de 6**
Pregunta No.5: Observar de qué manera los estudiantes identifican un patrón a partir de una secuencia y la forma cómo lo pueden comunicar, ya sea de manera verbal o escrita.	**D1:** No responde o no reconoce la secuencia, o la expresa inapropiadamente.	**27%**	Explorar en el pensamiento de los estudiantes acerca de su comprensión sobre la identificación de regularidad y patrón en situaciones problema que implican estructuras espaciales.	**D1:** Afirman que es complicado dibujar la figura 100 y por tanto no pueden saber el número de cuadritos.	**3 de 6**
	D2: Dibuja la Figura 4 y la Figura 7, encontrando el número de cuadrados de cada una.	**37%**		**D2:** Expresan que se puede dibujar la figura cuando tiene pocos cuadritos, pero la de 100 es muy difícil.	**2 de 6**
	D3: Encuentra el número de cuadros de las figuras 13 y/o 100	**0%**		**D3:** Dice que para encontrar el número de cuadros en una figura determinada se tiene que multiplicar el número de la figura por 2 y quitarle 1.	**1 de 6**
	D4: Describe lo que hizo para encontrar el número de cuadros de la figura 100.	**11%**			
	D5: Reconoce y justifica cómo se puede encontrar el número de cuadros para cualquier número de Figura.	**25%**			
Pregunta No.6: **E**videnciar si los estudiantes podían o no identificar una relación funcional a	**D1:** No responde o responde de manera inadecuada, no identifica lo qué se debe hacer en esta pregunta.	**37%**	Explorar el pensamiento de los estudiantes acerca de su comprensión sobre la relación funcional.	**D1:** Manifiestan que no entendieron lo que debía hacerse y que sólo llenaron la tabla con números.	**2 de 6**

partir de unos datos establecidos. .	**D2:** Reconoce y escribe los valores correspondientes a *y*, presentes en la tabla.	**19%**		**D2:** Afirman que para responder las preguntas se guiaron por la regularidad o recurrencia de la tabla, pero para cuando *x* vale 100, tenían que hacer la tabla hasta 100.	**3 de 6**
	D3: Justifica que para un número *x* el valor de *y* aumenta en 4.	**31%**		**D3:** Describe que para encontrar el valor de "y", se toma el de la casilla *x* se le suma 4 y se encuentra cualquier valor de "y".	**1 de 6**
	D3: Identifica el patrón y lo expresa de manera verbal y escrita, para cualquier valor de *y*, es el valor de x sumándole 4.	**13%**			

A partir de los resultados obtenidos en la preguntas 4, 5 y 6 del cuestionario inicial, pudimos observar que el 50% del grupo de estudiantes comunican de manera adecuada la expresión que representa el área de un rectángulo cuando su base y su altura son números, pero tienden a confundirse cuando encuentran a la vez números y letras; en ocasiones ignoran la letra para hacer o indicar operaciones, o en su defecto, le asignan valor arbitrarios a las letras; lo anterior son evidencias consistentes con las de Küchemann, (1981). Por otra parte, evidenciamos que el 73 % del grupo de estudiantes tienen problemas cuando deben trabajar con secuencias numéricas que se representan por medio de arreglos geométricos, ya que si dejan de lado la representación geométrica y se debe pasar a la abstracción difícilmente logran llegar a una generalización. El 73% del grupo de estudiantes están en capacidad de encontrar un término pedido teniendo en cuenta la regularidad en una secuencia dada, pero les cuesta trabajo encontrar la generalización; además, también se les dificulta expresar por medio de palabras lo que ven y lo que hacen cuando se enfrentan a preguntas que tienen que ver con su pensamiento matemático. Teniendo en cuenta las necesidades de aprendizaje de los estudiantes se diseñaron las actividades II, III y IV, con el propósito de apoyar la superación de las necesidades de aprendizaje identificadas, además de promover el desarrollo de pensamiento algebraico centrando la atención en la identificación y comunicación de estructura matemática que les permita a los estudiantes entender la generalidad.

5.2 Desarrollo en el aula de la segunda parte de la innovación curricular (Actividad II, III y IV)

La segunda parte de la innovación curricular se compone de tres actividades, las cuales se enmarcan en contextos cercanos al estudiante, esto con el objetivo de facilitar un aprendizaje significativo: (Actividad II) A embaldosar (Figura No 5.1), el propósito de esta actividad era que los estudiantes identificaran estructura numérica y espacial, las relacionaran y así pudieran identificar regularidades y reconocer patrones. (Actividad III) el reciclaje de botellas (Figura No 5.1). El propósito de esta actividad, además de que los estudiantes se involucraran en situaciones de cambio que les permitan identificar y reconocer estructura, regularidad y patrón, era generar conciencia sobre la problemática ambiental causada por el uso excesivo de botellas plásticas en las casas y en los colegios. (Actividad IV) Excel (Figura No 5.1), el propósito de esta actividad era que los estudiantes identificaran la necesidad de utilizar un lenguaje más específico que les permitiera describir estructura matemática que relacionan cantidades.

5.2.1 La estructura planeada de las sesiones de clase

Como ya lo habíamos mencionado en el Capítulo 4, para el desarrollo de la clase en la que los estudiantes tienen que trabajar en actividades como la presentamos en las Figuras No. 5.1 Actividad II y la Figura No 5.2 Actividad III, se llevaron a cabo los tres momentos (trabajo individual, trabajo parejas y socialización); para la Actividad III se adicionó un momento más al principio, el cual consistía en ver los videos sobre el medio ambiente, y luego motivar la discusión sobre el tema. También cabe mencionar que para la Actividad IV Figura 5,3 y 5,4 se omitió el primer momento, ya que el trabajo se comienza a desarrollar en parejas por cada computador.

5.2.2 Actividad II

La actividad II se compone de dos situaciones problema las cuales se muestran en la Figura No 5.1. La primera es una situación tomada de Agudelo-Valderrama (2000) en donde se presenta el embaldosado de un piso. Se pretende que los estudiantes comiencen a identificar la regularidad, específicamente cuando deben buscar la forma cómo relacionan el número de baldosas negras con el número de baldosas blancas. La situación que sigue, emerge de la situación del embaldosado. Presenta un mayor nivel de complejidad, buscando que los estudiantes construyan una regla que describa la relación entre el número de baldosas blancas y el número de baldosas negras para cada una de las dos situaciones dadas.

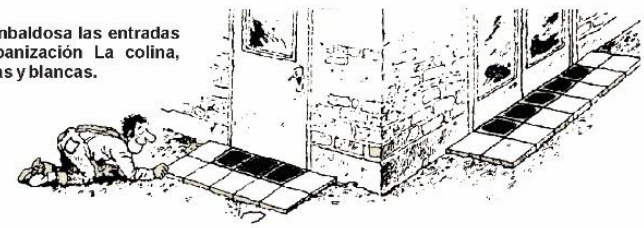
ACTIVIDAD II

NOMBRE____ FECHA:__________________

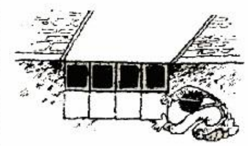
SITUACIÓN NÚMERO 1

A embaldosar

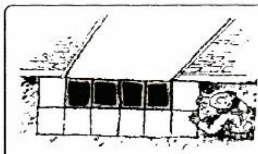
Pedro es constructor. Embaldosa las entradas de las casas de la urbanización La colina, utilizando baldosas negras y blancas.



Pedro simpre empieza con una fila de baldosas negras.



Luego pone una fila de baldosas blancas a continuación de las baldosas negras.



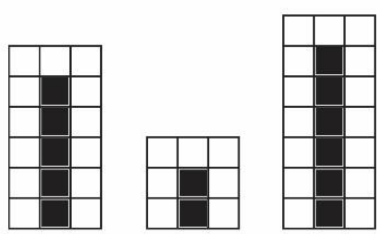
Y luego pone 2 baldosas blancas en cada extremo para finalizar el embaldosado de la entrada.

a) ¿Cuántas baldosas blancas usa Pedro si empezara con una fila de 11 baldosas negras? Describe tu pensamiento a medida que vas trabajando para contestar esta pregunta.

b)¿Cuántas baldosas blancas necesitaría Pedro si empezara con un número cualquiera de baldosas negras? Explícanos completamente como lo haces.

SITUACIÓN NÚMERO 2

Este es otro diseño de embaldosado que hace Pedro.



a) ¿Cómo haces para saber el número de baldosas blancas que debe utilizar Pedro, si el número de baldosas negras es 10? Explícanos detalladamente.

b)¿Cómo haces para saber el número de baldosas blancas que debe utilizar Pedro si tiene cualquier número de baldosas negras?

Figura No. 5. 1 Actividad II

A continuación, describimos algunos ejemplos de las construcciones realizadas por los estudiantes durante el desarrollo de las Actividades II.

Actividad II-Situación 1: Se evidenció que el 70% del grupo de estudiantes reconoció que necesitan 4 baldosas blancas más para un número cualquiera de baldosas negras y, además, observamos que la mayoría expresó la generalidad de una manera apropiada, como se puede ver en el siguiente ejemplo:

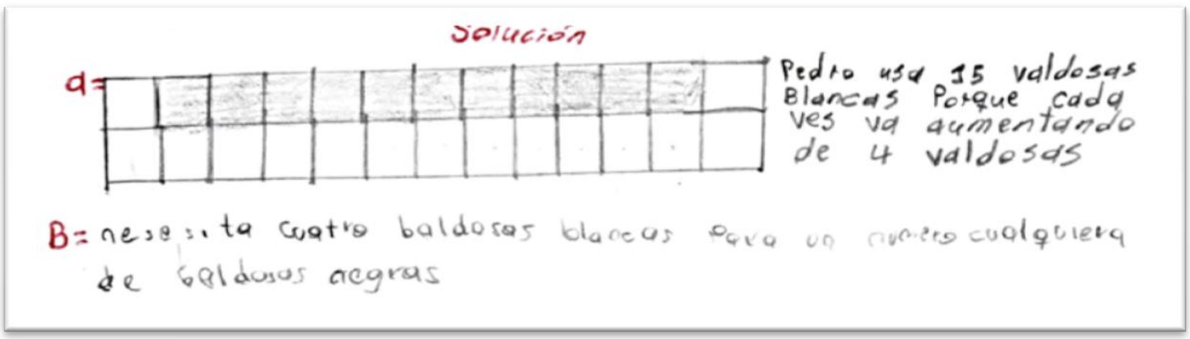


Figura No. 5.2 Trabajo desarrollado por los estudiantes

Transcripción del texto Figura No. 5. 5: a. Pedro usa 15 baldosas blancas porque cada vez va aumentando de a 4 baldosas. b. Necesitaba cuatro baldosas blancas para un número cualquiera de baldosas negras.

Aquí vemos que un grupo de estudiantes respondió: "Necesita cuatro baldosas blancas para un número cualquiera de baldosas negras". Al interactuar con los estudiantes, ellos nos manifestaron que la relación que se podía establecer era que para saber el número de baldosas blancas que se necesitaba, era sumarle siempre cuatro al número de baldosas negras. Vemos claramente que 12 de los 16 estudiantes identificaron la estructura matemática y encontraron la generalización comunicándola en lenguaje natural.

Actividad II-Situación 2: Para el 62,5 % del grupo de estudiantes esta situación no representó mayor dificultad, ya que la situación anterior sirvió de apoyo para que construyeran la solución de esta situación. En la interacción y la socialización, los estudiantes describían la forma como se relacionaban las cantidades presentes en la situación utilizando su lenguaje natural de diferentes maneras. Esto se puede ver en el siguiente ejemplo:

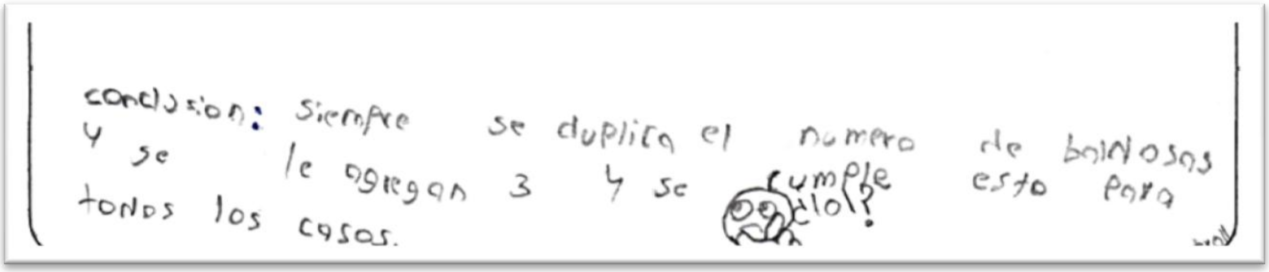


Figura No. 5.3 Identificación de estructura por parte de los estudiantes

Transcripción del texto Figura No. 5. 6 conclusiones: Siempre se duplica el número de baldosas y se le agregan tres y se cumple para todos los casos.

El 37,5 % del grupo de estudiantes hicieron dibujos manifestando que: "Se nos facilita entender mejor por medio de dibujos", vimos que a los estudiantes se les facilita entender más si hay alguna clase de representación gráfica. Los estudiantes generalmente dibujan o hacen los primeros casos de una situación para luego identificar la forma como se relacionan los números (las variables) que les permite encontrar la generalización de la situación.

En las siguientes tablas se consolidan y analizan los resultados obtenidos de la Actividad II. Además, se establece una categorización según los niveles de pensamiento descrito en el Capítulo 2, de acuerdo con la estrategia empleada por parte del estudiante para abordar dicha situación.

Tabla No 5.2 Resultados de la Actividad II, Situación 1

Niveles de pensamiento descritos Capitulo 2	Estrategias de los estudiantes	Información recolectada de la observación directa, interacción con los estudiantes, audio grabaciones
Estructural parcial: Identifica los elementos más relevantes de la estructura dada, pero la representación necesita adecuarse.	Para la pregunta: ¿Cuántas baldosas blancas usa Pedro si empezara con una fila de 11 baldosas negras? La estrategia utilizada fue:	• Observamos que 3 de los estudiantes emplearon casos particulares, encontrando un número determinado de baldosas blancas. 200…204 350…354 • 2 estudiantes manifestaron que, si se cumplía para un número de baldosas grande, entonces

	11 + 4 = 15 Emplearon casos particulares.	se cumplía para todos, y sólo se limitaron a dar el caso particular. • Logran establecer la relación sólo entre el número de tabletas blancas y el número de tabletas negras, pero sólo en casos particulares, es decir que la representación no es completa.
Desarrollo estructural: Identifica y representa correctamente los elementos numéricos presentes en la situación dada.	Para la pregunta: ¿Cuántas baldosas blancas necesitaría Pedro si empezara con un número cualquiera de baldosas negras? La estrategia empleada fue: **Sumar el mismo número de baldosas negras y sumarle 4.**	• Observamos que 12 estudiantes dedujeron que, si se ubican 11 baldosas negras, entonces se necesitarán 15 baldosas blancas, y la razón, según ellos, es porque se ponen 2 baldosas en cada extremo. • En el audio grabaciones, 4 estudiantes manifestaron que era el mismo número de baldosas negras y que se le agregaban 2 a cada extremo. • Se pudo evidenciar que 2 estudiantes manifestaron lo siguiente: "Siempre va a aumentar 4 baldosas blancas sin importar el número de baldosas negras". • Por otra parte, nos llamó mucho la atención lo que 2 estudiantes dijeron: "Es como una secuencia que se desarrolla a partir de una cantidad de baldosas negras". • Identificaron la relación entre el número de baldosas negras y el número de baldosas blancas por medio de casos particulares y de manera general y, además, la forma como la presenta es completa.

