

**ESTUDIO Y ESTRUCTURACIÓN DE APRENDIZAJES  
CONFIGURACIÓN SISTEMA SOL-TIERRA-LUNA EN EL  
MODELO DE ARISTARCO**

**JOHAN NICOLÁS MOLINA CORDOBA**

**Código: 2014146036**

**ASESORA**

**ROSA INÉS PREDREROS MARTINEZ**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**

**FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA**

**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

**LICENCIATURA EN FÍSICA**

**Bogotá D.C. 2019**

## **Agradecimientos**

A mi profesora Nidia Danizga Lugo, quién fue una piedra angular en las primeras etapas de mi formación para la escritura de este documento, además de ser una sabia consejera que prolongó los alcances de mi pasión por la astronomía.

A mi profesora María Cristina Cifuentes por su buena disposición para nutrir mi proceso investigativo, particularmente en una etapa desafiante de mi vida académica, y situarme en el lugar más pertinente desde el cual plantear mi propuesta investigativa.

A mi profesora Marina Garzón, por su acompañamiento constante e incondicional durante todas las fases que constituyeron la realización de este documento.

A mí asesora Rosa Inés Pedreros por culminar de la mano con mis locuras este trabajo, y guiarme en el laborioso derrotero de la academia.

A los estudiantes que forman parte del semillero de astronomía del IPN y especialmente al profesor Santiago Cruz; sin ellos esto no hubiera trascendido del papel.

A mí compañero José Luis Guevara por las disertaciones filosóficas que nutrieron mi formación en el proceso escritural de este trabajo.

A mí compañera Francy Sandoval, por su apoyo y enseñanzas, particularmente en aquellos aspectos derivados del uso de herramientas tecnológicas para la simplificación de representaciones geométricas.


Finalmente, a Dios, el hálito de la vida que me inspira a seguir afrontando las incertidumbres de la existencia, en medio de las en-armonías de este frágil mundo.

## **Dedicatoria.**

A mis padres, quiénes me formaron más allá de las restricciones del mundo, e hicieron de mi un  
soñador empedernido.

A mí hermana; cuyo apoyo incondicional ha sido cadena que me ata a estos proyectos que  
embellecen el hábito de sentir la vida.


A ella, que en la distancia permanece distante, observando el derrotero que culminará cuando  
retorné a sus brazos.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela Superior de Pedagogía</small>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 5	


<b>1. Información General</b>	
<b>Tipo de documento</b>	Trabajo de grado
<b>Acceso al documento</b>	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
<b>Título del documento</b>	ESTUDIO Y ESTRUCTURACIÓN DE APRENDIZAJES CONFIGURACIÓN SISTEMA SOL-TIERRA-LUNA EN EL MODELO DE ARISTARCO
<b>Autor(es)</b>	Molina Córdoba, Johan Nicolás
<b>Director</b>	Pedrerros Martínez, Rosa Inés
<b>Publicación</b>	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2019. 60 P.
<b>Unidad Patrocinante</b>	Universidad Pedagógica Nacional-Bogotá
<b>PALABRAS CLAVES</b>	SISTEMA, SOL-TIERRA-LUNA, ARISTARCO DE SAMOS, RAZÓN, PROPORCIÓN, ASTRONOMÍA, ENSEÑANZA-APRENDIZAJE, ECLIPSES.

<b>2. Descripción</b>
<p>En el Trabajo de Grado se aborda la obra traducida de Aristarco de Samos, sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna, las reflexiones emergentes de este estudio orientan el diseño de una propuesta de enseñanza cuyo fin es la construcción de las relaciones de distancias, tamaños y movimientos relativos de los astros que configuran el sistema Sol – Tierra -Luna (STL). Se diseñan e implementan varias actividades, en las que se tiene en cuenta las simulaciones para abordar el estudio de las relaciones en este sistema. El trabajo se realizó en diferentes escenarios, como actividades de pilotaje llevadas a cabo en el Planetario Distrital y en eventos como el VIII Congreso de enseñanza de las Física y la Astronomía y el IX salón de la Ciencia en el Departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional. Se realiza implementación de algunas de las actividades diseñadas con los miembros del semillero de astronomía del Instituto Pedagógico Nacional, y se sistematizan resultados que derivan en conclusiones que permiten repensar en la problemática de la astronomía y su enseñanza en la educación básica, media y universitaria.</p>


<b>3. Fuentes</b>
-------------------

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela Superior de Pedagogía</small>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
<b>Código: FOR020GIB</b>	<b>Versión: 01</b>	
<b>Fecha de Aprobación: 10-10-2012</b>	<b>Página 2 de 5</b>	

- Arias, J. A. (2016). *Módulo basado en una herramienta computacional vpython para la enseñanza de las fases lunares, los eclipses solar y lunar en un espacio académico de educación media (Tesis de grado)*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Ayala, M. M., Garzón, M., & Malagón, F. (2007). Consideraciones sobre la formalización y la matmatización de los fenómenos físicos. *Memorias del congreso Nacional de enseñanza de la física*.
- Caballero Soler, O. O. (2013). *Una transición de la geometría a la trigonometría, utilizando problemas históricos de la astronomía como recurso didáctico en la clase de matemáticas (Tesis de maestría)*. Bogotá DC.: Universidad Nacional de Colombia.
- Cruz Amaya, S. E. (2017). *Concepciones de los niños de quinto de primaria del Instituto Psicopedagógico Juan Pablo II sobre el sistema Tierra-Luna (Trabajo de grado)*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Dai , M., & Capie , W. (1990). Misconceptions about the Moon Held by Preservice Teachers in Taiwan. *ERIC*, 1-26.
- Deulofeu, J., & Figueiras, L. (2002). *Las medidas a través de la historia*. Barcelona: Matemàtiques I.
- H. Levy, D. (2010). *Guide to Eclipses, Transits, and Occultations*. New York: Cambridge University Press.
- Hernandez, Hernandez, & Baptista. (2003). *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill.
- Joao A. Lopes, I. M. (2004). Teachers' perceptions about teaching problem students in regular classrooms. *Education and Treatment of Children*, 394-419.
- Kriner, A. (2004). Las fases de la Luna, ¿cómo y cuándo enseñarlas? *Ciência & Educação*, 111-120.
- Martinez Murillo, J. H., & Moquera Isaza, R. A. (2012). *Las simulaciones, un recurso didáctico para la enseñanza de la óptica*. Medellín: Universidad de Antioquia.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela Superior de Pedagogía</small>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
<b>Código: FOR020GIB</b>	<b>Versión: 01</b>	
<b>Fecha de Aprobación: 10-10-2012</b>	<b>Página 3 de 5</b>	

- Massa, M. R., Guevara, I., Puig-Pla, C., & Romero, F. (s.f.). *Trigonometría para medir los cielos*. 2009: JAEM girona.
- Mateus Vargas, K. (2013). *Una Propuesta para la Enseñanza de la Trigonometría y la Astronomía, desde los Conceptos de Razón, Ángulo y Cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo*. Bogotá: Universidad Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional. (2014). Estándares Básicos de Competencias en Ciencias Sociales y Ciencias Naturales. *Lineamientos Curriculares*, 102-111.
- Molina Córdoba, J. N., Lugo Lopez, N. D., & Caro Rivas, M. A. (2017). Eclipses, Luz que se Apaga Tras la Sombra de un Experimento. *Revista Científica Universidad Distrital*.
- National Research Council. (1991). *The Decade of Discovery in Astronomy and Astrophysics*. Washington D.C: NATIONAL ACADEMY PRESS.
- Peña, C., & Paez, J. (2013). *Estrategia didáctica para estimar los tamaños y distancias de separación del sistema Sol-Tierra-Luna (Trabajo de grado)*. Bogotá DC: Universidad Pedagógica Nacional.
- Perez Rodríguez, U., Álvarez Lires, M., & Serrallé Marzoa, J. F. (2009). Los errores de los libros de texto de primer curso de ESO sobre la evolución histórica del conocimiento del universo. *Enseñanza de las Ciencias*, 109-120.
- Rodríguez, G., Gil, J., & García, E. (1996). *Metodologías de la investigación cualitativa*. Granada: Aljibe.
- Samos, A. d. (2016). *Sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua*. (R. E. Machado, Trad.) Santiago.
- Trumper, R. (2003). The need for change in elementary school teacher training—a cross-college age study of future teachers' conceptions of basic astronomy concepts. *Teaching and Teacher Education*, 309-323.
- Varela Losada, M., Pérez Rodríguez, U., Arias Correa, A., & Álvarez Lires, M. (2015). Concepciones alternativas sobre Astronomía de profesorado español en formación. *Ciência & Educação (Bauru)*, 799-816.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela Superior de Pedagogía</small>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
<b>Código: FOR020GIB</b>	<b>Versión: 01</b>	
<b>Fecha de Aprobación: 10-10-2012</b>	<b>Página 4 de 5</b>	

Vega Navarro, A. M. (2001). *Sol y luna, una pareja precopernicana. Estudio de día y la noche en educación infantil*. Santa Cruz de Tenerife: Departamento de Didáctica e Investigación Educativa y del Comportamiento.


#### **4. Contenidos**

El documento en su presentación está organizado en siete apartados. En el primero, se expone el contexto de origen y justificación del Trabajo de Grado, relacionado con el estudio de las relaciones de tamaño, distancia y movimiento de los cuerpos del sistema Sol – Tierra – Luna (STL). En el segundo, se presentan los antecedentes, su revisión y análisis permite situar la investigación, las dificultades presentadas y los aportes a la comunidad académica. En el tercero, se muestran los aspectos metodológicos, proceder, perspectiva y enfoque de la investigación, los escenarios de realización y las herramientas de recolección de la información. En el cuarto, se presenta la obra de Aristarco “sobre la relación de distancias y tamaños del sistema STL” y se contrasta con los marcos teóricos actuales de aquel sistema cósmico. En el quinto, se expone un estudio experimental llevado a cabo para la medición del radio lunar empleando la geometría euclidiana, aplicando los conceptos estudiados en la obra de Aristarco. En el sexto, se presenta las actividades que fueron diseñadas e implementadas, se tiene en cuenta la realización de simulaciones del sistema astronómico STL y se muestran los hallazgos y resultados del trabajo en el aula. En el séptimo, se presenta las reflexiones finales a manera de conclusión de la actividad investigativa realizada y las referencias bibliográficas de soporte.

#### **5. Metodología**

La perspectiva se enmarca en una investigación de tipo cualitativo, entendida como la descripción de sucesos complejos que se realiza en su totalidad, estudiando la realidad de los sujetos en su contexto natural, la rutina y las situaciones problema de la vida (Rodríguez, Gil, & García, 1996). El enfoque es descriptivo, se buscan los rasgos más importantes de las interacciones de los sujetos (Hernandez, Hernandez, & Baptista, 2003)

Los escenarios en los cuales se realizaron las actividades fueron colegios, excepto tres: una llevada a cabo con estudiantes universitarios y profesores en el VIII Congreso Nacional de Enseñanza de la Física y la Astronomía (2016), el otro llevado a cabo con estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional en el

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Formación de Profesores</small>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
<b>Código: FOR020GIB</b>	<b>Versión: 01</b>	
<b>Fecha de Aprobación: 10-10-2012</b>	<b>Página 5 de 5</b>	

espacio del curso Astronomía General (2016) y la otra, el rediseño de un módulo lunar en el Museo Astronómico del Planetario de Bogotá. La población con la cual se interactuó fueron estudiantes desde grado séptimo a estudiantes universitarios, profesores en formación y en ejercicio (estas últimas en el VIII congreso Nacional de enseñanza de la Física). Cuatro de las actividades diseñadas fueron implementadas en el Semillero de Astronomía del Instituto Pedagógico Nacional en el primer periodo del año 2019, este escenario dispuesto con 14 estudiantes de distintos grados comprendidos entre séptimo y once. Se realiza el proceso de indagación, reflexión y difusión de la propuesta sobre el estudio del STL. Los instrumentos que se tuvieron en cuenta para la recolección de la información fueron: dibujos, fotografías, grabaciones de audio y vídeo y notas de los estudiantes participantes de las implementaciones.

## 6. Conclusiones


Las conclusiones del Trabajo de Grado fueron:

-El estudio de la obra de Aristarco de Samos da elementos para ampliar una mirada en relación con los desafíos presentes en la estimación indirecta de razón entre las magnitudes astronómicas de distancias y tamaños del Sol, la Tierra y la Luna. La exploración de esta obra enriquece la mirada en torno a las formas de medir distancias en Astronomía, descubriendo que, a partir de sus estimaciones y sus métodos, otras magnitudes astronómicas pueden ser derivadas, por ejemplo: distancia a la que se encuentra Venus o Marte.

-Los resultados de la implementación fueron favorables: si bien los participantes desconocían en detalle cómo hacer las estimaciones de distancias y tamaños del Sol la Tierra y la Luna, tenían pistas sobre lo que debían encontrar, lo cual implicó una dinámica más amigable para el docente - investigador, en relación con el grado de aceptación y comprensión de las actividades propuestas, así como la capacidad del grupo de discurrir y argumentar respecto de las situaciones que conllevan a la construcción de las relaciones de distancias y tamaños del sistema STL. Debe tenerse presente que la implementación se llevó a cabo con un grupo de estudiantes del Instituto Pedagógico Nacional cuyos miembros ya tenían experiencia con trabajos en el ámbito de la Astronomía, y, por consiguiente, estaban familiarizados con su lenguaje.

-La posibilidad de tener diversos escenarios de pilotaje e implementación genera una mirada crítica sobre las acciones pedagógicas y los procesos de enseñanza, emergen ideas innovadoras, y se visibiliza la relevancia



 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Escuela Superior de Pedagogía</small>	<b>FORMATO</b>	
	<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>	
<b>Código: FOR020GIB</b>	<b>Versión: 01</b>	
<b>Fecha de Aprobación: 10-10-2012</b>	<b>Página 6 de 5</b>	

de la diversidad en la formulación de preguntas tanto en el diseño, como en la implementación, que enriquecen el horizonte de sentido de las actividades realizadas en el aula, y fortalecen la mirada del profesor en formación no sólo en su quehacer en el aula si no también en su papel como docente investigador.

-Se tienen argumentos para inferir las órbitas correspondientes de la Luna y del Sol (modelo heliocéntrico): si el Sol se encuentra demasiado distante en comparación con la Luna (392 veces), y a esta distancia los rayos del Sol llegan paralelos a la Tierra, y se conocen las periodicidades: 1. anual del Sol mediante las estaciones. 2. mensual de la Luna mediante sus fases, se puede inferir (pensando en las escalas de los movimientos de traslación), que la Tierra se mueve con la Luna orbitando alrededor de sí, y la Luna y la Tierra se mueven en conjunto orbitando alrededor del Sol.

-La motivación que surge al explorar la obra de Aristarco, de la mano con las posibilidades de replicar algunos de sus experimentos históricos (teniendo a entera disposición herramientas modernas como la fotografía), fue otro aspecto crucial para retroalimentar las actividades que fueron diseñadas, y deja abierta la posibilidad de réplica como parte de un proyecto de Astronomía en la escuela. La adaptación del aula de clases como lugar en donde se reproducen algunos eventos celestes a escala mediante su simulación es un ejercicio que llama a los estudiantes a experimentar todas las posibilidades, recrear las situaciones y avanzar en la comprensión de lo que acontece en el sistema STL. El trabajo investigativo aporta elementos pedagógico – didácticos y disciplinares para pensar la Astronomía y su enseñanza en la Educación Básica, Media y universitaria.

<b>Elaborado por:</b>	Johan Nicolás Molina Córdoba
<b>Revisado por:</b>	Rosa Inés Pedreros Martínez

<b>Fecha de elaboración del Resumen:</b>	14	11	2019
--	----	----	------

# Contenido

ÍNDICE DE IMÁGENES.....	8
PRESENTACIÓN .....	9
1. CONTEXTO DE ORIGEN Y JUSTIFICACIÓN .....	10
1.1. Problema .....	10
1.2. Justificación .....	14
1.2.1. Geometría como eje esencial de la enseñanza para el pensamiento espacial .....	15
1.2.2. Sobre el saber astronómico.....	16
2. ANTECEDENTES.....	19
3. ASPECTOS METODOLÓGICOS.....	24
4. RELACIÓN ENTRE EL RADIO DE LA LUNA Y SU DISTANCIA A LA TIERRA, SEGÚN ARISTARCO .....	26
4.1. Relación entre las distancias Tierra-Luna y Luna-Sol. ....	27
4.2. Relación entre los tamaños de la Luna y el Sol.....	30
4.3. Relación entre los tamaños de la Tierra y la Luna.....	34
5. MEDICIÓN DE RADIO LUNAR, DERIVACIÓN MEDIANTE UN PROCEDIMIENTO LÓGICO PROVENIENTE DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA .....	37
6. DISEÑO DE ACTIVIDADES E IMPLEMENTACIÓN .....	44
6.1. Sistemas de referencia.....	45
6.2. Relación de distancias y tamaños.....	47
6.3. Geometrización de sombras y eclipses.....	51
6.4. Eclipse lunar y medida de relación de tamaños Tierra-Luna .....	55
7. REFLEXIONES FINALES .....	59
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS .....	61
ANEXOS .....	63
Anexo 1. Aristarco y el sistema heliocéntrico TSL.....	63
Anexo 2. Relación de tamaños y distancias y estudio de sombras .....	67
Anexo 3. Eclipses y fases lunares .....	71
Anexo 4: Descripción de situaciones e inquietudes .....	79
Anexo 5. Otras actividades diseñadas e implementadas.....	92

## ÍNDICE DE IMÁGENES

Imagen 1. Modelo ideado de acuerdo con las explicaciones luego de la implementación de la primera actividad.....	11
Imagen 2. Ángulo al que subtiende la Luna (Edición en Geógebra).....	27
Imagen 3. Representación Geométrica de Aristarco para estimación de distancia Tierra - Sol.....	28
Imagen 4. Relación entre superficies de esferas iluminante e iluminada (fuente: Sobre los tamaños y las distancias do Sol e da Luna, Aristarco de Samos).....	31
Imagen 5. Disposición del Sol y la Luna durante un eclipse Solar (fuente propia con apoyo de software Geogebra).....	32
Imagen 6. Disposición del Sol y la Luna durante un eclipse Solar y triángulos semejantes (fuente propia con apoyo de software Geogebra).....	32
Imagen 7. Representación geométrica de un eclipse Lunar (Fuente propia con apoyo de software Geogebra).....	34
Imagen 8. Eclipse lunar y circunferencia de sombra de la tierra en dos etapas distintas del eclipse	38
Imagen 9.: Disposición de un transportador virtual sobre la circunferencia de la sombra de la Tierra durante un eclipse lunar en dos etapas distintas del eclipse. Arriba: etapa 1, abajo: etapa 2. ....	39
Imagen 10. relación entre arcos de circunferencias y ángulos .....	40
Imagen 11. Eclipse Lunar fotografiado desde Sibaté el 21 de enero de 2019.....	42
Imagen 12. Sol y Luna en el cielo diurno. ....	48
Imagen 13. Vista al cielo a las 3:00 pm usando Stellarium desde el centro de México.....	48
Imagen 14. Representación de discos de distintos diámetros vistos desde un mismo lugar. ....	49
Imagen 15. Representación de discos de igual diámetro vistos desde un mismo lugar, se observa que el disco trasero (blanco), queda cubierto por el disco negro, y por consiguiente no puede ser visto por el observador.....	49
Imagen 16. Representación objetos de distintos tamaños a diferentes distancias, particularmente: un objeto de mayor tamaño (objeto azul) que otro (Objeto negro), se verán de igual tamaño cuando la distancia de separación entre ambos es $d$ .....	50
Imagen 17. Estudiantes estimando relación entre tamaños y distancias .....	50
Imagen 18. Estudiantes midiendo sombras, relaciones entre tamaño de sombras y distancia de foco luminoso.....	52
Imagen 19. Producción de sombras a cortas (imagen de la izquierda) y largas (imagen de la derecha) distancias de una fuente luminosa. ....	53
Imagen 20. Estudiantes simulando eclipse Lunar .....	54
Imagen 21. La primera corresponde a la vista transversal sistema de cuerpos y sombra, la segunda, es la vista frontal. ....	55
Imagen 22. Primera, Vista transversal sistema de cuerpos y sombra aclarada y en la segunda imagen Vista frontal.....	56
Imagen 23. Dibujo de los estudiantes de circunferencias de la sombra de un objeto proyectada sobre otro .....	56
Imagen 24. Dibujo de un estudiante comparación circunferencias.....	57

## PRESENTACIÓN

En el Trabajo de Grado se aborda la obra traducida de Aristarco de Samos: sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna. Las reflexiones emergentes de este estudio orientan el diseño de una propuesta de enseñanza cuyo fin es la construcción de las relaciones de distancias, tamaños y movimientos relativos de los astros que configuran el sistema Sol – Tierra -Luna (STL).

Se diseñan e implementan varias actividades, en las que se tiene en cuenta las simulaciones para abordar el estudio de las relaciones en el sistema Sol-Tierra-Luna. El trabajo se realizó en diferentes escenarios, primero como actividades de pilotaje llevadas a cabo en el Planetario Distrital y en eventos como el del VIII Congreso de enseñanza de las Física y la Astronomía, el IX Día de la Ciencia en el Departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional. La implementación de la actividad se llevó a cabo en el Semillero de Astronomía del Instituto Pedagógico Nacional (IPN).

El documento en su presentación está organizado en siete apartados. En el primero, se expone el contexto de origen y justificación del Trabajo de Grado, relacionados con el estudio de las relaciones de tamaño, distancia y movimiento de los cuerpos del sistema Sol – Tierra – Luna (STL). En el segundo, se presentan los antecedentes, su revisión y análisis permite situar la investigación, las dificultades presentadas y los aportes a la comunidad académica. En el tercero, se muestran los aspectos metodológicos, proceder, perspectiva y enfoque de la investigación, los escenarios de realización y las herramientas de recolección de la información. En el cuarto, se presenta la obra de Aristarco “sobre la relación de distancias y tamaños del sistema STL” y se contrasta con los marcos teóricos actuales de aquel sistema cósmico. En el quinto, se expone el estudio sobre la medición del radio lunar y su derivación mediante un procedimiento lógico proveniente de la geometría euclidiana, aplicando los conceptos estudiados en la obra de Aristarco. En el sexto, se presenta las actividades que fueron diseñadas e implementadas, se tiene en cuenta la realización de simulaciones del sistema astronómico STL y se muestran los hallazgos y resultados del trabajo en el aula. En el séptimo, se presenta las reflexiones finales a manera de conclusión de la actividad investigativa realizada y las referencias bibliográficas de soporte.

# 1. CONTEXTO DE ORIGEN Y JUSTIFICACIÓN

En este apartado se expone el contexto y justificación del presente Trabajo de Grado, relacionado con el estudio de las relaciones de tamaño, distancia y movimiento de los cuerpos del sistema Sol – Tierra – Luna (STL), a continuación, se expone el problema y las razones que dieron lugar a la actividad investigativa.

## 1.1. Problema

En el año 2015 se llevó a cabo un proceso de implementación de ciertas actividades diseñadas al interior de uno de los espacios extra-clase de los estudiantes del Departamento de Física de la Universidad Pedagógica Nacional: Semillero de Astronomía. La implementación se realizó en el IX Salón de la Ciencia el día 24 de abril. Para este primer encuentro, se diseñó una actividad tipo taller, cuyo fin era representar el modelo heliocéntrico Sol-Tierra-Luna (STL), de tal manera que los participantes (estudiantes de 10 y 11 grado) encontraran respuestas a la pregunta: ¿Por qué no ocurre un eclipse cada 15 días? (*Ver anexo 4.0, apartado: ¿Por qué no ocurre un eclipse cada 15 días?*)

La actividad comenzó con una discusión en torno al modelo heliocéntrico, intentando caracterizar los alcances de este modelo en relación con lo que es observable en nuestros cielos. La actividad fue guiada por preguntas secundarias referidas a los tamaños, las distancias relativas y las respectivas posiciones espaciales de los cuerpos que actúan en estos fenómenos de ocultación (el Sol, la Tierra y la Luna). Por ejemplo: respecto a la Tierra ¿Qué astro se encuentra más distante, el Sol o la Luna?, ¿Cuál de estos dos astros es más grande?

Era un gran propósito del taller, identificar los eclipses tanto de Sol como de Luna y dar cuenta de ellos utilizando el modelo heliocéntrico en la relación Sol-Tierra y geocéntrico en la relación Tierra-Luna, a la luz de lo que podía discernirse del modelo ideado y construido para el IX Salón de la Ciencia. Sin embargo, en las primeras actividades (pensadas para determinar la relación entre las distancias y los tamaños entre la Tierra, el Sol y la Luna), por

parte de los estudiantes participantes, surgieron explicaciones respecto a estas relaciones, explicaciones interesantes como:

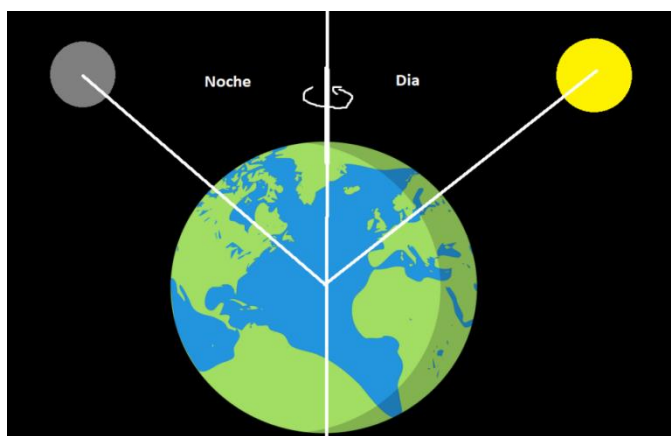
*-Tanto el Sol como la Luna son del mismo tamaño o aproximadamente del mismo tamaño, y se encuentran ubicados a la misma distancia de la Tierra, pero en direcciones opuestas entre ellos.*

*-Estos (El sol y la Luna) deben estar más o menos a la misma distancia de la Tierra, puesto que en los cielos se ven casi que del mismo tamaño.*

*-Respecto a la distancia de separación entre el Sol y la Luna, esta debe ser grande, ya que, entre estos no deben coincidir tanto en el día como en la noche.*

*-Como el Sol sale de día y la Luna sale de noche, el Sol y la Luna están en direcciones opuestas respecto de la Tierra, y deben estar separados entre sí.*

Una síntesis de las explicaciones respecto a las relaciones de tamaños y distancias del Sol y la Luna que surgieron en aquel primer espacio sería: el Sol puede estar un poco más distanciado que la Luna, pero ambos van en direcciones opuestas, en el cielo estos dos astros están tan separados que nunca se encuentran, por eso el Sol sale de Día y la Luna de noche. Estas ideas podrían ser simplificadas en el siguiente modelo iconográfico:



**Imagen 1. Modelo ideado de acuerdo con las explicaciones luego de la implementación de la primera actividad**  
**Fuente: Elaboración propia**

Se intentó superar esta primera brecha conceptual recurriendo al cuestionamiento de las explicaciones de los estudiantes allí presentes y la descripción conocida según el modelo heliocéntrico, bajo el supuesto: al describir hechos conocidos respecto a diversas situaciones astronómicas como, por ejemplo, los eclipses solares, los conocimientos en cuestión iban a quedar aprehendidos -al menos durante el desarrollo de la actividad-; sin embargo, quedaron inquietudes que por cuestiones de tiempo no pudieron resolverse de la manera debida, esto podía descubrirse fácilmente observando el rumbo que tomó la actividad después de la situación previamente narrada: esta se volvió parcialmente una clase tradicional, donde el ejecutor de la actividad tuvo que explicar la representación del modelo heliocéntrico del sistema STL, lo cual, no era parte de los propósitos de acuerdo con lo planeado para ese taller.

