

ESTUDIANTES CON SÍNDROME DE DOWN DEFINIENDO EN
GEOMETRÍA

OSCAR DAVID HOYOS GAZABON

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.

2019

ESTUDIANTES CON SÍNDROME DE DOWN DEFINIENDO EN
GEOMETRÍA

OSCAR DAVID HOYOS GAZABON

Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de
Magíster en Docencia de la Matemática

Directora

Tania J. Plazas Merchán

Magister en Docencia de la Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C.

2019

Dedicatoria

A María por todo su apoyo durante los últimos años.

A Sofía y Valentina por su comprensión.

A mis padres por ayudarme a cumplir este sueño.

Y en especial a Violeta que llegará pronto.

Agradecimientos

A Tania Plazas, profesora de planta del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, por su apoyo en dirigir este trabajo de grado y por aportar todos sus conocimientos y experiencia en la elaboración de este.


A los profesores Camilo, Leonor, William, Nubia, Claudia Salazar, Edgar, Edwin y demás pertenecientes al programa de Maestría en Docencia de la Matemática, por sus aportes en las distintas clases que fortalecieron mi formación profesional reflejados en este estudio.

A los estudiantes Sarah, Juan Miguel, María Fernanda y sus familias, por apoyar este proceso y permitir que sus hijos fueran los participantes de esta investigación.

A las directivas del Liceo VAL por su disposición de tiempo y espacios.

A todos mis compañeros de la cohorte, los cuales fueron un apoyo en la elaboración de este trabajo.

A mi familia por su constante apoyo durante esta formación académica.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Educación de calidad</i>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página V de 148	

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado en maestría de profundización
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Estudiantes con síndrome de Down definiendo en geometría
Autor(es)	Hoyos Gazabon, Oscar David
Director	Plazas Merchán, Tania Julieth
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2019. Páginas 148.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional UPN
Palabras Claves	PROCESO DE DEFINIR, GEOMETRÍA, SÍNDROME DE DOWN, CELDAS COGNITIVAS, APREHENSIÓN.

2. Descripción
<p>Este es un trabajo en el marco de la Maestría en Docencia de la Matemática, el cual se preocupa por determinar cómo las tareas con tecnología digital favorecen el proceso de definir de estudiantes con síndrome de Down. Se asumen como referentes teóricos los planteamientos de Tall & Vinner (1981) y De Villiers (1998) acerca del proceso de definir en matemáticas y un modelo donde la definición interviene en la resolución de problemas; la propuesta para la construcción de definiciones del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional, caracterizado por Aya y Echeverry (2009); los planteamientos sobre las aprehensiones cognitivas propuesto por Duval (1995). Todo esto relacionado con las características cognitivas que tienen los estudiantes con síndrome de Down en el área de matemáticas. Con base en esto se propone una articulación entre las aprehensiones que se manifiestan, cuando existe una relación entre celdas cognitivas mientras un estudiante realiza el proceso de definir. Para ello, se diseñaron cuatro tareas, de las cuales dos requieren el uso de tecnología digital para su solución y dos con material concreto, acudiendo a diferentes estímulos propuestos por Bruno y Noda (2010). Se adopta el enfoque de entrevista basada en tareas, por lo cual se diseñan guiones de entrevista para cada una de dichas tareas. Esta investigación se desarrolla en una institución educativa de Bogotá de carácter privado llamada Liceo VAL. Aquí se escogen tres participantes con síndrome de Down, que se encargan de resolver las tareas en torno a tipos de cuadriláteros. Se analizan fragmentos de las entrevistas a partir de acciones y niveles de acciones pertenecientes a cada tipo de aprehensión, para luego determinar qué tipo de relación entre celdas cognitivas hay; y así determinar qué tipo de definición se presenta.</p>

3. Fuentes

- Acevedo, J. (2010). *Modificabilidad estructural cognitiva vs. Visualización: un ejercicio de análisis del uso del Tetris en tareas de rotación y traslación*. (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia, 40-87.
- Aya, O., y Echeverry, A. (2009). *Geometría Dinámica en el Proceso de Definir*. (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia, 20-50.
- Basile, H. (2008). Retraso mental y genética. Síndrome de Down. *Revista de Argentina de Clínica Neuropsiquiátrica*. 1(15). Argentina,9-23
- Bruno, A.; Noda, A.; Aguilar, R.; González, C.; Moreno, L. y Muñoz, V. (2006). Análisis de un tutorial inteligente sobre conceptos lógico-matemáticos en alumnos con Síndrome de Down. *RELIME*. 9(2), 211-226.
- Bruno, A. y Noda, A. (2010). Necesidades educativas especiales en matemáticas. El caso de personas con síndrome de down. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds), *Investigación en Educación Matemática XIV*. Lleida: SEIEM, 141-162
- Camargo, L. (s.f.). *Estrategias cualitativas en investigación en Educación Matemática*. (Documento en proceso de evaluación.)
- Congreso de Colombia (27 de febrero del 2013). Ley Estatutaria [Ley 1618 de 2013]. DO: 48.717. Recuperado de:
<https://discapacidadcolombia.com/phocadownloadpap/LEGISLACION/LEY%20ESTATUTARIA%201618%20DE%202013.pdf>
- de Villiers, M. (1994). The role and functions of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the learning of Mathematics*, 1 (14), 11-18.
- de Villiers, M. (1998). ¿To Teach Definitions In Geometry Or Teach To Define? In A. Olivier & K. Newstead (Eds), *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education: University of Stellenbosch: Stellenbosch, 12-17 July 1998*. (2), 248-255.
- de Villiers, M. (2004). Using Dynamic Geometry to Expand Mathematics Teachers' Understanding of Proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(5), 703-724.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives* 5, 37-65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Suisse: Peter Lang (traducción española, Semiosis y pensamiento humano (1999). Cali, Colombia: Universidad del Valle).
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 37-51.
- Gamboa R; Ballester E. (2009) Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Universidad de Costa Rica, Número 5. Costa Rica,113- 136.
- Gavilán, J., Sánchez, G., Escudero, I. (2012). El proceso de definir en matemáticas desde una perspectiva comognitiva. En: Investigación en Educación Matemática XVI. Simposio Jaén. (Sevilla, España; 2012). *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. [2016], 1-8.

- Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En, A., Kelly y R. Lesh (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. Capítulo 19, 517 – 545.
- Gómez, C., Ruiz, M., Fernández, A. (2005). *Tratado de psiquiatría*. Capítulo 34. pp 32-45
- Hassan, S., Fernandes, S. H. A. A., & Healy, L. (2014). Algebraic expressions of deaf students: Connecting visuo-gestural. *Proceeding of PME 38 and PME-NA 36*, 3, 49–56.
- Kaur, H., & Sinclair, N. (2014). Young children's thinking about various types of triangles in a dynamic geometry environment. *Proceeding of PME 38 and PME-NA 36*, 3, 409–416.
- Kumin, L. (2008). *Síndrome de Down: habilidades tempranas de comunicación*. Estados Unidos de América, Fundación Iberoamericana Down 21.
- López, P., López, R., Parés, G., Borges, A. y Valdespino, L. (2000). Reseña histórica del síndrome de Down. *Revista ADM*. Número 5(57). pp. 193-199.
- Moise, E. (1986). *Geometría Moderna*. (Mariano García, trad.). México: Sistemas Técnicos de Edición. (Obra original publicada en 1970).
- Ma, X., Xin, Y. P., Tzur, R., Si, L., Yang, X., Park, J. Y., Liu, J., & Ding, R. (2014). The effect of an intelligent tutor on math problem-solving of students with learning disabilities. *Proceeding of PME 38 and PME-NA 36*, 4, 145–152.
- Marmolejo, G., Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática*, 24(3), 8-13.
- Ministerio de Educación Nacional (24 de octubre del 2003). Prestación del Servicio Educativo a la Población con Necesidades Educativas Especiales. [Resolución 2565 de 2003]. DO: 47.283. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85960_archivo_pdf.pdf
- Ministerio de Educación Nacional (29 de agosto del 2017). Atención Educativa a la Población con Discapacidad. [Decreto 1421 del 2017]. DO: 51.037. Recuperado de: <http://es.presidencia.gov.co/normativa/normativa/DECRETO%201421%20DEL%2029%20DE%20AGOSTO%20DE%202017.pdf>.
- Noda, A. y Bruno, A. (2010). Operaciones básicas en alumnos con síndrome de *Down*. *PNA*, 4(4), 143-159.
- Nye, J.; Fluck, M. & Buckley, S. (2001). Counting and cardinal understanding in children with Down Syndrome and typically developing children. *Down Syndrome Research and Practice* 7 (2), 68-78
- Ponce, J.; Ornelas, F.; Lucio, M.; Padilla, A. y Toscano, B. (2015). *Revista Sociología Contemporánea*. 2(4), 166-176
- Quintero, A., Rojas, T. (2008). *Introducción del concepto de triángulo a niños con síndrome de Down*. (Tesis de Pregrado). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia. (pp. 34-66).
- Ruiz, E. (2012). *Programación educativa para escolares con síndrome de Down*. Fundación Iberoamericana Down 21.
- Sinclair, N., & Yerushalmy, M. (2016). Digital technology in mathematics teaching and learning: A decade focused on theorising and teaching. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education*. Sense Publishers, 235–274.
- Tall D., y Vinner S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular

reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*. 12, 151-169.

Troncoso, M. y del Cerro, M. (2009). *Síndrome de Down: lectura y escritura*. Fundación Iberoamericana Down 21, 14-26

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *RELIME*, 10(2), 275-300.

Torregrosa, G., Quesada, H. y Penalva, M.C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las ciencias*, 28(3), 327-340.

Tuset, I., Bruno, A., Noda, A. y Ramírez, M. (2016). La subitización en tareas numéricas en niños con Síndrome de Down. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 649). Málaga: SEIEM

Valencia, A. (2012). *Prácticas discursivas y recursos pedagógicos en clases de geometría en la educación básica: el caso del origami*. (Tesis de Maestría). Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematic teaching and learning*. Greenwich, CT: NCTM e Information. Age Publishing, 557-627.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Springer Netherlands, 65-81.

4. Contenidos

El objetivo general de este estudio es determinar la manera en que los estudiantes con síndrome de Down realizan el proceso de definir en geometría a partir de tareas diseñadas con tecnología digital y material concreto que promueven este proceso. Los objetivos específicos fueron:

- Caracterizar las necesidades educativas especiales que tiene la población objeto de estudio.
- Diseñar aplicativos con tecnología digital para utilizar en tareas que favorecen el proceso de definir.
- Establecer una correlación entre las aprehensiones de una actividad matemática y la relación de celdas cognitivas.

El trabajo está compuesto por la introducción y cinco capítulos: Problemática, Marco teórico, Diseño metodológico, Análisis de datos y Conclusiones.

En la introducción se hace una descripción general del estudio y la estructura general de este documento.

En el capítulo uno se presenta la configuración del problema, la justificación y pertinencia del trabajo, los objetivos y se incluyen los antecedentes de este.

En el capítulo dos se encuentran los referentes teóricos en función de las características cognitivas de los estudiantes con síndrome de Down, el tipo de definición y la relación entre celdas cognitivas de Vinner, las aprehensiones cognitivas de Duval. Al final del capítulo se muestra una relación entre los dos marcos teóricos.

En el capítulo tres se presenta el diseño metodológico de esta investigación, describiendo el contexto, participantes, tareas realizadas, fases del estudio y categorías de análisis.

En el capítulo cuatro se presentan los análisis de cinco fragmentos de entrevista extraídos de la resolución de las tareas, así como el análisis de las acciones que se vieron involucradas en cada

tipo de definición.

El capítulo cinco muestra las conclusiones parciales de la investigación, explorando nuevas posibilidades para continuar este ejercicio investigativo.

Finalmente se encuentra la bibliografía utilizada y los anexos que incluyen las transcripciones completas de las entrevistas realizadas.

5. Metodología

La estrategia metodológica de esta investigación es la entrevista basada en tareas, la cual es una estrategia cualitativa de interpretación. El propósito de esta es realizar una entrevista mientras un estudiante o grupo pequeño de estudiantes resuelven una tarea. Las fases del estudio se dividieron así:

Selección de los participantes. Aquí se escogen los estudiantes del Liceo VAL que cumplan con las características requeridas. Es decir, que estén diagnosticados con síndrome de Down, en el mismo curso y que hayan tenido poco manejo de recursos digitales en la clase de matemáticas.

Diseño de las tareas. Luego de seleccionar los participantes se diseñan las tareas que serán implementadas, y junto con ellas se diseña el guion de entrevista, que consta de preguntas basadas en situaciones hipotéticas durante la resolución de las tareas.

Implementación de las entrevistas. Se programan los horarios para la toma de información, especificando los recursos necesarios para tal fin.

Construcción de datos investigativos. En este apartado se especifican las acciones que se realizaron para tomar la información y transformarla en un dato investigativo. Tal proceso involucró reducir, depurar y extraer de cada transcripción los fragmentos más importantes y relevantes.

Finalmente se obtienen las categorías de análisis partiendo de una primera mirada analítica, donde se buscaban las acciones que mostraran las aprehensiones utilizadas y el tipo de definición realizado; este proceso dio como resultado dos grupos de categorías de análisis.

6. Conclusiones

Las conclusiones más relevantes del estudio son:

- El uso de definiciones por los estudiantes con síndrome de Down se da por ayuda del papel del entrevistador.
- La semántica no se ve tan afectados en estos estudiantes, ya que se observó, en los fragmentos expuestos, el uso de argumentos empíricos para la construcción de sus definiciones.
- La tecnología digital promueve en mayor medida el proceso de definir que las tareas con material concreto en esta investigación.
- Existe una correlación entre las acciones de cada tipo de aprehensión y la relación entre celdas cognitivas cuando se construye una definición.

Elaborado por:	Hoyos Gazabon, Oscar David
Revisado por:	Plazas Merchán, Tania Julieth

Fecha de elaboración del Resumen:	13	12	2019
--	----	----	------



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Univerte al estudiante

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado *Estudiantes con síndrome de Down definiendo en geometría*, presentado por la estudiante:

Oscar David Hoyos Gazabón, Cód. 2018185012, CC. 1.031.151.033

como requisito parcial para optar al título de **Magister en Docencia de la Matemática** y analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada**, cuarenta y tres (43) puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 25 días del mes de febrero de 2020.

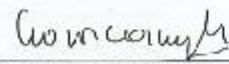
JURADOS

Director del Trabajo: Profesora:


TANIA JULIETH PLAZAS MERCHÁN (UPN)

Jurados:

Profesora:


LECNOR CAMARGO URIBE (UPN)

Profesora:


MARÍA ROSA GONZÁLEZ (Colegio San Pedro Claver)

Tabla de contenido

Introducción.....	3
1. Problemática.....	5
1.2. Justificación.....	5
1.2. Antecedentes	6
1.3. Planteamiento del problema.....	9
1.4. Objetivos	14
1.4.1. General	14
1.4.2. Específicos	14
2. Marco Teórico.....	15
2.1. El síndrome de Down.....	15
2.1.1. Características físicas.....	16
2.1.2. Estado mental	17
2.1.3. Características Cognitivas	18
2.1.4. Discapacidad Cognitiva y síndrome de Down	19
2.1.5. El síndrome de Down en el aprendizaje de las matemáticas	21
2.2. Definir en matemáticas	23
2.2.1. Atributos de una definición.....	27
2.2.2. Definir como proceso.....	29
2.3. Aprehensión.....	30
2.3.1. Aprehensión perceptiva.....	30
2.3.2. Aprehensión discursiva.....	31
2.3.3. Aprehensión operativa	32
2.4. Celdas cognitivas y aprehensiones	34
2.5. Marco Matemático	37
2.5.1. Cuadriláteros.....	37
2.5.2. Tipos de Cuadriláteros.....	38
3. Metodología.....	41
3.1. Descripción general	41
3.2. Estrategia Investigativa	41

3.3.	Contexto Investigativo	42
3.4.	Fases del estudio	43
3.4.1.	Fase 1. Selección de los participantes.....	43
3.4.2.	Fase 2. Diseño de las tareas.....	45
3.4.3.	Fase 3. Implementación de las entrevistas y registro de información	53
3.4.4.	Fase 4. Construcción de datos investigativos.....	53
3.5.	Categorías de análisis.....	54
4.	Análisis.....	63
	Fragmento 1: Tarea 1. Los cuadriláteros no tienen curvas	63
	Fragmento 2: Tarea 1. No es cuadrilátero, pero sí es a la vez.	64
	Fragmento 3: Tarea 2. El cuadrilátero especial.....	67
	Fragmento 4: Tarea 2. Ángulos diferentes, pero a la vez iguales	69
	Fragmento 5: Tarea 3. Los cuadrados rectos.	72
4.1.	Discusión.....	75
5.	Conclusiones.....	83
	Bibliografía.....	88
	Anexos.....	1

Lista de tablas

Tabla 1. Herramientas principales de GeoGebra utilizadas por los participantes.....	46
Tabla 2. Guion de entrevista para la tarea 1.	48
Tabla 3. Guion de entrevista para la tarea 2.	49
Tabla 4. Guion de entrevista para la tarea 3.	51
Tabla 5. Guion de entrevista para la tarea 4.	53
Tabla 6. Muestra de la clasificación de la información recolectada, a partir de asuntos relevantes vistos en cada video.	54
Tabla 7. Categorías de análisis según las aprehensiones identificadas.	56
Tabla 8. Categorías de análisis según el tipo de definición a partir de la relación de celdas cognitivas.	61
Tabla 9. Rastreo de categorías por fragmento.	77
Tabla 10. Correlación entre categorías de análisis.....	78
Tabla 11. Categorías de análisis con las aprehensiones cognitivas complementada.	82

Lista de imágenes

Imagen 1. Información en el tablero escrita por el docente.....	10
Imagen 2. Apuntes del estudiante	10
Imagen 3. Fichas con trazos para formar figuras planas.....	11
Imagen 4. Caracterización de figuras formadas por Inés	11
Imagen 5. Caracterización de las figuras formadas por Sara.	12
Imagen 6. Definición de polígono por Sara.	12
Imagen 7. Clasificación de polígonos por Carlos	12
Imagen 8. Definición de polígono por Carlos	12
Imagen 9. Repartición defectuosa (trisomía) del cromosoma 21.....	16
Imagen 10. Figura mental de un cuadrado	31
Imagen 11. Cuadrilátero con sus partes	31
Imagen 12. Trapecio ABCD donde $AB \parallel CD$	32
Imagen 13. Cambio figural para encontrar punto medio de AB	33
Imagen 14. Demostración teorema de Pitágoras. Realizada por el autor.....	33
Imagen 15. Representación gráfica de un cuadrilátero.	37
Imagen 16. Cuadriláteros con sus diagonales.....	38
Imagen 17. Representación gráfica del rombo	38
Imagen 18. Representación gráfica del paralelogramo.	39
Imagen 19. Representación gráfica del rombo.	39
Imagen 20. Representación gráfica del rectángulo.	39
Imagen 21. Representación gráfica del cuadrado.	39
Imagen 22. Representación de la demostración de equidistancia entre paralelas.....	40
Imagen 23. Triángulos congruentes de un paralelogramo.....	40
Imagen 24. Diferentes representaciones obtenidas por el aplicativo diseñado.....	47
Imagen 25. Movimiento del rombo robusto en el segundo aplicativo.	49
Imagen 26. Figura geométrica utilizada para identificar atributos y propiedades	56
Imagen 27. No ejemplo de cuadrilátero.	58
Imagen 28. Rombo con sus diagonales trazadas.....	58
Imagen 29. Triángulo utilizado para ejemplificar categoría.....	58
Imagen 30. Polígono utilizado como ejemplo para categoría.	59
Imagen 31. Construcción de representación auxiliar a una configuración dada.	59
Imagen 32. Ejemplo de representación realizada por un participante.....	60
Imagen 33. Visualización del uso de herramientas de un SGD.	60
Imagen 34. Representación de Rectángulo.....	61
Imagen 35. Rombo.....	61
Imagen 36. Representaciones de triángulos.	62
Imagen 37. Representación de polígono de seis lados.	82

Lista de esquemas

Esquema 1. Crecimiento cognitivo de un concepto formal. Tomado de Tall y Vinner (1981). Traducido por el autor.	24
Esquema 2. Interacción entre la definición del concepto y la imagen conceptual. Tomado de Tall y Vinner (1981). Traducido por el autor.	25
Esquema 3. Interacción entre la definición del concepto y la imagen conceptual. Tomado de Tall y Vinner (1981). Traducido por el autor.	25
Esquema 4. Deducción siguiendo el pensamiento intuitivo. Tomado de Tall y Vinner (1981). Traducido por el autor.	26
Esquema 5. Deducción formal. Tomado de Tall y Vinner (1981). Traducido por el autor.	26
Esquema 6. Respuesta intuitiva. Tomado de Tall y Vinner (1981). Traducido por el autor.	27
Esquema 7. Construcción de una definición sin utilizar aprehensión operativa partiendo de lo perceptivo.	35
Esquema 8. Respuesta intuitiva.	35
Esquema 9. Construcción de una definición partiendo de lo discursivo.	36
Esquema 10. Transformación de la configuración para construir una definición.	36
Esquema 11. Pasos utilizados en el análisis investigativo.	63
Esquema 12. Interacción entre celdas cognitivas y aprehensiones partiendo de lo discursivo.	80

Lista de fragmentos y Gráficos

Fragmento 1. Diálogo entre estudiantes NEE y profesor.	9
Fragmento 2. Entrevista de Miguel durante la tarea 1.	63
Fragmento 3. Entrevista de Fernanda durante la tarea 1.	65
Fragmento 4. Primera parte de entrevista de Sarah durante la tarea 2.	67
Fragmento 5. Segunda parte entrevista de Sarah durante la tarea 2.	70
Fragmento 6. Entrevista de Sarah durante la tarea 3.	72
Gráfico 1. Conteo de categorías de análisis en los datos investigativos.	75

Introducción

Las investigaciones relacionadas con el desarrollo de procesos de la actividad matemática, con población en condición de discapacidad cognitiva es escaso (Sinclair y Yerushalmi, 2016). Estas se han dedicado a estudiar la forma en que los participantes realizan operaciones aritméticas y han dejado de lado los diferentes procesos de la actividad matemática que puedan realizar. Sin embargo, las pocas investigaciones que existen (Bruno y Noda, 2010) manifiestan que los recursos digitales, en especial los audiovisuales, favorecen el aprendizaje de dicha población como lo son los estudiantes con síndrome de Down (Bruno y Noda, 2006).

Con el ánimo de aportar en este campo poco explorado en la educación matemática, se plantea este trabajo investigativo el cual busca determinar cómo algunas tareas diseñadas con tecnología digital promueven el proceso de definir, en estudiantes con síndrome de Down. Esta investigación se realiza en el Liceo VAL (Vida, Amor y Luz), la cual cuenta con más de 20 años de trayectoria en la atención a estudiantes con discapacidades cognitivas, físicas, sociales, psicológicas, múltiples, etc. Aún con todo este recorrido y experiencia, se desconocen estrategias que permitan desarrollar (en estos estudiantes) dicho proceso en el campo de la geometría.

El análisis que fundamenta este estudio incluye la identificación de acciones específicas dentro de aprehensiones cognitivas, las cuales señalan el tipo de definición que realizan los estudiantes según la relación entre celdas cognitivas. Para esto, se diseñan en total cuatro tareas en las cuales dos de ellas requieren de tecnología digital para su solución, todas enfocadas en promover el proceso de definir.

La presentación de este estudio investigativo está organizada en cinco capítulos y una sección de anexos:

En el capítulo uno se presenta el problema de investigación. Se justifica la pertinencia del estudio investigativo, y se hace una caracterización de la problemática a abordar. También se establecen los objetivos planteados y se incluye el estado del arte elaborado, considerando los resultados investigativos nacionales e internacionales relacionados directamente con discapacidad y síndrome de Down.

En el capítulo dos se presentan los referentes teóricos, con los cuales se describen las características físicas y cognitivas de los estudiantes Down. También se muestra un modelo de como interviene el proceso de definir cuando se resuelve una tarea, involucrando las aprehensiones cognitivas presentes en el desarrollo de dicho proceso. Se cierra este capítulo con una articulación entre los diferentes referentes teóricos anteriormente mencionados.

El capítulo tres contiene el diseño metodológico de la investigación, centrado en la entrevista basada en tareas. Se describe el contexto del estudio y se muestran los desempeños académicos y perfiles cognitivos de los participantes seleccionados. Además, se muestran las diferentes fases del estudio y los análisis de las tareas diseñadas, acompañadas de sus respectivos guiones de entrevista. Finalmente se muestran las categorías de análisis construidas a partir de los datos investigativos.

En el capítulo cuatro se muestran los análisis de cinco fragmentos de entrevista extraídos de la información recolectada. Se muestra la ruta realizada en cada fragmento, para encontrar las categorías de análisis a partir de las acciones que determinan el proceso de definir; esto se realiza con una esquematización que involucra los referentes teóricos elegidos.

En el capítulo cinco se presentan las conclusiones parciales que deja el estudio, resaltando las posibilidades de continuar con el ejercicio investigativo.

Al final del documento, posterior a la bibliografía, se muestran los anexos de la investigación en donde se encuentra información adicional como: los documentos firmados por los padres de familia para la toma de registros audiovisuales; las tareas presentadas a los estudiantes en físico y las transcripciones de las entrevistas de cada tarea para cada estudiante. Finalmente, este trabajo corresponde solo a una pequeña parte de los análisis que se pueden realizar, en torno a los procesos de la actividad matemática como definir realizado por estudiantes con discapacidad cognitiva. La relación entre los referentes teóricos es un material interesante y con gran riqueza investigativa que puede seguir explorándose.

1. Problemática

1.2. Justificación

Según Gamboa y Ballesteros (2009), la enseñanza de la geometría es considerada uno de los pilares de formación académica y cultural del hombre, ya que esta permite establecer una relación con el espacio circundante; además que su enseñanza ha sido uno de los dominios más importantes de la educación matemática y un campo de investigación bastante amplio. Dentro de esta rama, existen muchas investigaciones que buscan mejorar procesos de enseñanza y aprendizaje dirigidos a propiciar el pensamiento espacial utilizando herramientas, como la tecnología digital. En el rastreo realizado por Sinclair y Yerushalmi (2016), sobre las investigaciones que se han hecho en el campo de la educación matemática con tecnología digital; se encuentran dos trabajos que se desarrollan con estudiantes con Necesidades Educativas Especiales (NEE), mostrando que este es un campo poco explorado. Sin embargo, investigaciones realizadas por Bruno y Noda (2006), reportan que los estudiantes con NEE responden adecuadamente cuando se trabaja con recursos audiovisuales. La presentación de la información utilizando dichos recursos ayuda a mantener la atención por periodos de tiempo más largos. Esto muestra un interés de explorar más en cómo desarrollar procesos de enseñanza a dicha población, usando herramientas digitales.

La política de inclusión educativa reglamentada por la Resolución 2065 de 2003, del Ministerio de Educación Nacional (MEN) exige que los estudiantes con NEE puedan acceder a las mismas oportunidades de una educación de calidad. Esto genera una necesidad política y social por incluir a todos los estudiantes en unas condiciones equitativas de enseñanza según las necesidades de cada uno. Además de esto, en la Ley Estatutaria 1618 de 2013, se establecen las disposiciones para garantizar los derechos de la población con discapacidad, en el cual se garantiza el derecho a la educación. En consecuencia, surge el Decreto 1421 de 2017 del MEN, el cual reglamenta la ruta, el esquema y las condiciones para la atención educativa a las poblaciones con NEE, en los niveles de preescolar, básica y media. En dicho decreto se establece, claramente, que la oferta realizada por las instituciones educativas debe ser la misma para todos los estudiantes, teniendo en cuenta las condiciones cognitivas de cada uno de ellos; por

ejemplo, si en la institución se utiliza la tecnología digital para el trabajo de cualquier área, se deben incluir a todos los estudiantes, con o sin NEE.

La experiencia como profesor de estudiantes con NEE, ha permitido ver un panorama complejo en la enseñanza con esta población. La falta de experiencia, conocimiento y estrategias para la atención educativa a estos estudiantes, genera la necesidad de realizar el presente trabajo de investigación. Esto con la intención de hacer un ejercicio reflexivo en la práctica docente personal, así como aportar estrategias que permitan cumplir a cabalidad los procesos misionales de las instituciones de educación inclusiva.

Por eso es importante aportar a la educación matemática estrategias que permitan favorecer procesos de enseñanza y aprendizaje con estudiantes con NEE. Adicionalmente porque los maestros debemos estar preparados para enseñar a esta población, ya que están en circulación varias normativas, las cuales establecen que la atención a dichos estudiantes se debe dar en cualquier institución educativa.

1.2. Antecedentes

En la búsqueda de algunos investigadores que se interesen por los procesos de enseñanza de las matemáticas a estudiantes con algún tipo de discapacidad, se encuentran los trabajos que se muestran a continuación.

- La investigación de Hassan, Fernandes y Healy (2014) tenía como propósito la conceptualización de expresiones algebraicas de estudiantes sordos de una escuela brasileña. Para el desarrollo de esta investigación se seleccionó un colegio, observando que en la clase de álgebra se excluye a los estudiantes sordos, aislándolos de sus demás compañeros porque no pueden establecer una comunicación de ideas de álgebra en lengua de señas. Los investigadores utilizaron secuencias de figuras cuya manipulación buscaba que los estudiantes pudieran entender qué es una variable. Cuando se estudiaron los resultados de esta investigación se concluyó que, gracias al programa, el término variable adquirió un significado para los estudiantes sordos al llamarlo “número secreto”, el cual sí tiene una representación visual-gestual en el lenguaje de señas brasileño.

- Ma, Xin, Tzur, Si, Yang, Park Liu & Ding (2014) se propusieron observar el efecto de un sistema tutorial, dividido por módulos, creado para que estudiantes que tienen discapacidad cognitiva resuelvan problemas matemáticos. Para el desarrollo de la

investigación se escogieron tres estudiantes con NEE en una escuela urbana de Estados Unidos. Se les plantearon varios problemas relacionados con la multiplicación. El programa se diseñó de tal manera que, al pasar por cada módulo, este iba registrando errores y aciertos en las casillas habilitadas. Los resultados obtenidos en esta investigación muestran que el sistema tutorial permite mejorar el razonamiento multiplicativo de los estudiantes, porque el tipo de preguntas y las representaciones que se hacen de los enunciados de los problemas planteados hacen más significativo para ellos la comprensión de los mismos. De igual forma también se descubrió que hay momentos en los que la interfaz los distraía, ocasionando reprobación en los módulos por esta causa, y no por desconocimiento. Este trabajo es pertinente para la propuesta aquí plasmada, ya que es un modelo para analizar cómo la tecnología digital es un recurso útil para trabajar con estudiantes que tengan NEE.

- Bruno y Noda (2010), escribieron un documento que muestra en su primera parte, la recopilación de algunas investigaciones sobre procesos de enseñanza en estudiantes con síndrome de Down. En esta sección se muestra que los estudiantes con síndrome de Down tienen un compromiso cognitivo el cual afecta notoriamente la manera en que pueden aprender matemáticas. En la segunda sección muestran una investigación sobre las dificultades que presentan los estudiantes con síndrome de Down al resolver problemas que involucran sumas sencillas. Los resultados de la investigación arrojaron que la falta de recursos audio visuales es el principal impedimento para la enseñanza de las matemáticas a estudiantes con este síndrome. Por eso argumentan que es necesario buscar estrategias que potencien los procesos en matemáticas para lograr la inclusión educativa con esta población.

- Quintero y Rojas (2008), realizaron una investigación sobre la viabilidad de una serie de actividades diseñadas por las investigadoras para la enseñanza de triángulos a estudiantes con Síndrome de Down. En el trabajo se escogieron ocho estudiantes del Instituto Pedagógico Nacional de la sección de Educación Especial, con los cuales se desarrollaron las actividades. Estas se dividieron en cinco sesiones de 90 minutos las cuales fueron orientadas por un docente, y un acompañante que reunía la información más relevante de cada sesión en video. En el desarrollo, primero iniciaron con una prueba diagnóstica para identificar qué nociones tenían los estudiantes sobre triángulos y otros objetos geométricos. Luego introdujeron las ideas de punto, recta y segmento para así pasar

a los ángulos. Seguido de esto se hizo una conceptualización de triángulo para que al final ellos pudieran clasificarlos según sus ángulos. Se puede rescatar de esta investigación que dentro de las diferentes actividades realizadas se involucraron procesos corporales y uso de material concreto. Las investigadoras señalan que la enseñanza tradicional con estudiantes que tienen síndrome de Down debe dejarse a un lado. Como resultado de esta investigación, se observa que los estudiantes tienen un progreso constante en el reconocimiento de triángulos y su posterior clasificación por sus ángulos; además, que la conceptualización efectuada está muy influenciada por la interacción social, tanto así, que para representar ángulos rectos, obtusos o agudos se usaron letras y colores específicos escogidos por ellos mismos. Esta propuesta es pertinente porque muestra un panorama sobre qué tipo de actividades potencian procesos dentro del aula con estudiantes con NEE.

- Acevedo (2010), realizó una investigación sobre la influencia del videojuego Tetris para enseñar nociones de traslación y rotación a estudiantes con déficit cognitivo. Para el desarrollo de la investigación se escogieron tres estudiantes con dicho déficit del Gimnasio Los Robles, con los cuales se hicieron tres intervenciones. La investigación se diseñó a partir de un dispositivo didáctico, articulado con el modelo de Modificabilidad Estructural Cognitiva (MEC) el cual favorece el proceso de visualización. Los resultados de esta investigación muestran que dicho proceso se potencia al explorar la rotación y traslación en el videojuego Tetris, cuando se enmarca en la resolución de problemas. Esta particularidad deja en evidencia que los estudiantes con NEE pueden determinar una ruta para solucionar un problema, siempre que las actividades puedan compensar sus necesidades particulares de aprendizaje. Es uno de los trabajos más relevantes para la propuesta, ya que muestra como los estudiantes con NEE potencian procesos de la actividad matemática, con ayuda de la tecnología digital.

1.3. Planteamiento del problema

Para entender claramente cómo se configura el problema de investigación, primero se describe el contexto donde se desarrolló. Para el planteamiento del problema se escoge el colegio llamado Liceo VAL (Vida, Amor, Luz), el cual tiene como filosofía la inclusión y, dado ello, atiende a población con NEE, en la educación básica y media. En bachillerato, el colegio adopta una metodología de autoaprendizaje, que consiste en que cada estudiante aprende utilizando su propia metodología, basándose en textos escogidos por la Institución, permitiendo la inclusión en el aula de clases. También existen clases tipo cátedra como geometría en donde todos los estudiantes se reúnen en el mismo espacio, para que el profesor realice su clase de acuerdo con un plan de estudios; desafortunadamente en dicha clase los estudiantes con NEE están en un salón de clases tradicional, mientras que sus compañeros están recibiendo su cátedra con apoyo de programas digitales. Esto se debe a falta de conocimiento y de estrategias para desarrollar clases que promuevan procesos similares a los que se enfrentan sus compañeros.

Para caracterizar la problemática se realizó una observación de una clase de geometría de grado séptimo, en donde un profesor se encontraba con dos estudiantes con NEE. En esta clase, estos estudiantes se dedicaron únicamente a copiar definiciones de tipos de triángulos que el profesor escribió en el tablero y a colorear representaciones de estas figuras geométricas (Imagen 1 y 2). Se observó que los estudiantes tenían una información frente a ellos en el tablero, la cual transcribían a sus cuadernos u hojas de apuntes. El profesor intervino [3] para preguntar qué estaban haciendo (Fragmento 1). Se reconoció que su actividad consistía solo en leer la información que estaba escrita en el tablero.

Fragmento 1. Diálogo entre estudiantes NEE y profesor.

- 1 Profesor: ¿Qué estás estudiando?
- 2 Andrés: Triángulo escaleno (mirando el tablero).
- 3 Profesor: Hola Federico, ¿qué estas estudiando?
- 4 Federico: Ehhehh, (...) (...) (Lee el tablero y contesta) Triángulos.

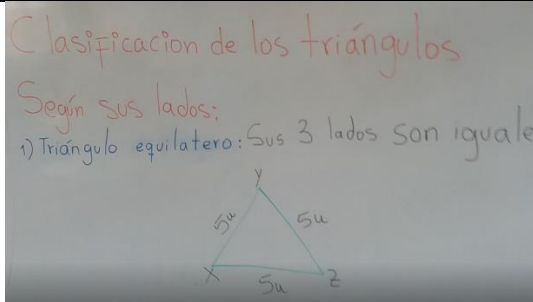


Imagen 1. Información en el tablero escrita por el docente.

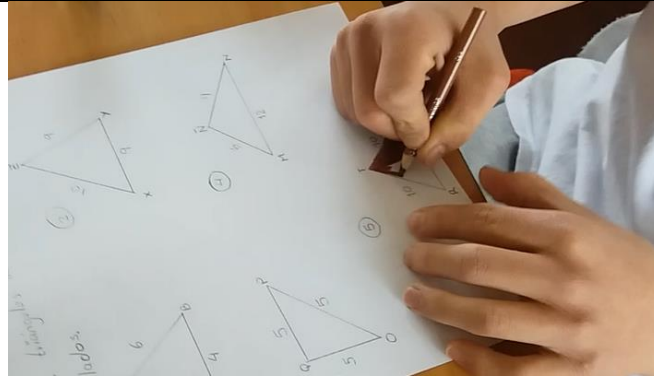


Imagen 2. Apuntes del estudiante

Al observar lo anterior surgió la duda en relación si los estudiantes estaban conceptualizando lo que el profesor de matemáticas pretendía. Según estas evidencias, parecería que los estudiantes se estaban dedicando a registrar información escrita en sus cuadernos, pero no estaban realizando procesos importantes en el aprendizaje de la geometría, como definir, conceptualizar, visualizar, etc. En comparación con sus compañeros neurotípicos¹, estos se dedican a desarrollar actividades mediadas con tecnología digital orientadas por lo general a desarrollar la visualización.