Tabla No 5.3 Resultados Actividad II, Situación 2

Niveles de pensamiento descritos Capitulo 2	**Estrategias de los estudiantes**	**Información recolectada de la observación directa, interacción con los estudiantes, audio grabaciones**
Emergente: Identifica algunos elementos relevantes de la estructura dada, pero no los representa ni espacial ni numéricamente.	Para la pregunta: ¿Cómo haces para saber el número de baldosas blancas que debe utilizar Pedro si el número de baldosas negras es 10? Siguieron la secuencia hasta llegar a 10 baldosas negras. La estrategia empleada fue:	• Dos estudiantes identificaron la secuencia que se podía formar entre el número de baldosas blancas y el número de baldosas negras, y la utilizaron para saber cuántas baldosas negras se necesitaban si se tenían 10 baldosas blancas. • Se evidencia las relaciones que establecen entre el número de baldosas negras y el

	Seguir la secuencia hasta llegar a 10 baldosas negras. **Blancas - Negras** **2 - 7** **3 - 9** **4 - 11** **…** **10 - 23**	número de baldosas blancas por medio de una tabla que representa dicha relación, pero no logran generalizarlo para cualquier número de baldosas blancas. • Identifica la secuencia, pero no logra generalizarla, sólo determinan casos particulares.
	Para la pregunta: ¿Cómo haces para saber el número de baldosas blancas que debe utilizar Pedro si el número de baldosas negras es 10? Siguieron la secuencia hasta llegar a 10 baldosas negras. La estrategia empleada fue: **Dibujaron el diseño de Pedro utilizando las 10 baldosas negras y obteniendo las 23 baldosas blancas.**	• Observamos que dos estudiantes se inclinaron por emplear representaciones gráficas, indagamos el por qué, a lo que ellos respondieron: "Porque se nos facilitaba más entender por medio de dibujos". • También observamos que iniciaron por dibujar 1 baldosa negra y miraban cuantas baldosas blancas correspondían, y así sucesivamente. • Estos estudiantes se inclinaron por emplear representaciones gráficas para encontrar un determinado número de baldosas • Identifican la relación entre el número de baldosas negras y el número de baldosas blancas, dibujaron desde una baldosa y así sucesivamente, pero no lograron llegar a la generalización, ya que sólo se quedan en el apoyo gráfico.
Desarrollo estructural: Identifica y representa correctamente los elementos numéricos presentes en la situación dada.	Para la pregunta: ¿Cómo haces para saber el número de baldosas blancas que debe utilizar Pedro si tiene cualquier número de baldosas negras? La estrategia empleada fue: **Sumaron dos veces el número de baldosas negras, añadiendo luego 3 para así encontrar el número de baldosas blancas.**	• Dos estudiantes establecieron la regla que conecta las dos magnitudes gracias a la relación numérica que se estableció entre el número de baldosas blancas y el número de baldosas negras. • Establece una regla que relaciona dos cantidades, encontrando una generalización y comunicando de manera verbal o escrita. • Evidencia las relaciones que establecen entre el número de baldosas negras y el número de baldosas blancas por medio de la suma y logran generalizar para cualquier número de baldosas negras el correspondiente número de baldosas blancas, es decir que los estudiantes evidencian aspectos de la estructura y, además, la forma como la presentan es completa.

	Para la pregunta: ¿Cómo haces para saber el número de baldosas blancas que debe utilizar Pedro si tiene cualquier número de baldosas negras? La estrategia empleada fue: **Multiplica por 2 el número de baldosas negras y le suma 3.**	• Observamos que 14 estudiantes encontraron la regla que relaciona el número de baldosas negras con el número de baldosas blancas, gracias a la representación espacial, presentada en la situación 2. • Estos estudiantes encontraron la generalización expresándola en lenguaje natural. • Un estudiante manifestó: “Dupliqué la cantidad de baldosas negras y le sume 3, que son los que van encima”. • Lo que suponemos es que la actividad 1 despertó las potencialidades naturales de los estudiantes para esta actividad, y creemos que, al ser una situación de la vida cotidiana, a la mayoría de los estudiantes se les facilitó, ya que comunicaron de manera escrita, gráfica y verbal el número de baldosas blancas para un número cualquiera de baldosas negras. • Se evidencia las relaciones que establecen entre el número de baldosas negras y el número de baldosas blancas por medio de una expresión matemática, es decir que los estudiantes evidencian aspectos de la estructura y, además, la forma como la presentan es completa.

5.2.3 Actividad III

Antes de dar inicio a esta actividad, elegimos dos videos con un contenido concreto sobre la problemática ambiental que se vive hoy en día, el primero sobre el uso desmedido de botellas plásticas, y el segundo sobre los factores que originan el calentamiento global. Después, generamos un foro de discusión, en el que pretendíamos que los estudiantes tomaran conciencia sobre la problemática ambiental y la manera en que ellos en la casa y en el colegio podían aportar con acciones específicas para mitigar, en cierta forma, la contaminación producida por los seres humanos. Luego, se dio paso al trabajo en las hojas, en donde se plantea una situación de reciclaje de botellas plásticas en un colegio de la ciudad, tal como se presenta a continuación en la Figura No 5.2.

ACTIVIDAD III

NOMBRE____ FECHA__________

SITUACIÓN NÚMERO 1

¿Sabías qué? Una botella dura entre 100 y 1000 años en descomponerse.

En la cooperativa de un colegio de la ciudad de Bogotá se vende agua que esta envasada en botellas plásticas azules y blancas. Para empacar las botellas y enviarlas a una planta de reciclaje se decidió organizarlas como se muestra en el siguiente dibujo.

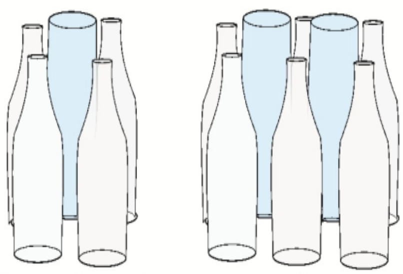


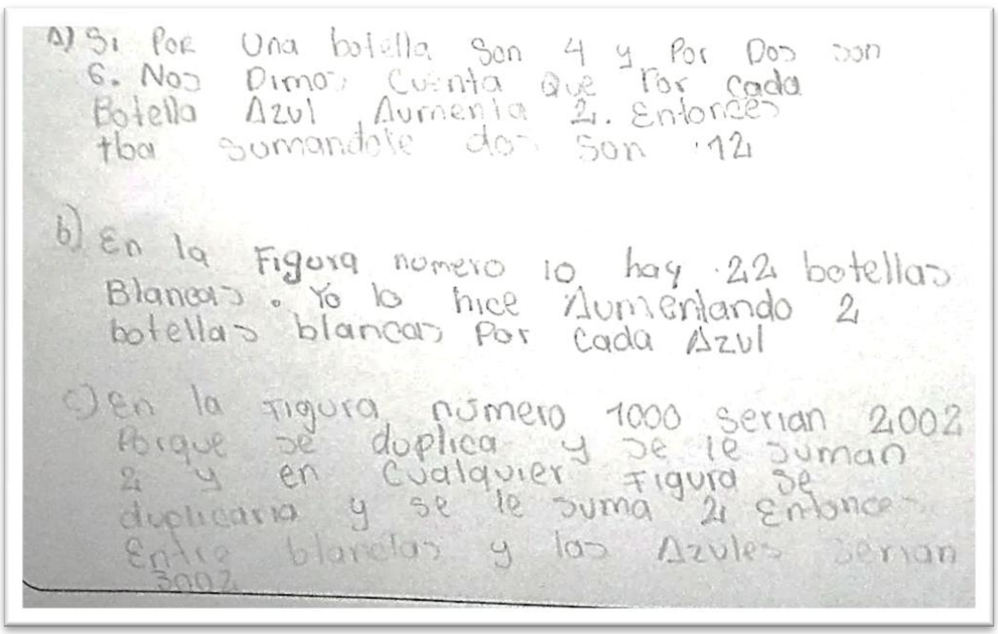
Figura número 1 **Figura número 2**

a) ¿Cuántas botellas habrá en la figura número 5? Explica cómo hiciste para determinar o saber cuántas botellas hay en la figura número 5.
b) ¿Cuántas botellas blancas habrá en la figura número 10? Explica completamente que hiciste para encontrar el número de botellas blancas.
c) ¿Cómo haces para saber cuántas botellas habrá en la figura número 1000 o en cualquier número de figura? Explica completamente tu respuesta.

Figura No. 5.4 Actividad III

Entre las principales conclusiones que surgieron a partir de la primera socialización después de haber visto los videos, está el que los estudiantes estuvieran de acuerdo en que, tanto en su casa como en el colegio, se debe evitar el consumo excesivo e innecesario de alimentos o artículos que no sean indispensables, esto con el fin de mitigar de cierta forma el impacto ambiental producido por todos nosotros. Otra idea que surgió fue la de reutilizar elementos que aún pueden servir o que se encuentren en buen estado. Por último, se concluyó sobre la importancia de fomentar el reciclaje.

En cuanto al trabajo matemático realizado por los estudiantes, se destaca que el 75% del grupo de estudiantes lograron identificar estructura matemática que les permitió crear expresiones que describían la generalización en la situación de las botellas. En la Figura No 5.7 se evidencia las respuestas de uno de los estudiantes. En la respuesta c, se muestra cómo identificó la estructura matemática que describe la situación de las botellas para cualquier número de figuras, es decir que identifica el patrón y lo da a conocer utilizando un lenguaje natural.



a) Si Por Una botella Son 4 y Por Dos son
6. Nos Dimos Cuenta Que Por cada
Botella Azul Aumenta 2. Entonces
tba sumandole dos Son 12

b) En la Figura numero 10 hay 22 botellas
Blancas. Yo lo hice Aumentando 2
botellas blancas Por cada Azul

c) En la figura número 1000 serian 2002
Porque se duplica y se le suman
2 y en Cualquier figura se
duplicaria y se le suma 2 Entonces
Entre blancas y las Azules serian
3002

Figura No. 5. 5 Trabajo desarrollado por los estudiantes

Transcripción del texto Figura No. 5. 7: a. Si por una botella son 4 y por 2 son 6, nos dimos cuenta que por cada botella azul aumenta 2, entonces todas sumándolas son 12.

b. En la figura número 10 hay 22 botellas blancas, yo lo hice aumentando 2 botellas blancas por cada botella azul.

c. En la figura 1000 serían 2002, porque se duplica y se le suma 2 y en cualquier figura se

duplicará y se le sumarán 2, entonces entre blancas y azules hay 3002.

En la siguiente tabla se consolidan y analizan los resultados obtenidos de la Actividad III, teniendo en cuenta la categorización según los niveles de pensamiento descritos en el Capítulo 2, de acuerdo con el recurso empleado por parte del estudiante para abordar dicha situación.

Tabla No 5. 4 Resultados Actividad III

Niveles de pensamiento descritos Capitulo 2	Estrategias de los estudiantes	Información recolectada de la observación directa, interacción con los estudiantes, audio grabaciones
Desarrollo estructural: Identifica y representa correctamente los elementos numéricos presentes en la situación dada.	Para la pregunta: ¿Cómo hacer para saber cuántas botellas habrá en la figura 1000 o en cualquier número de figura? Explica completamente tu respuesta. La estrategia empleada fue: **Encuentra el número de botellas blancas multiplicando por dos el número de la figura y sumándole 2; encuentra el número de botellas azules, el cual es igual al mismo número de figura, y suman estas dos cantidades encontrando el total de botellas de cualquier figura.**	• Una alumna manifestó lo siguiente: “Se duplica y se le suma 2 para las botellas blancas y para las azules es el número de la figura”. • Observamos que ocho estudiantes identificaron la relación existente entre el número de la figura y el número de botellas blancas, también identificaron la relación entre el número de la figura y el número de botellas azules. • Identifican diferentes estructuras numéricas que modelan una situación de variación entre magnitudes. • Identifican como varían el número de botellas blancas y el número de botellas azules, las botellas azules respecto del número de la figura, comunicándolo de manera escrita y, además, la forma como la presentan es completa.
	Para la pregunta: ¿Cómo hacer para saber cuántas botellas habrá en la figura 1000 o en cualquier número de figura? Explica completamente tu respuesta. La estrategia empleada fue: **Toma el número de la figura, le suma uno y lo multiplica por dos y, al**	• Observamos que los dos estudiantes, por medio de casos particulares, identificaron que, para encontrar el número de botellas blancas de cualquier figura, se le debía sumar uno al número de la figura y se multiplicaba por dos. Y para encontrar le número de botellas azules es el mismo número de la figura.

	resultado, le suma el número de la figura.	• Identifican como varían el número de botellas blancas y el número de botellas azules, las botellas azules respecto del número de la figura, comunicándolo de manera escrita y, además, la forma como la presentan es completa.
	Para la pregunta: ¿Cómo hacer para saber cuántas botellas habrá en la figura 1000 o en cualquier número de figura? Explica completamente tu respuesta. La estrategia empleada fue: **Multiplicar el número de la figura por 3 y le sumaban 2**.	• Estos cuatro estudiantes representaron el número de botellas de cada figura por medio de una expresión, la cual multiplicaba el número de figura por 3 y le sumaba 2. • Un estudiante manifestó: "Se aumenta a la siguiente figura de a 3 y siguiendo la secuencia de las botellas". Finalmente, unieron estas dos relaciones para determinar el número de botellas de cualquier figura. • Establecieron la relación y la variación entre el número de botellas blancas, el número de botellas azules y el número total de botellas respecto al número de botellas de cualquier figura, comunicándolo de manera escrita y, además, la forma como la presentan es completa.

5.2.4 Actividad IV – Trabajo en Hojas Excel

Esta sesión tuvo lugar en la sala de informática de la institución educativa. Como lo mencionamos anteriormente, el trabajo realizado se desarrolló en parejas, donde cada pareja tenía un computador. El objetivo de esta actividad era introducir a los estudiantes en la identificación de un lenguaje más sucinto para representar cantidades que se relacionan y cambian de manera coordinada, y así establecer una expresión general que describa la relación entre estas dos cantidades. A continuación, presentamos el entorno de la actividad en Excel Figura No 5.3.y la hoja de trabajo de la actividad de Excel Figura No 5.4

Actividad IV Excel

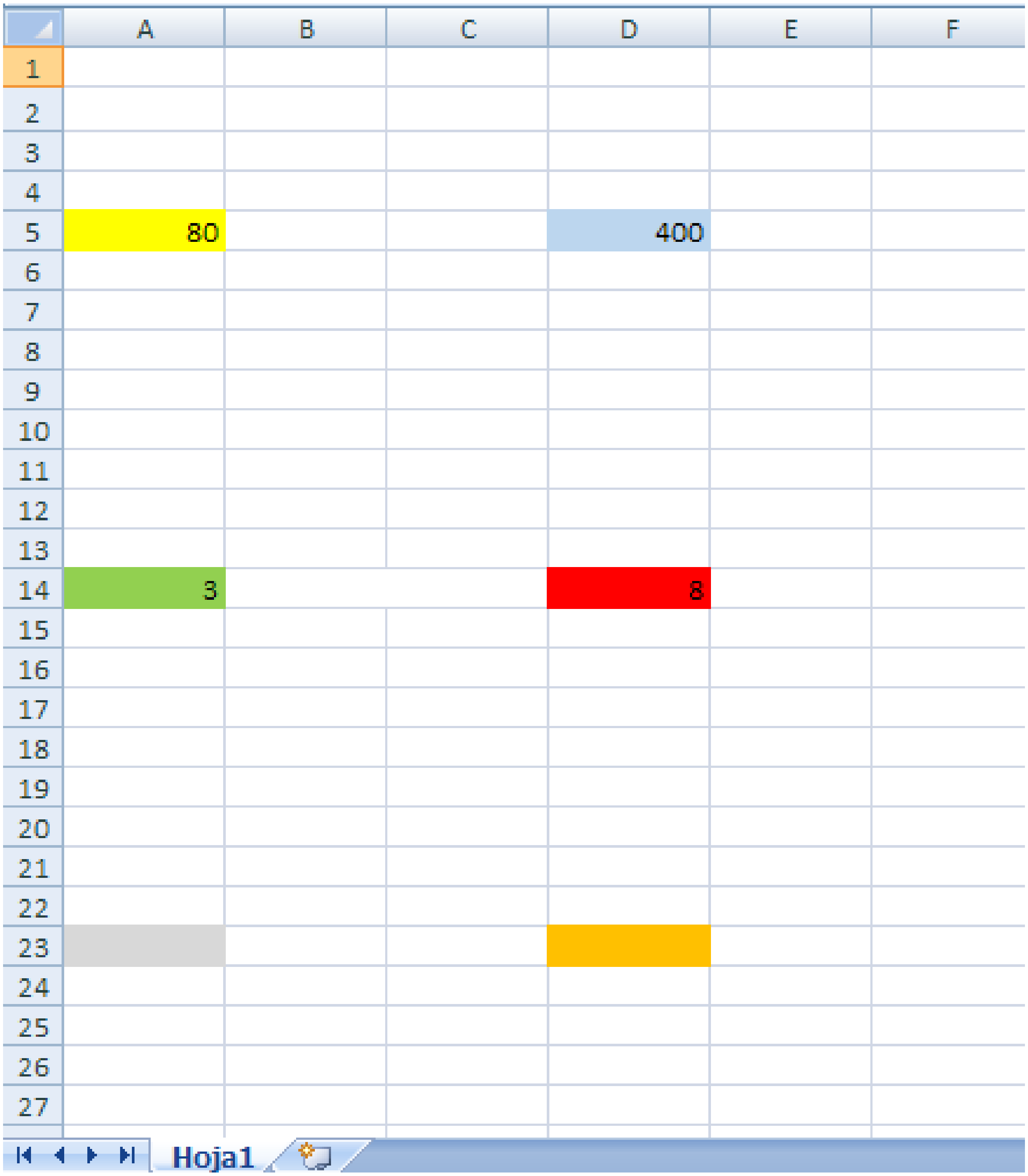


Figura No. 5. 6 Entorno actividad Excel

*Nombres*____

1. Coloquen el cursor sobre la celda (el rectángulo amarillo) y hagan *clik.*

a. Introduzcan un número menor a 5 en la celda de color amarillo, presionen la tecla Enter. ¿Qué pasa en la celda azul?
b. Introduzcan un número mayor a 5 en la celda de color amarillo, presionen la tecla Enter. ¿Qué pasa en la celda azul?
c. Introduzcan el número que ustedes quieran en la celda de color amarillo, presionen la tecla Enter. ¿Qué pasa en la celda azul?
d. ¿Cómo se relacionan los números que escribieron en la celda de color amarillo con los que resultaron en la celda de color azul? Expliquen con sus propias palabras.
e. Si las celdas no estuvieran pintadas, las podrían nombrar de otra manera, ¿cómo? Expliquen su respuesta
f. ¿Cómo podrían expresar la regla que conecta los números que escribieron en la celda amarilla con los números que se generan de la celda azul?
g. Utilizando los nombres de las celdas de Excel que identificaron en pregunta **e**, ¿Cómo expresarían las reglas que conectan a la celda de color amarillo con la de color azul?