En la segunda parte de la propuesta, un problema que apareció y generó discordancias en relación con las explicaciones surgidas en la primera parte, fue la incompatibilidad entre aquellas explicaciones dadas por los estudiantes en relación con la traslación de la Luna alrededor de la Tierra y las fases de la Luna cómo consecuencia del movimiento de traslación. En el modelo que presentaban los estudiantes, no figuraba el movimiento relativo de estos dos astros (Sol y Luna) respecto de la Tierra. Algunos estudiantes partícipes de la actividad piloto manifestaban conocer que las fases de la Luna estaban asociadas a su movimiento periódico respecto a la Tierra, incluso representaban mediante signos corporales y dibujos en el aire el movimiento de la Luna alrededor de esta. Pese a identificar estos aspectos, se mostraban confundidos a la hora de representar la relación entre las fases de la Luna y su movimiento de traslación alrededor de la Tierra. (Las evidencias de este pilotaje se hallan organizadas en el **anexo 4** en la tabla: **escenarios de implementación, pilotaje y difusión del trabajo**).

Toda esta serie de situaciones inesperadas trajeron consigo la necesidad de explorar a fondo el contexto local y global, en relación con los problemas frecuentes que se encuentran cuando se abordan estos tópicos en la enseñanza de la astronomía. En este camino, encontramos autores latinoamericanos que han indagado sobre las dificultades presentes en la enseñanza de la astronomía clásica. (Varela Losada, Pérez Rodríguez, Arias Correa, & Álvarez Lires, 2015), parafraseando lo que ellos expresan: las dificultades presentes en la enseñanza del sistema STL y en general, de cualquier sistema planetario, es el enorme grado de abstracción

que se requiere, debido al pensamiento espacial y el conocimiento de ciertos aspectos que nutren dicho pensamiento (formas, comparación de tamaños, sistemas de referencia rotantes, etc.) Por ejemplo, interpretar las fases de la Luna acorde con la representación del modelo científico, se precisa saber que la Tierra gira alrededor del Sol, y que la Luna en virtud de su naturaleza material, refleja su luz, posibilitando su observación parcial y total desde la superficie de la Tierra. Estos aspectos, explicitados dentro de la enseñanza de la Astronomía, permitieron la caracterización y autoevaluación de la propuesta implementada.

Con la experiencia que se adquirió en esta intervención, incluida una publicación que se hizo en relación con esta línea de trabajo (2017)<sup>1</sup>, se construye una propuesta actualizada, de la cual surge el diseño y construcción de material enfocado a la experiencia sensorial con un modelo que guarda ciertas proporciones con el sistema heliocéntrico STL, y esta vez, enfocado también a un estudio desde la producción de sombras en relación con las potencialidades de los cuerpos luminosos.

La segunda puesta en escena de las actividades estaba enfocada a resolver los inconvenientes presentados en la primera implementación, particularmente aquellas de índole geométrico, en esta ocasión el problema central fue identificar, de acuerdo con la eventualidad de un eclipse, quienes sobre la Tierra podrían observarlo. Para muchos estudiantes, un eclipse solar y lunar podría ser visto por todas las personas de la Tierra, aun cuando asociaban el Sol con el día y la Luna con la noche. Si bien el taller diseñado tenía presente que se desconocieran ciertos aspectos sobre los eclipses como la esencia de sus nombres (eclipse de Sol y eclipse de Luna), no contemplaba tales extremos intrincados en formas de ver interesantes pero algo incompatibles, por ejemplo la suposición de que respecto a la Tierra, el Sol se encuentra un poco más cerca que la Luna, aun cuando ocurren eclipses solares; o la falta de argumentos a la hora de explicitar un eclipse lunar, explicaciones indagadas mediante la pregunta: ¿Qué eclipsa a la luna?

Respecto de lo encontrado en la segunda puesta en escena, se decidió abordar las posibles causas de aquellas discordancias a la hora de elaborar explicaciones en relación con algunos eventos astronómicos. Lo que se encontró en la literatura y en los contextos educativos de

---

<sup>1</sup> Molina, Lugo y Caro (2017). Eclipses Luces que se Apagan Tras la Sombra de un Experimento. Revista científica. Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.



enseñanza de la Astronomía, fue que en la enseñanza de la Astronomía se han encontrado errores conceptuales en el profesorado de diferentes niveles educativos y persistentes ideas alternativas, como muestran estudios de diferentes contextos, como el de Lopes (2004) en EEUU, Trumper (2003) en Israel, Dai y Capie (1990) en Taiwan y Vega (2001) en España.

Un factor preponderante en la generación de concepciones e interpretaciones de naturaleza astronómica carentes de consistencia también parecen ser los recursos utilizados en la enseñanza de la Astronomía. Así, se han estudiado los errores presentes en algunos recursos educativos como el de Pérez, Álvarez y Serralles (2009), quienes identificaron numerosas incorrecciones que contienen libros de texto españoles de enseñanza secundaria relacionados con la evolución histórica del conocimiento del Universo.

Lo anterior, en cuanto a un estudio del contexto a escala global. En el panorama local, lo expuesto en los lineamientos curriculares del MEN, muestran que estos tópicos deben ser enseñados en diferentes ciclos dentro del programa de ciencias sociales (Véase: MEN Estándares de competencias en ciencias sociales), en este terreno del saber, tradicionalmente no se adquieren los suficientes elementos conceptuales para nutrir procesos de conocimiento y enseñanza aprendizaje de los tópicos que encarnan las ciencias astronómicas.

En el marco de lo documentado anteriormente, surge como pregunta de investigación:

*¿Cómo estudiar la relación de distancia, posición y movimientos relativos en el sistema Sol-Tierra-Luna (STL) de modo que pueda construirse una propuesta enfocada a la estructuración de aprendizajes con relación al estudio de dicho sistema cósmico?*

## **1.2. Justificación**

Se presentan las razones por las cuales se adelanta la investigación y se exponen los objetivos generales y específicos de la misma. Se describe el aspecto considerado sobre la Geometría como eje esencial de la enseñanza para el pensamiento espacial y sobre el saber astronómico.

### **1.2.1. Geometría como eje esencial de la enseñanza para el pensamiento espacial**

Uno de los conceptos que fundamenta la estructura de todas las teorías físicas modernas es el espacio, y, por consiguiente, la geometría en general, sin embargo, son muchos los estudiantes quienes, dentro de la academia, se han limitado a desarrollar una serie de formas matemáticas muy abstractas sin darle importancia a los sentidos que cada forma pudiere tener dentro de determinada teoría física, (Ayala, Garzón, & Malagón, 2007). Por lo anterior, tratar de fundamentar algunas construcciones espaciales que se elaboran en las aulas tradicionales de enseñanza (como la relación entre distancias y tamaños de objetos), desde la Astronomía y su enseñanza, reconociendo los criterios y parámetros que fundamentan su construcción, permitirá el desarrollo de una conceptualización que facilite el diálogo entre lo conocido y lo identificable por los sentidos, es decir, reconstruir algunos de los formalismos geométricos empleados en la descripción cuantitativa de los eclipses en el sistema STL, y a través de ello, evidenciar como dicho modelo recaer en la descripción general de algunos fenómenos físicos.

Históricamente se han fundamentado teorías para la descripción de las sombras y los eclipses mediante artilugios matemáticos que provienen de métodos geométricos, -como es el caso de Aristarco de Samos en la determinación de distancias desconocidas-, incluso algunos de estos métodos (sobre todo aquellos que se enfocan en la descripción del movimiento de los cuerpos celestes), se encuentran a la base de deducciones que versan sobre algunos aspectos de la mecánica de Newton, y que en general, permitieron el establecimiento de ideas importantes de la física clásica.

Por otra parte, la manera cómo suelen enseñarse los modelos planetarios o del universo en general, desde el orden en como históricamente se han configurado los distintos modelos del sistema STL: geocéntrico de Ptolomeo, heliocéntrico de Aristarco, y modelos copernicanos, kepleriano, entre otros tantos, de tal modo que se deja ambigüedad en torno a la interpretación de la cuestión esencial de la forma en como el sistema STL se ha estudiado.

La manera en cómo se piensan las distintas actividades que se proponen como ejes articuladores de la propuesta, confiere a los estudiantes la posibilidad de constituir un modelo a partir de observaciones reales y otras construibles en espacios de simulación (dada la

imposibilidad de tener control sobre los largos periodos de ocurrencia de algunos fenómenos celestes de ocultación tales como los eclipses). Este enfoque ofrece una gran ventaja para el educando: la identificación oportuna de aspectos claves que se van deduciendo conforme se va avanzando en las diferentes actividades propuestas.

### **1.2.2. Sobre el saber astronómico**

La astronomía, hoy en día se ha posicionado como uno de los saberes más penetrantes y de mayor influencia en el mundo (National Research Council, 1991) y enmarcada en un ámbito de interdisciplinariedad del conocimiento, corresponde con los lineamientos curriculares de enseñanza de las ciencias en Colombia, (Ministerio de Educación Nacional, 2014). Además, responde a las necesidades de conocimiento del siglo XXI, pensando sobre todo en los conflictos cognitivos que emergen en los procesos de aprendizaje de las ciencias en los niveles de la Educación Básica y Media. Cabe destacar también que la Astronomía y en particular, el problema que pretende aquí ser mostrado, es de un semblante interdisciplinar, en dónde la Geometría se conecta con la Física, de modo tal que sin perder su identidad cada uno de estos conocimientos, se nutren mutuamente, tal y como puede corroborarse observando diversos trabajos históricos, por ejemplo, desde Newton en la forma en como son presentados sus estudios en torno a la mecánica en su obra, *Los Principia Matemática de Filosofía Natural*. Sintetizando lo anterior dentro del contexto específico de lo referente al presente Trabajo de Grado, la geometrización y la descripción de las cualidades de las sombras (fenómeno físico vital para la comprensión de los eclipses), brinda elementos para afrontar problemas que requieren la aplicación de las matemáticas, a tópicos específicos de la física clásica, así como ofrece elementos a ciertos problemas comunes en el ámbito cotidiano, como podrá evidenciarse en capítulos posteriores.

Otro aspecto esencial respecto a la fundamentación del conocimiento astronómico se sintetiza con una expresión alegórica que ilustra el vínculo entre la ciencia y el espíritu científico, vínculo situado en la naturaleza idílica del descubrimiento; los astros danzan en la inmensidad, y los pasos de aquella danza que danzan, son enigmas que endulzan la profesión del astrónomo. *“Los astros se mueven siguiendo la voluntad de los dioses”* dijeron muchas de las primeras civilizaciones que vieron la luz de las estrellas, primero los babilonios y los

sumerios; quienes catalogaban las estrellas para entender el lenguaje de los dioses, y su destino allí era escrito; la Astronomía fue el primer diálogo que nuestra especie tuvo con los cielos, la primera representación cosmogónica del espíritu y fue la luz del camino del conocimiento, que nos ha llevado hasta aquello que poseemos en tiempos modernos. (fuente: el autor).

Para finalizar este apartado, la interdisciplinariedad en el marco de los estándares básicos de competencias en ciencias naturales del Ministerio de Educación Nacional -en este caso- se halla evidenciada en el vínculo natural entre la Física y la Geometría dentro de la Astronomía, así como la respectiva profundización de conceptos específicos derivados dentro de los contextos disciplinares de cada uno de estos dos saberes, intrínsecamente a los tópicos centrales de la propuesta (eclipses y sombras).

Los objetivos de presente Trabajo de Grado son:

### **Objetivo General**

Determinar las relaciones distancia, posición y movimientos relativos en el sistema Sol-Tierra-Luna, de tal modo que pueda constituirse una propuesta de enseñanza encaminada a la estructuración de aprendizajes del sistema en estudio.

### **Objetivos específicos.**

- Revisar y estudiar el referente histórico de Aristarco de Samos para la identificación, cálculos y medidas de distancias y tamaños de los cuerpos que constituyen el sistema STL.
- Estudiar el sistema STL, aplicando métodos aducidos de acuerdo con el trabajo revisado como referente histórico, empleando las medidas y los respectivos cálculos efectuados para establecer las relaciones de distancias y tamaños de los cuerpos del sistema STL.

- Diseñar e implementar actividades de modelación del sistema STL, a partir de los aspectos derivados en el estudio y réplica de los experimentos y medidas llevadas a cabo por Aristarco de Samos en el siglo III a. C.
- Reflexionar y elaborar el documento final sobre los aspectos conceptuales que se derivan de las relaciones en el sistema estudiado (STL), y la aplicación de la propuesta diseñada.

## 2. ANTECEDENTES

En este apartado se muestran algunos trabajos, investigaciones y publicaciones que se han realizado a nivel local, nacional e internacional que contribuyen a precisar y enriquecer la pregunta y objetivos del presente Trabajo de Grado, y que fueron leídos por ir en la misma línea de conocimiento que este trabajo de investigación. Su revisión y análisis permite situar en la investigación, las dificultades presentadas y los aportes a la comunidad académica.

A nivel local se encuentra el artículo titulado, “*Eclipses, luz que se apaga en la sombra de un experimento*”, de Molina, Lugo y Caro (2017), en dónde se conceptualizaron desde un enfoque cualitativo, las ideas esenciales que describen los eventos conocidos como eclipses y que permiten, en virtud de la simplicidad de sus exposiciones, elaborar una propuesta metodológica para la enseñanza de dicho concepto a través del estudio de las sombras. Otra investigación local, es la de Arias (2016), que corresponde al Trabajo de grado “*Módulo Basado en una Herramienta Computacional Vpython para la Enseñanza de las Fases Lunares, los Eclipses Solar y Lunar en un Espacio Académico de Educación Media*”, fundamentado en la visión de los eclipses desde la mirada de órbita mediante una simulación digital. Aquí se logran ver elementos que permiten ampliar la mirada sobre el marco teórico en el sentido de que se reconstruye el problema de los eclipses, desde la visión de órbita, según modelos matemáticos actualizados que devienen de las teorías de Kepler. El autor concluye el uso de simulaciones computacionales, para la enseñanza de los movimientos presentes en el sistema Tierra-Sol-Luna. En este trabajo se brindan elementos conceptuales e informativos que son eje de discusiones con el trabajo de Aristarco de Samos en el apartado posterior, donde se detalla el análisis de su obra.

Uno de los trabajos realizados sobre el estudio de los eclipses fue el de Peña y Páez (2013), titulado “*Estrategia didáctica para estimar los tamaños y distancias de separación del sistema sol-tierra-luna*”, donde se establece la configuración de medidas que constituye el sistema astronómico Sol-Tierra-Luna, los autores muestran la importancia del problema de la medida en el contexto de la experimentación en física. Un elemento fundamental que se incursiona en este trabajo, y que sirve como antecedente del proyecto en cuestión, es que

indaga en la idea de medir dentro de la Astronomía, y con base en ello, elabora una propuesta encaminada al cambio de modelos mentales, en donde las ideas protagonistas son las nociones perceptual y física de la medida. Los autores concluyen que la implementación de una propuesta didáctica sentada desde la producción de modelos mentales conlleva al surgir de un pensamiento reflexivo contrastado con habilidades de pensamiento fundamentales en procesos de razonamiento científico (observación, análisis, síntesis).

En tanto Cruz (2017), realiza el Trabajo de Grado titulado “*Concepciones de los Niños de Quinto de Primaria del Instituto Psicopedagógico Juan Pablo II sobre Sistema Tierra-Luna*”, la investigación se origina a partir de la pregunta ¿por qué nos sigue la Luna? Se presentan las explicaciones que elaboran los estudiantes y las concepciones que subyacen en el Sistema Tierra - Luna. Este trabajo se constituye como una opción para pensar la Astronomía y su enseñanza en un contexto que supera la barrera de los contenidos en los textos escolares tradicionales, infiriendo en la importancia del quehacer más allá de la información del profesor, y fue parte esencial para nutrir el diseño de algunas de las actividades que se diseñan, especialmente la manera en como se consolidan las preguntas que sirven de guía de apoyo para quien las implementa.

A nivel nacional se encontró el trabajo de grado “*Una transición de la geometría a la trigonometría, utilizando problemas históricos de la astronomía como recurso didáctico en la clase de matemáticas*” de Caballero (2013), en donde se presenta los experimentos llevados a cabo por Aristarco de Samos y Tales de Mileto para la determinación de algunas relaciones de distancias y tamaños de cuerpos celestes, particularmente del sistema STL. Aquí se contrastan los elementos históricos con las posibilidades de implementación y réplica de dichos experimentos en la escuela a nivel de enseñanza media, con la finalidad de hacer un tránsito de la geometría a la trigonometría. El autor concluye que, la unidad didáctica implementada tiene la capacidad de potenciar las habilidades al establecer relaciones entre lo fenoménico propio de la astronomía, y el lenguaje y representación matemáticos. Sin embargo, aún es latente en los grupos dispuestos para la implementación, el problema matemático de efectuar algoritmos y procedimientos de despeje. En este sentido, puede

vislumbrarse un posible problema, a la hora de realizar la implementación deseada, a la luz de las perspectivas y métodos que se exponen en esta propuesta de trabajo de grado.

Otro trabajo que influyó notablemente, particularmente en el diseño de las actividades sobre la relación de distancias y tamaños, fue: “*Una Propuesta para la Enseñanza de la Trigonometría y la Astronomía, desde los Conceptos de Razón, Ángulo y Cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo*” de Vargas (2013) de la Universidad Nacional de Colombia. El aporte de este trabajo al que se está presentando, versa de la consolidación de una propuesta didáctica partiendo de la definición que da del concepto de razón, Euclides en el libro V los elementos: razón es la determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas. En general, se amplifica dicho concepto desde una revisión histórica de algunas obras de Euclides y de Tales de Mileto, y se contrasta con las componentes epistemológicas que subyacen a la definición de este. En cuanto a la implementación de las actividades, aquí se ilustra como mayor dificultad, el desarrollo algorítmico derivado de las diferentes razones que se presentan en los problemas propuestos, por ejemplo: en la estimación de la altura de la pirámide de Giza, o la estimación de la altura de un poste mediante la medición de su sombra.

A nivel internacional, se encontró el artículo titulado “*Trigonometría para medir los cielos*” de Massa, Guevara, Puig-Pla y Romero (2009) de la Universitat Politècnica de Catalunya, en donde se ubican en el contexto, las diversas mediciones y tratamientos geométricos llevados a cabo por Aristarco de Samos, sin perder las historicidades de los documentos hasta el momento conocidos. Se hace específica mención de la obra de Aristarco, “*sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna*” para finalmente hacer inferencias sobre la importancia de los textos históricos en el aula. Se concluye en este trabajo que la influencia de un contexto y los argumentos geométricos, brindan a los estudiantes elementos que les permiten crear conexiones entre ideas matemáticas y mundo físico.

Se encuentra además, el libro titulado “*Las medidas a través de la historia*” de Deulofeu y Figueiras (2002), en donde se narra la historia de las matemáticas desde los tiempos antiguos, poniendo en consonancia las disimilitudes que tenían las primeras civilizaciones con respecto



a las representaciones que se hacían del mundo, a través de la proposición de elementos matemáticos abstractos (números, proporciones, magnitudes) correspondientes a sus realidades, y son explicitados los problemas más relevantes que resolvieron las antiguas civilizaciones egipcias, chinas, hindúes y babilónicas, empleando teoremas que en la actualidad se constituyen como la columna vertebral de la geometría. De esta manera, se indaga en la importancia de la construcción de triángulos para dar solución a algunos problemas prácticos que correspondían a su cotidianeidad. Entre ellos caben resaltar: el cálculo de la distancia entre las dos orillas de un río, la estimación de la altura de una montaña, la distancia de una embarcación que se aproxima a la playa, entre otros tantos. El autor narra una historia en donde se muestra a la geometría como una construcción necesaria, para darle un sentido armónico al mundo, eje fundamental en las expresiones culturales, que transversa a los diversos esquemas de creencias de aquellas civilizaciones orientales, arraigadas a mitologías que se conocen, dados los roles de los dioses que ellos asignaron y escribieron en el comportamiento y modos de organizarse de las estrellas.

Estos últimos tres antecedentes enriquecieron el lenguaje del marco teórico del presente trabajo y motivaron la realización de algunos experimentos llevados a cabo por Aristarco de Samos.

Por su parte Kriner (2004), elabora la publicación *“Las Fases de la Luna, ¿Cómo y Cuándo Enseñarlas?”*, la cual sirvió de base para la articulación de explicaciones en torno a la relación entre las fases de la Luna, y su movimiento orbital alrededor de la Tierra, además de nutrir la mirada superficial en el ámbito de lo pedagógico, cuya latencia se connota en las maneras de cuestionar desde la propuesta de aula diseñada para la elaboración de este trabajo. El trabajo presenta un contexto de identidad en torno al quehacer pedagógico dentro de la Astronomía, hecho que se ve manifiesto en la estructura de los procesos de síntesis de las explicaciones que se dieron en el desarrollo de algunas de las actividades propuestas.

Finalmente, la obra que se articula como eje teórico de la propuesta y desde la cual se han ampliado los horizontes conceptuales de la misma, es la traducción a portugués de la obra original de Aristarco de Samos Sobre los tamaños y las distancias del Sol y de la Luna: *“Sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua, de Rubens E. G. Machado”*, (Samos,

2016). Gran parte de los trabajos referido en los artículos estudiados, se refieren a la obra geométrica de Aristarco, varios aspectos de este estudio se tuvieron en cuenta en el diseño de las actividades del presente Trabajo de Grado.

Cada una de las investigaciones enriqueció la propuesta en sus distintas fases hasta la consolidación como trabajo de grado, en particular en la distinción y conceptualización para el diseño de las actividades, pilotaje e implementación de algunas de estas.

### 3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

En este apartado, se presentan el proceder en el Trabajo de Grado, la perspectiva y enfoque de la investigación, los escenarios de realización y las herramientas de recolección de la información y/o datos. El proceder metodológico se expone en el siguiente gráfico.



**Diagrama 1. Proceder Metodológico**  
**Fuente: Elaboración propia**

La perspectiva se enmarca en una investigación de tipo cualitativo, entendida como la descripción de sucesos complejos que se realiza en su totalidad, estudiando la realidad de los sujetos en su contexto natural, la rutina y las situaciones problema de la vida (Rodríguez, Gil, & García, 1996). El enfoque es descriptivo, se buscan los rasgos más importantes de las interacciones de los sujetos (Hernandez, Hernandez, & Baptista, 2003)

Los escenarios en los cuales se realizaron las actividades fueron colegios, salvo dos: una llevada a cabo con estudiantes universitarios y profesores en el VIII Congreso Nacional de Enseñanza de la Física y la Astronomía (2016) y el otro llevada a cabo con estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional en el espacio del curso Astronomía General (2016). La población con la cual se interactuó fueron estudiantes desde grado séptimo a estudiantes

universitarios, profesores en formación y en ejercicio (estas últimas en el VIII congreso Nacional de enseñanza de la Física). Cuatro de las actividades diseñadas (véase capítulo 6), fueron implementadas en el Semillero de Astronomía del Instituto Pedagógico Nacional en el primer periodo del año 2019, este escenario dispuesto con 14 estudiantes de distintos grados comprendidos entre séptimo y once.

Por otro lado, las diversas experiencias que se han llevado a cabo para la adecuación y formalización de la propuesta de aula se adquirieron en procesos de pilotaje en diversos espacios de implementación de actividades imperfectas en relación con aquellas de las que actualmente se dispone, estos espacios fueron:

Escuela Pedagógica Experimental (2 pilotajes) (2017 y 2019), Institución Educativa Alvernia (1 ponencia) (2016), Salón de la Ciencia (4 pilotajes) (2015, 2016, 2017, 2018), Instituto Pedagógico Nacional (1 ponencia y 3 implementaciones) (2016 y primer periodo 2019), Universidad Pedagógica Nacional grupo de astronomía general (1 pilotaje) (2016), VIII Congreso Nacional de Enseñanza de la Física y la Astronomía (1 ponencia y 1 taller) (2016), y Planetario distrital de Bogotá (modificación de un módulo) (2018). **(Esta información se ilustra con mayor detalle en la tabla: escenarios de implementación, pilotaje y difusión del trabajo, en el anexo 4.0)**

Los instrumentos que se tuvieron en cuenta para la recolección de la información fueron dibujos, fotografías, vídeos, grabaciones de audio y notas de los estudiantes. Los que se presentan en el diagrama 1., hacen parte del proceso de indagación, reflexión y difusión de la propuesta sobre el estudio del STL.

## 4. RELACIÓN DE DISTANCIAS Y TAMAÑOS SISTEMA SOL-TIERRA-LUNA EN LA COSMOGONIA DE ARISTARCO

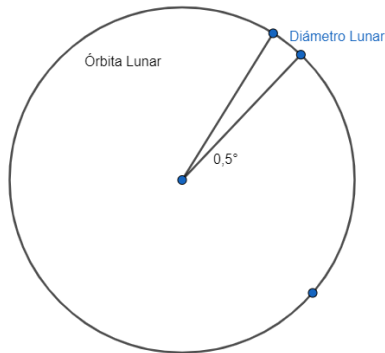
En este apartado se presentan las relaciones de distancias, tamaños y movimiento entre los cuerpos que constituyen el sistema STL, obtenidas por Aristarco de Samos (ver anexo 1), la referencia principal es la obra de Aristarco “*Sobre los tamaños y las distancias del Sol y de la Luna*” traducido al portugués por Rubens. E. G. Machado, y la obra sobre los filósofos griegos del historiador Thomas Little Heath “*A history of greek mathematics Volume II*”.

En primero lugar, Aristarco se basó en su hipótesis V para dar cuenta de una razón entre el radio Lunar ( $R_L$ ) y su distancia a la Tierra ( $D_L$ ),

***Hipótesis V. A Lua subentende a décima quinta parte de un signo do zodíaco.***

*Respecto a esta hipótesis, existen registros históricos que denotan que dicha medición se efectuó a ojo desnudo. Hoy en día se sabe que el ángulo al cual subtiende la Luna es de  $0.5^\circ$  o  $\frac{1}{720}$  partes del círculo zodiacal, o en general, de cualquier circunferencia, y que es cuatro veces el denotado por Aristarco. Resulta curioso respecto a esta estimación, que Arquímedes afirmase luego en su obra “Arenario” que fue aristarco quien descubrió que el ángulo al cual subtiende el disco solar es de aproximadamente  $0.5^\circ$ , casi el mismo lunar, cuando en su obra, Aristarco manifiesta que la Luna subtiende a la decimoquinta parte de un signo zodiacal, correspondiente a  $2^\circ$ .*

El método geométrico propuesto es el siguiente: Si la Luna subtiende a un ángulo  $\alpha = 0.5^\circ$  y esta es una fracción  $\left(\frac{1}{720}\right)$  de una de las circunferencias que constituye un círculo máximo de la esfera lunar. Es válido establecer que el arco de circunferencia ocupado por la Luna en su órbita es equivalente al número de porciones de arcos lunares significados en un número y un tamaño definido: el diámetro de la Luna ( $\varphi_L$ ).