En el campo de la Educación Matemática, son diversos autores los que se han enfocado en la definición de objetos matemáticos. En particular, Gavilán, Sánchez y Escudero (2012) entienden esta como la habilidad para construir significado de algún objeto, mediante una ordenación lógica de sus características. La definición se hace evidente por el cambio en el discurso matemático de los estudiantes, relacionado con identificar, clasificar y comparar los objetos geométricos según sus propiedades (Sfard, 2008; citado en Valencia, 2012). En ese sentido, como lo señala Hassan, Fernandes, y Healy. (2014), la comunicación entre el profesor y los estudiantes permite construir significados y definiciones fuertemente influenciados por las interacciones sociales y culturales, en las que ellos manipulan representaciones de objetos matemáticos y comunican las ideas que construyen sobre ellos.

Con el fin de ahondar en el problema, el autor de esta investigación realizó una segunda intervención con tres estudiantes, diferentes a los de la primera observación, que pertenecían a grado octavo. La tarea propuesta consistía en el reconocimiento y

¹ Neurotípico se refiere a las personas que no tienen ningún tipo de discapacidad cognitiva

representación de polígonos. Esta tarea serviría como medio para evidenciar si los estudiantes interpretaban la definición de polígono, que habían estudiado cursos atrás. La tarea consistía en unir dos pares de fichas de colores, en la que había el trazo de unas líneas (Imagen 3), de tal manera que se formara una figura plana cerrada en cada combinación. Era posible encontrar máximo cuatro figuras. Los niños tenían que conectar los extremos, reproducir la figura en una hoja y decir si se había formado o no un polígono. Los estudiantes a los que se les propuso la tarea son: Inés con Síndrome de Down, Sara con Trastorno del Espectro Autista (TEA) y Carlos con Déficit Cognitivo.

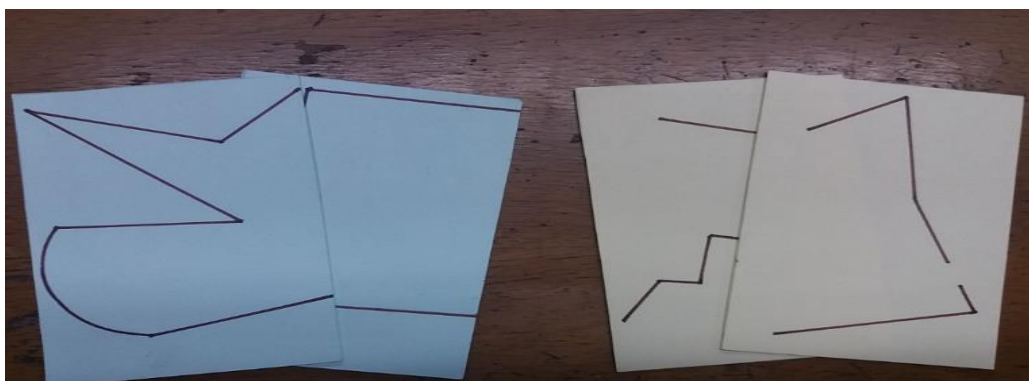


Imagen 3. Fichas con trazos para formar figuras planas.

Inés pudo reproducir tres de las cuatro figuras planas que formó y logró clasificar adecuadamente cada una como polígono o no-polígono (Imagen 4). Pero no pudo comunicar ni verbalmente ni por escrito una explicación de por qué decía que una representación era un polígono. Ella comunicó que no sabía cómo explicarlo.

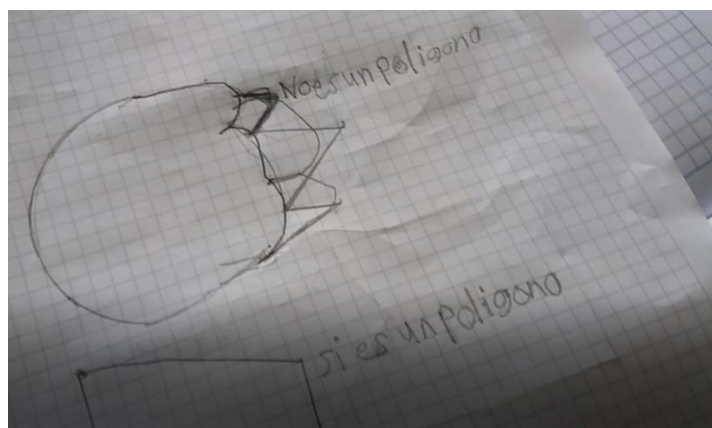


Imagen 4. Caracterización de figuras formadas por Inés

Sara reprodujo las figuras formadas, al momento de clasificarlas argumentó que todas eran polígonos (Imagen 5). La explicación que dio fue la siguiente: “Para mí un polígono es cualquier figura geométrica”. (Imagen 6)

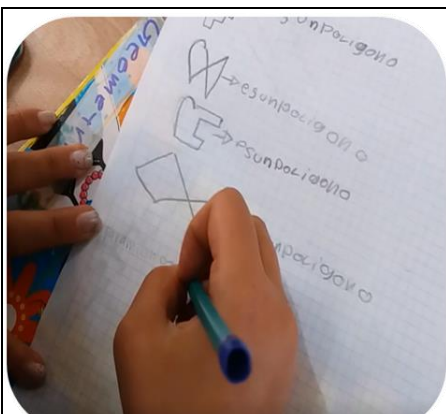


Imagen 5. Caracterización de las figuras formadas por Sara.

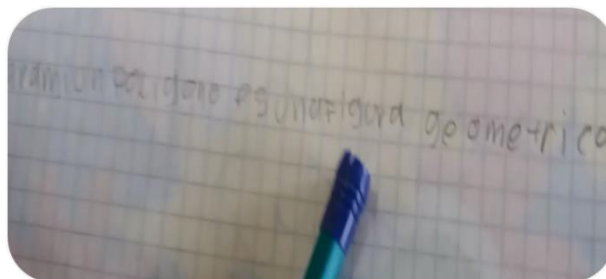


Imagen 6. Definición de polígono por Sara.

Carlos no logró reproducir las figuras correctamente. Había que orientarlo hacia la tarea en repetidas oportunidades porque se desconcentraba fácilmente. Las pocas figuras que reprodujo las clasificó mal y su explicación de porqué unas eran polígonos no es entendible. (Imagen 7 y 8)

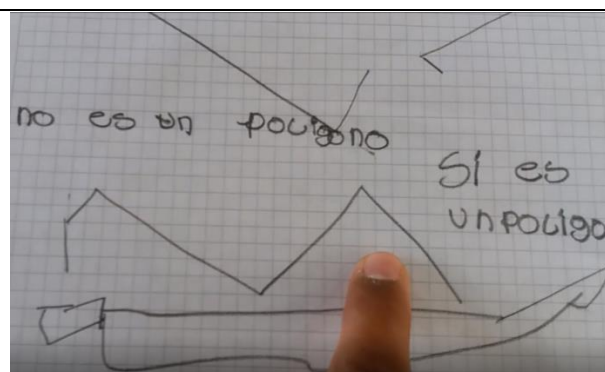


Imagen 7. Clasificación de polígonos por Carlos

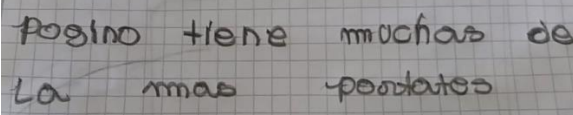


Imagen 8. Definición de polígono por Carlos

La actividad desarrollada por los estudiantes llevó a inferir que el acercamiento a los objetos geométricos con estudiantes que tienen NEE es complejo, principalmente por dos razones:

- Se percibe que los procesos cognitivos se ven afectados: ellos parecen no entender las instrucciones que se les brindan, se limitan a reproducir lo que ven hacer, y no logran discriminar atributos relevantes para caracterizar un objeto geométrico.
- También se percibe que los procesos comunicativos son difíciles: se notan dificultades al expresar sus ideas, sobre todo de manera verbal.

Cada condición afecta de forma diferente la parte cognitiva y comunicativa, por eso se observa variedad de respuestas en la intervención realizada. Adicionalmente, se ha mencionado que, según (Sfard 2008; citado en Valencia, 2012) la construcción de significado se evidencia en los estudiantes a través de un cambio en el discurso matemático, porque lo que dicen se relaciona directamente con la forma como entienden y relacionan los objetos geométricos. Pero, la situación que están viviendo actualmente los estudiantes con NEE en el Liceo limita sus interacciones con sus demás compañeros y con el profesor, haciendo más difícil que avancen en la construcción de definiciones, puesto que ellos están excluidos de la clase regular.

Con base en los antecedentes y el asunto problemático que este trabajo desea atender, se exponen algunas relaciones importantes. Primero la población, puesto que los participantes de los trabajos mencionados tienen una discapacidad, bien sea, cognitiva o física. Segundo el asunto problemático, algunos trabajos (Hassan, Fernandes y Healy (2014); Bruno y Noda (2010); Acevedo (2010)) se enfocan en promover procesos de la actividad matemática como la visualización, conceptualización, entre otros. Por último, los trabajos de (Ma, Xin, Tzur, et al (2014); Hassan, Fernanades y Healy (2014); Acevedo (2010)) mencionan el impacto positivo de la tecnología digital en sus investigaciones, en especial el trabajo de Bruno, Noda, Aguilar, et al (2006), señala como los estudiantes con síndrome de Down mejoraron en procesos lógico-matemáticos con ayuda de un tutorial inteligente. Además, mencionan la necesidad de utilizar recursos digitales y no digitales en el diseño de las tareas, atendiendo a la “necesidad al tacto” que caracteriza a las personas con síndrome de Down.

Por lo anterior, se perciben dos aspectos en el problema de investigación, el primero es la necesidad de diseñar tareas que promuevan el proceso de definir, en estudiantes con NEE; el segundo aspecto de la problemática se enfoca en el uso de la tecnología digital para

aprender matemáticas por parte de estos estudiantes. Este es un factor interesante, ya que el papel de la tecnología digital se centra en el diseño de las tareas que se utilizan en esta investigación. Permitiendo que el dinamismo propio de los Sistemas de Geometría Dinámica favorezca la recolección de información con riqueza investigativa.

Dado esto, se orienta la investigación con estudiantes diagnosticados con síndrome de Down, debido a que son la mayor población con esta condición en el Liceo. En la búsqueda de poder atender la problemática aquí presentada la pregunta que moviliza esta investigación es:

¿Cómo los estudiantes con síndrome de Down utilizan las definiciones en geometría para la solución de tareas que promueven el proceso de definir, mediadas con tecnología digital y material concreto?

1.4. Objetivos

1.4.1. General

Determinar el modo en que los estudiantes con síndrome de Down utilizan las definiciones en geometría para resolver tareas que para su solución requieren el uso de tecnología digital y material concreto.

1.4.2. Específicos

- Caracterizar las necesidades educativas especiales que tiene la población objeto de estudio.
- Diseñar aplicativos con tecnología digital y material concreto que favorezcan el proceso de definir a la población objeto de estudio.
- Establecer una correlación entre las aprehensiones operativa, perceptiva y discursiva, con la relación entre las celdas *imagen conceptual* y *definición del concepto*.
- Evidenciar el desarrollo del proceso de definir en los estudiantes participantes de la investigación.

2. Marco Teórico

2.1. El síndrome de Down

Como lo indica Gómez, Ruiz y Fernández (2005) la discapacidad cognitiva es un término entendido como una condición irreversible, en la cual una persona no puede desarrollar las capacidades promedio del intelecto (medido por la evaluación del Coeficiente Intelectual). Esta condición se categoriza por dos factores causantes: herencia genética y causas adquiridas en la infancia. El interés por esta condición inspiró a Langdon Down a realizar investigaciones de tipo médico a niños que la padecían. Como lo dicen López, López, Parés, Borges y Valdespino (2000), en el año 1866 Down publica su estudio llamado *Observations on an ethnic classification of idiots*, en el cual construye una clasificación de tipo étnico de estos niños con discapacidad cognitiva, en la cual aparecen los “Mongólicos” o simplemente “Mongoles” que luego serían llamados niños con síndrome de Down.

No fue sino hasta 1959 que los investigadores Lejeune y Jacobs demostraron que el síndrome de Down se origina en el proceso de la fecundación del feto, debido a la triplicación del cromosoma 21. En la división celular normal se parte de dos cromosomas, uno donado por el padre y el otro por la madre, lo que lleva a un sinnúmero de células que siempre contienen un par de cromosomas del padre y de la madre, este proceso continúa hasta que el ser se forma. En el caso de los niños con síndrome de Down, la distribución en el par 21 es defectuosa, es decir, cuando se dividen las células una parte recibe un cromosoma extra y la otra uno menos, mientras que los otros pares se distribuyen normalmente.

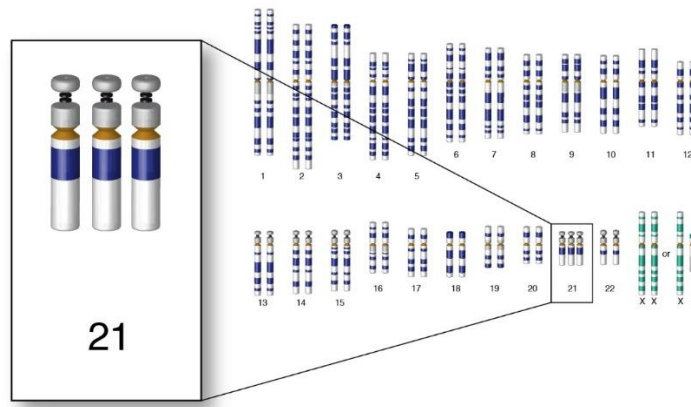


Imagen 9. Repartición defectuosa (trisomía) del cromosoma 21.

Los niños con Síndrome de Down presentan unas características únicas en el desarrollo físico y cognitivo; como lo manifiesta Basile (2008) este síndrome es la causa más frecuente de discapacidad psíquica congénita; se cree que el 25% de los casos de discapacidad cognitiva en el mundo, corresponden a este síndrome.

2.1.1. Características físicas

Dado que el Síndrome de Down es una alteración congénita, las personas con esta condición presentan unas características físicas generales que pueden clasificarse en cuatro aspectos:

- **Bajo tono muscular:** Los músculos de estas personas son flácidos y muy relajados, por lo tanto, son más difíciles de controlar. Esta característica afecta todo tipo de movimientos naturales como caminar, respirar, masticar o hablar. Por ejemplo, dado que no tienen el control total sobre los músculos de la cara, en especial los de la región mandibular, tienen dificultad para hablar y mantener la boca cerrada.
- **Región mandibular estrecha:** Toda la región mandibular es mucho más cerrada causando que la boca sea más pequeña y por lo tanto la lengua tiende a no acomodarse correctamente dentro de esta. Ello afecta también el control de la respiración haciendo que no lo realicen por la nariz, lo cual puede perturbar el sueño de la persona.
- **Alteración en el crecimiento:** Las personas con Síndrome de Down con bastante frecuencia tienen una estatura menor al promedio, debido a la debilidad de su tono muscular; pero esto a su vez les otorga una flexibilidad muy alta, dado que el músculo no se contrae con fuerza al mover una articulación. También presentan una

desproporción entre la cabeza y el cuerpo; ellos poseen un cuerpo más delgado y pequeño con relación a su cabeza.

- **Globo ocular pequeño:** Su globo ocular es más pequeño en relación con el tamaño de la cabeza, provocando que los ojos estén más separados de la nariz. Además, los párpados son más grandes y con poca presencia de pestañas, dejando al ojo más expuesto al medio.

Estas características afectan de forma general a todas las personas que tienen síndrome de Down, pero también pueden ser particularidades de otras enfermedades como cardiopatías, afecciones gastrointestinales, problemas de visión, trastornos auditivos, odontológicos y endocrinos.

2.1.2. Estado mental

La aparición de discapacidad intelectual o cognitiva en personas que padecen el Síndrome de Down es una característica presente en el 100% de los individuos con dicha condición. Según lo que menciona Kumin (2017) la discapacidad intelectual en esta población ha sido ampliamente documentada, casi desde su descubrimiento; ello ha permitido hacer una caracterización amplia al respecto. Según los datos morfológicos y funcionales obtenidos de los cerebros, en numerosos trabajos (Chapman y Hesketh, 2000; Flórez, 2005; Fidler y y Nadel, 2007; citados en Troncoso y del Cerro, 2009) han comprobado que, en mayor o menor grado, suelen existir en las personas con síndrome de Down, problemas relacionados con el desarrollo de los siguientes procesos:

1. Los mecanismos de atención, el estado de alerta, las actitudes de iniciativa.
2. La expresión de su temperamento, su conducta, su sociabilidad.
3. Los procesos de memoria a corto y largo plazo.
4. Los mecanismos de correlación, análisis, cálculo y pensamiento abstracto.
5. Los procesos de lenguaje expresivo.

Inicialmente se pensaba que con el paso de la edad y a partir de los 10 años habría una disminución progresiva de la capacidad intelectual; pero estos estudios longitudinales han demostrado que no se produce deterioro o regresión al pasar a edades superiores cuando la acción educativa persiste. Sin embargo, cabe aclarar que la edad mental avanza a un ritmo

más lento en comparación con su edad cronológica, por eso tendrán una etapa infantil teniendo edades superiores (Troncoso y del Cerro, 2009)

Autores como Gómez, Ruiz y Fernández (2005), han caracterizado el comportamiento de los estudiantes con Síndrome de Down en dos procesos que intelectualmente se ven afectados:

- **Generalidad de situaciones:** Es la capacidad para aplicar la información aprendida en una situación a otra diferente. Los niños con síndrome de Down pueden aprender una habilidad en una determinada circunstancia, pero les cuesta generalizarla automáticamente a situaciones parecidas. El ejemplo clásico se puede observar cuando el niño aprende una norma, porque entiende que no puede tomar objetos que no sean suyos sin permiso y puede emplear en su casa, pero fuera de ella puede no aplicar la misma norma.
- **Memoria:** La memoria se define como la capacidad de almacenar y evocar la información, las acciones y los acontecimientos. Se puede dividir en memoria a largo y a corto plazo. La memoria a largo plazo implica habilidades aprendidas con el tiempo, como el tocar un instrumento musical, el nadar, el recuerdo de información o de acontecimientos pasados. La memoria a corto plazo es la memoria operativa que se emplea cada día para procesar la información necesaria y así afrontar las situaciones a medida que suceden. La memoria a corto plazo verbal es un área de especial dificultad para niños con síndrome de Down; en general, tienen mejor memoria para recordar lo que ven (memoria visual) que lo que oyen (memoria auditiva).

2.1.3. Características Cognitivas

Las características cognitivas de las personas con Síndrome de Down tienen estrecha relación con los problemas de salud y funcionalidad de su cuerpo. En particular la visión y la audición van a repercutir negativamente al ingreso de la información y su posterior procesamiento en el cerebro. Como lo mencionan Gómez, Ruiz y Fernández (2005), los niños con síndrome de Down presentan unas características que pueden variar según la intervención educativa oportuna, y las estrategias usadas en dicha intervención. Estas

características son descritas por Troncoso y del Cerro (2009, p. 15), las cuales pueden resumirse en el siguiente listado:

- a) Su aprendizaje se realiza a un ritmo más lento.
- b) Se fatiga rápidamente y su atención no se mantiene por un tiempo prolongado.
- c) Su interés por la actividad a veces está ausente o se sostiene por poco tiempo.
- d) Muchas veces no puede realizar actividades solo.
- e) La curiosidad por conocer y explorar lo que lo rodea está limitada.
- f) Le cuesta trabajo recordar lo que ha hecho y conocido.
- g) No se organiza para aprender de los acontecimientos de la vida diaria.
- h) Es lento en responder a las instrucciones que se le dan.
- i) No se le ocurre inventar o buscar situaciones nuevas.
- j) Tiene dificultad en solucionar problemas nuevos, aunque éstos sean parecidos a otros vividos anteriormente.
- k) Puede aprender mejor cuando ha obtenido éxito en las actividades anteriores.
- l) Cuando conoce de inmediato los resultados positivos de su actividad, se interesa más en seguir colaborando.
- m) Cuando participa activamente en la tarea, la aprende mejor y la olvida menos.
- n) Cuando se le pide que realice muchas tareas en corto tiempo, se confunde y rechaza la situación.

Estas características no corresponden a todas y cada una de las personas con síndrome de Down, pero si da cuentas de que una persona que tenga dicho síndrome presentará estas características, unas más evidentes que otras; así como algunas que probablemente no presente.

2.1.4. Discapacidad Cognitiva y síndrome de Down

Como lo mencionan López, López, Parés, Borges y Valdespino (2000), el término discapacidad cognitiva reemplazó la expresión “retraso mental” y otros términos similares por ser considerados peyorativos para clasificar esta población. Desde entonces el concepto de discapacidad cognitiva se ha vuelto muy robusto gracias a los estudios realizados por la AADID (Asociación Americana de Discapacidad Intelectual y Discapacidades del Desarrollo). Esta asociación ha generado un manual llamado: *El manual diagnóstico y*

estadístico de los trastornos mentales (DSM), en el cual ha definido la Discapacidad Cognitiva como una alteración en el desarrollo del ser humano, caracterizada por limitaciones significativas tanto en el funcionamiento intelectual como en las conductas adaptativas. Este mismo manual establece una clasificación de discapacidad cognitiva según la evaluación del coeficiente intelectual (CI):

- Discapacidad Intelectual Leve: Se refiere a la escala entre 50 y 90 del CI de una persona; se considera que estas personas están cerca de ser neurotípicas porque pueden comunicarse verbalmente y por escrito con los demás, aunque suelen tener defectos específicos de lecto-escritura.
- Discapacidad Intelectual Moderada: Se refiere a la población caracterizada con un CI entre 35 y 50; en este rango se encuentran la gran mayoría de síndromes que afectan la capacidad intelectual, entre ellas el síndrome de Down. Socialmente se pueden relacionar fácilmente con las personas, siempre y cuando sientan confianza en ellas, con un trabajo pedagógico constante pueden llegar a un nivel de escolaridad básico que puedan utilizar para su vida adulta.
- Discapacidad Intelectual Grave: Esta categoría incluye personas con un CI entre 20 y 35. Es una población con bastantes dificultades porque su edad mental está muy por debajo de su edad cronológica; por lo tanto, las habilidades comunicativas aparecen después de los cinco años. Las personas clasificadas en esta categoría tienen algún síndrome asociado como en la clasificación anterior, con la diferencia que su compromiso cognitivo es superior.
- Discapacidad Intelectual Profunda: Este es el caso de las personas con un CI inferior a 20, para esta categoría se ha encontrado que solo están presentes las personas con enfermedades múltiples asociadas; por ejemplo, el síndrome de Kabuki tiene repercusiones a nivel cognitivo y neurológico que afectan el cerebro de distintas maneras.
- Discapacidad Intelectual no especificada: Esta es una categoría usada únicamente cuando las pruebas del CI no son consideradas el instrumento único para poder clasificar las discapacidades cognitivas; también se utiliza cuando dada una condición particular en la cual una persona no puede presentar la prueba de CI. Este

es el caso de las personas con parálisis cerebral espástica, es decir, sus articulaciones son rígidas impidiéndoles escribir.

Dada esta categorización se entiende claramente que las personas con síndrome de Down tienen un desarrollo cognitivo inferior a una persona neurotípica; por lo tanto, existen estrategias diferentes en la enseñanza a esta población, las cuales están diseñadas con el objetivo que ellos puedan mejorar procesos educativos.

2.1.5. El síndrome de Down en el aprendizaje de las matemáticas

Como ya se mencionó anteriormente, los estudiantes con síndrome de Down presentan varias dificultades cognitivas en distintos niveles según criterios ya establecidos. Sin embargo, estas dificultades se manifiestan de manera particular en el aprendizaje de la aritmética y la geometría. Autores como Noda y Bruno (2010), manifiestan que, para el aprendizaje de las operaciones aritméticas, los estudiantes con síndrome de Down pasan por los mismos niveles procedimentales que los estudiantes neurotípicos. Utilizan estrategias similares para ejecutar sumas o restas como: objetos, dedos, bolas, etc. Otros como Ruiz (2012), mencionan que estos estudiantes presentan problemas en la abstracción de información; necesitan mayor tiempo invertido en ejemplos, ejercicios y práctica; poca tendencia a la exploración y deficiencias en las funciones ejecutivas. Sin embargo, existen otros procesos cognitivos como la semántica la cual no es afectada en gran profundidad por este síndrome. Según Tuset, Bruno, Noda y Ramírez (2016), a pesar de estas características logran construir significados particulares y mejorar notoriamente en procesos como el conteo.

Otras investigaciones, se han dedicado en mostrar la mejoría en el aprendizaje de las matemáticas cuando se utilizan estrategias diferentes a las usuales, este se ha potenciado con el uso de tecnología digital. Este es el caso de Bruno, Noda, et al (2006), en donde se muestra como un sistema tutorial favorece los procesos lógico-matemáticos como la clasificación, correspondencia uno a uno, seriaciones y cuantificadores. Estos autores señalan en su estudio que los estudiantes tienen menos dificultades para elegir objetos idénticos entre sí; esto permite entender que así mismo pueden reconocer atributos de una representación geométrica.

Además de lo anterior, Ponce, Ornelas, et al (2015) manifiestan que los recursos digitales, como la Realidad Aumentada, son indispensables para mejorar el aprendizaje de los estudiantes con síndrome de Down. Esto lo afirman ya que lograron determinar que el uso de dicha herramienta digital permite generar conexiones entre los objetos geométricos y objetos físicos; es decir, que los estudiantes-participantes reconocen polígonos de hasta seis lados, en objetos cotidianos.

Los estudiantes con síndrome de Down pueden generar significados propios de los objetos geométricos, generar asociaciones y realizar clasificaciones en un orden lógico. Estas habilidades pueden ser aprovechables en otros escenarios como el de esta investigación, el cual se enfoca en el proceso de definir. Se puede apreciar en el trabajo de Ponce, Ornelas, et al (2015) que, aunque el enfoque de la investigación realizada era mejorar el aprendizaje de los estudiantes, la visualización se promovió para cumplir un objetivo académico. Y ya que se menciona que los estudiantes Down logran hacer algunas asociaciones lógicas básicas, acompañadas de interpretaciones semánticas, también pueden ser capaces de desarrollar el proceso de definir.

Bruno, Noda, et al (2006) también ratifican que los estudiantes que comienzan a desarrollar procesos matemáticos a edades tempranas adquieren las habilidades lógicas de forma más rápida. En su etapa de madurez se notan mejorías importantes cuando se continúa con el proceso académico. Esto permite entender que cuando se promueven procesos como el de definir en edades tempranas, se obtendrán resultados satisfactorios en edades superiores. Se comprueba así el trabajo de Nye, Fluck y Buckley (2001), en donde se afirma que los estudiantes con síndrome de Down aprenden conceptos y procesos matemáticos sin recurrir únicamente a la memoria.

Esta sección se ha encargado de mostrar las diferentes características que poseen los estudiantes con síndrome de Down tanto a nivel físico como cognitivo. Esto tiene repercusiones específicas en el desarrollo posterior de las tareas utilizadas en este estudio. Dado que la poca memoria a corto plazo es uno de los factores más incidentes en el desarrollo de procesos de esta población; se pretende diseñar preguntas que permitan reforzar la nueva información que ingresa. El diseño de preguntas debe permitir el interés y la curiosidad por explorar nuevas alternativas que guíen al estudiante a buscar solución de

la tarea planteada. También se seguirán las recomendaciones de Bruno y Noda (2010), acerca de la necesidad al tacto (mencionada en párrafos anteriores), por eso se diseñaran tareas con material concreto que permitan equilibrar la presentación de la información, con el uso de materiales audiovisuales. En conclusión, el aspecto más incidente es la participación activa del estudiante con síndrome de Down; eso significa que se le soliciten acciones concretas usando cuestionamientos de lo que realiza y de lo que no, para despertar el interés en la tarea que realiza.

Dado lo anterior se realiza a continuación un desarrollo teórico acerca del proceso de definir en matemáticas, adaptando este a las necesidades y posibilidades descritas en esta sección.

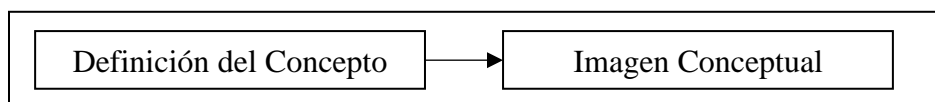
2.2. Definir en matemáticas

Para entender la esencia de una definición en matemáticas primero se realiza una comparación de este concepto desde su significado lingüístico hasta su significado y uso en matemáticas. Para la Real Academia Española definir consiste en fijar con claridad, exactitud y precisión el significado o naturaleza de una palabra o cosa. También especifica que una palabra puede tener diferentes significados. Por ejemplo, en su página web se encuentra que, cuadrado puede ser entendido como una pieza metálica usada en impresión para separar las letras, o la multiplicación de un número por sí mismo, o aquella figura plana cerrada compuesta por cuatro segmentos congruentes que se intersecan únicamente en sus extremos, y que forma cuatro ángulos rectos. Es por eso que debe hacerse clara la definición de un objeto matemático usando sus propiedades características para que no exista este tipo de ambigüedades.

Por su parte una definición en matemáticas como lo menciona Calvo (2001), es un enunciado verbal concreto y consistente, el cual resalta las características mínimas de un objeto sin caer en contradicciones lógicas. De esta manera se puede entender que las definiciones en matemáticas deben estar estructuradas de tal forma que se acudan a referentes teóricos que impidan dichas contradicciones. Como lo mencionan Aya y Echeverry (2009), las definiciones caracterizan los objetos geométricos que se relacionan en una red de conceptos y esto a su vez genera nuevas relaciones.

Otros autores como Tall y Vinner (1981), utilizan las definiciones en matemáticas para construir un modelo donde dichas definiciones se utilizan en la resolución de problemas. Este modelo contempla una estructura cognitiva en cada persona, dividida en dos celdas independientes, la primera es llamada en este trabajo investigativo como *definición del concepto* y la segunda es llamada *imagen conceptual*. La primera de estas hace referencia a la definición de un objeto matemático evocada por un sujeto, la cual puede ser construida de manera personal; o una definición construida en una comunidad matemática con un contexto específico. La segunda, la celda de imagen conceptual hace referencia a las diferentes representaciones (dibujos, ejemplos, no-ejemplos, experiencias) de un objeto, que un sujeto tiene.

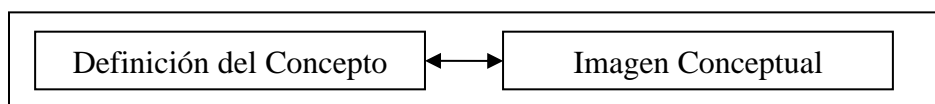
Teniendo en cuenta esta estructura cognitiva, la interacción entre las celdas permite la formación de un concepto en la cual las experiencias en torno al concepto enriquecen la imagen conceptual (Aya y Echeverry, 2009). Este proceso se da en un largo periodo de tiempo, ya que la formación de un concepto en un sujeto no depende exclusivamente de la memorización de una definición. Tall y Vinner (1981) mencionan que, en una de sus investigaciones encontraron que los profesores de secundaria esperan que la formación de la imagen conceptual, solo se da a través de la definición del concepto, y por ende esta última controlará la primera como se ve en el esquema 1.



Esquema 1. Crecimiento cognitivo de un concepto formal. Tomado de Tall y Vinner (1981).
Traducido por el autor.

En realidad, la interacción que se da en la formación de un concepto se refleja por el esquema 2. A diferencia del esquema 1, se puede apreciar un movimiento bidireccional entre las dos celdas. Esto implica que una celda puede enriquecer la otra según las experiencias que el sujeto va teniendo. Tall y Vinner (1981) señalan que, por ejemplo, si un sujeto recuerda imágenes de gráficas que asocia con sistemas de coordenadas (imagen conceptual) su noción frente al concepto es dos líneas perpendiculares. Posteriormente, dicho sujeto puede escuchar una definición de sistema de coordenada como “dos rectas que se intersecan” (definición del concepto), entonces su imagen conceptual se transforma

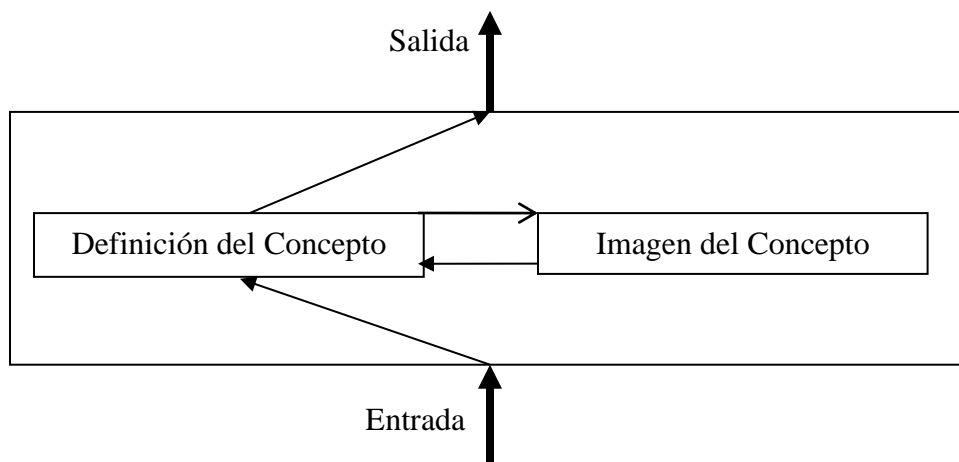
involucrando ejes que no forman ángulos rectos. Así mismo, esta transformación puede distorsionarse, es decir que su cambio en alguna de las dos celdas sea errado. Por ejemplo, que pasado un tiempo repita la definición que asimiló, pero no la relacione con otros sistemas de coordenadas.



Esquema 2. Interacción entre la definición del concepto y la imagen conceptual. Tomado de Tall y Vinner (1981). Traducido por el autor.

Tall y Vinner (1981) consideran que la activación de la estructura cognitiva en busca de la solución a una tarea debe involucrar la celda de definición del concepto para poder llegar a dicha solución. En este sentido, las formas en que se relacionan las celdas cognitivas en este modelo se establecen de la siguiente manera:

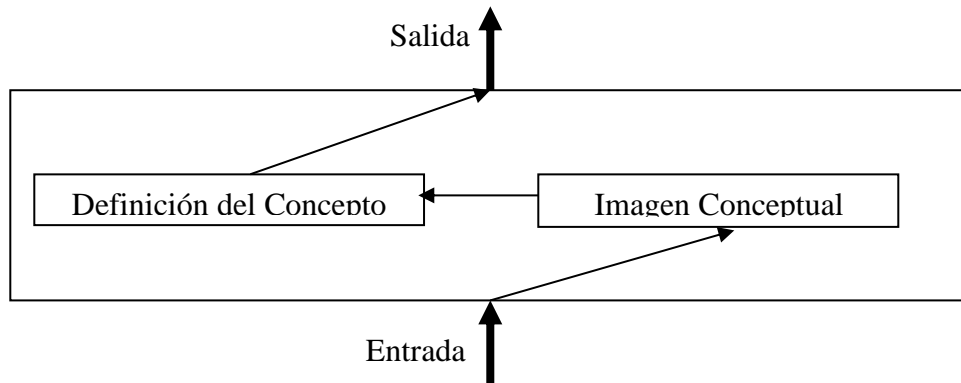
- Interrelación equilibrada entre las celdas cognitivas: Esta relación propone que sin importar cuál de las dos celdas se active al ingresar la información, el sujeto es capaz de involucrar equilibradamente dichas celdas. Es equilibrada porque se utilizan sistemas semióticos de representación (Duval, 1993) para pasar de una celda a otra.



Esquema 3. Interacción entre la definición del concepto y la imagen conceptual. Tomado de Tall y Vinner (1981). Traducido por el autor.

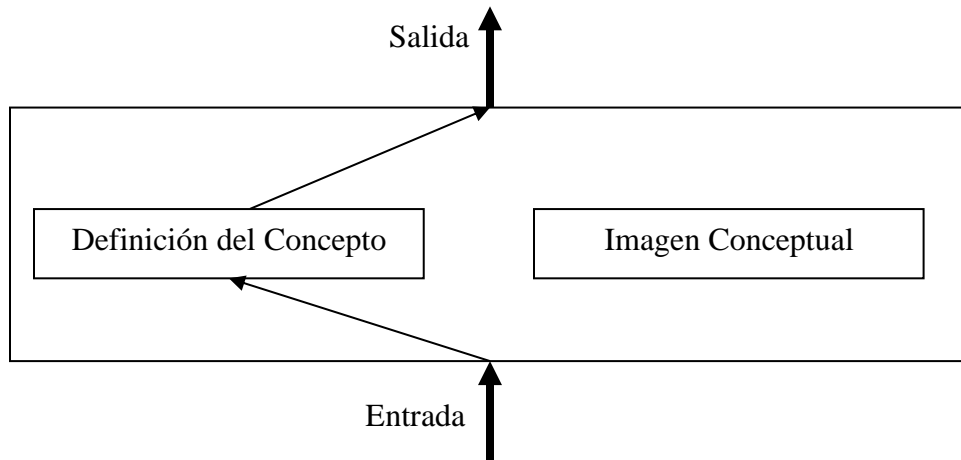
- Deducción siguiendo el pensamiento intuitivo: En esta relación el sujeto activa la imagen conceptual cuando ingresa la información. Logra activar la otra celda

cognitiva, pero su respuesta está influenciada por lo empírico debido a la representación del objeto.



Esquema 4. Deducción siguiendo el pensamiento intuitivo. Tomado de Tall y Vinner (1981). Traducido por el autor.

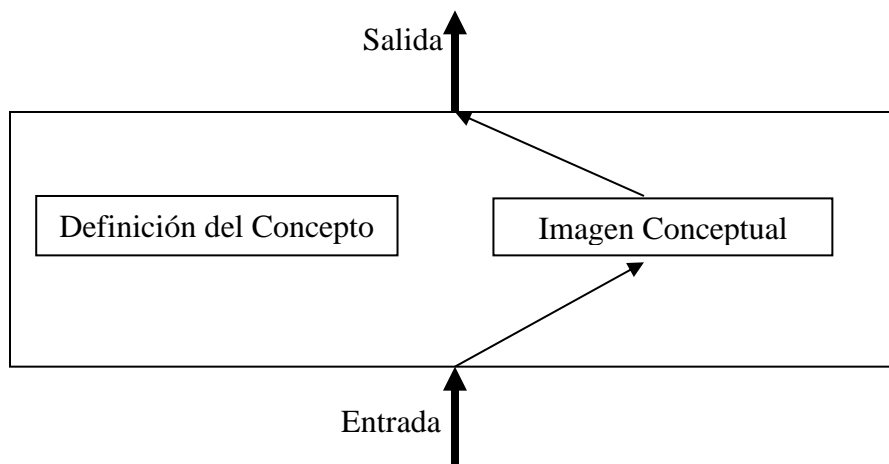
- o Deducción formal: La información ingresa y activa únicamente la celda de definición del concepto. Durante la resolución de la tarea solo acude a información verbal que permita dar respuestas de esta misma manera siguiendo el pensamiento deductivo. El sujeto evita las contradicciones lógicas para poder dar solución a la tarea que enfrenta.



