

CONCEPCIONES DE ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE MATEMÁTICAS
SOBRE AZAR Y ALEATORIEDAD

FREDY ALEXANDER BARAJAS PRIETO
LUISA YESENIA SALINAS VANEGAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D. C.

2019

CONCEPCIONES DE ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE MATEMÁTICAS
SOBRE AZAR Y ALEATORIEDAD

Trabajo de grado de pregrado como requisito para obtener el título de
Licenciados en Matemáticas

FREDY ALEXANDER BARAJAS PRIETO

Código: 2016240003

C.C 1031131017

LUISA YESENIA SALINAS VANEGAS

Código: 2015140073

C.C 1024591780

Directora

INGRITH ÁLVAREZ ALFONSO

Magister en Docencia de la Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D. C.

2019

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Dios por darnos la fortaleza y virtud necesaria para alcanzar esta meta.

A nuestras familias por brindarnos siempre un apoyo incondicional y palabras de aliento en los momentos más difíciles que pasamos al realizar este trabajo, por la comprensión que tuvieron durante el desarrollo de este al encontrarnos un poco distantes de ellos.

A nuestra directora Ingrith Álvarez Alfonso por su entrega incondicional, por ser parte de nuestra formación profesional, por ayudarnos a cumplir este gran sueño, enseñarnos a ver las derrotas como una oportunidad más para aprender y mejorar cada vez más, y por brindarnos sus grandes conocimientos.

A nuestros amigos, especialmente a Daniela Salinas, por hacer parte de este trabajo, brindando su apoyo y ayuda cuando más lo necesitábamos.

A la profesora Vivian Sánchez por abrirnos el espacio para poder implementar cuando las condiciones no daban para eso; y a los participantes de este estudio por su sinceridad y seriedad al responder lo que se les preguntaba.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Facultad de Pedagogía</small>	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página iv de 97

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado de pregrado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Concepciones de estudiantes para profesor de matemáticas sobre azar y aleatoriedad.
Autor(es)	Barajas Prieto, Fredy Alexander; Salinas Vanegas, Luisa Yesenia
Director	Álvarez Alfonso, Ingrith
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2019. 67p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional UPN
Palabras Claves	Concepciones, Azar, Aleatoriedad, Estadística, Probabilidad.

2. Descripción
<p>Este trabajo se enmarca en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de la Estocástica, tiene como fin contribuir en el desarrollo del Pensamiento Matemático, en especial el Pensamiento Aleatorio, pues se ha evidenciado que las nociones de azar y aleatoriedad no se desarrollan del todo en la escuela. Por tanto se indaga sobre las concepciones de un grupo de estudiantes frente a estas nociones. Con base en los resultados se deja como sugerencia un instrumento para que los docentes tengan una manera de conocer las concepciones de los estudiantes en cuanto a tales nociones. Unas recomendaciones didácticas para, en caso de ser posible, direccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el grupo de maestros en formación participante de la indagación en torno a las nociones de estudio; o como insumo para gestionar espacios de formación en otros ambientes que guarden características similares con el grupo de participantes.</p>

3. Fuentes
<p>Álvarez, I., Andrade, L., & Fernández, F. (2017). Panorama de la investigación en educación estadística desde tesis doctorales 2000-2014. <i>Revista TED</i>, (41), 87-107. doi: 10.17227/01203916.6039.</p> <p>Artigue, M. (1989). Épistémologie et didactique. <i>Recherches en didactique des mathématiques</i>, 10(23), 241-286.</p> <p>Ayton, P., Hunt, A.J., & Wright, G. (1989). Psychological conceptions of randomness. <i>Journal of behavioral decision making</i>, (2), 221-238.</p> <p>Azcarate, P., Cardeñoso, J., & Serradó, A. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: Su incidencia desde los libros de texto. <i>Statistics education research journal</i>, (4), 59-81. doi: 10.13140/2.1.4818.6569.</p> <p>Batanero, C., & Serrano, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. <i>UNO: Revista didáctica de las matemáticas</i>, (5), 15-28.</p>

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Facultad de Pedagogía</small>	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página v de 97

- Batanero, C. (2001). Aleatoriedad, modelización, simulación. En D. de la Coba (Ed.) *X Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, 119-130. España: Sociedad canaria Isaac Newton de profesores de matemáticas.
- Batanero, C., & Godino, J. D. (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Granada, España: Polígono Juncaril.
- Batanero, C. (2005). Significado de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* (8) 247-263.
- Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales.
- Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. En J. Contreras, C. Batanero, J. Godino, G. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M. Gea y M. López (Eds.) *I Jornadas virtuales de didáctica de la estadística, la probabilidad y la combinatoria* 55-61. Granada, España: Universidad de Granada.
- Bennett, D. J. (1993). *The development of the mathematical concept of randomness; educational implications*. (Tesis doctoral). New York University, Estados Unidos.
- Bennett, D. J. (1998). *Randomness*. Londres, Inglaterra: Harvard University Press.
- Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. (Tesis doctoral). Universidad de Bordeaux. Burdeos, Francia.
- Cano, M. & Zapata, D. (2016). Análisis del pensamiento aleatorio desde las representaciones semióticas presentes en las pruebas saber grado quinto. (Tesis de maestría). Medellín, Colombia : Universidad de Medellín.
- Carranza, S. & Guerrero, A. (2016). El pensamiento aleatorio como fundamento para el desarrollo del pensamiento matemático y sus componentes. (Trabajo de grado). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Cardeñoso, J., González, F., & Moreno, A. (2014). Los significados de la aleatoriedad de los profesores de matemática y de biología en formación. En P. Lestón (Ed.) *Acta latinoamericana de matemática educativa*, (27), 1963-1972. Coalcalco, México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- Contreras, L. (1998). Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula. (Tesis doctoral). Huelva, España: Universidad de Huelva.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Facultad de Pedagogía</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página vi de 97	

- El-Bouazzaoui, H. (1988). *Conceptions des élèves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction*. (Tesis doctoral). Université Laval, Canada.
- Fernández, F., & Sarmiento, B. (2009). *Curso básico de estadística descriptiva*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Fernández, F. (2017a). *Diapositivas de estadística*. Material de clase del espacio académicos Probabilidad 2017-1. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.
- Fernández, F. (2017b). *Diapositivas de probabilidad*. Material de clase del espacio académicos Probabilidad 2017-1. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.
- Fine, T. L. (1973). *Theories of probability an examination of foundations*. London, Inglaterra: Academic Press.
- Hacking, I. (2006). *La domesticación del azar*. Barcelona: Gedisa.
- Hernández, H. (2015). *El lenguaje del azar en alumnos de educación secundaria obligatoria*. (Tesis de maestría). Universidad de Granada, España.
- Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of function as an example. *Problemas of representation in the teaching and learning of mathematics* 67-71.
- Johsua, S. (1989). La perdurance des obstacles épistémologiques: Un révélateur de leur nature. En N. Bernarz y C. Garnier (Eds.) *Construction des savoirs: Obstacles y conflicts* 110-116. Montreal, Canadá: Universidad de Quebec.
- Konold, C. (1991). Comprender las creencias de los estudiantes sobre la probabilidad. En E. von Glasersfeld (Ed.) *Constructivismo radical en la educación matemática* 139-156. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.
- Kyburg, H. (1974). *The logical foundations of statistical inference*. Boston: Reidel.
- Licenciatura en Matemáticas (2017). *Contenido programático de Estadística*. Archivos del Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.
- Licenciatura en Matemáticas (2017). *Contenido programático de Probabilidad*. Archivos del Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.
- Londoño, D., & Montoya, E. (2011). *Azar, aleatoriedad y probabilidad: significados personales en estudiantes de educación media*. (Tesis de maestría). Universidad de Manizales, Colombia.
- Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Serie de Lineamientos Curriculares.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Formación de Profesores</small>	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página vii de 97

- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Serie de Estándares.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2017a). *Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas*, 2. Bogotá: Serie de Derechos de Aprendizaje.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2017b). *Mallas Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Serie de Mallas Curriculares.
- Ponte, J. P. (1999). Las creencias y concepciones de maestros como un tema fundamental en formación de maestros. En K. Krainer & F. Goffree (Eds.) *On research in teacher education: From a study of teaching practices to issues in teacher education* 43-50. Osnabrück Alemania: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik
- Restrepo, E. (2012). *Aleatoriedad, nociones previas en estudiantes de educación media*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Colombia.
- Ruiz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics* (22) 1-36. Países Bajos: Springer.
- Sierpiska, A. (1989). *On 15-17 years old student's conceptions of functions, iteration of functions and attractive points*. Warsaw, Polonia: Preprint.
- Steinbring, H. (1991). The concept of chance in everyday teaching: Aspects of a social epistemology of mathematical knowledge. En A. Bakker. (Ed.) *Educational studies in mathematics* (pp. 503-522). Países Bajos: Springer.
- Vergnaud, G. (1983). Didactique du concept du volumen. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10, (23), 133-170.
- Zuñiga, F. (2017). *Implementación de una secuencia didáctica basada en situaciones problemas para promover la comprensión de la noción de aleatoriedad* (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Colombia.

4. Contenidos

El contenido de este trabajo se encuentra distribuido en ocho capítulos que sustentan las etapas de desarrollo de la propuesta desde un ámbito teórico y del trabajo en el aula. En el primer capítulo se describe la situación de estudio, la cual consiste en que al culminar la educación básica y media en Colombia los estudiantes que ingresan a la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional, no logran el desarrollo deseable de las nociones azar y aleatoriedad. Lo que se sustenta a través de antecedentes en donde se presenta cómo cierta población percibe una o las dos nociones de estudio. En el segundo capítulo se expone la importancia de conocer, por parte de los docentes,

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Facultad de Pedagogía</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página viii de 97	

las concepciones que tienen los estudiantes sobre un objeto estadístico y algunas consecuencias que conlleva conocerlas o no. Además se manifiesta la importancia que tiene el azar y la aleatoriedad en la cotidianidad, tomando como referentes teóricos a Bennett (1998) y Gigerezer (2002 citado por Batanero 2006). En el tercer capítulo se plantea el objetivo general y los objetivos específicos los cuales se centran en conocer las concepciones que tienen los estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas (2018-2) en cuanto al desarrollo de las nociones de azar y aleatoriedad. En el cuarto capítulo se plasman los referentes teóricos relacionados con concepciones y nociones de azar y aleatoriedad, además de mostrar una revisión sobre el recorrido histórico de las mismas. En el quinto capítulo se comenta la estrategia metodológica, la cual consta de tres etapas: elementos teóricos que sustentan este trabajo; implementación del instrumento y el análisis de las respuestas y una posible estrategia que aporte a mejorar la situación de estudio; además se exponen las categorías que surgen del marco de referencia. En el sexto capítulo se encuentra el instrumento que se emplea para recolectar información respecto a las concepciones de los estudiantes sobre las nociones de interés; se muestra lo reportado por parte de los participantes y el respectivo análisis, el cual se realiza con base en las subcategorías de diseño del instrumento (Características de azar y Características de aleatoriedad), la justificación del cuestionario y las respuestas reportadas; llegando a la construcción de las recomendaciones, las cuales se contemplan en el séptimo capítulo. En el último están las conclusiones fruto de este trabajo, las cuales muestran que los estudiantes de primer semestre tienen concepciones vagas e imprecisas frente a las nociones de estudio; pues respecto al azar, ellos lo perciben mayormente en situaciones asociadas al mundo social, especialmente en los juegos de casino, dejando de lado los demás mundos (político, físico y biológico); y en cuanto a la aleatoriedad, solamente tienen en cuenta la manera cuantitativa de interpretarla, es decir que se quedan en el cálculo de probabilidades sin tomar conciencia que es una situación aleatoria.