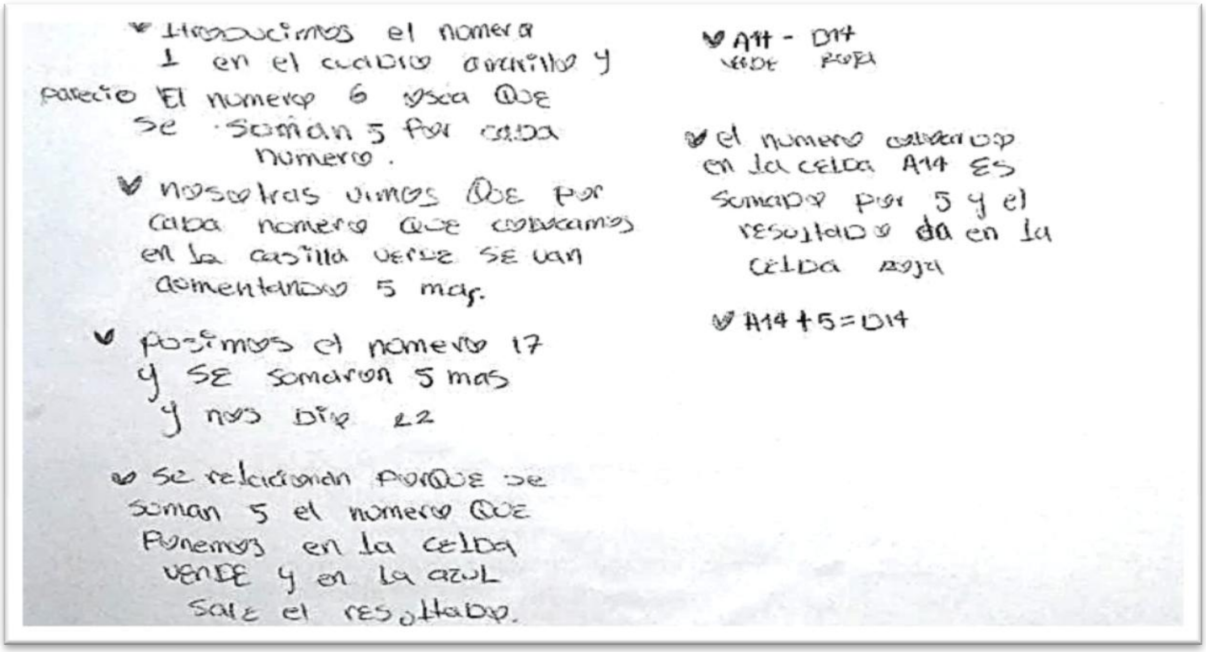
2. Coloquen el cursor sobre la celda (el rectángulo verde) y hagan *clik.*

a. Introduzcan un número menor a 5 en la celda de color verde, presionen la tecla Enter. ¿Qué pasa en la celda roja?
b. Introduzcan un número mayor a 5 en la celda de color verde, presionen la tecla Enter. ¿Qué pasa en la celda roja?
c. Introduzcan el número que ustedes quieran en la celda de color verde, presionen la tecla Enter. ¿Qué pasa en la celda roja?
d. ¿Cómo se relacionan los números que escribieron en la celda de color verde con los que resultaron en la celda de color rojo? Expliquen con sus propias palabras.
e. Si las celdas no estuvieran pintadas, las podrían nombrar de otra manera, ¿cómo? Expliquen su respuesta.
f. ¿Cómo podrían expresar la regla que conecta los números de la celda verde con los números de la celda roja?
g. Utilizando los nombres de las celdas de Excel que identificaron en la pregunta **e**, ¿Cómo expresarían las reglas que conectan a la celda de color verde con la celda de color rojo?

3. Teniendo en cuenta la explicación de los docentes, deberás crear una regla entre dos celdas para que tu compañero la identifique.

Figura No. 5. 7 Hoja actividad IV Excel

Para esta actividad los estudiantes tenían una hoja de trabajo que se mostró en la Figura No 5.9, la cual explicaba paso a paso el ejercicio a desarrollar en la hoja de cálculo de Excel, que se muestra en la Figura 5.3. La forma como los grupos de trabajo abordaron la situación nos sorprendió mucho, ya que desde un principio los estudiantes identificaron la necesidad de utilizar un lenguaje diferente al natural.


Introducimos el numero 1 en el cuadrito amarillo y parecio El numero 6 osea Que se suman 5 por cada numero.

nosotras vimos Que por cada numero Que colocamos en la casilla verde se van aumentando 5 mas.

pusimos el numero 17 y se sumaron 5 mas y nos dio 22

se relacionan porque se suman 5 el numero Que ponemos en la celda verde y en la azul sale el resultado.

A14 - D14
verde roja

el numero colocado en la celda A14 es sumado por 5 y el resultado da en la celda roja

A14 + 5 = D14

Figura No. 5. 8 Actividad de Excel, hoja de trabajo estudiantes

Transcripción del texto Figura No. 5. 10:

- Introducimos el número 1 en el cuadrito amarillo y apareció el número 6, o sea que se suma 5 por cada número.
- Nosotros vimos que para cada número que coloquemos en la casilla verde, se van aumentando 5 más.
- Se relacionan porque se suman 5 el número que pongamos en la celda verde y en la celda azul sale el resultado.
- A14 – D14
- El número correspondiente a la celda A14 es sumado por 5 y el resultado da en la celda roja.
- A14 + 5 = D14

En la Figura No. 5.8 se evidencia cómo los estudiantes, a medida que iban desarrollando esta actividad, logran ver la necesidad de comunicar de una manera más precisa lo que van desarrollando y la estructura que han identificado, es por ello que comunican la estructura utilizando, en un primer momento, el lenguaje natural y después lo comunican utilizando el lenguaje del entorno Excel; esto fue el común denominador encontrado en las ocho parejas que desarrollaron la actividad; para ver más Apéndice No 5.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos de esta actividad, basados en los registros obtenidos en las hojas de trabajo, lo desarrollado por los estudiantes en Excel, la interacción con el profesor y con los demás estudiantes y la categorización con los niveles de pensamiento establecidos en el Capítulo 2.

Tabla No 5. 5 Resultados Actividad IV Excel

Niveles de pensamiento descritos Capitulo 2	Estrategias de los estudiantes	Información recolectada de la observación directa, interacción con los estudiantes, audio grabaciones
Estructural parcial: Identifica los elementos más relevantes de la estructura dada, pero la representación necesita adecuarse.	Identificaron la forma cómo se relacionaba la celda amarilla con la celda azul: "el número que se coloca en la celda amarilla se multiplica por 5 y el resultado sale en la casilla azul".	• Se observó que todos los estudiantes identificaron la relación que conecta la casilla amarilla con la casilla azul y la relación que conecta la casilla verde con la casilla roja, esto se logró gracias a las indicaciones dadas en la guía de trabajo. • Los estudiantes evidenciaron que todos los números que ingresaban a la casilla amarilla y a la casilla verde se operaban, y que el resultado aparecía en la casilla azul y en la casilla roja. Un estudiante manifestó: "¡Profe! la relación es la tabla del 5". • Identificaron la relación entre casillas, pero a algunos se les complicó la identificación del entorno o lenguaje de Excel.
Desarrollo estructural: Identifica y representa correctamente los elementos numéricos presentes en la situación dada.	Ponían un número en la casilla amarilla, éste se multiplicaba por 5 y su resultado aparecía en la casilla azul, además, también expresaron esta relación utilizando las coordenadas de las casillas de Excel.	• Los ocho estudiantes construyeron la regla que relaciona las casillas, utilizando las coordenadas de la siguiente manera: A14 + 5 = B14. Los estudiantes restantes construyeron la regla utilizando las coordenadas de las casillas en lenguaje natural. • Los estudiantes evidenciaron que cuando variaba un número de una de las casillas la otra casilla también variaba, pero que en las dos situaciones existían unas operaciones que no variaban porque eran

		constantes. • Identificaron la relación y las operaciones implícitas en las casillas, también se familiarizaron con el entorno de Excel para crear nuevas relaciones entre casillas y, además, la forma como la presentan es completa.

5.3 Resumen

En este Capítulo 5 se presentaron los resultados obtenidos en las tres últimas preguntas de la exploración inicial y los resultados obtenidos en la segunda parte de la innovación curricular; la cual se desarrolló en las cuatro sesiones que se tenían planeadas. Se observó que el 100% del grupo de estudiantes estaban muy motivados; creemos que esto se logró debido a que las actividades planteadas tenían un contexto cercano al de los estudiantes, además de que estas actividades eran alcanzables en términos de sus habilidades y conocimientos. También cabe resaltar lo beneficioso que resultó el trabajo en grupo, ya que permitió generar espacio de interacción entre los estudiantes. Las actividades del embaldosado y de las botellas permitieron que los estudiantes comenzaran a fijar su atención en la forma como se pueden relacionar cantidades en una situación determinada, logrando que ellos identificaran que números se mantienen constantes, que números cambian y como estos se relacionan; esto les permitió describir la generalidad en cada una de las dos situaciones por medio de expresiones matemáticas utilizando su lenguaje natural. Es importante resaltar las diferentes reflexiones a las que llegaron los estudiantes gracias al trabajo con los videos de conservación del medio ambiente. Por último, la actividad de Excel logró que los estudiantes evidenciaran la necesidad o facilidad de utilizar un lenguaje más conciso para expresar las generalidades que lograban descubrir.

Capítulo 6. Impacto de la innovación curricular

El propósito de nuestro proyecto era: *Identificar la pertinencia de una innovación curricular cuyo objetivo es apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico en un grupo de estudiantes de grado octavo.* En este capítulo se muestra si en realidad logramos generar un cambio en el pensamiento matemático de los estudiantes del Grupo A. En la sección 6.1 mostramos los resultados obtenidos de cada uno de los estudiantes del Grupo A y, además, el consolidado general de los resultados obtenidos de dicho grupo con el propósito de saber si se apoyó o no el desarrollo del pensamiento algebraico en este grupo de estudiantes. En la Sección 6.2 mostramos la indagación que se hizo en el currículo del Colegio del Grupo B con el fin de conocer cuáles son las decisiones y acciones curriculares que se imparten en la clase de matemáticas del Grupo B. En la Sección 6.3 se muestran los resultados obtenidos por el Grupo B en el cuestionario inicial y en el cuestionario final. Por último en la Sección 6.4 mostramos la evolución del pensamiento matemático de los estudiantes de los dos grupos, comparando los resultados obtenidos en cuanto a los niveles de pensamiento de los estudiantes atendiendo a los focos matemáticos de este proyecto, presentando los aspectos más relevantes que surgieron en cada pregunta presentada en los cuestionarios implementados.

Para determinar el nivel de comprensión de los estudiantes y poder codificar los resultados obtenidos se estableció una guía de puntuación que se presenta en el Apéndice N° 6. A continuación, presentamos un ejemplo de la guía de puntuación para la pregunta número 1 del cuestionario.

Tabla No. 6.1. Guía de puntuación para las respuestas de los estudiantes al cuestionario (inicial y final)

PREGUNTA	PUNTAJE	JUSTIFICACIÓN
1. Identifica al igual como un símbolo que permite expresar equivalencias entre expresiones	0	No responde o escribe expresiones que no son equivalentes
	1	Imita o hace una réplica de las expresiones dadas
	2	Expresa equivalencias de manera adecuada

6.1 Evolución del pensamiento matemático de los estudiantes del Grupo A

En la Tabla No. 6.2 se presentan los resultados obtenidos por cada uno de los estudiantes del Grupo A en el cuestionario inicial y final, incluyendo el consolidado general del grupo en dichos cuestionarios.

Tabla No. 6.2 Resultados Cuestionario inicial y final Grupo A.

PREGUNTA / ESTUDIANTE	1		2		3		4		5		6		RESULTADOS CUESTIONARIO INICIAL		RESULTADOS CUESTIONARIO FINAL	
	CI	CF	CI	CF	CI	CF	CI	CF	CI	CF	CI	CF	PUNTAJE	%	PUNTAJE	%
1	2	2	2	1	1	2	2	3	2	4	3	3	12	75%	15	94%
2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	4	3	3	12	75%	15	94%
3	2	2	0	2	2	2	2	3	4	3	2	3	12	75%	15	94%
4	2	2	0	2	1	1	2	2	4	4	2	3	11	69%	14	88%
5	2	2	1	2	2	2	1	2	3	4	2	2	11	69%	14	88%
6	2	2	0	2	1	2	1	2	3	4	1	2	8	50%	14	88%
7	2	2	0	2	1	1	1	2	2	4	2	3	8	50%	14	88%
8	1	2	0	2	2	1	2	2	1	4	1	3	7	44%	14	88%
9	2	2	0	0	1	2	2	2	2	4	0	3	7	44%	13	81%
10	2	2	1	2	2	1	0	3	2	4	0	3	7	44%	15	94%
11	0	2	0	0	1	2	2	2	0	4	2	3	5	31%	13	81%
12	0	2	0	2		1	2	3	1	4	1	3	4	25%	15	94%
13	2	2	0	0	1	0	1	1	1	4	0	3	5	31%	10	63%
14	1	2	0	2	0	1	1	2	1	4	1	3	4	25%	14	88%
15	0	2	0	0	2	1	1	1	0	2	0	1	3	19%	7	44%
16	0	2	0	2	0	2	0	2	0	4	2	3	2	13%	15	94%
CI: Cuestionario Inicial	22	32	6	23	18	23	22	34	28	61	22	44	118	46%	217	85%
CF:Cuestionario Final	69%	100%	19%	72%	56%	72%	46%	71%	44%	95%	46%	92%				

Pregunta 1. Niveles 0-1-2 **Pregunta 2.** Niveles 0-1-2 **Pregunta 3.** Niveles 0-1-2 **Pregunta 4.** Niveles 0-1-2-3

Pregunta 5. Niveles 0 -1-2-3-4 **Pregunta 6.** Niveles 0-1-2-3 (Mirar guía de puntuación Apéndice No. 6)

Atendiendo a los propósitos de cada pregunta, a continuación, mostramos de manera general una breve interpretación de los resultados obtenidos por el Grupo A en los cuestionarios inicial y final.

En la *pregunta número uno,* evidenciamos que en el cuestionario inicial los estudiantes alcanzaron un 69% de comprensión, pero el cuestionario final refleja una mejora en la totalidad de los estudiantes evidenciándose una comprensión del 100%, lo que nos da a entender que todos los estudiantes reconocen al igual como símbolo que les permite relacionar expresiones que son equivalentes. Además, en la entrevista de seguimiento los seis estudiantes entrevistados manifestaron que el signo igual no sólo lo ven como un símbolo que les indica que deben hacer las operaciones, sino que también se utiliza para representar la equivalencia de dos expresiones y, que, en ocasiones, no indica que se tiene que realizar una operación determinada.

En la *pregunta número dos,* los estudiantes alcanzaron un nivel de comprensión del 19% en el cuestionario inicial; gracias a los resultados obtenidos en esta pregunta pudimos evidenciar las dificultades que presentan algunos estudiantes al operar números naturales y la poca relevancia que le dan a la estructura en expresiones numéricas; sólo se limitan a operar números y a encontrar un resultado. No obstante, en el cuestionario final los estudiantes alcanzaron un nivel de comprensión del 72%. Al haber obtenido este resultado se evidencia una evolución en la comprensión de los estudiantes, ya que en el cuestionario final reconocieron estructura numérica al identificar la expresión equivalente a la dada, sin necesidad de realizar las operaciones aritméticas indicadas; además, en la entrevista de seguimiento, cinco de los seis estudiantes manifestaron que no era necesario realizar las operaciones indicadas, ya que si observaban las expresiones dadas y, si éstas tenían los mismos números con los mismos signos en diferente orden, entonces eran equivalentes.