**Imagen 2. Ángulo al que subtiende la Luna (Edición en Geógebra)**

$$2\pi D_L = 720\varphi_L \quad (Eq. 1)$$

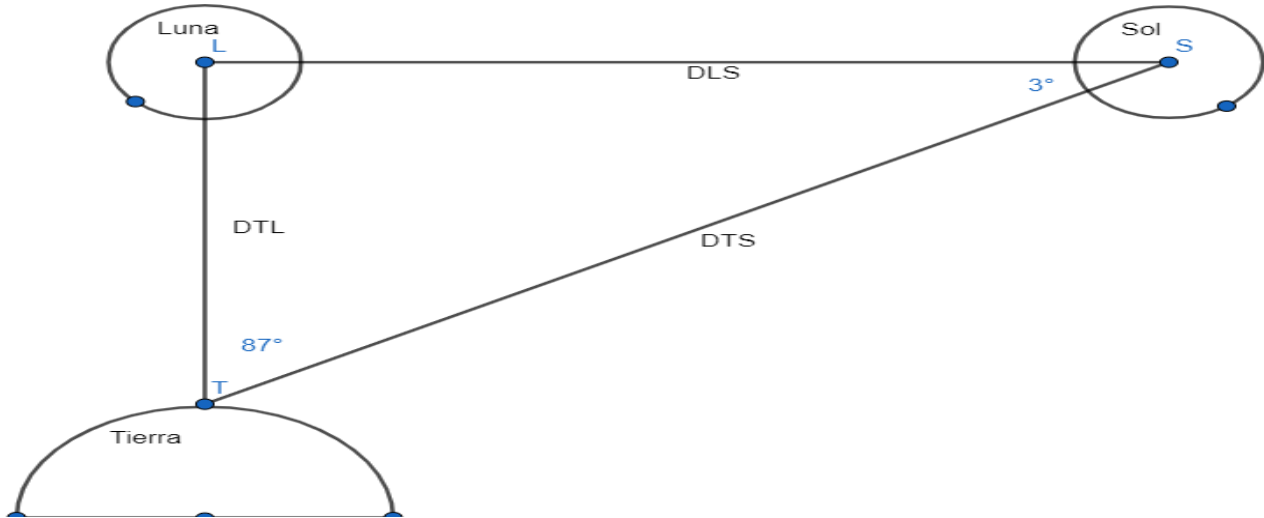
Donde  $D_L$ : distancia lunar, y  $\varphi_L$ : diámetro lunar. Esta ecuación será utilizada más adelante, luego de obtener los subsecuentes resultados.

#### **4.1. Relación entre las distancias Tierra-Luna y Luna-Sol.**

Teniendo a la mano la consideración anterior, Aristarco estableció una relación de distancias entre la Tierra, la Luna y el Sol, con una idea proveniente de la esencia geométrica de su hipótesis III, que versa sobre el plano que corta al observador con la Luna en la mitad, cuando esta se encuentra en una fase media (cuarto creciente o cuarto menguante), esto, junto a la suposición de que la luz que se observa de la Luna proviene del Sol, debido a su capacidad de reflejarla, da suficientes argumentos para proponer que el plano que corta a la Luna y al ojo del observador posado sobre la Tierra, y el plano que intercepta los centros geométricos de la Luna y el Sol, son perpendiculares entre sí, y por consiguiente, pueden ser representados como dos rectas que se cortan perpendicularmente en el centro de la Luna.

Este argumento geométrico le da sentido a la acción de construir un triángulo rectángulo imaginario en el cielo, cuyos vértices son: el ojo del observador (T), el centro de la Luna (L) y el centro del Sol (S). Los ángulos que midió e infirió Aristarco a la luz de lo establecido

según su hipótesis IV, son:  $87^\circ$  (ángulo  $LTS$ ) y  $3^\circ$  (ángulo  $LST$ ). La siguiente figura es una representación de dicho triángulo.



**Imagen 3. Representación Geométrica de Aristarco para estimación de distancia Tierra - Sol**

El procedimiento geométrico específico que usó Aristarco con toda esta información puede verse detalladamente en la proposición VII de su obra. En este puede evidenciarse la finura de la argumentación geométrica de Aristarco, y el rigor que el concedía al método geométrico de Euclides, teniendo bajo presente que, en aquella época, calcular valores exactos para las identidades trigonométricas era prácticamente imposible, y no había otra opción que recurrir a acotar los resultados mediante procedimientos geométricos extensos. Así lo hizo Aristarco para el caso de la relación entre las distancias Tierra-Luna y Sol-Tierra. Aquí, dejó el procedimiento al cual se recurre actualmente, empleando la relación trigonométrica del seno de un ángulo. La aproximación mediante fracciones obtenida por Aristarco es:

$$\frac{1}{20} < \frac{D_{TL}}{D_{TS}} = \text{sen}(3^\circ) < \frac{1}{18} \quad (\text{Eq. 2})$$

De la cual puede, por consiguiente, obtenerse:

$$20D_{TL} > D_{TS} > 18D_{TL} \quad (\text{Eq. 3})$$

El cual indica que la distancia Tierra-Sol ( $D_{TS}$ ), está comprendida entre 18 y 20 veces la distancia Tierra-Luna ( $D_{TL}$ ).

Si nos remontamos sobre las posibilidades de ejecución de cálculos hoy en día, basta con calcular el seno de  $3^\circ$  en el sistema de medición de grados estándar (CSG) para determinar la relación de distancias entre Tierra-Luna y Tierra-Sol, encontrando que dicha relación es:

$$\frac{1}{20} < \frac{D_{TL}}{D_{TS}} = \text{sen}(3^\circ) \approx 0.052 = \frac{52}{1000} < \frac{1}{18} \quad (\text{Eq. 4})$$

De lo cual, puede aducirse que el Sol está aproximadamente 20 veces más lejos que la Luna. Si bien, el método lógico mediante el cual procede Aristarco es correcto, su resultado presenta un margen de error muy grande en comparación con la razón de distancias  $TS$  y  $TL$  de la que se dispone actualmente. En la literatura se explicita que el error de Aristarco fue la **hipótesis IV** asociada a su medida imprecisa.

***Hipótesis IV. Quando a Lua nos parece dicótoma, sua separação do Sol é menor que um quadrante por um trigésimo de quadrante.***

*En esta cuarta hipótesis lo que Aristarco nos está expresando es que cuando la Luna se encuentra en cuarta fase, sea esta creciente o menguante, la diferencia angular en el cielo entre estos dos astros es algo menor (trigésima parte) que un cuadrante. Un cuadrante sería la separación angular de dos rectas que intersecan un vértice, de un ángulo recto. Lo que Aristarco nos dice es que la separación angular entre el Sol y la Luna es de  $\frac{1}{30}$  partes menores que un cuadrante, y esto es equivalente a  $87^\circ$ . Respecto a los orígenes de esta hipótesis, debido a que hay efectuada una medición, lo cual no está dentro de lo que se caracteriza como hipótesis, tal vez se presenta como un error de traducción de su obra, y la verdadera hipótesis a la base de su razonamiento es el ángulo recto con el cual el trazo entre el observador y la Luna, y el trazo entre la Luna y el Sol se cortan desde la perspectiva de un observador posado sobre la tierra, esto bajo la suposición de que el plano que corta los centros del Sol y de la Luna es perpendicular al plano descrito en la hipótesis III. (Ver anexo 1).*



Resulta que la verdadera separación angular entre el Sol y la Luna, cuando esta se encuentra en Fase de cuarto creciente o cuarto menguante es del resto de menos de  $\frac{1}{180}$  de un cuadrante, equivalente a  $89,85^\circ$ . Con este valor se obtiene entonces para la razón de distancias  $TL$  y  $TS$ :

$$\frac{D_{TL}}{D_{TS}} = \text{sen}(0,15) \approx \frac{26179}{10000000}$$

$$\frac{D_{TS}}{D_{TL}} \approx \frac{10000000}{26179} = 382 \quad (\text{Eq. 5})$$

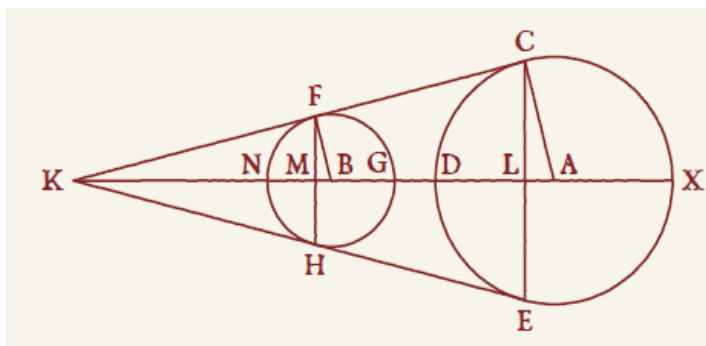
Que es un valor mucho más próximo al aceptado actualmente, que de forma gruesa es:  
 $D_{TS} \approx 390D_{TL}$

Debe tenerse de presente que esta es una relación de distancias media, puesto que la real cambia en virtud de que la órbita lunar es una elipse de excentricidad aproximadamente 0,05.

#### 4.2. Relación entre los tamaños de la Luna y el Sol.

Para fines de este apartado, debemos recurrir a una de las proposiciones de Aristarco (téngase presente que las proposiciones se derivan de las hipótesis planteadas, y el escrutinio del sistema analizado mediante la geometría euclidiana). En esta proposición se establece la relación que existe entre los tamaños de las superficies de dos objetos esféricos: iluminante e iluminado cuando la razón entre los tamaños de estos (iluminante e iluminado) es tal que el objeto que recibe y refleja dicha Luz (iluminado), es menor que el objeto que la produce (iluminante). La proposición en cuestión de Aristarco en su obra es la **proposición II**: y dice: **Se uma esfera é iluminada por outra esfera maior, a porção iluminada será maior que um hemisfério.**

Considérese que una esfera centrada en B se encuentra iluminada por una mayor centrada en A, siendo ambas esferas comprendidas por un cono cuyo vértice está del lado de la esfera de menor tamaño, donde se encuentra el ojo del observador (K). Considere un plano que contiene al vértice K y que corta las dos esferas en dos círculos y al cono que las comprende en un triángulo, obteniendo la figura:



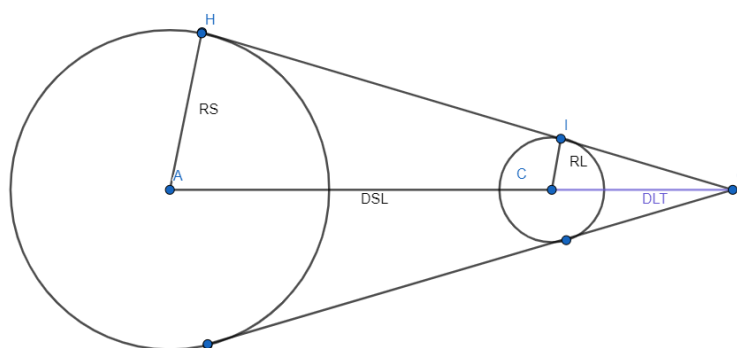
**Imagen 4. Relación entre superficies de esferas iluminante e iluminada (fuente: Sobre los tamaños y las distancias do Sol e da Luna, Aristarco de Samos)**

Las secciones de las esferas CDE y FGH son aquellas que, estando iluminadas, pueden ser perceptiblemente observadas por el ojo del observador K. En la figura, es evidente que el arco de círculo CDE corresponde al de la esfera iluminante y que el arco de círculo FGH al de la esfera iluminada por el arco EDC. Puede pensarse que el arco CDE corresponde a un círculo de diámetro CE, y que el arco FGH a uno de diámetro FH, ambos diámetros perpendiculares al eje XK. Como los segmentos FC y HE de los rayos EK y CK contienen al círculo de radio BF, cuyo centro B está contenido en el arco FGH, se concluye que la parte de la esfera iluminada es mayor que la mitad de la esfera.

Esta proposición es crucial para definir las relaciones entre los tamaños de la Luna y el Sol, en un evento astronómico conocido como eclipse solar como se verá en los siguientes párrafos.

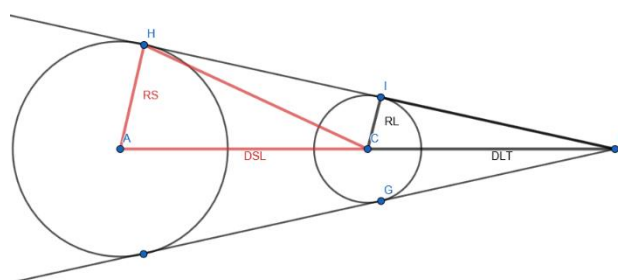
En la proposición IX de la obra de Aristarco, se establece, al igual que ocurría para el caso de las distancias, una proporción contenida en una desigualdad, debida la dificultad de la época de efectuar cálculos exactos de razones trigonométricas. La proporción que establece Aristarco es correcta, sin embargo, los errores en la medición para el cálculo de las razones entre las distancias Tierra-Sol y Tierra-Luna se propagan en el establecer las razones de tamaños como se verá su mutua dependencia. Por lo anterior, se recurre entonces al poder de cálculo del que se dispone actualmente para llevar a cabo los procedimientos lógicos derivados del tratamiento geométrico de Aristarco, y se efectúa un cambio de notación con el fin de simplificar el lenguaje geométrico habitual de las proporciones.

Antes de comenzar a detallar el análisis de Aristarco, debe tenerse presente que las imágenes y el análisis a continuación, son una concreción de lo que fue concluido en el apartado anterior, cuyo fin era la enunciación y demostración de la relación que existe entre las dos superficies de dos esferas: iluminante e iluminada, para el evento en cuestión (eclipse total de Sol), resulta evidente observar que la Luna eclipsa al Sol, y por consiguiente, la parte que de ella no vemos durante el eclipse, es el hemisferio iluminado de la Luna, y el Sol, la esfera iluminante, y también debemos observar que esto es compatible con los tamaños de las esferas que se observan en el cielo (Sol y Luna), que parecen ser del mismo diámetro cuando un eclipse solar se está dando.



**Imagen 5. Disposición del Sol y la Luna durante un eclipse Solar (fuente propia con apoyo de software Geogebra)**

Los radios de las esferas que fueron tomados en la imagen anterior no son al azar, los puntos externos de estos radios (H e I) concuerdan con la **proposición II** de Aristarco, y con las partes de las esferas que observaría quien estuviere presenciando y datando un eclipse total de Sol.



**Imagen 6. Disposición del Sol y la Luna durante un eclipse Solar y triángulos semejantes (fuente propia con apoyo de software Geogebra)**

En las dos imágenes anteriores, los segmentos  $R_S$  y  $R_L$  se refieren a los radios del Sol y la Luna, respectivamente, y los segmentos  $D_{SL}$  y  $D_{LT}$  se refieren a las distancias Sol-Luna y Luna-Tierra. En la última figura se pueden observar que los triángulos  $OAH$  y  $OCI$  son semejantes, al respecto, para tener una comprensión sobre el asunto de la semejanza allí presente, basta con establecer, para un observador dado, como cambia el tamaño de un objeto con relación a la distancia que se encuentra del observador, construcción que se detalla en el **anexo 2**. En otras palabras, lo que estamos observando en la imagen anterior es que el Sol está más lejos que la Luna, y que tan lejos se encuentra, dependerá de su tamaño real, en comparación con su tamaño aparente, del mismo diámetro que la Luna.

Toda la retahíla de lenguaje expresada anteriormente puede ser simplificada en una expresión matemática concreta en lenguaje más simple:

$$\frac{R_L}{R_S} = \frac{D_{LT}}{D_{LT} + D_{SL}} \quad (\text{Eq. 6})$$

Como la relación  $\frac{D_{LT}}{D_{LT} + D_{SL}}$  ya se conocía por el procedimiento efectuado en el acápite anterior, y que dejamos expresada de acuerdo con la medida correcta del ángulo STL ( $89,85^\circ$ ), la *eq. 6* queda:

$$\frac{R_S}{R_L} \approx 382 ; \quad R_S \approx 382R_L \quad (\text{Eq. 7})$$

De lo cual puede decirse que el Sol tiene un radio 382 veces mayor que el radio de la Luna.

Esto en cuanto al radio, en cuanto a los tamaños, tal y como lo estableció el autor mediante su **proposición X: A razão entre o tamanho do Sol e o tamanho da Lua é maior que a razão entre 5832 e 1, más menor que a razão entre 8000 e 1**, la razón entre los tamaños deberá venir en proporción a sus volúmenes, que son de orden cúbico, independientemente de las fórmulas exactas de las esferas. Debemos tener presente que cuando Aristarco había publicado su obra, Arquímedes aún no había encontrado una fórmula para caracterizar los volúmenes de las esferas, además, seguía latente el problema de calcular analíticamente el seno de un ángulo. En este orden de ideas, el rango de valores que él da para la estimación de los volúmenes en su proposición X, trae consigo el error contenido en la estimación de la

razón de tamaños, es por ello, que aquí se pone la razón de tamaños calculada desde el ángulo de medición correcto, de  $89,85^\circ$  que derivó en una razón de tamaños  $\frac{R_S}{R_L} \approx 382$

Luego, como sus tamaños vienen en relación con los cubos de sus radios, se obtiene:

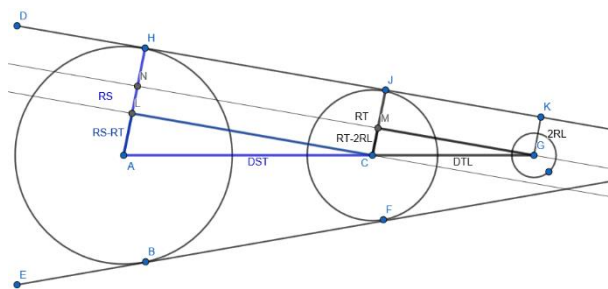
$$\frac{V_S}{V_L} = \left(\frac{R_S}{R_L}\right)^3 \approx 382^3 = 55,742,968 \quad (\text{Eq. } 8)$$

Esto puede interpretarse como: caben un poco más de cincuenta y cinco millones setecientos mil lunas en el espacio que ocupa el Sol. Es evidente que la manera de lograr esta relación de escala de manera discernible es verdaderamente un desafío didáctico.

### 4.3. Relación entre los tamaños de la Tierra y la Luna.

Siguiendo con el procedimiento documentado por Aristarco de Samos en su obra, ahora resta únicamente narrar la manera en cómo el autor logra determinar el tamaño de la Luna, como una fracción del tamaño de la Tierra, cerrando así, el asentamiento de las relaciones de distancias y tamaños entre los cuerpos del sistema STL. Para ello, echaremos un vistazo a la **hipótesis VI** y la contrastaremos con el evento astronómico conocido como: eclipse lunar.

De acuerdo con la medida que realiza Aristarco, la sombra de la Tierra, a la distancia a la que se encuentra la Luna, es equivalente a dos diámetros lunares, y el propósito de Aristarco, es utilizar esta relación para encontrar el diámetro de la Tierra en términos del diámetro de la Luna, con este fin, Aristarco procede a analizar la situación mediante la representación del problema en un plano. Así:



**Imagen 7. Representación geométrica de un eclipse Lunar (Fuente propia con apoyo de software Geogebra)**

Aristarco tenía conocimiento de que un eclipse lunar se produce cuando la Luna entra al cono de sombra que proyecta la tierra en el espacio cuando esta es iluminada del lado contrario por el Sol, con base en este conocimiento, diseña la anterior ilustración, que, en un marco general, es resultado de una serie de pasos que construyen una serie de relaciones geométricas pensadas desde la hipótesis IV y el conocimiento del hecho físico (eclipse lunar). El punto de partida, al igual que en todos los casos anteriores, es la proyección de un cono que contiene a 3 esferas en rayos que parten desde los puntos E y D, y se intersecan en el vértice O (no visible en la figura). Las esferas contenidas en estos dos rayos son en su respectivo orden de mayor radio a menor radio: el Sol, la Tierra y la Luna. Como puede observarse en la imagen, la última esfera (la Luna), no es tangente a los dos rayos, pues ella mide aproximadamente la mitad del diámetro de la sombra de la tierra, en esa región del espacio, según su hipótesis VI. De acuerdo con la notación de la imagen, los objetos son: 1. Radio del Sol ( $R_S$ ), 2. Radio de la Tierra ( $R_T$ ) 3. Radio del espesor de la sombra de la tierra a la distancia a la que se encuentra la Luna ( $2R_L$ ).

Teniendo lo anterior por comprendido, se procede a trazar dos rectas paralelas al rayo  $DO$ , una desde el centro de la Tierra, y la otra desde el centro de la Luna. Esto con el fin de proyectar el radio de la Tierra sobre el círculo que representa al Sol y el grosor de la sombra de la Tierra, sobre el círculo que representa a la Tierra. Siguiendo estos dos procedimientos, se logran dibujar los triángulos  $GCM$ ,  $CAL$  y  $GAN$ , de los cuales, puede evidenciarse fácilmente que los triángulos  $GCM$  y  $GAN$  son semejantes, al igual que los triángulos  $CAL$  y  $GCM$ , esto puede verificarse observando que estos dos triángulos tienen un ángulo recto en común, y otros  $\widehat{ACL}$  y  $\widehat{CGM}$  que son iguales, en virtud de la construcción de paralelas llevadas a cabo, y la observación de que ambos triángulos ( $GCM$  y  $CAL$  estarían perfectamente contenidos en el triángulo  $GAN$ .

Con estas relaciones en mano, resta hacer su simplificación en el lenguaje algebraico, así:

$$\frac{R_S - R_T}{R_T - 2R_L} = \frac{D_{ST}}{D_{TL}} = 382 \quad (Eq. 9)$$

Usando herramientas algebraicas se llega a la relación:

$$\frac{R_S}{R_L} = \frac{383R_T}{R_L} - 764 \quad (\text{Eq. } 10)$$

De la cual se conoce que  $\frac{R_S}{R_L}$  es 382. Sustituyendo este valor, se obtiene finalmente la relación:

$$\frac{R_T}{R_L} = 3; \quad R_T = 3R_L \quad (\text{Eq. } 11)$$

Teniendo a la mano las relaciones fundamentales a las que se llega de acuerdo con los procedimientos lógicos de Aristarco (*eq. 1, eq. 6, eq. 7 y eq. 11*), y con algo de álgebra, se puede entonces llegar a encontrar una relación entre todas las variables involucradas en el proceso de estimación de la relación de distancias y tamaños en el sistema STL. De modo que la única variable que queda pendiente por encontrar es el radio de la Tierra, trabajo que tuvo que esperar al experimento llevado a cabo por Eratóstenes en el siglo II a.c., en el cual, utiliza su conocimiento de la proyección de la sombra producida por un gnomon en un mismo día, a la misma hora, en diferentes lugares sobre la Tierra, para constatar su curvatura, su forma y la medida de su circunferencia. Aspecto no esencial para la estimación de la relación de distancias y tamaños.

Las relaciones importantes a las que se llega empleando el álgebra elemental son:

$$R_T = 3R_L; \quad R_S = 382R_L; \quad D_{TL} = \frac{720}{\pi}R_L; \quad D_{ST} = \frac{275040}{\pi}R_L \quad (\text{Eq. } 12)$$

Como puede observarse en *eq. 12*, todas las magnitudes dependen del radio de la Luna, salvo la primera, que requiere llevar a cabo la medida del radio de la Tierra (experimento de Eratóstenes), para conocerse puntualmente.

Todo este apartado permite ilustrar el procedimiento propuesto por Aristarco de Samos y da elementos para la consolidación de un marco conceptual del presente Trabajo de Grado para definir y diseñar las actividades de pilotaje y de aquellas que se implementaron.

## 5. MEDICIÓN DE RADIO LUNAR, DERIVACIÓN MEDIANTE UN PROCEDIMIENTO LÓGICO PROVENIENTE DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Para la identificación del radio lunar, se procedió a efectuar la medición acorde con lo derivado de los estudios propios respecto de la proyección de las sombras (**ver anexo 3**), para demostrar el poder de la aplicación de los hechos encontrados mediante su estudio empírico.

El día 21 de enero de 2019, se efectuó una observación astronómica desde las veredas del municipio de Sibaté con el fin de determinar experimentalmente (valiéndonos de la tecnología de la fotografía), con la mejor precisión posible, el tamaño de la Luna y su distancia respecto de la Tierra. Procediendo de este modo se ponen a prueba los resultados obtenidos en estudios anteriores sobre la naturaleza geométrica de las sombras y se obtienen elementos para la determinación de magnitudes de objetos lejanos tales como sus grados de distanciamiento de la tierra y sus tamaños, ampliando de este modo, las posibilidades realizar mediciones en el ámbito de la astronomía.

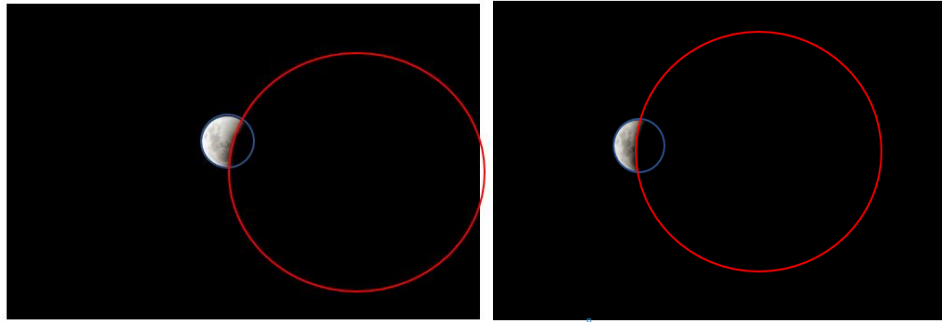
Teniendo las fotografías en cuestión se seleccionaron dos de todas estas, con el fin de estimar dos medidas diferentes para el radio lunar, cuando esta se encontraba en dos fases eclipsadas distintas, tal y como se podrá detallar a continuación en el paso a paso para la determinación de dicha medida.

**Paso 1:** La identificación de circunferencias completas de los dos discos (lunar y terrestre) y su bosquejo sobre las fotografías disponibles usando compas, o en su defecto (caso aquí documentado), una herramienta virtual de dibujo de circunferencias. El principio geométrico a la base de este primer paso es la particularidad en la construcción geométrica de una circunferencia: puntos equidistantes de un punto central o foco. (ver imagen 8). A fin de sentar claridad al lector, las circunferencias se dibujan usando un compás de tal modo que su apertura desde el centro, sea equidistante a los diferentes puntos del arco de circunferencia generado por la periferia de la sombra de la Tierra proyectada sobre la Luna en la fotografía.