Esquema 5. Deducción formal. Tomado de Tall y Vinner (1981). Traducido por el autor.

- o Respuesta intuitiva: Cuando la información ingresa el sujeto activa la celda de imagen conceptual. Como su nombre lo indica, las respuestas son a partir de lo observable y no recurre a la definición del concepto, aunque la celda esté ahí. Generalmente esta relación se presenta porque se imponen los hábitos de

pensamiento cotidianos (empíricos), obligando a no referirse a la definición de un concepto.



Esquema 6. Respuesta intuitiva. Tomado de Tall y Vinner (1981). Traducido por el autor.

Según Aya y Echeverry (2009), a pesar de que la celda de definición de concepto no está vacía, los estudiantes se dejan llevar intuitivamente por la imagen conceptual, dado que en contextos cotidianos no tienen la necesidad de evocar la definición formal del concepto. De ahí la importancia de potenciar contextos más allá de los cotidianos, porque de este modo se proponen tareas que permiten confrontar las dos celdas, aun cuando la práctica de recurrir a la imagen conceptual sin evocar la definición conceptual siga presente.

2.2.1. Atributos de una definición

Dado que el modelo presentado en el apartado anterior considera el uso de la definición para resolver problemas, es necesario describir los atributos de una definición matemática para complementar el alcance metodológico de dicho modelo. Para Calvo (2001), existen características de la definición como la convencionalidad la cual hace referencia a las definiciones no preestablecidas, que son seleccionadas por el matemático, el autor de un texto o un libro. Esta elección dependerá de las convenciones en el grado de restricción que se desee establecer para tal concepto.

Cuando se habla del grado de restricción de Villiers (1994) menciona que las definiciones pueden ser jerárquicas y particionales. Una definición jerárquica permite que los conceptos más específicos se conviertan en subconjuntos de los conceptos más generales; mientras que en la definición particional los subconjuntos se consideran disyuntos. Por ejemplo, si se

define rombo como cuadrilátero con cuatro lados congruentes y ángulos opuestos congruentes, se está realizando una definición jerárquica; porque esta definición implica que otros cuadriláteros como el cuadrado también sea considerado un rombo. Por el contrario, si se define a rombo como cuadrilátero de cuatro lados congruentes y ángulos opuestos congruentes pero consecutivos no, es una definición particional; ya que en esta ocasión el cuadrado no podría ser rombo dado que los ángulos consecutivos del cuadrado también son congruentes.

Otra característica es la minimalidad, en la cual se espera que la información de una definición no sea redundante; en este caso se le considera económica. Cabe aclarar que una definición puede tener información extra que no altera la estructura de esta. En este sentido, Calvo (2001) menciona que una definición correcta es aquella que contiene la cantidad suficiente de propiedades para que el objeto exista. Todos los objetos poseen propiedades que no necesariamente son necesarias en una definición. Por ejemplo, la definición de triángulo es la unión de tres segmentos a partir de tres puntos no colineales; esta definición no contempla que el baricentro de un triángulo siempre se encuentra en el interior de este.

Por otra parte, las palabras usadas para definir ofrecen la posibilidad de relacionar el objeto geométrico, con otros objetos. Vinner (1991), reconoce este atributo como definiciones inclusivas, en la cual, una definición de un objeto permite la transitividad con otro objeto, gracias a las características del primero. Por ejemplo, si una persona define un triángulo isósceles como un triángulo con al menos dos lados congruentes, la transitividad se da con el triángulo equilátero, porque este objeto tiene más de dos lados congruentes; entonces un triángulo equilátero es también un isósceles. Por el contrario, una definición es exclusiva si otra persona define triángulo isósceles como aquel que posee exactamente dos lados congruentes, esta definición no permite la transitividad que sí dio el anterior ejemplo.

Además de lo anterior, de Villiers (1998) menciona que las definiciones pueden darse en dos momentos distintos concebidos como: *a priori* o definición constructiva y *a posteriori* o definición descriptiva. Las definiciones descriptivas son el resultado de que un sujeto ha tenido la experiencia de conocer propiedades del objeto por algún tiempo. En últimas, el sujeto construye primero una imagen conceptual y posteriormente formula una definición del concepto. Según De Villiers (2004), una definición *a posteriori* generalmente se hace

seleccionando del conjunto de propiedades del concepto, un subconjunto de propiedades que se convierten en la definición, y las propiedades restantes se pueden deducir como teoremas. Por su parte, una definición constructiva cambia a partir de procesos lógicos como la exclusión, generalización, especialización, sustitución o adición de propiedades a la definición. En este caso un nuevo concepto se construye, implicando que la definición del concepto se transforma por dichos procesos lógicos, hasta obtener una imagen del concepto.

Entendiendo estos atributos y las personas con síndrome de Down, en este trabajo se espera que estos estudiantes puedan dejar en evidencia unas definiciones jerárquicas, ya que realizar una particional involucra más atributos propios de cada figura, para que no se relacione con otra. Según Verschaffel, Greer y Del Corte (2007), los estudiantes con síndrome de Down utilizan procesos similares en el aprendizaje de la geometría, que los estudiantes neurotípicos en sus primeras etapas de aprendizaje. Así mismo, se esperan definiciones mínimas y a posteriori, ya que serán evidenciadas durante la resolución de la tarea.

2.2.2. Definir como proceso

Construir una definición permite caracterizar un objeto matemático y relacionarlo con una red de objetos matemáticos, según la relación encontrada al definir. Por lo tanto, los conceptos van más allá de su definición. Como lo argumenta (Vinner 1991, citado en de Villiers, 1998), existen varias investigaciones donde es evidente que el saber plenamente una definición no significa que se entienda el concepto. El propio Vinner muestra datos empíricos extraídos de sus investigaciones, donde estudiantes que logran verbalizar una definición de cualquier objeto geométrico, no logran establecer relaciones con otros objetos; por ejemplo, un estudiante puede considerar que un rectángulo es aquel paralelogramo con sus cuatro ángulos congruentes, pero podría no reconocer que un cuadrado también es un rectángulo cuando los lados son congruentes.

El proceso de definir comprende también entonces, la relación entre las dos celdas cognitivas cuando se estudian características de un objeto matemático y la identificación de posibilidades permite este proceso de relacionar dichas características con otras. Esto constituye un proceso muy importante dentro del campo de la educación matemática al

igual que otros procesos como: visualizar, conjeturar, argumentar, justificar, etc. Por eso como lo argumenta de Villiers (1994), es impensable que los estudiantes puedan elaborar definiciones formales por su propia cuenta, cuando la estructura cognitiva que más se promueve más la imagen conceptual que la definición del concepto.

2.3. Aprehensión

Dado que la activación de las dos celdas cognitivas se relaciona directamente con los sistemas semióticos de representación, la elaboración de una definición matemática, o el uso de esta, dependerá de la identificación de la figura, su transformación y el establecimiento de las proposiciones que la caracterizan totalmente. Utilizar estas tres acciones para ver los objetos de forma matemática es llamado por Duval (1995), como *aprehensión*. Este término es entendido como un acto en donde se adopta la forma de las cosas sin generar algún juicio sobre ellas. En el caso de la geometría, Duval (1998) asegura que las *aprehensiones* están encaminadas a la resolución de problemas geométricos o también, para mostrar los cambios que un estudiante le realiza a un objeto geométrico. Como lo mencionan Torregrosa y Quesada (2007), una configuración es una representación que consta de una o varias figuras geométricas. Estas configuraciones se pueden clasificar en figuras de varios tipos como, por ejemplo:

- 1D/2D (una dimensión representada en dos dimensiones), hace referencia a diferentes líneas rectas o curvas sobre el papel o pantalla.
- 2D/2D (dos dimensiones representadas en dos dimensiones), se refiere a rectas y/o curvas para formar fronteras cerradas como triángulo, circunferencia, cuadrilátero, etc.
- 3D/2D (tres dimensiones representadas en dos dimensiones), representación de cubos, esferas, planos, conos, etc.

Duval (1998) propone tres tipos de *aprehensión* que se caracterizan a continuación.

2.3.1. Aprehensión perceptiva

Esta *aprehensión* se caracteriza por la identificación de una configuración. Una persona puede ver una configuración como un dibujo o trazo que no representa objeto geométrico alguno; o, por el contrario, puede reconocer un dibujo como una forma de representación de

un objeto geométrico. Por ejemplo, si tomamos la Imagen 10 esta se puede entender como la representación de una baldosa, o la de un cuadrilátero. Este tipo de afirmaciones constituyen esta aprehensión, dado que es la más intuitiva y, por ende, la primera de las aprehensiones utilizadas por los estudiantes en el aprendizaje de la geometría.

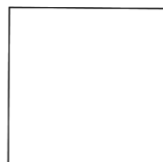


Imagen 10. Figura mental de un cuadrado

2.3.2. Aprehensión discursiva

En el caso de esta aprehensión, Duval (1995) menciona que cuando la identificación de una configuración está acompañada de afirmaciones matemáticas, se convierte en una aprehensión discursiva. Dicha aprehensión es totalmente dependiente de la aprehensión perceptiva para la conjugación de proposiciones que forman una definición; esta relación puede darse en dos direcciones partiendo desde la imagen o desde el discurso, a esta ruta se le conoce como anclaje.

Del anclaje visual al anclaje discursivo:

En este tipo de transferencia el sujeto produce una afirmación a partir de la representación de un objeto geométrico. Para ello, el sujeto debe efectuar esta asociación con sentido, identificando en el dibujo lo que caracteriza dicha representación. Por ejemplo, si a una persona se le muestra la Imagen 11 y esta indica que “ABCD es un cuadrado” el individuo tuvo que relacionar las definiciones relativas de un cuadrilátero y en específico la del cuadrado para hacer tal afirmación.

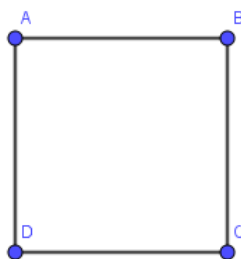


Imagen 11. Cuadrilátero con sus partes

Del anclaje discursivo al anclaje visual:

En este caso el sujeto es capaz de construir una representación que cumpla con las características de la definición o afirmación específica de un objeto geométrico. Es de aclarar que las configuraciones construidas por cada persona no tienen por qué parecerse a las de otra; cada uno representa una figura geométrica desde su percepción. Por su parte, Torregrosa y Quesada (2007) complementan la idea de aprehensión discursiva, señalando que, al cambiar el enunciado de un problema en geometría con alguna configuración geométrica, también se está efectuando una aprehensión de tipo discursivo.

2.3.3. Aprehensión operativa

Esta aprehensión se caracteriza por manipular y, por consiguiente, modificar una configuración inicial en la resolución de un problema. Según Marmolejo y Vega (2012), todas las posibles modificaciones a una configuración parten de la exploración heurística de una figura geométrica cualquiera.

Cambio Figural

Para Duval (1993) una aprehensión operativa de cambio figural, como su nombre lo indica, hace referencia a modificaciones que se realizan a la configuración inicial; estas pueden ser eliminando elementos o haciendo construcciones auxiliares que permitan obtener configuraciones distintas llamadas sub-configuraciones. Por ejemplo, si se desea encontrar el punto medio de uno de los lados de un trapecio ABCD, donde $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (Imagen 12), se pueden extender \overline{AD} y \overline{BC} hasta encontrar su intersección; a su vez que se trazan las diagonales del cuadrilátero. Al trazar la \overline{EF} se obtiene el punto medio G del \overline{AB} (Imagen 13).

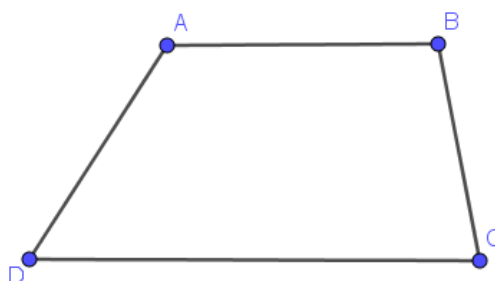


Imagen 12. Trapecio ABCD donde $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

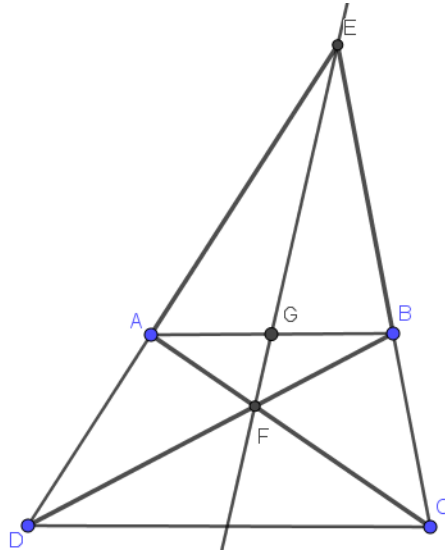


Imagen 13. Cambio figural para encontrar punto medio de \overline{AB} .

La formación del triángulo y las demás construcciones auxiliares a la configuración inicial, corresponden a una aprehensión operativa de cambio configural.

Reconfiguración

Para Torregrosa, Quesada y Penalva (2010), una reconfiguración consiste en utilizar las sub-configuraciones iniciales como piezas que se acomodan en una configuración mayor. Este proceso implica que la representación inicial de un objeto geométrico (bien sea dada o encontrada) corresponde a una sub-configuración y no a una configuración, por lo que siempre en este caso se obtendrán otras representaciones más amplias. El ejemplo más claro de una reconfiguración es la demostración del Teorema de Pitágoras en donde se puede tomar un triángulo rectángulo para formar tres cuadrados con lados a , b y c respectivamente; que posteriormente son movidos como piezas de rompecabezas hasta encontrar configuraciones más amplias. (Imagen 14)

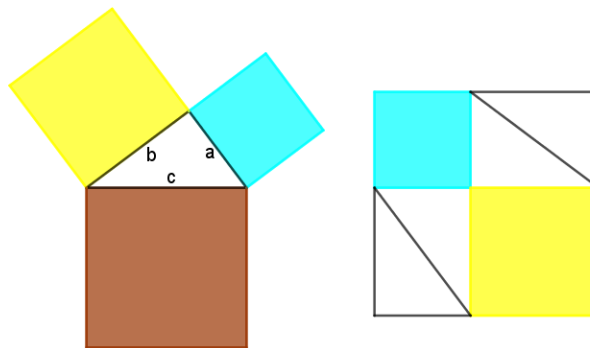


Imagen 14. Demostración teorema de Pitágoras. Realizada por el autor

2.4. Celdas cognitivas y aprehensiones

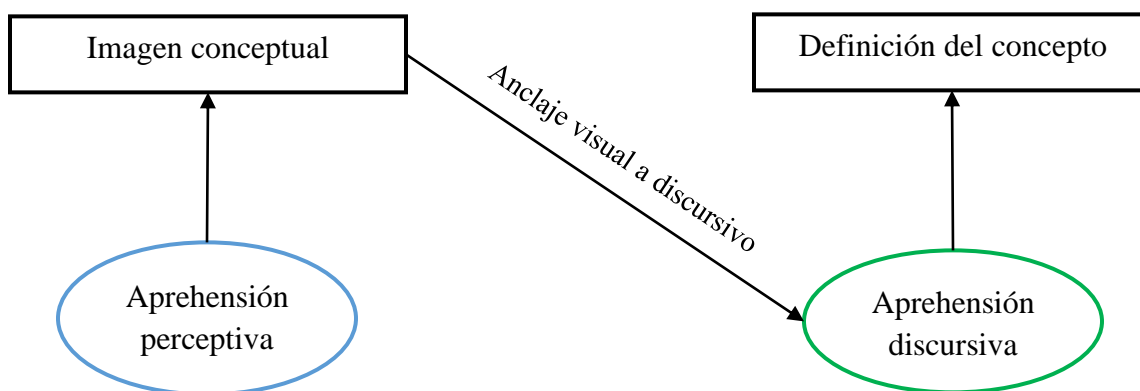
Como ya se estableció, las diferentes interacciones de las celdas cognitivas están mediadas por el uso de la definición en la resolución de problemas. En este trabajo se relacionan las interacciones de las celdas y sus características con los tres tipos de aprehensiones; de tal manera que se pueda entender como la aparición de las aprehensiones en la resolución de un problema, afectan directamente el modelo propuesto por Tall y Vinner (1981). Por lo anterior, se retoman los conceptos de cambio de anclaje y cambio configural, como los conectores entre las aprehensiones y las celdas cognitivas.

Sabemos que la imagen del concepto evoca una representación de un objeto geométrico, por lo tanto, aquí está presente la aprehensión perceptiva al identificar una configuración. La relación de esta celda con la otra se da cuando se manipula dicha configuración hasta encontrar propiedades y características únicas, es decir, el cambio configural (aprehensión operativa) se convierte en el puente entre las celdas. Cuando el sujeto construye afirmaciones matemáticas sobre la configuración que puedan caracterizar el mismo, está dejando en evidencia cuál es su definición del objeto. Lo anterior corresponde a un cambio de anclaje (aprehensión discursiva), el cual es necesario para la elaboración de una definición, o el uso de esta en el modelo.

Basándose en esto, siempre se desea llegar a la aprehensión discursiva, puesto que esta es la única (aprehensión) en la que el sujeto forma asociaciones del problema con teoremas que le permiten usar una definición matemática (Torregrosa y Quesada, 2007). Cabe aclarar que no necesariamente el sujeto necesita de las demás aprehensiones para llegar a la discursiva, puede realizar esta aprehensión de forma aislada. Esto significa que la celda de imagen conceptual no se activaría, por lo tanto, no hay aprehensiones perceptiva ni operativa. También puede existir el caso en el que se activa la celda de imagen conceptual pero solo genera una respuesta intuitiva sin utilizar alguna aprehensión.

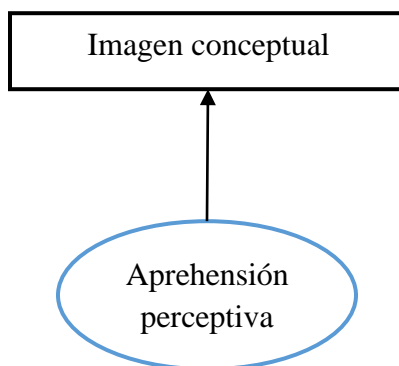
La activación de cada celda cognitiva necesita de una de las aprehensiones, es decir que para la imagen conceptual debe aparecer la aprehensión perceptiva, y para el caso de la celda de definición del concepto es necesaria una aprehensión discursiva. Cuando las dos celdas interactúan entre sí, está presente la aprehensión de tipo operativo. Para entender esta relación se configuran las siguientes rutas con sus respectivos esquemas:

Primero: Hay una activación de la imagen conceptual y posteriormente el sujeto se dispone a usar su definición, puesto que con la información suministrada visualmente puede hacerlo. Esto involucra un cambio de anclaje desde lo visual a lo discursivo acerca de la configuración para poder dar solución a la tarea.



Esquema 7. Construcción de una definición sin utilizar aprehensión operativa partiendo de lo perceptivo.

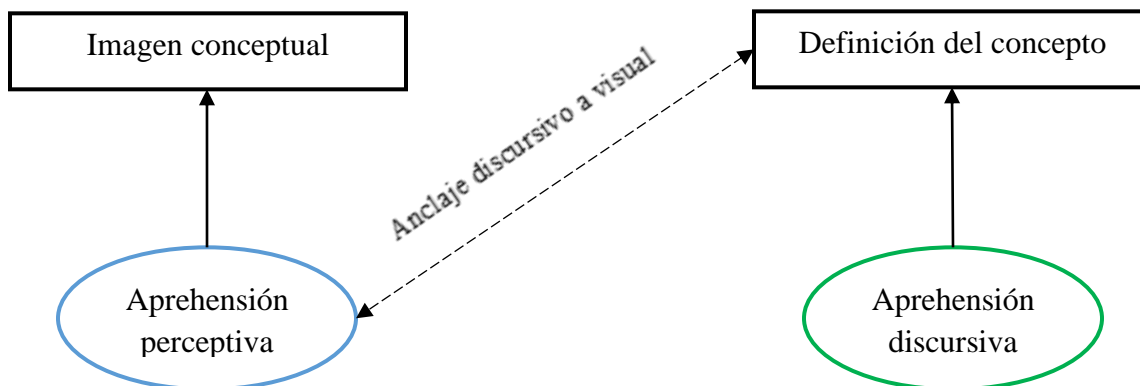
Segundo: Se activa la celda de imagen conceptual por una aprehensión perceptiva, pero el sujeto no puede realizar el cambio de anclaje, por lo que no existe conexión con la otra celda y por tanto no hay una definición del concepto que sea visible; esto se considera como una respuesta intuitiva.



Esquema 8. Respuesta intuitiva.

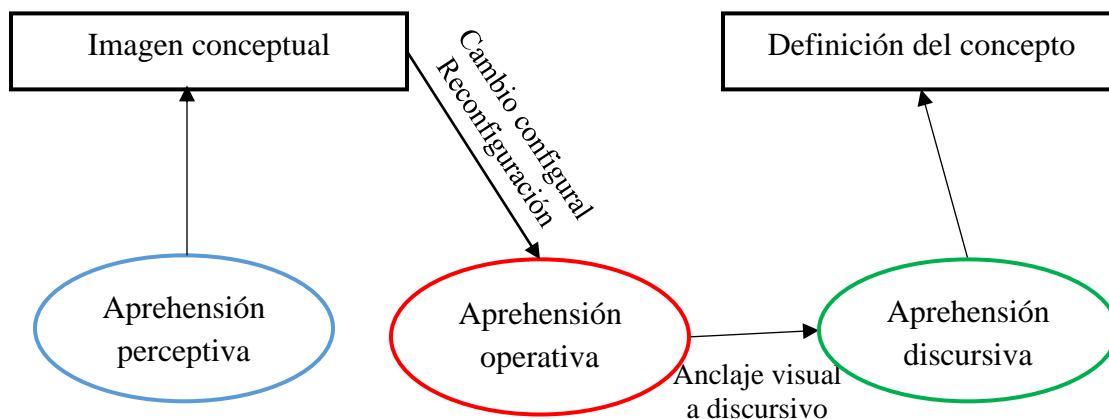
Tercero: Se activa la celda de definición del concepto y con eso el sujeto pretende usar una definición en la resolución de la tarea, en ese caso existe un cambio de anclaje desde lo discursivo hasta lo visual. Cuando sucede esto pueden ocurrir dos cosas: 1) El estudiante construye una representación del objeto que define como método de resolución para la tarea, permitiendo observar el cambio de anclaje. 2) El estudiante no construye una

representación del objeto; por ello, la forma de evidenciar el cambio de anclaje son las afirmaciones que proporciona al objeto geométrico.



Esquema 9. Construcción de una definición partiendo de lo discursivo.

Cuarto: En este último caso, la celda de imagen conceptual se activa primero por medio de la aprehensión perceptiva, para que posteriormente el sujeto realice una reconfiguración o un cambio figural. Esto con el propósito de encontrar propiedades del objeto geométrico que impulsen a activar la celda faltante con ayuda de la aprehensión discursiva; por lo tanto, siempre tiene que haber un cambio de anclaje desde lo visual a lo discursivo.



Esquema 10. Transformación de la configuración para construir una definición

Gracias a estos esquemas se espera que los estudiantes con síndrome de Down se comporten cognitivamente siguiendo el recorrido de los esquemas 7, 8 y 9 principalmente. Dado a que se tienen que presentar cambios de anclaje por el diseño de las tareas, puesto que estos permiten la movilización de una celda a otra. Así mismo, con ayuda del dinamismo que permiten los Sistemas de Geometría Dinámica y la recursividad del

material concreto, se espera migrar el comportamiento de los estudiantes hacia el esquema 10. Este es el más completo gracias a la aprehensión operativa, de la cual se presupone que genera en los estudiantes un cambio de anclaje más certero, dejando en evidencia la definición del objeto geométrico puesto en juego; que será utilizada en la solución de la tarea.

En conclusión, las aprehensiones son acciones que determinan la relación entre las celdas cognitivas para el uso de una definición matemática, en problemas que la requieren. Además, estas aprehensiones ayudan a determinar si las definiciones usadas cumplen con las características descritas en este mismo capítulo.

2.5. Marco Matemático

En este apartado se muestra la revisión bibliográfica acerca del objeto matemático de estudio en este proyecto investigativo, tomada de Moise (1986). Aquí se utiliza la **D** como abreviación de Definición para los diferentes objetos:

2.5.1. Cuadriláteros

D. Cuadrilátero. Sean A, B, C y D cuatro puntos coplanares. Si tres cualesquiera de ellos no están alineados, y los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y \overline{DA} se intersecan solamente en sus extremos, entonces la unión de los cuatro segmentos se llama cuadrilátero.

Los cuatro segmentos se llaman lados, y los puntos A, B, C y D se llaman vértices. Los ángulos $\angle DAB, \angle ABC, \angle BCD$ y $\angle CDA$ se llaman ángulos del cuadrilátero; estos pueden ser abreviados como $\angle A, \angle B, \angle C$ y $\angle D$. El cuadrilátero mismo se indica por $\square ABCD$.

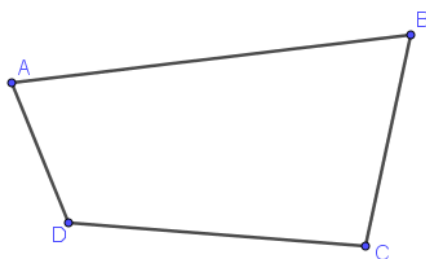


Imagen 15. Representación gráfica de un cuadrilátero.

D. Lados opuestos. Dos lados de un cuadrilátero son opuestos si no se intersecan.

D. Lados consecutivos. Dos lados son consecutivos si tienen un extremo común.

D. Ángulos opuestos. Dos ángulos son opuestos si no tienen en común un lado del cuadrilátero.

D. Ángulos consecutivos. Dos ángulos son consecutivos, si tienen en común un lado del cuadrilátero.

D. Diagonal. La diagonal de un cuadrilátero es un segmento determinado por dos vértices no consecutivos.

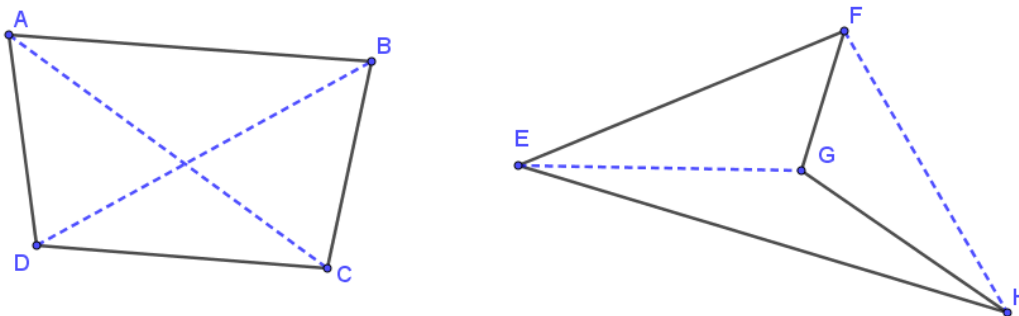


Imagen 16. Cuadriláteros con sus diagonales

Como se observa en la imagen 16, las diagonales se pueden intersectar o no, esto refiere a la convexidad.

D. Convexidad. Un cuadrilátero es convexo si dos cualesquiera de sus vértices no están en lados opuestos de una recta que contiene a un lado del cuadrilátero.

2.5.2. Tipos de Cuadriláteros

D. Trapecio. Un trapecio es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos.

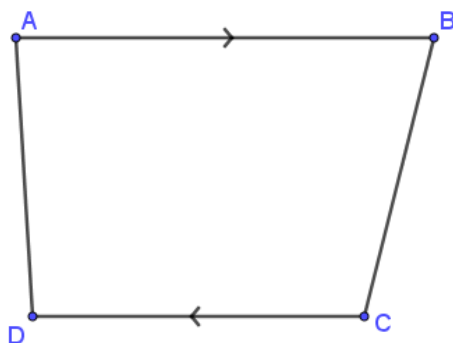


Imagen 17. Representación gráfica del rombo

D. Paralelogramo. Se considera a un paralelogramo como aquel cuadrilátero en donde los dos pares de lados opuestos son paralelos.

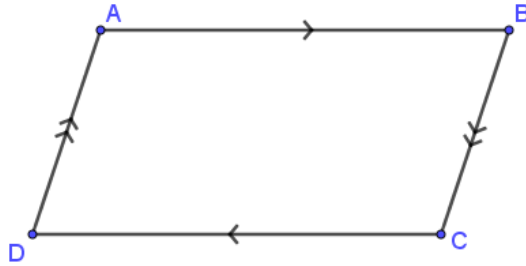


Imagen 18. Representación gráfica del paralelogramo.

D. Rombo. Un rombo es un paralelogramo cuyos lados son todos congruentes entre sí.

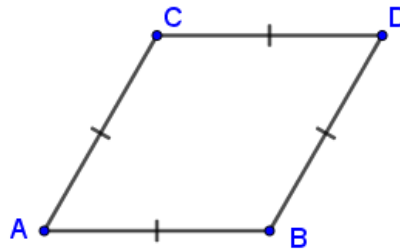


Imagen 19. Representación gráfica del rombo.

D. Rectángulo. Es un paralelogramo cuyos cuatro ángulos son rectos.

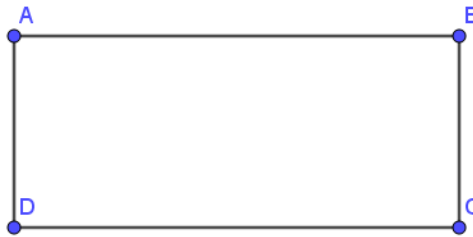


Imagen 20. Representación gráfica del rectángulo.

D. Cuadrado. Es un rectángulo cuyos lados son todos congruentes entre sí.

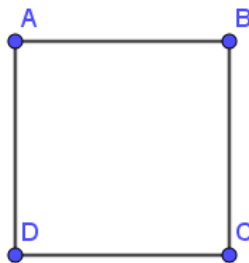


Imagen 21. Representación gráfica del cuadrado.

Propiedades

- En un paralelogramo, dos lados opuestos cualesquiera son congruentes.

Demostración: “Si dos rectas son paralelas, entonces todos los puntos de cada recta equidistan una de la otra en toda su extensión”

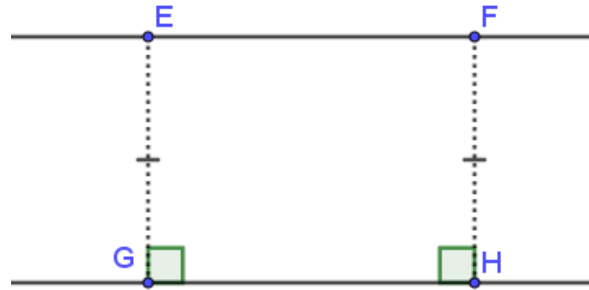


Imagen 22. Representación de la demostración de equidistancia entre paralelas.

- Cada diagonal descompone a un paralelogramo en dos triángulos congruentes.

Demostración: Al trazar la diagonal \overline{AC} del $\square ABCD$, se forman los $\angle ADC$ y $\angle CBA$. Sabiendo que el cuadrilátero tiene ambos pares de lados opuestos paralelos $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, además $\overline{AC} \cong \overline{AC}$; por lo tanto $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

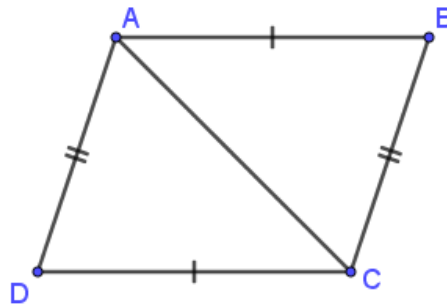


Imagen 23. Triángulos congruentes de un paralelogramo.

- En un paralelogramo dos ángulos opuestos cualesquiera son congruentes.

Demostración: Sabiendo que al trazar una diagonal de un paralelogramo se obtienen dos triángulos congruentes por el postulado de congruencia LLL; entonces, $\angle ADC \cong \angle CBA$ entonces $\angle ADC \cong \angle CBA$.

- Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, entonces sus demás ángulos también son rectos.
- En un rombo las diagonales son perpendiculares entre sí.
- Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan y son perpendiculares, entonces el cuadrilátero es un rombo.

3. Metodología

3.1. Descripción general

El presente capítulo tiene como objetivo describir la estrategia metodológica, el escenario, los participantes y los instrumentos para la recolección de datos. Todo lo anterior en pro de atender a la problemática evidenciada, la cual se sitúa en dos aspectos: el primero, que los estudiantes con NEE no usan la tecnología digital en la clase de geometría a diferencia de sus demás compañeros; y el segundo, la dificultad que ellos tienen para discriminar atributos relevantes de los objetos geométricos. Esto conllevó a plantearse el objetivo de analizar el funcionamiento de tareas mediadas con herramientas digitales que impulsen la conceptualización de estudiantes con síndrome de Down.

La presente investigación adopta un enfoque fenomenológico, el cual está centrado en la búsqueda de alternativas para analizar las situaciones problemáticas observadas. Este enfoque se caracteriza por describir y entender los fenómenos desde el punto de vista de cada participante, y desde una perspectiva construida colectivamente. En dicho enfoque se dirige el estudio hacia una aproximación interpretativa de las acciones y expresiones de los estudiantes, utilizadas para comunicar ideas que les permita construir significados sobre objetos geométricos.

3.2. Estrategia Investigativa

Debido a las características del enfoque adoptado, la estrategia investigativa escogida es la entrevista basada en tareas; ya que esta consiste en realizar una indagación exhaustiva sobre los sucesos, cuando un grupo pequeño de estudiantes resuelve una tarea Camargo (sf). Dicha estrategia resulta pertinente para la investigación, puesto que la descripción detallada de lo que ocurre en el desarrollo de una tarea, permite profundizar en los procesos de pensamiento de la actividad matemática de los participantes.

Como lo argumenta Goldin (2000), esta metodología se caracteriza por profundizar en lo que sucede cuando un estudiante resuelve una tarea, pasando por lo procedimental y lo observable. Por ello, obliga al investigador a sostener un diálogo con el participante, con el fin de persuadirlo a que verbalice lo que piensa y que reporte todo aquello que considera

necesario para resolver la tarea. Dado el interés investigativo, los reportes de este estudio serán exploratorios, ya que se desea analizar el funcionamiento de tareas que potencien la conceptualización de objetos geométricos con estudiantes que tienen síndrome de Down.

Siguiendo los planteamientos de Goldin (2000), dividimos la estrategia investigativa en tres fases organizadas de la siguiente manera: *Fase uno*. Esta comienza con la fundamentación conceptual de la tarea, que consiste en seleccionar el objeto matemático y crear relaciones con la definición y las aprehensiones cognitivas. A partir de esto, se diseña la tarea teniendo en cuenta los participantes, el tiempo que se tardarán en resolverla y los momentos en los que interviene el investigador. Luego de construida la tarea, se diseña el libreto de la entrevista y se implementa una prueba piloto con algunos estudiantes, así como la evaluación por parte de uno o varios expertos. *Fase dos*. En esta fase se corrige la tarea, dadas algunas situaciones no contempladas en el diseño original. Seguido a esto se aplican las entrevistas en los meses de marzo, abril y mayo del año 2019. *Fase tres*. Luego de la recolección de la información, esta se usa para la construcción de los datos y la consolidación final de las categorías de análisis, dado que algunas categorías fueron construidas de manera preliminar, basándose en el marco teórico. Estas categorías permiten analizar el proceso de resolución de la tarea.

3.3. Contexto Investigativo

La investigación se desarrolló en una institución educativa de carácter incluyente llamada Liceo VAL (Vida, Amor y Luz) la cual recibe población con discapacidades como, cognitivas, neurológicas, psicológicas, sensoriales o múltiples. La institución tiene un modelo pedagógico mixto rescatando la pedagogía activa, enseñanza precoz y aprendizaje autónomo. Estos tres modelos son adaptados a los intereses de la institución, los cuales se resumen en el desarrollo de estrategias cognitivas de exploración, descubrimiento, planeación y control de la actividad académica de cada estudiante. Basándose en lo anterior, el Liceo promueve el autoaprendizaje en donde los estudiantes controlan la planeación, ejecución y evaluación de su aprendizaje con la guía de un docente tutor. Cada estudiante de bachillerato estudia a su ritmo, cumpliendo unos mínimos por semana y por mes, utilizando textos autodidácticos elaborados por la institución o adquiridos a partir de editoriales específicas. Los salones de clase se convierten en un espacio de trabajo

individual para cada estudiante, coordinado por el tutor de curso, que a su vez recibe apoyo de docentes especialistas en matemáticas, física, química, inglés, biología, español y otros para seguir contribuyendo en el aprendizaje de cada estudiante que lo requiera. Esto permite que cada estudiante tenga un plan de trabajo personalizado según sus capacidades o necesidades, facilitando la inclusión educativa en el aula.

A su vez, existen clases tipo cátedra donde los estudiantes están en grupo para promover procesos y competencias y además porque no todo el aprendizaje se puede construir de manera individual. Estas cátedras se enfocan en distintas áreas como artes, lectura crítica, debate y argumentación, deportes y geometría. Cada una de estas cátedras cuenta con su plan de estudios acorde a los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias establecidos por el MEN.

3.4. Fases del estudio

En los siguientes párrafos se describen las fases utilizadas en la toma de información para esta investigación. Sabiendo que la estrategia escogida busca interpretar lo que sucede cuando pequeños grupos de personas resuelven una tarea, inicialmente se presenta la caracterización de los estudiantes, luego el diseño de las tareas, los recursos necesarios para recolectar la información, la construcción de los datos y de las categorías de análisis.