En la *pregunta número tres* del cuestionario inicial, los estudiantes alcanzaron una comprensión del 59%, mientras que en el cuestionario final se evidencia un avance en el pensamiento de los estudiantes ya que alcanzaron una comprensión del 72%, mostrando una comprensión más profunda sobre la forma cómo se pueden descomponer números en decenas y unidades utilizando las propiedades conmutativa y asociativa de la suma, generando expresiones equivalentes a partir de una estructura numérica establecida. En la entrevista de seguimiento, cuatro de los seis estudiantes manifestaron que era importante mirar bien que era lo que tocaba hacer con cada uno de los números que iban a sumar, es decir, debían fijarse en la estructura dada para poder desarrollar de manera adecuada esta pregunta. Al indagar aún más en el pensamiento de los estudiantes, dos estudiantes nos manifestaron que esa manera de sumar se podía aplicar a cualquier par de números que tuvieran dos dígitos.

En la pregunta *número cuatro* del cuestionario inicial, se obtuvo un porcentaje de comprensión por parte de los estudiantes del 46%, se evidenciaron dificultades cuando querían expresar la estructura espacial de manera general. Por otra parte, en el cuestionario final hubo una evolución, ya que los estudiantes obtuvieron un 71% de comprensión en cuanto a la identificación de estructura espacial y el manejo de las letras en expresiones matemáticas. En las entrevistas de seguimiento del cuestionario final, cuatro de los seis estudiantes manifestaron que ahora sí entendían cómo por medio de una expresión matemática se podía expresar el área de un rectángulo de manera general; mientras que los otros dos estudiantes pensaban que el área debería ser un número. Interactuando con este par de estudiantes conseguimos que ellos reconocieran que el área de un rectángulo se puede expresar de manera general.

En la *pregunta número cinco* del cuestionario inicial, los estudiantes obtuvieron un nivel de comprensión del 44%, se evidencia que se les dificultó ver la estructura numérica que determinaba dicha situación. En el cuestionario final los estudiantes alcanzaron un 95% de comprensión; es decir, que la gran mayoría de los estudiantes lograron identificar la estructura que describía el patrón y la pudieron comunicar de manera efectiva utilizando el lenguaje natural y, en algunas ocasiones, lenguaje sincopado o lenguaje formal. En la entrevista de seguimiento los estudiantes manifestaron que era muy fácil determinar la forma cómo se relacionaba el número de la figura con el número de cuadritos, si se detenían a mirar como variaba el número de cuadritos de una figura a la otra determinando que operaciones se debían realizar.

En la *pregunta número seis* del cuestionario inicial, observamos que el nivel de comprensión obtenido fue de un 46%. Los estudiantes tuvieron muchas dificultades para identificar y establecer dicha relación; mientras que en el cuestionario final el nivel de comprensión fue de un 92%, la mayoría de los estudiantes identificaron la estructura numérica y describieron la regla que relacionaba las dos magnitudes involucradas logrando comunicarlas de manera verbal y escrita. En la entrevista de seguimiento, cuatro de los seis estudiantes, utilizando su lenguaje natural, indicaron la forma como x y y se relacionaban, los otros dos estudiantes llegaron a comunicar la forma como se relacionaban x y y por medio de una expresión matemática.

Al comparar los resultados obtenidos por los estudiantes del Grupo A en el cuestionario inicial y en el cuestionario final, y sus respectivas entrevistas de seguimiento, se puede observar una **evolución** en cada uno de los estudiantes, ya que el nivel de comprensión del grupo en general pasó de un 46% en el cuestionario inicial, a un nivel de comprensión del 85% en el cuestionario final, esto nos permite afirmar que la innovación curricular: *Tuvo un impacto positivo en el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes, ya que se superaron algunas de las dificultades y necesidades de aprendizaje previamente identificadas en el grupo de estudio.*

6.2 Currículo identificado en el Grupo B

Recordemos que para medir la efectividad de nuestra innovación curricular utilizamos dos grupos de estudiantes, Grupo A en la ciudad de Bogotá y Grupo B en la ciudad de Tunja, seleccionados por ser comparables en cuanto a que tienen el mismo estrato socioeconómico (estratos 1 y 2). Cabe añadir que para poder identificar aspectos básicos del currículo que opera en el Grupo B, utilizamos las siguientes herramientas para la recolección de información:

- Entrevista con el profesor que dirige el curso de matemáticas.
- Preparador de clase del profesor.
- Texto guía Matemática 2000, Editorial Voluntad.
- Interacción con los estudiantes.

A continuación, presentamos las ideas más relevantes sobre el currículo que se indagó en el Grupo B. Esta información se analizó y se comparó de acuerdo a lo recolectado con cada instrumento de recolección de información:

Tabla No. 6.3 Currículo identificado en el Grupo B

Qué se enseña	**Con qué propósito**
1.Adición y sustracción de monomios 2.Multiplicación de monomios 3.División entre monomios 4.Adición de polinomios 4.1Adición de polinomio y monomio 4.2Adición de polinomios 5. Sustracción de polinomios 5.1 Sustracción de polinomio y monomio 5.2 Sustracción de polinomios 6. Multiplicación de polinomios 6.1 Multiplicación de un polinomio por un monomio 6.2 Multiplicación de un polinomio por otro polinomio 6.3 Productos notables 7. División de polinomios 7.1 División de un polinomio entre un monomio 7.2 División entre polinomios 7.3 Regla de Ruffini 7.4 Teorema del resto	Los propósitos son los que se establecen en el texto guía. Desarrollar las capacidades analíticas y el pensamiento lógico. Destreza para resolver problemas. Desarrollar la habilidad para realizar procesos de análisis y síntesis para la resolución de problemas. Es importante que aprendan álgebra por que la van a necesitar en grado noveno. Deben aprender álgebra porque la mayoría, si van a la universidad, la necesitan para resolver problemas y ejercicios.
3. Cómo se enseña. Qué sucede en el aula de clase (enfoques metodológicos).	**4. Qué se evalúa y cómo se evalúa**
El profesor explica los temas del libro y expone las definiciones formales, luego explica la forma como se deben resolver algunos ejercicios, por último, les deja ejercicios a sus alumnos para que ellos los solucionen, repitiéndolos algoritmos dados. Además, el docente manifiesta que: “sólo dejando muchos ejercicios, ellos pueden saber cómo solucionar los diferentes ejercicios que se les presenten”. De igual forma, como tienen dos sesiones de clase a la semana, en la segunda sesión siempre les deja ejercicios del libro para que ellos los solucionen de tarea, esa tarea la revisa en la primera sesión de la siguiente semana, socializando los ejercicios que generaron dudas y, así repite la misma **rutina de trabajo semana a semana.**	Los temas y los algoritmos vistos en clase, por medio de evaluaciones escritas, talleres del libro guía y participación en clase.

6.3 Evolución del pensamiento matemático de los estudiantes del Grupo B

En la Tabla No. 6.4 se presentan los resultados obtenidos por cada uno de los estudiantes del Grupo B en el cuestionario inicial y final, incluyendo el consolidado general del grupo en dichos cuestionarios

.

Tabla No. 6.4 Resultados Cuestionario inicial y final Grupo B

PREGUNTA / ESTUDIANTE	1		2		3		4		5		6		CUESTIONARIO INICIAL		CUESTIONARIO FINAL	
	CI	CF	CI	CF	CI	CF	CI	CF	CI	CF	CI	CF	PUNTAJE	%	PUNTAJE	%
1	2	0	0	0	1	1	2	2	2	2	1	1	8	50%	6	38%
2	2	2	0	0	1	0	2	1	1	1	1	1	7	44%	5	31%
3	2	1	2	2	2	1	1	2	3	3	2	2	12	75%	11	69%
4	0	0	2	2	1	1	2	2	2	1	1	1	8	50%	7	44%
5	2	2	0	0	1	1	2	2	1	1	1	1	7	44%	7	44%
6	0	1	0	1	0	0	2	2	0	0	0	0	2	13%	4	25%
7	2	2	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	4	25%	4	25%
8	0	1	2	2	1	1	2	3	1	0	2	1	8	50%	8	50%
9	2	2	2	2	2	2	3	3	4	3	2	2	15	94%	14	88%
10	0	0	2	2	2	2	2	2	2	1	2	1	10	63%	8	50%
11	2	2	0	0	1	1	2	2	1	2	1	1	7	44%	8	50%
12	0	0	0	0	0	0	2	2	0	1	1	1	3	19%	4	25%
13	2	2	0	0	1	1	2	2	0	0	0	2	5	31%	7	44%
14	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	1	2	13%	3	19%
15	1	1	0	0	2	2	2	2	2	2	2	3	9	56%	10	63%
16	0	1	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	6	38%	7	44%
17	1	2	0	0	1	2	0	0	1	1	1	1	4	25%	6	38%
18	0	2	2	2	1	1	2	2	0	1	1	1	6	38%	9	56%
19	2	2	2	1	1	2	2	2	1	2	1	1	9	56%	10	63%
20	2	1	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2	11	69%	10	63%
21	0	0	2	2	2	1	2	2	4	1	2	2	12	75%	8	50%
22	2	2	2	1	2	2	2	2	1	3	1	1	10	63%	11	69%
23	1	1	2	2	0	0	0	0	0	1	0	0	3	19%	4	25%
24	2	2	0	0	2	2	1	1	1	2	2	2	8	50%	9	56%
25	2	1	0	1	1	2	1	1	1	1	1	1	6	38%	7	44%
26	0	2	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2	8	50%	11	69%
27	2	1	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	9	56%	8	50%
28	2	2	2	2	1	2	2	2	3	2	2	2	12	75%	12	75%
CI: Cuestionario Inicial	33	35	28	28	32	33	45	46	37	39	36	37	211	47%	218	49%
CF: Cuestionario Final	59%	47%	50%	50%	57%	59%	54%	55%	58%	61%	43%	44%				

Pregunta 1. Niveles 0-1-2 **Pregunta 2.** Niveles 0-1-2 **Pregunta 3.** Niveles 0-1-2 **Pregunta 4.** Niveles 0-1-2-3

Pregunta 5. Niveles 0 -1-2-3-4 **Pregunta 6.** Niveles 0-1-2-3 (Mirar guía de puntuación. Apéndice No. 6)

Los resultados revelan que los estudiantes del Grupo B tuvieron una comprensión del 47% en la prueba inicial, mientras que en el cuestionario final se evidenció una comprensión del 49%, es decir que *no se ve una evolución significativa en el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes.* Gracias a las evidencias recolectadas en el Grupo B, a través de las hojas de trabajo con los estudiantes, las entrevistas de seguimiento, la indagación en el currículo del profesor, podemos *ratificar* que el currículo mecanicista *no apoya el desarrollo del pensamiento algebraico en este grupo de estudiantes.*

6.4 Comparación de la evolución del pensamiento matemático del Grupo A Vs. Grupo B

En esta sección nos centraremos en los resultados obtenidos por los dos grupos en el cuestionario final, con el propósito de poder dimensionar el impacto que tuvo la innovación curricular, teniendo como punto de comparación los avances que cada grupo logró, recordemos que el grupo A participó en la innovación curricular, mientras que el grupo B fue expuesto al currículo descrito en la Tabla No. 6.3. En la siguiente Figura se muestra el nivel de comprensión alcanzado por cada grupo en cada una de las seis preguntas.

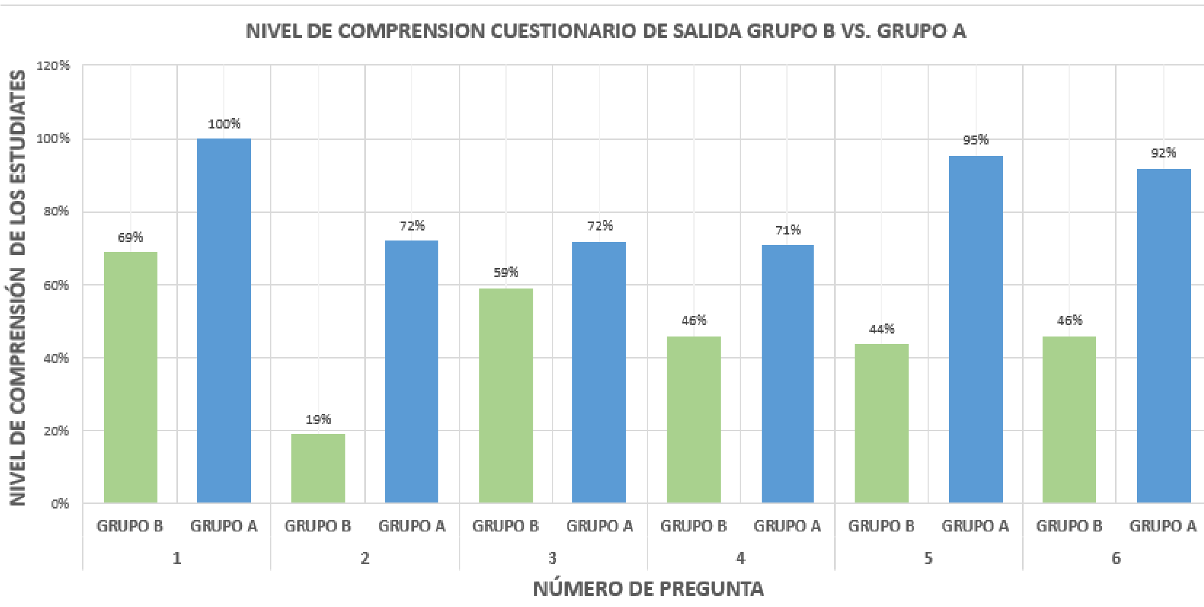


Figura No. 6.1 Nivel de comprensión Grupo A vs. Grupo B

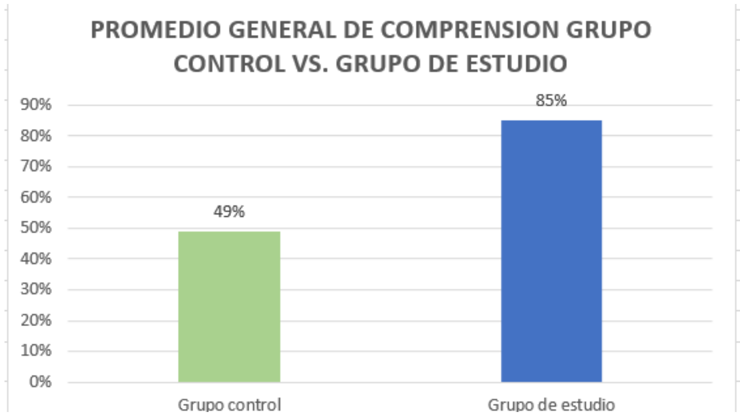


Figura No. 6.2 Promedio general Grupo A vs. Grupo B

Como se evidencia en los resultados obtenidos, los avances logrados por el Grupo A son muy superiores a los alcanzados por el Grupo B. En la pregunta número uno, el nivel de comprensión que evidenció el Grupo A fue del 100%, mientras que el Grupo B obtuvo un 63%. En la segunda pregunta, el nivel de comprensión del Grupo A fue de un 72% y el Grupo B alcanzó un nivel de 50%. Ahora, en la tercera pregunta, el nivel de comprensión del Grupo A fue de 72%, mientras que el Grupo B alcanzó un 59%. En la pregunta número cuatro, el nivel de comprensión del Grupo A fue de 71%, mostrando que el Grupo B llegó a un 55%. En la pregunta número cinco, el Grupo A alcanzó una comprensión del 95%, mientras que el Grupo B llegó al 61%. En la pregunta número seis, el Grupo A logró un 92% de comprensión, mientras que el Grupo B registró un 44%.

Además, en las entrevistas de seguimiento pudimos observar cómo los estudiantes que hicieron parte del Grupo A lograban comunicar sus ideas matemáticas de una manera más clara, mostrando su comprensión en torno a la identificación de estructura matemática, ya que ampliaron el significado que le dan al signo igual, el reconocimiento de expresiones equivalentes, patrones y relaciones funcionales. Lo mencionado anteriormente resulta ser un factor determinante cuando se habla del desarrollo de pensamiento algebraico, es por ello que estos resultados obtenidos por parte de los dos grupos en el cuestionario final nos permiten ratificar nuevamente que la innovación curricular sí apoyó el desarrollo de pensamiento algebraico en el Grupo A.

6.5. Efecto de la innovación curricular en la motivación de los estudiantes (Grupo A)

En esta sección mostramos los resultados de la información recolectada sobre aspectos motivacionales y afectivos de los estudiantes en relación con el trabajo que se desarrolló en la secuencia de actividades. Como se explicó en el Capítulo 3, la información fue recolectada por diferentes medios: Observación directa durante el desarrollo de las actividades de clase, registro de los profesores en el diario de campo, audiograbaciones de las sesiones, encuesta diseñada a propósito, que presentamos en la Figura No. 6.3, y encuesta bimestral que realiza el colegió, en la que se pregunta, "Cuál es su asignatura preferida en el bimestre". Resaltamos que la encuesta aplicada después de cada clase era anónima.

Responde las siguientes preguntas, se muy sincero al responder

Marca con una X la repuesta que escojas

1. **El trabajo de matemáticas desarrollado en esta clase, para mí, fue:**

	Interesante
	Fácil
	Difícil
	Aburridor
	Muy parecido a lo que hacemos en cualquier clase de matemáticas.