Si las circunferencias realizadas son correctas, deberían poder ajustarse a otra imagen del mismo eclipse lunar, (y que está bajo la misma escala) en otro momento del evento, por

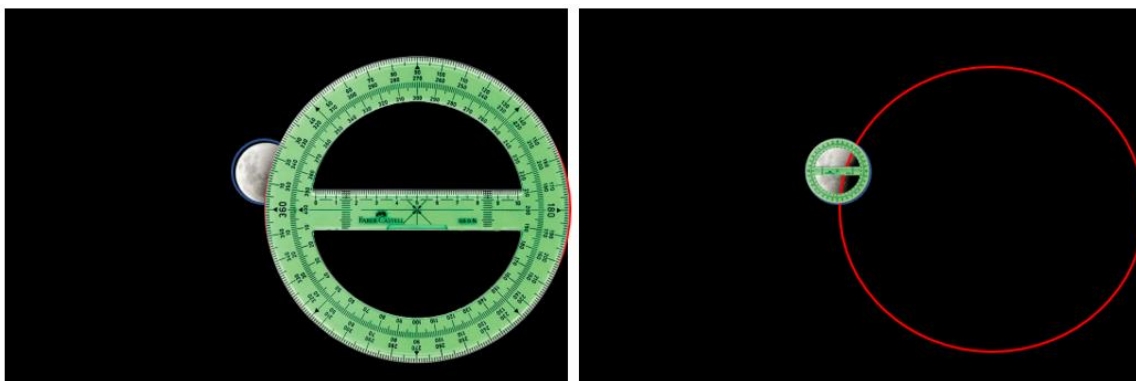


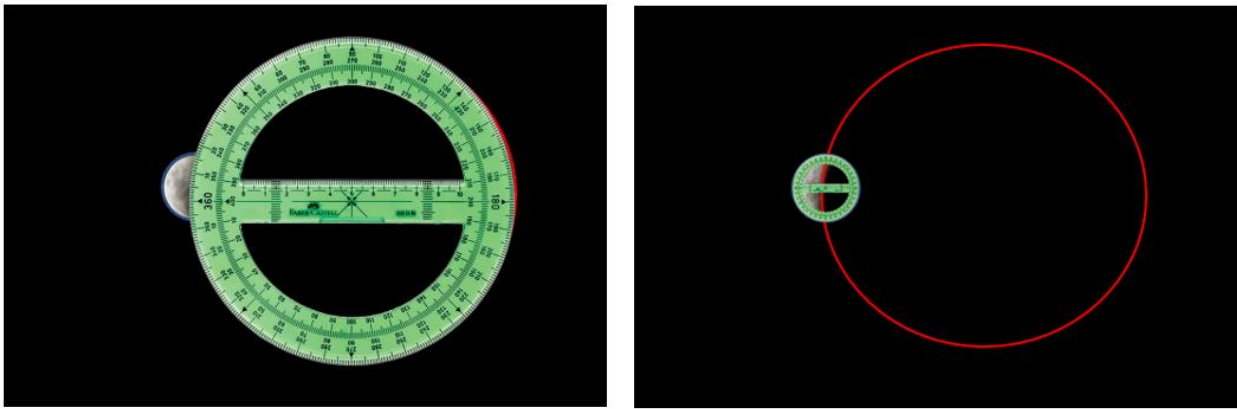
ejemplo, cuando la mitad de la Luna ha sido cubierta por la sombra de la Tierra; en el caso que se expone se dispone de las dos imágenes, cada una con distinto índice de ocultación.



**Imagen 8. Eclipse lunar y circunferencia de sombra de la tierra en dos etapas distintas del eclipse**  
Fuente: Autor

**Paso 2:** Después de haber sido dibujadas las circunferencias sobre las fotografías, se procedió a realizar la medida de los ángulos de los arcos que aparecen cuando las circunferencias se interceptan entre si (disco lunar eclipsado y disco de la sombra de la tierra) en cada imagen. Como damos por sentado que el radio de la Tierra ya nos es conocido a través del experimento histórico de Eratóstenes, y se ha deducido que el tamaño de la sombra producida por un objeto expuesto a una fuente luminosa lejana es equivalente al tamaño del objeto (ver **anexo 2: sombras proyectadas por objetos iluminados desde el infinito**), entonces el radio de la circunferencia de la sombra de la imagen es el mismo radio de la Tierra. Para llevar a cabo la operación de medición de ángulos correspondientes a cada arco de circunferencia, se emplea un transportador. En el caso que aquí se está representando (virtual), el transportador cambiará de tamaño para cada circunferencia dada, de modo que el tratamiento instrumental se simplifica notablemente.





**Imagen 9.:** Disposición de un transportador virtual sobre la circunferencia de la sombra de la Tierra durante un eclipse lunar en dos etapas distintas del eclipse. Arriba: etapa 1, abajo: etapa 2.  
Fuente. Edición autor

**Paso 3:** Efectuando la medida de los ángulos, obtenemos para los dos diferentes casos los siguientes ángulos:

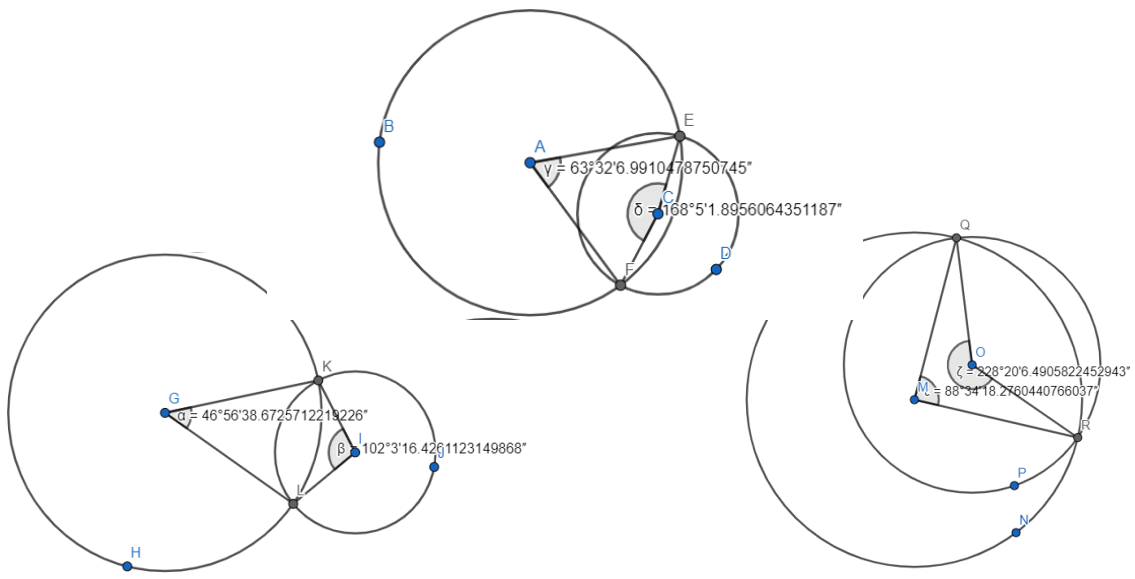
Imagen superior.  $\theta_L = 150^\circ$ ;  $\theta_T = 40^\circ$

Imagen inferior.  $\theta_L = 184^\circ$ ;  $\theta_T = 49^\circ$

Donde  $\theta_L$  es el ángulo correspondiente al arco medido del disco lunar, y  $\theta_T$  el correspondiente al del disco de la sombra de la Tierra.

**Paso 4:** En esta parte del procedimiento, que ya no obedece a un tratamiento instrumental y de obtención de datos medidos directamente, hay diversas maneras de resolver el problema; Se recurre aquí, a la que parece ser más enriquecedora (implica un trabajo de cálculo medurado, y deja entrever la armonía en las formas de establecer ciertas relaciones geométricas, y desde la teoría, brinda mayor grado de precisión en la medida; por supuesto, pueden existir algunas más sencillas, como la medición directa de las cuerdas correspondientes a cada circunferencia, justo en los puntos donde estas dos se interceptan, con el riesgo de aumentar el grado de error en la medición de los ángulos.

**Paso 5:** Se busca establecer una relación geométrica entre las dos circunferencias en cuestión. Para ello dibujamos diferentes pares de circunferencias al azar que se intersecan tal y como ocurre con los discos lunar y terrestre en la ocurrencia de un eclipse lunar, y observamos como ocurren los cambios entre los ángulos y las cuerdas de cada uno.



**Imagen 10. relación entre arcos de circunferencias y ángulos**  
**Fuente: Autor apoyado en software Geogebra**

Se dejan de lado los valores numéricos de los ángulos, y se da importancia a las relaciones cualitativas que en ellos aparecen.

Para el primer caso observamos que el ángulo  $\gamma$  es más pequeño que el ángulo  $\delta$ , y que la circunferencia de radio  $R_{AB}$  es mayor que la de radio  $R_{CD}$ .

Para el segundo caso, evidenciamos que el ángulo  $\alpha$  correspondiente a la circunferencia de mayor radio ( $R_{HG}$ ), es menor en magnitud que el ángulo  $\beta$  de la circunferencia que es de menor tamaño ( $R_{IJ}$ ).

Para el tercer caso, observamos que para la circunferencia pequeña (OP), el rango que ocupa el ángulo al interceptarse este con una circunferencia de mayor tamaño, es muy grande ( $\zeta$ ), en comparación con el ángulo que cubre los puntos de intercepción de la circunferencia de mayor tamaño (MN) ( $\varepsilon$ ).

Lo anterior puede sintetizarse en las tres relaciones:

$$\gamma < \delta ; y R_{AB} = R_{\gamma} > R_{CD} = R_{\delta} \quad (Eq. 13)$$

$$\alpha < \beta ; y R_{GH} = R_{\alpha} > R_{IJ} = R_{\beta} \quad (Eq. 14)$$

$$\varepsilon < \zeta ; Y R_{MN} = R_{\varepsilon} > R_{OP} = R_{\zeta} \quad (Eq. 15)$$

De estas tres expresiones se aduce como elemento general, que, para dos circunferencias dadas de distintos radios, los ángulos de intercepción entre ellas vienen en relación inversa con sus radios: a mayor radio, menor ángulo.

$$\gamma < \delta$$

$$R_\gamma > R_\delta$$

De esto, puede concluirse que, en un lenguaje cualitativo: si la circunferencia mayor se intercepta con un ángulo pequeño, y la menor con un ángulo grande, el producto de un ángulo grande por un radio pequeño es equivalente al producto de un ángulo pequeño y un radio grande, el sistema geométrico exhibe propiedad de conservación, y se matematiza:

$$\gamma R_\gamma \cong \delta R_\delta \cong \text{Constante} \quad (\text{Eq. 16})$$

Esto ocurre en virtud de que las circunferencias intersecadas son de la misma naturaleza, y por consiguiente, poseen características similares: la relación entre los ángulos y el tamaño de la circunferencia de uno, son equivalentes a la relación entre estas variables del otro.

Tenemos entonces una expresión derivada de la geometría de circunferencias intersecadas en dos puntos para resolver nuestro problema, el cual es el siguiente paso.

**Paso 6:** Aplicando la relación matemática encontrada en el paso anterior:

$$R_L \theta_L = R_T \theta_T \quad (\text{Eq. 17})$$

Tenemos dos casos para poner a prueba esta ecuación, y determinar el radio lunar para dos casos diferentes cuya distinción radica en la cantidad de sombra que se proyecta sobre la Luna, como consecuencia de la presencia de la Tierra cuando intercepta la luz proveniente del Sol en dirección de la Luna.

Despejando  $R_L$ :

$$R_L = R_T \left( \frac{\theta_T}{\theta_L} \right) \quad (\text{Eq. 18})$$

Aquí de entrada, como se evidencia en la forma matemática, se ha dejado de lado la relación entre la escala de la imagen, y el radio real de la tierra (que suele ser el método más usual, a la hora de estimar el radio lunar); lo cual se deriva del método empleado, cuyo semblante es dar características de un posible análisis conceptual para obtener el tamaño de la Luna mediante un eclipse valiéndonos de algunas propiedades de las sombras.

Continuando con el procedimiento: si tomamos como radio terrestre el valor que aparece en la literatura: 6378 km, Obtenemos para los dos casos, los siguientes valores de radio lunar:

$$R_{L1} = 1700,8 \text{ km}$$

$$R_{L2} = 1698,4 \text{ km}$$

Valores que están algo alejados (menos de 40 km), del valor real del radio lunar (1737 km). Esto tal vez se deba a la baja resolución que se tiene en la medición de ángulos para la circunferencia que representa a la Luna, además, la línea que le representa tiene un grosor equivalente a dos grados, y esto induce de entrada un error notable en la medida; error que, de ser calculado, en el peor de los dos casos analizados es del 2,2 %, y que refleja mayor precisión en la medida en relación con los resultados obtenidos por algunos de los casos documentados en la historia. El error que se calcula para la medición indirecta efectuada es siguiendo la fórmula estándar para el cálculo del error experimental:

$$E_i(\%) = \frac{|R_i - R_L|}{R_L} * 100 \%$$

Finalmente se adjunta una de las imágenes originales tomadas en la observación efectuada.



**Imagen 11. Eclipse Lunar fotografiado desde Sibaté el 21 de enero de 2019**

**Fuente: Tomada por el autor**

En este apartado, se encontró la aplicabilidad de los modelos matemáticos de Aristarco, construyendo una razón entre dos variables (ángulos de intersección de dos circunferencias y tamaños de sus arcos), relación que si bien, es eludible para la construcción del marco general de algunas de las actividades que se diseñan y se implementan como parte central del desarrollo de este trabajo, permite consolidar una medida directa, real, que da material de trabajo original respecto del cual, corroborar la veracidad de un aspecto del comportamiento de las sombras: si la sombra proyectada tras un objeto es producida por un foco proveniente de un lugar distante, su tamaño será equivalente al del objeto que la proyecta.

Las ventaja principal del método propuesto es que basta con la toma de una fotografía y la suposición del comportamiento de las sombras para objetos iluminados desde lugares lejanos, a diferencia del postulado por Aristarco, en el cual se requiere la observación del movimiento de la Luna, el conteo del tiempo que tarda en darse este tipo de eclipses, y la suposición de que cuando se da, la Luna transita justo en medio de la sombra de la Tierra, suposición que pudo derivar en un error en la postulación de su **hipótesis VI: A largura da sombra da Terra equivale a duas Luas (ver anexo 1: hipótesis VI)**.

## 6. DISEÑO DE ACTIVIDADES E IMPLEMENTACIÓN

Las actividades que fueron diseñadas y se llevaron a cabo están basadas en simulaciones del sistema astronómico STL. Estas simulaciones están encaminadas a la exploración de hipótesis construibles en el marco del trabajo astronómico en el aula, y con ellas se busca sentar la posibilidad de resolución de problemas de los estudiantes, garantizando un aprendizaje significativo, (en el **anexo 3**, se exponen las actividades diseñadas y alcances de la propuesta de estudio). Al respecto de la simulación Martínez Murillo & Mosquera Isaza (2012) exponen:

*“La simulación consiste en poner a un individuo en un ambiente que imite algún aspecto de la realidad, y en idear dentro de ese marco, un problema que exija la participación actual de alumno para iniciar y llevar a cabo una serie de indagaciones, decisiones y actos (Mc, Guierre, Christine, 1960); cita extraída del trabajo “Las simulaciones, un recurso didáctico para la enseñanza de la óptica” (p. 21).*

Como referencia de las actividades que pudieron ser desarrolladas, en las implementaciones se citarán a tres estudiantes en particular: estudiante A, estudiante B y estudiante C, quienes fueron los líderes de cada uno de los equipos de trabajo dispuestos para los talleres. Ellos son: Una chica de grado 9, un chico de grado 7 y un chico de grado 10, respectivamente. Las actividades están estructuradas de tal modo que se parte siempre, desde una situación, pregunta, o problema de estudio, seguido por un momento de discusión de las preguntas propuestas por los estudiantes, y finalmente, el desarrollo de trabajos manuales en conjunto y socialización de lo abordado. Las actividades diseñadas y realizadas fueron: sistemas de referencia cotidianos, en la Tierra y en el espacio; fases de la Luna desde diferentes lugares de la Tierra; relación de distancias y tamaños; geometrización de sombras y eclipses; eclipse lunar y determinación de razón de tamaños Tierra-Luna; simulación de eclipses de Sol y Luna y, sistemas de referencia y posiciones de la Luna y el Sol. A continuación, se exponen cuatro de ellas, las demás se presentan en los anexos.

## 6.1. Sistemas de referencia

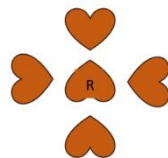
En esta actividad se busca que los estudiantes se sitúen dentro del contexto de interpretación de una observación, detallando como elemento preponderante, la presencia y especificación espacial del observador. Los objetivos son:

- Identificar al observador como referente fundamental en la definición de un fenómeno, siendo este interpretado como aquello que aparece.
- Reconocer la relatividad del movimiento, particularmente en el ámbito de rotar objetos en el espacio.
- Adquirir la noción de coordenada, y poner dicha definición en correspondencia con las formas de orientarnos respecto de un referente posicional.

En la realización de la actividad, se ubica a alguno de los estudiantes (A) en un punto aleatorio del salón, y se plantea como primera actividad: en grupos de 5 personas, construir en una hoja un mapa que dé cuenta de la ubicación del estudiante A, y poner a prueba su efectividad respondiendo las siguientes preguntas: ¿Puedes garantizar que cualquier compañero comprenda tu mapa? ¿Qué debes tener en cuenta para que cualquier compañero pueda replicar la ruta que sigue el mapa? La idea es que los estudiantes logren construir el camino en términos de dos referentes del movimiento (movimiento horizontal y movimiento vertical), o en términos de los puntos cardinales (sistema de referencia).

La actividad se enriquece con la inquietud de cómo podemos ubicarnos en la Tierra, en particular se abordó la pregunta ¿cuáles son los sistemas de referencia que tomarías para saber en qué lugar de la tierra te encuentras?

Se ubica a los estudiantes en grupos, cuatro están alrededor de un estudiante de rasgos particulares (seleccionado por el grupo) de modo que su disposición sea equivalente a la que se muestra en el siguiente diagrama pictórico:



*Disposición de estudiantes en grupos (fuente propia).*



Cada estudiante que forma el círculo va a describir en detalle el perfil y las características del compañero que se encuentra en el medio. Después los estudiantes cambiarán de lugar, cada uno tomará el lugar del siguiente en sentido a favor o en contra de las manecillas del reloj.

Se les plantea la pregunta a los estudiantes: ¿Cambió el perfil que observabas del compañero ubicado en el centro? Además, se les solicita que en una hoja expliquen con sus palabras a que creen que se debe ese cambio, ¿si lo percibieron! Se repite el procedimiento (girar en la misma dirección anterior), y responder a la pregunta (luego de que cada estudiante recupere su lugar inicial): ¿De qué depende el perfil que observas de tu compañero ubicado en el centro? Luego, el estudiante ubicado en el centro rotará sobre sí mismo  $90^\circ$  y preguntará a sus compañeros, si en algún momento del experimento anterior, pudieron ver el perfil que ahora está exhibiendo (después de haber rotado). Se discute en torno a que información podemos obtener ante la situación dada.

Se realizó lo mismo, en una disposición conjunta de todos los estudiantes que conforman el grupo: un compañero dispuesto en el centro del salón, y los demás formaban una circunferencia a su alrededor. En esta disposición se empiezan a recoger preguntas de los estudiantes y se genera un espacio de discusión.

Luego, se pregunta a cuatro estudiantes en cuya disposición formen una cruz perfecta sobre la circunferencia formada por los estudiantes alrededor de uno solo, ¿Qué perfil observan del estudiante del centro?

Como un juego equivalente al de la “rueda rueda”, los estudiantes girarán respecto del estudiante del medio, 90 grados. De nuevo se pregunta a los mismos cuatro estudiantes del caso anterior ¿qué perfil observan del compañero que permanece en el centro?

Luego se dispone a los estudiantes de forma aleatoria y se le pregunta a alguno, ¿Qué debe ocurrir para que pueda observarse el perfil del compañero de la misma manera a como fue observado antes? Para finalizar, cabe aclarar que esta actividad no pasó de ser diseñada, pues aún no se ha implementado, esto por lo convenido con el profesor a cargo del semillero de astronomía del Instituto Pedagógico Nacional (IPN), quien designó el espacio para llevar a cabo cuatro de las siete actividades diseñadas.

## 6.2. Relación de distancias y tamaños

En este taller se busca caracterizar la noción de semejanza triangular, como elemento propio para la identificación de la lejanía de astros en el cielo, particularmente, distancia Tierra-Sol y Tierra-Luna y, construir argumentos acerca de las distancias de lejanía de Sol y la Luna, mediante la comparación de las características que componen a cada uno de estos cuerpos en el cielo. Los objetivos son:

Realizar dibujos que consideren la esencia geométrica del sistema Tierra-Sol-Luna.

Caracterizar la noción de semejanza triangular, como elemento propio para la identificación de la lejanía de los astros en el cielo, particularmente, distancia Tierra-Sol y Tierra-Luna.

Construir argumentos acerca de las distancias de lejanía de Sol y la Luna, mediante la comparación de las características que componen a cada uno de estos cuerpos en el cielo.

Se plantean las preguntas ¿Qué cuerpo celeste es de mayor tamaño, el Sol o la Luna? Y ¿cuál está más lejos? ¿Por qué? Se organizan grupos de cuatro estudiantes. Se trae a colación la pregunta central de esta primera actividad: ¿Cuál de los dos astros anteriores está más lejos?, pregunta central que está contextualizada bajo las cuestiones referidas en la primera parte de la sesión.

Se retoma el hecho de que, en el estudio de las fases de la Luna, encontramos que había ocasiones en que el Sol y la Luna podían observarse al mismo tiempo en el cielo; empleando algunas fotografías donde se evidencia este evento. Los materiales requeridos fueron: discos de diferentes diámetros, preferiblemente de grandes diferencias diametrales (pueden usarse monedas de distintas denominaciones, anillos, etc. cuerdas o hilos).



**Imagen 12. Sol y Luna en el cielo diurno.**  
**Fuente:** <https://cdn.xl.thumbs.canstockphoto.com>



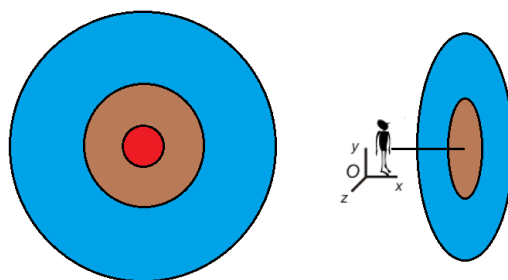
**Imagen 13. Vista al cielo a las 3:00 pm usando Stellarium desde el centro de México.**  
**Fuente:** <https://elespinazodelanoche.com/2013/12/02/encuentra-a-venus-durante-el-dia/>

Los estudiantes ya organizados en los grupos analizan el cambio de tamaño de un disco, partiendo de un punto inicial estimado por ellos mismos. Cada grupo dibuja la forma en cómo se percibe el cambio de tamaño que “experimenta” el disco en cuestión, conforme este se aleja del observador. Se tiene en cuenta en el desarrollo del taller las preguntas: ¿existe alguna distancia para la cual dos discos cualesquiera de diferentes tamaños se vean de igual diámetro? ¿Qué puedes concluir respecto de esto?

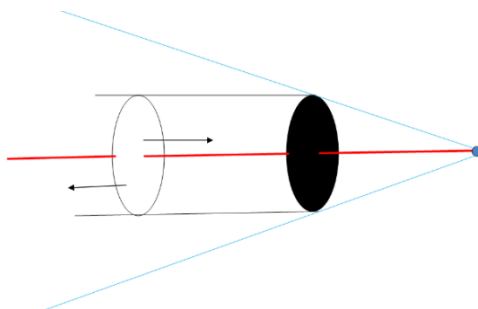
En los diferentes grupos organizados, empleando hilo o alguna cuerda, se miden los diámetros de los discos y las distancias para las cuales, dos discos de diferentes diámetros se ven iguales. También se computa la distancia que existe entre el ojo de quien sujeta el disco más pequeño y dicho disco. Para lo anterior, se requerirá de un amplio espacio, y se hará explícita la importancia de la sinergia de los diferentes grupos de trabajo. Lo ideal es que cada equipo realice el trabajo con dos conjuntos de discos diferentes (dos experimentos de medición).

Luego de que los estudiantes hayan tomado nota de los datos concretos adquiridos en el procedimiento experimental anterior, se retoman los datos recopilados por los estudiantes en una pizarra, y se hace una discusión en el aula entorno a encontrar una relación entre tamaños y distancias para todos los datos recopilados.

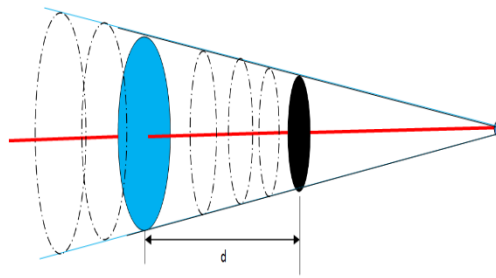
En relación con esta dinámica, se connotan distintas perspectivas que sugieren la continuidad de la actividad por sí misma, es decir: las preguntas sucesivas se deducen de la misma experiencia. Entre las tantas posibles a formular, la que más focaliza el problema establecido es una previamente enunciada, pero que ahora tendrá contestación desde un elemento de experiencia previamente construido (relación entre distancias y tamaños de los discos): ¿Qué astro crees que es más grande, el Sol o la Luna? ¿Por qué? A continuación, se adjuntan las imágenes que hacen explícito el problema que se está abordando.



**Imagen 14. Representación de discos de distintos diámetros vistos desde un mismo lugar.  
Fuente: elaboración propia.**



**Imagen 15. Representación de discos de igual diámetro vistos desde un mismo lugar, se observa que el disco trasero (blanco), queda cubierto por el disco negro, y por consiguiente no puede ser visto por el observador  
Fuente: Elaboración propia**



**Imagen 16. Representación objetos de distintos tamaños a diferentes distancias, particularmente: un objeto de mayor tamaño (objeto azul) que otro (Objeto negro), se verán de igual tamaño cuando la distancia de separación entre ambos es  $d$**   
**Fuente: Elaboración propia**

Abordando el aspecto sobre semejanza triangular y las ventajas que ofrece para resolver problemas de la astronomía, la física, incluso de la cotidianidad. Se aborda las inquietudes: ¿cómo calcularías qué tan lejos se encuentra la Luna? ¿Qué datos requerirías para poder llevar a cabo este cálculo?