3.4.1. Fase 1. Selección de los participantes.

Este trabajo investigativo se centra en las evidencias encontradas en la cátedra de geometría impartida por el Liceo VAL, descritas en la [sección 1.2](#). En la primera fase de la investigación se escoge la población que participa en esta. Los participantes elegidos son estudiantes con síndrome de Down de dicha institución, puesto que son la población con NEE que más se observan en el Liceo. Dado lo anterior se establece el siguiente criterio de selección para los participantes:

- 1) Tener síndrome de Down, con un diagnóstico médico certificado.
- 2) Estar entre sexto y noveno grado, puesto que son los cursos donde se ve la cátedra de geometría.
- 3) Cursar el mismo grado para ver la funcionalidad de las tareas diseñadas.

Basándose en los anteriores criterios se eligen tres estudiantes de entre más de diez seleccionados. Dado que los estudiantes están en el mismo curso se presentan generalidades de los tres y luego unas cualidades y características particulares, que se describen a continuación:

- Generalidades: Los tres estudiantes escogidos para esta investigación han utilizado la regla y compás para la construcción de circunferencias, polígonos de hasta seis lados, segmentos y rectas. Su primer año aprendiendo geometría estuvo centrado en los triángulos. Aprendieron su definición tomada de un libro de texto, también aprendieron a clasificar los triángulos según sus lados y ángulos usando principalmente medidas dadas. En su segundo año en geometría aprendieron una definición de cuadrilátero dada por el docente, resumida así: “Un cuadrilátero es una figura compuesta por cuatro lados rectos compuesta de cuatro puntos llamados vértices”. Saben clasificar los cuadriláteros como cuadrado, rectángulo y trapecio utilizando las formas prototípicas de cada uno.
- Miguel: Es un estudiante con síndrome de Down de 16 años, no posee enfermedades derivadas de su síndrome. Es un estudiante muy activo y capaz de aprender tareas en las que dedique un tiempo de seis horas a la semana. Ha estado en el colegio desde preescolar y por eso se involucra muy bien con los adultos. Este estudiante pronuncia las palabras de forma pausada, pero escribe y lee con un ritmo mayor. Su desempeño en matemáticas ha sido acorde para sus capacidades, logra realizar operaciones aritméticas sencillas de los números enteros y fraccionarios sin calculadora, aunque se le dificultan las operaciones largas.
- Sarah: También es una estudiante Down de 16 años. Ella posee un defecto ocular lo que implica que use gafas permanentes, obligándola a acercarse demasiado a la superficie donde esté trabajando cuando la letra no es muy grande. Es una estudiante que se motiva con actividades diferentes como las corporales, o uso de herramientas digitales. Ha estado en el colegio desde grado primero. En el área de matemáticas trabaja con agrado y esmero; le gusta realizar el trabajo de forma continua y veloz. Realiza operaciones aritméticas con facilidad sin usar calculadora, aplica propiedades de estas, se comunica bastante mientras aprende; últimamente ha empezado a trabajar nociones del álgebra.

- Fernanda: Es una estudiante con síndrome de Down de 17 años. A diferencia de sus otros compañeros, su proceso de aprendizaje ha tomado más tiempo. Es una estudiante activa y ordenada. Se comunica preferiblemente escribiendo, cuando lo hace de manera verbal lo ejecuta pausadamente. Realiza las operaciones aritméticas con números enteros tomándose su tiempo. En este momento está aprendiendo a realizar las operaciones con fraccionarios.

3.4.2. Fase 2. Diseño de las tareas

Dado que para esta investigación el proceso de la actividad matemática que se quiere estudiar es definir, para el diseño de estas tareas se tiene en cuenta lo que menciona de Villiers (1998), en relación con este proceso ([ver apartado 2.2.](#)). También es de considerar todas las características físicas y cognitivas de las personas con síndrome de Down mencionadas por Troncoso y del Cerro (2009), en la [sección 2.1.](#) Por estos motivos se plantean preguntas sencillas y concisas en las tareas.

Las tareas diseñadas tienen como objeto matemático involucrado el cuadrilátero y sus diferentes tipos, dado que fue el tema visto en el año inmediatamente anterior como ya se comentó. En total, se diseñaron cuatro tareas, de las cuales dos requirieron tecnología digital para su solución y dos no. Esto se realiza de acuerdo los estudios realizados por Bower y Hayes (1994), Buckley (1985), Marcell y Weeks (1988), (citados en Noda y Bruno, 2010) los cuales manifiestan que estos estudiantes aprenden más fácilmente presentándoles la información de distintas formas, es decir, utilizando recursos visuales, auditivos y sensoriales.

El propósito de las tareas es utilizar definiciones de algunos objetos geométricos en la resolución de problemas, que involucran el uso de entornos de geometría dinámica, y material concreto. Se espera que dichos participantes puedan utilizar, y dejar en evidencia, su definición de cuadrilátero en la resolución de cada tarea. Utilizando el guion de entrevista se espera determinar qué tipo de relación entre sus celdas cognitivas se observa (Tall y Vinner, 1981); y cuales aprehensiones fueron utilizadas para llegar a dicha relación (Duval, 1995).

Las tareas que requieren tecnología digital para su solución se implementan primero y posteriormente las que requieren material concreto. Se realiza así ya que ellos no han

experimentado con recursos digitales en la clase de geometría, por ello es necesario enseñarles a manejar el programa GeoGebra antes de comenzar con la toma de datos. De no hacerse así, se tardaría más en recolectar la información y la confiabilidad de la estrategia metodológica se vería afectada; ya que enseñar a utilizar el programa en medio del registro de la información afecta negativamente los resultados que se puedan obtener. Por este motivo se diseñó una tarea preliminar con el fin de que los estudiantes pudieran reconocer el programa mencionado, para que se familiarizaran con el mismo, y que de esta manera se pudieran desarrollar las tareas posteriores.

Tarea Preliminar

Como se ha mencionado a lo largo del documento, los estudiantes han experimentado muy poco con la tecnología digital disponible en la institución. Por esta razón, se realiza una intervención preliminar, con el fin de que los estudiantes reconozcan las herramientas del programa GeoGebra. El desarrollo de esta tarea se divide en dos partes: la primera está centrada en reconocer visualmente, las herramientas principales de dicho programa (Tabla 1). La segunda busca que los estudiantes usen dichas herramientas en la construcción de algunas figuras geométricas. Por ejemplo, se les solicita construir triángulos usando únicamente segmentos, medir la distancia entre dos puntos, arrastrar puntos o segmentos previamente construidos, etc. Dado que esta tarea no tiene propósito de recolectar información para analizar más adelante, no se toman registros de esta. Únicamente se da una serie de instrucciones a cada participante para que reconozca dichas herramientas y las utilice posteriormente.


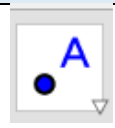
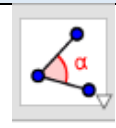




Herramientas de GeoGebra usadas en tarea preliminar						
						
Mover	Punto	Ángulo	Segmento	Distancia	Mover	Borrar

Tabla 1. Herramientas principales de GeoGebra utilizadas por los participantes.

Tarea 1: Reconociendo un cuadrilátero (Anexo 1)

Descripción: La tarea 1 consiste en utilizar un aplicativo diseñado en GeoGebra, en el cual, al oprimir un botón llamado “NUEVO”, la figura en pantalla cambia de forma (Imagen 24).

Las figuras formadas son cuadriláteros y no cuadriláteros obtenidos al azar pasando por segmentos curvos, intersección de los lados, circunferencias, entre otros.

El investigador selecciona tres figuras y se le solicita al estudiante que debe indicar si son cuadriláteros o no, explicando las razones de cada respuesta.

Objetivo de aprendizaje: Reconocer y comparar ejemplos y no-ejemplos de cuadriláteros partiendo de las representaciones mostradas.

Hipótesis de aprendizaje: Dado que los estudiantes deben indicar en cada figura escogida por el entrevistador si es cuadrilátero o no. Deben establecer relación entre la configuración escogida y los atributos que definen si la figura es un ejemplo o no de cuadrilátero. Por ello, deben especificar si los segmentos son rectos, si se intersecan únicamente en sus extremos, si tiene cuatro vértices.

Objetivo investigativo: Identificar si los estudiantes reconocen los atributos relevantes de un cuadrilátero.

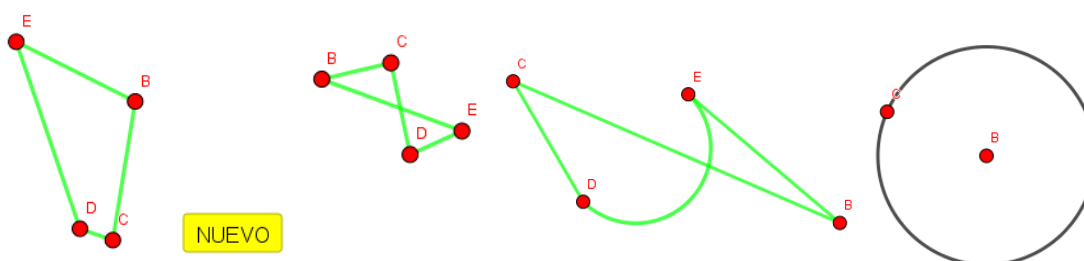


Imagen 24. Diferentes representaciones obtenidas por el aplicativo diseñado.

Preguntas durante la resolución de la tarea (Guion de entrevista)

Situación	Posibles cuestionamientos o acciones del orientador
Logra identificar que una figura es un cuadrilátero.	¿Qué considera para hacer esa afirmación? ¿Sería un tipo de cuadrilátero? ¿En qué momento dejaría de serlo? ¿Cómo saber si en realidad es un cuadrilátero?
No diferencia un cuadrilátero y un no cuadrilátero.	Orientar al estudiante a que establezca una diferencia entre cuadrilátero y no cuadrilátero. ¿Por qué consideras que la figura es un cuadrilátero? ¿Cómo poder diferenciar si es o no un cuadrilátero? ¿Siempre son cuadriláteros?
No puede replicar la figura formada por el programa en la hoja.	Preguntar por la similitud entre las figuras: ¿Son parecidas las dos figuras? ¿Qué le puede faltar al dibujo para que sea similar a la imagen?

Tabla 2. Guion de entrevista para la tarea 1.

Tarea 2: Las propiedades del Rombo (Anexo 2)

Descripción: La tarea 2 consiste en utilizar un aplicativo en GeoGebra el cual presenta una configuración inicial de un rombo ubicado a propósito como un cuadrado. Este rombo es una construcción robusta en la cual, al aumentar su tamaño, cambian también sus ángulos internos (Imagen 25). Esta tarea está dividida en dos partes, en la primera el entrevistador le solicita describir las características que pueda encontrar sobre el rombo utilizando las herramientas habilitadas del aplicativo. En la segunda parte se le solicita que construya una representación de la figura con las características encontradas. Cabe recordar que ellos no habían estudiado al rombo como cuadrilátero, solo al cuadrado, rectángulo y trapecio; por lo tanto, no conocen su definición ni habían construido uno antes.

Objetivo de aprendizaje: Reconocer y utilizar las propiedades encontradas del rombo para que elaboren una definición sin pedirla explícitamente. Construir un rombo que cumpla con las características del rombo.

Hipótesis de aprendizaje: Para esta tarea se espera que los estudiantes puedan reconocer los siguientes atributos de la definición de rombo: 1) Cuadrilátero y 2) Tiene todos sus lados congruentes. Esto con el fin de que puedan explorar, a partir del arrastre, nuevas formas de cuadriláteros y puedan mostrar que existen diferentes cuadriláteros. Se espera que al final reconozcan otro cuadrilátero desconocido para ellos.

Objetivo investigativo: Identificar y analizar como utilizan el aplicativo en la búsqueda de propiedades de un objeto geométrico. Caracterizar la forma en que los participantes utilizan la definición de rombo para solucionar la tarea.

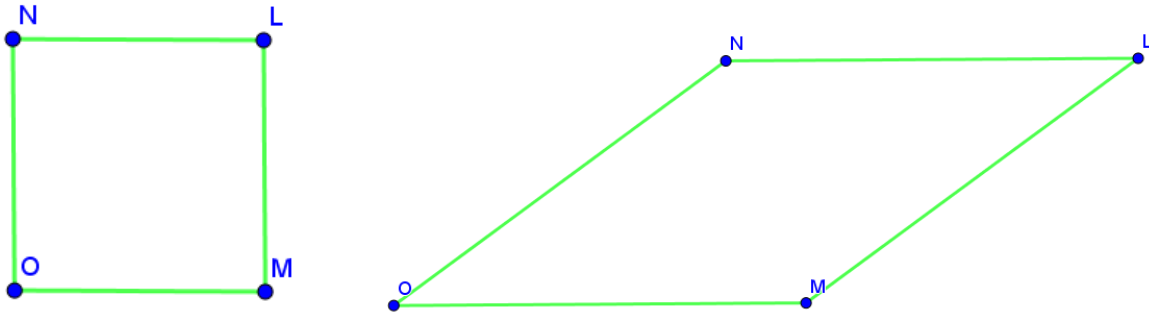


Imagen 25. Movimiento del rombo robusto en el segundo aplicativo.

Preguntas durante la resolución de la tarea (Guion de entrevista)

Situación	Posibles cuestionamientos o acciones del orientador
Primera Parte	
Descubre congruencia de lados de un rombo	¿Qué sucede con ese cuadrilátero? ¿Por qué tiene ese comportamiento? ¿Qué diferencia hay con los demás cuadriláteros que conoces? ¿Cómo explicas lo que sucede?
No logra descubrir la congruencia de los lados del rombo	¿Todos los cuadrados se comportan igual que este? ¿Este cuadrilátero se parece a un rectángulo? ¿Son el mismo cuadrilátero entonces? ¿Existe alguna condición que diferencie este cuadrilátero con los otros que conoces?
Segunda Parte	
Construye un rombo	¿Qué te hace decir que esa representación es un rombo? ¿Es posible que sea un rombo lo que construiste? ¿Qué características tiene esa figura? ¿Las características son iguales entre la que construiste y la configuración dada?
El estudiante construye un cuadrilátero cualquiera diferente a un rombo.	Exigirle que exprese verbalmente lo que piensa de los cuadriláteros: ¿Ese cuadrilátero que construiste que diferencias y semejanzas tiene con el cuadrilátero dado? ¿Un cuadrilátero siempre tiene esta misma forma? ¿El cuadrilátero que construyes comparte características con la configuración inicial?
El estudiante no construye un cuadrilátero en el aplicativo	Orientar al estudiante a que exprese porque considera la figura como cuadrilátero con ayuda de las siguientes preguntas: ¿Qué características tiene un cuadrilátero? ¿Esas características las comparte el cuadrilátero que acabas de hacer? ¿Hay posibilidad de formar otro “cuadrilátero” en el programa?

Tabla 3. Guion de entrevista para la tarea 2.

Tarea 3: Características de los cuadriláteros (Anexo 3)

Descripción: La tarea 3 consiste en construir cuadriláteros con material concreto diseñado previamente. Se diseñan unas piezas en madera, las cuales tienen en un extremo en punta y otro en hueco para que puedan encajar y así formar polígonos. Las piezas están pintadas con color rojo y azul que representan longitudes distintas (Imagen 26). A cada estudiante se le proporcionan las piezas en varias combinaciones (cuatro piezas rojas, cuatro azules, dos rojas y dos azules, tres azules y una roja); para luego solicitarle ensamblarlas hasta formar los cuadriláteros posibles y las características de cada cuadrilátero formado.

Objetivo de aprendizaje: Identificar atributos relevantes para diferenciar cuadriláteros.

Hipótesis de aprendizaje: Para esta tarea se espera que los estudiantes puedan identificar características propias de cada grupo de cuadriláteros que descubra. Dado que la formación de las figuras intencionalmente muestra un tipo de cuadrilátero específico, se espera que ellos puedan reconocer los atributos de cada cuadrilátero construido (cuadrado, rectángulo, rombo, cometa, rombiode). Además, se espera que reconozca al cuadrilátero como una figura plana cerrada, cuando une las piezas dadas.

Objetivo investigativo: Observar si los participantes identifican características particulares de algunos tipos de cuadriláteros.



Imagen 26. Material de la tarea 3

Preguntas durante la resolución de la tarea (Guion de entrevista)

Situación	Posibles cuestionamientos o acciones del orientador
Forma cuadriláteros usando el material	Preguntar al estudiante sobre la forma en que construyó el cuadrilátero: ¿Qué característica descubrió? ¿Sus lados miden lo mismo? ¿Son todas las figuras que se pueden formar con la combinación dada? ¿Si se cambia el orden de ensamblaje se obtiene un cuadrilátero diferente?
Forma figuras diferentes a los cuadriláteros.	Orientar al estudiante a que reconozca que su construcción no es un cuadrilátero: ¿Esa figura que construyes tiene las características de un cuadrilátero? ¿Es posible que un cuadrilátero tenga la forma que acabas de hacer? La forma como uniste las piezas ¿Es la única? ¿Existen otras formas de unir las regletas para formar el cuadrilátero?
No logra reconocer cuadriláteros formados.	¿Qué características te llevó a pensar en esta conformación? De los cuadriláteros que has estudiado ¿Esta configuración se parece a alguna que hallas visto o construido antes? ¿Cuáles cuadriláteros de los que conoces se parece al que acabas de hacer?
Reconoce cuadriláteros construidos.	¿Cuáles características encuentras en la configuración construida por ti? ¿Conoces algún nombre para ese cuadrilátero que conformas? ¿Qué diferencias encuentras en los cuadriláteros que conformaste anteriormente? ¿Existirá alguna característica compartida que no sea ser cuadrilátero entre las combinaciones que hiciste?

Tabla 4. Guion de entrevista para la tarea 3.

Tarea 4: Los diferentes cuadriláteros (Anexo 4)

Descripción: La tarea 4 no necesita en su solución el uso tecnología digital. En vez de ello se utilizan fichas (Imagen 27) con algunos tipos de cuadriláteros. Una vez repartido el material se le solicita al estudiante identificar los cuadriláteros que se vean similares y agruparlos. Luego, el estudiante debe nombrar cada grupo y explicar porque los agrupa de esa manera.

Objetivo de aprendizaje: Reconocer y clasificar los tipos de cuadriláteros.

Hipótesis de Aprendizaje: Teniendo en cuenta las diferencias de las características de los cuadriláteros en la tarea anterior, se pretende que los estudiantes puedan establecer agrupaciones de los cuadriláteros que compartan propiedades o características. Además, se espera que puedan reconocer cuadriláteros cuando están dibujados en formas no prototípicas.

Objetivo investigativo: Caracterizar los criterios usados por los participantes para identificar atributos discriminantes de los tipos de cuadriláteros.

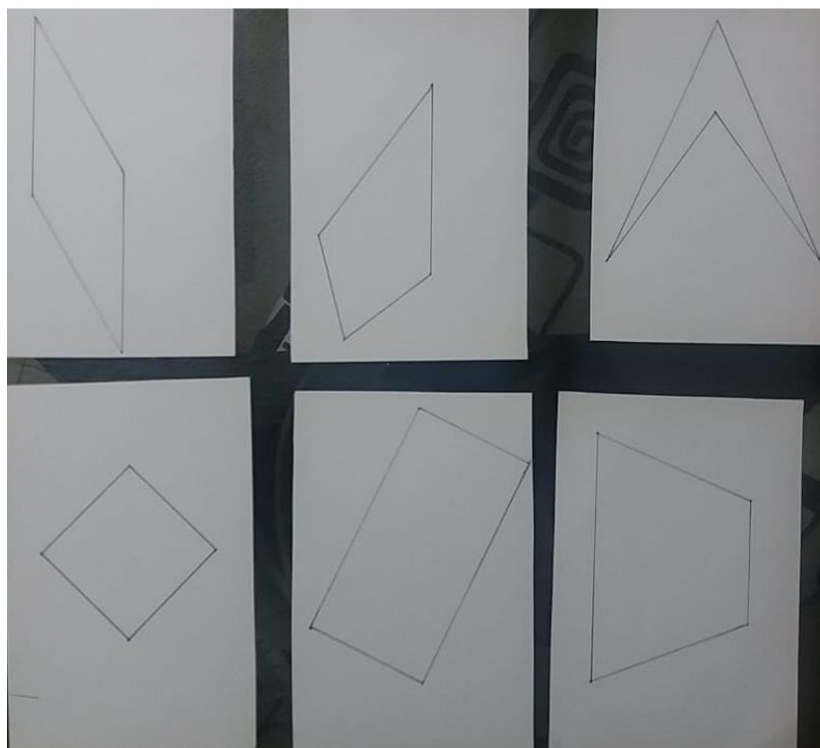


Imagen 27. Fichas utilizadas para la tarea 4.

Preguntas durante la resolución de la tarea (Guion de entrevista)

Situación	Posibles cuestionamientos o acciones del orientador
Agrupar cuadriláteros según igualdad medida de lados.	¿Qué característica descubrió? ¿Sus lados miden lo mismo? ¿Existirá otra ficha que pueda ser ubicada en esta agrupación?
No entiende la instrucción de agrupar.	¿Qué tienen de parecido estas figuras? ¿Existe otra manera de agrupar estos cuadriláteros? ¿Estos lados miden igual? ¿No existen características similares?
Agrupar cuadriláteros según formas prototípicas. Ej.	Preguntarle por el criterio de selección: ¿Qué características te llevó a pensar en esta agrupación?

Cuadrados, Rectángulos.	¿Por qué consideras que estos cuadriláteros se agrupan así? ¿Existirá otra forma de agruparlos? ¿Todos los cuadriláteros dados se pueden agrupar? Si no se puede agrupar alguno, ¿sigue siendo un cuadrilátero?
No reconoce ningún grupo de cuadriláteros que tenga características similares.	¿Por qué piensas que los cuadriláteros dados no se pueden agrupar? ¿Los cuadriláteros tienen alguna característica similar? ¿Todos los cuadriláteros son diferentes? ¿En qué se diferencian los cuadriláteros? ¿En que se parecen?

Tabla 5. Guion de entrevista para la tarea 4.

3.4.3. Fase 3. Implementación de las entrevistas y registro de información

Cada una de las tareas diseñadas se implementa con cada participante por separado. Al momento de realizar la primera toma de datos de la tarea 1, se realizan modificaciones a esta y la segunda tarea, puesto que las condiciones visuales de los participantes no son las mejores. Dado lo anterior, se agranda la letra de 12 puntos a 18 para que puedan reconocerlas de mejor manera. También se aumenta el tamaño de los objetos en pantalla para que su manipulación se realice de manera más eficiente; a su vez se cambian los colores entre puntos, rectas y curvas para que puedan referirse a cada uno de estos por sus colores y nombres.

Para el registro de la información, se usaron dos cámaras digitales de alta definición (FHD), ubicadas frente al entrevistado, y otra móvil alrededor de él o ella. La primera fuente de recolección fueron grabaciones del entrevistado y de la pantalla del computador, audio de las entrevistas y fotografías extraídas de los videos. También se usa material impreso donde estaba el guion de la entrevista que se realiza y las anotaciones del entrevistador. Se recolecta información a partir de las anotaciones realizadas por el entrevistador, las respuestas de los estudiantes y todo registro en físico que se considera relevante. La implementación de la tarea y la entrevista se desarrolla a lo largo de cuatro sesiones de 40 minutos cada una.

3.4.4. Fase 4. Construcción de datos investigativos

La información recolectada es organizada en una base de datos que permitiera una posterior depuración. Para tal organización se emplea un criterio donde se establece fecha, instrumento, participante, asunto y video; esto se consigna en la Tabla 6. Los asuntos considerados fueron acciones relacionadas con aprehensiones operativa, discursiva y

perceptiva (nombrar, verificar, construir, etc); así como también acciones donde dejaron en evidencia su definición sobre el objeto (afirmar, clasificar, relacionar, etc).

Luego, se realiza la transcripción completa de cada uno de los videos. Posteriormente, se editan archivos audiovisuales y físicos para extraer información pertinente que permita construir o complementar los datos investigativos. Al realizar las transcripciones se obtiene un archivo por cada video registrado que puede ser encontrado en los anexos del 5 al 9. Finalmente, se extraen varios fragmentos de las transcripciones, los cuales son considerados como los datos investigativos de este trabajo. Para esto, se depura la información centrándose en los asuntos consignados en la tabla 6; por lo tanto, se eliminan comentarios que no estén ubicados en dicho criterio, hasta encontrar un fragmento con suficientes intervenciones para entender lo que se estaba explorando en esa tarea. Estos datos investigativos son analizados posteriormente.

Fecha	Instrumento	Participante	Asunto	Video
6/marzo/2019	Tarea 1	Juan Miguel	Identificación de atributos relevantes en un cuadrilátero.	T1/Miguel/21:45
20/abril/2019	Tarea 2	Sarah	Reconocimiento congruencia de los lados de un rombo.	T2/Sarah/24:11
...

Tabla 6. Muestra de la clasificación de la información recolectada, a partir de asuntos relevantes vistos en cada video.

3.5. Categorías de análisis

Las categorías de análisis se construyen a partir de las aprehensiones propuestas por Duval (1995), las cuales son encontradas en las acciones realizadas por los participantes, mientras resuelven cada una de las tareas. Posteriormente, se relacionan dichas acciones con el modelo de la relación entre celdas cognitivas propuestas por Vinner (1991). Esta actividad permite encontrar algunas acciones como, por ejemplo, **“Representar”**. Esta categoría surge porque cuando el participante representa una configuración en la solución de una tarea, pone en juego su definición del objeto en cuestión (relación entre celdas cognitivas), necesitando para ello un cambio de anclaje desde lo discursivo a lo visual (aprehensiones discursiva y visual); además, esta acción es plenamente operativa (aprehensión operativa).

Sin embargo, la generalidad que puede abarcar una acción como “representar” es muy amplia, por ende, en la búsqueda de ser más específico en la construcción de las categorías,

se realiza una mirada analítica preliminar de los fragmentos de entrevista extraídos. Esto con el fin de identificar claramente dichas acciones que ejecutan los estudiantes al resolver cada tarea propuesta.

Además de lo anterior, algunas de las categorías fueron añadidas a partir de las posturas teóricas abarcadas en el [2. Marco](#) Teórico, eso implica que la herramienta analítica final es híbrida; ya que incluye aspectos predefinidos y emergentes. Partiendo de lo anterior se decide construir dos tablas de categorías de análisis, una que relacione las acciones que describen cada una de las aprehensiones cognitivas ([Tabla 7](#)); y otra que describa la relación de las celdas cognitivas al momento de definir ([Tabla 8](#)). Las categorías que fueron obtenidas a partir de los datos se identifican con el color verde, y las categorías predefinidas de color azul.

Tipo Aprehensión	Acciones	Niveles de Acción		
Aprehensión Discursiva	Identificar propiedades o atributos de la configuración inicial (PC)	Lista los atributos constitutivos o no constitutivos de la configuración (PC-1)		
		Menciona propiedades de la configuración usando lenguaje natural (PC-2)		
		Menciona propiedades de la configuración usando lenguaje matemático (PC-3)		
	Construir una definición a partir de la configuración (CD)	A priori (CD-A)	Tiene los atributos necesarios (1)	
		A posteriori (CD-P)	No tiene los atributos necesarios (2)	
	Utilizar la definición o partes de esta para explicar una respuesta (UD)			
Aprehensión Perceptiva	Verificar el cumplimiento o no de los atributos y propiedades de la definición en la configuración. (CA)			
	Verifica propiedades que no hacen parte de la definición usando la configuración. (VC)			
	Relacionar la configuración con objetos no geométricos (NG)			
	Relacionar configuración con un objeto geométrico (OG)	No asigna nombre específico (OG-1)		
		Asigna nombre específico (OG-2)		

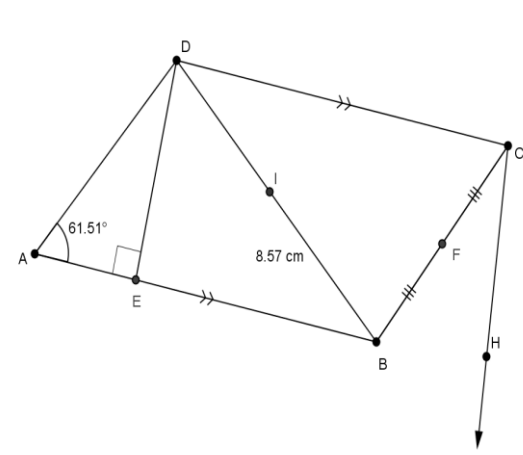
Aprehensión Operativa	Usar artefactos (regla, compás, transportador, papel mantequilla) o herramientas de los SGD en la búsqueda de propiedades de una configuración (UH)
	Sugerir modificaciones a configuraciones para acercarlas a la definición (SM)
	Realizar una representación auxiliar a la configuración inicial (RA)
	Construir configuraciones de ejemplos o no ejemplos de una definición (CE)

Tabla 7. Categorías de análisis según las apreheñsiones identificadas.

A continuación, se ejemplifica cada una de las acciones para entender cómo se determina la categoría:

Aprehensión Discursiva

- **Identificar propiedades o atributos de la configuración (PC):** De la configuración a continuación (Imagen 28) se puede decir que:

	<ul style="list-style-type: none"> a) Hay dos cuadriláteros y cuatro triángulos b) Hay un par de segmentos paralelos c) $\angle AED$ recto d) $\overline{BF} \cong \overline{FC}$ e) F es punto medio del segmento BC
<p>Imagen 28. Figura geométrica utilizada para identificar atributos y propiedades</p>	

Esta acción se presenta en tres niveles. Como se puede observar en **a** y **b** que se están mencionando atributos de la configuración (**PC-1**); en **c** y **d** se mencionan propiedades usando lenguaje matemático (**PC-3**) y en **e** las propiedades se mencionan usando lenguaje natural.

- **Construir una definición a partir de la configuración (CD):** El sujeto utiliza una configuración para construir la definición de ese objeto. Por ejemplo, la figura a continuación (Imagen 29) es un polígono irregular de seis lados.

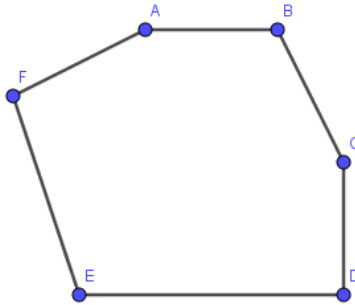


Imagen 29. Hexágono irregular.

Esta definición puede darse a priori **CD-A**, cuando un sujeto da una definición de un objeto sin hacer una exploración de su configuración.

También se puede dar a posteriori **CD-P**, cuando el participante ha conocido o explorado propiedades del objeto para deducir las características mínimas que debe tener éste.

Independientemente de que la definición sea a priori o a posteriori, la definición puede tener los atributos necesarios **CD-A/P1** por ejemplo, un paralelogramo es un cuadrilátero donde todos sus lados opuestos son paralelos entre sí. También puede no tener dichos atributos mínimos **CD-A/P2**, por ejemplo, un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene lados paralelos.

- **Utilizar la definición o partes de esta para explicar una respuesta (UD):** Esta categoría se caracteriza porque aparece únicamente cuando se quiere dar respuesta a una pregunta del entrevistador. Por ejemplo,
A: ¿Por qué existen dos ángulos de un triángulo isósceles que son congruentes?
B: Porque como tiene dos lados de igual medida el tercer lado se tiene que acomodar formando dos ángulos congruentes entre este lado y los de igual medida.
- **Verificar el cumplimiento o no de los atributos y propiedades de la definición en la configuración (CA):** La figura no es un cuadrilátero porque los segmentos se intersecan en un punto diferente a los extremos.

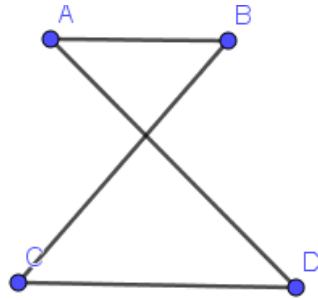


Imagen 30. No ejemplo de cuadrilátero.

- **Verifica propiedades que no hacen parte de la definición usando la configuración (VC):** A partir de una configuración como se muestra en la Imagen 31, se puede determinar que la intersección de las diagonales forma un ángulo recto. Sin embargo, esta propiedad no define un rombo, dado que también es una propiedad del cuadrado y del rectángulo.

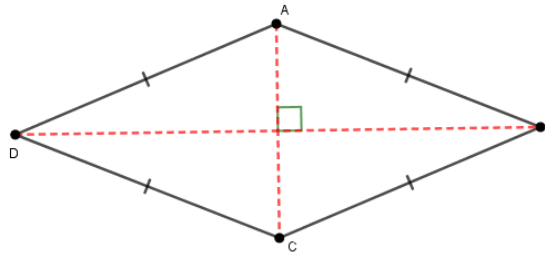


Imagen 31. Rombo con sus diagonales trazadas

Aprehensión Perceptiva

- **Relacionar la configuración con objetos no geométricos (NG):** Esa figura es un dorito.

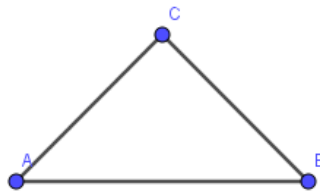


Imagen 32. Triángulo utilizado para ejemplificar categoría.

- **Relacionar configuración con un objeto geométrico (OG):** El sujeto reconoce una configuración asignándole el nombre del objeto, y especificando o no de qué tipo es. Por ejemplo,
La imagen 32 es un triángulo --- corresponde a (OG-1)
La imagen 33 es un triángulo acutángulo --- corresponde a (OG-2)

Aprehensión Operativa

- **Sugerir modificaciones a configuraciones para acercarlos a la definición (SM):** Si el punto C es arrastrado para que no sea colineal con B y E se formará un polígono con un mayor número de lados.

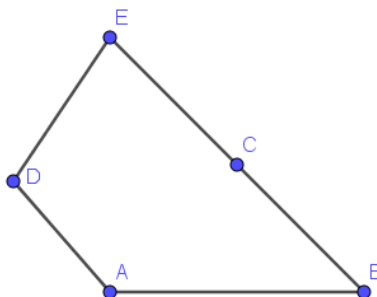


Imagen 33. Polígono utilizado como ejemplo para categoría.

- **Realizar una representación auxiliar a la configuración inicial (RA):** Construir la $\odot_{B,BC}$ para comprobar que $\overline{BC} \cong \overline{AB}$.

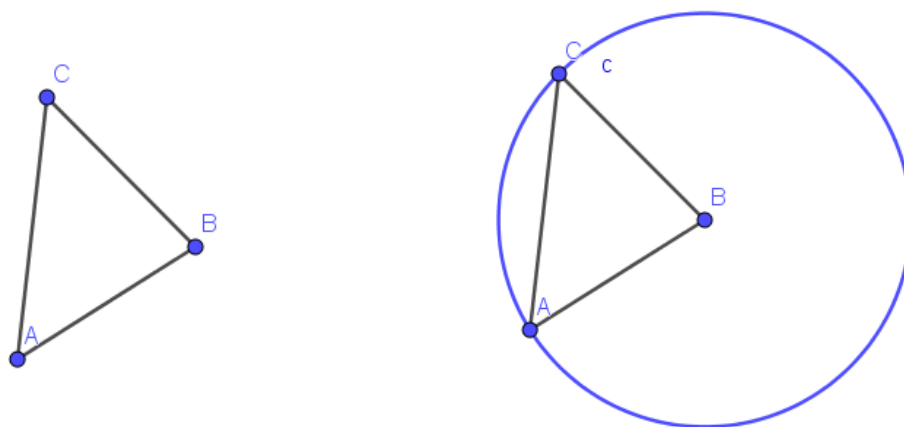


Imagen 34. Construcción de representación auxiliar a una configuración dada.

- **Representar configuraciones de ejemplos y no ejemplos de una definición (CE):** La siguiente configuración es un rombo, porque es un cuadrilátero cuyos lados tienen la misma medida.

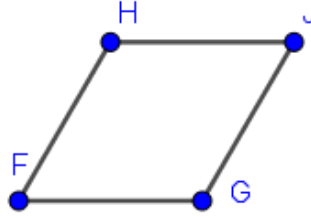


Imagen 35. Ejemplo de representación realizada por un participante.

- Usar artefactos o herramientas de los SGD para encontrar propiedades de una configuración (UH): Utilizar la herramienta **ángulo** de GeoGebra para medir un ángulo específico, en este caso $\sphericalangle FGH$.

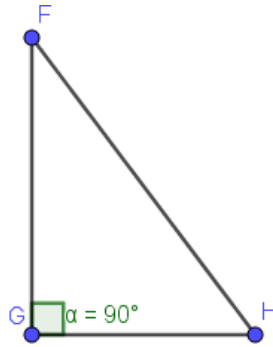


Imagen 36. Visualización del uso de herramientas de un SGD.

Las otras categorías de análisis corresponden a la forma en que los estudiantes realizan una definición matemática. Para ello se toman las relaciones de las celdas cognitivas descritas en el [apartado 2.2](#). Cada una de estas relaciones tiene uno o varios descriptores que la determinan, para entender las características de la definición en cada uno de los tipos; esto dio como resultado la siguiente tabla:

Definición según interacción de celdas cognitivas	Acción
Respuesta Intuitiva	Interpreta la configuración con un significado no geométrico. (ISG)
	Describe la forma de la figura observada. (DFO)
Deducción siguiendo el pensamiento intuitivo	Relaciona atributos y propiedades de los objetos geométricos con la definición del concepto. (RAD)
	Clasifica figuras geométricas a partir de su imagen conceptual. (CIC)
Deducción formal	Clasifica figuras geométricas a partir de su definición del concepto. (CDC)
	Identifica los atributos de una definición del concepto sin recurrir a la imagen conceptual. (ISI)

Realiza afirmaciones sobre los objetos geométricos evitando contradicciones lógicas. (ASC)

Tabla 8. Categorías de análisis según el tipo de definición a partir de la relación de celdas cognitivas.

A continuación, se ejemplifica cada uno de los descriptores:

Respuesta Intuitiva

- **Interpreta la configuración con un significado no geométrico (ISG):** La configuración es un rectángulo porque los lados son de color azul y es grande.



Imagen 37. Representación de Rectángulo.

- **Describe las características de la figura observada (DCO):** El cuadrilátero (Imagen 37) tiene lados rectos, puntos y ya.

Deducción siguiendo el pensamiento intuitivo

- **Relaciona atributos y propiedades de los objetos geométricos con la definición del concepto (RAD):** La imagen 38 tiene todos sus lados iguales; por lo tanto, es un cuadrado.