2. **En esta clase me sentí**

	Me sentí motivado(a) por realizar las actividades
	Me sentí seguro(a) de mis ideas al contestar las preguntas
	Me gusto trabajar en parejas
	No entendí bien que era lo que había que hacer

Haz un comentario adicional:

Figura No. 6.3 Encuesta de motivación aplicada después de cada clase

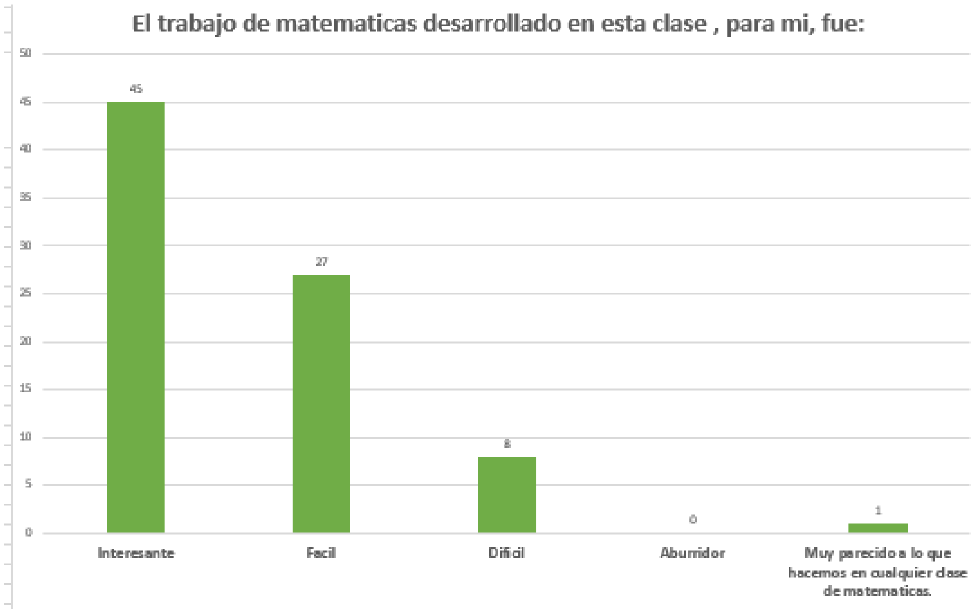


Figura No. 6.4 Impacto en la motivación de los estudiantes pregunta 1

Los resultados de las encuestas de satisfacción son una evidencia importante de la conexión y afinidad que tuvieron los estudiantes con este tipo de actividades; es claro, que los estudiantes tuvieron acceso a las diferentes situaciones planteadas en la innovación, esto lo evidenciamos la ver la motivación en cada uno de ellos y en lo que escribieron en la esta encuesta. Cuando los estudiantes no tienen acceso a este tipo de actividades se afectan emocionalmente lo que quiere decir que de un problema cognitivo pasan a un problema afectivo hacia las matemáticas en general.

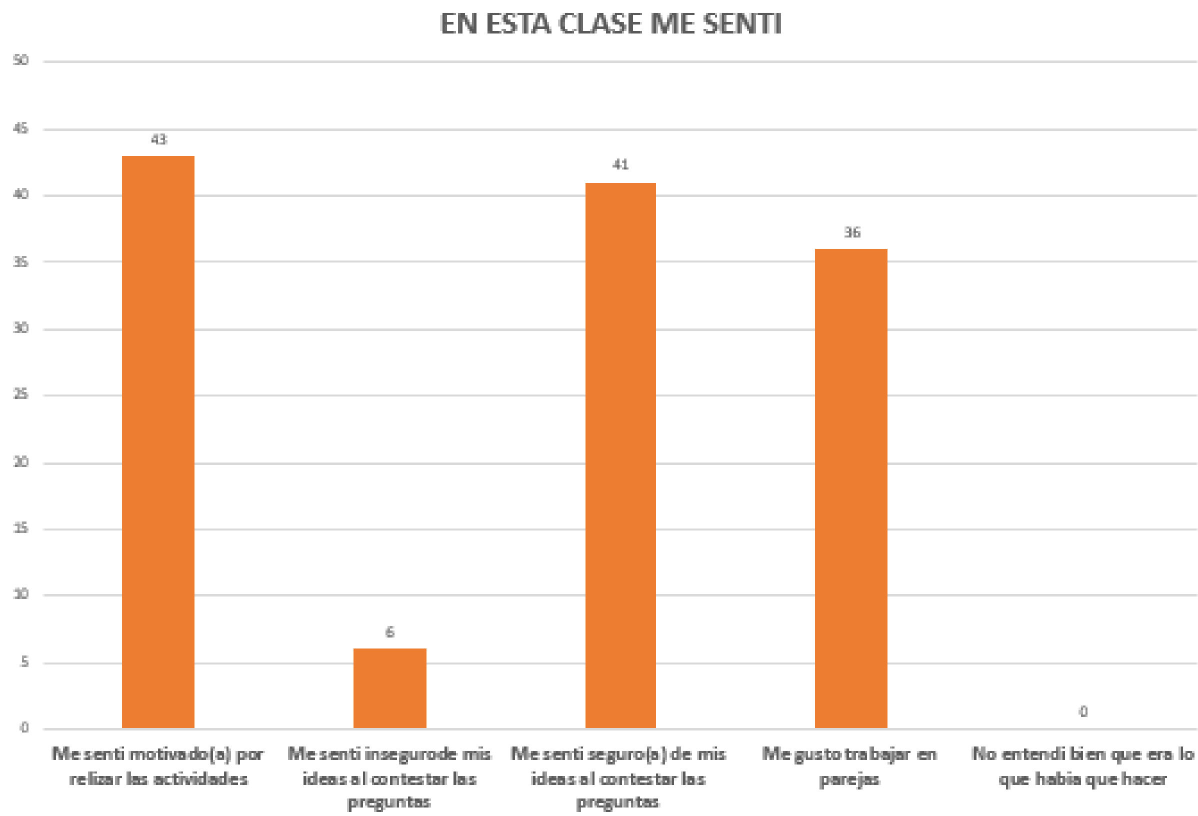


Figura No. 6.5 Efecto en la motivación de los estudiantes pregunta 2

Como se puede observar al 72% de los estudiantes encuestados la secuencia de actividades les pareció interesante y fácil, además se refleja que un 43% se sintieron motivados y otro 41% se sintieron seguros de las ideas al contestar las preguntas de las situaciones planteadas en la innovación curricular. (Para ver la opinión de los estudiantes ver Apéndice No. 3)

Capítulo 7. Conclusiones y Reflexiones

Antes de iniciar el desarrollo de este proyecto creíamos que el problema era de los estudiantes, pero a medida que fuimos desarrollando el proyecto nos dimos cuenta que el problema no está en los estudiantes sino en la forma como el docente concibe la naturaleza del conocimiento matemático y, consecuentemente, su enseñanza y aprendizaje; es decir, que el problema es del profesor y las decisiones curriculares que éste toma. Como nuestra forma de saber matemáticas era netamente procedimental y formalista—*i.e.,* en el caso del algebra escolar, nuestra preocupación estaba centrada en que los estudiantes alcanzaran el dominio de reglas para operar con expresiones simbólicas, de tal manera que abarcaran los contenidos que tradicionalmente están en textos guía—habíamos establecido rutinas para la enseñanza del álgebra sin estar realmente conscientes del hecho que se pueden manipular expresiones simbólicas sin que haya desarrollo de pensamiento algebraico. Con esta profundización sobre las causas del problema, nuestro propósito en este proyecto era apoyar el desarrollo de pensamiento algebraico en un grupo de estudiantes de grado octavo, involucrándolos en el desarrollo de tareas y actividades que fueran de fácil acceso para ellos. En este capítulo presentamos las conclusiones y reflexiones alcanzadas al desarrollar este trabajo; en un primer momento presentáremos las conclusiones y en un segundo momento las reflexiones.

7.1 Conclusiones

En este proyecto se evidenció que un buen porcentaje de los estudiantes, antes de la puesta en acción de la innovación curricular, mostraban total ausencia de comprensión de conceptos aritméticos básicos, como el significado del signo igual o de las propiedades de la suma y la multiplicación. Al finalizar la puesta en acción de la innovación curricular, la gran mayoría (15 de 16 estudiantes) superó las dificultades ya mencionadas y evidenció capacidades para identificar estructura matemática en las situaciones problema enfocadas en clase, y construir generalizaciones a partir de la estructura que habían identificado en casos particulares. Como lo sostienen Mason y colegas (2014), las potencialidades de los niños para pensar algebraicamente necesitan ser apoyadas des de edades tempranas en la escuela.

La identificación de estructura (matemática) se convierte en foco central de atención en la actividad de aula que pretende apoyar el desarrollo de pensamiento algebraico. La secuencia de actividades (la innovación curricular) apoyó el desarrollo de pensamiento algebraico en el grupo de estudiantes (Grupo A) porque las actividades de aula fueron diseñadas teniendo como referentes centrales las potencialidades y necesidades de aprendizaje identificadas en la fase de exploración del pensamiento de los estudiantes. A continuación, presentamos los avances que identificamos en el Grupo A respecto al desarrollo de pensamiento algebraico.

- El 93 %; es decir, 15 estudiantes de los 16 del grupo lograron reconocer el signo igual como un símbolo que les permite identificar y expresar cuándo dos expresiones matemáticas son equivalentes. De igual forma, el trabajo desarrollado, centrando la atención en el significado del signo igual permitió que los estudiantes construyeran el significado de la propiedad conmutativa, tanto de la suma como de la multiplicación; esto último se evidenció en el trabajo realizado por los estudiantes en cada una de las situaciones planteadas, la interacción con los docentes y lo reportado en las audiograbaciones.

- El 87.5% del grupo de estudiantes identificó la forma como se pueden relacionar las cantidades presentes en una situación problema particular dada, y luego—al considerarse la variación en tal situación— expresar tal relación de manera general. Para comunicar las generalizaciones, los estudiantes primero utilizaron su lenguaje natural como se mostró en el Capítulo 5.

- El desarrollo de la Actividad IV evidenció que el 100% del grupo de estudiantes identificó la necesidad de adoptar un lenguaje más sucinto para expresar la relación entre cantidades que cambian, mostrando comprensión de la variable como numero general. En el entorno Excel, los estudiantes usaron el leguaje especifico de Excel para comunicar lo que en éste vivían, y lo evidenciaban utilizando expresiones como A1 + 5 = A2, pasando del uso de un lenguaje natural a uno que es simbólico, y llegando a manejar tales símbolos, pero con significado y comprensión para ellos.

- Cuando aplicamos el cuestionario inicial observamos que, tanto el Grupo A como el Grupo B presentaban un nivel muy similar en cuanto a su desarrollo de pensamiento matemático. El 47% del grupo de estudiantes A mostró comprensión en las actividades de exploración, mientras que para el Grupo B fue el 46%. En la fase final, esto es, después de implementar la innovación curricular, los niveles de comprensión evidenciados a través de la aplicación del cuestionario final y su entrevista de seguimiento fueron del 85% en el Grupo A, mientras que para el Grupo B (grupo de control) fueron del 49%.

- Evidenciamos que no hay necesidad de apurarnos a trabajar con expresiones literales para apoyar el desarrollo de pensamiento algebraico en los estudiantes, ya que si se trabajan situaciones problema de fácil acceso, atendiendo a las necesidades de aprendizaje de los estudiantes, donde ellos puedan explorar la variación entre números y puedan describir lo que hacen *en su leguaje natural* inicialmente, esto será mucho más significativo y ellos mismos verán la necesidad de utilizar un lenguaje más efectivo y sucinto para comunicar dicha variación.

7.2 Reflexiones

- Las situaciones problema cercanas a los estudiantes generan un grado mayor de motivación cuando ellos pretenden abordarlas e intentan solucionarlas.

- Trabajar la identificación de estructura matemática con los estudiantes en diferentes contextos, potencializa sus habilidades para identificar y comunicar relaciones cuantitativas entre variables que cambian de manera conectada (regularidades y patrones en cualquier situación). Como lo subrayan MacGregor y Stacey (1995), cuando la enseñanza no promueve la identificación de la forma como se relaciona las variables presentes en una situación matemática, los estudiantes simplemente producen una regla para el computo, “regla de recurrencia” que les permite hallar el valor de un término pedido, sin haber identificada la relación funcional.

- Es muy importante que la labor del docente se centre en generar actividades abiertas para abordar las necesidades de aprendizaje que identifica en sus estudiantes, donde el estudiante deje volar su imaginación, construyendo su propio conocimiento, y así se potencialicen sus habilidades naturales, piense algebraicamente y logre, de ese modo, desarrollar su pensamiento matemático.

- El desarrollo de este proyecto nos permitió ampliar nuestra visión sobre lo que es *aprender*, pues antes de iniciar nuestro proyecto creíamos que los estudiantes habían aprendido cuando recitaban de memoria las definiciones y utilizaban los algoritmos que nosotros con anterioridad les habíamos trasmitido; ahora, en este momento, comprendemos que un estudiante ha aprendido si logra relacionar el conocimiento que ha construido con otros conocimientos de su vida cotidiana y con los conceptos que se están enfocando, y con conocimiento de otras ciencias o disciplinas, es decir que existe aprendizaje sólo cuando hay comprensión.

- De igual forma, en el desarrollo de este proyecto se propuso una posible forma de apoyar un aprendizaje con comprensión en los estudiantes, si se tienen en cuenta sus potencialidades naturales y sus necesidades de aprendizaje—condiciones necesarias para generar ambientes de aprendizaje adecuados para sus estudiantes. En nuestro caso particular, partimos desde las necesidades de aprendizaje y potencialidades detectadas en el Grupo A; éste fue el insumo principal para construir la secuencia de actividades que hizo parte de nuestra innovación curricular.

- Este proyecto nos permitió entender la importancia de que los docentes debemos generar actividades que despierten en los estudiantes la motivación e interés, además de buscar que las actividades estén al alcance de ellos, puesto que el estudiante sentirá satisfacción al alcanzar pequeños logros y no se frustrará al encontrarse con actividades que no entiende.

- El desarrollo de este proyecto nos transformó personal y profesionalmente, ya que cambió nuestras concepciones y amplió nuestra visión sobre lo que involucra diseñar un currículo de matemáticas en su nivel micro, esto es, en el nivel del aula de clase: tomar decisiones informadas sobre el Qué, el Cómo y el Porqué de lo que se planea y lo que se pone en acción en el aula. Nosotros veíamos el currículo como una lista de contenidos y normas impuestos por textos guía, o como las directrices institucionales que consideramos impuestas por el colegio. El profesor es quien necesita organizar y formular el currículo, y no depender completamente de los textos guía de matemáticas o de lo impuesto por la institución; pero esta concepción del rol del profesor demanda una comprensión profunda de los contenidos disciplinares a enseñar y de los elementos pedagógicos implicados, y percibirse a sí mismo como un indagador de su propia práctica docente, vinculándose en un proceso continuo de indagación y reflexión, tal como se puede apreciar en el desarrollo de este proyecto—donde nosotros, como docentes investigadores, nos involucramos en ciclos de indagación y reflexión permanente con el apoyo de nuestra asesora de trabajo de grado, Cecilia Agudelo Valderrama.

Referencias Bibliográficas

Agudelo-Valderrama, y Martínez, D. (2015). En Busca de una Manera Conectada de Saber: El Caso de una Profesora de Matematicas. *Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *13*(3), 121-141.

Agudelo-Valderrama, C. (2014). Presentación de la segunda edición en español del libro Raíces del Álgebra, Rutas hacia el Álgebra, (pp. ix-xiii).

Agudelo-Valderrama, C. (2007). La Creciente Brecha entre las Disposiciones Educativas Colombianas, las Proclamaciones Oficiales y las Realidades del Aula de Clase: Las concepciones de profesores de matemáticas sobre el álgebra escolar y el propósito de su enseñanza. *Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *5*(1), 43-62.

Agudelo-Valderrama, C.(2005). Explicaciones de ciertas actitudes hacia el cambio:las concepciones de profesores y profesoras de matemáticas colombianos sobre los factores determinantes en su práctica de enseñanza del álgebra escolar. *EMA*, 375-412.

Agudelo-Valderrama, C.(2002). Promoción del pensamiento algebraico en la escuela primaria: una propuesta que cobra sentido de acuerdo con nuestras concepciones sobre el conocimiento matemático. *Aula Urbana,* 18-19.

Agudelo-Valderrama, C.(2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Agudelo-Valderrama, C. (1996). Improving mathematics education in Colombian schools: “Mathematics for all". *International Journal of Educational Development*, *16*(1), 15-26.

Ausubel, D. P. (1976). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Ed. Trillas. México

Booth, L. R. (2014), Recurso 0: Algunas concepciones erradas que conducen al error en álgebra elemental. En *Raíces del Álgebra, Rutas hacia el Álgebra* (pp-121-126). Ibagué: Universidad del Tolima.