Esta actividad fue exitosamente implementada -casi en su totalidad- en el Instituto Pedagógico Nacional (IPN), los estudiantes se dispusieron en grupos de aproximadamente cuatro personas, este taller se simplificó notoriamente por el mero acto de hacer coincidir en tamaño aparente, tres o más esferas de distintos diámetros ubicadas a diferentes distancias entre sí (consejo sugerido por un estudiante de la práctica II que estaba acompañando la implementación), como se puede observar en las siguientes imágenes:



**Imagen 17. Estudiantes estimando relación entre tamaños y distancias**  
**Fuente: Foto tomada por el autor**

Cuando se hubo de socializar lo aducido en esta actividad a la luz de las preguntas planteadas, varios estudiantes estuvieron de acuerdo con que la representación más acertada sería un triángulo. Un grupo de estudiantes se pensó todo el problema de la razón de distancias y tamaños, como una relación de proporcionalidad, construyendo una regla de tres simple. En

otro grupo -donde algunos estudiantes ya conocían y detallaban la semejanza triangular- llegaron a situar problemas concretos, como encontrar la distancia a la que se encuentra, por ejemplo, la Luna, tapándola con una moneda, si se conoce su tamaño. Los grupos en general terminaron por acoger las ideas de los dos anteriores, y se dispusieron a efectuar medidas de distancia para esferas de distintos diámetros, esto es: corroborar que efectivamente se cumplía la regla de tres, propuesta.

### **6.3. Geometrización de sombras y eclipses**

Los objetivos de la actividad fueron:

- Comprender que elementos son esenciales para producir el efecto de las sombras.
- Identificar la geometría de las sombras, de modo que logre entenderse el colapso del tamaño de la sombra cuando los rayos luminosos que son fuente de ellas se encuentran en la lejanía, lo que Aristarco y Eratóstenes interpretan como la suposición de que los rayos que devienen del infinito son rayos paralelos.
- Caracterizar a las sombras como una composición de umbras y penumbras y tener claridad respecto de estos dos conceptos.
- Identificar los eclipses lunares como fenómenos mediante los cuales puede darse cuenta de la forma de la Tierra y del tamaño de la Luna.

La actividad comenzó en un salón oscuro con un estudiante voluntario, este estudiante se dispuso de cara a la pared a una distancia de 1 metro de esta, en esta posición, sobre él fue proyectada luz blanca a una distancia del estudiante, relativamente cercana (2 metros).

Sobre la pared detrás del estudiante se proyectó una sombra, y se discutió con relación a las características de esta: colores y tamaño. Aquí se plantearon las preguntas: ¿cómo cambiará la sombra proyectada sobre la pared en caso de alejar la fuente luminosa del objeto iluminado (compañero voluntario)? ¿Cómo cambiará si luego de alejar la fuente luminosa, alejo de la pared al objeto iluminado (acercándolo hacia la fuente luminosa)? Para responder a estas preguntas, los estudiantes se organizaron en grupos de 4, y efectuaron las respectivas medidas con los materiales que pronto les serían entregados: focos de luz puntual, idealmente blanca

(linternas de smartphones), cartulina blanca (Pantalla de proyección), esferas y discos de distintos diámetros, cintas y metros. Con este material en manos, se les dejó experimentar libremente, guiados bajo las dos preguntas anteriores.



**Imagen 18. Estudiantes midiendo sombras, relaciones entre tamaño de sombras y distancia de foco luminoso.**

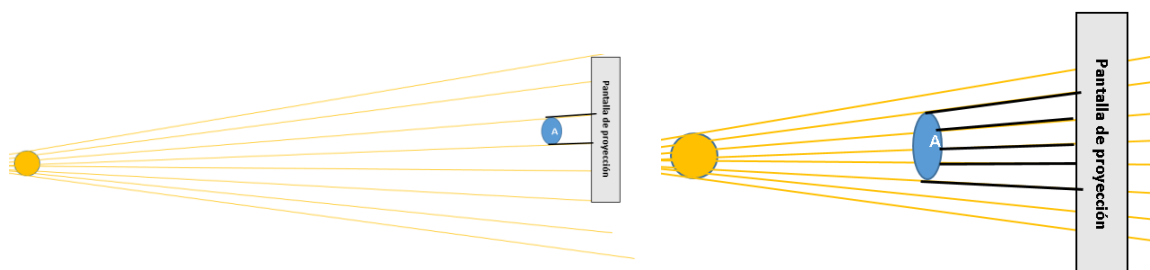
**Fuente: Foto tomada por el autor**

Todos llegaron a la misma conclusión, pero expresada en palabras distintas. Por ejemplo. la estudiante A dijo: *si la fuente se aleja de la bola de icopor, la sombra se achiquita*, en tanto el estudiante B comentó: *cuando acerco la bola a la luz la sombra es muy grande*. Se estaban refiriendo a la misma situación, recurriendo a los conceptos contrarios: agrandar y empequeñecer. La pregunta que es guía de uno de los aspectos más trascendentales de esta actividad es: ¿Qué tan pequeña puede llegar a hacerse la sombra de la bola de icopor cuando el foco luminoso está muy lejos?

Las respuestas inmediatas a esta pregunta fueron del tipo: la sombra se hará tan pequeña que dejará de verse, o la sombra se volverá un punto, al cuestionarles sobre sus argumentos, les motivó el desarrollo del experimento anterior, pero esta vez con una disposición espacial distinta: de modo que pudieran ubicar el foco luminoso lo más lejos posible de la esfera y la pantalla de proyección. Todos terminaron encontrando, que la sombra proyectada por el objeto en la pantalla termina siendo del mismo tamaño que del objeto.

La segunda parte del taller implementado fue una simulación real de acontecimientos astronómicos: eclipse total y parcial de Luna, se abrió dicho espacio mediante la pregunta: ¿Qué es un eclipse de Luna? Para esta simulación se requirió el apoyo de dos estudiantes, y parte del hecho encontrado en la primera parte de la actividad: El tamaño de la sombra cuando

un objeto iluminado se encuentran “infinitamente distante” de la fuente luminosa, colapsa en el tamaño del objeto. Esto se muestra en las dos imágenes siguientes, que representan en dos dimensiones, la sombra producida por objetos a diferentes distancias de una fuente luminosa.



**Imagen 19. Producción de sombras a cortas (imagen de la izquierda) y largas (imagen de la derecha) distancias de una fuente luminosa.**  
**Fuente: Elaboración propia**

Respecto a esta parte del trabajo, los estudiantes del semillero ya tenían concepciones respecto del concepto de eclipse lunar, tal y como se ilustra para los dos casos documentados de estudiantes de distintos grupos de trabajo: (**estudiante C**): *El eclipse lunar es que la Tierra tapa a la Luna, y por eso no se ve.* Y la **estudiante A**: *La luna se interpone en la sombra de la Tierra.* De la discusión emergente en este punto de la actividad, se mostraron las fotografías de un eclipse lunar, y se procedió a llevar a cabo la simulación de uno, con los materiales entregados previamente a los estudiantes.

Respecto a la simulación y al evento simulado, la **estudiante A** precisó algo esencial: *Entonces podemos calcular dependiendo de la sombra que se proyecta sobre la Luna, el tamaño de la Tierra, porque el Sol está lejos.* Ante la cual, otro compañero **estudiante C** comentó: *pero entonces deberíamos conocer el tamaño de la Luna.* Aquí el investigador tuvo que intervenir para precisar ciertas cosas: 1. Daremos por sentado que conocemos el tamaño de la Tierra, cuyo cálculo fue llevado a cabo por Eratóstenes. Normalmente, se modelaría el experimento llevado a cabo por Eratóstenes con sus respectivos cálculos, sin embargo, este grupo de estudiantes ya lo había realizado en temporadas anteriores a la de la implementación que se describe, por otro lado, se requeriría el diseño de otra actividad, que extendería innecesariamente la propuesta. 2. Entonces la misión será, de acuerdo con el procedimiento que los estudiantes propusieron, calcular, no el tamaño de la Luna, pero si el tamaño de un



objeto siguiendo la luz de las ideas previamente construidas. Respecto al cálculo del tamaño de la Luna, para llevarse a cabo, hubo previamente de haberse fotografiado y documentado un eclipse lunar.

Con las precisiones dadas, se dejó un espacio abierto para reflexionar en torno a las ideas importantes del experimento llevado a cabo por Eratóstenes: suposición de que las sombras producidas por el Sol son proporcionales a los tamaños de los objetos en la Tierra, ante la cual, todos los estudiantes se mostraron convencidos, a la luz de la experiencia realizada previamente.

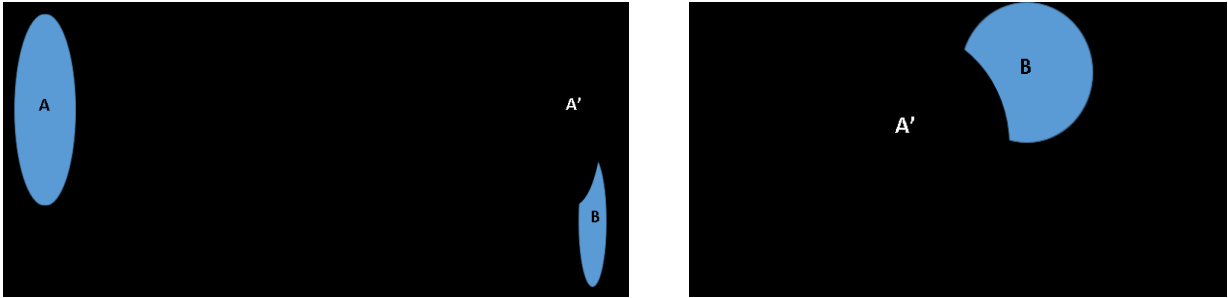
Entonces, para que la simulación fuere lo más fiel posible a lo que se asume como un hecho (la lejanía del Sol), los estudiantes propusieron alejar el foco lo máximo posible en el salón.



**Imagen 20. Estudiantes simulando eclipse Lunar**  
**Fuente: Foto tomada por el autor**

El estudio de la umbra y la penumbra, para esta actividad implementada no se tuvo presente, en especial por los cortos tiempos en el espacio de implementación, sin embargo, se hizo la acotación al respecto comentándose sobre las zonas que componen a las sombras: una oscura (umbra) y otra que es ligeramente menos opaca (penumbra).

La tercera parte de esta actividad fue el trabajo en torno a la toma de fotografías frontales a la sombra del objeto iluminado (A) a larga distancia, proyectada sobre una parte de la superficie del objeto B. (ver imágenes), fotografías que los estudiantes se comprometieron a traer impresas en la próxima sesión.



**Imagen 21. La primera corresponde a la vista transversal sistema de cuerpos y sombra, la segunda, es la vista frontal.**

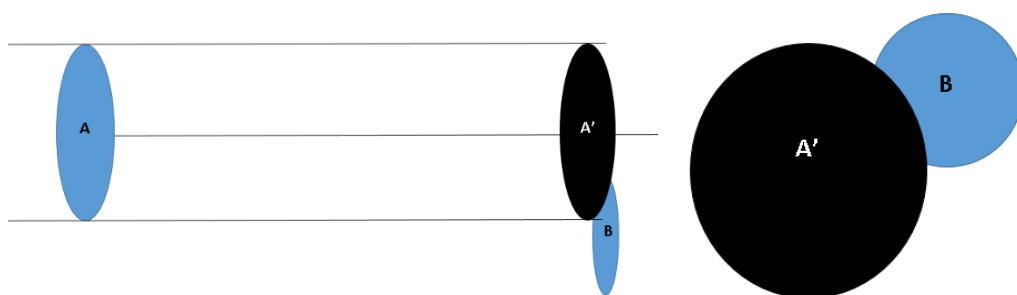
**Fuente: Elaboración propia.**

Posteriormente, a los estudiantes se les recogió la esfera o disco utilizado como objeto sobre el cual se proyecta la sombra (B) del conjunto utilizado, y se les permitió medir el diámetro de la esfera o disco que no fue recogida. Esto es una representación simbólica del comienzo de un eclipse lunar, teniendo bajo consideración el fenómeno más que las escalas de tamaño apropiadas debido al tamaño aleatorio de las esferas y discos dispuestos para la clase. Se hizo explícito que la medición del diámetro de la esfera o disco es una representación de que se conoce el tamaño del objeto desde el cual se mira la sombra que está proyectando sobre un objeto de tamaño desconocido. Finalmente, se retoma el aspecto sobre la presencia de la umbra y la penumbra en la caracterización de las sombras para discutir sobre los efectos ópticos que podrían resultar en los eclipses por causa de estas.

#### **6.4. Eclipse lunar y medida de relación de tamaños Tierra-Luna**

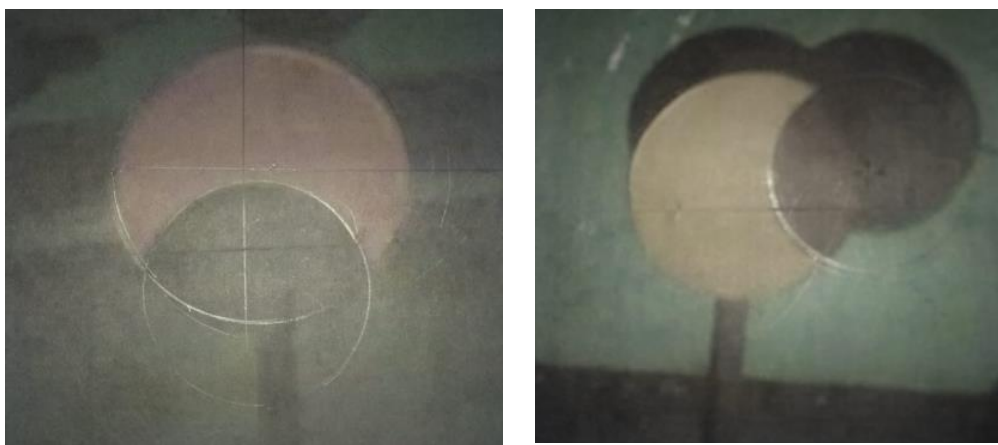
En esta actividad (que hereda los aspectos conceptuales derivados en la actividad anterior para su oportuna aplicación), se pretende encontrar el diámetro de una circunferencia que se cruza con otra en ciertos puntos, conociendo el diámetro de alguna de ellas. El propósito es encontrar el diámetro de objeto sobre el cual se proyecta la sombra (B), conociendo el tamaño del objeto que produce la sombra (A), cuando es iluminado desde una fuente luminosa lejana, análogamente a conocer el tamaño de la luna cuando la sombra de la tierra se proyecta sobre su superficie.

Los materiales utilizados fueron: por cada equipo de trabajo, un compás, las fotografías que fueron tomadas en la sesión anterior y lápices. Con estos materiales, se construyó la relación de escala entre el diámetro de la cuerda medido en la clase anterior, y los discos que aparecen en la fotografía, y que eliminando la oscuridad (sólo con motivos de mostrar con mayor claridad la situación), se ilustra a continuación.



**Imagen 22. Primera, Vista transversal sistema de cuerpos y sombra aclarada y en la segunda imagen Vista frontal**  
**Fuente: Elaboración propia**

De esta actividad se obtuvieron distintos resultados -como podrá evidenciarse en el transcurso de la narrativa de este apartado-, y contrario a las anteriores, si hubo de trabajarse con algunos cálculos. En total se realizó el trabajo con tres equipos, cada uno de cuatro estudiantes.

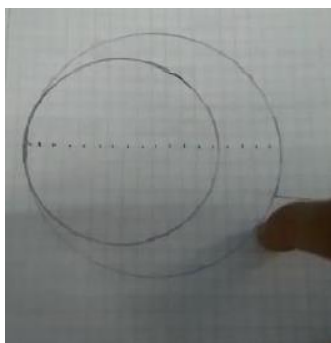


**Imagen 23. Dibujo de los estudiantes de circunferencias de la sombra de un objeto proyectada sobre otro**  
**Fuente: Foto tomada por el autor**

Lo primero que hicieron los estudiantes, fue completar sobre cada fotografía, la circunferencia correspondiente al arco que formaba la sombra proyectada sobre el disco (ver

imagen anterior), y comparar sus tamaños, la comparación llevada a cabo, ya dependía de las estrategias de los grupos. Se dispuso un tiempo de 40 minutos, teniendo bajo consideración que se debía idear un método para determinar el tamaño real de las sombras, a través de la información de la que disponían: el diámetro real de uno de los discos, y los tamaños en las fotografías de ambos objetos. Mas de un estudiante terminó encontrando una aplicación, de nuevo, a una regla de tres, sin embargo, esta vez fundamentada en un cambio de escala. El estudiante C efectuó explícitamente en un papel el siguiente análisis:

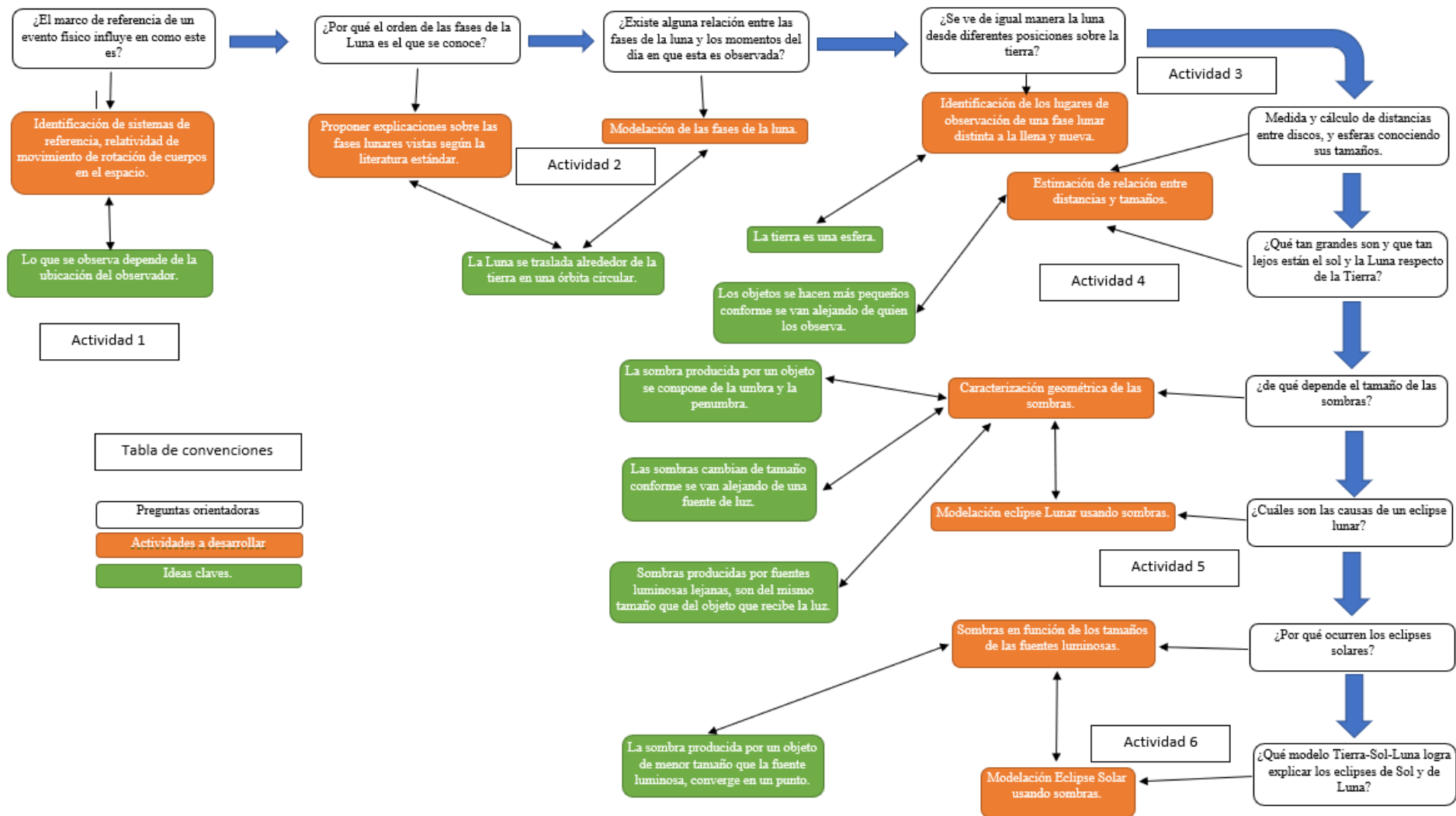
*“Después de tener la foto con las dos bolas: sabemos cuánto mide esta (esfera de mayor tamaño) y no está (esfera de menor tamaño) pero en la foto, las distancias son iguales; los metros siguen siendo metros. Cada 0,5 centímetros dibujamos una línea (ver imagen abajo) y contamos cuántas había en cada una de las bolas, dividimos los de la primera bola (esfera de mayor tamaño) con los de la segunda (esfera de menor tamaño), y luego multiplicamos por el tamaño real del objeto que conocíamos, y obtuvimos la medida de la bola que no conocíamos”*



**Imagen 24. Dibujo de un estudiante comparación circunferencias**  
**Fuente: Foto tomada por el autor**

La actividad concluyó cuando todos los estudiantes encontraron los tamaños calculados, y se compararon con los tamaños reales de las esferas, acto seguido, se comentó en detalle, el experimento llevado a cabo para efectuar el cálculo de diámetro de la luna, partiendo de una fotografía de un eclipse lunar.

Todas las actividades diseñadas, incluidas las que no fueron implementadas, se sintetizan en el siguiente diagrama.



## 7. REFLEXIONES FINALES

Las reflexiones finales del presente Trabajo de Grado se organizan teniendo en cuenta la pregunta investigativa *¿Cómo estudiar las relaciones de distancia, tamaño, posición y movimientos relativos en el sistema Sol-Tierra-Luna (STL) de modo que pueda construirse una propuesta enfocada a la enseñanza de dicho sistema cósmico?*, los objetivos, los referentes teórico – metodológicos, los hallazgos y análisis de las actividades de pilotaje e implementación que se realizaron. A continuación, se presentan las que emergieron de la actividad investigativa.

- **Establecimiento de las magnitudes de distancias y tamaños del sistema STL, desde la obra de Aristarco de Samos**

El estudio de la obra de Aristarco de Samos da elementos para ampliar una mirada en relación con los desafíos presentes en la estimación indirecta de razón entre las magnitudes astronómicas de distancias y tamaños del Sol, la Tierra y la Luna. La exploración de esta obra enriquece la mirada en torno a las formas de medir distancias en Astronomía, descubriendo que, a partir de sus estimaciones y sus métodos, otras magnitudes astronómicas pueden ser derivadas, por ejemplo: distancia a la que se encuentra Venus o Marte.

- **Actividades de pilotaje e implementación**

Los resultados de la implementación fueron favorables: si bien los participantes desconocían en detalle cómo hacer las estimaciones de distancias y tamaños del Sol la Tierra y la Luna, tenían pistas sobre lo que debían encontrar, lo cual implicó una dinámica más amigable para el docente-investigador, en relación con el grado de aceptación y comprensión de las actividades propuestas, así como la capacidad del grupo de discutir y argumentar respecto de las situaciones que conllevan a la construcción de las relaciones de distancias y tamaños del sistema STL. Debe tenerse presente que la implementación se llevó a cabo con un grupo de estudiantes del Instituto Pedagógico Nacional cuyos miembros ya tenían experiencia con trabajos en el ámbito de la Astronomía, y, por consiguiente, estaban familiarizados con su lenguaje.

La posibilidad de tener diversos escenarios de pilotaje e implementación genera una mirada crítica sobre las acciones pedagógicas y los procesos de enseñanza, emergen ideas innovadoras, y se visibiliza la relevancia de la diversidad en la formulación de preguntas tanto en el diseño, como en la implementación, que enriquecen el horizonte de sentido de las actividades realizadas en el aula, y fortalecen la mirada del profesor en formación no sólo en su quehacer en el aula si no también en su papel como docente investigador.

- **Relaciones distancia, posición y movimientos relativos en el sistema STL**

Se tienen argumentos para inferir las órbitas correspondientes de la Luna y del Sol (modelo heliocéntrico): si el Sol se encuentra demasiado distante en comparación con la Luna (392 veces), y a esta distancia los rayos del Sol llegan paralelos a la Tierra, y se conocen las periodicidades: 1. anual del Sol mediante las estaciones. 2. mensual de la Luna mediante sus fases, se puede inferir (pensando en las escalas de los movimientos de traslación), que la Tierra se mueve con la Luna orbitando alrededor de sí, y la Luna y la Tierra se mueven en conjunto orbitando alrededor del Sol.

- **Simulación y modelación del sistema STL**

La motivación que surge al explorar la obra de Aristarco, de la mano con las posibilidades de replicar algunos de sus experimentos históricos (teniendo a entera disposición herramientas modernas como la fotografía), fue otro aspecto crucial para retroalimentar las actividades que fueron diseñadas, y deja abierta la posibilidad de réplica como parte de un proyecto de Astronomía en la escuela.

La adaptación del aula de clases como lugar en donde se reproducen algunos eventos celestes a escala mediante su simulación es un ejercicio que llama a los estudiantes a experimentar todas las posibilidades, recrear las situaciones y avanzar en la comprensión de lo que acontece en el sistema STL. El trabajo investigativo aporta elementos pedagógico – didácticos y disciplinares para pensar la Astronomía y su enseñanza en la Educación Básica, Media y universitaria.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Arias, J. A. (2016). *Módulo basado en una herramienta computacional vpython para la enseñanza de las fases lunares, los eclipses solar y lunar en un espacio académico de educación media (Tesis de grado)*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Ayala, M. M., Garzón, M., & Malagón, F. (2007). Consideraciones sobre la formalización y la matematización de los fenómenos físicos. *Memorias del congreso Nacional de enseñanza de la física*.
- Caballero Soler, O. O. (2013). *Una transición de la geometría a la trigonometría, utilizando problemas históricos de la astronomía como recurso didáctico en la clase de matemáticas (Tesis de maestría)*. Bogotá DC.: Universidad Nacional de Colombia.
- Cruz Amaya, S. E. (2017). *Concepciones de los niños de quinto de primaria del Instituto Psicopedagógico Juan Pablo II sobre el sistema Tierra-Luna (Trabajo de grado)*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Dai, M., & Capie, W. (1990). Misconceptions about the Moon Held by Preservice Teachers in Taiwan. *ERIC*, 1-26.
- Deulofeu, J., & Figueiras, L. (2002). *Las medidas a través de la historia*. Barcelona: Matemàtiques I.
- H. Levy, D. (2010). *Guide to Eclipses, Transits, and Occultations*. New York: Cambridge University Press.
- Hernandez, Hernandez, & Baptista. (2003). *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill.
- Joao A. Lopes, I. M. (2004). Teachers' perceptions about teaching problem students in regular classrooms. *Education and Treatment of Children*, 394-419.
- Kriner, A. (2004). Las fases de la Luna, ¿cómo y cuándo enseñarlas? *Ciência & Educação*, 111-120.
- Martinez Murillo, J. H., & Moquera Isaza, R. A. (2012). *Las simulaciones, un recurso didáctico para la enseñanza de la óptica*. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Massa, M. R., Guevara, I., Puig-Pla, C., & Romero, F. (s.f.). *Trigonometría para medir los cielos*. 2009: JAEM girona.