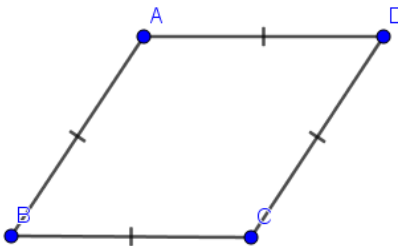


Imagen 38. Rombo

- **Clasifica figuras geométricas a partir de su imagen conceptual (CIC):** Partiendo de las representaciones de triángulos, se clasifica la imagen (39a) como triángulo rectángulo según su forma. Y la figura (39b) como un triángulo obtusángulo porque está abierto.

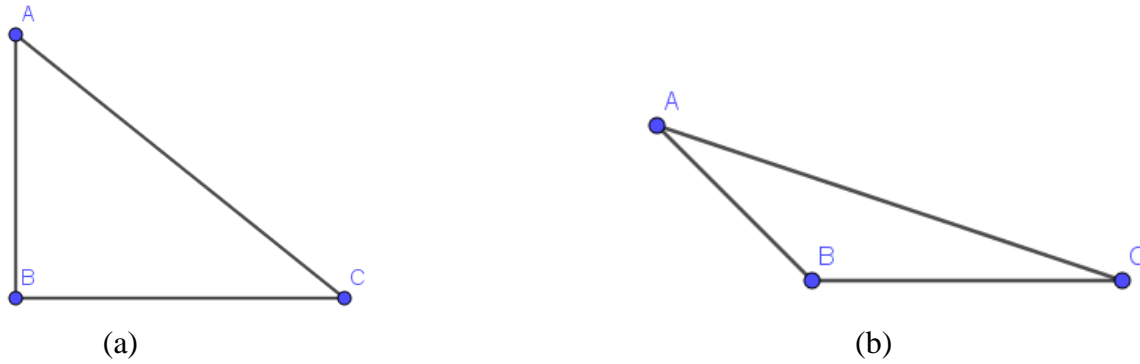


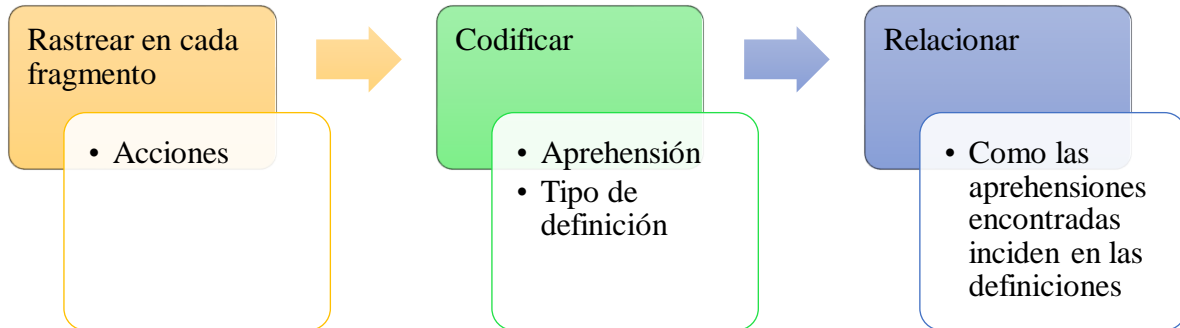
Imagen 39. Representaciones de triángulos.

Deducción Formal

- **Clasifica figuras geométricas a partir de su definición del concepto (CDC):** Sabiendo que un triángulo obtusángulo es aquel triángulo que cuenta con al menos un ángulo obtuso, la imagen (39b) es un triángulo obtusángulo.
- **Identifica los atributos de una definición del concepto sin recurrir a la imagen conceptual (ISI):** El sujeto hace una caracterización de un objeto diciendo lo siguiente “Un cuadrilátero cuyos lados son congruentes y tiene al menos un ángulo de 90° ”. Si los lados son congruentes y tiene un ángulo de 90° estos atributos corresponden a un cuadrado.
- **Realiza afirmaciones sobre los objetos geométricos evitando contradicciones lógicas (ASC):** Un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos. Si un paralelogramo tiene todos sus ángulos congruentes entonces es un rectángulo, y si a su vez sus lados son congruentes es un cuadrado. Por lo tanto, un cuadrado es un paralelogramo y también un rectángulo.

4. Análisis

Los análisis de esta investigación se realizan en tres momentos. Primero se describe cada uno de los fragmentos extraídos de la información recolectada para entender el contexto de cada uno. En el segundo momento se identifica cada aprehensión y relación entre celdas cognitivas, a partir de las categorías establecidas. Finalmente se establece una relación entre las dos categorías anteriormente mencionadas



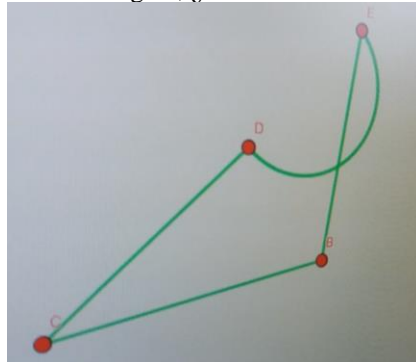
Esquema 11. Pasos utilizados en el análisis investigativo.

Fragmento 1: Tarea 1. Los cuadriláteros no tienen curvas

Este fragmento de entrevista corresponde a la primera tarea con tecnología digital la cual fue caracterizada en el [apartado 3.4.2](#). En el desarrollo de la tarea, Miguel se dedica a manipular el programa para observar las múltiples figuras formadas en el aplicativo de GeoGebra. En un instante determinado, el entrevistador decide que Miguel debe detenerse para contestar las preguntas que se han diseñado. Cuando él está contestando las preguntas acerca de la figura en pantalla se encuentra lo siguiente

Fragmento 2. Entrevista de Miguel durante la tarea 1.

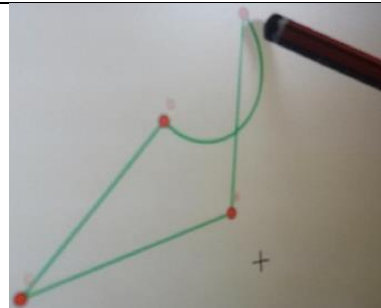
53. Entrevistador: Mira esta figura, ¿es cuadrilátero?



54. Miguel: No, no es.

55. Entrevistador: Dime, ¿Por qué lo dices?

56.	Miguel:	(Señala la pantalla) Ese es un círculo.
57.	Entrevistador:	¿Qué es lo que quieres decir con eso?
58.	Miguel:	Tiene una parte de círculo.
59.	Entrevistador:	Muéstrame.
60.	Miguel:	Ese. (Señala la curva).
61.	Entrevistador:	¿Qué forma tiene “ese”?
62.	Miguel:	Círculo.
63.	Entrevistador:	¿Por qué piensas que es un círculo?
64.	Miguel:	(...) Aquí. (Recorre su dedo sobre la curva)



Se interpreta que Miguel presenta una aprehensión perceptiva al *relacionar la configuración con un objeto geométrico* puesto que reconoce que la representación en pantalla [53] no es un cuadrilátero [54]. Lo anterior contribuye a la formulación de una nueva categoría de análisis que no se pensó en la primera mirada analítica, esta nueva categoría estará ubicada en la Aprehensión Perceptiva, y será llamada **“Reconocer la configuración como un no-ejemplo del concepto a tratar (RN)”**.

Seguido a esto, interpretamos el uso de la aprehensión discursiva ya que en las intervenciones de [56 -64], Miguel *identifica atributos no constitutivos de la configuración (PC-1)*; señalando en varias intervenciones que la curva presente no hace parte de lo que él entiende por cuadrilátero. Al intentar indagar más en este aspecto no se logró encontrar más información al respecto. Dado lo anterior, se infiere que Miguel se limita únicamente a *describir la forma de la configuración en pantalla (DFO)* sin dejar en evidencia que acuda a la celda de definición del concepto para la resolución de la tarea; por lo tanto, la relación entre sus celdas es una Respuesta Intuitiva.

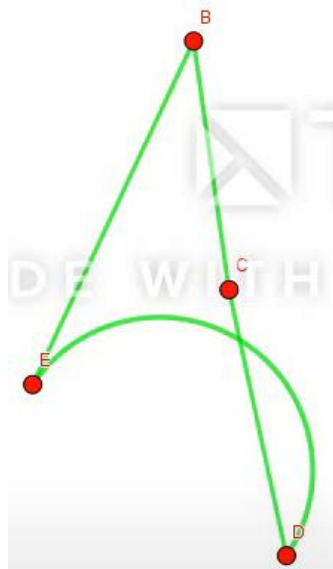
Fragmento 2: Tarea 1. No es cuadrilátero, pero sí es a la vez.

Al igual que el fragmento anterior, este corresponde a la Tarea 1, pero en este caso la participante es Fernanda. Ella después de interactuar varios minutos con el aplicativo, se

topa con un no-ejemplo de cuadrilátero. Se le realizan diferentes preguntas hasta obtener el siguiente fragmento:

Fragmento 3. Entrevista de Fernanda durante la tarea 1.

99. Entrevistador: De lo que has estudiado hasta el momento [sobre cuadrilátero en el curso anterior], ¿qué reconoces en esta figura?



100. Fernanda: Aquí hay un triángulo (recorre su dedo desde E hasta C, pasando por B); y acá como que forma un círculo (recorre su dedo sobre la semicircunferencia)

Entre las intervenciones 101 y 120 se discute acerca de lo que es un triángulo

121. Entrevistador: Listo. ¿Cómo haces tú un triángulo?

122. Fernanda: Así (dibuja un triángulo cualquiera en una hoja)

125. Entrevistador: ¿Por qué no le hiciste lados curvos?

126. Fernanda: Porque un triángulo no es así.

133. Entrevistador: Ok, ¿entonces podríamos decir que la figura es un cuadrilátero con ese lado curvo?

134. Fernanda: No y sí.

135. Entrevistador: ¿Por qué?

136. Fernanda: Sí, porque, digamos, para mí, digamos este punto [E] estuviera más abajo y este más a la derecha [C] y si la línea estuviera más recta formaría un cuadrilátero.

137. Entrevistador: Ahh, ok. Pero entonces, lo que tu tratas de decirme es que esa figura se puede convertir en un cuadrilátero, pero que no lo es.

140. Fernanda: Si señor.

143. Entrevistador: Dime por favor entonces las condiciones para un cuadrilátero.

150. Fernanda: Debe tener cuatro puntos. Uno aquí, otro acá y los otros dos abajo (señala lugares donde deben estar los puntos para un cuadrilátero como si fuera un rectángulo) cuatro rayas que siempre sean rectas.

Se puede interpretar que Fernanda realiza una aprehensión perceptiva al *relacionar la configuración con un objeto geométrico, asignando un nombre específico (OG-2)*. Aunque estos nombres específicos, corresponden a sub-configuraciones nombrados en [100], ya que ella relaciona con figuras conocidas como el triángulo y el círculo. Además de esto, *reconoce la configuración como un no-ejemplo del cuadrilátero (RN)* que se hace visible en [134], indicando que la configuración [99] no corresponde a un cuadrilátero.

Se infiere que en las intervenciones [136-140], Fernanda presenta una aprehensión operativa dado que imagina realizar modificaciones a la configuración inicial. El diseño de la tarea 1 no se enfoca en esta aprehensión, sin embargo; se relaciona este comportamiento con la acción de *sugerir modificaciones a una configuración para acercarla a la definición (SM)*. También se interpreta una aprehensión discursiva en las intervenciones [136 y 150], por la acción de *identificar atributos y propiedades de la configuración, haciendo una lista de estos (PC-1)*. Fernanda menciona que un cuadrilátero debe tener cuatro puntos y cuatro segmentos rectos. Además, también se hace visible cuando *menciona propiedades de la configuración usando lenguaje natural (PC-2)*. Dado que en [136], menciona la necesidad de querer mover los puntos E y C para que dejen de ser colineales con B. En la misma intervención [150] se observa que el discurso utilizado por Fernanda deja en evidencia la *construcción de una definición a posteriori, que no tiene los atributos necesarios (CD-P2)*. Se aprecia cómo describe que un cuadrilátero que se compone de cuatro segmentos que solo se intersecan entre sí en sus extremos, pero no señala más atributos o propiedades, como la no colinealidad de cada tres puntos cualesquiera del cuadrilátero. Con su gesto se interpreta que ella se refiere a la propiedad que escogidos tres puntos no deben ser colineales; sin embargo, mantiene los mínimos para considerarlo una definición.

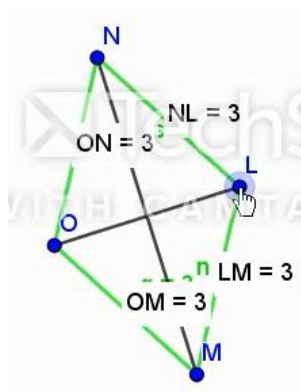
Todas estas acciones permiten evidenciar dos acciones más, en relación con la interacción entre celdas cognitivas. Se observa que Fernanda *describe la forma de la figura observada (DFO)* y que además logra *relacionar los atributos y propiedades encontrados del objeto con su definición (RAD)*. Por lo tanto, se infiere que la relación entre sus celdas cognitivas en la resolución de la tarea corresponde a una Deducción siguiendo el pensamiento intuitivo.

Fragmento 3: Tarea 2. El cuadrilátero especial

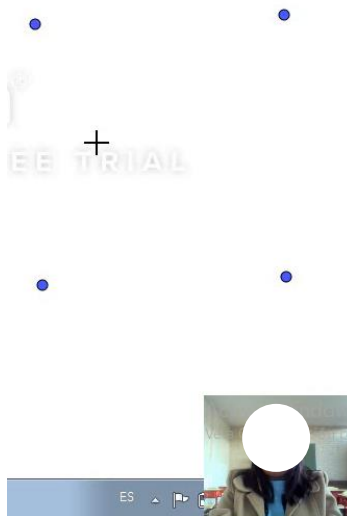
Este fragmento corresponde a la segunda tarea diseñada con tecnología digital la cual fue caracterizada en el [apartado 3.4.2](#). En el desarrollo de la tarea Sarah ha manipulado el programa trazando las diagonales del cuadrilátero en pantalla, midió los lados de este usando la herramienta correspondiente, y por medio del arrastre descubrió que la configuración mantiene la congruencia de sus lados sin importar por donde se mueva. En ese momento se le hicieron varias preguntas para que verbalizara lo que estaba realizando.

Fragmento 4. Primera parte de entrevista de Sarah durante la tarea 2.

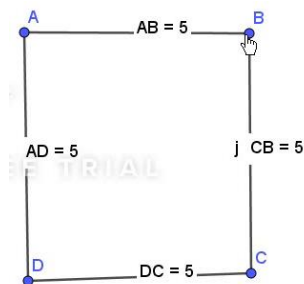
143. Entrevistador: Ese cuadrilátero que está en pantalla ¿qué características tiene?



144.	Sarah:	Todos miden lo mismo.
145.	Entrevistador:	¿“Todos” qué?
146.	Sarah:	O sea, todos las, todos los segmentos miden lo mismo.
147.	Entrevistador:	Eso (...) que tu mencionas, ¿sucede solo cuando está pequeño [el cuadrilátero] o ¿también cuando está grande?
148.	Sarah:	También cuando está grande (arrastra el punto L).
149.	Entrevistador:	¿Qué quiere decir eso?
150.	Sarah:	Que es un cuadrilátero.
168.	Entrevistador:	Bueno, tú ya encontraste esa característica [congruencia de lados]. Ahora quiero que me cuentes ¿cómo podrías construir un cuadrilátero con esas mismas características sí? ¿Qué harías? Quiero que me digas un paso a paso.
169.	Sarah:	Primero ubicaría los cuatro puntos para que pueda formar un cuadrilátero (ubica los cuatro puntos del cuadrilátero de forma tal, que cada tres puntos no sean colineales)



-
170. Entrevistador: ¿Segundo que haces?
-
171. Sarah: Formar los segmentos (hace los segmentos correspondientes y los mide)
-
172. Entrevistador: ¿Qué otra cosa fue la que mencionaste?
-
173. Sarah: La medida de los segmentos (...) Si, tienen igual medida. (Arrastra los puntos hasta encontrar la congruencia)



Se interpreta que Sarah ejecuta una *aprehensión perceptiva*, puesto que *relaciona la configuración de forma geométrica, asignando un nombre no específico a la configuración (OG-1)*, en la intervención [150], al mencionar que dicha configuración [143] es un cuadrilátero.

Además, se puede inferir que la representación [143] ha tenido un cambio configural. Esto pertenece a una aprehensión operativa por parte de Sarah, dividida en dos acciones que hacen referencia a la misma categoría. La primera *usa las herramientas del programa para encontrar propiedades de la configuración (UH)*, y con estas descubre que las medidas de los lados del rombo son iguales. La segunda es el uso de dichas herramientas para trazar las diagonales a dicha configuración. A parte de lo anterior, se aprecia como Sarah *construye una configuración de rombo (CE)*. En este caso, Sarah desea garantizar la congruencia de sus lados, y lo realiza a partir de la medida de la distancia entre dos puntos. Esto generó un nuevo nivel de acción en la categoría de análisis de la acción (CE), la cuales se nombra así: **“Acudiendo a mediciones y referencias similares (CE-1)”**.

Por otro lado, se interpreta que en las intervenciones [144 y 146] hay un cambio de anclaje; en este caso de lo visual a lo discursivo, es decir hay una aprehensión discursiva. Partiendo de lo anterior, esta aprehensión se presenta cuando Sarah identifica propiedades y atributos de la configuración, *listando los atributos constitutivos de la configuración (PC-1)* en [144, 146 y 173]. Segundo, ella *utiliza partes de la definición (UD) para explicar con más claridad la acción (CE)*. En las intervenciones [169, 171 y 173] Sarah comunica un atributo del rombo, como lo es la congruencia de los lados, el cual es parte de la definición de dicho objeto. Se infiere entonces que Sarah está en la capacidad de ejecutar la acción **CD** con sus respectivos subniveles, cuando se le solicite una definición de un objeto.

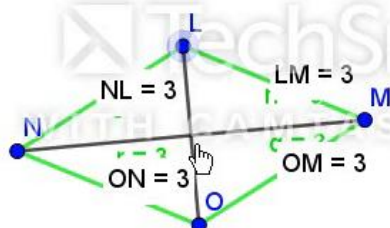
La presencia de una aprehensión discursiva permite inferir la interacción entre las celdas cognitivas de imagen conceptual y definición del concepto. Dado que puede *relacionar atributos y propiedades de la configuración con su definición de rombo (RAD)*, y además dicha figura la logra *clasificar a partir de su imagen conceptual (CIC)*. La interacción de sus celdas cognitivas da como resultado una Deducción siguiendo el pensamiento intuitivo.

Fragmento 4: Tarea 2. Ángulos diferentes, pero a la vez iguales

Dentro de la misma solución de la tarea 2, Sarah asigna la palabra ángulo a la intersección entre las diagonales del cuadrilátero. Con el fin de explorar cómo ella está entendiendo el concepto de ángulo, se realizan más preguntas obteniendo el siguiente fragmento de entrevista:

Fragmento 5. Segunda parte entrevista de Sarah durante la tarea 2.

203. Sarah: Qué pues digamos puedo tomar de un punto a otro y digamos, que en la mitad donde se unen los segmentos [intersección de las diagonales] puede tener un ángulo. Digamos aquí hay uno. (Señala con el cursor la intersección de las diagonales)



204. Entrevistador: ¿Cuánto crees que pueda medir ese ángulo?

205. Sarah: (...) (...) No sé, como noventa yo creería.

206. Entrevistador: ¿Noventa?

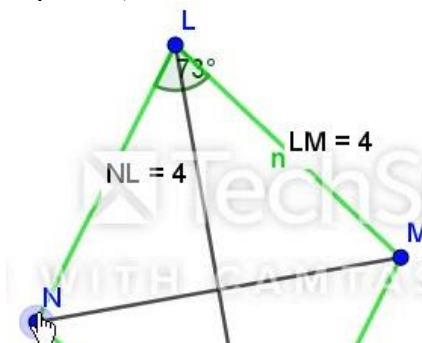
207. Sarah: Sí

212. Entrevistador: ¿Habría forma de medir ese ángulo en el programa?

213. Sarah: Sí, con esta herramienta (señala herramienta de GeoGebra para medir ángulos)

214. Entrevistador: Muéstrame cómo la medirías.

217. Sarah: Aquí hay uno (mide el $\angle NLM$ con dicha herramienta), aquí hay otro [$\angle LNO$] (señalando punto N)



220. Entrevistador: Bueno, ya que mediste ese ángulo dime ¿qué medida tienen los dos?

221. Sarah: Igual, este mide 73 grados y este también.

222. Entrevistador: Mira que acabas de descubrir más cosas, entonces en conclusión ¿qué características tiene "ese" cuadrilátero?

223. Sarah: Que los ángulos tienen la misma medida este y este [ángulos opuestos], son de 73 [grados].

226. Entrevistador: Sí, esa es la medida, ¿pero y los otros será que miden lo mismo?

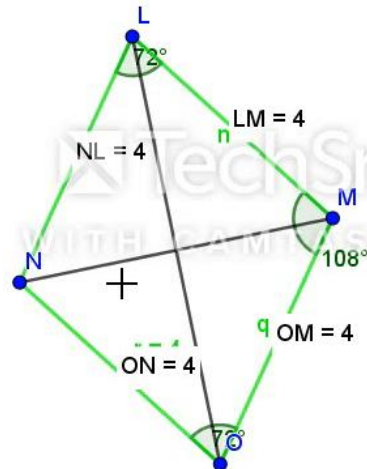
230. Sarah: 108 grados (Mide el $\angle LMO$).

231. Entrevistador: Entonces ¿cuál crees que sea la medida del ángulo que falta?

232. Sarah: 108 grados.

233. Entrevistador: ¿Por qué?

234. Sarah: Si este [NLM] mide menos que este [LMO], entonces este [MON] mide lo mismo que este [NLM]



235.	Entrevistador:	Ya para cerrar entonces, ¿qué características tiene este cuadrilátero?
236.	Sarah:	Primero tener cuatro puntos y cuatro segmentos (...) que midan lo mismo (...) los ángulos que tienen diferentes medidas, pero a la vez iguales, que estos (ángulos opuestos) miden igual.
243.	Entrevistador:	¿Eso pasa también con los ángulos que están seguidos? ¿Que más características encontraste?
244.	Sarah:	Que en este [rombo] los segmentos de adentro [diagonales] se unen.
245.	Entrevistador:	¿Y qué pasa en esa unión?
246.	Sarah:	(...)(...) Ahh, se formaba un ángulo de 90 grados.

Se interpreta una aprehensión perceptiva por parte de Sarah en la cual *reconoce la configuración como un objeto geométrico al cual no asigna un nombre específico (OG-1)*. También, se evidencia una aprehensión operativa dado que *realiza representaciones auxiliares a la configuración inicial (RA)*. La configuración [203] tuvo una modificación ya que están trazadas las diagonales del rombo. Además, en [213 y 230] *usa las herramientas del programa para buscar propiedades (UH)*; se infiere que gracias a esta acción genera conexiones con la aprehensión discursiva, ya que gracias a la manipulación de la representación (cambio configural) se muestra de forma más certera el cambio de anclaje desde lo visual a lo discursivo. Ella logra identificar propiedades del rombo, *listando los atributos del mismo (PC-1)* en [236]. No obstante, en esta última intervención se puede observar cómo *menciona propiedades de la representación usando un lenguaje natural (PC-2)*. Dado que la propiedad de ángulos opuestos y lados congruentes que menciona lo hace con un lenguaje poco técnico, en otros momentos de la entrevista [205, 221, 223, 217, 234 y 246] también se manifiesta esta última acción (PC-2). Cabe resaltar que Sarah con ayuda de la herramienta medir ángulo reconoce una propiedad del rombo que le era desconocida, la congruencia entre ángulos opuestos del rombo. Se infiere que, de haber comparado esta característica con una definición de rombo, la acción involucrada es

(CA). Finalmente, ella logra *construir una definición a partir de su exploración, la cual se caracteriza por ser a posteriori y no posee todos los atributos necesarios (CD-P2)*. Esta característica se observa en [236] ya que la definición que construye utiliza todos los atributos y propiedades que encontró luego de manipular la configuración, sin reconocer que todas las propiedades de una representación geométrica no necesariamente la definen.

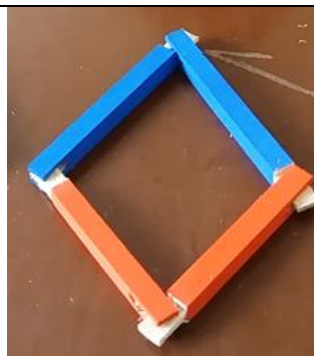
Debido a la interpretación de esta aprehensión discursiva, se infiere que Sarah está *relacionando atributos y propiedades de la configuración con la definición del concepto (RAD)*. Además de esto, está *clasificando dicho cuadrilátero a partir de su imagen conceptual (CIC)*, dado que en la intervención [244], Sarah llama al rombo como “este” indicando que lo diferencia de los demás cuadriláteros. Se infiere entonces que su imagen conceptual se ha transformado entendiendo que hay más tipos de cuadriláteros que los ya conocidos por ella. Por último, Sarah tiene una tendencia a *realizar afirmaciones sobre la configuración o propiedades de está evitando contradicciones lógicas (ASC)*. Un ejemplo de esto se observa en [232] cuando ella deduce que la medida del ángulo faltante es igual a su ángulo opuesto; algo que recalca en [236] indicando la definición del concepto que ella posee. También se puede apreciar como ejecuta su pensamiento deductivo en la intervención [234] donde expone un argumento del porqué los ángulos opuestos tienen misma medida. Dado todo lo anterior, se clasifica la relación entre celdas cognitivas de Sarah como una deducción siguiendo el pensamiento intuitivo.

Fragmento 5: Tarea 3. Los cuadrados rectos.

Este fragmento de entrevista corresponde a la Tarea 3 caracterizada en el [apartado 3.4.2](#), la cual es la primera tarea que para ser solucionada no requiere tecnología digital. Durante la resolución de esta, mientras se discutía sobre las clasificaciones encontradas por Sarah, ella menciona que uno de los cuadriláteros armados se llama cuadrado; por ende, se explora más en esta idea obteniendo el fragmento:

Fragmento 6. Entrevista de Sarah durante la tarea 3.

146 Entrevistador: Bueno, ¿Cómo llamarás a esta figura [cometa]?



147 Sarah: Cuadrado.

148 Entrevistador: ¿Qué características tiene un cuadrado?

149 Sarah: Que tiene cuatro lados.

150 Entrevistador: ¿Qué más?

En las intervenciones 151 y 166 ella se refiere a características del material

Tienen que medir lo mismo. (Arma un cuadrado)



167 Sarah:

174 Entrevistador: Entonces para ti, ¿un cuadrado que vendría siendo?

179 Sarah: Que todos tienen que medir lo mismo, osea (..) eh, debe ser de color rojo, (...) que es más pequeño.

186 Entrevistador: ¿Qué tiene que medir lo mismo?

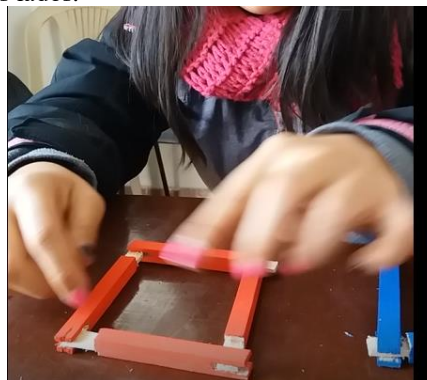
187 Sarah: Todos los lados.

188 Entrevistador: ¿Y además?

193 Sarah: Tiene que ser recto.

194 Entrevistador: ¿Qué parte tiene que ser recto? Señálame.

(...) Las partes de los lados.



195 Sarah:

Se interpreta en el fragmento una comprensión perceptiva de Sarah en la intervención [147] dado que su primera acción es *relacionar la configuración con un objeto geométrico*

asignando un nombre específico (OG-2). En este caso el nombre utilizado pertenece a un caso específico del ensamblaje de las piezas, dado que si en la configuración [146] se acercan dos vértices, esta se convierte en rombo dado que cambian los ángulos de 90°. Además de lo anterior, también se presenta en [179] una *relación de la configuración de manera no geométrica (NG)*, ya que relaciona el cuadrado con los colores del diseño de las piezas y el tamaño de estas. Se observa también una reconfiguración, la cual corresponde a una aprehensión operativa, dado que *usa los artefactos en material concreto para la búsqueda de propiedades de las configuraciones (UH)*. Esto lo realiza cuando toma las piezas y transforma la configuración inicial [146] en otra diferente [167]. Por lo anterior, ella *construye únicamente ejemplos de cuadriláteros según las referencias de las piezas (CE-1)*.

También se interpreta que Sarah utiliza la aprehensión discursiva puesto que en [149-193], ella está *identificando propiedades de la configuración en discusión listando los atributos (PC-1)* y *propiedades de la configuración usando un lenguaje natural (PC-2)*. Como se aprecia en dicho diálogo, ella menciona que un cuadrado tiene sus lados congruentes y que debe “ser recto”. Se infiere que ella se refiere al atributo que deben tener los ángulos internos de dicho objeto para ser cuadrado. Esto también es un indicio de la *construcción a priori de una definición a partir de la configuración, la cual no cuenta con los atributos necesarios (CD-A2)*.

Se interpreta que en esta ocasión Sarah tuvo un cambio de anclaje desde lo discursivo a lo visual, lo que le permitió acomodar las fichas de la manera correcta para formar el cuadrado [167] luego de haberlo mencionado antes [147]. Sin embargo, la relación de sus celdas cognitivas responde a una Respuesta Intuitiva dado que satisface las dos acciones de esta categoría. Porque está *interpretando la configuración con un significado no geométrico (ISG)*, como ya se mencionó anteriormente. Por otra parte, Sarah *describe la forma de la figura observada (DFO)* y no hay un avance más allá de esto. Dado que ella ya conoce que los colores de las piezas se deben a relaciones de equidistancias; y, por ende, no está reconociendo una propiedad si no un atributo particular del material diseñado.

4.1. Discusión

Categorías encontradas en los análisis

Con base en los fragmentos de entrevista analizados se realiza un conteo de la aparición de cada una de las categorías de análisis para determinar cuál de todas se repite más veces. Este conteo dio como resultado la siguiente gráfica, en la cual se muestran las categorías que aparecieron en los análisis:

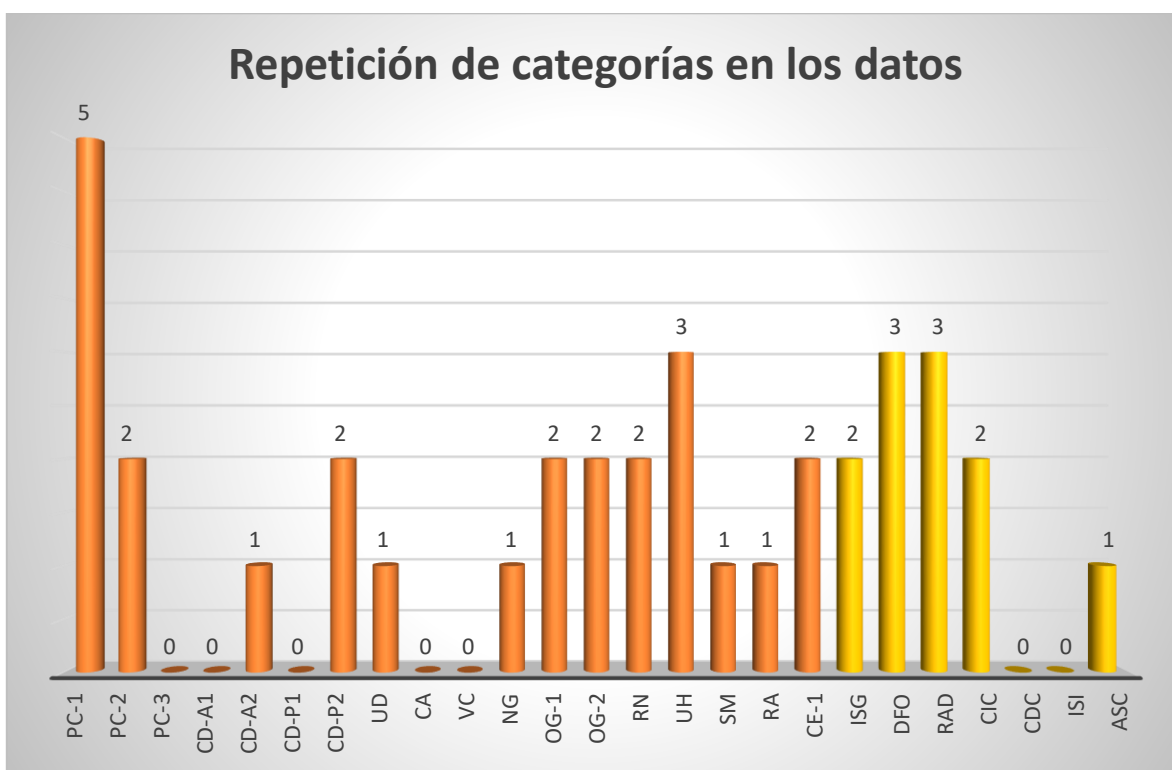


Gráfico 1. Conteo de categorías de análisis en los datos investigativos.

Se observa que la categoría más repetida es la PC-1, la cual indica los atributos constitutivos de una configuración. De este resultado se puede interpretar que cuando esta categoría está presente el sujeto ya ha realizado un cambio de anclaje desde lo visual a lo discursivo. Esto implica que se parte desde la aprehensión perceptiva para finalmente llegar a la discursiva, la cual activa la celda de definición del concepto dejando en evidencia la relación entre celdas cognitivas en el proceso de definir. Esto marca una importancia en la aprehensión perceptiva y, por tanto, de la imagen conceptual, ya que estas serán las precursoras de la definición que se quiere promover.

Además, la presencia de la categoría RA indica que al menos un participante (Sarah) está en la búsqueda de los atributos que definen a una representación específica. Dado que la dicha categoría indica la realización de representaciones auxiliares a una configuración dada. Esto demuestra que el proceso de definir se ve favorecido, porque las respuestas que Sarah está dando no se están ubicando únicamente en lo intuitivo. Complementando lo anterior, la categoría CE en general señala que los participantes están colocando en juego su definición para construir una representación de esta; promoviendo así el proceso anteriormente mencionado.

Por otra parte, al observar las categorías CD-A1 y CD-P1, las cuales indican si la construcción de la definición tiene los atributos necesarios no se encuentra presente en los análisis realizados, lo que es un indicio de que en algún momento del proceso hay una falencia. Esto se sustenta al buscar la relación entre celdas cognitivas, en donde se encuentra que tres fragmentos concluyen en *Deducciones* siguiendo el pensamiento intuitivo, y los restantes fragmentos en *Respuestas intuitivas*; eso quiere decir que las acciones dentro de las aprehensiones se generan de manera inconclusa.

Sin embargo, el cambio de anclaje se está dando, se puede justificar esto con el conteo de las categorías OG-1, OG-2 y RN, puesto que es en estas acciones donde se da dicho cambio ya que reconocen la configuración y realizan una afirmación acerca de esta. Los resultados arrojan que estas acciones están presentes en los análisis de cada uno de los fragmentos. Por lo tanto, en todos hay paso de lo visual a lo discursivo gracias a las preguntas del entrevistador. Dado esto, la dificultad se presenta cuando los estudiantes están en la aprehensión discursiva, ya que no logran comunicar sus ideas de manera correcta, y esto se debe a las particularidades en la memoria secuencial de la población en este estudio.

Como ya se mencionó, esta dificultad generalizada en los participantes acerca de la organización lógica de ideas se hace visible con la cantidad de veces que aparece la categoría de CD. Esta categoría está enfocada a la construcción de una definición a priori o a posteriori que cumpla o no con los atributos necesarios. Por lo tanto, el nivel de la acción determina como se ejecuta la aprehensión discursiva y, por ende, como interactúa la definición del concepto con la imagen conceptual. El conteo muestra que la categoría CD-P2 es la más frecuente dentro de estas, indicando evidencias de una definición sin los

atributos necesarios. En parte por la condición natural de las personas con síndrome de Down que presentan dificultades en lo sintáctico, y también por desconocimiento del comportamiento axiomático de las matemáticas; dado que siempre en los análisis de los fragmentos se observa como incluyen en la definición cualquier propiedad o atributo conocido o encontrado.

Para finalizar este apartado, en el [Gráfico 1](#) se encuentran también varias categorías que no se presentan. Aparte de la explicación dada en párrafos anteriores para CD-P1 y CD-A1, las demás categorías (PC-3, CA, VC, CDC, ISI) que no se aprecian en los datos corresponden en su totalidad a categorías extraídas de la literatura y no de los fragmentos; por ende, no se logran apreciar en este trabajo investigativo.

Relación entre categorías de análisis

Por otra parte, también existe una correlación entre las dos categorías de análisis presentadas en este documento. Para ello, se hace un rastreo con cada una de las categorías presentes en cada fragmento para establecer tal relación:

	Acciones según aprehensiones	Acciones según celdas cognitivas	Tipo de definición según relación entre celdas
Fragmento 1	RN, PC-1	DFO.	Respuesta Intuitiva
Fragmento 2	OG-2, RN, PC-1, PC-2, CD-P2, SM	DFO, RAD	Deducción siguiendo el pensamiento intuitivo
Fragmento 3	OG-1, UH, CE-1, PC-1, UD.	RAD, CIC.	Deducción siguiendo el pensamiento intuitivo
Fragmento 4	OG-1, RA, UH, PC-1, PC-2, CD-P2.	RAD, CIC, ASC.	Deducción siguiendo el pensamiento intuitivo
Fragmento 5	OG-2, NG, UH, CE-1, PC-1, PC-2, CD-A2.	ISG, DFO.	Respuesta Intuitiva

Tabla 9. Rastreo de categorías por fragmento.