Elliot, J. (1991). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid: Morata

Ernest, P. (1994). *The Philosophy of Mathematics Eduaction.* The Netherlands: Springer.

González, M., y Pedroza, G. (1999). Reflexiones sobre aspectos claves del algebra escolar. Revista EMA, pag. 87-91

Hopkins, D. (1993). *A Teacher's Guide to Classroom* Research. Buckingham, U. K.: Open Universoty Prees.

Kadijevich, D.(2005). Towards basic standards for research in mathematics education *The teaching of mathematics*, *8*(2), 73–81.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wanger and C. Kieran (Eds.), *Early Algebra*, (pp. 33-56)

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (ed.), *Children's Understanding of Mathematics 11-1*6. Londres: John Murray.

Mason, J. (1996) Expressing Generality and Roots of Algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 65-86), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (1999). Incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: las secuencias de Tunja. *EMA*, 232-246.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., y Gowar, N. (2014). *Rutas hacia el/Raices del Álgebra* (Traducción y edición de Cecilia Agudelo-Valderrama). Ibague: Universidad del Tolima

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares Matemáticas*. Bogota: Ministerio de Educación Nacional .

Mulligan, J., Mitchelmore, M. (1995). Children's intuitive models of multiplication and division. Sidney. MERGA.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33-49.

Ponte, J. P. (1995). Mathematics teacher's profesional knowledge. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings PME XVIII* (vol 1, pp. 195 – 210). Lisboa, Portugal.

Radford, L. (1996). The Roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective. Cap.3, pp. 39-54. En N. Bednarz et al (Eds.), Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching. Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. Educational Students in Mathematics, 237-268.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. PME-NA , 2-21.

Rodríguez, N.(2011). Diseños experimentales en educación. *Revista de Pedagogía, 23(91),147-158.*

Stenhouse, L. (1991): *Investigación y Desarrollo del Curriculum.* Madrid: Morata.

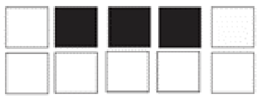
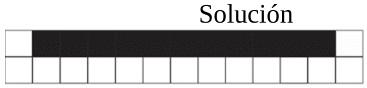
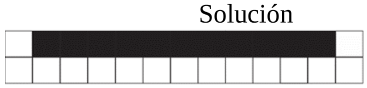
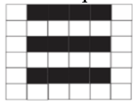
Stenn, L. A. (1998). La enseñanza agradable de las matematicas. Mexico: Limusa.

Apéndices

Apéndice No. 1. Ejemplos de información primaria recolectada durante el desarrollo de las actividades

Estudiante No. 1	1.Hay 98 cuadritos. 14+14+14+14+14+14+14=98 14+14+14+7=49+14+14+14+7=49=98 14+84=98 Explicación [primer intento] : en la primera parte sume siete veces 14 Explicación [otra estrategia]: conté la mitad y lo que me dio le sume la otra mitad. Explicación: conté una fila y así sume el resto 20+18+16+14+12+10+8=98 Explicación: contamos una fila y una columna y a medida que se va disminuyendo va bajando el número para poderlo sumar y así mismo da el resultado 7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+7+7=98. Explicación: sumé catorce veces 7 y me dio 98.
Estudiante No. 2	1.Observé las columnas y filas y multipliqué 14 × 7 =98 para saber cuántos hay. 2. Multiplicando, sumando, contar de uno en uno 14 × 7 = 98 14 Dividí la mitad de la cuadrícula, cuento a un lado y le sumo la otra 49+49=98 Contar de dos en dos hasta llegar al resultado -Sumar 7, 14 veces y eso nos da 98 -Sumar 42+42 meda 84+14=98
Estudiante No. 4	a= hay 98 cuadros b= conté cuadro por cuadro para responder el punto anterior c= 14 14 sume 7 veces el número 14 que fueron las columnas y filas del rectángulo 14 14 14 14 + 14 98 - 1 49 conté la mitad de cuadros del rectángulo y al saber eso, + 49 ya se sabe que hay lo mismo en la otra mitad, y luego 98 se suman Otra forma: 28 dividí el rectángulo en 3 columnas de a 4 y una de a 2. Y luego sume 28 28 +14 98 Otra forma: 38 conté en círculo de afuera hacia dentro y después sumé 30 22 + 8 98

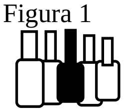
Estudiante No. °6	1. Sumé la mitad y luego le agregue la otra parte faltante 14 2. 1 3. 1 14 × 7 = 98 Es la secuencia que disminuye de a dos, y al final sumando todos los totales 2. Se divide el rectángulo en la mitad y se multiplica en diagonal y el resultado de la multiplicación se suma de las dos unidades 3. 26 22 18 19 10 6 +2 98 (total)
Estudiante No. 7	a)Hay 98 14 7 49 ×7 ×7 +49 98 49 98 b)Lo dividí diagonalmente encontrando dos números iguales, multiplicando la cantidad de la mitad y sumando al final c)14 13 12 11 10 9 8 +7 +6 +5 +4 +3 +2 +1 **21 19 17 15 13 11 9** Es la secuencia que disminuye de a dos y al final sumando todos los totales Se divide el rectángulo en mitad exacta y se multiplica en diagonal y el resultado de la multiplicación se suma de las dos mitades 26 22 19 16 6 +2 98
Estudiante N° 8	28 42 56 70 84 +14 +14 + 14 +14 +14 +14 28 42 56 70 84 Rta: hay 98 cuadritos Miré que horizontalmente hay 14 cuadritos y hay 7 filas entonces hay que sumar 14, 7 veces 20 18 unimos una fila y una columna y se suma el primer 16 resultado nos dio 20 luego unimos la fila y la 14 columna de más adentro y nos dimos cuenta que +12 se iba disminuyendo de 2 en 2 hasta llegar a 8 10 luego cogimos todos los resultados y los sumamos 8 y nos dio 98 98

Estudiante No. 2	Solución 1. Si utiliza 11 negras utiliza 15 blancas porque va sumando 4 blancas las 2 de las esquinas y los que aumenta 2. Si Pedro coloca 200 baldosas negras coloca 204 blancas. Si coloca 350 baldosas negras coloca 354 blancas Si coloco cualquier otro número de todos modos aumenta 4
Estudiante No. 3	1.Pedro usa 15 baldosas blancas. Porque si pone 11 baldosas blancas y agregar dos en cada extremo y eso da 15  2. necesita 7 baldosas blancas por que empezó con Tres negras Pa baldosas negras se necesitan 4 más blancas que negras
Estudiante No. 4	Solución 3.Si utiliza 11 negras utiliza 15 blancas porque va sumando 4 blancas las 2 de las esquinas y los que aumenta 4.Si Pedro coloca 200 baldosas negras coloca 204 blancas. Si coloca 350 baldosas negras coloca 354 blancas Si coloco cualquier otro número de todos modos aumenta 4
Estudiante No. 5	Solución a=  Pedro usa 15 baldosas blancas porque cada vez va aumentando de 4 baldosas B= necesita cuatro baldosas blancas para un número cualquiera de baldosas negras
Estudiante No. 6	Solución a=  Pedro usa 15 baldosas blancas porque cada vez va aumentando de 4 baldosas B= necesita cuatro baldosas blancas para un número cualquiera de baldosas negras
Estudiante No.7	a) b)Siempre a cualquier numero de baldosas negras se le agrega 4 blancas Siempre le tocaría aumentar cuatro baldosas a cualquier número. Es como una cantidad de baldosas negras.
Estudiante No. 15	b. Para cualquier número de baldosa negra se necesitan 4 blancas 

Estudiante No. 16	a.Utilizaría 15 baldosas blancas por que utilizaría primero once y luego añade 2 para cada extremo b. Pues si colocamos cualquier número se le suman 4 a cualquier numero

ACTIVIDAD II y ACTIVIDAD III

Estudiante No. 1	1. Nosotras sacamos el resultado de la figura 3 y así hasta la figura 5; sacamos el resultado de las botellas blancas y así sacamos el resultado de las botellas azules son 5 2. Cogimos la figura del 1 hasta la 5 y nos dio 17 y las otras 5 de 17 les sumamos 3 a cada resultado y nos dio 22 3. Dan 3002 porque pasa como en el punto anterior si en la primera de la figura 1 hasta la 5 da 17 le suma 3 hasta que le da el resultado 3002 4. Si ponemos 1000 botellas blancas y darían 2002 de botellas azules, se tiene que multiplicar la cantidad de figura por 2, y el resultado se le suma 2 y el igual es 3002 Regla: 1.Para encontrar cuantas botellas hay en cualquier número, la figura se tiene que multiplicar por 2, porque todos los números son pares, y después se le suma 2 porque comienza desde 4 botellas blancas nos da el resultado de las botellas blancas. Y para encontrar las botellas azules, sería el mismo número de la figura. Y al final se suman.
Estudiante No. 2	a. Había 17 botellas por cada número de figuras; se le pone botellas azules según el número, y de botellas blancas se debe ir aumentando de a 2. Por ejemplo, si la figura es número tres se pone 3 botellas azules y 8 blancas porque en la figura anterior eran 6, entonces a la figura 3 se aumentan 2 más y así es como da el resultado. b. Hay 22 botellas blancas en la figura número 10 le aumenta de a dos botellas blancas a cada figura por eso medio 22 en la figura 10 c. 2002 1000 x 2=2000+2=2002 nosotros multiplicamos el número de botellas azules por dos porque es lo que se le aumenta a las botellas blancas Regla: multiplicar el número de botellas blancas por 2 y a eso se le suma 2 10.000 × 2+2=20.002
Estudiante No. 3	5.Nosotras sacamos el resultado de la figura 3 y así hasta la figura 5 sacamos el resultado de las botellas blancas y así sacamos el resultado de las botellas azules son5 6.Cogimos la figura del 1 hasta la 5 y nos dio 17 y las otras 5 de 17 les sumamos 3 a cada resultado y nos dio 22 7.Dan 3002 porque pasa como en el punto anterior si en la primera de la figura 1 hasta la 5 da 17 le suma 3 hasta que le da el resultado 3002 8.Si ponemos 1000 botellas blancas y darían 2002 de botellas azules, se tiene que multiplicar la cantidad de figura por 2, y el resultado se le suma 2 y el igual es 3002 Regla: 2.Para encontrar cuantas botellas hay en cualquier número, la figura se tiene que multiplicar por 2, porque todos los números son pares, y después se le suma 2 porque comienza desde 4 botellas blancas nos da el resultado de las botellas blancas. Y para encontrar las botellas azules, sería el mismo número de la figura. Y al final se suman
Estudiante No. 4	Solución a)En la figura número 5 hay 17 botellas, por que comienza desde 4 botellas blancas y una azul, va aumentando de 2 en 2 las botellas blancas, y las azules de uno en uno b)2 x11=22 Lo que hicimos fue multiplicar el doble de 10 y sumarle 2, y a si da el resultado c)Para encontrar, cuantas botellas hay en la figura número 1000, se suma= 2002 +1000 3002

	Porque 2002 es el doble 1000 y luego se le suma 2, que son las botellas blancas, y las azules es el mismo número de las figuras, y a si se puede encontrar cualquier número de figura Regla: Para encontrar cuántas botellas hay en cualquier número, la figura se tiene que multiplicar por 2, porque todos los números son pares, y después se le suma 2, por que comienza desde 4 botellas blancas, nos da el resultado de las botellas blancas. Y para encontrar las botellas azules, sería el mismo número de la figura, y al final se suman.
Estudiante No. 6	a)Figura 1=5=1x3+2 se aumenta a la siguiente figura de a 3 Figura 2=8=2x3+2 siguiendo la secuencia de botellas. Figura 3=11=3x3+2 1000 1000 azules Figura 4=14=4x3=12+2 x3 1000 Figura 5=17=5x3=15+2 3000 x2 2000 22 X11 +10 b)10x3=30+4=32 30x3=90+12=102 1001 3002 17 40x3=120+16=136 170 x2 +17 68 50x3=150+20=170 +170 2002 34 +34 340 20x3=60+8=68 102 340 34 10=10 azules x10 +34 000 68 102 102 340 +34 +68 3400 136 170 Se multiplica el número de la figura siguiente por dos y se le suma el número de la figura al resultado, por ejemplo Figura 1  2 multiplicado por 2=4y se suma el número de la figura en Este caso uno. = 5 1 2x2=+1=5 2000 2001 X2 4002 +2000 6002
Estudiante No. 8	a)En la figura 5 había 17 botellas 5 azules y 12 blancas viendo las dos imágenes nos dimos cuenta que las blancas aumentan de dos en dos y las azules de uno en uno b) En la figura 10 había 22 botellas blancas porque en la figura 10 hay 10 azules entonces las blancas serian el doble de las azules más dos c)Porque el número de las botellas azules es el mismo al número de la figura entonces las blancas serian el doble de las azules más dos entonces en la figura número 1000 serian 1000 azules y 2002 blancas. Entonces en la figura 1000hay 3002 botellas sumando las azules y las blancas d)Para encontrar cualquier número. Es fácil porque el número de botellas azules es igual al número de la figura entonces multiplica por dos y después le suma dos

Estudiante No. 10	a)Si por una botella son 4 y por dos son 6. Nos dimos cuenta que por cada botella azul aumenta 2. Entonces va sumándole dos son 12 b)En la figura número 10 hay 22 botellas blancas. Yo lo hice aumentando 2 botellas blancas por cada azul c)En la figura número 1000 serian 2002 porque se duplica y se le suman 2 y en cualquier figura se duplicaría y se le suma 2 entonces entre blancas y las azules serian 3002 Porque duplicamos las 1000 serian 2000 y le sumamos 2 y le sumamos 1000 azules Regla Que si duplica y se le suma dos… y el número de botellas azules es el de la figura
Estudiante No. 11	Solución 1.Serian 12 blancas y 5 azules porque siempre se le suman 2 blancas y una azul siempre 2.22 blancas y 10 azules Porque si en la figura 5 son 12 blancas y 5 azules Entonces como siempre en cada figura se le suman 2 blancas y 1 azul. Ejemplo Figura 5 blancas 12+2=14 figura 6 Azules 5+1=6 Así sume hasta llegar a la figura 10 que me da de resultado 22 blancas 10 azules En la figura número 1000 serian 3002 botellas
Estudiante No. 14	d)Si por una botella son 4 y por dos son 6. Nos dimos cuenta que por cada botella azul aumenta 2. Entonces va sumándole dos son 12 e)En la figura número 10 hay 22 botellas blancas. Yo lo hice aumentando 2 botellas blancas por cada azul f)En la figura número 1000 serian 2002 porque se duplica y se le suman 2 y en cualquier figura se duplicaría y se le suma 2 entonces entre blancas y las azules serian 3002 Porque duplicamos las 1000 serian 2000 y le sumamos 2 y le sumamos 1000 azules Regla Que si duplica y se le suma dos… y el número de botellas azules es el de la figura
Estudiante No .16	Para saber cuántas botellas hay miramos en la figura número 1 y vimos que por 1 botellas hay 4 blancas entonces en la otra figura vemos que hay 2 botellas azules y 6 blancas En la figura 5 hay 5 azules y 12 blancas. Yo lo hice contando de 2 en 2 . Hay 22 botellas; contamos de 2 en 2 . La figura 1000 da 3002 porque en las botellas. Blancas hay 2002 y en las azules hay 1000 porque multiplicamos 1000por 2 que es el número de botellas blancas y después le sumamos 2 y luego le sumamos 100 al 2002 . Es decir, nos toca la figura 6 yo multiplico 6x2 y nos da 12 y a ese 12 le sumamos 10 de la figura 6 y nos da 20

Apéndice No. 2 Cartas de consentimiento-Profesores responsables de los Grupos A y B

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Carta de Consentimiento para los profesores responsables de los Grado Séptimo — en donde se realizará la prueba piloto de la Prueba diagnóstico, y la recolección de información del estudio principal

Bogotá, Septiembre 21 de 2016

UN ESTUDIO SOBRE LA EFECTIVIDAD DE UNA INNOVACIÓN CURRICULAR CUYO OBJETO ES APOYAR LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO VARIABLE EN UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE GRADO 8°

He recibido las explicaciones pertinentes sobre los propósitos del proyecto que realizan los estudiantes de Grado Séptimo, y sobre el proceso de recolección de información en el que estarán involucrados los estudiantes del Grado Séptimo, de quienes soy profesor de matemáticas. Entiendo que la recolección de información se hará mediante las siguientes formas:

- Cuestionario con preguntas sobre ideas matemáticas relacionadas con la comprensión del significado que tiene los estudiantes sobre la letra.
- Entrevista de seguimiento al cuestionario a un subgrupo de 6 estudiantes, que serán audio grabadas
- Evidencias del trabajo que los estudiantes realizarán durante la secuencia de clases

También entiendo que la información que se recolecte es confidencial, y que ninguna información que pueda conducir a la identificación de cualquier individuo será revelada en ninguno de los reportes de este proyecto, o a terceros. Se me entregará un reporte de los resultados del proyecto.