5. Metodología

La indagación se desarrolla en tres fases. Para dar inicio se plantea la hipótesis y la situación de estudio en la que se enmarca el trabajo; se formulan unos referentes teóricos y se diseña un instrumento con el fin de recolectar información acerca de las concepciones sobre azar y aleatoriedad que pueden atribuirse a los estudiantes que ingresan a primer semestre en el 2018-2 a la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Fase 1); posteriormente, se recoge la información sobre dichas concepciones a través de la implementación de un instrumento (Fase 2); se realiza el análisis de las respuestas reportadas haciendo uso del marco de referencia (categorías y subcategorías), y se valida la hipótesis de indagación con el fin de proponer una posible estrategia que mitigue la situación de estudio (Fase 3).

6. Conclusiones

Entre las conclusiones a las que se llegó se encuentra que la manera de preguntar (directa o indirecta) afecta la caracterización de las concepciones que los estudiantes reportan sobre las nociones de azar y aleatoriedad; respecto a estas, los participantes para justificar la existencia del azar en diversas situaciones se centran en fuerzas controladas como vivencias o experiencias propias, aunque una gran mayoría lo identifican solo en juegos de casino. Sobre la aleatoriedad, surgió una subcategoría a partir de la cual los estudiantes indicaron que una situación es aleatoria si se elige cualquier objeto o cosa sin condición alguna. Se evidencia que los participantes ven dicha noción desde la ausencia de patrones en los resultados que se obtienen al realizar un experimento aleatorio. Lo anterior lleva a confirmar la hipótesis planteada, pues gran cantidad de participantes reportaron varias *misconceptions*. Por ejemplo, confunden la noción de azar o de aleatoriedad con nociones tales como probabilidad, incertidumbre y variabilidad. A partir de esto, se proponen unas recomendaciones

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Formación de Maestros</small>	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página ix de 97	

específicas con el fin de ampliar las concepciones que tienen los estudiantes de primer semestre que ingresaron a la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en el 2018-2, respecto a la percepción de las nociones de estudio.

Elaborado por:	Barajas Prieto, Fredy Alexander; Salinas Vanegas, Luisa Yesenia
Revisado por:	Álvarez Alfonso, Ingrith

Fecha de elaboración del resumen:	12	11	2019
--	----	----	------



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Presentados y **aprobados** el documento escrito y la sustentación del Trabajo de Grado, en el tipo Monografía, titulado: "**Concepciones de los estudiantes para profesor de matemáticas sobre Azar y Aleatoriedad**", elaborado por los estudiantes:

Luisa Yesenia Salinas Vanegas código 2015140073 y cédula 1024591780.

Fredy Alexander Barajas Prieto código 2016240003 y cédula 1031131017.

Como requisito parcial para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**, el jurado evaluador asigna **43** puntos al mismo.

Sugerencia de Distinción: Ninguna Meritoria Laureada

En constancia se firma a los 12 días del mes de marzo de 2020.

Directora del Trabajo: Profesora

Ingrith Álvarez A.
INGRITH ÁLVAREZ ALFONSO

Jurado:

Profesor

FRANCISCO CAMELO
FRANCISCO JAVIER CAMELO BUSTOS

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	1
1. SITUACIÓN DE ESTUDIO	3
1.1 DESCRIPCIÓN DE LA SITUACIÓN DE ESTUDIO.....	3
1.2 ANTECEDENTES	7
2. JUSTIFICACIÓN.....	10
3. OBJETIVOS.....	12
3.1 OBJETIVO GENERAL	12
3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	12
4. MARCO DE REFERENCIA	13
4.1 CONCEPCIONES EN MATEMÁTICAS	13
4.2 HISTORIA DEL AZAR Y DE LA ALEATORIEDAD	16
4.2.1 Azar	16
4.4.2 Aleatoriedad	19
4.3 COMPETENCIAS EN TORNO AL AZAR Y LA ALEATORIEDAD	20
5. ASUNTOS METODOLÓGICOS	24
5.1 ESTRATEGIA METODOLÓGICA	24
5.2 CONSIDERACIONES ÉTICAS	25
5.3 PARÁMETROS PARA CARACTERIZAR LAS CONCEPCIONES.....	26
6. DESARROLLO DE LA PROPUESTA.....	30
6.1 INSTRUMENTO DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN	30
6.2 ANÁLISIS	33
6.2.1 Concepciones sobre azar	35
6.2.2 Concepciones sobre aleatoriedad	43
6.3 RESULTADOS.....	50
7. RECOMENDACIONES PARA EL DESARROLLO DE CONCEPCIONES	56

8. CONCLUSIONES.....	62
REFERENCIAS.....	65
ANEXOS	70

TABLAS

	pág.
Tabla 1. Estados de discurso del azar	18
Tabla 2. Conceptos de azar	18
Tabla 3. Características de azar.....	27
Tabla 4. Características de la Aleatoriedad.....	28
Tabla 5. Propósitos del instrumento	33
Tabla 6. Espacios académicos relacionados con Estocástica.....	33
Tabla 7. Cantidad de ejemplos de azar en cada mundo, según participantes	40
Tabla 8. Repeticiones de un experimento y percepción de la aleatoriedad	46
Tabla 9. Participantes según concepciones respecto al azar.....	50
Tabla 10. Participantes según las situaciones problema y los significantes de la aleatoriedad.....	53
Tabla 11. Participantes según las situaciones problema y herramientas de la aleatoriedad.....	53
Tabla 12. Situaciones para desarrollar la noción de azar.....	58
Tabla 13. Situaciones para desarrollar la noción de la aleatoriedad	60
Tabla 14. Propuesta de bibliografía de consulta	61

GRÁFICOS

	pág.
Gráfico 1. Establecimiento de educación superior donde ya habían estudiado	34
Gráfico 2. Mundos en donde perciben el azar según tipo de pregunta	42
Gráfico 3. Estados del discurso del azar según tipo de pregunta.....	43
Gráfico 4. Tipos de ejemplos de eventos aleatorios.....	44
Gráfico 5. Concepciones frente a la aleatoriedad.....	47
Gráfico 6. Motivos para no poder predecir resultados en situaciones aleatorias...	49
Gráfico 7. Características de la concepción de azar	52
Gráfico 8. Características de las concepciones de aleatoriedad	55

IMÁGENES

	pág.
Imagen 1. Aprendizajes esperados en 'Estadística' desde 2017-1 a 2018-2	5
Imagen 2. Aprendizajes esperados en 'Probabilidad' desde 2017-1 a 2018-2.....	5
Imagen 3. Fases estrategia metodológica para el desarrollo de la indagación	25
Imagen 4. Evidencias de azar en el mundo social: juegos de casino.....	35
Imagen 5. Evidencia azar en mundos social-físico o social-político	36
Imagen 6. Evidencia de azar en los cuatro mundos.....	37
Imagen 7. Evidencia de azar en tres mundos social-político-físico.	37
Imagen 8. Evidencias del discurso del azar: orden	38
Imagen 9. Evidencias del discurso del azar: azar o necesidad	38
Imagen 10. Evidencias del discurso del azar: poder de voluntad.....	39
Imagen 11. Evidencia del discurso de azar: poder de voluntad -mundo biológico-39	
Imagen 12. Evidencia del azar en el mundo político	40
Imagen 13. Evidencias del azar en el mundo físico	40
Imagen 14. Percepción vaga del azar en el mundo social	41
Imagen 15. Evidencia discurso de azar: poder de voluntad - mundo físico-	41
Imagen 16. Evidencias de diseño de evento aleatorio en contextos cotidianos	45
Imagen 17. Evidencia de ejemplos de evento aleatorio: juegos de casino	45
Imagen 18. Evidencia de concepción frecuencial.....	45
Imagen 19. Evidencia de concepción absoluta	46
Imagen 20. Evidencias de la subcategoría AL ₁₆ : Elección sin condición.....	47
Imagen 21. Evidencia de las subcategorías AL ₁₂ y AL ₁₃	48
Imagen 22. Evidencia de las subcategorías AL ₈ y AL ₁₂	48
Imagen 23. Evidencias de las subcategorías AL ₁₀ : modelos probabilísticos.....	49

LISTA DE ANEXOS

pág.

ANEXO A. Cuestionario de Indagación.....	70
ANEXO B. Formato de consentimiento para menores de edad.	73
ANEXO C. Formato de consentimiento para mayores de edad.	76
ANEXO D. Acopio y sistematización de datos.	78

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se enmarca en el campo de la enseñanza y el aprendizaje de la Estocástica. Tiene como objetivo caracterizar las concepciones de los estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, cohorte 2018-2, respecto a azar y aleatoriedad, puesto que estas nociones ayudan a la toma de decisiones en el diario vivir MEN (2006). Con base en lo propuesto por Hassad (2007 citado por Álvarez, Andrade y Fernández 2017) se toma como hipótesis teórica que si los futuros docentes de matemáticas tienen un desarrollo limitado de la noción de azar y de aleatoriedad se asume que sus estudiantes carecerán del desarrollo de estas, pues la formación de los docentes impacta en la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes.

Así, el documento se estructura de ocho partes. La primera muestra la situación de estudio, la cual consiste en que algunos docentes de educación básica y media desarrollan parcialmente las nociones de azar y aleatoriedad. Además en dicho capítulo se cuenta con tres trabajos asumidos como antecedentes, los cuales presentan información sobre concepciones acerca del azar o la aleatoriedad. Los resultados de estos trabajos dan fuerza a la hipótesis algunos de los futuros docentes de matemáticas, estudiantes que ingresaron en el 2018-2 a la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, no han desarrollado dichas nociones de manera adecuada o completa.

En la segunda parte se presenta la justificación del porqué trabajar con concepciones en Estocástica, en especial las de azar y de aleatoriedad, puesto que según Brousseau (1986) es importante que los docentes conozcan las concepciones de sus estudiantes para que mediante diversas situaciones los

acerquen cada vez más al objeto en cuestión; lo cual se relaciona con las recomendaciones que se proponen para aportar en la formación de los partícipes de este trabajo. En la tercera sección se exponen los objetivos que direccionan esta propuesta hacia la caracterización de las concepciones de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la cohorte 2018-2.