- Mateus Vargas, K. (2013). *Una Propuesta para la Enseñanza de la Trigonometría y la Astronomía, desde los Conceptos de Razón, Ángulo y Cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo*. Bogotá: Universidad Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional. (2014). Estándares Básicos de Competencias en Ciencias Sociales y Ciencias Naturales. *Lineamientos Curriculares*, 102-111.
- Molina Córdoba, J. N., Lugo Lopez, N. D., & Caro Rivas, M. A. (2017). Eclipses, Luz que se Apaga Tras la Sombra de un Experimento. *Revista Científica Universidad Distrital*.
- National Research Council. (1991). *The Decade of Discovery in Astronomy and Astrophysics*. Washington D.C: NATIONAL ACADEMY PRESS.
- Peña, C., & Paez, J. (2013). *Estrategia didáctica para estimar los tamaños y distancias de separación del sistema Sol-Tierra-Luna (Trabajo de grado)*. Bogotá DC: Universidad Pedagógica Nacional.
- Perez Rodríguez, U., Álvarez Lires, M., & Serrallé Marzoa, J. F. (2009). Los errores de los libros de texto de primer curso de ESO sobre la evolución histórica del conocimiento del universo. *Enseñanza de las Ciencias*, 109-120.
- Rodriguez, G., Gil, J., & García, E. (1996). *Metodologías de la investigación cualitativa*. Granada: Aljibe.
- Samos, A. d. (2016). *Sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua*. (R. E. Machado, Trad.) Santiago.
- Trumper, R. (2003). The need for change in elementary school teacher training—a cross-college age study of future teachers' conceptions of basic astronomy concepts. *Teaching and Teacher Education*, 309-323.
- Varela Losada, M., Pérez Rodríguez, U., Arias Correa, A., & Álvarez Lires, M. (2015). Concepciones alternativas sobre Astronomía de profesorado español en formación. *Ciência & Educação (Bauru)*, 799-816.
- Vega Navarro, A. M. (2001). *Sol y luna, una pareja precopernicana. Estudio de día y la noche en educación infantil*. Santa Cruz de Tenerife: Departamento de Didáctica e Investigación Educativa y del Comportamiento.

## ANEXOS

Los anexos que a continuación se adjuntan, son parte esencial del trabajo, y fueron escritos y recopilados por el investigador, y sirven como herramienta de apoyo en los diferentes temas y subtemas que son abordados en entereza en el trabajo de grado. Algunos apartados de este ítem comprenden la ampliación de todas las experiencias de contextualización y pilotaje que fundamentaron el trabajo de implementación y sistematización realizado, así como las actividades secundarias que fueron diseñadas y llevadas a cabo, como el trabajo en el planetario con sus respectivas evidencias, entre otras.

### **Anexo 1. Aristarco y el sistema heliocéntrico TSL**

Se presentan aspectos sobre la obra de Aristarco “*Sobre los tamaños y las distancias del Sol y de la Luna*” traducido al portugués por Rubens. E. G. Machado, y la obra sobre los filósofos griegos del historiador Thomas Little Heath “*A history of greek mathematics Volume II*”.

Aristarco de Samos fue un astrónomo griego, cuyos vestigios lo ubican en el periodo histórico correspondiente al siglo IV a.c en Alejandría. Solamente existe evidencia directa de una de sus obras más prolíficas “*Sobre los Tamaños y las Distancias del Sol y de la Luna*”, en donde se dejan pistas del sistema de mundo que Aristarco consideraba como cierto: el heliocentrismo, y otras evidencias, acumuladas por comentaristas y recopiladores de la época entre quienes cabe destacar a Arquímedes de Siracusa y a Pappus de Alejandría.

Aquí, si bien se pretende llegar a dilucidar las razones que llevaron a Aristarco a contemplar el heliocentrismo como un hecho sobre la organización de los astros, se comienza desde su única obra, alterada, por el ineludible rasgo de subjetividad implicado en la presencia de la traducción de una obra antigua. Es este caso, se trabaja con la traducción de Rubens. E. G. Machado, con el objetivo de establecer las relaciones de las magnitudes: distancias y tamaños entre los cuerpos del sistema STL.

En el proceso de determinar las relaciones de distancias y tamaños entre los cuerpos celestes del sistema STL, surge como primera instancia de trabajo, la determinación de criterios y la derivación lógica de ciertas proposiciones que se enuncian conforme se van demostrando mediante aquellos criterios, lo que el autor (Aristarco de Samos) llama en su obra Hipótesis. Cabe aclarar que las hipótesis, en un contexto definitorio desde la actualidad en relación con la manera en cómo puede

entreverse que lo interpreta Aristarco, es semejante: etimológicamente una hipótesis (*Ex phaenomenis*) es una proposición sobre el mundo que no se deduce directamente ni de los eventos ni de los fenómenos (organización de eventos). Las hipótesis que establece Aristarco en su obra, como punto de partida, pueden no resultar convincentes para el lector, si no se tienen de la mano los hechos físicos que están a la base de su planteamiento, tal y como se verá con cada una de ellas a continuación.

### **Hipótesis I: A Lua recebe sua luz do Sol.**

Las evidencias principales de las que se dispone para declarar como cierta esta hipótesis, son: la observación de las fases lunares que vistas desde la tierra, a la luz de las interpretaciones de Aristarco, pueden estar relacionadas con la exposición a un foco de luz muy intenso proveniente de una distancia lejana. Por otro lado, la evidencia de que el único cuerpo astronómico que brilla de igual manera en los cielos siempre, salvo cuando hay eclipses, es el Sol, esta en correspondencia con la organización conceptual de los sabios griegos: día y noche, cuya explicación simplificada es el movimiento de rotación de la tierra. Si bien, estas explicaciones son mutuamente compatibles, no hay certeza alguna de que vayan más allá del dominio de las hipótesis: podría la luna tener fases en consecuencia de una organización imprecisa de las nubes, y ella misma podría iluminarse poco a poco por sus propias capacidades físicas, tal y como han explicado en consecuencia, algunos niños. Esto puede evidenciarse en los resultados de investigación presentados en el artículo: Sol y Luna, una pareja Precopernicana, Estudio del Día y la Noche en Educación Infantil (Vega Navarro, 2001).

Hoy en día disponemos de las suficientes herramientas tecnocientíficas para determinar que la hipótesis de Aristarco se corresponde con la realidad del mundo físico: El Sol es una estrella, y como tal, es capaz de emitir luz propia por procesos de nucleosíntesis, y la Luna, en virtud de sus propiedades materiales, refleja la luz proveniente del Sol, produciendo la sensación óptica de que es esta quien la emite.

### **Hipótesis II. A Terra pode ser considerada um ponto, e é o centro da esfera da Lua.**

Cabe aclarar que, con el centro de la esfera lunar, Aristarco aquí se está refiriendo a la órbita de la luna, y lo que está declarando es una hipótesis útil para la simplificación de modelos matemáticos; según Aristarco, la órbita de la Luna es circular, y, por consiguiente, la distancia entre la Luna y la Tierra siempre es la misma independientemente de donde se encuentren ubicados estos dos astros. De acuerdo con el estado de conocimiento de la época, determinar la veracidad de dicha hipótesis, era prácticamente imposible, si no se tenía como primer parámetro, una distancia fijada, que es precisamente el trabajo que presenta Aristarco en esta obra.

Hoy en día sabemos, de acuerdo con las leyes de Kepler y Newton, que las órbitas planetarias son elípticas, y la de la Luna, no es una excepción a dicha regla (es una órbita elíptica de excentricidad 0.0549), y, por consiguiente, hay lugares en su órbita que están más cerca de la tierra que otros. Perigeo: 362,600 km, Apogeo: 405,500 km. Resta esperar que la distancia calculado por Aristarco, esté comprendida entre estas dos distancias de separación mínima (perigeo) y máxima (apogeo) de la tierra.

**Hipótesis III. Quando a Lua nos parece dicótomo (dividida em duas partes iguais), o grande círculo que separa a parte iluminada da parte escura está na direção de nossos olhos. Isto é, nossa linha de visada é coplanar com este grande círculo.**

La hipótesis III que plantea Aristarco, no se refiere a más que la simplificación de un fenómeno espacial (Luna en fase lunar cuarto creciente o cuarto menguante) visto por un observador posado sobre la Tierra, a una representación en el plano. Las imágenes a continuación pueden ilustrar mejor lo que pretendía expresar Aristarco.



**Imagen: representación del plano que corta a la Luna a la mitad y el ojo del observador (fuente propia apoyado con software Paint 3D)**

En la figura anterior puede evidenciarse que el plano que interseca a la esfera a través del círculo que delimita zona de luz y zona de oscuridad (centro limítrofe de fase lunar) también contiene el punto P que representa el ojo del observador del fenómeno. Si vemos esta figura de manera lateral, observamos que el plano que contenía el centro limítrofe de la fase lunar y el punto P del ojo del observador, se convierte en una recta, y la esfera se convierte en un círculo intersecado en la mitad por dicha recta.

Respecto de esta hipótesis puede decirse que obedece a la naturaleza geométrica del espacio euclidiano; y la simplificación del evento astronómico en cuestión (cuarta fase lunar ) está sujeta a una representación euclidiana, que como puede ilustrarse en las imágenes anteriores, es cognoscible.

**Hipótesis IV. Qando a Lua nos parece dicótoma, sua separação do Sol é menor que um quadrante por um trigésimo de quadrante.**

En esta cuarta hipótesis lo que Aristarco nos está expresando es que cuando la Luna se encuentra en cuarta fase, sea esta creciente o menguante, la diferencia angular en el cielo entre estos dos astros es algo menor (trigésima parte) que un cuadrante. Un cuadrante sería la separación angular de dos rectas que intersecan un vértice, de un ángulo recto. Lo que Aristarco nos dice es que la separación angular entre el Sol y la Luna es de  $\frac{1}{30}$  partes menores que un cuadrante, y esto es equivalente a  $87^\circ$ . Respecto a los orígenes de esta hipótesis, debido a que hay efectuada una medición, lo cual no está dentro de lo que se caracteriza como hipótesis, tal vez se presenta como un error de traducción de su obra, y la verdadera hipótesis a la base de su razonamiento es el ángulo recto con el cual el trazo entre el observador y la Luna, y el trazo entre la Luna y el Sol se cortan desde la perspectiva de un observador posado sobre la tierra, esto bajo la suposición de que el plano que corta los centros del Sol y de la Luna es perpendicular al plano descrito en la hipótesis III.

**Hipótesis V. A Lua subentende a décima quinta parte de un signo do zodíaco.**

Respecto a esta hipótesis, existen registros históricos que denotan que dicha medición se efectuó a ojo desnudo, hoy en día se sabe que el ángulo al cual subtiende la Luna es de  $0.5^\circ$  o  $\frac{1}{720}$  partes del círculo zodiacal, o en general, de cualquier circunferencia, y que es cuatro veces el denotado por Aristarco. Resulta curioso respecto a esta estimación, que Arquímedes afirmase luego en su obra “*Arenario*” que fue Aristarco quien descubrió que el ángulo al cual subtiende el disco solar es de aproximadamente  $0.5^\circ$ , casi el mismo lunar, cuando en su obra, Aristarco manifiesta que la Luna subtiende a la decimoquinta parte de un signo zodiacal, correspondiente a  $2^\circ$ .

**Hipótesis VI. A largura da sombra da Terra equivale a duas Luas.**

Respecto a esta hipótesis, se conoce que Aristarco efectuó la medición suponiendo que el movimiento de traslación de la Luna alrededor de la Tierra era uniforme. Bajo esta suposición, durante un eclipse Lunar, calculó mediante la medición de tiempos, que el diámetro de la sombra circular producida por la Tierra en el lugar del espacio en donde se encuentra la Luna era del doble del diámetro de la Luna. Aristarco midió dos tiempos, T1: El tiempo que tardaba la Luna en ocultarse completamente tras la sombra de Tierra. T2: El tiempo que tardaba la Luna en volverse a ver luego de haberse ocultado. Como T2 era aproximadamente el doble que T1, Aristarco concluyó que la sombra de la Tierra tiene un diámetro equivalente a dos diámetros lunares. Respecto a esta hipótesis, queda un asunto por esclarecer, referido a lo que se conoce actualmente sobre la sombra de la Tierra, y es que, de hecho,

bajo la suposición de una fuente luminosa muy lejana, el tamaño de la sombra de un objeto es aproximadamente del tamaño del objeto, esto se detalla en el apartado **4.5. (Relación de tamaños Tierra-Luna)**, de acuerdo con un método que combina lo obtenido por Aristarco, y lo que se conoce del sistema STL moderno.

Con todas estas hipótesis en mano, Aristarco se dispone a construir las medidas correspondientes a las relaciones de distancias y tamaños entre el Sol, La tierra, y la Luna, empleando para ello, con todo el rigor del lenguaje, la geometría euclidiana.

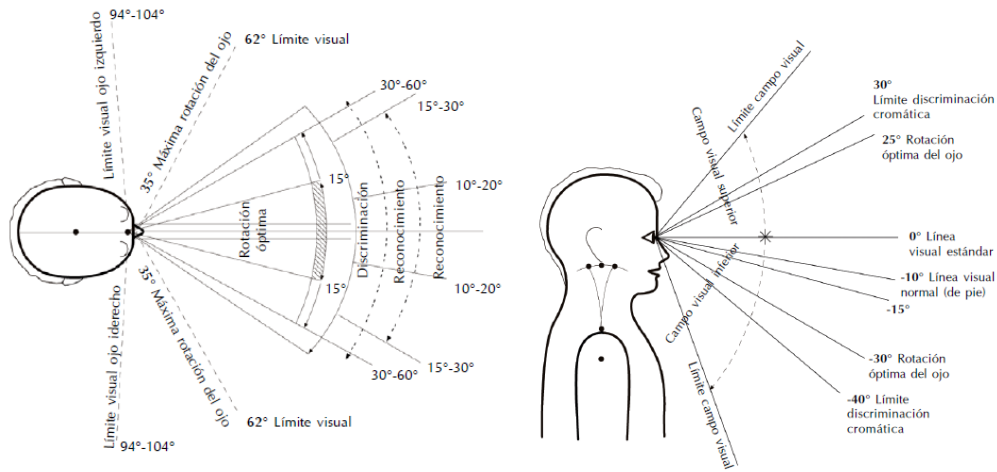
Lo que sigue, no es derivar cada una de las proposiciones que llevan a las conclusiones de Aristarco; más bien, poner en consonancia dichos procedimientos con un lenguaje geométrico más amigable, y con representaciones algebraicas más cómodas sin perder de vista las ideas claves que constituyen la lógica que orientó su obra.

## **Anexo 2. Relación de tamaños, distancias y estudio de sombras**

- **Aspectos vivenciales construcción cualitativa de la razón entre tamaño y distancia.**

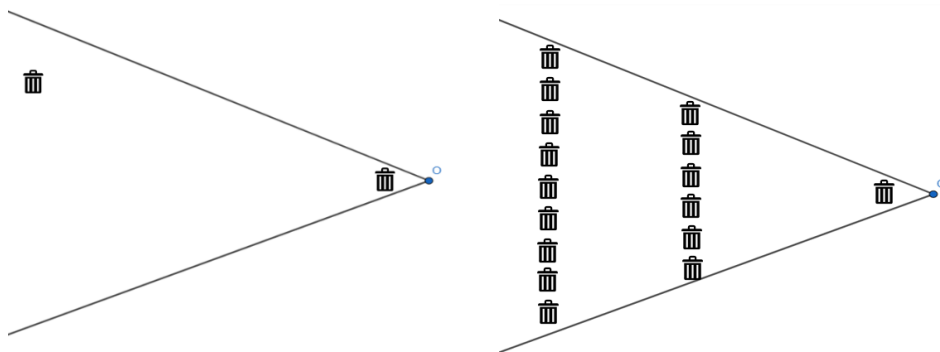
La relación que existe entre la distancia a la que se encuentra un objeto y su tamaño, puede ser deducida directamente de la experiencia: es común para todos el observar que a mayor distancia a la que se encuentre un objeto, por ejemplo: una persona, menor será su tamaño aparente. Esto puede situarse en un contexto geométrico.

Antes que nada, se debe partir del hecho de que la formalización geométrica parte de un aspecto muy simple: la manera en cómo percibimos ocularmente el mundo. Entonces, se recurre a la geometría que caracterizan la manera en cómo el ojo humano recibe la luz proveniente del espacio circundante y lejano, a sabiendas de que, en el plano horizontal, el ángulo de visión es de aproximadamente  $180^\circ$  y en el plano vertical,  $130^\circ$  así:



**Rango de visión angular según los planos principales de observación de la visión humana (Fuente: senialeticaiset.blogspot.com)**

La unión de los dos planos de observación de nuestros ojos da como resultado dos conos de visión, cuyos vértices se encuentran, cada uno en cada uno de nuestros ojos. Para fines de lo que sigue, las observaciones deberán ser especificadas entonces para un solo ojo, de acuerdo con el modelo geométrico simplificado de cono perfecto. Cuando tenemos un objeto muy cerca, por ejemplo, un bote de basura, este cubre gran parte de nuestro campo de visión, y conforme este se va alejando, va quedando lugar para otros objetos ubicados en el espacio; en comparación con nuestro campo de visión, el objeto que se aleja se hace pequeño.



**Imagen: objeto cercano y distante ocupando lugares en el triángulo de visión horizontal de acuerdo con el grado de distanciamiento del ojo de un observador O.**

Es evidente en la imagen anterior que conforme un objeto se va alejando, va dejando un espacio mayor que podrían ocupar otros objetos, de tal modo que, si un objeto pequeño es ubicado en un lugar menos distante de un observador, este puede fácilmente ocupar el mismo espacio de visión que otros objetos, de mayor tamaño, pero ubicados a mayores distancias.

Lo anterior es fácilmente verificable cuando se logra tapar, por ejemplo, la Luna (que sabemos que está distante), con una moneda, y conforme esta se va desplazando hacia el ojo del observador, su tamaño aparente se va haciendo mayor hasta el punto tal en que la Luna deja de verse.

Cabe mencionar que estos aspectos que aquí se acaban de documentar, están fundamentados desde el artículo publicado en la revista científica de la Universidad Distrital (Molina Córdoba, Lugo Lopez, & Caro Rivas, 2017), que está fundamentado en otros autores.

- **Sombras proyectadas por objetos iluminados desde el infinito.**

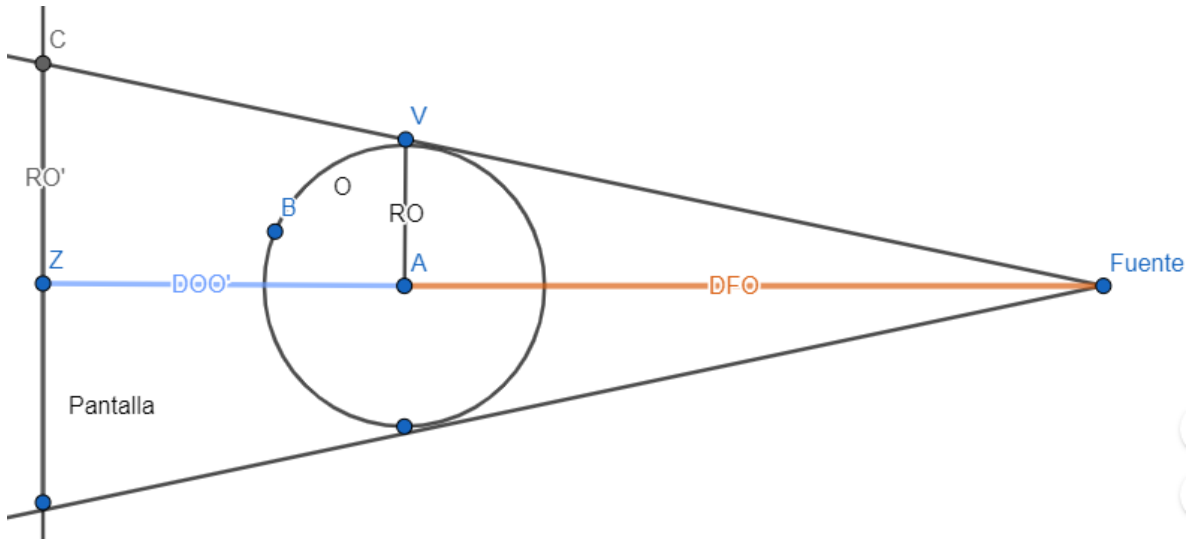
En las prácticas experimentales con luces y sombras llevadas a cabo en las actividades de pilotaje en cuestión (geometrización de sombras y eclipses), se llega a que la sombra de un objeto proyectada en alguna superficie, y producida por la existencia de una fuente luminosa proveniente de un lugar lejano, es de un tamaño semejante al de aquel objeto. A continuación, se pretende hacer una descripción geométrica de dicha situación, de modo que, a través del lenguaje matemático, pueda o no llegarse a dicha conclusión, con el pretexto de buscar una generalización del hecho determinado experimentalmente. Por otro lado: se explicitó y se infirió en que este efecto de convergencia de la sombra ocurre para distancias lejanas, lo cual es una simplificación lingüística muy vaga dentro del contexto riguroso de corroboración del conocimiento científico. En este orden de ideas, lo que se pretende en este apartado es deducir qué tan lejana debe estar una fuente para que el efecto en cuestión se produzca.

Se parte por geometrizar la situación en el plano, siguiendo el mismo hilo de razonamiento propuesto por Aristarco de Samos en su obra, y teniendo bajo presente, dos situaciones:

- **Situación 1: Fuente luminosa de menor tamaño que el objeto iluminado**

La primera situación se modela geoméricamente así:





**Imagen: modelación en el plano de la proyección de la sombra de un objeto iluminado (fuente propia con apoyo de software GeoGebra)**

En esta imagen, se tiene una fuente puntual iluminando a un objeto de radio  $R_O$ , a una distancia  $D_{FO}$ , de tal modo que se proyecta su sombra de radio  $R'_O$  en una pantalla ubicada a una distancia del objeto  $D_{OO'}$ . En esta representación geométrica se pueden dibujar los triángulos semejantes  $FZC$  y  $FAV$ , de tal modo que sus lados pueden ser relacionados de acuerdo con las reglas de semejanza de triángulos, así:

$$\frac{R'_O}{R_O} = \frac{(D_{OO'} + D_{FO})}{D_{FO}} \quad (\text{Eq. 19})$$

En esta relación se quiere encontrar la relación que existe entre el radio de la sombra proyectada y el radio real del objeto, se procede entonces a despejar  $R'_O$ .

$$R'_O = \frac{R_O D_{OO'} + R_O D_{FO}}{D_{FO}} \quad (\text{Eq. 20})$$

En la ecuación anterior, encontramos entonces una ecuación que nos da cuenta del tamaño de la sombra de un objeto en función de su tamaño real. Observamos que para el caso que queremos documentar, esto es: donde  $R_O = R'_O$ , el factor  $\left(\frac{D_{OO'}}{D_{FO}}\right)$  deberá tender a 0, y esto sólo es posible, en rigor, cuando  $D_{FO}$  es infinita. Sin embargo, es evidente que si esta distancia es muy grande en comparación con  $D_{OO'}$ , el factor  $\left(\frac{D_{OO'}}{D_{FO}}\right)$  puede ser despreciado, y  $R_O = R'_O$ . Para este tipo de situaciones resulta de mejor provecho, encontrar una función de distancia del objeto de la fuente

luminosa  $D_{FO}$  que dependa del efecto que se pretende observar, especialmente para responder preguntas más generales como: ¿Habrá alguna distancia para la cual  $R'_O$  sea 0 (un punto), o de un radio menor al del objeto esférico dado ( $R_O$ ), tal y como en los pilotajes solían sospechar algunos estudiantes?

Para dar contestación a estas preguntas, en primer lugar, se despeja  $D_{FO}$  como función de  $R'_O$ .

$$D_{FO}(R'_O) = \frac{R_O D_{OO'}}{R'_O - R_O} \quad (\text{Eq. 21})$$

Se procede luego a analizar la función determinada en los puntos que son de importancia de acuerdo con las intuiciones que se pueden tener al respecto:

¿Para qué distancia  $R'_O = 0$ ?, si se evalúa el límite en este valor para la función de distancia de la fuente, se tiene:

$$D_{FO}(R'_O) = -D_{OO'} \quad (\text{Eq. 22})$$

Que, en el sistema de referencia de las posiciones de la pantalla, el objeto y la fuente, impuesto por la geometría del problema, es un lugar detrás de la pantalla, donde no hay incidencia de la luz sobre el objeto. Es evidente denotar para la misma función que si  $R'_O < R_O$ , la distancia  $D_{FO}$  será negativa (la fuente estará dispuesta más allá de la pantalla de proyección), situación que no está contenida dentro de las posibilidades físicas de producir una sombra de acuerdo con las condiciones dadas. De esto puede concluirse entonces que el mínimo tamaño que puede tener la sombra proyectada sobre la pantalla, es el equivalente al del tamaño del objeto que la produce.

Otro aspecto que se denota en los trabajos experimentales con sombras producidas por fuentes puntuales es que el tamaño de la sombra se hace mayor conforme la fuente de luz se aproxima cada vez más al objeto que se está iluminando. Al respecto puede uno preguntarse: si la distancia de separación entre la fuente y el objeto iluminado ( $D_{FO}$ ) es lo mínimo posible, ¿Qué tamaño tendrá la sombra proyectada? Para responderla, se recurre nuevamente a la Eq. 21. y se evalúa la función  $R'_O(D_{FO})$  en  $D_{FO} = 0$ , obteniendo como resultado que el radio del asombra proyectada, y, por consiguiente, su tamaño, será infinito. Esto es compatible con el hecho de que, al aproximar la fuente puntual al objeto, este dejará de verse iluminado, puesto que la luz está bloqueando el foco de luz, de modo tal que el tamaño de la oscuridad producida por la sombra en la pantalla es infinito.

### Anexo 3. Eclipses y fases lunares

Todos los fenómenos ilustrados en el **capítulo IV** estuvieron (y algunos aún están) relacionados con disertaciones nacientes en el seno de cosmogonías que configuran preguntas como: ¿cuál es el lugar de la humanidad en las estrellas? ¿cómo es el universo y qué forma tiene?, etc. Así, las primeras nociones sobre el estudio de los fenómenos celestes datan de la antigüedad con sabios conocidos como: Tales de Mileto, Aristarco de Samos, Eratóstenes de Sirene, y civilizaciones antiquísimas como los fenicios y los babilonios. En los babilonios encontramos los primeros vestigios sobre uno de los grandes temas de interés de este trabajo: los eclipses, y la descripción fenomenológica de dichos eventos celestes.