Autorizo el trabajo de aula planeado por los Profesores Jairo Saavedra y David Tocarruncho, y el respectivo proceso de recolección de información.

Nombre: Orlando Ríos Antolínez

Firma: .... Fecha: ....

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Abril de 2017

Proyecto: *Un estudio sobre la efectividad de una innovación curricular cuyo objeto es apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico en un grupo de estudiantes de Grado 8°*

David Fernando Tocarruncho P.
Jairo Antonio Saavedra M.
Estudiantes de Maestría
Responsables del Proyecto

Cecilia Agudelo Valderrama
Asesora
acagudelov@pedagogica.edu.co

De parte de los estudiantes responsables, hemos recibido las explicaciones pertinentes sobre el propósito de este proyecto, y sobre el proceso de recolección de información en el que estará involucrado un grupo de estudiantes de Grado 8. La recolección de información se hará mediante las siguientes formas:

- Cuestionario con preguntas sobre las ideas matemáticas de los estudiantes, que involucran un pensamiento algebraico—y entrevista de seguimiento al cuestionario (que serán audio grabadas) a un subgrupo de estudiantes
- Audio-grabaciones de las sesiones de trabajo que se realizarán con el curso durante el desarrollo de una secuencia de enseñanza
- Evidencias del trabajo que los estudiantes realizarán durante la secuencia de actividades de clase

Declaramos que hemos sido invitados(as) a participar en el estudio de manera voluntaria, y entendemos que se nos entregará un reporte de los resultados del proyecto. Entendemos que la información que se recolecte es confidencial, y que ninguna información que pueda conducir a la identificación de la institución o de cualquier individuo será revelada en ninguno de los reportes de este proyecto, o a terceros.

Autorizamos el desarrollo del trabajo de aula propuesto por los estudiantes, arriba listados, así como el proceso de recolección de información.

Nota. Si en algún momento tiene alguna inconformidad relacionada con el trabajo de este proyecto, no dude en ponerse en contacto con el Comité de Ética de la Investigación de la Universidad Pedagógica Nacional, en la siguiente dirección:

Vicerrectoría de Gestión Universitaria —Universidad Pedagógica Nacional
Instalación principal: Calle 72 No. 11 - 86, Bogotá. Tel. 5941894 Ext. 401

Nombre: María Jimena Torres C. Firma: ... Cargo: Docente Matemáticas.

Nombre: Maydee Villamil Firma: ... Cargo: Coordinadora JT.

Fecha: Abril 06/17.

La Universidad Pedagógica Nacional agradece sus aportes y su decidida participación

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Abril de 2017

Proyecto: *Un estudio sobre la efectividad de una innovación curricular cuyo objeto es apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico en un grupo de estudiantes de Grado 8°*

David Fernando Tocarruncho P.
Jairo Antonio Saavedra M.
Estudiantes de Maestría
Responsables del Proyecto

Cecilia Agudelo Valderrama
Asesora
acagudelov@pedagogica.edu.co

De parte del estudiante responsable, hemos recibido las explicaciones pertinentes sobre el propósito de este proyecto, y sobre el proceso de recolección de información en el que estará involucrado un grupo de estudiantes de Grado 8 del colegio. La recolección de información se hará de la siguiente forma:

- En el mes de abril, de este año, se pedirá a los estudiantes contestar un *Cuestionario* con preguntas sobre sus ideas matemáticas, especialmente algunas relacionadas con su pensamiento algebraico; luego se seleccionará un subgrupo de 9 estudiantes para hacerles una especie de entrevista de seguimiento al Cuestionario (que serán audiograbadas), con el ánimo de entender mejor lo que ellos/ellas puedan haber contestado en el Cuestionario.
- Este mismo procedimiento se repetirá antes de que salgan a vacaciones de mitad de año.

Declaramos que hemos sido invitados(as) a participar en el estudio de manera voluntaria, y entendemos que se nos entregará un reporte de los resultados del proyecto. Entendemos que la información que se recolecte es confidencial, y que ninguna información que pueda conducir a la identificación de la institución o de cualquier individuo será revelada en ninguno de los reportes de este proyecto, o a terceros.

Autorizamos el desarrollo del proceso de recolección de información, antes descrito.

Nota. Si en algún momento tiene alguna inconformidad relacionada con el trabajo de este proyecto, no dude en ponerse en contacto con el Comité de Ética de la Investigación de la Universidad Pedagógica Nacional, en la siguiente dirección:

Vicerrectoría de Gestión Universitaria —Universidad Pedagógica Nacional
Instalación principal: Calle 72 No. 11 - 86, Bogotá. Tel. 5941894 Ext. 401

En constancia firmamos a continuación.

Nombre: Pablo Antonio Camero Firma: .... Cargo: Docente

Nombre: .... Firma: .... Cargo: ......

Fecha: 06 Abril del 2017

La Universidad Pedagógica Nacional agradece sus aportes y su decidida participación

Apéndice No. 3. Información recolectada de los estudiantes por medio de la encuesta sobre aspectos afectivos, en relación con la innovación curricular

- No hacemos lo mismo que en una clase de matemáticas normal
- Nos fue muy bien terminamos primero y nos quedó bien
- Aprendí cosas que no sabia
- Fue creativo-Nos enseña a saber el doble de las cosas y a ser creativos
- Los trabajos son solo para pensar y si uno se concentra es muy fácil
- Parecido al trabajo de la otra vez
- Es de pensar y buscarle sentido a lo que estamos haciendo
- Es algo que no habíamos hecho muy divertido y dinámico y aprendemos de otra manera
- Fue una actividad diferente a las de siempre, porque las preguntas son muy coherentes y así podía entender mejor
- hicimos cosas nuevas-entendimos bien lo que tocaba hacer
- fue un trabajo diferente y aprendimos lago diferente
- Usamos los computadores y estaba muy didáctico
- aprendimos a sacar formulas en Excel - todo tenía algo en común
- es diferente a lo que hacemos en clase - porque lo identificamos rápido
- era algo que no había trabajado
- me sentí mal porque no entendí y mi compañera si entendió y lo hizo todo
- Desarrollamos nuevas técnicas de encontrar el siguiente número
- uno aprende más cosas y porque es una rutina diferente
- Porque aprendimos aritmética
- es diferente a lo que hacemos en clase normalmente-son cosas que entendimos muy fácil
- nos tocaba pensar y me divierte mucho, porque en realidad solo era pensar
- tenemos que pensar más y trabajamos más el cerebro
- aprendí cosas nuevas - lo pude hacer
- pudimos hacer algo que pensábamos que era difícil, pero le colocamos lógica y la verdad es fácil.
- pude hacer las cosas seguras de mis ideas-aprendimos muchas cosas nuevas
- si uno se concentra es muy fácil todo Uno no está acostumbrado a hacer esto en una clase de matemáticas normal
- fue un trabajo diferente a lo que hacemos
- pro que puede desarrollar y liberar nuevos pensamientos - es complicado comprender una clase de números y desarrollar nuevas formas de comprensión
- nos ayuda a buscar soluciona a cualquier problema - no pude hacer una operación en las hojas
- es diferente a todo lo que hacemos normalmente en clase - se entendían los problemas fácilmente
- pude hacer la actividad de hoy - entendió lo que había que hacer
- hicimos algo diferente a lo que hacemos normalmente no era difícil encontrar del resultado porque siempre se repetía algo
- es algo muy diferente algo normal y desarrollamos un poco más de lo normal

•aprendí otras formas de resolver la actividad de hoy
•aprendí a contar de muchas formas - no sabía cómo contar, pero después entendí lo que había que hacer
•la clase fue muy interesante
•porque era de pensar y me sentí bien y motivado por hacer la clase, porque en realidad la prueba solo era de pensar.
•tuvimos que pensar mucho para solucionarlo y eso nos ayuda a desarrollar la menta
•estamos aprendiendo algebra y contando de diferentes formas como multiplicando y sumando.
•pudimos entender rápidamente.
•fue similar al trabajo anterior
•fue innovador casi nunca hacemos clases como estas
•es diferente a lo que siempre se hace
•aprendimos formas de contar
•aprendí cosas nuevas que no sabía fue divertido
•entendí lo que solucioné además lo profes explicaron muy bien
•fue una actividad diferente y muy bonita
•me pareció muy buena la actividad

Apéndice No. 4 Ejemplos de la información recolectada en la entrevista de seguimiento al cuestionario final, donde se habla de propiedad conmutativa

Entrevista a Bairon

Jairo: buenos tardes Bairon; lo primero que te quiero preguntar es qué te pareció la secuencia de actividades que llevamos a cabo con mi compañero . . . . la primera actividad, la de las formas de conteo.
Bairon: la forma más efectiva es multiplicar la base por la altura, porque era la más rápida.
Jairo: bueno si yo multiplico primero la base por la altura 5 x 17 es lo mismo que yo multiplique primero la altura por la base 17 x 5.
Bairon: si es lo mismo profe, porque no importa el cambio de la posición de los números lo que importa es el símbolo
Jairo: ¿Cómo así?
Bairon: si yo pongo 5 x 3 da 15 y 3 x 5 da 15, esto se cumple porque en él, primero es 5 veces 3 que da 15 y en el segundo es 3 veces 5 que también da 15, se puede ver como una suma es decir que 5 +5+5=3+3+3+3+3.
Jairo: o sea que es 5+5+5 igual a 3+3+3+3+3.
Bairon: no son iguales, aunque representan los mismo podemos decir que son equivalentes se ven diferentes, pero representan lo mismo.
Jairo: qué es equivalente para ti
Bairon: Que equivalen lo mismo pero que se pueden ver de otra manera.
Jairo: En el primer punto del cuestionario final, qué entendiste que tenías que hacer, y cómo lo hiciste, te dan dos ejemplos de igualdades y los replicas
Bairon: fue fácil teníamos que buscar expresiones que fueran equivalentes y no más.
Jairo: ¿entendiste lo que tenías que hacer en el segundo punto?
Bairon: sí profe, tenía que mirar cuáles expresiones eran equivalentes a la primera.
Jairo: cómo lo hizo.
Bairon: lo que hice fue sumarlos y restarlos y si me da el mismo resultado es equivalente.
Jairo: solo de esa manera se puede saber si son equivalentes.
Bairon: pues mirando el orden como estén ubicados.
Jairo: a listo míremelo otra vez a ver.
Bairon: sí profe, toca mirar es que estén los numero con el mismo signo, pero sin importar el orden.
Jairo: listo Bairon en las primeras actividades trabajamos algo parecido te acuerdas las diferentes formas de contar te acuerdas
Bairon: si profe, veíamos que si colocábamos los números en diferente orden y los sumábamos daba el mismo resultado en la suma y en la multiplicación se cumple es como una propiedad.
Jairo: por qué una propiedad.
Bairon: se cumple para todos los números, es la propiedad asociativa.
Jairo: seguro, bueno el nombre no importa, pero es la propiedad conmutativa.
Bairon: listo profe si así es.
Jairo: listo muy bien, será que si colocamos los números en otro orden es la misma forma o es diferente forma ustedes qué piensan. Por ejemplo 24+36+27+32, sería la misma o sería diferente
Yifran: seria la misma, pero en otro orden, porque me da el mismo resultado
Nicol: sería otra diferente, pero tendría los mismos números.
David: que fue lo que hicieron hay explícame, a que te refieres con al derecho y al revés
Karen: profe como esta multiplique 17 por 7 y el otro 7 por 17 las filas y las columnas y las columnas y las filas.

David: a listo y a que llegaste
Karen: que me da el mismo resultado.
Parte 5
Paula: dividí en dos partes una me quedo que 112 y la otra en 7 meda 119, otra seria al revés 7 más 112 meda 119.
David: es decir que si encontramos una en realidad estamos encontrando mínimo dos formas como lo mostro Paula.
Coro: si profe.
Paula: si por que se voltea y es otra diferente.
David: listo explícanos que fue lo que hiciste
Parte 6
Lina: la otra fue la fácil 17 por 7 igual a 119 y 7 por 17 igual a 119.
David: es lo de al derecho y al revés.
Coro: si profe da lo mismo.
Jairo: en la suma y en la multiplicación.

Apéndice No. 5 Ejemplos de información primaria - Actividad Excel

Estudiante No. 1	1. a.3 y salió el número 15 el número se multiplica por 5. b.8 y salió el número 40 el número se multiplica por 5. c.22 y salió el número 110 se multiplica por 5. d.Que en la celda de color azul el resultado y en la celda amarilla por el que se multiplica. e.Que en la celda 5A va el número por el que se multiplica y la 5D es en la que se da el resultado f.La regla es que se introduce un número en la celda amarilla que se multiplica por 5 y en la casilla azul sale el resultado. g.La regla es que si introducimos un número en la casilla 5A se multiplica por 5 en la casilla 5D da el resultado. 2. a.En la casilla verde pusimos 1 y se multiplico por 6 y dio en la casilla roja 6. b.Que en la casilla verde colocamos el número 15 y se le sumo 5 y dio en la casilla roja 20 que es el resultado. c.Que en la casilla verde colocamos el número 9 y se le sumo 5 y en la casilla roja dio 14. d.Que si ponemos cualquier número en la casilla verde se le suma por 5 y en la casilla roja da el resultado. e.14A y 14D f.Que si ponemos cualquier número en la casilla verde se le suma por 5 y en la casilla roja da el resultado. g.Colocamos cualquier número en la casilla14A se le suma 5 y el resultado está en la casilla 14D. 3.18x2=36+10=46 en la casilla A18 coloque 18 y medio 46 por que 18+18=36 y le sumo 10 que me dio 46, también c por que coloque en A18 2 y se multiplicó 2 x 2 = 4 y más 10 me dio 14
Estudiante No. 2	1. a.Pasa que en la celda se cambia el número y nos da 15. Pusimos en la celda amarilla el 3 y el azul cambio a 15. b.Cuando pusimos el número 7 en la celda amarilla en la celda azul cambio a 35. c.En la celda amarilla pusimos el 78 y en la celda azul se cambió a 390. d.Cada vez que introducimos un número en la celda amarilla se multiplica por 5 y en la celda azul queda el resultado. e.Las podríamos nombrar como ejemplo amarillo A5 azul D5. f.El número que se pone en la celda amarilla se multiplica por 5 y el resultado aparece en el azul. g.El número de la celda A5 se multiplica por 5 y el resultado sale en la celda azul. 2. a.Pasa que cuando colocamos el número en la celda v3rd se suma 5 y en la celda roja queda el resultado. b.Si ponemos un número mayor a 5 también se suma 5 y en la celda roja sale el resultado. c.Pusimos en la celda verde el número 52 y en la roja dio 57 se suma. d.Se relaciona porque en la celda verde se pone un número y se le suma 5 y el resultado da en la celda roja e.Se podrían cambiar la verde 14A y la roja 14D y así con las demás f.Se conectan de esta forma el número que se pone en la celda verde se suma 5 y sale el resultado en la roja. g.El número que escribamos en la celda 14A se le suman 5 y el resultado sale en la celda 14D. 3.=(A23*2)+4 yo descubrí esta fácil porque puse primero 1 y daba 5 y descubrí que primero multiplicaba por 4 y luego sumaba 1

Estudiante No. 3	1. a.3 y salió el número 15 el número se multiplica por 5. b.8 y salió el número 40 el número se multiplica por 5. c.22 y salió el número 110 se multiplica por 5. d.Que en la celda de color azul el resultado y en la celda amarilla por el que se multiplica. e.Que en la celda 5A va el número por el que se multiplica y la 5D es en la que se da el resultado f.La regla es que se introduce un número en la celda amarilla que se multiplica por 5 y en la casilla azul sale el resultado. g.La regla es que si introducimos un número en la casilla 5A se multiplica por 5 en la casilla 5D da el resultado. 2. a.En la casilla verde pusimos 1 y se multiplico por 6 y dio en la casilla roja 6. b.Que en la casilla verde colocamos el número 15 y se le sumo 5 y dio en la casilla roja 20 que es el resultado. c.Que en la casilla verde colocamos el número 9 y se le sumo 5 y en la casilla roja dio 14. d.Que si ponemos cualquier número en la casilla verde se le suma por 5 y en la casilla roja da el resultado. e.14A y 14D f.Que si ponemos cualquier número en la casilla verde se le suma por 5 y en la casilla roja da el resultado. g.Colocamos cualquier número en la casilla14A se le suma 5 y el resultado está en la casilla 14D. 3.18x2=36+10=46 en la casilla A18 coloque 18 y medio 46 por que 18+18=36 y le sumo 10 que me dio 46, también c por que coloque en A18 2 y se multiplicó 2 x 2 = 4 y más 10 me dio 14
Estudiante No. 4	1. a.En la celda amarilla introdujimos el número 4 y se multiplico por 5 en la celda azul. b.Introducimos en la celda amarilla el número 14 y de número se multiplico por 5 en la celda azul. c.Y por último colocamos el número 28 en la celda amarilla y nuevamente se multiplico por 5 en la celda azul. d.Que cada vez que pongamos un número en la celda amarilla en la celda azul se mostrara el resultado del número de la celda amarilla multiplicado por 5. e.Se podrá nombrar la celda amarilla como A5 y la celda Azul como D5. f.La regla es la tabla del 5. g.Cada vez que se coloque un número en la celda A5 en la D5 aparecerá el resultado multiplicado por 5. 2. a.En la celda verde pusimos el 3 y en la celda roja se mostró el resultado de 3 + 5. b.Colocamos en la celda verde el número 13 y apareció el mismo número más 5. c.Colocamos en la celda verde el número 11 y apareció en la celda roja el mismo número más 5. d.Todos los numero que se ingresen en la celda verde se les suma 5. e.La celda verde se podría nombrar como A14 y la celda roja como D14. f.Todo número que este en la celda verde se le suma 5. g.La regla que los conecta es que si en la celda A14 se coloca algún número en la celda D14 aparecerá el mismo número más 5. 3.Es cualquier número multiplicado por 2 y al final se le suma 2, yo me di cuenta cuando cambie el número de la casilla. Cualquier número se multiplica por 2 y se le suma 10, lo que hice fue analizar probar desde el 1 hasta el 4 y encontrar la fórmula.