En la cuarta parte se exhibe el marco de referencia que sustenta el trabajo, donde se presentan puntos de vista sobre concepciones en matemáticas, un recorrido histórico sobre las nociones de azar y aleatoriedad y, a través de un análisis de las orientaciones curriculares trazadas por el Ministerio de Educación Nacional [MEN], se plantean actitudes que deben tener desarrolladas los participantes al terminar la etapa escolar, en relación con los objetos de estudio.

En la quinta parte, se presenta la estrategia metodológica implementada en la indagación y se formulan categorías y respectivas subcategorías que han de servir para clasificar la información revelada por los participantes y para su respectivo análisis. En la sexta, se encuentra la descripción del instrumento (cuestionario) usado para identificar las concepciones de los participantes en el estudio frente al azar y a la aleatoriedad; así mismo, se expone el análisis de las respuestas manifestadas por parte de los participantes teniendo en cuenta el marco analítico. En la séptima parte, se presentan recomendaciones para el desarrollo de pensamiento aleatorio de los estudiantes de la cohorte 2018-2, las cuales se centran en trabajar situaciones azarosas y aleatorias en diversos contextos; y finalmente se exponen las conclusiones.

1. SITUACIÓN DE ESTUDIO

A continuación se presenta la descripción de la situación de indagación, la cual gira en torno al desarrollo de las nociones de azar y aleatoriedad en estudiantes que ingresan a primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Además de dar a conocer antecedentes relacionados con dicha situación.

1.1 DESCRIPCIÓN DE LA SITUACIÓN DE ESTUDIO

El Ministerio de Educación Nacional [MEN] en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas [EBCM] (2006) y en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas [LCM] (1998) respecto al desarrollo de las nociones de azar y aleatoriedad, manifiesta que estas deben ser trabajadas a lo largo de la educación escolar colombiana. Asimismo siguiendo a Gal (2002) un ciudadano estadísticamente culto debe tener la capacidad de tomar decisiones en situaciones no determinísticas, por tanto la formación en este campo no termina con la etapa escolar sino que trasciende a lo largo de la formación profesional.

Atendiendo a esto la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional aborda el desarrollo del Pensamiento Aleatorio desde seis espacios académicos de la Línea de Estadística. Donde tres espacios son del ciclo de fundamentación (Estadística, Probabilidad y Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística) los cuales se brindan en cuarto, quinto y sexto semestre, respectivamente; sin embargo los dos últimos cursos se pueden abordar de manera simultánea solamente con el prerrequisito de haber aprobado Estadística.

Los demás espacios académicos (Inferencia y métodos estadísticos, Análisis de varianza y regresión lineal y Tópicos del análisis multivariado) pertenecen al ciclo

de profundización, en donde el prerrequisito para cursar el primero de estos es haber aprobado Probabilidad, y para los otros cursos es aprobar Inferencia. Estos espacios son optativos para cumplir con los créditos requeridos para obtener el título como Licenciado en Matemáticas.

En el espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística, cursado en el semestre 2017-1, se trabajó en torno a las características relacionadas con los objetos propios del Pensamiento Aleatorio, tales como azar, aleatoriedad, incertidumbre, variabilidad y no determinístico. Dicho trabajo inicio con el cuestionamiento que realizaba la docente, preguntándonos qué era cada una de las nociones mencionadas, a lo que respondimos de manera intuitiva teniendo en cuenta nuestra experiencia y algunos conocimientos estocásticos.

En dicho cuestionamiento, relacionábamos el azar con la posibilidad de ganar un chance, la lotería, o algún juego donde se involucraban las apuestas, es decir que lo percibíamos solamente en el mundo social, específicamente en los juegos de casino, dejando de lado el mundo físico, biológico y político, mundos en los que Batanero y Godino (2002) han caracterizado la presencia de esta noción. Al momento que la docente nos preguntaba el por qué se comportaban las situaciones de la manera en que lo manifestábamos, las justificaciones fueron asociadas a la suerte, la “ley del karma”, creencias religiosas o divinas (v.g. “gracias a Dios” “por acción divina”). En relación con la aleatoriedad la confundíamos con el azar, pues indicábamos que un evento ocurría al azar y no de manera aleatoria.

Con base en lo anterior se evidencia que a pesar de haber recibido educación básica primaria, secundaria y media en Colombia, haber cursado el espacio académico de Estadística y algunos asistentes del curso, en dicho momento, cursando el espacio de Probabilidad, teníamos concepciones erróneas o vagas respecto a estas nociones.

Lo cual se asocia a que en los aprendizajes esperados de los dos cursos (Estadística y Probabilidad) no se evidencia el trabajo con estas nociones (Imagen 1 y 2), por tanto se esperaría que si en estos espacios no se desarrolla completamente las nociones de azar y de aleatoriedad lo mínimo sería que los maestros en formación lleguen al curso de Enseñanza con algún desarrollo de estas nociones, logrado a lo largo de su etapa escolar (básica primaria, secundaria y educación media); debido a que en las políticas educativas nacionales, la enseñanza asociada a los objetos del Pensamiento Aleatorio es obligatoria.

- Aplicar métodos de análisis de datos en la resolución de problemas de tipo estadístico.
- Identificar y utilizar herramientas computacionales de análisis de datos para interpretar, resolver, comunicar y concluir acerca de resultados estadísticos.
- Proponer y desarrollar análisis de bases de datos que impliquen la recolección y/o manipulación de información (en forma de datos), asociado a contextos o situaciones problemáticas referenciadas en internet.

*Imagen 1. Aprendizajes esperados en 'Estadística' desde 2017-1 a 2018-2
Fuente: Licenciatura en Matemáticas (2017)*

- Establecer las diferencias entre experimentos aleatorios y determinísticos, modelos determinísticos y probabilísticos, espacios muestrales y eventos.
- Reconocer y aplicar las diferentes técnicas del análisis combinatorio.
- Deducir los diferentes teoremas de probabilidad a partir de los axiomas y algunas propiedades de los conjuntos.
- Calcular probabilidades de eventos apoyándose en análisis combinatorio y los conceptos de independencia, probabilidad condicional y proceso estocástico finito.
- Construir variables aleatorias y distribuciones de probabilidades discretas, continuas y conjuntas.
- Construir los modelos probabilísticos discretos clásicos: Binomial, Geométrica, Hipergeométrica, Pascal, Multinomial y Poisson.
- Construir distribuciones continuas y reconocer los modelos probabilísticos clásicos: Uniforme, Exponencial, Normal, Gamma y Beta.
- Plantear y resolver problemas donde se haga uso de las diferentes distribuciones de probabilidad.
- Hacer uso de software para visualizar relaciones, similitudes y diferencias de los diferentes modelos de probabilidad.
- Diseñar simulaciones que permitan visualizar las líneas de tendencia de las diferentes distribuciones de probabilidad.
- Deducir y aplicar reglas para el valor esperado y la varianza de las distribuciones discretas y continuas.

*Imagen 2. Aprendizajes esperados en 'Probabilidad' desde 2017-1 a 2018-2
Fuente: Licenciatura en Matemáticas (2017)*

En esta misma línea, pero ya no desde la perspectiva del aprendizaje sino de la enseñanza, como futuros profesores de matemáticas, pragmáticamente evidenciamos que el desarrollo el Pensamiento Aleatorio se deja a un lado en los colegios en los que se desarrollamos las prácticas iniciales asociadas a los espacios académicos del Ambiente de Pedagogía y Didáctica de la Licenciatura, ya que nuestras prácticas y las de la mayoría de nuestros compañeros de cohorte se centraron en el Pensamiento Algebraico, Geométrico o Métrico, y en una sola ocasión se trabajó el Pensamiento Aleatorio, experiencia que se centró en la lectura e interpretación de gráficos estadísticos, solamente durante cuatro horas de clase al semestre, lo cual no fue un asunto relevante en la formación de los estudiantes con los que se desarrolló tal práctica.

Respecto al trabajo que se realiza con el Pensamiento Aleatorio, Cano y Zapata (2016) indican que en las investigaciones que se han realizado en la Escuela Normal Superior de Amagá se ha evidenciado que al trabajo de este pensamiento se le dedica poco tiempo o solo se hace en los últimos meses del año escolar. Por otro lado, Carranza y Guerrero (2016) manifiestan que los términos estadísticos se dejan para todos los cursos de la básica secundaria y media (6 a 11) para último periodo académico.

Dado este panorama, surge el cuestionamiento respecto a si egresados de la educación media tienen concepciones similares a las manifestadas por los asistentes al espacio académico de Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística. Por ello nos preguntamos a cerca de ¿cuáles son las concepciones que tienen los estudiantes de primer semestre (2018-2) de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional respecto al azar y la aleatoriedad?

1.2 ANTECEDENTES

Para la construcción de los antecedentes se hizo un rastreo en internet, en donde se buscaron los temas de interés (azar, aleatoriedad y concepciones) en Google Académico, seleccionando documentos que no superan los diez años de antigüedad o tuvieran una población similar a la de este estudio. Los documentos asumidos como antecedentes son tres, el primero es una propuesta de investigación que aborda la concepción de aleatoriedad Restrepo (2012); el segundo se centra en el azar y la probabilidad Hernández (2015); y el último realiza un estudio sobre los dos objetos azar/aleatoriedad y probabilidad Londoño y Montoya (2011).

El estudio de Restrepo (2012) se enmarca en torno a la aleatoriedad, presentando las concepciones preliminares que tiene un grupo de estudiantes de 10° grado de una institución educativa del área metropolitana de Medellín (Colombia) sobre esta noción. Donde menciona que la mayoría de ellos la perciben como la suerte y tan solo un pequeño grupo toma decisiones en situaciones aleatorias teniendo en cuenta la información presentada en los datos. Por ejemplo, buscando un patrón que modele la situación y dejando de lado las experiencias y la intuición respecto al comportamiento de ésta.

Los estudiantes de primer semestre de la LM de la UPN comparten ciertas características con la población del estudio de Restrepo, pues ellos hace poco terminaron su educación escolar (se asume que la mayoría inicia sus estudios en educación superior al semestre siguiente de terminar el colegio o a lo más dos años después), por tanto cabe la posibilidad que los resultados sean similares. Es decir que el desarrollo de la noción de aleatoriedad sea parcial. No obstante Restrepo (2012) no propone alternativa para ampliar el desarrollo de dicha noción, dejando su investigación solamente en el campo de la caracterización.

Hernández (2015) por su parte realiza un trabajo sobre el lenguaje asociado al azar y la probabilidad en estudiantes del Instituto de Educación Secundaria Mediterráneo de la Línea de la Concepción (Cádiz, España), cuyas edades oscilan entre los 12 y 15 años, mostrando que la mayoría de dichos estudiantes determinan cuando está presente el azar y proporcionan definiciones o ejemplos correctos. Sin embargo establecen solamente relaciones entre dichos objetos y los juegos de azar. En cuanto a la probabilidad los participantes distinguen entre probable, imposible o seguro, lo que la autora menciona como los tres niveles de comprensión inicial de la probabilidad.