- **Eclipses: una red de mitos y leyendas y un evento catástrofe.**

El fenómeno de los eclipses ha traído con sí siglos de historia desde su permanencia: cambios de paradigmas, ligados a modos de ver, que revolucionaron según diversas mitologías. Lo divino ha sido a lo largo de toda la historia, acción de aquellas cosas que van más allá de lo comprensible según lo sensible; lo que, en el transcurso de nuestra historia, grandes filósofos han catalogado como metafísica. No es de nuestro interés inferir en los detalles filosóficos que se adscriben a cualificar las ciencias astronómicas desde una mirada que pretende describirla como una ciencia que reposa en la frontera de lo real, y lo imaginado, sin embargo, es fundamental resaltar que los elementos de realidad que diseccionan lo posible, lo inteligible y lo real, están ligados a una retrospectiva del mundo, en donde el sistema referencial, es nuestra capacidad sensorial de interactuar dentro y con el universo. Y es en este punto en donde todo lo que hasta el momento ha sido dicho, cobra sentido en el problema de explicitar en todo el orden de la naturaleza, el fenómeno de los eclipses. Podría decirse que nuestro punto de partida es la capacidad natural del hombre ver, y relacionar cosas en el espacio, a partir de sus sentidos primordiales (visión, escucha, tacto).

¿Qué más puede decirse sobre los eclipses?

Sobre la historia son muchas las leyendas y mitos que han sido contadas

El “problema” de los eclipses obedece a un trajín histórico saturado de acontecimientos disímiles, donde mitos y leyendas fueron fronteras que en tiempos anteriores (siglo XX a.c), restringen las memorias de nuestros primeros ancestros. Las ideologías y las creencias fueron en aquel entonces margen de forma de los nuevos saberes.

Comencemos narrando algunas de aquellas historias.

En la antigua China, hace 4156 años, parte del imperio estaba designado al estudio de los fenómenos celestes, pues ellos reflejaban las intenciones y designios de los dioses. Además, el cielo era gobernado; en su fondo moraba un dragón sagrado y maléfico, el jerarca era el vigía de la noche, y custodiaba los senderos que transitaban el Sol y la Luna. Había momentos en que el dragón celeste se salía de control y además de seguir a los astros reyes del día y la noche, los alcanzaba con el crudo propósito de engullirlos en sus fauces. Los hombres posados sobre la tierra observaban temerosos aquel frío y subyugador acontecimiento: la luz del brillante sol entrando en las fauces de un tenebroso dragón que ha perdido el control. En medio de gritos y espantos el día se consumía en el papiro del tiempo, y la noche temprana, engullía en un mortuorio silencio, aquel lejano poblado.

La gente de los antiguos pueblos chinos rompía el miedo propugnando fuertes palabras en compañía de estruendosos alaridos y ruidos de tambores. La orquesta sazónada con miedo duraba tanto cuanto tardara el corazón luminoso del cielo en ser liberado por el desesperado dragón, ahora lisiado (desestabilizado) por los sonetos sin cordura que provenían de abajo, en la superficie de la tierra.

Se oían tronantes los gritos de triunfo que salían de las voces vivas de éxito, y la emoción se dibujaba en sus rostros al ver al Sol surgir permeando la inmensidad de su sagrada luz.

Cuenta la leyenda que una vez dos astrónomos reales de aquel antiguo imperio, a saber, Hu y Hi, estuvieron embebidos el día de un eclipse solar, del que ya de antelación se conocía su advenimiento. Cuando este llegó sobre el cielo del imperio se levantó inadvertida la noche, ya era muy tarde cuando en los cielos los ciudadanos estupefactos sólo observaban distantes y embullecían tenuemente sus limitados entornos. Mientras tanto, ocurría el frenético baile donde un dragón arcano devoraba sin contemplación al astro rey del día: estaba ocurriendo un eclipse solar anular, el disco brillante no se sumía completamente en la oscuridad, el Dios Sol (dios ñañas de los chinos) lograba zafarse de las garras antes de ser devorado completamente.

Cuando el suceso estremecedor terminó sin tanto ruido o ceremonia de refuerzo para el Sol, el emperador tal vez aprendió una gran lección y se descubrió la naturaleza inofensiva de aquel fenómeno conocido como un eclipse de Sol, algunos habrán pensado que el sol había acumulado refuerzos de rituales y ceremonias de asistencia anteriores, eso no lo sabremos con exactitud, al menos no durante mucho tiempo.

La historia tristemente no termina bien para todos. Hu y Hi pagaron con sus cabezas el miedo y la discordia consecuentes de no advertir la sangrienta lucha que, al darse en los cielos, pudo eliminar eternamente la luz que incide en el germinar y existir del mundo. También las cosas ocurrieron puesto

que gran parte del poder del emperador radicaba en el hecho de poder predecir estos eventos y otros de índole cósmica.

- **Contexto definitorio: ¿qué son los eclipses?**

La anécdota anterior, datada en los manuscritos chinos del reino Tchoung-kang, deja una gran lección a los hombres, y cambia el paradigma del comportamiento de la naturaleza por causa del capricho de los dioses, a su comportamiento fundamentado desde las causas deterministas. Este hecho podría identificarse como un hito histórico preponderante para el desarrollo del espíritu científico de los antiguos chinos, sin embargo, en relación con descripciones precisas sobre los catálogos de los eclipses como eventos periódicos con un ciclo bien definido en los registros históricos, surge en otras latitudes: Mesopotamia, lugar antiguamente ocupado por los babilonios, civilización privilegiada por ser la primera en catalogar los eclipses. Entre todos sus catálogos, se obtiene lo que se conoce como periodo saros, que se refiere al tiempo que debe pasar para que un eclipse, bajo unas mismas condiciones dadas, pueda darse. El catálogo de los astrónomos babilonios es extenso y deja entrever que de hecho, fue escrito mediado por la observación y extensa documentación en décadas de estos fenómenos celestes, en aquel catálogo se hace referencia a un periodo mediante el cual podrían predecirse futuros eclipses (periodo saros). Un saros o ciclo de saros es un periodo de 223 lunaciones, y una lunación es el tiempo que dura un ciclo lunar, y que dura aproximadamente de 29 días y 12 horas. 223 lunaciones corresponden a un tiempo de 18 años, 11 días y ocho horas. Estos son los conceptos esenciales que suelen identificarse en el ámbito de la investigación y documentación de saberes relacionados con los eclipses, que si bien se nombran, no se entrará en detalle respecto de ellos, puesto que ampliaría el enfoque de esta propuesta, llevándola a analizar exhaustivamente la idea de órbita, o en su defecto, una exploración de los métodos históricos que han llevado a la dilucidación de estos periodos (saros), y en general, el estudio dinámico del sistema STL. Así, en el contexto de este trabajo, se denota puesto que es parte del lenguaje a la hora de documentar aspectos relacionados con estos fenómenos de ocultación.

Los eclipses, a modo de generalidad pueden ser definidos como eventos que suceden “*cuando la luz que emite o refleja un cuerpo es bloqueada por otro cuerpo que se interpone en el camino óptico entre el primer cuerpo y el observador*” (Molina Córdoba, Lugo Lopez, & Caro Rivas, 2017). En un desarrollo con un trasfondo más propio a la astronomía puede hacerse una descripción detallada del concepto “eclipses” identificándolo como: el sistema de cuerpos celestes, tales que algunos, cuyos rayos luminosos son interceptados por otros cuerpos, están contenidos en el conjunto de cuerpos del firmamento, de tal modo que, para un observador, en el momento de una alineación entre astros,

alguno de ellos, o alguna parte de cierto o ciertos cuerpos, quede fuera de su rango de visión (H. Levy, 2010). Según esta mirada, pueden ocurrir eclipses combinando mediante la instrucción definida anteriormente, diferentes sistemas de dos cuerpos y un observador, por ejemplo: el planeta Júpiter y la Luna vistos desde la Tierra, los planetas Venus y Marte, vistos desde la Luna, el planeta Marte y Europa, (uno de los satélites naturales de Júpiter) vistos desde la Tierra, e innumerables posibles combinaciones. Evidentemente, esto es una complicación que reposa en la derrota de la generalidad (fenómenos de ocultación), por lo cual, se restringe el problema -en el caso de esta propuesta de proyecto-, al sistema de los cuerpos: STL estando el observador posado sobre la Tierra, de tal modo que puedan existir todas las combinaciones posibles, para los distintos tipos de eclipses conocidos.

Y bien, ¿cuáles son estos tipos de eclipses? Sabemos que hay una gran cantidad de posibles configuraciones para que un eclipse pueda darse; las más importantes y de las cuales derivan las otras tantas posibilidades son, para el sistema en cuestión: eclipse de Sol y eclipse de Luna, sobre las particularidades de estos dos, se definen eclipses totales, parciales y anulares. Pensando en el sistema físico conocido, resulta improbable pensar que el Sol eclipse a la Luna, además, en todos los rastros históricos que se tienen a la mano, nunca se ha sabido de un eclipse donde el Sol eclipse a la Luna. De entrada, esto nos da elementos para enunciar el hecho de que, en el plano cósmico del cielo, el Sol se encuentra más lejos que la Luna. En general, haciendo un análisis detallado al sistema selecto, hay distintas posibles configuraciones bajo la definición dada, pero que no se corresponden con lo que es observable en los cielos.

- **Eclipses en el sistema STL: eclipse lunar.**

Ocurre un eclipse lunar cuando la Luna, en su movimiento de traslación alrededor de la Tierra, entra en su cono de sombra proyectado por la luz que recibe del Sol. Sin embargo, en virtud de la inclinación de la órbita lunar respecto al plano de la eclíptica (plano que intercepta la órbita de la Tierra y el centro del Sol), que es de  $5^{\circ}9'$ , los lugares de encuentro de la Luna con la sombra de la Tierra, no siempre ocurren de modo que la Luna pase justo por su centro; la Luna, durante cualquier eclipse lunar dado, no siempre recorre la trayectoria que corta al círculo del cono de sombra que proyecta la Tierra, por la mitad. La siguiente imagen, es una representación clara de este hecho, y es un ejemplo del eclipse lunar acontecido el 21 de enero de 2019.

# Total Lunar Eclipse of 2019 Jan 21

Ecliptic Conjunction = 05:17:14.0 TD (= 05:16:03.0 UT)

Greatest Eclipse = 05:13:27.1 TD (= 05:12:16.0 UT)

Penumbral Magnitude = 2.1684    P. Radius = 1.3052°    Gamma = 0.3684

Umbral Magnitude = 1.1953    U. Radius = 0.7634°    Axis = 0.3763°

Saros Series = 134    Member = 27 of 73

## Sun at Greatest Eclipse (Geocentric Coordinates)

R.A. = 20h12m17.2s

Dec. = -19°57'48.0"

S.D. = 00°16'15.2"

H.P. = 00°00'08.9"

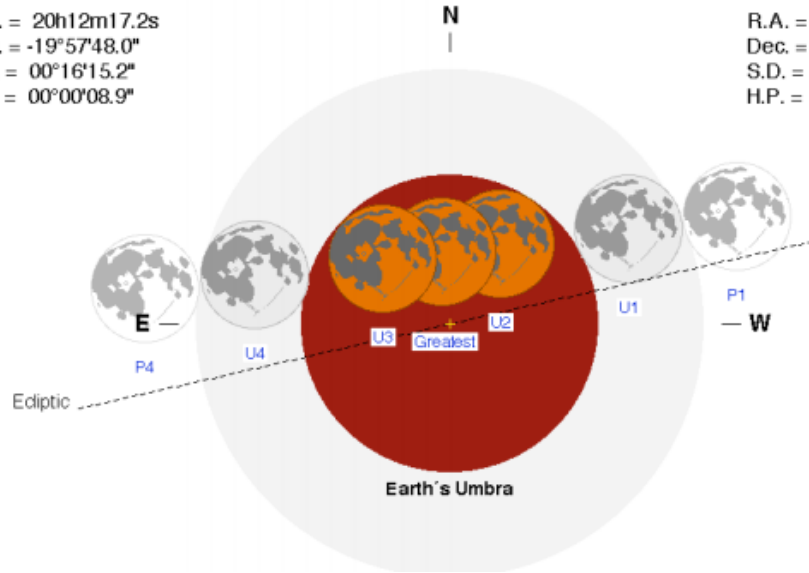
## Moon at Greatest Eclipse (Geocentric Coordinates)

R.A. = 08h12m28.7s

Dec. = +20°20'13.1"

S.D. = 00°16'42.1"

H.P. = 01°01'17.9"



## Eclipse Durations

Penumbral = 05h11m30s

Umbral = 03h16m45s

Total = 01h01m59s

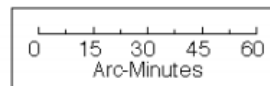
$\Delta T = 71$  s

Rule = CdT (Danjon)

Eph. = VSOP87/ELP2000-85

## Earth's Penumbra

S



F. Espenak, NASA's GSFC  
eclipse.gsfc.nasa.gov/eclipse.html

## Eclipse Contacts

P1 = 02:36:30 UT

U1 = 03:33:54 UT

U2 = 04:41:17 UT

U3 = 05:43:16 UT

U4 = 06:50:39 UT

P4 = 07:48:00 UT

Imagen: Documentación de eclipse Lunar (fuente:  
[gsfc.nasa.gov/eclipse.html](http://gsfc.nasa.gov/eclipse.html))

En la imagen anterior, pueden observarse todos los aspectos técnicos referidos a la documentación de un eclipse lunar, como las posiciones del Sol y de la Luna en coordenadas celestes ecuatoriales (ascensión recta RA y declinación Dec), las horas en las que la Luna pasa por los distintos lugares del

cono de sombra de la Tierra, la duración del eclipse, lunación equivalente en el periodo de Saros, entre otras cosas. Para el estudio que aquí se pretende ilustrar, se centra la atención en las regiones específicas que son denotadas en el estudio teórico de los eclipses. Estas regiones están catalogadas según el orden de los tiempos en que la Luna pasa por los conos de penumbra y umbra, en el lugar del espacio donde la Luna se intercepta con la sombra de la Tierra. Estas regiones están catalogadas como:

<b>Región</b>	<b>Significado</b>
P1	Región limitada exteriormente por el cono penumbral de la sombra de la Tierra.
U1	Región ocupada por la penumbra de la sombra de la Tierra.
U2	Región limitada en el exterior de la umbra, por la penumbra.
Max	Región interna del cono umbral de la sombra de la Tierra.
U3	Región limitada en el exterior por la penumbra (posterior al eclipse umbral)
U4	Región limitada exteriormente por el cono penumbral de la sombra de la Tierra (fin del eclipse penumbral)
P4	Región limitada interiormente por la proyección del cono penumbral de la sombra de la Tierra (Fin del eclipse lunar)

**Tabla: Significado de las regiones del espacio caracterizadas durante un eclipse lunar (Fuente propia).**

Sobre este asunto puede declararse algo esencial respecto de la medida que hace Aristarco del diámetro lunar. En la **hipótesis VI: A largura da sombra da Terra equivale a duas Luas** de su obra: si el trabajo de Aristarco se debió a una estimación, debida a la medida de tiempos de duración del eclipse lunar, no contempló, como se ilustra en la imagen, que el lugar de la sombra por el cual pasa la Luna no siempre es en centro del cono de sombra de la Tierra. Este argumento se fortalece comparando la relación que se tendría para la medida de Aristarco, con la que actualmente es conocida, esto es:

$$0,2724\varphi_T' = \varphi_L \quad (\text{Eq. 23})$$



La medida de Aristarco se basa en un cálculo sencillo que relaciona los intervalos de tiempo de la Luna desde que es vista hasta que deja de verse al entrar al cono de sombra de la Tierra ( $t_{U2} - t_{U1}$ ), con el tiempo que tarda la Luna en recorrer el cono de oscuridad de la sombra de la Tierra hasta que vuelve a ser vista ( $t_{U3} - t_{U2}$ ), con los tamaños de la Luna y la Tierra respectivamente. Una manera de escribir concretamente la situación anterior es: El diámetro de la Luna ( $\varphi_L$ ) está en proporción al diámetro de la sombra de la Tierra (equivalente al tamaño de la Tierra) ( $\varphi_T$ ), como razón de los tiempos en que esta se oculta, y vuelve a verse durante un eclipse lunar. Y se escribe en lenguaje algebraico, así:

$$\frac{t_{U2} - t_{U1}}{t_{U3} - t_{U2}} = \frac{\varphi_L}{\varphi_T} \quad (\text{Eq. 24})$$

Estos tiempos son correspondientes con los momentos en los cuales la Luna se encuentra en ciertas regiones definidas por la siguiente imagen.

#### Eclipse Contacts

P1 = 02:36:30 UT  
 U1 = 03:33:54 UT  
 U2 = 04:41:17 UT  
 U3 = 05:43:16 UT  
 U4 = 06:50:39 UT  
 P4 = 07:48:00 UT

**Tiempos correspondientes a regiones catalogados en eclipse lunar (fuente: gsfc.Nasa.gov)**

Sustituyendo estos tiempos en eq. 35 tenemos:

$$\frac{04:41:17 - 03:33:54}{06:50:39 - 04:41:17} = \frac{\varphi_L}{\varphi_T} \quad (\text{Eq. 25})$$

Que, haciendo un cambio del sistema sexagesimal a decimal para la operación del cociente de la diferencia de tiempos, se llega a la relación:

$$0.5117\varphi_T = \varphi_L$$

(Eq. 26)

Con lo cual se está queriendo expresar que el diámetro de la Luna es aproximadamente la mitad del diámetro de la sombra de la Tierra, y que es precisamente el resultado al que llega Aristarco, de acuerdo con lo expuesto por su hipótesis VI.

#### Anexo 4: Descripción de situaciones e inquietudes

Actividades diseñadas y alcances de la propuesta de estudio, en la siguiente tabla se presenta lo realizado y posteriormente se describe las situaciones e inquietudes abordadas.

Escenario / Fecha	Intención	Situación / Pregunta	Población
<b>Semillero Departamento de Física 2015</b>	Identificar relaciones de distancias, posiciones y movimientos en sistema STL para explicar fenómenos de ocultación: eclipses.	¿Qué actividades debe llevar un taller cuyo fin sea responder preguntas respecto a la ocurrencia y frecuencia de los eclipses?	Estudiantes y docentes partícipes del semillero de astronomía de la Universidad Pedagógica Nacional.
<b>IX Salón de la ciencia. – Departamento de Física UPN - 2015</b>	Reconocer relación distancias y tamaños sistema STL heliocéntrico según observaciones cotidianas.	¿Por qué ocurren los eclipses de Sol y de Luna?	Estudiantes de 10 y 11 grado de la Educación Media.
	Representar el modelo heliocéntrico Sol-Tierra-Luna (STL)	¿Por qué no ocurre un eclipse cada 15 días?	Estudiantes de 10 y 11 grado.
<b>Institución Educativa Alvernia-2016</b>	Construir argumentos heliocéntricos compatibles con los eclipses solares y lunares.	¿Qué eclipsa a Sol y a la Luna en un eclipse solar y lunar respectivamente?	Estudiantes de 9, 10 y 11 grado.

<b>Escenario / Fecha</b>	<b>Intención</b>	<b>Situación / Pregunta</b>	<b>Población</b>
<b>X Salón de la ciencia. – Departamento de Física UPN - 2016</b>	Identificar las posiciones específicas del Sol la Tierra y la Luna, así como sus relaciones de tamaño, para que los eclipses puedan darse con los tiempos de duración de cada uno de estos.	¿Cómo es el proceso de ocurrencia de los eclipses?	Estudiantes de 10 y 11 grado.
<b>VIII Congreso Nacional de Enseñanza de la Física y la Astronomía- 2016</b>	Exponer una propuesta de enseñanza que articula el estudio de los eclipses con el concepto de semejanza triangular.	¿Cómo inferir en el estudio y enseñanza de los eclipses, la presencia de aspectos geométricos que permitan obtener información sobre los tamaños y las distancias de la Luna y el Sol, desde la Tierra?	Personas asistentes al congreso: estudiantes de colegio, estudiantes universitarios y docentes.
<b>Escuela Pedagógica Experimental (III encuentro de astronomía)-2017</b>	Simular en un montaje tipo tellurium los eventos astronómicos: eclipse solar y lunar, y contrastarlos según lo que se observaría desde algún lugar de la tierra.	Dependiendo de lo observado, cuestionar sobre la disposición de la Tierra, la Luna y el Sol, para que se de un eclipse, simulación con personas.	Estudiantes de 9, 10 y 11 grado.
<b>XI Salón de la ciencia. – Departamento de Física UPN – 2017.</b>	Ilustrar el fenómeno de los eclipses especificando las características luminosas de aquel acontecimiento cósmico, y su relación con las Fases de la Luna.	¿En qué fases de luna se dan los diferentes tipos de eclipses? ¿Por qué no ocurre un eclipse cada 14 días?	Estudiantes de 10 y 11 grado.
<b>Planetario Distrital de Bogotá, Museo Astronómico - 2018</b>	Identificar los cambios que presenta la Luna en sus diferentes fases,	¿En el módulo lunar del planetario desde qué lugar de la Tierra se está	Talleristas del planetario.

<b>Escenario / Fecha</b>	<b>Intención</b>	<b>Situación / Pregunta</b>	<b>Población</b>
	vista desde distintos lugares sobre la superficie de la tierra.	simulando la observación de la Luna?	
<b>XII Salón de la ciencia. –Departamento de Física UPN – 2018.</b>	Ilustrar el fenómeno de los eclipses especificando las características luminosas de aquel acontecimiento cósmico, y su relación con las Fases de la Luna.	¿En qué fases de luna se dan los diferentes tipos de eclipses? ¿Por qué no ocurre un eclipse cada 14 días?	Estudiantes de 10 y 11 grado.
<b>Instituto Pedagógico Nacional-2019 (implementaciones)</b>	Deducir la relación que existe entre la distancia y el tamaño de un objeto.	¿Qué relación de distancia y tamaño existe entre la Luna y el Sol, vistos desde la Tierra?	Estudiantes de 7, 8, 9 y 10 grado.
	Construir la condición de distancia entre astros del sistema STL para que los tamaños de los objetos y las sombras concuerden con las observaciones.	¿De qué razones de distancias y tamaños entre: foco, objeto y pantalla de proyección depende el tamaño de una sombra?	Estudiantes de 7, 8, 9 y 10 grado.
	Corroborar las explicaciones de los estudiantes en relación con las dos actividades previas, de acuerdo con un modelo de dibujo.	Deducción de: posición del Sol, sentido de giro de la tierra, y lugar de observación de la Luna, a partir de una representación tridimensional de la Tierra y de la Luna.	Estudiantes de 7, 8, 9 y 10 grado.
<b>Escuela Pedagógica Experimental (IV encuentro de astronomía)-2019</b>	Exhibir a las sombras como eje fundamental para la explicación de los eclipses lunares.	¿Por qué ocurren los eclipses lunares de la manera en cómo estos se dan?	Estudiantes de 9, 10 y 11 grado.

Escenario / Fecha	Intención	Situación / Pregunta	Población
	Exponer el fenómeno de las sombras y su utilidad para dar cuenta de relaciones de tamaños entre objetos.	¿De qué razones de distancias y tamaños entre: foco, objeto y pantalla de proyección depende el tamaño de una sombra?	Estudiantes de 9, 10 y 11 grado.
<b>XIII Salón de la ciencia. – Departamento de Física UPN – 2019.</b>	Construir los vínculos entre: observación de una determinada fase lunar, hora del día, y lugar de observación.	¿A qué horas del día se ve la Luna en sus fases cuarto creciente y cuarto menguante?	Estudiantes de 9, 10 y 11 grado.

**Tabla: Escenarios de implementación y difusión del trabajo.**

**Fuente: Elaboración propia**

A continuación, se presenta las actividades que permitieron abordar el contexto genérico de la enseñanza de la Astronomía y su relación con el pensamiento espacial, a través del estudio e indagación de los eclipses.

- **¿Por qué no ocurre un eclipse cada 14 días? y pensamiento espacial**

Esta primera actividad tenía como eje fundamental, responder a la pregunta ¿Por qué no ocurre un eclipse cada 14 días?, se tenía en cuenta lo referido a los eclipses y a los cuerpos que constituyen a estos eventos celestes y su ocurrencia en el espacio tridimensional, en donde la integración de los movimientos individuales de los astros fundamentales (Sol, Tierra, Luna), resultan en una dinámica compleja, de la cual, hacer abstracciones, conlleva al desarrollo de procesos cognitivos relacionados con la inteligencia espacial y el razonamiento geométrico.

En relación con lo anterior, se sustenta el argumento recurriendo a Howard Gardner, quien plantea en su tesis de las inteligencias múltiples la espacialidad como una de ellas, resaltando que, mediante el desarrollo de este aspecto de la inteligencia, se logran establecer procesos cognitivos que permiten la ubicación geográfica desde diferentes puntos de referencia, así como la capacidad de abstraer movimientos compuestos en tres dimensiones (Gardner, 1987). A través de la inteligencia espacial puede llegar a tenerse un control sobre la imaginación de tal modo que entender la cinemática del

movimiento de la Tierra en sincronía con la Luna y el Sol, termina siendo un problema resoluble en el ámbito de la abstracción y la imaginación humana.

Otro elemento fundamental de la inteligencia espacial a la luz de las teorías de aprendizaje de Gardner es el desarrollo del pensamiento geométrico, el cual conlleva, entre otras cosas, a ampliar la capacidad de resolver problemas, en particular de la física, desde una perspectiva que afianza la geometría con el lenguaje simbólico de esta ciencia. El pensamiento geométrico puede llevar incluso a pensar problemas relacionados con la espacialidad en los hábitos cotidianos, problemas como el aprovechamiento de un espacio dado, la geolocalización, y otros tantos, resolubles en tanto mayor razonamiento geométrico pueda poseerse; y en la adaptación de a saberes especializados, en palabras de Gardner (Gadner, 1987):

*“Se estima que la mayoría de las profesiones científicas y técnicas, tales como el dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, la aviación, y muchas disciplinas científicas como química, física, matemáticas, requieren personas que tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial”* (p. 38).

Pensar de manera espacial, brinda elementos para abstraer aspectos de la realidad, y operar sobre ellos, de modo que se construyen representaciones mentales que fortalecen la capacidad de edificar conocimiento, particularmente en el ámbito científico, en donde la escritura geométrica es un elemento esencial de su desarrollo, así como su capacidad de poner en ventaja los procesos de enseñanza de los conceptos que describen cuantitativa y cualitativamente a la naturaleza. Además, se tiene en cuenta que la Astronomía de posición es una ciencia basada especialmente en el razonamiento espacial tridimensional, de modo que esta termina siendo un eje del saber que tiende a robustecer este tipo de pensamiento.

Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, en esta actividad se elaboró una primera simulación con un montaje tipo Tellurium, en donde los participantes (estudiantes de grados 10 y 11) podían disponer en el salón cada uno de los objetos esféricos que representaban al Sol, la Tierra y la Luna, dentro de lugares específicos (órbitas), previamente definidas. La imagen a continuación es una fotografía del modelo.



**Imagen: fotografía modelo Tellurium implementación salón de la ciencia**

**Fuente: el autor**

Lo que resultó de los pilotajes que iban en esta vía, lejos de lo esperado, fue la dificultad de enlazar lo que se conocía de los eventos astronómicos: eclipse de Sol y eclipse de Luna vistos desde la Tierra, con las disposiciones correctas en el montaje construido como herramienta de simulación; esta brecha fue superada con el diseño posterior de actividades enfocadas en los vínculos: fases lunares y horas del día de observación de la Luna; eclipses de Sol y Luna y momentos del día de su respectivo acontecer, para lo cual se hubo de dedicar un poco más de 6 meses, debido a las dificultades conceptuales intrincadas en la situación: estudio de luces, sombra y movimiento relativo.