Con base en la anterior tabla, se encuentra que existe una dependencia entre la aprehensión operativa y las relaciones entre celdas cognitivas. En los fragmentos donde se presentan Deducciones siguiendo el Pensamiento Intuitivo se hace visible la presencia de las acciones de la aprehensión operativa, en donde se encuentra la construcción de representaciones auxiliares a la configuración dada y la construcción de ejemplos de un objeto matemático. Esta última involucra obligatoriamente la celda de definición del concepto, ya que los

participantes necesitan tomar los atributos de un objeto que esta celda puede suministrar, para poder elaborar una representación. Luego, las aprehensiones operativas son decisivas en evadir las Respuestas Intuitivas, y más aún, en generar relaciones más profundas entre las celdas cognitivas de los sujetos.

Por otro lado, se observa que la presencia de la categoría CD-P2 apareció en aquellos fragmentos donde se presentó más cantidad de acciones propias de la aprehensión operativa. La presencia de dicha categoría también se visualiza cuando el tipo de relación entre celdas cognitivas pertenece a la Deducción siguiendo al Pensamiento Intuitivo. Es decir que, en estos casos, el cambio de anclaje permite que los participantes puedan expresar con mayor facilidad sus ideas, incluso hasta el caso de utilizar partes de una definición en la construcción de una configuración UD. En los casos donde dicha categoría mencionada, su homóloga CD-P1 o UD no aparecen, se obtendrán únicamente respuestas intuitivas.

Dado lo anterior, se establece una correlación entre las acciones de cada aprehensión que deben aparecer, para que el tipo de relación entre las celdas cognitivas pertenezca a alguno específico. Esto se resume en el siguiente cuadro con cada código:

Tipo de definición según relación entre celdas	Acciones de la Aprehensión Perceptiva Necesarias	Acciones de la Aprehensión Discursiva Necesarias	Acciones de la Aprehensión Operativa Necesarias
Respuesta Intuitiva	NG	PC-1	
Deducción siguiendo el Pensamiento Intuitivo	OG-1/OG-2	PC-1/PC-2 CD-P1/CD-P2/UD	UH SM/RA/CE-2
Deducción Formal	OG-1/OG-2	PC-1 PC-2/ PC-3 CD-P1 CA VC	CE-1 UH RA

Tabla 10. Correlación entre categorías de análisis.

La Tabla 10 muestra las acciones mínimas de cada aprehensión, para considerar las respuestas de cada participante como: respuesta intuitiva, deducción siguiendo el pensamiento intuitivo y la deducción formal. En este sentido, en la tabla se puede interpretar que cuando las acciones aparecen de forma horizontal, pertenecen a un tipo de relación de celdas cognitivas. Las categorías que están separadas con la barra inclinada (/)

hacen referencia a que debe estar presente por lo menos una de ellas; resaltando que deben aparecer todas las listadas. Para explicar mejor la tabla anterior, se utilizarán dos casos:

- *Caso 1.* Luego de utilizar las categorías de análisis se encuentran las siguientes acciones de las aprehensiones presentes: OG-2, RN, PC-1, CD-P2, UH, CE-2. Dadas estas acciones se clasifica que el estudiante presentó una Deducción siguiendo el pensamiento intuitivo; ya que cumple con cada una de las acciones mínimas para que se clasifique en esta relación de celdas cognitivas. Se observa que entre las acciones OG-1 y OG-2 aparece esta última, indicando que para esta categoría pueden presentar ambas acciones o una de las dos, y seguirá siendo el mismo tipo de relación entre celdas. También se observa la presencia de una categoría adicional RN, mostrando que siempre y cuando se mantenga la estructura básica de cada tipo de definición, las acciones adicionales no alteran el tipo de relación entre celdas cognitivas.
- *Caso 2.* Luego de utilizar las categorías de análisis se encuentran las siguientes acciones de las aprehensiones presentes: OG-1, NG, PC-1, CA-P2, UH, RA. Dadas estas acciones el tipo de definición es una Respuesta intuitiva, ya que mantiene las acciones básicas. Si se tienen acciones de diferente nivel (NG y OG-1) en un mismo dato investigativo, tiene más relevancia el de menor nivel, en este caso la Respuesta intuitiva.

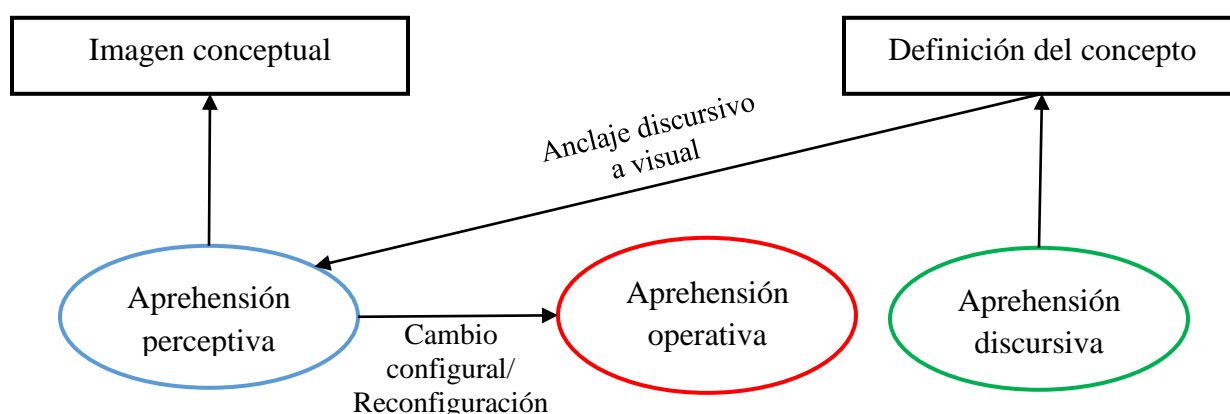
Sin embargo, esta tabla solamente es totalmente funcional para la Respuesta intuitiva y la Deducción siguiendo el pensamiento intuitivo, pero no es definitiva para la Deducción formal. Esto en un principio porque este tipo de relación entre celdas cognitivas no se presenta en ninguno de los fragmentos, por lo tanto, no es posible establecer con total certeza que se comporte de la manera descrita en la tabla 10. Además, en dicha categoría también se incluyen algunas de las acciones (en **negrilla**) que no aparecieron en los análisis, indicando entonces que el comportamiento de la Deducción formal es hipotético.

Relación entre esquemas propuestos y categorías de análisis

En la [sección 2.4](#) se proponen varios esquemas que relacionan las teorías de Duval (1992) y Tall y Vinner (1981), a partir de las diferentes acciones que pueden utilizar los estudiantes con síndrome de Down, cuando resuelven una tarea que involucra una definición de un

objeto geométrico. Utilizando la [Tabla 9](#) se ubican cada una de las acciones presentes por fragmento en dichos esquemas propuestos hasta encontrar el más adaptable, por lo cual se obtiene lo siguiente:

- El fragmento 1 se ubica en el [Esquema 7](#) ya que están presentes las aprehensiones perceptiva y discursiva únicamente, además porque hay presencia de cambio de anclaje. En un inicio se pensaba que este esquema representaría otro tipo de relación entre celdas cognitivas, luego la respuesta intuitiva ya se encuentran dos aprehensiones y no una.
- Los fragmentos 3 y 4 por su parte pertenecen al [Esquema 10](#), dado que en ambos casos se parte de la aprehensión perceptiva, y dada la exploración y transformación de la configuración inicial, se hacen visibles cambios de anclaje y reconfiguraciones. En ambos casos se obtienen deducciones siguiendo el pensamiento intuitivo.
- En el caso del fragmento 5, se puede apreciar que no se parte de lo perceptivo dado el diseño de la Tarea 3, por eso se asemeja al [Esquema 9](#). Sin embargo, dicho esquema no representa propiamente lo que sucede en el fragmento, dado que en este no se consideró que la aprehensión operativa haría parte del proceso. Como se observó en el análisis del fragmento, sí hubo una aprehensión operativa y también un cambio de anclaje, en este caso desde lo discursivo a lo visual. Por ende, se construye una versión más completa del Esquema 9, dando como resultado el Esquema 12 que se expone enseguida.



Esquema 12. Interacción entre celdas cognitivas y aprehensiones partiendo de lo discursivo.

En este caso, la aprehensión operativa salta a la vista luego de la activación de la imagen conceptual, pero no genera impacto en la construcción de la definición. De hecho, la activación en primera medida de la celda de definición del concepto genera una definición a priori (Tabla 9), la cual no se modifica durante todo el fragmento dando como resultado una Respuesta Intuitiva. Se puede interpretar que este esquema no es eficiente para promover el proceso de definir, dado que en sí mismo genera una definición casi que inmediata. Esto se debe, a que las acciones de la aprehensión discursiva están primero que las perceptivas.

- El Esquema 8 no se puede relacionar con ninguno de los fragmentos aquí analizados, eso deja en claro que una Respuesta Intuitiva no es una relación exclusiva de la aprehensión perceptiva. Como se pudo observar en párrafos anteriores, los dos casos donde se presentó dicha relación entre celdas involucraron al menos dos aprehensiones.

Para terminar, se exponen las modificaciones que se realizaron a las categorías de análisis según el tipo de aprehensión identificado, incluyendo los niveles de acción encontrados en los fragmentos 1 y 3 en la tabla a continuación.

Tipo Aprehensión	Acciones	Niveles de Acción	
Aprehensión Discursiva	Identificar propiedades o atributos de la configuración inicial (PC)	Lista de atributos constitutivos o no constitutivos de la configuración (PC-1)	
		Menciona propiedades de la configuración usando lenguaje natural (PC-2)	
		Menciona propiedades de la configuración usando lenguaje matemático (PC-3)	
	Construir una definición a partir de la configuración (CD)	A priori (CD-A)	Tiene los atributos necesarios
		A posteriori (CD-P)	(1) No tiene los atributos necesarios (2)
	Verificar el cumplimiento o no de los atributos de la definición en la configuración. (CA)		
Verifica propiedades que no hacen parte de la			

	definición en la configuración. (VC)	
Aprehensión Perceptiva	Relacionar la configuración con objetos no geométricos (NG)	
	Relacionar configuración con un objeto geométrico (OG)	No asigna nombre específico (OG-1) Asigna nombre específico (OG-2)
	Reconocer la configuración como un no-ejemplo del concepto a tratar (RN)	
Aprehensión Operativa	Usar artefactos (regla, compás, transportador, papel mantequilla) o herramientas de los SGD en la búsqueda de propiedades de una configuración (UH)	
	Sugerir modificaciones a configuraciones para acercarlas a la definición (SM)	
	Realizar una representación auxiliar a la configuración inicial (RA)	
	Construir configuraciones de ejemplos o no ejemplos de una definición (CE)	Acudiendo a mediciones y referencias similares (CE-1)

Tabla 11. Categorías de análisis con las aprehensiones cognitivas complementada. Estas nuevas categorías añadidas de color naranja se ejemplifican así:

Reconocer la configuración como un no-ejemplo del concepto a tratar (RN): La Imagen 38 no es un triángulo porque tiene seis lados.

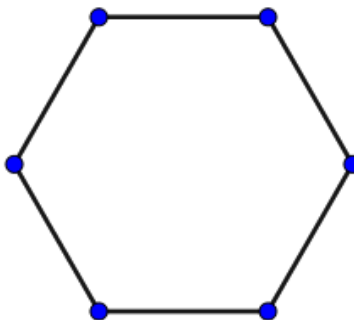


Imagen 40. Representación de polígono de seis lados.

Construir configuraciones de ejemplos o no ejemplos de una definición (CE): Esta categoría se presentó en el [apartado 3.5.](#), por eso solo se explica el nivel de acción que emerge de los análisis. Este nivel es *la construcción acudiendo a mediciones y referencias similares* **CE-2:** Por ejemplo, para construir un cuadrado se puede pensar en una medida específica y unir los segmentos de la medida elegida.

5. Conclusiones

Las conclusiones que se presentan no pretenden dar por terminada la actividad investigativa propuesta en este estudio. Se desea profundizar en diferentes aspectos aquí encontrados, los cuales serán discutidos más adelante. No obstante, se muestran algunas conclusiones parciales de esta investigación organizadas así: los objetivos del estudio; la tecnología digital y el favorecimiento del proceso de definir; las categorías de análisis y el aporte teórico; la percepción de los estudiantes con síndrome de Down; la formación profesional; el ejercicio investigativo; la viabilidad para continuar la investigación, a nivel personal y las recomendaciones finales.

Sobre los objetivos propuestos en el estudio

En este ítem se comentan los resultados más globales del estudio en torno a los objetivos, los tres ítems siguientes se seguirán refiriendo a los objetivos de la investigación, pero en un nivel más específico. El proceso investigativo muestra que los estudiantes con síndrome de Down acompañados de preguntas orientadas en un proceso específico, estimula el uso de las definiciones en la resolución de tareas. La interpretación que pueden hacer frente a un objeto no se ve tan afectados en estos estudiantes, ya que se observó en los fragmentos expuestos el uso de argumentos empíricos para el uso de definiciones y su construcción (en algunos casos). Se hace visible como empiezan a realizar pequeñas deducciones de situaciones como, por ejemplo, indicar la medida de un ángulo en un rombo conociendo la medida del ángulo opuesto. El uso de dichas deducciones podría significar en un futuro un avance en el nivel de abstracción por parte de estos estudiantes. Esta investigación demuestra que dicha población sí puede estar inmersa en procesos propios de la actividad matemática, siempre y cuando sea promovido de la mejor manera dadas las condiciones particulares de cada uno.

Se logra evidenciar como se desarrolla el proceso de definir en los participantes cuando estos construyen proposiciones cada vez más complejas y completas, que definen en parte algunos de los objetos geométricos trabajados en la investigación. Se hace evidente, el uso de dichas definiciones propias en la construcción de representaciones de un objeto geométrico específico; por ejemplo, en el fragmento 3, 4 y 5. Es muy significativo que se promueva este proceso en una población con síndrome de Down, arrojando resultados muy

significativos en este primer intento realizado. Se espera profundizar más en el diseño de las tareas para continuar con este tipo de resultados.

Sobre la tecnología digital y el favorecimiento del proceso de definir

Se rescata la importancia de la tecnología digital en el desarrollo de este proceso ya que, gracias a las grandes posibilidades de crear ejemplos y no-ejemplos (Tarea 1), o la construcción de configuraciones robustas (Tarea 2), los estudiantes desarrollaron más acciones que favorecen el proceso de definir. Por su parte, las tareas con material concreto no surtieron el efecto esperado, dado que los estudiantes observaban el material desde aspectos no geométricos como el color, forma, textura y demás. Por esto, el material concreto resultó ser menos efectivo dado que la estimulación del material al tacto terminó siendo un factor distractor; posiblemente el uso de otros colores, formas y texturas ayuden a cambiar esta dificultad. Los recursos audiovisuales en el aula para esta población terminan siendo indispensables en el desarrollo de dicho proceso. Por eso, se considera que estos podrían promover otros procesos de la actividad matemática.

Sobre las categorías de análisis y el aporte teórico

Como se pudo apreciar en el capítulo de metodología, las herramientas analíticas emergen de los datos analizados y de la literatura. Estas categorías se complementan a lo largo del análisis de los fragmentos. Esto permite encontrar más acciones que se involucran en el uso de definiciones para la resolución de tareas. Se pretende aportar al campo de la educación matemática con la construcción de estas categorías para que pueda ser utilizada en otros ejercicios investigativos. Por otra parte, los dos tipos de categorías de análisis permitieron generar la correlación entre las aprehensiones utilizadas en cada una de las relaciones entre celdas cognitivas. Sin estas, este ejercicio no se podría haber establecido y no se mostraría un contraste entre los dos marcos teóricos aquí mencionados. En esta medida, también se genera un aporte teórico en esta investigación al encontrar una conexión entre dichos marcos. Esto se hace más visible al diseñar los esquemas que muestran cómo se puede dar la relación entre celdas cognitivas, partiendo de las aprehensiones que se hacen visibles en dicha relación. Estos esquemas muestran los posibles recorridos que hace el participante cuando resuelve una tarea donde se involucran las definiciones. En principio se plantearon teóricamente pero luego del ejercicio analítico se encontró que la mayoría si se ejecutan de la manera propuesta. Gracias a esto, se logra especificar cuáles acciones deben estar

presentes en cada esquema y así establecer a qué relación entre celdas corresponde cada uno de estos. Es decir, que cada esquema no muestra en sí las relaciones planteadas por Vinner (1991), la única forma de determinarlo son las acciones involucradas en cada aprehensión y celda.

Sobre la percepción de los estudiantes con síndrome de Down

Llevar al aula estrategias diferentes a las usuales significó un impacto alto en los estudiantes. Eso llevó a desarrollar con éxito las tareas propuestas y a mantener las expectativas en ellos, puesto que descubrieron que son capaces de desarrollar actividades diferentes a las usuales. Como se menciona en el marco metodológico, los estudiantes conocían sobre los cuadriláteros y sabían clasificar algunos, utilizando siempre representaciones estáticas y actividades que involucraban figuras prototípicas. Permitir que utilizaran las herramientas digitales contribuye en mantener la atención de los estudiantes y por ello los resultados obtenidos son favorables. Dentro de su proceso formativo en matemáticas, ha sido significativo el uso de la tecnología digital porque marcó en ellos una ruptura en la forma habitual de ver las matemáticas y la geometría, tanto así que se les nota más motivación en la clase.

Sobre la formación profesional

Este estudio permite entender cada vez más el comportamiento de los estudiantes con síndrome de Down, y hacer una sensibilización sobre lo que necesitan y pueden hacer. Gracias al ejercicio investigativo, tengo más entendimiento de cómo diseñar tareas que se acomoden a las necesidades particulares de estos estudiantes. La experiencia de involucrar las matemáticas fuera de las prácticas habituales en las que normalmente estaban inmersos, permite tener un mejor panorama de cómo abordar las clases. La falta de estrategias limita el quehacer docente impidiendo promover las capacidades “ocultas” que estos estudiantes tienen.

A su vez, el papel del entrevistador, y sus preguntas, fue fundamental en el desarrollo de este ejercicio investigativo, dado que las preguntas orientan y direccionan al estudiante a realizar el cambio de anclaje, como se menciona en la discusión. Sin la participación del entrevistador el proceso no se da espontáneamente, haciendo reflexionar que la inclusión de la tecnología digital, por si solo no transforma los problemas de la educación matemática.

Sobre el ejercicio investigativo

Asumir el reto de tomar un marco de referencia con el cual construir las categorías de análisis fue complejo, porque ninguno de estos está pensado para personas en condición de discapacidad. Esta condición lleva a transformar el marco original, incluyendo las aprehensiones caracterizadas por Duval (1995). La recolección de la información fue rigurosa para dar con información relevante, ya que la investigación en este campo es bastante escasa. El tiempo dedicado a los análisis de los datos fue elevado, haciendo reflexionar sobre la complejidad de los análisis cualitativos. Existen pocos trabajos en el campo de la educación matemática preocupados por procesos que los estudiantes con síndrome de Down realizan, por eso esperamos aportar en este campo y motivar a más investigadores a que contribuyan con más estudios como este.

A nivel personal

Este trabajo marco en mí una oportunidad para ser más consciente de la necesidad de una sociedad más incluyente. La educación debe ser una oportunidad para que cualquier persona sin importar su condición pueda desarrollar sus habilidades en todas las áreas del conocimiento.

Viabilidad para continuar la actividad investigativa

Como se mencionó al inicio del apartado, el ejercicio investigativo no ha concluido. Además, este trabajo se enmarca en la línea de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, y es necesario seguir investigando para establecer la correlación definitiva entre las acciones de cada aprehensión y las relaciones entre celdas cognitivas; también surge la necesidad de implementar la misma estrategia en una población mayor, para observar si se mantienen las correlaciones aquí planteadas. Hacer un análisis comparativo entre estudiantes con síndrome de Down y neurotípicos, utilizando las herramientas analíticas para observar las diferencias entre las acciones que utiliza cada grupo, para establecer la relación entre celdas cognitivas que más frecuentan. Realizar un experimento de enseñanza, utilizando las herramientas analíticas en una población con una condición cognitiva distinta, para observar el comportamiento cognitivo en la resolución de tareas que requieren la definición de un objeto.

Recomendaciones finales

Este trabajo hace un llamado a todas las instituciones educativas del país a preocuparse por promover procesos de la actividad matemática, como el presentado en este trabajo investigativo, que contribuya con la atención a la población con NEE. La ley colombiana decretó que todos los colegios del país deben atender a cualquier estudiante sea cual sea su condición; y si no se poseen los conocimientos mínimos para ello, no se podrá atender de la manera correcta a esta población.

Bibliografía

- Acevedo, J. (2010). *Modificabilidad estructural cognitiva vs. Visualización: un ejercicio de análisis del uso del Tetris en tareas de rotación y traslación*. (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia, 40-87.
- Aya, O., y Echeverry, A. (2009). *Geometría Dinámica en el Proceso de Definir*. (Tesis de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia, 20-50.
- Basile, H. (2008). Retraso mental y genética. Síndrome de Down. *Revista de Argentina de Clínica Neuropsiquiátrica*. 1(15). Argentina,9-23
- Bruno, A.; Noda, A.; Aguilar, R.; González, C.; Moreno, L. y Muñoz, V. (2006). Análisis de un tutorial inteligente sobre conceptos lógico-matemáticos en alumnos con Síndrome de Down. *RELIME*. 9(2), 211-226.
- Bruno, A. y Noda, A. (2010). Necesidades educativas especiales en matemáticas. El caso de personas con síndrome de down. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds), *Investigación en Educación Matemática XIV*. Lleida: SEIEM, 141-162
- Camargo, L. (s.f.). *Estrategias cualitativas en investigación en Educación Matemática*. (Documento en proceso de evaluación.)
- Congreso de Colombia (27 de febrero del 2013). Ley Estatutaria [Ley 1618 de 2013]. DO: 48.717. Recuperado de: <https://discapacidadcolombia.com/phocadownloadpap/LEGISLACION/LEY%20ESTATUTARIA%201618%20DE%202013.pdf>
- de Villiers, M. (1994). The role and functions of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the learning of Mathematics*, 1 (14), 11-18.
- de Villiers, M. (1998). ¿To Teach Definitions In Geometry Or Teach To Define? In A. Olivier & K. Newstead (Eds), *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education: University of Stellenbosch: Stellenbosch, 12-17 July 1998*. (2), 248-255.
- de Villiers, M. (2004). Using Dynamic Geometry to Expand Mathematics Teachers' Understanding of Proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(5), 703-724.

- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives* 5, 37-65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Suisse: Peter Lang (traducción española, Semiosis y pensamiento humano (1999). Cali, Colombia: Universidad del Valle).
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 37-51.
- Gamboa R y Ballester E. (2009) Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Universidad de Costa Rica, Número 5. Costa Rica, 113- 136.
- Gavilán, J., Sánchez, G., Escudero, I. (2012). El proceso de definir en matemáticas desde una perspectiva comognitiva. En: Investigación en Educación Matemática XVI. Simposio Jaén. (Sevilla, España; 2012). *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. [2016], 1-8.
- Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En, A., Kelly y R. Lesh (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. Capítulo 19, 517 – 545.
- Gómez, C., Ruiz, M., Fernández, A. (2005). *Tratado de psiquiatría*. Capítulo 34. pp 32-45
- Hassan, S., Fernandes, S. H. A. A., & Healy, L. (2014). Algebraic expressions of deaf students: Connecting visuo-gestural. *Proceeding of PME 38 and PME-NA 36*, 3, 49–56.
- Kaur, H., & Sinclair, N. (2014). Young children’s thinking about various types of triangles in a dynamic geometry environment. *Proceeding of PME 38 and PME-NA 36*, 3, 409–416.
- Kumin, L. (2008). *Síndrome de Down: habilidades tempranas de comunicación*. Estados Unidos de América, Fundación Iberoamericana Down 21.
- López, P., López, R., Parés, G., Borges, A. y Valdespino, L. (2000). Reseña histórica del síndrome de Down. *Revista ADM*. Número 5(57). pp. 193-199.
- Moise, E. (1986). *Geometría Moderna*. (Mariano García, trad.). México: Sistemas Técnicos de Edición. (Obra original publicada en 1970).

- Ma, X., Xin, Y. P., Tzur, R., Si, L., Yang, X., Park, J. Y., Liu, J., & Ding, R. (2014). The effect of an intelligent tutor on math problem-solving of students with learning disabilities. *Proceeding of PME 38 and PME-NA 36*, 4, 145–152.
- Marmolejo, G., Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática*, 24(3), 8-13.
- Ministerio de Educación Nacional (24 de octubre del 2003). Prestación del Servicio Educativo a la Población con Necesidades Educativas Especiales. [Resolución 2565 de 2003]. DO: 47.283. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85960_archivo_pdf.pdf
- Ministerio de Educación Nacional (29 de agosto del 2017). Atención Educativa a la Población con Discapacidad. [Decreto 1421 del 2017]. DO: 51.037. Recuperado de: <http://es.presidencia.gov.co/normativa/normativa/DECRETO%201421%20DEL%2029%20DE%20AGOSTO%20DE%202017.pdf>.
- Noda, A. y Bruno, A. (2010). *Operaciones básicas en alumnos con síndrome de Down*. PNA, 4(4), 143-159.
- Nye, J.; Fluck, M. & Buckley, S. (2001). Counting and cardinal understanding in children with Down Syndrome and typically developing children. *Down Syndrome Research and Practice* 7 (2), 68-78
- Ponce, J.; Ornelas, F.; Lucio, M.; Padilla, A. y Toscano, B. (2015). *Revista Sociología Contemporánea*. 2(4), 166-176
- Quintero, A., Rojas, T. (2008). *Introducción del concepto de triángulo a niños con síndrome de Down*. (Tesis de Pregrado). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia. (pp. 34-66).
- Ruiz, E. (2012). *Programación educativa para escolares con síndrome de Down*. Fundación Iberoamericana Down 21.
- Sinclair, N., & Yerushalmy, M. (2016). Digital technology in mathematics teaching and learning: A decade focused on theorising and teaching. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education*. Sense Publishers, 235–274.

- Tall D., y Vinner S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*. 12, 151-169.
- Troncoso, M. y del Cerro, M. (2009). *Síndrome de Down: lectura y escritura*. Fundación Iberoamericana Down 21, 14-26
- Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *RELIME*, 10(2), 275-300.
- Torregrosa, G., Quesada, H. y Penalva, M.C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las ciencias*, 28(3), 327-340.
- Tuset, I., Bruno, A., Noda, A. y Ramírez, M. (2016). La subitización en tareas numéricas en niños con Síndrome de Down. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 649). Málaga: SEIEM
- Valencia, A. (2012). *Prácticas discursivas y recursos pedagógicos en clases de geometría en la educación básica: el caso del origami*. (Tesis de Maestría). Universidad del Valle. Cali, Colombia.
- Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematic teaching and learning*. Greenwich, CT: NCTM e Information. Age Publishing, 557-627.
- Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Springer Netherlands, 65-81.

Anexos

Anexo 1. Tarea 1

	 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Educadora de educadores</i>	Tarea 1 Identificación de un cuadrilátero
Instrumento para la Recolección de la Información		
PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: ESTRATEGIAS INCLUYENTES EN GEOMETRÍA PARA ESTUDIANTES CON SÍNDROME DE DOWN. CONCEPTUALIZACIÓN Y TECNOLOGÍA DIGITAL		Investigador: Oscar Hoyos ¹

Nombre _____ Fecha _____

“Lea con atención cada uno de los enunciados y realice todas las preguntas necesarias al investigador antes de comenzar.

Para la siguiente tarea sigue los pasos como se te indiquen:

- 1) Abre en tu computadora el programa *aplicativo*.
- 2) Da clic en el botón nuevo **NUEVO** y observa qué sucede.
- 3) Detente cuando tu profesor te lo indique, y replica la figura formada en el recuadro bajo la palabra gráfico 1.
- 4) Realiza el paso anterior para los gráficos 2 y 3.
- 5) Frente a cada dibujo explica porque son o no cuadriláteros.

Gráfico 1	Explicación

Gráfico 2	Explicación
Gráfico 3	Explicación

Anexo 2. Tarea 2

	 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Educadora de educadores</i>	Tarea 2 Estudio de los cuadriláteros
Instrumento para la Recolección de la Información		
PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: ESTRATEGIAS INCLUYENTES EN GEOMETRÍA PARA ESTUDIANTES CON SÍNDROME DE DOWN. CONCEPTUALIZACIÓN Y TECNOLOGÍA DIGITAL		Investigador: Oscar Hoyos ¹

Nombre _____ Fecha _____

“Lee con atención cada uno de los enunciados y realiza todas las preguntas necesarias al investigador antes de comenzar.”

Parte uno

Accede al archivo *Cuadrilátero* en tu computadora, mueve el cuadrilátero y responde lo siguiente:

- a) Menciona cuatro características que identifiques del cuadrilátero.

- b) ¿Cómo explicarías cada una de estas?

Parte dos

Haciendo uso de la definición de cuadrilátero, construye uno en GeoGebra utilizando las herramientas de punto y segmento.

- a) ¿Es posible construir un cuadrilátero igual al que ya estaba?

- b) Describe como construir un cuadrilátero de igual forma al que ya estaba.

Anexo 3. Tarea 3

	 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Educadora de educadores</i>	Tarea 3 Características cuadriláteros
Instrumento para la Recolección de la Información		
PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: ESTRATEGIAS INCLUYENTES EN GEOMETRÍA PARA ESTUDIANTES CON SÍNDROME DE DOWN. CONCEPTUALIZACIÓN Y TECNOLOGÍA DIGITAL		Investigador: Oscar Hoyos ¹

Nombre _____ Fecha _____

“Lea con atención cada uno de los enunciados y realice todas las preguntas necesarias al investigador antes de comenzar.

Usando el material entregado por el profesor use las regletas en cada situación presentada, y posteriormente contesta las preguntas:

- 1) Toma cuatro regletas rojas, con estas construye un cuadrilátero.
- 2) Toma cuatro regletas verdes y construye un cuadrilátero
- 3) Toma dos regletas rojas, dos verdes y con ellas construye un cuadrilátero.
- 4) Toma tres regletas rojas, una verde y si es posible, construye un cuadrilátero.
- 5) Toma tres regletas verdes, una roja y con estas regletas trata de construir un cuadrilátero.

Preguntas:

- a) ¿Qué relación hay entre las figuras realizadas en los puntos anteriores?
- b) ¿Qué diferencias encuentras entre las figuras construidas ?
- c) ¿Se observan figuras similares? En caso de que sí, ¿cómo las organizarías?

Anexo 4. Tarea 4.

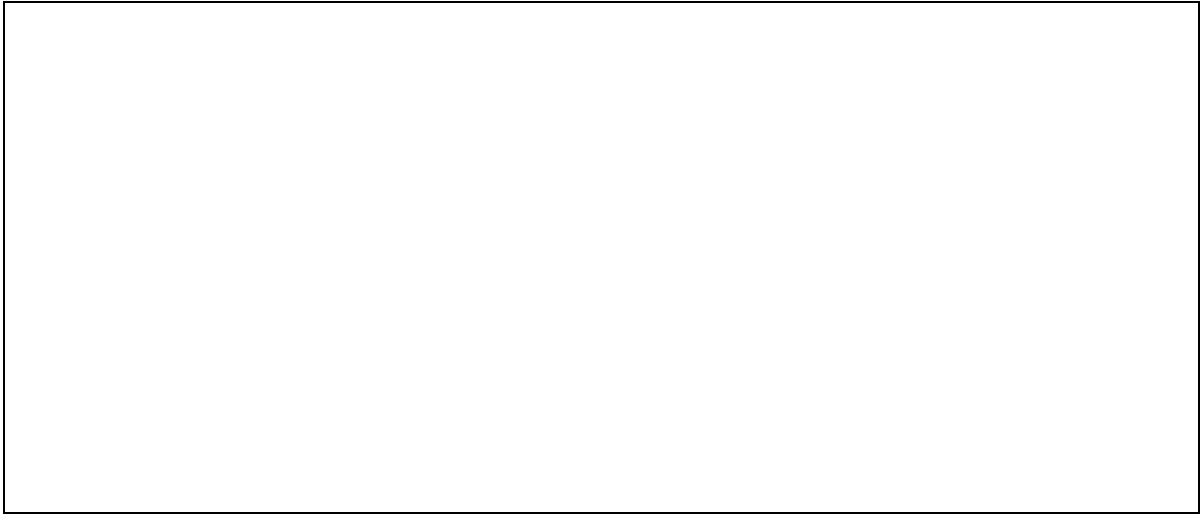
		Tarea 4 Clasificar cuadriláteros
Instrumento para la Recolección de la Información		
PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: ESTRATEGIAS INCLUYENTES EN GEOMETRÍA PARA ESTUDIANTES CON SÍNDROME DE DOWN. CONCEPTUALIZACIÓN Y TECNOLOGÍA DIGITAL		Investigador: Oscar Hoyos ¹

Nombre _____ Fecha _____

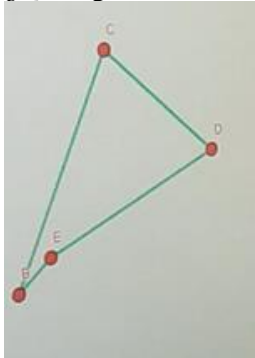
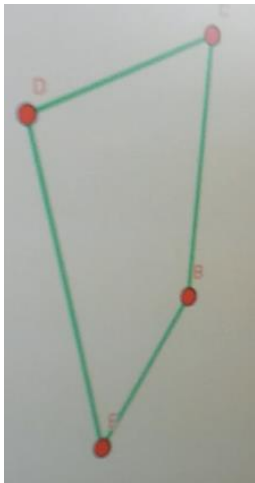
“Lea con atención cada uno de los enunciados y realice todas las preguntas necesarias al investigador antes de comenzar.”


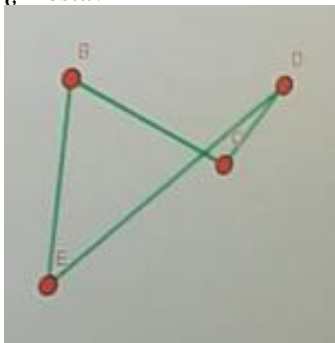
Usando el material repartido por el profesor donde se encuentran los cuadriláteros, agrupa las fichas teniendo en cuenta, las características observadas en la tarea anterior. Luego de agrupar las fichas, describe a tu profesor la manera de agruparlas.

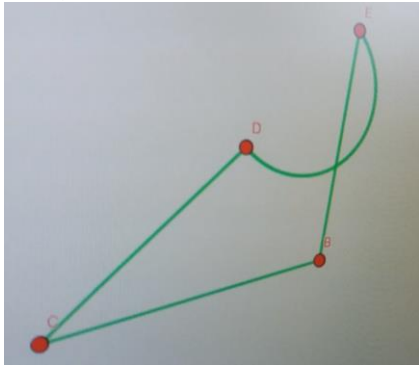
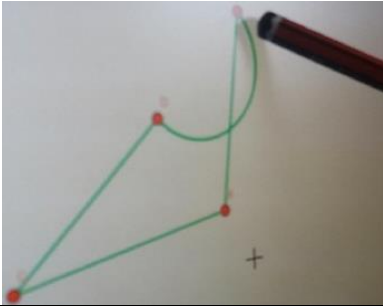
Agrupación 1
Agrupación 2

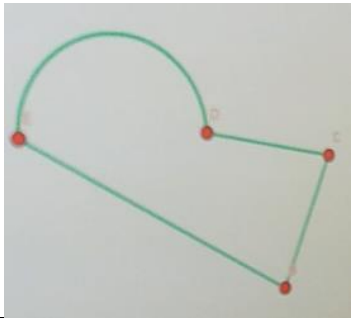


Anexo 5. Transcripción Tarea 1 Miguel

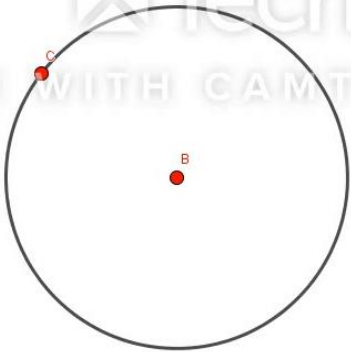
1	Entrevistador:	¿Qué pasa cuando le das clic? ¿Es la misma figura?
2	Miguel:	No, es un círculo.
3	Entrevistador:	Es un círculo no cierto, ahora dale clic de nuevo para ver si aparece el mismo círculo. ¿Es el mismo?
4	Miguel:	¡ay! Salió otra cosa
5	Entrevistador:	<p>¿Qué figura es esa?</p> 
6	Miguel:	Un triángulo
7	Entrevistador:	Bueno, dale clic de nuevo
8	Miguel:	¿Qué es eso?
9	Entrevistador:	<p>Dale clic de nuevo. Listo, miremos y dime ¿Cuántos lados tiene?</p> 
10	Miguel:	Cuatro
11	Entrevistador:	¿Cuántos puntos tiene?
12	Miguel:	Cuatro
13	Entrevistador:	¿Cuáles son los puntos? ¿De qué color son?
14	Miguel:	Son rojos
15	Entrevistador:	Y ¿Cuántos hay?
16	Miguel:	Cuatro
17	Entrevistador:	Y ahora dime, ¿los lados se intersecan en algún momento?
18	Miguel:	Si
19	Entrevistador:	¿Por qué?