De lo anterior, se evidencia que éste estudio apoya la hipótesis del presente trabajo, pues los resultados indican que los estudiantes asocian el azar solamente a los juegos de casino, por ende el desarrollo de dicha noción es parcial debido a que solo lo perciben en uno de los cuatro mundos que propone Batanero y Godino (2002); sin embargo, a pesar de evidenciar estos niveles de comprensión, Hernández no plantea actividades para contribuir a la ampliación de la noción de estudio.

Por otro lado, Londoño y Montoya (2011) realizan un trabajo sobre los significados personales que tiene un grupo de estudiantes de educación media frente al azar, la aleatoriedad y la probabilidad, partiendo de que estos no se corresponden ni se relacionan con los significados institucionales. Los autores realizaron un trabajo interpretativo de los significados que manifestaban los estudiantes, lo cual les permitió, en cuanto a los objetos de estudio, concluir que gran parte de los participantes perciben el azar como un juego sujeto a la eventualidad de las situaciones donde hay variables que no se pueden determinar o controlar en el juego. A su vez algunos estudiantes asocian esta noción a cuestiones religiosas, puesto que según los autores los participantes de su estudio ven esto como un impedimento u obstáculo para percibir o trabajar el azar.

De otra parte, la aleatoriedad la relacionan inmediatamente con sucesos que ocurren casualmente sin importar el tiempo y el orden en que estos se dan. La probabilidad la reconocen como algo posible, con la posibilidad de algo o la medida de cuán posible es algo, en algunas ocasiones asocian la probabilidad con el grado de incertidumbre de un evento.

Los autores indican que se puede diseñar una estrategia de enseñanza y aprendizaje para dichos objetos estocásticos, apoyando la idea de realizar recomendaciones para el desarrollo de estas nociones, además se comparte de alguna manera la hipótesis de éste trabajo, pues los estudiantes que están cursando la educación media no desarrollan dichas nociones, o si lo hacen, estas son limitadas o erróneas.

De otra parte, realizan unas recomendaciones con base en lo reportado por los participantes de su estudio y la teoría expuesta, las cuales principalmente tienen dos objetivos, el primero es sugerirle al docente consultar las fuentes originales que ellos utilizaron para encontrar nuevas interpretaciones y significados respecto a los textos de los estudiantes; y el segundo, es propiciar espacios para el estudio del lenguaje escrito que emplean en dichos textos, pues de alguna manera este en algunas ocasiones es poco claro y confuso.

Como asunto común, se observa que en trabajos, se deja a los profesionales en educación matemática, y específicamente en la estocástica, el reto de trabajar en el desarrollo de las nociones en cuestión, pero tales autores no proponen estrategias para contribuir con su desarrollo. Por tanto, es importante además de caracterizar las nociones manifestadas por los estudiantes, presentar orientadores en pro de impulsar el desarrollo del pensamiento aleatorio, y ahondar en las acciones de aula con el fin de aportar en la estructuración de las concepciones frente al azar y la aleatoriedad.

2. JUSTIFICACIÓN

Brousseau (1986) indica de manera general que las concepciones sobre determinado objeto se constituyen en una herramienta para el análisis del saber y el diseño de situaciones didácticas, puesto que permiten analizar las actuaciones de los estudiantes en relación con los conceptos matemáticos, que se pretenden abordar posteriormente en el aula, o con la búsqueda de otra manera de trabajar dichos conceptos. Así, en la medida en que el profesor conozca las concepciones de sus estudiantes, deberá proponer problemas o situaciones que conlleven a mejorar tales concepciones, de tal manera que dichos problemas se ajusten y ayuden a la aproximación conceptual del objeto en cuestión. Por ende, en la Educación Matemática se reconoce la importancia de saber acerca de las concepciones de los estudiantes, ya que a partir de estas el docente debe guiar al estudiante el proceso de aprendizaje, y debe reflexionar sobre las escogencias que realiza con respecto a los objetos de estudio que ha de trabajar en el aula y la forma de proponerlos (estrategias de enseñanza), puesto que si elige los objetos sin este previo conocimiento, tal y como lo manifiestan Londoño y Montoya (2011) se restringe la construcción conceptual de dichos objetos, debido al conocimiento limitado que posee el docente sobre estos.

A partir de este planteamiento surge la iniciativa de realizar una indagación para conocer las concepciones que tienen los estudiantes de primer semestre (2018-2) de la LM de la UPN, sobre las nociones de estudio, indagación que se apoya en las posturas académicas de Batanero (2013) puesto que a través de sus investigaciones se ha alertado respecto a que muchos estudiantes tienen concepciones alejadas del objeto de estudio, o cuentan con herramientas o saberes limitados para hacer una adecuada interpretación de los resultados estadísticos, debido a que no reconocen la presencia del azar y la aleatoriedad de los datos y sus contextos.

Por otra parte el Ministerio de Educación Nacional (2006) indica que con el desarrollo del Pensamiento Aleatorio se dota al estudiante con las herramientas necesarias para que decida en situaciones de azar e incertidumbre apoyándose en objetos estocásticos, siempre y cuando se planteen como estrategias de enseñanza el uso de fenómenos físicos y sociales en donde se involucra la simulación y el conteo. Batanero (2013) denomina la ausencia de estas estrategias como una paradoja, y la relaciona con la educación rutinaria, la cual se enfatiza en las fórmulas y definiciones, sin prestar la atención que requieren las actividades de interpretación y asociación según el contexto de donde se toman los datos.

Así, se asumen como objetos de interés de este estudio las nociones de aleatoriedad y azar, puesto que respecto a la primera, Bennett (1998) expresa que los fenómenos aleatorios han hecho parte de la sociedad y están presentes en la vida diaria, por eso es de vital importancia desarrollar en los estudiantes para profesor de matemáticas esta noción, para que la misma no sea ajena a su cotidianidad y puedan tomar decisiones basados en los datos, reconociendo la presencia de la aleatoriedad en los mismos, y dejando de lado el determinismo que se ha asociado fruto del estudio de la enseñanza de la estadística al área de matemáticas. Respecto a la segunda noción, Gigerezer (2002 citado por Batanero 2006) indica que el azar está presente en contextos cotidianos, los cuales no son solo para los profesionales, sino que cualquier persona ha de reaccionar a mensajes o situaciones en que aparece este elemento, por ende, la importancia de desarrollar tal noción, pues esta ayuda a decidir, juzgar, inferir y predecir en contextos reales.

Debido a que el presente estudio se enfoca en caracterizar las concepciones sobre el azar y la aleatoriedad, este se realiza con estudiantes que ingresan a la Universidad Pedagógica Nacional en el 2018-2 a estudiar Licenciatura en Matemáticas, pues se supone que algunos hace poco salieron del colegio (por lo que se asume una reciente construcción de los conocimientos respecto a dichos objetos) y tienen interés por las Matemáticas (al escoger esta carrera profesional).

3. OBJETIVOS

A continuación se plantea el objetivo general que direcciona esta propuesta de indagación, así como los respectivos objetivos específicos.

3.1 OBJETIVO GENERAL

Caracterizar las concepciones de los estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (2018-2), respecto a las nociones de azar y aleatoriedad.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Consolidar un marco de referencia sobre concepciones en matemáticas, y concepciones de azar y de aleatoriedad.
- Conocer y caracterizar las concepciones de azar y de aleatoriedad de los participantes en esta indagación.
- Plantear indicadores para clasificar y caracterizar concepciones en cuanto al azar y la aleatoriedad.
- Proyectar potenciales recomendaciones para aportar al desarrollo del pensamiento aleatorio en cuanto a las concepciones de azar y de aleatoriedad.

4. MARCO DE REFERENCIA

En este capítulo se presenta los referentes teóricos que fundamentan el desarrollo de la indagación. Para ello inicialmente se muestran algunos referentes en cuanto a concepciones en general y concepciones en matemáticas. Luego se expone, desde un enfoque histórico, la teoría asociada a los objetos de estudio de este trabajo (azar y aleatoriedad). Por último, se exhibe lo que mencionan las orientaciones curriculares propuestas por el MEN (EBCM, LCM, Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas [DBA-M] y las Mallas Curriculares en Matemáticas [MC-M]) respecto a los objetos de estudio.

4.1 CONCEPCIONES EN MATEMÁTICAS

Es importante conocer puntos de vista en cuanto a la idea de concepción. Por un lado, para Artigue (1989) dicho término responde a dos cuestiones, la primera asociada a un objeto matemático donde se pone en evidencia los puntos de vista que se poseen sobre el mismo, se diferencian las representaciones y los modelos que se relacionan con éste y cómo se utiliza ello para solucionar problemas; y en la segunda, la concepción se constituye en una ayuda para el didacta, es decir que proporciona herramientas para mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje. En el mismo sentido Brousseau (1986) indica que se deben estudiar las condiciones de las situaciones de aula propuestas al estudiante, en pro de favorecer la aparición, el funcionamiento de concepciones institucionales y el rechazo de concepciones individuales o subjetivas.

Además Brousseau también señala que el término concepción no solo se debe utilizar para hacer referencia a los conocimientos de las personas, esto en el campo cognitivo, sino que hay que contemplar el campo epistemológico dentro del cual se encuentra el campo institucional. Artigue (1989) y El-Bouazzaoui (1988),

emplean la palabra concepción en el campo epistemológico, haciendo referencia a los tipos de conocimientos existentes en una comunidad o en un cierto nivel de enseñanza. Sin embargo, independientemente del campo en donde se estudie o encuentre la concepción se hace la distinción entre las concepciones globales y locales, la primera, describe holísticamente las concepciones ligadas a un concepto u objeto matemático, y la otra, solo tiene en cuenta aspectos parciales cognitivos o epistemológicos.

Por otro lado, el término concepción en el ámbito de la didáctica de las matemáticas, según Ponte (1999), se refiere a un substrato conceptual, donde se hace énfasis en el pensamiento y en la acción de la persona. Por su parte, Contreras (1998) comparte de cierto modo la idea de concepción que propone Ponte, señalando que las concepciones consisten en un marco organizativo donde se involucra la capacidad de autorregular los procesos de aprendizaje, los cuales inciden en las creencias y determinan la toma de decisiones.

Por su parte Vergnaud (1982 citado por Ruiz 1994), considera las concepciones como un estado cognitivo global de la persona que llega a la determinación de una concepción partiendo de la definición de un concepto matemático, donde todo concepto matemático está determinado por:

a) S: el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto, b) I: el conjunto de invariantes que constituyen el concepto y c) s: el conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere (Ruiz, 1994, p. 50).

Así, se pasa de saber cómo está determinado un concepto matemático a indagar qué es lo que determina una concepción, encontrados trabajos de Artigue (1989), donde se indica que una concepción está constituida por una clase de situaciones problema que dan sentido al concepto, un conjunto de significantes que

la persona es capaz de asociar, y una serie de herramientas útiles o procesos sistemáticos, tales como, teoremas y algoritmos, respectivamente.