- **Distancias relativas y tamaños del Sol, la Luna y la Tierra.**

La actividad se enfocó, en establecer la razón que existe entre el tamaño aparente de un objeto con la distancia desde la cual es observado, tenía como fin, introducir aspectos cualitativos que llevaran a la deducción de la relación matemática conocida como semejanza triangular, que de entrada introduce el concepto de razón trigonométrica, esto sin hacérselo explícito a los estudiantes participantes. Se tuvo en cuenta la caracterización de las sombras dentro de la Astronomía, las fases de la Luna, y los sistemas de referencia. Los propósitos de las actividades correspondientes a este diseño fueron:

- Fortalecer la capacidad de abstracción y realización de representaciones mentales que permitan dilucidar aspectos no evidentes de problemas astronómicos que emergen en el seno de los estudios del sistema STL mediante una herramienta de simulación real.
- Desarrollar un pensamiento geométrico espacial que esté encaminado a la modelación y formulación de conjeturas en relación con las distancias relativas y tamaños del Sol, la Luna y la Tierra.

- Identificar a las sombras como fenómeno caracterizador de explicaciones dentro de la astronomía posicional y la mecánica celeste<sup>2</sup>, y en particular, la caracterización de conceptos asociados a la organización de los fenómenos de ocultación conocidos como eclipses.
- Identificar los lugares relativos que ocupan el Sol, la Luna y la Tierra, vistos desde diferentes puntos referenciales en el espacio.
- Reconocer las fases de la Luna como un fenómeno celeste que en su naturaleza da cuenta de elementos esenciales para la ocurrencia de los eclipses, y mediante su estudio detallado, recurrir a un elemento esencial de la geometría espacial: orientación de superficies.
- Examinar la importancia de los sistemas de referencia en el contexto de la observación astronómica y poner dicho concepto sobre la mesa a la hora de hacer conjeturas en relación con lo que se observa en el firmamento.

La población que participó era un grupo de estudiantes de los grados 10 y 11 de la Educación Media de diferentes planteles educativos distritales. Se realizó un trabajo sobre la construcción de explicaciones enmarcadas en el contexto de observación y determinación de causas de los eclipses, partiendo de las nociones matemáticas que son construibles en el marco geométrico de la generación y proyección de sombras, así como la identificación de la órbita de la Luna en el ámbito de la mecánica celeste.

En el contexto específico de la enseñanza se tuvieron en cuenta las mediciones y prácticas observacionales a escala, abordando problemas por parte de los estudiantes en donde se enfatiza en discernir y explicar: ¿qué es un eclipse?, ¿cuáles son sus causas ópticas?, ¿qué particularidades presenta el sistema STL según los eclipses observables desde la Tierra?, etc., así como reflexionar sobre los teoremas y procedimientos matemáticos que están a la base de los modelos explicativos conocidos para ello ( semejanza de triángulos, equivalencia de longitudes, etc.).

- **Reconfiguración módulo lunar planetario de Bogotá.**

Uno de los procesos que nutrió el diseño de algunas actividades propuestas, fue la implementación de la práctica III en el periodo 2018-2, en el espacio de divulgación del que se dispone en el Planetario

---

<sup>2</sup>Se refiere al hecho de que, mediante la exploración del fenómeno de las sombras, pueden plantearse argumentos respecto del movimiento de algunos astros, así como su disposición desde un marco de referencia situado sobre algún lugar de la Tierra.



Distrital de Bogotá: Museo Astronómico. Allí se trabajó en torno al rediseño del módulo lunar a la luz de la pregunta de investigación: ¿En el módulo lunar del planetario desde qué lugar de la Tierra se está simulando la observación de la Luna? Pregunta fundamentada en observaciones propias realizadas a la Luna, vista desde Colombia, y México, y evidencias cinematográficas de la Luna vista desde países ubicados en latitudes extremas del norte (Canadá) y el Sur (Argentina). La estructura del trabajo fue pensada con el fin de capacitar a los talleristas de los que dispone el planetario en este espacio del Museo Astronómico. El resultado de este proceso fue la actualización del módulo, aspecto que se detallará después de este apartado. Se adjunta a continuación una imagen que ilustra el estado final del rediseño del módulo lunar.



**Imagen: módulo lunar diseñado en el Museo Astronómico del Planetario de Bogotá (fuente propia).**

En general, todo lo anterior se llevó a cabo en aras de fortalecer el diseño de actividades de la propuesta, mediante procesos de desarrollo de prácticas encausadas a la enseñanza de la Astronomía, en un contexto que goza de tener el espacio y ambiente apropiado para este fin (Museo Astronómico).

**Unidad de trabajo: modificación al Módulo Lunar del Museo Astronómico ubicado en el Planetario de Bogotá.**

**Presentado por: Johan Nicolás Molina Córdoba, Estudiante Lic. En Física.**

**Presentado a: Mauricio Giraldo, Coordinador Planetario de Bogotá.**

**Introducción.**

En el módulo lunar del planetario de Bogotá, ubicado en el museo astronómico, se busca caracterizar mediante la simulación en entorno real, las fases de la luna, así como algunos de los fenómenos de ocultación que ocurren en el sistema Tierra-Sol-Luna tales como los eclipses.

Allí, el sujeto que vivencia la simulación, acorde con su ubicación relativa respecto de la Luna y el Sol simulados, podrá experimentar, bajo el rol de un observador situado sobre la superficie de la tierra, las distintas fases de la Luna, tras el elemento de realidad inferido mediante la observación directa de los ciclos lunares, de que este astro de la noche, representativo de la feminidad, se mueve a través del espacio describiendo una órbita cerrada alrededor de la Tierra; así como los distintos tipos de eclipses observados y documentados (eclipses de Sol y Luna).

Podría uno pensar en que este modelo, acoge la materia suficiente para hacer explícitos los diferentes fenómenos observables desde la tierra en relación con la luna, sin embargo, hay una limitación en los grados de libertad de los sistemas de referencia posibles para observadores posados sobre la tierra.

Lo anterior se hace explícito observando que las fases lunares no simétricas (crescuentes y menguantes), no se observan de igual modo en todas las latitudes de la tierra. Indagar un poco a este respecto, lleva a la propuesta de actualización del módulo lunar dispuesto en el planetario de Bogotá, de modo que la pregunta desencadenante de la propuesta de modificación del ensamble actualmente existente es: **en la simulación lunar del museo astronómico ¿desde qué lugar de la tierra se está simulando la observación de la luna?**

**Detalles de la propuesta, materiales, diseño, aspectos técnicos.**

El problema anterior, puede resolverse de la siguiente manera:

Como hay una restricción en los marcos de referencia del módulo (sólo permite cambios traslacionales traducidos en la capacidad humana de desplazarse en el espacio), se piensa especialmente en la necesidad de rotar un sistema fijo, así, dos rotaciones con ángulos distintos son

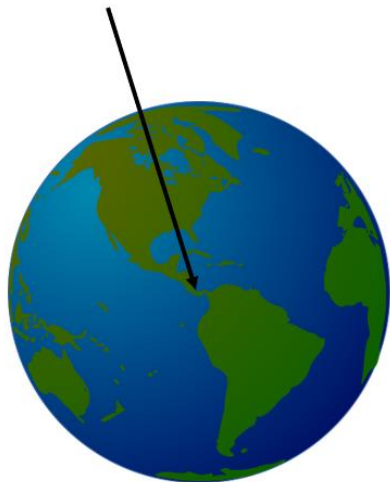
equivalentes a observar desde dos latitudes distintas, los detalles cuantitativos de las magnitudes de las rotaciones en correspondencia con las latitudes, no son un aspecto relevante para nuestro asunto, en un sentido de deducción formal, sino que estos se derivan del montaje propuesto, mediante una simple observación. A continuación, se adjunta una imagen que ilustra la idea detrás de este primer modelo propuesto.



*Imagen: Diferentes observadores posados sobre la tierra (fuente: [https://es.123rf.com/photo\\_8791388\\_ilustraci%C3%B3n-de-los-ni%C3%B1os-del-mundo.html](https://es.123rf.com/photo_8791388_ilustraci%C3%B3n-de-los-ni%C3%B1os-del-mundo.html) )*

Resolver el problema requiere entonces construir un sistema Tierra-Luna de tal modo que se ilustre como cambia el sistema de referencia de cada observador posado sobre la superficie esférica de la tierra.

Cada marco de referencia obedece a una lógica: el eje vertical se construye pensando en la propensión de caída de los cuerpos (hacia el centro de la tierra o de la esfera en cuestión), y el eje horizontal será aquel que transversa con un ángulo de  $90^\circ$  al primero (es perpendicular al eje vertical); este último eje será el horizonte de observación de cada marco de referencia que representa a cada observador posado sobre cualquier punto de la superficie de la tierra; podemos observar que el plano que es perpendicular a la recta vertical que representa la dirección de propensión de caída de los cuerpos en la tierra, es un plano tangente (que sólo toca un punto) a la tierra (siendo esta una superficie esférica). Las subsecuentes imágenes ilustran el proceso de construcción anteriormente explicitado.



**Imagen: Dirección de propensión de caída de cuerpos en la tierra. (Edición de imagen extraída de: <https://pixabay.com/es/la-tierra-mundo-mapa-planeta-23546/>)**



**Imagen: Representación plano perpendicular a dirección de caída de cuerpos. (Edición de imagen extraída de: <https://pixabay.com/es/la-tierra-mundo-mapa-planeta-23546/>)**

Hasta el momento sabemos entonces que basta con disponer un plano sobre una esfera y que este quede orientado de tal manera que una fuerza de atracción central le sea perpendicular. Como no podemos recrear una fuerza de atracción gravitacional artificial para la esfera que representará la tierra, usaremos un par de imanes de neodimio, uno de ellos pegado a la esfera, y el otro sobre el plano, sujetándolo con rigidez sobre un lugar determinado de la esfera, en virtud de la interacción magnética entre los imanes.

El imán que se sujeta a la esfera deberá tener cierta libertad de desplazamiento sobre su superficie, esto se logra atando alambres gruesos de material ferromagnético sobre la esfera. La orientación de estos alambres que serán amarrados sobre la esfera se piensa de tal modo que resulten útiles para el montaje en cuestión. Así, se disponen como si fueren los meridianos terrestres (alambres que rodean la esfera por uno de sus círculos máximos según dos puntos diametralmente opuestos que serán referencia de los polos norte y sur). En general, todos los meridianos de una esfera se encuentran en los mismos puntos diametralmente opuestos.

Saliéndonos del problema de caracterizar los aspectos que recrean nuestra tierra con los posibles marcos de referencia sobre su superficie, ahora se piensa en la manera de adaptarla al modelo lunar. Una varilla roscada que sujete nuestra la tierra a una distancia horizontal equivalente a la que existe entre la luna y la silla donde se ubica el sujeto que experimenta la simulación es una forma que se prueba y que resulta satisfactoria. La varilla puede sujetarse con facilidad al módulo, y posee la

suficiente resistencia para soportar el peso de la tierra con todo el plano del observador dispuesto sobre sí.

Respecto de algunos materiales listados, vale la pena aclarar en el procedimiento: en cuanto a la distancia de separación vertical entre la varilla y la luna, se estima que esta es de aproximadamente 10 cm, distancia delimitada por el lugar de amarre más cercano a la luna, donde puede sujetarse la varilla empleando tuercas.

Respecto al último ítem (tubo termo encogible), resultó necesario para cubrir la varilla roscada y evitar posibles accidentes.

Por otro lado, las dos esferas de icopor que representan a la Tierra y la Luna, fueron cubiertas con estuco plástico para garantizar su dureza y durabilidad, posteriormente fueron pintadas con vinilos de colores según lo más representativo de su geografía y lunografía. Los materiales empleados en esta etapa no se aclaran en la lista, pues de ellos se empleó muy poca cantidad.

A continuación, se adjuntan las imágenes más representativas del trabajo efectuado.



**Imagen: modelos Tierra-Luna (obsérvese las líneas planteadas que adornan una parte de esfera que representa la tierra, este será el riel sobre el cual se dispondrá el plano que representa el horizonte del observador).**

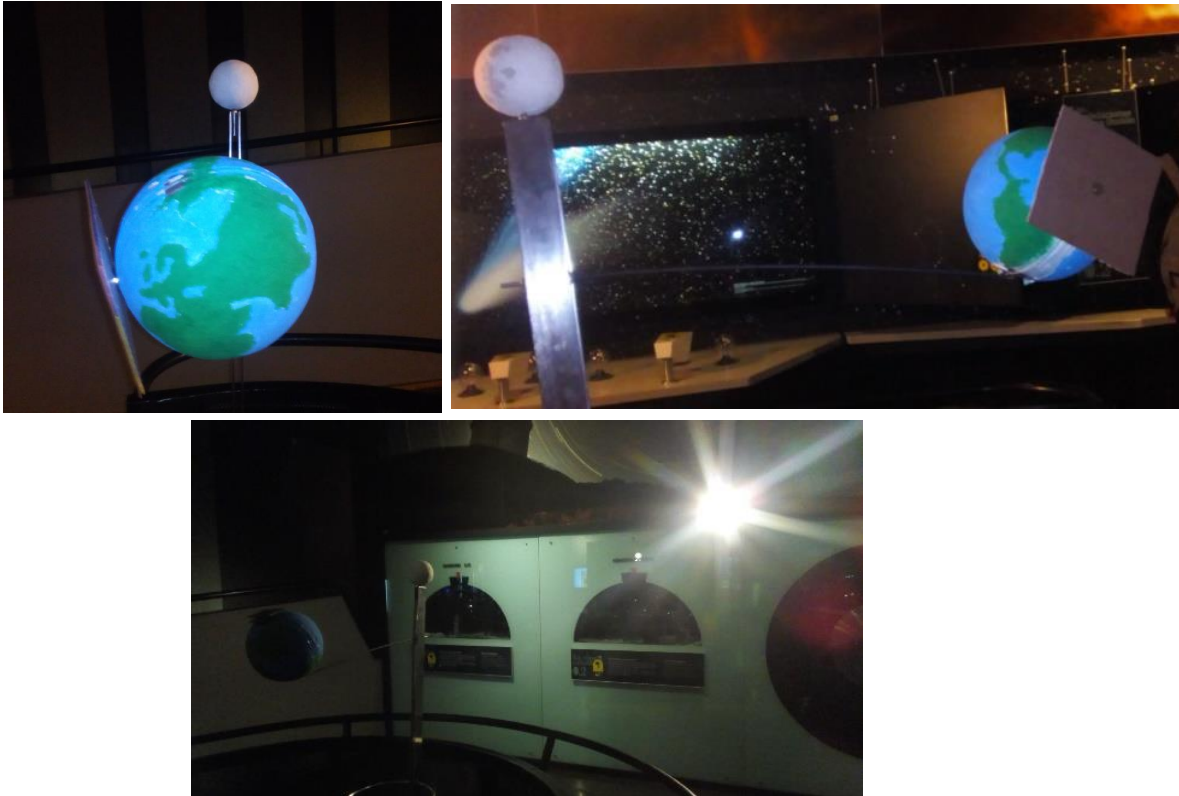


**Imagen: Modelos terminados de la tierra y la Luna, listas para disponer en el montaje del planetario.**

### Consideraciones pedagógicas y conclusiones.

Un diseño cósmico (Sistema Tierra-Luna) que deviene de la imaginación de alguien que ha incursionado en la importancia de hacer trascendental un saber o un elemento de conocimiento, tiene un rol que desencadena mediante la observación directa en un entorno de simulación, un contexto de adaptación pedagógica, en tanto llama a las mentes del educador (practicante) y educando a la argumentación y disertación crítica.

Queda pendiente por definir los resultados del modelo, en tanto se estudie la forma en como los partícipes del proceso de implementación y capacitación sobre las actualizaciones del módulo (talleristas del planetario), construyen preguntas en torno a la disertación de las fases de la Luna, y los marcos de referencia para su observación, posados sobre la Tierra.



**Imagen: Modelo Sol-Tierra-Luna. Arriba a la izquierda: obsérvese las líneas plateadas que adornan una parte de esfera que representa la tierra, este es el riel sobre el cual se desplaza el plano del observador en las diferentes latitudes. Arriba a la derecha: vista lateral del modelo diseñado, obsérvese la orientación de las líneas plateadas (un meridiano) respecto a la posición de la luna. Abajo: Vista de todo el modelo, Sol-Tierra-Luna (fuente propia).**

## **Anexo 5. Otras actividades diseñadas e implementadas**

- **Caracterización de la Luna y sus fases.**

Las intenciones de esta actividad están referidas a que los estudiantes:

- Establezcan la noción de fase lunar desde los dos sistemas referenciales principales (vistos desde la Tierra, desde fuera del sistema STL).
- Reconstruyan la noción de fase lunar, y logren ponerla en correspondencia con la realidad que acontece en nuestros cielos.
- Logren predecir en qué fase se encontrará la luna algunos días después, ante condiciones simuladas en el respectivo montaje.

Se les solicitó a los estudiantes que dibujen la Luna, aborden la inquietud de cómo creen que esta se presenta en nuestros cielos en sus cuatro fases (cuarto creciente, Luna llena, cuarto menguante, Luna nueva). Luego, se observa en una pantalla una fase particular de la Luna, vista desde diferentes lugares de la Tierra, y fuera de ella. Aquí la finalidad es que los participantes planteen hipótesis sobre el por qué se da este fenómeno observacional.

Se muestra posteriormente los países desde los cuales fueron tomadas las fotografías de la Luna mostradas en la actividad anterior. Se plantea la pregunta: ¿Por qué crees que se ve de diferentes formas la Luna cuando es observada desde diferentes lugares sobre de la Tierra? Justifica tu respuesta. Luego, se ilustran las fases de la Luna desde tres distintos puntos sobre la superficie terrestre (cerca al Polo Norte, cerca al Ecuador, cerca al Polo Sur), usando herramienta de simulación propuesta. La pregunta que guía esta parte del taller es ¿qué características podrían observarse de la Luna desde diferentes sistemas referenciales?



**Imagen: Luna creciente vista desde diferentes lugares del mundo (fuente propia).**

Se intenta mostrar la dinámica de la Luna vista desde la Tierra, la idea es que los estudiantes se den cuenta de la relación que existe entre la hora de observación de la Luna, el lugar de ella en el cielo y sus fases. La actividad está orientada por las preguntas: ¿Has visto la luna llena en el día? y, ¿Por qué sería o no posible observar la Luna llena en el día? Se logró implementar la primera parte, en donde se discute en torno a los cambios observables en la Luna en una fase creciente, para diferentes lugares de observación desde la Tierra.

En la socialización de la imagen, las primeras acotaciones que hacen los estudiantes es la distinción en el color, la fase Lunar (todos concuerdan con que es creciente), especifican que no es igual de creciente para cada país del mundo. Una estudiante en particular, que desde ahora se denota como **estudiante A** comenta: *la Luna está rotada, y “están como haciendo un círculo”*. Otro, **estudiante B** expresa: *“yo escuché algo del concepto de las dos vistas”* y comenta: *Yo vi en un documental como era el caso de las dos vistas, y es dependiendo de cada una de las posiciones y de donde esté el objeto, tenemos dos señores, uno aquí y otro aquí (dibujos en el aire), y si la Luna se cae, el señor 1 vería como la Luna se cae, y el señor 2, vería como aterrizando.*

Acto seguido, se solicitó a los estudiantes que indicasen en un globo terráqueo donde están los países desde donde fueron tomadas las fotografías de la Luna en la imagen.

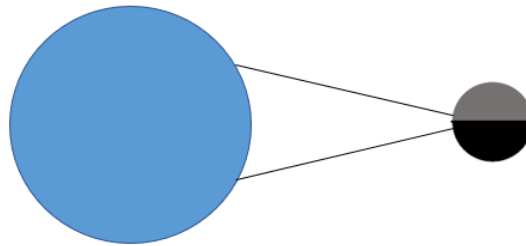
Con respecto a sí observaban una relación entre los lugares que encontraron en el globo terráqueo y la fotografía de la fase lunar. La **estudiante A** dijo: *se mueve en círculo la Luna y también la gente*



*en la Tierra.* Queda abierta la pregunta con relación a una explicación para el ángulo de inclinación de la fase lunar creciente según el lugar de la Tierra desde donde esta sea observada.

- **Sistemas de referencia y posiciones del Sol y la Luna**

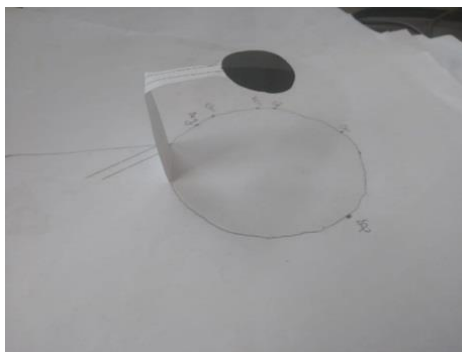
Esta actividad fue pensada como estrategia de valoración de algunos de los conocimientos y modos de comprender el sistema STL de los estudiantes del semillero de astronomía del IPN, posterior a las actividades que pudieron ser implementadas, y, por consiguiente, aparece como un ítem extra de la propuesta. Por la intención en su diseño, algunos podrían interpretar esta actividad como un postest.



**Imagen: modelo plano armable del sistema Tierra Luna  
(fuente propia)**

La idea central es: a partir de este modelo, que es una representación aparentemente bidimensional del sistema Tierra-Luna (TL), analizar diversos aspectos que han sido tratados en las actividades anteriores, como el sentido espacial de la Tierra el Sol y la Luna en una de sus fases, y el cambio de sistema de referencia: sobre la Tierra y fuera del sistema STL.

En primer lugar, el montaje se prepara recortando la imagen anterior, desde el contorno de la Luna hasta donde empiezan las líneas en forma de cono que la unen con la Tierra. Posteriormente, se dobla hacia atrás o hacia adelante desde donde terminan las líneas sobre la Tierra, luego se dobla en donde casi terminan en triángulo estas líneas en la Luna. El montaje correcto quedaría entonces así:



**Imagen: Modelo sistema Tierra-Luna armado por un estudiante (fuente propia).**

En esta actividad, resultaba esencial responder a las preguntas: En la hoja 3D donde están la Tierra y la Luna ¿Dónde crees que deba ubicarse al Sol? Dibújalo. Según el dibujo, ¿En qué fase crees que se encuentra la Luna? En la Tierra del dibujo, identifica ¿en qué lugares es de día? y ¿en qué lugares es de noche? ¿Cómo rotaría la tierra en este dibujo 3D? Dibuja sobre la tierra a las personas que podrían ver la Luna en tu dibujo ¿Todos la verían igual?

De esta actividad se obtuvieron distintos resultados, (sintetizados del material audiovisual de las explicaciones de algunos estudiantes) de los cuales, en este apartado cabe destacar:

En relación con el modelo, para algunos grupos de estudiantes resultó sencillo responder a las preguntas sobre las fases de la Luna vistas desde diferentes lugares de la Tierra, partiendo de la representación construida, así como la identificación de la fase lunar de acuerdo con la representación, y por consiguiente, en general, la correcta identificación del lugar en el cual ubicar el Sol para la fase lunar dada.

Los problemas emergieron cuando se intentó responder a las preguntas sobre la rotación de la Tierra, y la identificación de día y noche en la hoja diseñada para la actividad:

La estudiante A identificó en la representación una tierra plana, y a partir de dicha consideración, halló el sentido de rotación de la Tierra. Por supuesto, no fue del todo evidente al principio, y se requirió explicitar que un círculo bidimensional resulta de interceptar una esfera con un plano (en este caso, la hoja), ante lo cual la estudiante A cuestionó: *¿cuál plano? Frontal, de lado, del otro lado.* Posteriormente, mediante la identificación del ecuador terrestre en la tierra plana de la hoja, encontró que el sentido de giro de la Tierra era de tal modo que esta se sale del plano de la hoja.

Posterior a intervenciones reiterativas sobre la intercepción de un plano con una esfera, la mayoría de los estudiantes concluye que el sentido de rotación de la tierra es de tal modo que se sale de la hoja de la representación plana de esta.

Respecto a la identificación de día y noche, la mayoría de los estudiantes, logran hacer la representación, con distintos lenguajes, pero acorde con lo esperado.

Finalmente, se vinculan los conocimientos adquiridos en todas las etapas de las actividades para efectuar las relaciones lógicas que llevan a establecer las relaciones de distancias tamaños y movimiento, inicialmente entre la Tierra y la Luna con las primeras actividades, y posteriormente, si bien no se establece una relación exacta entre la distancia Tierra-Sol, se tienen de la mano argumentos suficientes para declarar que este está demasiado lejos, y al tener un tamaño aparente muy semejante al de la Luna, llegar a la idea esencial de su gran tamaño. Establecer puntualmente la relación de tamaños, requeriría llevar a cabo otro experimento que amplificaría la propuesta, pero la enriquecería de elementos para el alcance exitoso de la pregunta de investigación que ha guiado todo este diseño.

En cuanto al movimiento, en el estudio que relaciona a la Tierra y la Luna, las fases de la Luna son una evidencia empírica de su movimiento relativo alrededor de la tierra. Respecto al heliocentrismo, que es la idea trascendental que marco el legado de Aristarco, si tenemos presente la coherencia de los argumentos exhibidos en el párrafo anterior, es lógico pensar, que, si el Sol dista demasiado del sistema TL, no tiene sentido argüir que el Sol gira alrededor de la tierra, y quizá fue este el argumento que llevó a Aristarco a contemplar el heliocentrismo como un hecho natural del sistema STL. Y la observación continua de los planetas visibles.

- **Simulación de eclipses de Sol y Luna**

La siguiente actividad, está en relación con el Sol, como caracterizarlo para dar cuenta de los eclipses totales de sol. Para esta parte, los materiales requeridos son dos focos de distintos tamaños y dos esferas sujetadas de palos de balsa largos, esto es parte de una simulación en el entorno real, y por consiguiente se requiere de un salón que pueda oscurecerse lo máximo posible.

Los objetos de los que se dispone para organizar el sistema Sol – Tierra - Luna, se pone como escenario de discusión, ¿cómo deben estar organizados estos cuerpos de modo que se dé un eclipse solar? Luego de encontrar entre todos la “disposición correcta”, se pregunta sobre ¿cómo es el

movimiento de cada uno de estos cuerpos, vistos desde afuera, tal y como todos, dispuestos a los lados, lo están viendo?

Finalmente, se busca conectar estas ideas con lo observado desde la Tierra, empleando para ello el software Stellarium, con el cual puede simularse una noche o día de observación real; con este software puede irse hacia el pasado o hacia el futuro, de acuerdo con predicciones astronómicas que se efectúan en virtud de conocer en detalle los mecanismos de los cuerpos celestes. Es importante reconocer las fechas exactas para las cuales se da un eclipse solar en la latitud desde la cual se efectúa el ciclo de talleres en cuestión.