Estudiante No. 10	1. a.Nosotros introducimos el 4 y se multiplico 5 x 4 = 20 y 20 fue el número que apareció en la celda azul. b.Notros introducimos el 9 y se multiplico 9 x 5 = 45 ese fue el número que apareció en la celda azul. c.Introducimos el 14 y se multiplico 14 x 5 = 70. d.Que todo número que se coloque en la celda amarilla se va a multiplicar por 5 y el resultado va a dar en la celda azul. e.A.5 y D.5 f.Los números que se coloque en la celda amarilla se multiplican por 5 y el resultado da en la celda azul. g.Los números que se coloquen en la celda A5 se multiplican por 5 y el resultado da en la celda D5. 2. a.Pusimos el 3 y se sumó 5 y salió el resultado en la celda roja 3 + 5 = 8 b.Pusimos el 9 y se le sumo 5 y salió el resultado en la celda roja 14. c.Pusimos el 14 y se le sumo y salió el resultado en la celda roja 19. d.Que el número que se coloque en la celda verde se le suma 5 y el resultado da en la celda roja. e.A.15 y D15. f.Los números que se coloque en la celda verde se le suma 5 y el resultado da en la celda roja. g. Los números que se coloquen en la celda A15 se le suma 5 y el resultado da en la celda D15. 3.A23x5+1 coloque el 1 coloque otros números y me di cuenta. A23+6*2 yo comencé a colocar en la celda desde 1 después el 2 hasta que dio el número del resultado
Estudiante No.11	1. a.Como no había ningún número el número que yo puse se multiplica por el número de la fila y me dio 20. b.Al cambiarlo otra vez se multiplica coloque 7 y nos dio 35. c.Puse otro número y se multiplica por 5 y nos dio 150. d.Se relacionan porque al multiplicar el número el resultado sale en D5. e.Podrían ser nombrados como A5 y D5. f.Se conectan por medio de la multiplicación. g.No contestaron 2. a.Ahora se suma 5 a la variable b.Ahora se suma 5 a la variable c.Ahora da 15 por que puse 10. d.Se le suma 5 a la variable. e.Seria A15 y D15 f.Que siempre se le va a sumar 5. g.A15 se le suma 5 y el resultado saldrá en la celda D15. 3.**No.**

Estudiante No.12	1. a.Como no había ningún número el número que yo puse se multiplica por el número de la fila y me dio 20. b.Al cambiarlo otra vez se multiplica coloque 7 y nos dio 35. c.Puse otro número y se multiplica por 5 y nos dio 150. d.Se relacionan porque al multiplicar el número el resultado sale en D5. e.Podrían ser nombrados como A5 y D5. f.Se conectan por medio de la multiplicación. g.No contestaron 2. a.Ahora se suma 5 a la variable b.Ahora se suma 5 a la variable c.Ahora da 15 por que puse 10. d.Se le suma 5 a la variable. e.Seria A15 y D15 f.Que siempre se le va a sumar 5. g.A15 se le suma 5 y el resultado saldrá en la celda D15. 3.La fórmula era A22*7+4.

Apéndice No. 6 Guía de Puntuación para el cuestionario

PREGUNTA	PUNTAJE	JUSTIFICACIÓN
1. Identifica el signo igual como un símbolo que permite expresar equivalencias entre expresiones	0	No responde o escribe expresiones que no son equivalentes.
	1	Imita o hace una réplica de las expresiones dadas.
	2	Expresa equivalencias de manera adecuada.
2. Reconoce expresiones equivalentes, muestra su comprensión entorno a las operaciones suma y resta y reconoce la propiedad conmutativa de la suma.	0	No responde o escoge una expresión dada.
	1	Realiza las operaciones dadas y escoge la expresión equivalente
	2	Identifica la expresión equivalente sin necesidad de realizar las operaciones.
3. Reconoce que los sumandos se pueden descomponer y reagruparse en UDCM utilizando la propiedad conmutativa y asociativa, para facilitar su cálculo.	0	No responde o descompone los números de manera inadecuada, llegando a un resultado erróneo
	1	Encuentra el resultado sin realizar la descomposición requerida o realiza la descomposición realizada pero el resultado es erróneo.
	2	Realiza las descomposiciones de forma adecuada y encuentra el resultado.
4. Identifica que las áreas rectangulares se pueden expresar multiplicado la base por la altura generando una expresión matemática que puede estar compuestas por números, números y letras o letras.	0	No responde o expresa de forma errónea las áreas indicadas.
	1	Expresa únicamente el área del rectángulo cuyos lados están representados con números de una manera adecuada o encuentra su resultado numérico.
	2	Expresa el área de uno de los dos rectángulos cuyos lados están representados por letras o letras y números de manera adecuada.
	3	Expresa las áreas de los rectángulos de manera apropiada.
5. Dada una secuencia identifica un patrón y encuentra una generalización para generar una expresión que lo describa.	0	No responde o no reconoce la secuencia, o la expresa inapropiadamente.
	1	Desarrolla de manera adecuada las preguntas a ó b ó a y b.
	2	Desarrolla de manera adecuada las preguntas c ó d ó c y d.
	3	Desarrolla de manera adecuada todas las preguntas de a hasta e o solo e.
	4	Desarrolla de manera adecuada todas las actividades o solo f.
6. Identifica una relación funcional a partir de una serie de datos utilizando las letras como incógnitas, y numero general	0	No responde o responde de manera inadecuada las preguntas
	1	Responde alguna de las preguntas a, b, c, ó todas de manera adecuada
	2	Responde de manera adecuada las preguntas de a hasta d o solo d.
	3	Responde de manera adecuada todas las preguntas o solo e.

Apéndice No. 7 Planeación de cada una de las sesiones de trabajo de la secuencia de actividades

ACTIVIDAD I	
DESCRIPCIÓN	Para iniciar, se pedirá a los estudiantes que lean mentalmente la actividad, luego se preguntará: ¿Qué fue lo que entendieron? ¿Qué se debe hacer en cada una de las situaciones? Sin embargo, si los estudiantes tienen preguntas o dudas, el profesor las responderá de la manera más adecuada dando la explicación a todo el grupo. En un **primer momento** los estudiantes deberán contestar las preguntas de la situación 1 de manera individual, mientras se desarrolla este proceso el docente irá observando cómo los estudiantes contestan. En caso de que surja alguna duda el profesor ayudará a clarificar de manera personalizada. Luego, en un **segundo momento,** cuando todos los estudiantes hayan terminado de contestar las preguntas, se les pedirá que se organicen en parejas para que discutan los resultados que cada uno obtuvo al contestar las preguntas. Después, en un **tercer momento,** se realizará una plenaria general donde los estudiantes expondrán las formas cómo respondieron las preguntas y los resultados que obtuvieron. El trabajo con la situación 2 se desarrollará en parejas, cabe resaltar que esta actividad tiene un grado de complejidad mayor que la anterior, debido a que los estudiantes tienen que contar más unidades. Por otro lado, se retomarán los momentos segundo y tercero, descritos en la situación 1. El trabajo con la situación 3 se continuará desarrollando en pareja, se resalta que esta actividad está enmarcada en un contexto familiar para los estudiantes. De igual forma, se llevará el mismo orden con el que se desarrolló la situación 2. Al finalizar el desarrollo de estas tres situaciones se pretende que los estudiantes desarrollen una noción de la propiedad conmutativa de la suma y la construcción de estructura por medio del conteo. Si esto no es posible el profesor deberá guiar a los estudiantes por medio de un conjunto de preguntas.
ROL DEL PROFESOR	Participante activo que observa, indaga, analiza y guía las diferentes ideas expuestas por los estudiantes, con el objetivo de que ellos entiendan lo que se pretende hacer con ese conjunto de preguntas. Mediador, busca que los estudiantes utilicen sus conocimientos previos y los relacionen con las preguntas planteadas en cada situación. Investigador de su práctica docente, pues recolecta información del pensamiento de los estudiantes.
ESTA SITUACIÓN APOYA EN LOS ESTUDIANTES	La identificación de estructuras aritméticas y espaciales por medio de situaciones de conteo, identificación la propiedad conmutativa de la suma y la multiplicación.
EL FOCO DE ATENCIÓN ES	•Qué entienden los estudiantes cuando se les pregunta. •En dónde centran su atención. •Cómo comunican lo que piensan y lo que hacen.
LA INFORMACIÓN SE RECOGE A TRAVÉS DE:	•Hoja de trabajo. •Observación de la clase en vivo (notas del profesor observador y del profesor que dirige la secuencia). •Audio grabación de la sesión. (Celular) •Audio grabación de la interacción de un grupo de estudiantes. (Celular) •Actividades desarrolladas por los estudiantes en la guía.

	•Entrevistas a un grupo de estudiantes.

PLANEACIÓN DE LA SEGUNDA SESIÓN

ACTIVIDAD II	
DESCRIPCIÓN	Para iniciar, se pedirá a los estudiantes que lean mentalmente la actividad, luego se preguntará: ¿Qué fue lo que entendieron? ¿Qué se debe hacer en cada una de las situaciones? Sin embargo, si los estudiantes tienen preguntas o dudas, el profesor las responderá de la manera más adecuada dando la explicación a todo el grupo. Posteriormente, se informará a los estudiantes que en un **primer momento** deberán desarrollar la situación número 1 en parejas y que después, en un **segundo momento,** se realizará una plenaria donde se discutirán las ideas que surgieron durante la interacción de cada grupo. El trabajo con la situación 2 tendrá el mismo esquema de la situación 1. Con la pregunta **a** de la situación 1 y de la situación 2 se pretende que los estudiantes comiencen a identificar la regularidad, específicamente donde deben relacionar el número de baldosas negras con el número de baldosas blancas. Con la pregunta **b** de la situación 1 y de la situación 2 se busca que los estudiantes construyan una regla que describa la relación entre el número de baldosas blancas y el número de baldosas negras, es muy importante que los estudiantes expliquen cómo construyeron dicha regla y que la logren comunicar de la manera que ellos quieran. Aquí se pretende desarrollar capacidades en la identificación y la comunicación de regularidades.
ROL DEL PROFESOR	Participante activo que observa, indaga, analiza y guía las diferentes ideas expuestas por los estudiantes, con el objetivo de que ellos entiendan lo que se pretende hacer con ese conjunto de preguntas. Mediador, busca que los estudiantes utilicen sus conocimientos previos y los relacionen con las preguntas planteadas en cada situación. Investigador de su práctica docente, pues recolecta información del pensamiento de los estudiantes.
ESTA SITUACIÓN APOYA EN LOS NIÑOS	El desarrollo sus capacidades para identificar regularidades en situaciones de la vida cotidiana.
EL FOCO DE ATENCIÓN ES	•Qué entienden los estudiantes cuando se les pregunta. •En dónde centran d su atención. •Cómo comunican lo que piensan y lo que hacen.
LA INFORMACIÓN SE RECOGE A TRAVÉS DE:	•Hoja de trabajo. •Observación de la clase en vivo (notas del profesor observador y del profesor que dirige la secuencia). •Audio grabación de la sesión. (Celular) •Audio grabación de la interacción de un grupo de estudiantes. (Celular) •Actividades desarrolladas por los estudiantes en la guía. •Entrevistas a un grupo de estudiantes.

ACTIVIDAD III	
DESCRIPCIÓN	Esta actividad se desarrollará en dos sesiones. La primera sesión tomará 55 minutos, esta sesión tiene como objetivo que los estudiantes tomen conciencia sobre el problema del calentamiento global y sobre el uso

	desmedido de los recursos por parte de la humanidad, lo cual está acabando con el planeta. En el **primer momento** se proyectarán unos videos con el fin de que los estudiantes reconozcan las causas y consecuencias del calentamiento global, así como la forma en que ellos pueden contribuir para evitar que este problema continúe aumentando; también, mediante estos videos se busca sensibilizar a los estudiantes sobre el consumo irracional de los recursos, como ejemplo de ello se presenta el uso excesivo de botellas plásticas. De igual forma, se pretende que los estudiantes reconozcan la importancia del reciclaje en pro de disminuir la contaminación ambiental, y que además fomenten la cultura del reciclaje tanto en sus casas como en el colegio. En un **segundo momento,** cuando finalice la proyección de los videos se realizará un foro para debatir los contenidos expuestos en los videos, resaltando las ideas principales de los mismos y concientizando a los estudiantes sobre estos problemas que aquejan a la humanidad. La segunda sesión tomará 110 minutos y se dará inicio a la misma pidiéndole a los estudiantes que lean mentalmente la actividad, luego se les preguntará ¿Qué fue lo que entendieron? ¿Qué deben hacer en cada una de las situaciones? Si los estudiantes tienen preguntas el profesor responderá apropiadamente presentando la explicación a todo el grupo. Seguidamente, se pedirá a los estudiantes desarrollar esta actividad en parejas, éste será el **primer momento**. En el trascurso de esta actividad el docente irá observando cómo los estudiantes contestan las preguntas, en caso de dudas el profesor irá aclarando de manera personalizada las preguntas que surjan dentro de cada grupo. Luego en un **segundo momento** se realizará una plenaria con todos los estudiantes de la clase con el fin de que comuniquen lo que piensan y discutan las ideas que les surgieron a partir de esta actividad. Con esta actividad se pretende apoyar el pensamiento algebraico del estudiante, para conseguir esto se plantea lo siguiente: la pregunta **a** busca familiarizar al estudiante con la búsqueda de patrones e identificación de la regularidad. La pregunta **b** se espera que los estudiantes comuniquen dicha regularidad de manera general. en un **tercer momento** se realizará una actividad en Excel, la cual se dividirá en tres partes: En la primera parte los estudiantes serán introducidos a la parte dinámica de Excel enfrentando una situación de variación entre dos variables, buscando que los estudiantes vean la necesidad de nombrar las variables utilizando las coordenadas de las hojas de Excel para encontrar una regla que las relacione, buscando que los estudiantes pasen de utilizar el lenguaje natural a un lenguaje sincopado para nombrar la regla que conecta las dos variables, en la segunda parte los estudiantes se enfrentarán a una situación similar a la de la primera parte con un grado de complejidad mayor, en la tercera parte los estudiantes deberán crear su propia regla que conecta dos variables utilizando Excel, mientras otro de sus compañeros intentará encontrar dicha regla. En la cuarta parte se realizará una plenaria discutiendo los resultados que obtuvieron los estudiantes.
ROL DEL PROFESOR	Participante activo que observa, indaga, analiza y guía las diferentes ideas expuestas por los estudiantes, con el objetivo de que ellos entiendan lo que se pretende hacer con ese conjunto de preguntas. Mediador, busca que los estudiantes utilicen sus conocimientos previos y los relacionen con las preguntas planteadas en cada situación. Investigador de su práctica docente, pues recolecta información del

	pensamiento de los estudiantes.
ESTA SITUACIÓN APOYA EN LOS NIÑOS	La toma de conciencia respecto al reciclaje y el cuidado del medio ambiente, así como las causas y consecuencias del calentamiento global. El desarrollo de sus capacidades para identificar regularidades en situaciones de la vida cotidiana. Los estudiantes se den cuenta de la necesidad de utilizar alguna representación para nombrar las variables. Reconocimientos de situaciones de variación.
EL FOCO DE ATENCIÓN ES	•Qué entienden los estudiantes cuando se les pregunta. •A dónde dirigen su atención. •Cómo comunican lo que piensan y lo que hacen.
LA INFORMACIÓN SE RECOGE A TRAVÉS DE:	•Hoja de trabajo. •Observación de la clase en vivo (notas del profesor observador y del profesor que dirige la secuencia). •Audio grabación de la sesión. (Grabadora profesional) •Audio grabación de la interacción de un grupo de estudiantes. (Celular) •Actividades desarrolladas por los estudiantes en la guía. •Entrevistas a un grupo de estudiantes.