Para Margolinas (1993) el término concepción describe el modelo de comportamiento cognitivo de la persona en una situación construida por el investigador, es decir que a través de la concepción se puede describir o explicar procedimientos, modelos de comportamiento, definiciones, entre otras, que la persona manifiesta en determinada situación.

Autores como Sierpiska (1989) y Johsua (1989) han nombrado las concepciones ingenuas o naturales, intuitivas, entre otras, sin dar una definición como tal de esos tipos de concepciones, pero por su parte El-Bouazzaoui (1988) si realiza dicho trabajo pues ha clasificado y definido las concepciones como:

- Concepciones iniciales: Son todas aquellas previas a cualquier aprendizaje.
- Concepciones inducidas por la enseñanza:
 - Concepciones contraladas por la enseñanza. Son aquellas concepciones que son construidas por la persona a partir de una intencionalidad de quien trasmite el conocimiento, es decir, del profesor.
 - Concepciones incontroladas por la enseñanza. Son las concepciones construidas por los receptores del conocimiento a partir del proceso de adquisición del saber.

Además, Dubinsky, Hawks y Nicholls (1989, citados por Ruiz, 1994 y Sfard 1991) señalan que una concepción es un término de naturaleza cognitiva. Por lo cual Bodin (1992 citado por Ruiz 1994) propone distinguir entre las concepciones accidentales, ligadas a un contexto preciso y que tratan de los comportamientos inestables; de las concepciones provisionalmente estables, las cuales en una

primera instancia están bien, por lo que el docente las ignora, pero con el paso del tiempo dan origen a obstáculos epistemológicos pues dichas concepciones no son globalizantes para todos los contextos en los que se presenta el concepto.

Cuando una concepción va en contra de un significado aceptado por la comunidad matemática, se denomina *misconceptions*. Leinhard y Cols (1991 citados por Ruiz 1994) indican que las *misconceptions* son descriptores de características erróneas que tienen los estudiantes sobre un objeto matemático particular, incluso sin haber sido enseñado; al mismo tiempo, mencionan que son el producto de generalizar una concepción correcta o de las interferencias que ocasiona el conocimiento de la vida cotidiana.

Con base en la anterior exposición de perspectivas, para esta indagación se asume concepción como el punto de vista que tiene una persona frente a un objeto matemático o a una situación determinada, teniendo en cuenta el comportamiento cognitivo y pensamiento de la persona, donde dichas concepciones influyen en las creencias personales y en la toma de decisiones.

4.2 HISTORIA DEL AZAR Y DE LA ALEATORIEDAD

Los objetos de estudio asumidos en este trabajo han sido abordados desde tiempos remotos. Bennett (1998) indica que el azar y los fenómenos aleatorios están impregnados en la vida. Batanero y Serrano (1995) comentan que a lo largo de la historia la noción de aleatoriedad ha tenido diferentes presentaciones, algunas satisfactorias y no convincentes para el campo de la Estadística, por ende se inicia el estudio disciplinar de estas nociones desde su historia.

4.2.1 Azar

Según Bennett (1993), Leucippus (450 a.C.) indica que nada sucede por azar, sino que todo tiene una razón y una necesidad, a lo que Poincaré (1854-1912),

citado por Batanero y Serrano (1995) indican que los matemáticos antiguos distinguían fenómenos donde el azar estaba involucrado, dejando a un lado aquellos fenómenos que cumplían con las leyes físicas y naturales; asumían el azar como la causa de la revelación de estos fenómenos ante toda ley; según Hacking (2006) Aristóteles concibe el azar como el resultado de la coincidencia de varias causas de un suceso. En cuanto a los matemáticos que trabajaron después de Cristo y antes de terminar la Edad Media, según Bennett (1993), tomaban el azar como una causa de los fenómenos aleatorios. Años más tarde, según Cardeñoso, González y Moreno (2014) el azar tuvo dos perspectivas, una de estas es la de Laplace (1749-1827), quien indica que el azar es una limitación del conocimiento de un observador de fenómenos naturales; y la otra es la de Darwin (1809-1882), quien en su Teoría de la Evolución del Hombre señala que el azar es una de las consecuencias de la supervivencia de una especie, pues el azar envuelve de alguna manera al medio ambiente y sus comportamientos naturales.

A comienzos del siglo XIX, Poincaré (1854-1912) citado por Londoño y Montoya (2011) indica que el azar se relaciona con sucesos que van más allá de leyes naturales, así mismo lo relaciona con la limitación del uso de la inteligencia o el conocimiento humano frente a la toma de decisiones o frente al destino, es decir, para Poincaré el azar es la medida de la ignorancia humana pues, la manera de cómo se trabaje el azar muestra qué tanto se sabe sobre éste. Ya finalizando este siglo, Steinbring (1991) manifiesta que cuando la causa de un resultado está ausente o el resultado no se puede predecir es debido a la existencia del azar.

Recientemente, se encuentran posturas frente al azar, como la de Azcarate, Cardeñoso y Serradó (2005) quienes indican tres estados de discurso del azar, El Discurso del Orden, El Discurso del Azar o Necesidad, y El Poder de Voluntad, los cuales se describen en la Tabla 1.

ESTADOS DE DISCURSO DEL AZAR	
Estado	Percepción del azar
El Discurso del Orden	Es la causa desconocida de situaciones inesperadas para un individuo, relacionando esto a fuerzas incontroladas de origen sobrenatural, divino o mágico.
El Discurso del Azar o Necesidad	Es el cruce de diversas causas independiente de un suceso, relacionado con la casualidad del suceso.
El Poder de Voluntad	Es el reflejo del desorden, de lo incontrolable o de algo que no tiene causa alguna de un hecho; además lo relacionan con la garantía del funcionamiento armónico del universo.

Tabla 1. Estados de discurso del azar
Fuente. Azcarate, Cardeñoso y Serradó (2005)

Batanero (2006) menciona que el azar es algo inherente al diario vivir, apareciendo en diversas situaciones tanto de la vida, como del ámbito profesional, lo cual respalda Bennett (1993) al indicar que la vida está impregnada por el azar.

Por otra parte, Cardeñoso, González y Moreno (2014) clasifican el concepto de azar en azar-ignorancia, azar-objetivo y azar-absoluto tal y como se observa en la Tabla 2.

CONCEPTOS DE AZAR	
Concepto	Percepción del azar
Azar-ignorancia	Se identifica el azar de una manera determinística basándose en si el fenómeno es real, si existen leyes físicas que explican el azar o si es razonable el comportamiento del fenómeno.
Azar-objetivo	El azar es visto como algo que se explica por sí mismo usando términos de la naturaleza, considerando que el mundo no se puede someter a la Estocástica.
Azar-absoluto	Es visto el azar de una manera epistemológica, centrándose en el conocimiento que la persona tiene sobre éste.

Tabla 2. Conceptos de azar
Fuente Cardeñoso, González y Moreno (2014)

Para esta indagación, y con base en la revisión histórica realizada, se toma el azar como la coincidencia de diversas causas independientes e

incontrolables de un evento de índole aleatorio, es decir, el azar es la causa de que una situación sea de carácter aleatorio.

4.4.2 Aleatoriedad

Entre la antigüedad y la Edad Media, según Bennett (1993), la aleatoriedad fue tratada por los matemáticos como lo contrario a situaciones donde las causas eran conocidas o como la casualidad, es decir que algo siempre sucede por un motivo. Este mismo autor indica que entre los siglos XVIII y XIX el surgimiento de la idea de independencia de eventos el concepto de la aleatoriedad asumiendo una relación directa con fenómenos naturales o físicos, por ejemplo se genera el estudio de la física estadística en donde se estudiaba el comportamiento de un sistema conformado por muchas partículas.

Finalizando el siglo XX, según Batanero (2001) Kolmogorov en 1971 define la aleatoriedad como la ausencia de una posible escritura corta que represente una secuencia aleatoria, es decir una generalización de los resultados, ante lo cual Ayton, Hunt y Wright (1989) indican que dar una definición formal a la noción de aleatoriedad o de secuencia aleatoria, es algo casi imposible. Kyburg (1974) por su parte propone cuatro aspectos independientes que involucran la noción de aleatoriedad, un objeto miembro aleatorio de una clase, un conjunto donde está dicho objeto, es decir la población de donde es él, una propiedad o característica del objeto y el conocimiento de la persona que trabajará con dicho objeto. Para Steinbring (1991) el concepto de aleatoriedad es la sucesión de resultados de un determinado experimento el cual se repite indefinidamente. Por otro lado, Batanero y Serrano (1995) indican que la idea de aleatoriedad no es fácil de plasmar y en algunas situaciones es difícil aplicarla, además la relacionan con el Principio de Indiferencia o Principio de Laplace.

A su vez Konold (1991) menciona diversos conceptos que se pueden relacionar con aleatoriedad, las cuales son:

- Casualidad, la cual se ve como la ausencia de las causas de un suceso.
- Incertidumbre, siendo donde no se puede determinar los resultados.
- Múltiples posibilidades, es la existencia de diversos resultados posibles.
- Equiprobabilidad, donde la relacionan con la posibilidad de que todos los resultados tengan la misma probabilidad de ocurrencia.
- Falta de información, relacionando la aleatoriedad con la ausencia de información.
- Modelización, viéndola como un modelo que se puede aplicar a ciertas situaciones.

Con base en Fine (1973) quien indica que la percepción de aleatoriedad depende de la manera como se ve la probabilidad, y lo propuesto por Batanero (2005), recientemente se distinguen tres concepciones frente a la noción de aleatoriedad. La clásica, en donde ésta se relaciona con la equiprobabilidad de los resultados obtenidos de la realización de un experimento; la frecuencial, asociada con la aproximación de las frecuencias esperadas y las observaciones de un experimento aleatorio; y la absoluta, si se relaciona la aleatoriedad con la imposibilidad de determinar el patrón de una secuencia.

Teniendo en cuenta lo anterior, para este estudio, la noción de aleatoriedad se asume como la ausencia de un patrón en los resultados obtenidos al realizar un experimento aleatorio; también, se considera como la consecuencia de la existencia del azar en un evento o experimento.

4.3 COMPETENCIAS EN TORNO AL AZAR Y LA ALEATORIEDAD

Aclaradas las nociones de azar y aleatoriedad, se describe brevemente cómo los documentos orientadores respecto al currículo de matemáticas en Colombia, proponen desarrollar las mismas. Se expone puntos de vista didácticos sobre los

objetos de estudio de esta indagación; primero mencionando los LCM, seguido por los EBCM, continuando con los DBA-M y, por último las Mallas Curriculares en Matemáticas [MC-M] de primero a quinto grado.