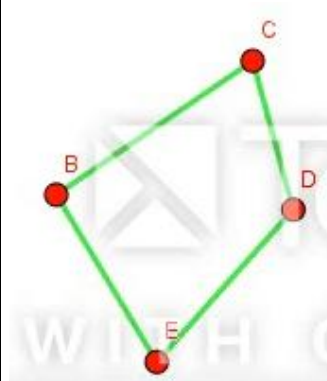
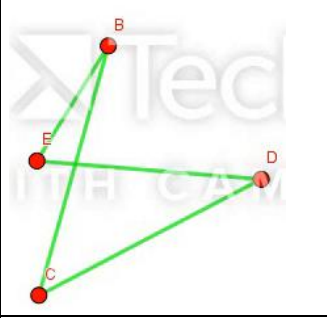
20	Miguel:	No se
21	Entrevistador:	Mira y compara entre dos puntos y dime si se "estrellan" los segmentos en algún momento.
22	Miguel:	No
23	Entrevistador:	Dime si entre los otros dos puntos se estrella
24	Miguel:	No
25	Entrevistador:	¿Es un cuadrilátero o no?
26	Miguel:	Es un triangulito
27	Entrevistador:	¿Por qué dices que es un "triangulito"?
28	Miguel:	(...)
29	Entrevistador:	¿Cómo se hace para diferenciar entre un cuadrilátero y un triángulo?
30	Miguel:	(...)
31	Entrevistador:	¿Es un cuadrilátero o no lo es?
32	Miguel:	No.
33	Entrevistador:	¿Entonces qué dirías que es?
34	Miguel:	Es un (...)
35	Entrevistador:	¿Es un qué?
36	Miguel:	Cronometro.
37	Entrevistador:	¿Cronometro? Mejor intentemos escribir, escribe lo que estás diciendo
38	Miguel:	(Escribe Cuadrado)
39	Entrevistador:	¿Estás diciendo qué es, o que no es lo que escribiste?
40	Miguel:	Si.
41	Entrevistador:	Bien, ahora con esta figura. ¿Es un cuadrilátero? 
42	Miguel:	No, es un círculo.
43	Entrevistador:	¿Y esta? 
44	Miguel:	No

45	Entrevistador:	¿Cuántos segmentos tiene?
46	Miguel:	Cuatro líneas
47	Entrevistador:	Y ¿Cuántos puntos [Vértices]?
48	Miguel:	Cuatro
49	Entrevistador:	¿Es cuadrilátero o no?
50	Miguel:	No , no lo es.
51	Entrevistador:	¿Qué sería entonces?
52	Miguel:	Un triángulo
53	Entrevistador:	<p>Bien, dale clic de nuevo. Mira esa figura, ¿es un cuadrilátero?</p> 
54	Miguel:	No, no es.
55	Entrevistador:	Dime, ¿Por qué lo dices?
56	Miguel:	(Señala la pantalla) Ese es un círculo.
57	Entrevistador:	¿Qué es lo que quieres decir con eso?
58	Miguel:	Tiene una parte de círculo.
59	Entrevistador:	Muéstrame.
60	Miguel:	Ese. (Señala la curva).
61	Entrevistador:	¿Qué forma tiene "ese"?
62	Miguel:	Círculo.
63	Entrevistador:	¿Por qué piensas que es un círculo?
64	Miguel:	<p>(...) Aquí. (Recorre su dedo sobre la curva)</p> 
65	Entrevistador:	En esta última imagen ¿Qué ves?

		
66	Miguel:	Cuadrado.
67	Entrevistador:	¿Por qué?
68	Miguel:	(...)

Anexo 6. Transcripción Tarea 1 Fernanda

1	Entrevistador:	Bueno, lo primero que quiero que digas es lo que vamos a hacer. ¿Qué estamos haciendo?
2	Fernanda:	Algo de geometría (...)o sea que esto cambia la gráfica.
3	Entrevistador:	¿Qué dice la hoja que debes hacer?
4	Fernanda:	Dar clic en el botón y detenerme donde me diga el entrevistador
		Exacto. Entonces vamos a hacer eso, dale clic y vamos a detenernos en alguna. (...)(...) hazlo despacio (...) Vamos a detenernos ahí.
5	Entrevistador:	
6	Fernanda:	Voy a replicarlo (...) Listo.
7	Entrevistador:	Ahora yo te pregunto, ¿esa figura es un cuadrilátero?
8	Fernanda:	No
9	Entrevistador:	¿Por qué no?
10	Fernanda:	Porque no tiene los cuatro puntos.
11	Entrevistador:	¿Esa es la única forma para saber si es un cuadrilátero? O ¿existirá otra?
12	Fernanda:	Si, porque (...) tiene una forma específica. O sea, digamos, eso es un círculo ¿sí?; pero como no tiene los cuatro puntos entonces es como no sé, como, es otra forma, pues para mí es otra forma.
13	Entrevistador:	¿Y un círculo no puede ser un cuadrilátero?
14	Fernanda:	Sí
15	Entrevistador:	¿Si puede serlo?
16	Fernanda:	Si, pero si los puntos deben estar más, ordenados.

		<p>Bien, oprime de nuevo el botón, pero hazlo despacio. (...) Ahí. ¿Para ti es un cuadrilátero?</p> 
17	Entrevistador:	
18	Fernanda:	Si
19	Entrevistador:	¿Por qué lo piensas?
20	Fernanda:	Porque tiene las líneas rectas, cuatro puntos, que también eh, son cuatro puntos y que su forma es un cuadrilátero.
21	Entrevistador:	¿Cuáles son los cuatro puntos? Señálamelos
22	Fernanda:	Estos (señala con su dedo cada punto)
23	Entrevistador:	¿Y las cuatro líneas cuáles son?
24	Fernanda:	Estas (señala con su dedo cada segmento)
25	Entrevistador:	¿Esas características te dicen a ti que es un cuadrilátero?
26	Fernanda:	Sí.
27	Entrevistador:	¿Estas segura totalmente? O ¿tiene otra forma que tú puedas identificar?
28	Fernanda:	Es un cuadrilátero, pero tiene otra forma distinta.
29	Entrevistador:	¿Forma distinta cómo?
30	Fernanda:	O sea, que si lo coloco en esa posición (gira su cabeza hacia la derecha) parece un cuadro, pero si me quedo derecha tiene otra forma.
31	Entrevistador:	O sea que lo que intentas decir, es que no tiene la forma común de ver un cuadrilátero.
32	Fernanda:	Ujum
		<p>Volvamos a dar clic en el botón de nuevo. (...) eso es (...). Quiero que te detengas ahí, te repito la pregunta. ¿Tu consideras que es un cuadrilátero?</p> 
33	Entrevistador:	
34	Fernanda:	Sí.
35	Entrevistador:	¿Si es un cuadrilátero?
36	Fernanda:	Sí

37	Entrevistador:	Dime ¿por qué lo piensas?
38	Fernanda:	Porque tiene cuatro puntos, estas rayitas rectas, ehh, es una forma distinta, ehh, digo ¿sí o no?
39	Entrevistador:	Lo que tu pienses.
40	Fernanda:	Digo sí sí. Porque tiene cuatro puntos y cuatro rayas. Y no porque es una forma distinta.
41	Entrevistador:	Pero a ver dices que sí, pero a la vez dices que no porque tiene una forma distinta. ¿a qué te refieres con forma distinta?
42	Fernanda:	O sea, digamos, es diferente a un cuadrado o un rectángulo.
43	Entrevistador:	Pero si tú dices que una forma distinta a estas no es cuadrilátero. ¿la figura anterior es un cuadrilátero?
44	Fernanda:	Si
45	Entrevistador:	¿O sea que ambas no son cuadriláteros?
46	Fernanda:	Si, porque tienen los mismos puntos con diferentes letras y las rayas son derechas y tienen cuatro rayas.
47	Entrevistador:	Listo. Pero, en el anterior dijiste lo mismo y mencionaste que si era un cuadrilátero. En este caso dices que las mismas cuatro rayas con los mismos cuatro puntos. ¿qué te hace pensar que no es un cuadrilátero?
48	Fernanda:	Hay no sé, lo que yo pienso, es que si puede ser un cuadrilátero porque aquí veo un triángulo y aquí otro. Y se puede comparar con la figura anterior porque pues, tienen digamos, la figura anterior también tiene triángulos, entonces se puede decir que son lo mismo.
49	Entrevistador:	¿La figura anterior tenía triángulos?
50	Fernanda:	Sí
51	Entrevistador:	Miremos
52	Fernanda:	(...)
53	Entrevistador:	¿Dónde ves tú los triángulos?[17]
54	Fernanda:	Aquí hay uno y aquí hay otro (recorre su dedo en el cuadrilátero)
55	Entrevistador:	Pero ¿Por qué son triángulos?
56	Fernanda:	Porque si aquí colocara una raya (diagonal del cuadrilátero) se forman dos triángulos
57	Entrevistador:	Pero si hubiese la raya. Pero no está. Entonces, ¿Qué puedes decir?
58	Fernanda:	Que es un triángulo (...) normal.
59	Entrevistador:	¿A qué te refieres con un triángulo normal?
60	Fernanda:	O sea, este triángulo. (señala la pantalla)
61	Entrevistador:	¿Aquí reconoces u triángulos?
62	Fernanda:	Sí, hay dos.
63	Entrevistador:	Entonces, si tu reconoces que ahí hay dos triángulos, ¿esa misma figura puede ser un cuadrilátero?
64	Fernanda:	Sí
65	Entrevistador:	¿Un triángulo puede ser un cuadrado según tú?
66	Fernanda:	No
67	Entrevistador:	Pero entonces, ¿esta figura sería o no un cuadrilátero?
68	Fernanda:	Si, es un cuadrilátero.
69	Entrevistador:	¿Por qué?

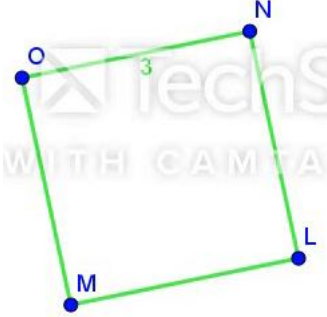
70	Fernanda:	Los mismos puntos y las mismas rayas
71	Entrevistador:	¿Y la anterior?
72	Fernanda:	También lo es
73	Entrevistador:	¿Estas figuras son similares?
74	Fernanda:	No, porque esta [17] es más abierta que esta [33]
75	Entrevistador:	¿qué más puedes ver ahí?
76	Fernanda:	(...) mmmmm tienen las mismas letras.
77	Entrevistador:	Pero no te fijes en eso, eso es solo el nombre. Yo quiero retomar la idea de los triángulos, tu dijiste que hay dos triángulos. ¿Cómo fue que dijiste?
78	Fernanda:	Este es el triángulo, pero muy chiquito y este es como grande [triángulos formados en el cuadrilátero]
79	Entrevistador:	Ok, ¿y en la figura anterior ves los mismos triángulos?
80	Fernanda:	No, porque es diferente la figura
81	Entrevistador:	Exacto, es distinta. Yo te pregunto de nuevo ¿cómo podríamos clasificar esta figura? ¿podrías decir que esta figura [17] es parecida a esta [33]?
82	Fernanda:	No
83	Entrevistador:	Cierto, como no son parecidas, ¿tú que habías dicho sobre esta [17]? ¿es o no cuadrilátero?
84	Fernanda:	Que si era
85	Entrevistador:	¿y esta? [33]
86	Fernanda:	También
87	Entrevistador:	Tú dices que ambas son cuadriláteros
88	Fernanda:	Si
89	Entrevistador:	¿Por qué ... (interrumpido por Fernanda)
90	Fernanda:	Es que si digamos lo tuviera aquí y no aquí (desplaza el punto E hasta formar un cuadrado) sería un cuadrado
91	Entrevistador:	(...)Ok, repítame lo que dices
92	Fernanda:	Si muevo este punto E se formaría un cuadrilátero
93	Entrevistador:	Bueno lo que dices es que si mueves ese punto [E] se formaría un cuadrilátero
94	Fernanda:	Si
95	Entrevistador:	Pero si sigue ahí, ¿ya no sería un cuadrilátero?
96	Fernanda:	Si, sí, porque hay dos (...) digamos, digamos, como te dije al principio habían dos triángulos en otra forma sería como digamos que por aquí hay un nudo [intersección BC y ED] (...) es como si fuera un caimán ¿si me hago entender?
97	Entrevistador:	Ok ya le veo la forma. Entonces para ti, en resumen, dos triángulos para ti unidos y esta otra forma para ti son cuadriláteros ¿por qué?
98	Fernanda:	Porque tienen los mismos puntos, la misma numeración de puntos y rayas. Y si digamos si la figura tuviera este punto aquí también sería un cuadrilátero.

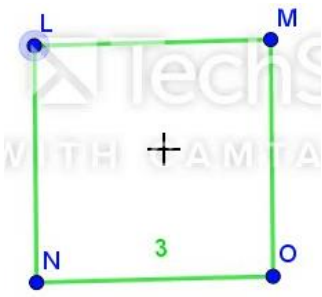
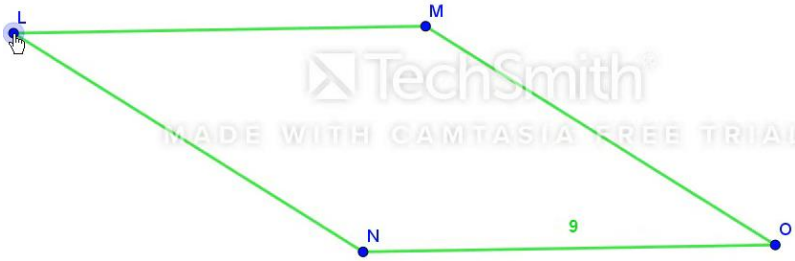
		Vamos a continuar dando clic (...) ¡Ahí! ¿Qué identificas de la figura?
99	Entrevistador:	
100	Fernanda:	Aquí hay un triángulo (recorre su dedo desde E hasta C, pasando por B); y acá como que forma un círculo (recorre su dedo sobre la semicircunferencia)
101	Entrevistador:	Viéndola y reconociendo eso que tu dijiste, ¿es un cuadrilátero o no?
102	Fernanda:	Si, (cuenta puntos)
103	Entrevistador:	¿Por qué?
104	Fernanda:	Tiene la misma función, digamos tiene los cuatro puntos y la misma numeración de rayas
105	Entrevistador:	Muéstrame los puntos
106	Fernanda:	Uno, dos, tres y cuatro (contando puntos en voz alta)
107	Entrevistador:	¿Y las líneas?
108	Fernanda:	Uno, dos, tres y cuatro (contando segmentos en voz alta)
109	Entrevistador:	Hace un rato dijiste que esta (señalando semí circunferencia) tenía forma de círculo, ¿entonces una circunferencia también podría ser un cuadrilátero?
110	Fernanda:	No
111	Entrevistador:	O sea que una circunferencia no, pero este si
112	Fernanda:	Si
113	Entrevistador:	¿Por qué?
114	Fernanda:	Porque una circunferencia no tiene los cuatro puntos y no tiene la misma numeración de rayas, en este caso sí.
115	Entrevistador:	Listo, entonces tú dices que para cualquier cuadrilátero siempre debe tener cuatro puntos y cuatro rayas ¿sí? ¿no importa que sean curvas?
116	Fernanda:	No
117	Entrevistador:	¿Por qué no importa que sean curvas?
118	Fernanda:	Pues yo creo que esta curva [semi circunferencia] es la base del triángulo
119	Entrevistador:	Yo no entiendo cuando dices que es la base de un triángulo

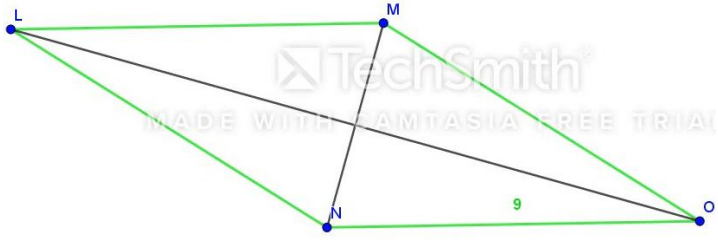
120	Fernanda:	(...) o sea, digamos, imaginariamente habría un círculo ¿sí? Entonces el triángulo está más, alto.
121	Entrevistador:	Listo. ¿Cómo haces tú un triángulo?
122	Fernanda:	Así. (dibuja un triángulo cualquiera en una hoja)
123	Entrevistador:	¿Cómo hiciste las líneas del triángulo?
124	Fernanda:	(...) Rectas
125	Entrevistador:	Rectas ¿cierto? ¿Por qué no hiciste lados curvos?
126	Fernanda:	Porque un triángulo no es así
127	Entrevistador:	Si un triángulo no tiene curvas ¿Por qué dices que la figura es un triángulo?
128	Fernanda:	Porque hay dos
129	Entrevistador:	¿Pero todos los lados son rectos?
130	Fernanda:	No todos
131	Entrevistador:	¿Cuál no?
132	Fernanda:	El que está aquí (recorre su dedo sobre la curva)
133	Entrevistador:	Listo, entonces que ese lado no sea recto ¿qué condicionaría de la figura? ¿podríamos decir que la figura es un cuadrilátero con ese lado curvo?
134	Fernanda:	No y si
135	Entrevistador:	¿Por qué?
136	Fernanda:	Si porque digamos para mí, digamos este punto [E] estuviera más abajo y este más a la derecha [C] y si la línea estuviera más recta formaría un cuadrilátero
137	Entrevistador:	Ahh, ok. Pero entonces, lo que tu tratas de decirme es que esa figura se puede convertir en un cuadrilátero, pero que no lo es.
138	Fernanda:	Eso es
139	Entrevistador:	¿Es correcto lo que estoy diciendo?
140	Fernanda:	Si señor
141	Entrevistador:	Ya entiendo tu idea, que para que esta figura sea cuadrilátero debe tener unas condiciones
142	Fernanda:	Si
143	Entrevistador:	Dime por favor entonces las condiciones para un cuadrilátero.
144	Fernanda:	Digamos, si este punto está aquí arriba [C] sería un cuadrilátero
145	Entrevistador:	Ok, ¿y qué más? ¿sólo moviendo ese punto?
146	Fernanda:	Este [D]
147	Entrevistador:	¿Este punto también moviéndolo?
148	Fernanda:	Que quede, así como un cuadrado
149	Entrevistador:	¿Nada más?
150	Fernanda:	Debe tener cuatro puntos. Uno aquí, otro acá y los otros dos abajo (señala lugares donde deben estar los puntos para un cuadrilátero como si fuera un rectángulo) cuatro rayas que siempre sean rectas
151	Entrevistador:	Bien, y ¿qué harías con este punto C?
152	Fernanda:	Lo pusiera aquí arriba para formar un cuadrado (mueve su dedo hacia el lugar donde desplazaría el punto)
153	Entrevistador:	Y qué harías con este lado ED

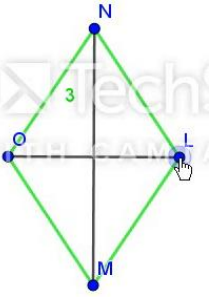
154	Fernanda:	Lo dejaría ahí
155	Entrevistador:	¿Lo dejarías curvo?
156	Fernanda:	(...) Lo volvería recto
157	Entrevistador:	Entonces, vamos a buscar la última figura para analizar (...) Listo. Esa es parecida a una anterior, ¿tú piensas que es cuadrilátero?
158	Fernanda:	Sí
159	Entrevistador:	¿Por qué lo piensas?
160	Fernanda:	Si se mueve el punto E para abajo se formaría un rectángulo
161	Entrevistador:	Pero tu estas diciendo que la figura debe tener modificaciones para que sea cuadrilátero ¿sí?
162	Fernanda:	Si
163	Entrevistador:	O sea que, ¿si sería cuadrilátero o no sería cuadrilátero?
164	Fernanda:	Si sería cuadrilátero
165	Entrevistador:	Entonces, ¿Por qué dices que debe modificarse para que sea cuadrilátero?
166	Fernanda:	(...)(...) Si es.
167	Entrevistador:	¿Por qué?
168	Fernanda:	Porque tiene los cuatro puntos y las cuatro rayas.

Anexo 7. Transcripción Tarea 2 Sarah

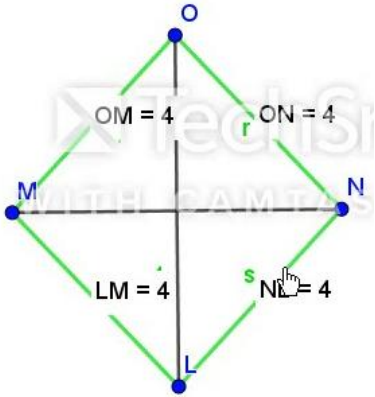
1	Entrevistador:	<p>Quiero que miremos la figura que tenemos en pantalla, esta es otra aplicación, recuerda que esta es la tarea dos. Ahora yo te pregunto ¿es un cuadrilátero?</p> 
2	Sarah:	Si
3	Entrevistador:	¿Por qué?
4	Sarah:	Porque tiene los cuatro puntos y las cuatro rayas.
5	Entrevistador:	Bien, ahora la cuestión va a hacer, que vamos a manipular el programa. Y lo primero va a ser buscar es el punto que permite mover la figura.
6	Sarah:	Es este (Señalando punto L)
7	Entrevistador:	Ahora vamos a hacer el siguiente ejercicio, déjalo en la forma que tú quieras.
8	Sarah:	¿La que yo quiera?
9	Entrevistador:	Si
10	Sarah:	Listo. (ubica un cuadrado)

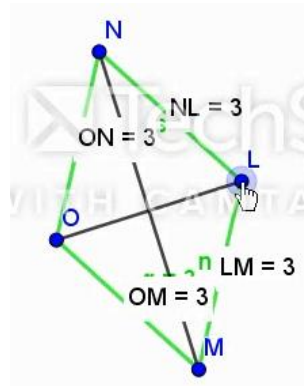
		
11	Entrevistador:	¿Por qué elegiste esa forma?
12	Sarah:	Porque pues, digamos a lo debido tiene pues, es cuadrilátero. Obviamente si yo muevo un punto cualquiera tiene los mismos cuatro puntos y las mismas cuatro rayas. [Congruencia del rombo]
13	Entrevistador:	Listo, y esa forma de ponerlo así ¿por qué?
14	Sarah:	Porque me parece algo más fácil
15	Entrevistador:	Ok, ¿la reconoces mejor?
16	Sarah:	Si
17	Entrevistador:	<p>El ejercicio que vamos a hacer es, coger ese punto L y mover a la izquierda hasta donde más puedas a ver qué sucede, pero manteniéndolo en la misma posición línea que estaba ahora síguelo moviendo y moviendo (...) ¿Qué forma tiene?</p> 
18	Sarah:	Como (...)
19	Entrevistador:	¿Con qué forma lo podrías comparar?
20	Sarah:	Dos triángulos. Este así y este así (Mueve sus dedos trazando las diagonales del rombo)
21	Entrevistador:	Entonces quiero que por favor con las herramientas que ya conoces, me muestres esos triángulos, ¿listo?
22	Sarah:	¿Así? (Señala con el cursor los segmentos)
23	Entrevistador:	Ahí me los estas señalando, pero yo quiero que los hagas en el programa, ¿cómo lo harías? ¿Con qué herramienta?
24	Sarah:	Bueno (Traza diagonal \overline{MO})
25	Entrevistador:	¿Esa figura inicial que dejo de ser, tú me decías que era un qué?
26	Sarah:	Un cuadrado
27	Entrevistador:	Ahora, ese cuadrado dejo de ser cuadrado, y ¿cuándo lo parto por la mitad se convierte en qué?
28	Sarah:	En dos figuras distintas
29	Entrevistador:	¿Qué son?
30	Sarah:	Triángulos
31	Entrevistador:	Tu dijiste que había dos triángulos así (señalando los que se ven en pantalla) y otros, ¿cuáles?

32	Sarah:	Bueno, la primera era así, otros pueden ser de aquí a aquí (Recorre su dedo desde L hasta O)
33	Entrevistador:	Quiero verlo
34	Sarah:	¡Listo! (construye \overline{LO}) 
35	Entrevistador:	Esos segmentos de color negro que acabas de hacer tú, ¿se cruzan en algún momento?
36	Sarah:	Sí
37	Entrevistador:	¿Dónde se cruzan?
38	Sarah:	En el centro, aquí (señala la intersección de las diagonales)
39	Entrevistador:	¿Cuándo me dices en la mitad te refieres a la mitad de quién? De MN o de LO
40	Sarah:	De los dos, en la mitad de los dos.
41	Entrevistador:	¿Por qué en la mitad de los dos?
42	Sarah:	Porque ahí es la intersección que se une (...) un punto. ¿Sí? Es la intersección, que une varios puntos.
43	Entrevistador:	Pero si es intersección habría solo un punto ¿no?
44	Sarah:	Si
45	Entrevistador:	Ósea, ¿es la intersección entre dos qué?
46	Sarah:	Puntos.
47	Entrevistador:	No, porque los puntos están quietos, ¿los que forman la intersección son quienes?
48	Sarah:	LO y MN
49	Entrevistador:	¿Los segmentos?
50	Sarah:	Sí
51	Entrevistador:	Listo perfecto. Entonces, ¿con qué forma podrías tú, (...) relacionar la figura que formaste si quito los segmentos verdes?
52	Sarah:	Como un "más"
53	Entrevistador:	Ahora lo que vas a hacer es devolver el punto L donde estaba inicialmente ¿hasta formar un?
54	Sarah:	Cuadrado
55	Entrevistador:	Listo, ¿qué pasa con ese cuadrado?
56	Sarah:	Son iguales los triángulos
57	Entrevistador:	Ok, entonces son iguales los triángulos. ¿y los de la otra forma?
58	Sarah:	También
59	Entrevistador:	Ahora quiero que la letra L la acerques a la M; ¡perdón! acercarla a la letra O. ¿Tiene forma de cuadrado?
60	Sarah:	No, porque los puntos están quietos.
61	Entrevistador:	¿Qué pasa con la parte interna que tu construiste?

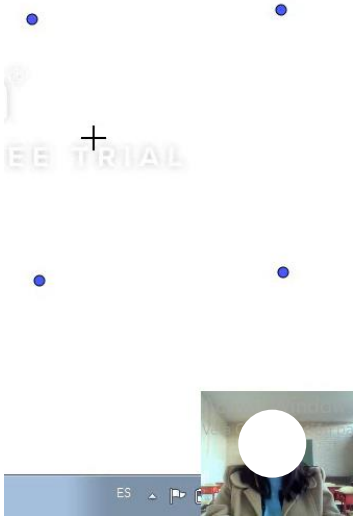
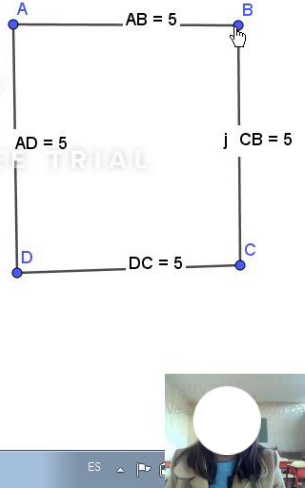
62	Sarah:	Se disminuyó
63	Entrevistador:	Bien es más pequeño. ¿y la figura?
64	Sarah:	Cambia
65	Entrevistador:	¿Ya no es ese "más" que tu dijiste? ¿Qué sería entonces?
66	Sarah:	No, también es un más.
67	Entrevistador:	<p>Ahora mueve la L hasta este lugar (señalar punto en la pantalla para que quede un cuadrado con vértice hacia abajo). Dime, ¿tiene forma de cuadrado?</p> 
68	Sarah:	Sí
69	Entrevistador:	¿Por qué?
70	Sarah:	Es como ver un cuadrado acostado, ¿si me hago entender? Es decir, aquí hay un cuadrado y aquí también
71	Entrevistador:	Es decir, ¿qué no importa la posición?
72	Sarah:	Aja
73	Entrevistador:	Ahora lleva a L hasta la parte inferior de la pantalla
74	Sarah:	¿Aquí?
75	Entrevistador:	Sí. ¿Se sigue manteniendo esa misma (...) misma (...) forma?
76	Sarah:	Sí
77	Entrevistador:	Ósea que en cualquier lugar que yo mueva el punto, ¿la forma de "más" es la misma?
78	Sarah:	Sí, pero a veces no es la misma porque a veces te va a quedar grande o chiquito
79	Entrevistador:	Sí, entiendo eso. Pero el "más" ¿en algún momento cambia? Es decir, ¿deja de tener esa forma?
80	Sarah:	Sí
81	Entrevistador:	¿En qué momento cambia?
82	Sarah:	En la intersección de los segmentos
83	Entrevistador:	Déjame ver
84	Sarah:	También puede ser una "x"
85	Entrevistador:	¿Una "x"? Pero serian dos formas de ver lo mismo
86	Sarah:	Bueno si
87	Entrevistador:	Entonces ahora, acomoda la figura en la posición que quieras. El propósito de hoy es encontrar dos características de este cuadrilátero que tenemos aquí, ya encontraste una y es que la "x" o "más" nunca cambia sino de tamaño.
88	Sarah:	¿Qué más podrías buscar utilizando las herramientas del programa? ¿Qué herramientas encuentras arriba?

89	Entrevistador:	Una de ángulos (...)
90	Sarah:	¿Esta figura tiene ángulos?
91	Entrevistador:	Sí, tiene un ángulo (señalando un vértice del cuadrilátero)
92	Sarah:	Muéstrame, señálame con el mouse
93	Entrevistador:	Aquí digamos hay un ángulo (señala con el mouse desde el punto N hasta L recorriendo las diagonales formando uno de los ángulos de 90° de la intersección de las diagonales)
94	Sarah:	¿Ese ángulo que representa para ti?
95	Entrevistador:	Pues es que, parece que los puntos siempre esta como estáticos, ósea como si no se fueran a mover de ahí, pero si lo mueves se mueve de distinta forma.
96	Sarah:	¿Pero qué pasa con el ángulo? ¿cambia? O ¿es el mismo?
97	Entrevistador:	Cambia, ósea digamos si es el de arriba como que se abre [se refiere a la distancia de las diagonales]
98	Sarah:	Estas confundiendo lo que es un ángulo, te entiendo como la distancia a lo que te refieres. ¿Señálame cuando cambia el ángulo?
99	Entrevistador:	Aquí (mueve la figura hasta obtener una diagonal más pequeña que otra)
100	Sarah:	No, de lo que estás hablando es de la distancia o longitud
101	Entrevistador:	Pero bueno, me dices que cambian las distancias [diagonales], pero ¿todas [los lados del cuadrilátero] cambian?
102	Sarah:	Sí, cambian también
103	Entrevistador:	y, ¿cómo podríamos medirlo?
104	Sarah:	Si lo quieres pequeños lo mueves de esta forma y si lo quieres más grande de esta (agranda y disminuye el tamaño del rombo)
105	Entrevistador:	Pero ¿todos miden lo mismo o miden distinto?
106	Sarah:	Todos tienen que medir lo mismo
107	Entrevistador:	¿Por qué?
108	Sarah:	De este punto a este punto [] miden lo mismo y de este a este [] también pues los otros van a medir los otros. * revisar otro video para saber los puntos
109	Entrevistador:	Entonces, ¿tienen que obligatoriamente medir lo mismo? ¿por qué?
110	Sarah:	Porque tienen la misma distancia
111	Entrevistador:	¿Qué tal que un segmento mida por ejemplo 3 y el otro 5? ¿Será posible?
112	Sarah:	Para mí sí. Se que tienen digamos, diferentes espacios, si me hago entender
113	Entrevistador:	¿Qué pasaría con la figura si las distancias de los segmentos midieran diferente?
114	Sarah:	(...) me podría cambiar la figura
115	Entrevistador:	¿ya no sería la misma?
116	Sarah:	Sí
117	Entrevistador:	Entonces, ¿cómo hacemos para saber si miden lo mismo o no?
118	Sarah:	Pues lo que yo veo es que estas líneas [NO y NL] son más pequeñas que estas [MO y ML]
119	Entrevistador:	¿Cómo lo puedes asegurar?
120	Sarah:	mmmm (...) no sé cómo decirlo

121	Entrevistador:	Acuérdate de utilizar las herramientas del programa
122	Sarah:	¿Está de medir distancias necesita dar clic en dónde?
123	Entrevistador:	En dos puntos distintos
124	Sarah:	Ok, (mide cada lado del cuadrilátero) 
125	Entrevistador:	Ahora, ¿cuánto mide cada lado?
126	Sarah:	Cuatro, Cuatro; este [lado del cuadrilátero] mide cuatro, este también mide cuatro, este de L a N también mide cuatro y entre estos dos puntos [ML] también mide cuatro
127	Entrevistador:	Bien, mueve la L a ver qué sucede
128	Sarah:	Listo
129	Entrevistador:	Bien, eso tiene forma de cuadrado
130	Sarah:	?
131	Entrevistador:	¿Qué pasa con las medidas de los lados?
132	Sarah:	Se agrandan
133	Entrevistador:	¿Algo más?
134	Sarah:	Todos se agrandan
135	Entrevistador:	Y aparte de que se agrandan, ¿encuentras algo curioso o que te llame la atención?
136	Sarah:	Que los espacios digamos, que los espacios que cada triangulo tiene, es más (...) es más la distancia que cada uno tiene cuando la figura es reducida
137	Entrevistador:	Listo, entonces ahora quiero que me digas que condiciones debe tener el cuadrilátero para que exista A parte de las condiciones que ya conoces de los cuatro puntos y los cuatro segmentos ¿qué le agregarías?
138	Sarah:	Cuando se achiquita tiene menor cantidad y cuando se agranda tiene mayor cantidad
139	Entrevistador:	Pero ¿eso sería de cualquier cuadrilátero no? Yo lo puedo agrandar y tiene más espacio
140	Sarah:	Bueno sí
141	Entrevistador:	Entonces, ¿qué le agregarías a ese cuadrilátero?
142	Sarah:	No sé. (mueve el cuadrilátero haciéndolo más pequeño)
143	Entrevistador:	Ese cuadrilátero que está en pantalla ¿qué características tiene?



144	Sarah:	Todos miden lo mismo
145	Entrevistador:	¿“Todos” qué?
146	Sarah:	Ósea, todos las, los segmentos miden lo mismo
147	Entrevistador:	Eso (...) que tu mencionas, ¿sucede solo cuando está pequeño [el cuadrilátero]? o ¿también cuando está grande?
148	Sarah:	Cuando esta pequeño y también cuando esta grande
149	Entrevistador:	¿Qué quiere decir eso?
150	Sarah:	Que es un cuadrilátero
151	Entrevistador:	Pero es un cuadrilátero diferente ¿cierto?, es un cuadrilátero especial
152	Sarah:	Si
153	Entrevistador:	Ahora dime ¿qué otra característica le agregarías [al cuadrilátero]?
154	Sarah:	Lo que encontré que, a pesar de que las rayas, ósea que como yo dije anteriormente que son cuatro rayas también se puede decir que tiene cuatro rayas, pero en versión "x"
155	Entrevistador:	Te entiendo que ese cuadrilátero tiene otras dos rayas, pero tú dices algo más
156	Sarah:	Que se, que en este punto (señala intersecciones diagonales) se hace la, como se llama, (...) la interacción.
157	Entrevistador:	¿Cómo así?
158	Sarah:	Si, que ahí se unen los puntos
159	Entrevistador:	¿Los puntos o los segmentos?
160	Sarah:	Los segmentos
161	Entrevistador:	Ok, ¿en ese momento se unen cierto?
162	Sarah:	y, ¿qué pasa con esa unión?
163	Entrevistador:	Que tiene diferente forma
164	Sarah:	Ok. ¿Y qué pasa si yo quito uno de esos segmentos? ¿Qué quedaría?
165	Entrevistador:	Quedaría otra figura
166	Sarah:	¿Qué figura? ¡Eso ya lo dijiste!
167	Entrevistador:	Un cuadrado
168	Sarah:	Bueno, tú ya encontraste esas características, ahora quiero que me cuentes como podrías construir un cuadrilátero con esas mismas características ¿sí? ¿Qué harías? Quiero que me digas un paso a paso, ¿primero que harías?
169	Entrevistador:	Primero ubicaría los cuatro puntos para que pueda formar un cuadrilátero (ubica los cuatro puntos del cuadrilátero de forma tal, que cada tres

		<p>puntos no sean colineales)</p> 
170	Sarah:	¿Segundo qué haces?
171	Entrevistador:	Formar los segmentos (hace los segmentos correspondientes)
172	Sarah:	¿Qué otra cosa fue la que mencionaste?
173	Entrevistador:	<p>La medida de los segmentos</p> 
174	Sarah:	Entonces mídelos
175	Entrevistador:	Listo
176	Sarah:	Bien, ¿miden lo mismo?
177	Entrevistador:	Sí, tienen igual medida
178	Sarah:	¿Qué otra característica necesitas?
179	Entrevistador:	(...)(...)
180	Sarah:	¿Algo más qué le falte?
181	Entrevistador:	Yo digo que ya
182	Sarah:	Entonces ahora, en conclusión, ¿dime las características de este cuadrilátero?
183	Entrevistador:	Que tiene la misma medida, los mismos puntos y las mismas rayas, ósea es diferente la figura cuando tú puedes mover un punto hacia cualquier punto que tú quieras.

184	Sarah:	Cuándo dices que tiene igual medida, ¿qué tiene igual medida?
185	Entrevistador:	Los espacios
186	Sarah:	¿Cuáles espacios?
187	Entrevistador:	Estos espacios (mueve cursor sobre lados)
188	Sarah:	¿Estás hablando de los lados?
189	Entrevistador:	Sí, tienen igual medida
190	Sarah:	¿Qué más encontraste?
191	Entrevistador:	Que tiene diferentes formas y que también cambian. Una es la "x" y (...) ¡triángulos!
192	Sarah:	Listo, ¿qué pasa con esos triángulos? ¿Tienen algo que ver en ese cuadrilátero?
193	Entrevistador:	Sí, se unen para formar un cuadrilátero
194	Sarah:	Bien, quiero que el punto L lo acerques al punto O, pero solo un poco
195	Entrevistador:	Así (mueve el punto L hacia O)
196	Sarah:	¿Qué pasa con esos triángulos?
197	Entrevistador:	Se reducen, ósea disminuye también la cantidad, todo depende de la figura
198	Sarah:	¿Y los triángulos son parecidos?
199	Entrevistador:	Si, claro
200	Sarah:	Y si se parecen, ¿qué implicación tendría?
201	Entrevistador:	(...)
202	Sarah:	Tu hablaste hace un rato de ángulos, ¿a qué te referías con eso?
203	Entrevistador:	Qué pues digamos puedo tomar de un punto a otro y digamos, que en la mitad donde se unen los segmentos [intersección de las diagonales] puede tener un ángulo. Digamos aquí hay uno (señala la intersección de las diagonales)
204	Sarah:	¿Cuánto crees que pueda medir ese ángulo?
205	Entrevistador:	(...) (...) No sé, como noventa yo creería
206	Sarah:	¿Noventa?
207	Entrevistador:	Sí
208	Sarah:	¿Por qué crees que mide noventa?
209	Entrevistador:	(...) Ehhhh
210	Sarah:	Pero fíjate que tú dices que hay otras características más de este cuadrilátero
211	Entrevistador:	Si, el ángulo de noventa grados
212	Sarah:	Y, ¿habría forma de medir ese ángulo en el programa?
213	Entrevistador:	Si, con esta herramienta (señala herramienta de GeoGebra para medir ángulos)
214	Sarah:	Muéstrame como la medirías
215	Entrevistador:	Así. (usa la herramienta para medir ángulos midiendo el ángulo NLM)
216	Sarah:	Pero ¿qué ángulo mediste?
217	Entrevistador:	Aquí hay uno (mide el \angle NLM con dicha herramienta), aquí hay otro (señalando punto N)

218	Sarah:	Si bien, ¿pero cuál es el que te interesa medir?
219	Entrevistador:	Todos (mide ángulo opuesto)
220	Sarah:	Bueno, ya que mediste ese ángulo dime ¿qué medida tienen los dos?
221	Entrevistador:	Igual, este mide 73 grados y este también
222	Sarah:	Mira que acabas de descubrir más cosas, entonces en conclusión ¿qué características tiene "ese" cuadrilátero?
223	Entrevistador:	Que los ángulos tienen la misma medida este y este [ángulos opuestos], son de 73 [grados]
224	Sarah:	¿Y esos son ángulos qué?
225	Entrevistador:	Son 73
226	Sarah:	Sí, esa es la medida, ¿pero y los otros será que miden lo mismo?
227	Entrevistador:	No sé. (mueve el cuadrilátero haciéndolo más pequeño)
228	Sarah:	Vamos a medirlo. (Mide el ángulo LMO)
229	Entrevistador:	¿Cuánto mide?
230	Sarah:	108 grados (Mide el $\angle LMO$).
231	Entrevistador:	Entonces, ¿Cuál crees que sea la medida del ángulo que falta?
232	Sarah:	108 grados
233	Entrevistador:	¿Por qué?
234	Sarah:	<p>Si este [NLM] mide menos que este [LMO], entonces este [MON] mide lo mismo que este [NLM]</p>
235	Entrevistador:	Ya para cerrar entonces, ¿qué características tiene este cuadrilátero?
236	Sarah:	Primero tener 4 puntos y 4 segmentos
237	Entrevistador:	Además de eso, ¿qué pasa con esos segmentos?