El Ministerio de Educación Nacional [MEN] en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas [LCM], en cuanto a la aleatoriedad indica que las situaciones que están regidas por el azar son aleatorias, donde las proporciones estadísticas, las reglas de cálculo o las funciones matemáticas no reflejan por sí solas la naturaleza de la aleatoriedad (MEN, 1998, pp.48). Así mismo, señala que las representaciones gráficas son marcos matemáticos (diagrama de barras, circular, histograma, polígono de frecuencias, diagrama de árbol, etc.) que permiten captar la aleatoriedad de forma cuantitativa y cualitativa, ayudando a desarrollar la capacidad de evaluar y decidir en situaciones aleatorias, “asocia el azar a los fenómenos caóticos” (MEN, 1998, pp. 48).

Ahora bien, de acuerdo con lo indicado por el MEN (2006) en los EBCM, el Pensamiento Aleatorio juega un papel importante en el desarrollo del Pensamiento Matemático, en especial en el pensamiento crítico de los estudiantes, pues el desarrollo del Pensamiento Aleatorio proporciona bases para tomar decisiones y buscar soluciones en situaciones de azar e incertidumbre, en donde no se puede predecir qué va a suceder. Asimismo, brinda herramientas para enfrentar problemas de índole biológico, físico, social, o relacionados con los juegos de azar. En cuanto al azar el MEN (2006) lo relaciona con la ausencia de patrones en los resultados obtenidos al repetir un evento bajo las mismas condiciones iniciales; o en situaciones como, la ocurrencia de fenómenos naturales, epidemias, loterías, entre otras. Así mismo, presenta el azar como la estimación intuitiva frente a la ocurrencia de un evento y a su vez expone de forma implícita que el azar y la aleatoriedad son sinónimos, pues se utilizan dichos términos de forma indistinta, como por ejemplo:

Las situaciones y procesos que permiten hacer un conteo sistemático del número de combinaciones posibles que se puedan asumir como igualmente probables, junto con el registro de diferentes resultados de un mismo juego, así como los intentos de interpretación y predicción de los mismos a partir de la exploración de sistemas de datos, desarrollan en los estudiantes la distinción entre situaciones deterministas y situaciones **aleatorias** o **azarosas**¹ (MEN, 2006, pp. 65).

Al mencionar situaciones ‘**aleatorias**’ o ‘**azarosas**’, se genera la impresión de que el azar y la aleatoriedad llegarían a ser lo mismo, esto se debe al uso que le dan al conector “o” en la última línea de la cita anterior.

El MEN (2017a) en la segunda versión de los DBA-M manifiesta que una persona al culminar su etapa escolar en Colombia, en relación con las nociones de azar y aleatoriedad, debe tener la capacidad de distinguir entre una situación aleatoria y una determinística, identificar la presencia o no del azar en situaciones de la vida cotidiana, determinar el espacio muestral de un evento aleatorio, comparar frecuencias esperadas con frecuencias obtenidas al repetir un evento aleatorio, asignar de forma cuantitativa la probabilidad de ocurrencia de un evento, proponer experimentos aleatorios en contextos de las ciencias naturales o sociales y predecir la ocurrencia de eventos aleatorios asociados a dichas ciencias.

Como las MC-M son directrices para la implementación de los DBA-M en las aulas colombianas, en éstas se indica que los estudiantes al terminar su educación básica primaria deben asignar de manera cualitativa la probabilidad de ocurrencia de un evento, identificar la presencia o no del azar en situaciones de la vida cotidiana; distinguir entre una situación aleatoria y una determinística; realizar

¹ La negrilla es propuesta por los autores de este trabajo con el fin de hacer visible los objetos a los que se hace referencia.

experimentos simples asociados a los juegos de azar y predecir la probabilidad de ocurrencia de un evento simple (MEN, 2017b).

Con base en lo anterior y en lo que propone Batanero y Godino (2002) respecto a la existencia del azar en el mundo social, físico, biológico y político, se percibe que en los LCM y EBCM se plantea desarrollar la noción de azar a partir de la resolución de problemas enfocados solamente al mundo físico y social. Sin embargo en los DBA-M y las MC-M se evidencia que centran este desarrollo únicamente en el mundo social, específicamente en los juegos de azar. En cuanto a la aleatoriedad, a pesar que Batanero y Godino (2002) no relacionan la aleatoriedad con estos mundos, el MEN señala el desarrollo de esta noción de igual manera que como se debe dar la del azar, lo cual conlleva a establecer una posible relación entre esta noción y los mundos propuestos por Batanero y Godino.

5. ASUNTOS METODOLÓGICOS

En este capítulo se describe la metodología usada durante esta indagación. Dicha metodología se proyecta con base en los objetivos trazados y la teoría expuesta en el anterior capítulo. Además, se encuentra lo relacionado con las consideraciones éticas que tienen los autores para desarrollar el estudio. Finalmente se exponen las categorías que han de servir para orientar el diseño del instrumento y el análisis de las respuestas de los estudiantes.

5.1 ESTRATEGIA METODOLÓGICA

La estrategia metodológica se estructura en tres fases, tal y como se presenta en la Imagen 3. En un primer momento, Fase 1, se formula la hipótesis de indagación, la cual consiste en que los estudiantes para profesor de matemáticas que ingresan a primer semestre (2018-2) tienen concepciones vagas², imprecisas o erradas frente a las nociones de estudio. Además se plantea la situación de estudio que consiste en que algunos colombianos que han culminado la educación básica y media tienen un desarrollo limitado frente a las nociones del Pensamiento Aleatorio, específicamente la de azar y aleatoriedad. En esta etapa también se diseña un instrumento a la luz de la teoría expuesta en el capítulo cuatro, y se formulan las categorías que han de servir para el análisis de la información recopilada. El instrumento tiene como fin recoger información para caracterizar las concepciones que tienen los estudiantes para profesor de matemáticas frente al azar y la aleatoriedad.

La Fase 2 consiste en la gestión del instrumento diseñado en la Fase 1, en la cual la intervención será para solicitar a los participantes que diligencien los formatos de consentimiento informado (Anexo B o Anexo C), en donde autorizarán

² Alejada de un propósito o saber.

o no que sus respuestas sean consideradas en este estudio; además de dar indicaciones o aclarar dudas sobre el diligenciamiento del instrumento (Anexo A), puesto que se tiene como propósito que ellos manifiesten libremente sus ideas sin ser condicionados o influenciados, es decir que las expresen en lenguaje natural. Se estima que la duración para el desarrollo de esta etapa es de 60 minutos, de los cuales 45 son para el cuestionario y los demás para contextualizar a los participantes en el ámbito de la indagación.

Finalmente, en la Fase 3, se realiza la revisión de las respuestas reportadas por los estudiantes, haciendo un contraste entre éstas y lo contemplado en las categorías, para validar la hipótesis y caracterizar a detalle las concepciones. Se proponen recomendaciones en pro del desarrollo del pensamiento aleatorio del grupo participante de esta indagación.



Imagen 3. Fases estrategia metodológica para el desarrollo de la indagación

5.2 CONSIDERACIONES ÉTICAS

A pesar de que el estudio investigativo es sobre las concepciones de los estudiantes que ingresan a primer semestre de la carrera de Licenciatura en Matemáticas de la UPN, en el 2018-2, ellos tienen la libertad de participar o no en éste, por ende junto al instrumento de indagación, dependiendo si es mayor de edad o no según las políticas colombianas, se entrega uno de los formatos de consentimiento de participación (Anexo B si son menores de edad y Anexo C si son mayores), formatos tomados y adaptados de las políticas establecidas por el Centro

de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (<http://mpp.pedagogica.edu.co/verseccion.php?ids=21&idh=46>).

Además se indica a los participantes que los datos suministrados por ellos en el cuestionario y en el formato, solo serán utilizados para el desarrollo de esta investigación y serán tratados bajo la política de manejo de datos. Se explicita que tendrán acceso a su información en el momento que lo requieran y la posibilidad de retirarse del estudio en cualquier etapa de su desarrollo.

5.3 PARÁMETROS PARA CARACTERIZAR LAS CONCEPCIONES

Teniendo en cuenta el marco de referencia expuesto en el cuarto capítulo, a continuación se plantean los parámetros para el diseño del instrumento y el análisis de la información. Los cuales se han construido a partir de los diferentes significados e interpretaciones que diversos autores han manifestado respecto a las nociones de estudio, estos están conformados por categorías y subcategorías. La Tabla 3 relaciona los parámetros respecto al azar y la Tabla 4 los de la aleatoriedad.

Características del Azar [AZ]		
Categoría	Subcategoría	Código y Descripción
Mundos en donde se percibe el azar (Batanero & Godino, 2002)	Social	AZ ₁ : Evidencia o da a conocer situaciones relacionadas con los juegos de azar, los deportes, la vida diaria, las pólizas, el transporte, entre otras.
	Biológico	AZ ₂ : Percibe o propone situaciones en el mundo biológico de índole genético (género, color de cabello, peso de un recién nacido), medicinal (contagio de una epidemia, efectos de una vacuna), agrícola (efecto de fertilizantes, el rendimiento de una cosecha), etc.
	Político	AZ ₃ : Manifiesta o expone sucesos asociados a la migración, tasas de población, producción de inmuebles, índices de consumo, etc.
	Físico	AZ ₄ : Evidencia o plantea situaciones relacionadas con lo meteorológico, los controles de calidad, precio de los recursos fósiles (petróleo), entre otras.
Estado del discurso del	El Discurso del orden	AZ ₅ : Percibe el azar como la coincidencia de varias causas independientes de un suceso.

azar (Azcarate, Cardeñoso & Serradó, 2005)	El discurso del azar o necesidad	AZ ₆ : Relaciona el azar con algunas fuerzas incontroladas de origen sobrenatural, divino o mágico.
	El poder de voluntad	AZ ₇ : Asocia el azar a la ausencia de causas de un suceso. AZ ₈ : Justifica la presencia del azar a partir de las experiencias, leyes físicas o naturales.
Aspectos sobre concepciones (Artigue, 1989)	Proceso sistemático	AZ ₉ : Asocia el azar a un proceso sistemático (algoritmos, operaciones, entre otros).
	Aspectos parciales	AZ ₁₀ : Señala aspectos parciales sobre el azar, tales como ver el azar solo en alguno de los mundos (físico, biológico, social y político).
	<i>Misconceptions</i>	AZ ₁₁ : Expone una concepción errónea sobre el azar.
Actitud frente al azar MEN, (1998, 2006, 2017)	Toma decisiones	AZ ₁₂ : Toma decisiones en situaciones donde está presente el azar, siendo consciente de la presencia de éste.

Tabla 3. Características de azar
Fuente: Elaboración propia

De las anteriores categorías, respecto a la relacionada con los mundos donde se percibe el azar, sus subcategorías no son excluyentes y lo ideal es que la concepción de los participantes evidencie comprensión del azar en los cuatro mundos. Con respecto al estado del discurso, sus subcategorías son excluyentes pues debe primar un único discurso frente a la noción en cuestión, sin que uno u otro tenga una connotación de error o acierto dentro de la concepción. Desde la tercera categoría, las concepciones pueden presentar características del Proceso sistemático y de los Aspectos parciales, pero si esto no sucede la concepción se clasificaría como *misconceptions*. Respecto a la actitud frente al azar, los participantes pueden tomar o no decisiones en situaciones azarosas teniendo en cuenta la presencia o no de éste y de los elementos que caractericen su concepción.