238	Sarah:	Qué miden lo mismo
239	Entrevistador:	¿Qué más descubriste?
240	Sarah:	Los ángulos
241	Entrevistador:	¿Qué pasa con los ángulos?
242	Sarah:	Qué tienen diferentes medidas, pero a la vez iguales. Que estos [ángulos opuestos] miden igual
243	Entrevistador:	¿Eso pasa también con los ángulos que están seguidos? ¿Qué más características encontraste?
244	Sarah:	Que los segmentos de adentro [diagonales] se unen
245	Entrevistador:	¿Y qué pasa en esa unión?
246	Sarah:	(...) (...) Ahhh, se formaba un ángulo de 90 grados.

Anexo 8. Transcripción Tarea 3 Sarah

1	Entrevistador:	¡Tenemos los dos colores, azul y rojo listo! Entonces antes de empezar a resolver ¿Qué diferencia notas?
2	Sarah:	Aparte del color, tiene estas cositas [extremos de los palos]
3	Entrevistador:	Y entre una azul y una roja ¿qué diferencia notas?
4	Sarah:	Qué, como que no no, (...) no se como decir, el color y la forma. Porque mira las azules son más largas que las rojas.
5	Entrevistador:	Ok, esa es la diferencia que encuentras. Ahora, lo que vamos a hacer es a tomar cuatro rojas, las que tu quieras y vas a formar un cuadrilátero, pues uniendo sus extremos.
6	Sarah:	Listo
7	Entrevistador:	¿Qué figura encuentras?
8	Sarah:	Un cuadrado.
9	Entrevistador:	Bien, vamos a nombrarla, ¿Por qué la llamas cuadrado?
10	Sarah:	Porque tiene los cuatro palitos (toca los lados del segmento)
11	Entrevistador:	Ahora toma cuatro piezas azules y forma el cuadrilátero.
12	Sarah:	¿Ahí? (forma un cuadrilátero diferente del rombo)
13	Entrevistador:	Sí, quiero que te detengas un momento. Ahora vamos a comparar la roja y la azul, ¿la figura azul qué es?
14	Sarah:	Parece un rombo
15	Entrevistador:	Ok y ¿esta que parece?
16	Sarah:	Un cuadro
17	Entrevistador:	¿Por qué dices que esta tiene forma de rombo?, ¿qué entiendes por rombo?
18	Sarah:	Porque tiene cuatro puntos (señala los vértices del cuadrilátero)
19	Entrevistador:	¿y cuántos puntos tiene esta [cuadrilátero rojo]?
20	Sarah:	Entonces, hasta el momento no hay diferencia.
21	Entrevistador:	¿Qué más encuentras?
22	Sarah:	Que tienen diferente color y que uno es más grande que el otro.
23	Entrevistador:	Listo ...
24	Sarah:	Porque por ejemplo esta figura que tengo aquí [cuadrilátero rojo] quedan espacios aquí y aquí [vértices de la figura], en esta también pero en otra dirección.
25	Entrevistador:	¿Dónde notas eso que llamas dirección?

26	Sarah:	Porque, por ejemplo, si esto fuera así (mueve el cuadrilátero azul hasta formar un cuadrado) sería un cuadrado igual que este [cuadrilátero rojo], pero si es así (retorna el cuadrilátero azul a la posición original) es un cambio de dirección.
27	Entrevistador:	Ok, ok. A ver si te entiendo, ese cambio de dirección es como esta forma (señala ángulo interno)
28	Sarah:	Si señor.
29	Entrevistador:	Eso (...)¿Cómo lo describes?
30	Sarah:	emmmm (...) qué estan más pequeñas
31	Entrevistador:	¿Qué estan más pequeñas?
32	Sarah:	El rombo
33	Entrevistador:	Si, pero ¿qué esta más pequeño en el rombo?
34	Sarah:	¿qué es más pequeño?
35	Entrevistador:	Si
36	Sarah:	Esta parte [ángulos del cuadrilátero azul]
37	Entrevistador:	Ok, estas hablando de las cuatro "zonas"[ángulos]
38	Sarah:	Sí
39	Entrevistador:	Pero, ¿en los cuatro lugares [ángulos] es más pequeño que en la otra figura?
40	Sarah:	Si porque aquí puedes meter el dedo
41	Entrevistador:	No, pero no te fijas en la forma de las fichas, fijate en las figuras como tal. Te pregunto ¿qué debo hacer para que la figura azul sea un cuadrado?
42	Sarah:	Cambiandolo de forma (lo convierte en un rombo)
43	Entrevistador:	Bien, y aquí cuando lo giro (Gira cuadrado rojo 45° aproximadamente) ¿sigue siendo cuadrado?
44	Sarah:	Es un rombo también
45	Entrevistador:	Y de esta manera (transformar cuadrilatero en un rombo diferente al cuadrado) ¿qué estoy haciendo?
46	Sarah:	Ehhh (...) que estas cambiando su dirección.
47	Entrevistador:	Señalame
48	Sarah:	Como que (...) osea este estaba recto (señala uno de los segmentos)
49	Entrevistador:	¿Cómo así recto? Porque el palo siempre ha sido recto o ¿se curva en algun momento?
50	Sarah:	Si se curva.
51	Entrevistador:	No, el palo no se curva, siempre es el mismo. Es otra cosa.
52	Sarah:	Es lo de la dirección
53	Entrevistador:	Cambia la dirección ¿de los qué?
54	Sarah:	De los palos.
55	Entrevistador:	Bueno, y a eso que tu llamas rombo ¿ será que se puede formar con el cuadrilátero rojo?
56	Sarah:	Si, pero más pequeño
57	Entrevistador:	Dejame ver
58	Sarah:	Transforma la figura (acercando un par de vértices opuestos)
59	Entrevistador:	¿Qué hiciste?
60	Sarah:	Un rombo

61	Entrevistador:	y ¿qué estabas haciendo con los dedos?
62	Sarah:	cambiandole la dirección
63	Entrevistador:	y ¿qué otra acción estaban haciendo tus manso cuando haces así (acercando pulgar y corazon)?
64	Sarah:	(...) Como achiquitarlo
65	Entrevistador:	¿achiquitar qué?
66	Sarah:	Los palitos, como lo que esta aquí [región interna del cuadrilatero] es más pequeña.
67	Entrevistador:	Pero, eso de achiquitar ¿es cómo qué?
68	Sarah:	Disminuir
69	Entrevistador:	¿Qué quieres disminuir?
70	Sarah:	Es wue cuando le hago así (acercar vértices opuestos) como que se atraen
71	Entrevistador:	¿Qué se atrae?
72	Sarah:	Estos (señala lados continuos de cuadrilatero)
73	Entrevistador:	Osea que ¿estos dos [vértices opuestos] tambien se atraen?
74	Sarah:	No se
75	Entrevistador:	Vuelve a revisar manipulalo y me dices que se atrae y que se aleja.
76	Sarah:	Se alejan las esquinas
77	Entrevistador:	¿Todas se alejan entre sí? Muestrame
78	Sarah:	Estas dos se alejan [vertices opuestos del cuadrilatero] y estos también
79	Entrevistador:	Entonces, ¿un rombo se puede transformar en cuadrado?
80	Sarah:	Si
81	Entrevistador:	Y ¿un cuadrado se puede transformar en rombo?
82	Entrevistador:	Ok siguiente. Desbarata todo y haz lo siguiente. Vas a tomar dos palos azules y dos rojos y vas a formar la figura que puedas obtener.
83	Sarah:	Ya
84	Entrevistador:	Listo, quiero que manipules esta construcción y busques otras que puedes obtener
85	Sarah:	Así (mueve figura hasta obtener una cometa) es un rombo.
86	Entrevistador:	Es parecida si, ¿Qué diferencia hay con el punto anterior?
87	Sarah:	La dirección
88	Entrevistador:	¿qué más?
89	Sarah:	Parece un triángulo
90	Entrevistador:	¿Qué cambia con relación a la anterior?
91	Sarah:	No se
92	Entrevistador:	Está bien, entonces toma de nuevo cuatro rojas y comparamos las dos figuras
93	Sarah:	Listo (construye un rombo)
94	Entrevistador:	Vamos a mirar la diferencia entre ambas.
95	Sarah:	Esta [rombo] es más pequeña
96	Entrevistador:	¿Por qué esta [rombo] es más pequeña que esta [cometa]?
97	Sarah:	Pero no, son iguales (ubica una sobre la otra) (...) no mentiras esta [rombo] es más pequeña

98	Entrevistador:	¿Por qué es más pequeña?
99	Sarah:	Pues, no se
100	Entrevistador:	¿Qué podría yo hacer para que la roja sea igual que la azul con rojo?
101	Sarah:	Tiene que medir diferente
102	Entrevistador:	¿Por qué?
103	Sarah:	Porque esta [ficha roja] es más pequeña que esta [ficha azul]
104	Entrevistador:	¿Pero cómo haría para que midan lo mismo?
105	Sarah:	Agrandandola
106	Entrevistador:	¿Y cómo lo haría?
107	Sarah:	Con más palos
108	Entrevistador:	Pero estos son los únicos que hay ¿sí? Y ¿entonces cuál es la diferencia que observas?
109	Sarah:	Que una es más grande que otra, que estos son de diferente color.
110	Entrevistador:	¿y por qué son de diferente color?
111	Sarah:	Porque una es más pequeña que la otra
112	Entrevistador:	¿Cuál es más pequeña?
113	Sarah:	La roja
114	Entrevistador:	Entonces, si esta está hecha de solo rojas y esta de palos mezclados ¿pueden ser iguales en algún momento?
115	Sarah:	No
116	Entrevistador:	Ahora, como esta figura está compuesta de únicamente palos rojos ¿tú la llamaste?
117	Sarah:	Rombo
118	Entrevistador:	Como estas son de diferente tamaño [dos y dos], ¿la podremos llamar rombo también?
119	Sarah:	(...) (...) Sí, yo digo que si.
120	Entrevistador:	¿Por qué?
121	Sarah:	Porque tiene como la forma del rombo
122	Entrevistador:	Pero aparte de la forma ¿en que se diferencian?
123	Sarah:	El color
124	Entrevistador:	y ¿qué pasa que sean de diferente color? Ahorita lo dijiste
125	Sarah:	Ahh, no me acuerdo
126	Entrevistador:	Lo dijiste hace un rato
127	Sarah:	Que uno es más grande que el otro
128	Entrevistador:	Bien, y ¿eso qué importancia tiene con las figuras?
129	Sarah:	Que en este [rombo] todos miden lo mismo y en este [cometa] no.
130	Entrevistador:	Entonces, ¿podríamos decir que las dos figuras son iguales?
131	Sarah:	No
132	Entrevistador:	Y si las dos figuras no son iguales ¿podemos llamarlas igual?
133	Sarah:	(...) yo creo que si.
134	Entrevistador:	¿Por qué?
135	Sarah:	Porque tienen la misma forma
136	Entrevistador:	Pero hace un momento dijiste que no.

137	Sarah:	(...)(...)
138	Entrevistador:	Bueno, ¿Cómo llamarías a esta figura [cometa]?
139	Sarah:	No se, ¿triángulo?
		No, porque el triángulo son tres lados y aquí tenemos cuatro lados.
		
140	Entrevistador:	
141	Sarah:	Cuadrado
142	Entrevistador:	¿Cuadrado?, ¿por qué?
143	Sarah:	Mira, (intenta acomodar los palos buscando ángulos de 90°)
144	Entrevistador:	Yo no lo veo como un cuadrado
145	Sarah:	(...)
		Bueno, ¿Cómo llamarás a esta figura [cometa]?
		
146	Entrevistador:	
147	Sarah:	Cuadrado
148	Entrevistador:	Más bien, ¿Qué características tiene un cuadrado?
149	Sarah:	Que tiene cuatro lados
150	Entrevistador:	¿Qué más?
151	Sarah:	Que tiene diferente color
152	Entrevistador:	Osea que, ¿un cuadrado puede tener lados con tamaños distintos?
153	Sarah:	No
154	Entrevistador:	Entonces, si no puede tener lados distintos ¿puede tener colores distintos?
155	Sarah:	Si
156	Entrevistador:	¿Por qué?
157	Sarah:	Porque uno puede diferenciar los colores
158	Entrevistador:	Pero escuchame, ¿Un cuadrado puede tener lados con tamaños distintos?
159	Sarah:	Si
160	Entrevistador:	¿Por qué?
161	Sarah:	Porque en ese caso hay grandes y chiquitos
162	Entrevistador:	Pero no, no me estas respondiendo la pregunta, ¿qué pasa con los lados del cuadrado?, ¿miden lo mismo o no miden lo mismo?


163	Sarah:	No miden lo mismo
164	Entrevistador:	¿Por qué no miden lo mismo?
165	Sarah:	Porque, (...) el lado derecho mide diferente y el lado izquierdo mide de otra manera.
166	Entrevistador:	ok, y ¿así (señalando cometa) son todos los cuadrados?
		Tienen que medir lo mismo (Arma un cuadrado)
		
167	Sarah:	
168	Entrevistador:	Ah, mira lo que estás diciendo "tienen que medir lo mismo"
169	Sarah:	Si
170	Entrevistador:	Y, ¿todos los lados en este cuadrilátero miden lo mismo?
171	Sarah:	No
172	Entrevistador:	Entonces, ¿es un cuadrado?
173	Sarah:	No
174	Entrevistador:	No es, pero entonces para ti, ¿un cuadrado que vendría siendo?
175	Sarah:	(...)
176	Entrevistador:	Vamos a tomar este [rombo] y acomoda un cuadrado para ti
177	Sarah:	Ya (forma un cuadrado)
178	Entrevistador:	¿Qué puedes decir del cuadrado?
179	Sarah:	Que todos tienen que medir lo mismo, o sea (...) eh, debe ser de color rojo, (...) que es más pequeño
180	Entrevistador:	No te fijas en el tamaño, podemos tener un cuadrado grande. ¿Y si yo lo acomodo así (rombo no cuadrado), seguiría siendo cuadrado?
181	Sarah:	No
182	Entrevistador:	Acomódalo entonces (forma el cuadrado)
183	Sarah:	(Forma el cuadrado)
184	Entrevistador:	Ves que siempre formas la misma figura, entonces dime ¿qué es un cuadrado?
185	Sarah:	Un cuadrado tiene que medir lo mismo
186	Entrevistador:	¿Qué tiene que medir lo mismo?
187	Sarah:	Todos los lados
188	Entrevistador:	¿Y además?
189	Sarah:	(...)
190	Entrevistador:	¿Por qué un rombo no puede ser un cuadrado?
191	Sarah:	Porque cambia la dirección
192	Entrevistador:	Listo. ¿Cómo debería ser entonces la "dirección"?
193	Sarah:	Tiene que ser recto
194	Entrevistador:	¿Qué parte tiene que ser recta? Señálame

		(...) Las partes de los lados
		
195	Sarah:	
196	Entrevistador:	Digamos, ¿aquí (modificando a rombo) está recto?
197	Sarah:	No
198	Entrevistador:	¿Dónde si está recto?
199	Sarah:	Aquí (forma cuadrado)
200	Entrevistador:	¿Qué lo hace ser así?
201	Sarah:	Lo que te decia hace un momento, los lados son los mismos, que es pequeño y los colores son el mismo
202	Entrevistador:	¿Y por qué cuando se mueve (formando rombo) deja der cuadrado?
203	Sarah:	Porque cambia de dirección
204	Entrevistador:	¿La dirección de qué?
205	Sarah:	Del palo
206	Entrevistador:	Ahora, vas a tomar los dos azules y los dos rojos; vamos a desbaratarla y a intentar hacer una diferente a la que ya hiciste
207	Sarah:	No se que hacer
208	Entrevistador:	Busca otra combinación
209	Sarah:	No se puede
210	Entrevistador:	Inténtalo
211	Sarah:	Ay ya
212	Entrevistador:	¿Qué figura es esa?
213	Sarah:	Un rectángulo
214	Entrevistador:	¿Por qué lo llamas rectángulo?
215	Sarah:	Por sus lados
216	Entrevistador:	¿Por qué es un rectángulo?
217	Sarah:	Porque es grande y es ancho
218	Entrevistador:	¿Cómo así ancho? Explicame
219	Sarah:	Porque es más ancho que los otros y tienen una distancia (señalando distancia entre lados paralelos)
220	Entrevistador:	¿Y esa distancia quién la da?
221	Sarah:	(...)
222	Entrevistador:	No te entiendo, organiza tus ideas ¿Qué diferencia hay entre las dos figuras formadas?
223	Sarah:	Que miden lo mismo
224	Entrevistador:	¿Quiénes miden lo mismo?

225	Sarah:	Pero no, porque en este caso, no serían porque aca hay una distancia (señalando palo azul) y es la misma distancia de esta (señalando lado opuesto). Y esta es la misma distancia (señalando palo rojo) que esta (señala lados opuestos)
226	Entrevistador:	Ok, entonces aquí ¿la diferencia entre esta [rectángulo] y la anterior [rombo] cuál es?
227	Sarah:	Todos miden lo mismo pero estos dos y estos también [lados opuestos congruentes]
228	Entrevistador:	Si por ejemplo, se modifica así (formando un romboide) ¿qué sería entonces?
229	Sarah:	Un rombo
230	Entrevistador:	¿Qué diferencia hay?, ¿miden lo mismo?
231	Sarah:	No
232	Entrevistador:	¿Por qué?
233	Sarah:	No porque aquí hay azules y rojos
234	Entrevistador:	¿Entonces cómo se llama este [romboide]?
235	Sarah:	Rombo
236	Entrevistador:	Si tiene las medidas iguales le llamamos rombo; pero ¿cuándo tiene forma parecida, pero con medidas distintas también le llamamos rombo?
237	Sarah:	Mmmmm, no se.
238	Entrevistador:	Bien, lo último para terminar, toma una azul y dame una roja y forma el cuadrilátero
239	Sarah:	Listo (forma figura) Es igual
240	Entrevistador:	¿Si?, ¿ya la habíamos hecho?, mira bien
241	Sarah:	No
242	Entrevistador:	Mirala, ¿de qué forma parece?
243	Sarah:	Como un cuadrado per más grande
244	Entrevistador:	¿y cómo la podríamos llamar?
245	Sarah:	Cuadrado, rectángulo
246	Entrevistador:	¿Qué habíamos dicho del rectángulo?
247	Sarah:	mmmmm
248	Entrevistador:	¿Cómo la llamarías?, ¿La reconoces o no?
249	Sarah:	No
250	Entrevistador:	¿La has visto?
251	Sarah:	Si, pero no se como se llama
252	Entrevistador:	A ¿cuál se te parece entonces?
253	Sarah:	A un cuadrado
254	Entrevistador:	¿Estas segura de que sea un cuadrado?
255	Sarah:	Es como un rectángulo
256	Entrevistador:	¿Cómo la podríamos describir?
257	Sarah:	Que tiene diferentes medidas, (...) que el espacio es más grande
258	Entrevistador:	¿Eso que tu decías de la "dirección" se cumple para este cuadrilátero?
259	Sarah:	No

260	Entrevistador:	¿Por qué?
261	Sarah:	No se
262	Entrevistador:	¿Tiene los lados rectos como el cuadrado?
263	Sarah:	Si
264	Entrevistador:	¿Por qué?
265	Sarah:	Estas tres fichas
266	Entrevistador:	¿A qué estas llamándole dirección tú?
267	Sarah:	No sé
268	Entrevistador:	¿Se ven "derechas" como en el cuadrado?
269	Sarah:	Si, pero esta no (toca lado de menor tamaño)
270	Entrevistador:	¿En dónde no se ve derecho?, digamos ¿en las esquinas [vértices] se e derecho?
271	Sarah:	No
272	Entrevistador:	Al fin de cuentas, ¿lo llamarías cuadrado?
273	Sarah:	No
274	Entrevistador:	O sea que ¿reconoces que no es un cuadrado?
275	Sarah:	No
276	Entrevistador:	¡Listo!

Anexo 9. Permisos de los padres y de la institución

	FORMATO	
	CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN	
Código: FOR026INV	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 02-06-2016	Página 1 de 2	

Vicerrectoría de Gestión Universitaria
Subdirección de Gestión de Proyectos – Centro de Investigaciones CIUP
Comité de Ética en la Investigación

En el marco de la Constitución Política Nacional de Colombia, la Resolución 0546 de 2015 de la Universidad Pedagógica Nacional y demás normatividad aplicable vigente, considerando las características de la investigación, se requiere que usted lea detenidamente y si está de acuerdo con su contenido, exprese su consentimiento firmando el siguiente documento:

PARTE UNO: INFORMACIÓN GENERAL DEL PROYECTO

Facultad, Departamento o Unidad Académica	Ciencia y tecnología, Departamento de Matemáticas, Maestría en Docencia de las Matemáticas
Título del proyecto de investigación	Trabajo de grado: ESTRATEGIAS INCLUYENTES EN GEOMETRÍA PARA ESTUDIANTES CON SÍNDROME DE DOWN. CONCEPTUALIZACIÓN Y TECNOLOGÍA DIGITAL
Descripción breve y clara de la investigación	Este proyecto constituye el Trabajo de Grado adelantado para optar por el título de Magister en Docencia de la Matemática, el cual consiste en indagar por los procesos de conceptualización en la geometría, con estudiantes que presentan Necesidades Educativas Especiales.
Descripción de los posibles riesgos de participar en la investigación	No todas las ideas y registros audiovisuales serán tenidos en cuenta y analizados para el desarrollo del trabajo de grado.
Descripción de los posibles beneficios de participar en la investigación	Posibilidad de abrir nuevos espacios para los estudiantes con Necesidades Educativas Especial, además de incorporarlos a formas diferentes de aprender Geometría.
Datos generales del investigador principal	Nombre(s) y Apellido(s) : Oscar David Hoyos Gazabon
	N° de Identificación: 1031151033
	Correo electrónico: odhoyosg@upn.edu.co
	Dirección: Calle 71c No. 51 - 31


PARTE DOS: CONSENTIMIENTO INFORMADO

Yo: Marcela González Matallana

Mayor de edad, identificado con Cédula de Ciudadanía N° 39655486 de Bogotá

Con domicilio en la ciudad de: Bogotá Dirección: Cra. 72 i # 42 f 83 sur

Teléfono y N° de celular: 3005114645
7502157 Correo electrónico: magoma479@gmail.com

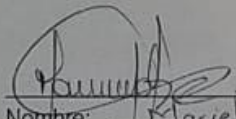
	FORMATO	
	CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN	
Código: FOR026INV	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 02-06-2016	Página 2 de 2	

Declaro que:


1. Mi hijo Sarah Valentina Niño Góngora identificado con TI.1000254336 ha sido invitado(a) a participar en el estudio o investigación de manera voluntaria.
2. He leído y entendido este formato de consentimiento informado o el mismo se me ha leído y explicado.
3. Todas mis preguntas han sido contestadas claramente y he tenido el tiempo suficiente para pensar acerca de mi decisión de participar.
4. He sido informado y conozco de forma detallada los posibles riesgos y beneficios derivados de mi participación en el proyecto.
5. No tengo ninguna duda sobre su participación, por lo que estoy de acuerdo en que haga parte de esta investigación.
6. Puede dejar de participar en cualquier momento sin que esto tenga consecuencias.
7. Conozco el mecanismo mediante el cual los investigadores garantizan la custodia y confidencialidad de los datos, los cuales no serán publicados ni revelados a menos que autorice por escrito lo contrario.
8. Autorizo expresamente a los investigadores para que utilicen la información y las grabaciones de audio, video o imágenes que se generen en el marco del proyecto.
9. Sobre esta investigación me asisten los derechos de acceso, rectificación y oposición que podré ejercer mediante solicitud ante el investigador responsable, en la dirección de contacto que figura en este documento.

En constancia el presente documento ha sido leído y entendido por mí en su integridad de manera libre y espontánea.

Firma,


 Nombre: Marielo Góngora
 Identificación: 39655486
 Fecha: 4 Abril de 2019

La Universidad Pedagógica Nacional agradece sus aportes y su decidida participación

	FORMATO	
	CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN	
Código: FOR026INV	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 02-06-2016	Página 1 de 2	

Vicerrectoría de Gestión Universitaria
Subdirección de Gestión de Proyectos – Centro de Investigaciones CIUP
Comité de Ética en la Investigación

En el marco de la Constitución Política Nacional de Colombia, la Resolución 0546 de 2015 de la Universidad Pedagógica Nacional y demás normatividad aplicable vigente, considerando las características de la investigación, se requiere que usted lea detenidamente y si está de acuerdo con su contenido, exprese su consentimiento firmando el siguiente documento:

PARTE UNO: INFORMACIÓN GENERAL DEL PROYECTO

Facultad, Departamento o Unidad Académica	Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. Programa: Maestría en Docencia de las Matemáticas
Título del proyecto de investigación	Trabajo de grado: ESTRATEGIAS INCLUYENTES EN GEOMETRÍA PARA ESTUDIANTES CON SÍNDROME DE DOWN. CONCEPTUALIZACIÓN Y TECNOLOGÍA DIGITAL
Descripción breve y clara de la investigación	Este proyecto constituye el Trabajo de Grado adelantado para optar por el título de Magister en Docencia de la Matemática, el cual consiste en indagar por los procesos de conceptualización en la geometría, con estudiantes que presentan Necesidades Educativas Especiales.
Descripción de los posibles riesgos de participar en la investigación	No todas las ideas y registros audiovisuales serán tenidos en cuenta y analizados para el desarrollo del trabajo de grado.
Descripción de los posibles beneficios de participar en la investigación	Posibilidad de abrir nuevos espacios para los estudiantes con Necesidades Educativas Especial, además de incorporarlos a formas diferentes de aprender Geometría.
Datos generales del investigador principal	Nombre(s) y Apellido(s) : Oscar David Hoyos Gazabon
	N° de Identificación: 1031151033
	Correo electrónico: odhoyosg@upn.edu.co
	Dirección: Calle 71c No. 51 – 31. Bogotá D.C.


PARTE DOS: CONSENTIMIENTO INFORMADO

Yo: Miguel Alfredo Calvo Patiño

Mayor de edad, identificado con Cédula de Ciudadanía N° 79.555745 de Bogotá D.C.

Con domicilio en la ciudad de: Bogotá D.C. Dirección: Calle 114 # 56-54 Apto 4d

Teléfono y N° de celular: 3002689032 Correo electrónico: mical68@hotmail.com

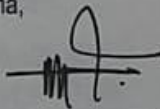
	FORMATO	
	CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN	
Código: FOR026INV	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 02-06-2016	Página 2 de 2	

Declaro que:

1. Mi hijo Juan Miguel Calvo Dorado identificado con 1001.167.737 ha sido invitado(a) a participar en el estudio o investigación de manera voluntaria.
2. He leído y entendido este formato de consentimiento informado o el mismo se me ha leído y explicado.
3. Todas mis preguntas han sido contestadas claramente y he tenido el tiempo suficiente para pensar acerca de mi decisión de participar.
4. He sido informado y conozco de forma detallada los posibles riesgos y beneficios derivados de la participación de mi hijo en el proyecto.
5. No tengo ninguna duda sobre la participación de mi hijo, por lo que estoy de acuerdo en que haga parte de esta investigación.
6. Mi hijo puede dejar de participar en cualquier momento sin que esto tenga consecuencias.
7. Conozco el mecanismo mediante el cual los investigadores garantizan la custodia y confidencialidad de los datos, los cuales no serán publicados ni revelados a menos que autorice por escrito lo contrario.
8. Autorizo expresamente a los investigadores para que utilicen la información y las grabaciones de audio, video o imágenes que se generen en el marco del proyecto.
9. Sobre esta investigación me asisten los derechos de acceso, rectificación y oposición que podré ejercer mediante solicitud ante el investigador responsable, en la dirección de contacto que figura en este documento.

En constancia el presente documento ha sido leído y entendido por mí en su integridad de manera libre y espontánea.


Firma,



Nombre: Miguel Alfredo Calvo Patiño
 Identificación: C.C. 79555.745 de Bogotá
 Fecha: 20-03-2019

La Universidad Pedagógica Nacional agradece sus aportes y su decidida participación

María Fernanda G.

	FORMATO
	CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN
Código: FOR026INV	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 02-06-2016	Página 1 de 2

Vicerrectoría de Gestión Universitaria
Subdirección de Gestión de Proyectos – Centro de Investigaciones CIUP
Comité de Ética en la Investigación

En el marco de la Constitución Política Nacional de Colombia, la Resolución 0546 de 2015 de la Universidad Pedagógica Nacional y demás normatividad aplicable vigente, considerando las características de la investigación, se requiere que usted lea detenidamente y si está de acuerdo con su contenido, exprese su consentimiento firmando el siguiente documento:

PARTE UNO: INFORMACIÓN GENERAL DEL PROYECTO

Facultad, Departamento o Unidad Académica	Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. Programa: Maestría en Docencia de las Matemáticas
Título del proyecto de investigación	Trabajo de grado: ESTRATEGIAS INCLUYENTES EN GEOMETRÍA PARA ESTUDIANTES CON SÍNDROME DE DOWN. CONCEPTUALIZACIÓN Y TECNOLOGÍA DIGITAL
Descripción breve y clara de la investigación	Este proyecto constituye el Trabajo de Grado adelantado para optar por el título de Magister en Docencia de la Matemática, el cual consiste en indagar por los procesos de conceptualización en la geometría, con estudiantes que presentan Necesidades Educativas Especiales.
Descripción de los posibles riesgos de participar en la investigación	No todas las ideas y registros audiovisuales serán tenidos en cuenta y analizados para el desarrollo del trabajo de grado.
Descripción de los posibles beneficios de participar en la investigación	Posibilidad de abrir nuevos espacios para los estudiantes con Necesidades Educativas Especial, además de incorporarlos a formas diferentes de aprender Geometría.
Datos generales del investigador principal	Nombre(s) y Apellido(s) : Oscar David Hoyos Gazabon
	N° de Identificación: 1031151033
	Correo electrónico: odhoyosg@upn.edu.co
	Dirección: Calle 71c No. 51 – 31. Bogotá D.C.


PARTE DOS: CONSENTIMIENTO INFORMADO

Yo: Yaneth Rangel

Mayor de edad, identificado con Cédula de Ciudadanía N° 60327742 de Cúcuta

Con domicilio en la ciudad de: Bogotá D.C. Dirección: Calle 97#700-69 T1-A 801

Teléfono y N° de celular: 3153405894 Correo electrónico: ysangelmif@hotmail.com

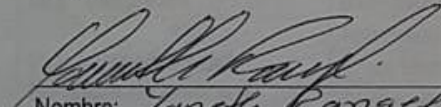
 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	FORMATO	
	CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN	
Código: FOR026INV	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 02-06-2016	Página 2 de 2	

Declaro que:


1. Mi hijo Maria Fernanda Garcia Rangel identificado con cc 1.015.477.845 ha sido invitado(a) a participar en el estudio o investigación de manera voluntaria.
2. He leído y entendido este formato de consentimiento informado o el mismo se me ha leído y explicado.
3. Todas mis preguntas han sido contestadas claramente y he tenido el tiempo suficiente para pensar acerca de mi decisión de participar.
4. He sido informado y conozco de forma detallada los posibles riesgos y beneficios derivados de la participación de mi hijo en el proyecto.
5. No tengo ninguna duda sobre la participación de mi hijo, por lo que estoy de acuerdo en que haga parte de esta investigación.
6. Mi hijo puede dejar de participar en cualquier momento sin que esto tenga consecuencias.
7. Conozco el mecanismo mediante el cual los investigadores garantizan la custodia y confidencialidad de los datos, los cuales no serán publicados ni revelados a menos que autorice por escrito lo contrario.
8. Autorizo expresamente a los investigadores para que utilicen la información y las grabaciones de audio, video o imágenes que se generen en el marco del proyecto.
9. Sobre esta investigación me asisten los derechos de acceso, rectificación y oposición que podré ejercer mediante solicitud ante el investigador responsable, en la dirección de contacto que figura en este documento.

En constancia el presente documento ha sido leído y entendido por mí en su integridad de manera libre y espontánea.

Firma,


 Nombre: Yaneth Rangel
 Identificación: 60327742 de Cúcuta
 Fecha: 21-Marzo-2019

La Universidad Pedagógica Nacional agradece sus aportes y su decidida participación

	FORMATO	
	CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN	
Código: FOR026INV	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 02-06-2016	Página 1 de 2	

Vicerrectoría de Gestión Universitaria
Subdirección de Gestión de Proyectos – Centro de Investigaciones CIUP
Comité de Ética en la Investigación

En el marco de la Constitución Política Nacional de Colombia, la Resolución 0546 de 2015 de la Universidad Pedagógica Nacional y demás normatividad aplicable vigente, considerando las características de la investigación, se requiere que usted lea detenidamente y si está de acuerdo con su contenido, exprese su consentimiento firmando el siguiente documento:

PARTE UNO: INFORMACIÓN GENERAL DEL PROYECTO

Facultad, Departamento o Unidad Académica	Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. Programa: Maestría en Docencia de las Matemáticas
Título del proyecto de investigación	Trabajo de grado: ESTRATEGIAS INCLUYENTES EN GEOMETRÍA PARA ESTUDIANTES CON SÍNDROME DE DOWN. CONCEPTUALIZACIÓN Y TECNOLOGÍA DIGITAL
Descripción breve y clara de la investigación	Este proyecto constituye el Trabajo de Grado adelantado para optar por el título de Magister en Docencia de la Matemática, el cual consiste en indagar por los procesos de conceptualización en la geometría, con estudiantes que presentan Necesidades Educativas Especiales.
Descripción de los posibles riesgos de participar en la investigación	No todas las ideas y registros audiovisuales serán tenidos en cuenta y analizados para el desarrollo del trabajo de grado.
Descripción de los posibles beneficios de participar en la investigación	Posibilidad de abrir nuevos espacios para los estudiantes con Necesidades Educativas Especial, además de incorporarlos a formas diferentes de aprender Geometría.
Datos generales del investigador principal	Nombre(s) y Apellido(s) : Oscar David Hoyos Gazabon
	N° de Identificación: 1031151033
	Correo electrónico: odhoyosg@upn.edu.co
	Dirección: Carrera 136 # 153-56 apt: 201.


PARTE DOS: CONSENTIMIENTO INFORMADO

Yo: Carlos E Puentes M

Mayor de edad, identificado con Cédula de Ciudadanía N° 6743744e TUNJA

Con domicilio en la ciudad de: Bogotá Dirección: 71c N051-31

Teléfono y N° de celular: 2254109 Correo electrónico: liceo.vida.amer.luz.f@upn.edu.co


	FORMATO	
	CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN	
Código: FOR026INV	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 02-06-2016	Página 2 de 2	

Declaro que:

1. Como director(a) del colegio Liceo VAL (Vida, Amor, Luz) ubicado en la calle 71c No. 51 – 31. Bogotá D.C.; autorizo explícitamente lo siguiente: dar ingreso del investigador a la institución en el horario de 3pm a 5pm; poder hacer uso de los espacios para ejecución de instrumentos; toma de registro fotográfico y audiovisual de los participantes, con las respectivas autorizaciones de los padres.
2. He sido informado(a) sobre los propósitos y acciones que se realizarán en la institución.
3. He leído y entendido este formato de consentimiento informado o el mismo se me ha leído y explicado.
4. Todas mis preguntas han sido contestadas claramente y he tenido el tiempo suficiente para pensar acerca de mi decisión de participar.
5. No tengo ninguna duda sobre la participación del colegio en el proyecto, por lo que estoy de acuerdo en que haga parte de esta investigación.
6. Puede dejar de participar en cualquier momento sin que esto tenga consecuencias.
7. Apruebo la entrega de información y autorizaciones a los padres de familia de los participantes de la investigación.
8. Conozco el mecanismo mediante el cual los investigadores garantizan la custodia y confidencialidad de los datos, los cuales no serán publicados ni revelados a menos que autorice por escrito lo contrario.
9. Autorizo expresamente al investigador para que utilice la información y las grabaciones de audio, video o imágenes que se generen en el marco del proyecto.
10. Sobre esta investigación me asisten los derechos de acceso, rectificación y oposición que podré ejercer mediante solicitud ante el investigador responsable, en la dirección de contacto que figura en este documento.

En constancia el presente documento ha sido leído y entendido por mí en su integridad de manera libre y espontánea.

Firma,



Nombre: Carlos E. Fuentes M
 Identificación: 6743744 TENIJA
 Fecha: 26/03/19

La Universidad Pedagógica Nacional agradece sus aportes y su decidida participación