En la Tabla 4 se presentan los parámetros en cuanto a la aleatoriedad, que han de permitir describir las concepciones sobre la misma

Características de la Aleatoriedad [AL]			
Categoría		Subcategoría	Código y descripción
Conceptos relacionados	Konold (1991)	Casualidad	AL ₁ : Asocia la aleatoriedad con la casualidad de un suceso.

con aleatoriedad		Múltiples posibilidades	AL ₄ : Señala la aleatoriedad como el conjunto de resultados obtenidos al repetir un experimento.
	Bennett (1993)	Causas desconocidas	AL ₂ : Relaciona la aleatoriedad con situaciones donde las causas no son conocidas.
Concepciones de aleatoriedad	Batanero y Serrano (1995), Konold (1991) y Batanero (2005)	Clásica	AL ₅ : Manifiesta la aleatoriedad como sinónimo de equiprobabilidad en los resultados de un evento.
	Batanero (2005), Kolmogorov (1917) citado por Batanero (2001)	Absoluta	AL ₃ : Percibe la aleatoriedad como la ausencia de patrones en los resultados de un experimento, o que dichos resultados no se pueden determinar.
	Batanero (2005)	Frecuencial	AL ₆ : Concibe la aleatoriedad como la aproximación entre las frecuencias esperadas y las observaciones de un experimento.
Aspectos sobre concepciones Artigue (1989)		Proceso sistemático	AL ₇ : Asocia la aleatoriedad a un proceso sistemático (algoritmos, operaciones, entre otros).
		Aspectos parciales	AL ₈ : Señala aspectos parciales sobre la aleatoriedad, o la reporta de forma cuantitativa.
		<i>Misconceptions</i>	AL ₉ : Expone una concepción errónea sobre la aleatoriedad.
Actitudes frente a la aleatoriedad MEN, (1998, 2006, 2017)		Modelos probabilísticos	AL ₁₀ : Usa modelos probabilísticos para discutir y predecir la ocurrencia o no de un evento aleatorio.
		Diseño de experimentos	AL ₁₁ : Diseña experimentos aleatorios en diversos contextos de la vida cotidiana.
		Decisiones en situaciones aleatorias	AL ₁₂ : Evalúa y toma decisiones a partir de la interpretación que le da a la aleatoriedad en determinado suceso.
		Medición de la aleatoriedad	AL ₁₃ : Interpreta la aleatoriedad de forma cuantitativa o cualitativa.
		Solución de situaciones aleatorias	AL ₁₄ : Proporciona soluciones a situaciones aleatorias donde no hay una solución clara.
		Predicción de resultados	AL ₁₅ : Conjetura acerca del resultado de un experimento aleatorio.

Tabla 4. Características de la Aleatoriedad
Fuente: Elaboración propia

Con respecto a las categorías previstas para la noción de aleatoriedad, desde la categoría de conceptos, las subcategorías se asumen como no excluyentes porque la concepción del participante puede clasificarse en cualquiera de estas, sin que ello conlleve a un error respecto a la noción del objeto de estudio. En lo referente a la categoría de Concepciones de aleatoriedad, se plantea que una concepción es más robusta cuando se habla de la aleatoriedad desde lo frecuencial, y es sencilla cuando se hace mención de esta desde una mirada clásica, pues para calcular frecuencias se trabaja con probabilidades y para ello se requieren los resultados de un experimento, siendo así esta categoría de tipo jerárquico, donde asumir la aleatoriedad desde la concepción absoluta se asume como un punto medio. Con relación a los aspectos sobre las concepciones, lo reportado por los participantes puede estar simultáneamente en las dos primeras subcategorías pero no en la siguiente, pues sería algo contradictorio. Por último, los participantes pueden asumir de manera simultánea diferentes actitudes de las mencionadas en la última categoría, es decir que dichas subcategorías son no excluyentes, sino que sirven simplemente para caracterizar las concepciones de los estudiantes.

A pesar de lo complejo que es caracterizar una concepción debido a que se debe tener en cuenta aspectos actitudinales, procedimentales y conceptuales, donde algunos son excluyentes y otros no, las categorías que se plantean son la base para el diseño del instrumento que ha de permitir completar la Fase 1 de la estrategia metodológica; también son usadas para el respectivo análisis de las respuestas reportadas por parte de los participantes.

6. DESARROLLO DE LA PROPUESTA

A continuación se expone el desarrollo de la propuesta al poner en marcha la estrategia metodológica, presentando el instrumento (cuestionario) con el que se recolecta información y las concepciones frente a las nociones de azar y aleatoriedad que tienen los estudiantes para profesor de matemáticas adscritos al primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas en el 2018-2.

6.1 INSTRUMENTO DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Atendiendo al objetivo general de esta indagación, se plantea a partir del marco de referencia un cuestionario que tiene como propósito recoger información para conocer las concepciones que tienen los estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (2018-2) respecto al azar y la aleatoriedad.

Así, el cuestionario (Anexo A) se divide en dos partes. En la primera se encuentran once preguntas, de las cuales ocho son abiertas y las restantes son cerradas; estas surgen de la intención de querer realizar el estudio solamente con estudiantes que no habían tenido algún proceso de formación respecto a temas estocásticos a nivel de educación superior.

La segunda parte del cuestionario se compone de ocho puntos, cuatro de estos tienen asociadas siete situaciones que son acompañadas por dieciséis preguntas, de las cuales ocho son cerradas y las demás son abiertas; en dos puntos de los cuatro restantes, se busca que el estudiante proponga situaciones en las que él evidencia el azar o la aleatoriedad, y en los otros dos debe explicar qué es la aleatoriedad o qué significa que algo ocurra aleatoriamente. Los puntos de esta parte del instrumento se construyeron atendiendo los parámetros establecidos en la Tabla 3 y 4, puesto que cada uno se relaciona con una o más subcategorías;

además se consultó el trabajo realizado por Batanero y Godino (2002), específicamente lo relacionado con los tipos de situaciones asociados a los mundos en los que han evidenciado el azar.

En la Tabla 5, por cada punto del cuestionario se expone el propósito de éste, y las subcategorías que se podrían asociar a las potenciales respuestas de los estudiantes. En el Anexo E se encuentra la relación de ítem con la(s) respectiva(s) subcategoría(s) asociada(s).

PTO	PROPÓSITO	PREGUNTA O SITUACIÓN
Preámbulo	Estas preguntas son diseñadas con el fin de permitir a los autores de este trabajo tomar los cuestionarios de los estudiantes que por código se encuentran cursando primer semestre de la LM, y que nunca habían ingresado a la LM de la UPN.	¿Cuál es su código de estudiante en la UPN? ¿Ha estudiado antes en alguna Institución de Educación Superior? Sí__ No__ ¿En cuál? ¿A cuál programa académico perteneció? ¿Hasta qué semestre cursó (contando por materias)?
	Determinar si el estudiante ha tenido alguna formación en relación con la Estocástica.	¿Tuvo clase de Estadística o algún espacio académico similar? (Si su respuesta es Sí, responda lo siguiente, de lo contrario vaya a la siguiente pregunta): ¿Cómo se llamaba dicho espacio? ¿Qué temas se abordaron allí? ¿Tuvo clase de Probabilidad o algún espacio académico? (Si su respuesta es Sí, responda lo siguiente, de lo contrario vaya al punto 1): ¿Cómo se llamaba dicho espacio? ¿Qué temas se abordaron allí?
1	Identificar en qué mundos (social, biológico, político y físico) se percibe el azar, tomando como base la experiencia que ha tenido con éste en el día a día; relacionando ello la categoría mundos en donde se percibe el azar, es decir AZ ₁ , AZ ₂ , AZ ₃ y AZ ₄ .	A partir de su vida cotidiana plantee cuatro ejemplos de situaciones, diferentes a las del punto anterior, si es el caso, en las que usted considera que interviene el azar.
2	Determinar si toma decisiones en situaciones de azar, lo cual corresponde a la subcategoría AZ ₁₂ . Si estas decisiones se basan en una evaluación e interpretación de la aleatoriedad en la situación, la decisión se podrá clasificar en AL ₁₂ .	En un concurso se están asignando tres premios dependiendo de lo que se obtenga al lanzar dos monedas no cargadas. Para ganar el premio A se debe obtener cara en las dos monedas; para el premio B se debe obtener sello y cara, y

	Catalogar las interpretaciones de azar (AZ ₅ , AZ ₆ , AZ ₇ y AZ ₈) en lo referente al estado del discurso del azar, lo que responde a cada posible justificación.	para el premio C se debe obtener sello en las dos monedas. ¿A cuál premio se postularía? ¿Por qué? ¿Es posible que Juan participe una vez por cada premio y siempre gane? Sí _ No _ ¿Por qué?
3	Identificar cómo el estudiante concibe la aleatoriedad (AL ₁ , AL ₂ , AL ₃ , AL ₅ , AL ₈ o AL ₉); además de ver si al preguntarle por esta de una manera explícita, su concepción se ve alterada.	Escriba una lista de mínimo 5 palabras que usted use para referirse a aleatoriedad.
4		Explique qué quiere decir 'que algo ocurre aleatoriamente'.
5	Conocer en qué contextos de la vida cotidiana el estudiante percibe la aleatoriedad, relacionándolos con la subcategoría de actitudes frente a la aleatoriedad AL ₁₁ .	Dé como mínimo tres ejemplos de eventos aleatorios.
6	Determinar de qué manera soluciona un problema a partir de la interpretación que hace de la aleatoriedad, lo cual corresponde a la subcategoría AL ₁₄ , además de identificar si dicha interpretación se centra en cualitativa o cuantitativamente (AL ₁₃).	En un bingo, Walter, Paola y María están participando con dos, tres y un tarjetón, respectivamente. Si ellos son los únicos participantes, ¿Quién cree usted que ganará? ¿Por qué?
7	Determinar si relaciona la frecuencia esperada con la frecuencia obtenida y si esta relación es en torno a la aleatoriedad, lo cual corresponde a la subcategoría AL ₆ . También se busca identificar si conjetura frente a situaciones aleatorias, asociando ello a las actitudes AL ₁₀ o AL ₁₅ , que tratan de si se usa modelos probabilísticos y realiza predicciones, respectivamente. Identificar si justifica su respuesta con base en el conjunto de resultados de un experimento y así relacionar la justificación reportada con a la subcategoría AL ₄ .	Al lanzar una moneda se espera que salga la misma cantidad de caras que de sellos. Lance una moneda diez veces y apunte los resultados. ¿Se cumplió lo esperado? Sí ___ No ___ ¿A qué se debe esto? Lance nuevamente la moneda diez veces y apunte los resultados. Con base en los dos experimentos realizados anteriormente, ¿cree que se puede predecir los resultados que se obtendrían en una tercera tanda? Sí ___ No ___ ¿Por qué? ¿Cuáles serían esos resultados?
8	Conocer si identifica o no la presencia del azar en el mundo social, biológico, político y físico relacionándolo con las subcategorías (AZ ₁ , AZ ₂ , AZ ₃ y AZ ₄). Clasificar entre el estado del discurso, lo que responde en la justificación.	En el partido final de un campeonato de baloncesto, un jugador lanza el balón en el último minuto buscando anotar tres puntos para ganar el partido. En un cuarto de hospital se encuentran las personas A, B y C. La persona A tiene un virus, el cual se contagia solamente a la persona B.

		Los colombianos decidieron que para el periodo del 2018-2022, el doctor Iván Duque Márquez fuese su presidente.
		Determinar si mañana sale el sol en Bogotá.

Tabla 5. Propósitos del instrumento

6.2 ANÁLISIS

A continuación se muestra el análisis de las respuestas consignadas por los participantes frente a las nociones de azar y aleatoriedad. Por tanto, en primera instancia se presenta lo relacionado con las preguntas filtro del instrumento; posteriormente se muestra lo correspondiente a las nociones de estudio; y finalmente se expone de manera general los resultados en relación con las concepciones que los participantes manifiestan con respecto a estas nociones.

La aplicación del cuestionario se llevó a cabo con 40 estudiantes que ingresaron a la Licenciatura en Matemáticas en el 2018-2, de los cuales 4 han abordado de manera directa la Estocástica a nivel de educación superior. Respecto a la Estadística, reportaron haber cursado algún espacio académico en donde se centraron en la estadística descriptiva; y en relación con la Probabilidad, solo dos personas indicaron haber tenido acercamiento a este (Tabla 6).

ESPACIOS ACADÉMICOS RELACIONADOS CON ESTOCÁSTICA		
	Espacio académico	Tema
Estadística	Tratamiento de datos	Estadística para determinar probabilidades Incertidumbre en medidas
	No reporta nombre del espacio académico	Estadística descriptiva
	Mercadeo de variables	Mercadeo en la bolsa
	Estadística	Fórmulas para investigar terrenos
Probabilidad	Matemáticas III	Probabilidad
	Probabilidad	Modelos de probabilidad Funciones de probabilidad Estimación de parámetros

Tabla 6. Espacios académicos relacionados con Estocástica

Debido a que cuatro de los participantes han tenido formación estocástica en la educación superior, para lo que resta del análisis no se tendrán en cuenta las respuestas reportadas por ellos, puesto que se quiere conocer solamente el desarrollo de las concepciones logradas a lo largo de la etapa escolar. Por ende, de aquí en adelante cuando se habla de los participantes se hace referencia solamente a los 36 estudiantes que dicen no haber tenido formación en dicho campo.

En el Gráfico 1 se evidencia, que a pesar de tener la hipótesis que los estudiantes de la cohorte 2018-2 de la Licenciatura en Matemáticas han culminado recientemente la etapa escolar, una tercera parte (12 de 36 participantes) tuvieron formación superior (técnica, tecnológica o profesional) pero no estocástica antes de ingresar a la Universidad Pedagógica Nacional, de los cuales el 58,4 % (7 de 12) ha estudiado en un establecimiento de educación superior de carácter público, siendo la Universidad Distrital Francisco José de Caldas el plantel educativo de donde más provienen aquellos que ya estudiaron.

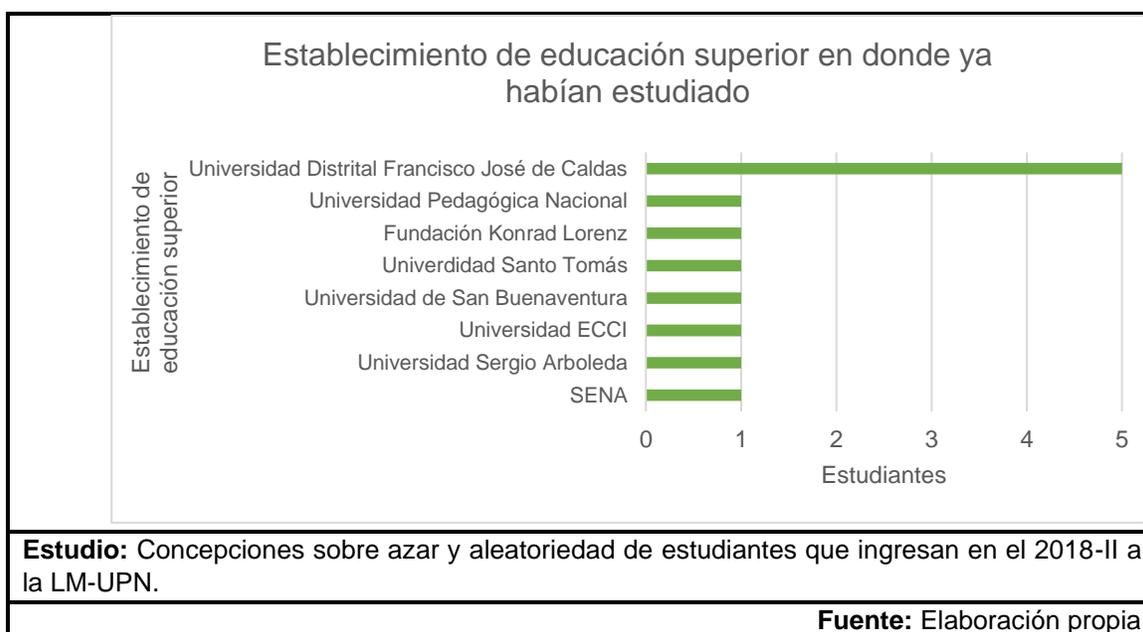


Gráfico 1. Establecimiento de educación superior donde ya habían estudiado

6.2.1 Concepciones sobre azar

Para determinar la concepción que tienen los estudiantes frente al azar, en primer lugar se analiza en qué mundo recae lo reportado por ellos y cuáles son las interpretaciones que manifiestan en torno a esta noción. Se muestra si la forma de preguntar influye en estas concepciones. En segundo lugar, se muestra cómo los estudiantes toman decisiones en situaciones azarosas. Por último, se realiza un contraste entre lo expuesto y las categorías declaradas en la Tabla 3.

Respecto a los mundos en donde se puede ver el azar (social [AZ₁], biológico [AZ₂], político [AZ₃] y físico [AZ₄]), un 25 % de los participantes lo perciben en un solo mundo, específicamente en el social, siendo los juegos de casino como: balotos, loterías, rifas, concursos, cartas, apuestas entre otros; y las situaciones de la vida como: el transporte público, el turno en una fila (banco, médico), etc., las que predominan en sus ejemplos, tal y como se evidencia en las respuestas presentes en la Imagen 4.

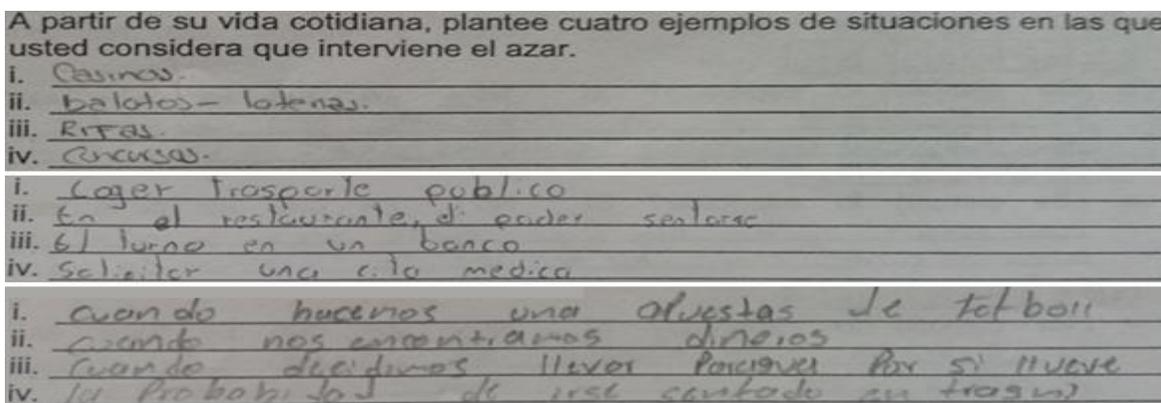


Imagen 4. Evidencias de azar en el mundo social: juegos de casino

Otro 61 % evidencia la presencia del azar en situaciones relacionadas con dos mundos de manera simultánea, (social-físico o social-político). Los ejemplos manifestados por ellos en torno al mundo social (AZ₁), pues hacen mención a situaciones de la vida cotidiana y a los juegos de casino; en cuanto al mundo físico (AZ₄) este se relaciona con cuestiones meteorológicas, pues lo indicado por los

participantes se centra en el clima; y los asociados al mundo político (AZ₃) es debido a que los dos ejemplos proporcionados tienen que ver con la elección de una persona en dos contextos (aulas y charlas), así como se discrimina en la Imagen 5.

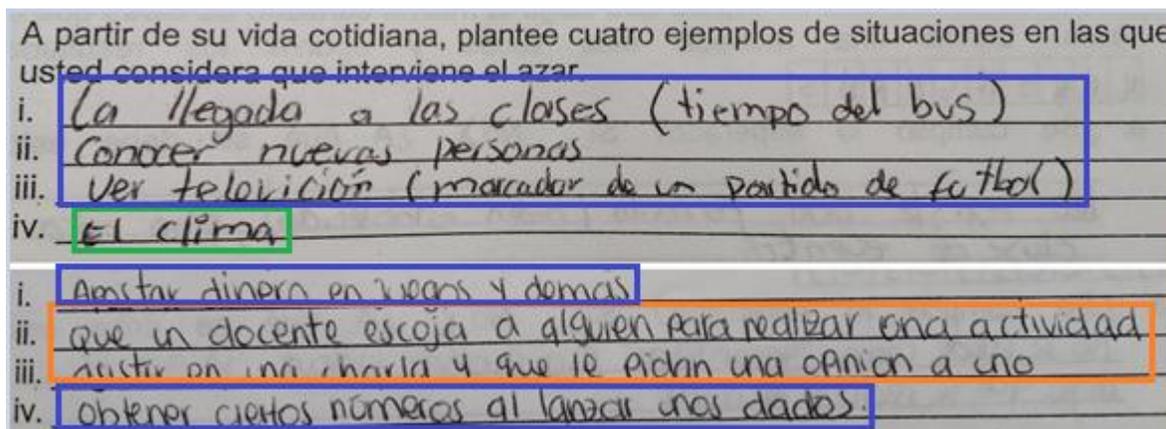


Imagen 5. Evidencia azar en mundos social-físico o social-político

Solo un participante cumple el ideal que propone Batanero y Godino (2002), puesto a pesar que no se le pregunta de manera explícita por los mundos en donde se puede percibir el azar, él evidencia esta noción en situaciones enmarcadas en diversos contextos, pero al solicitarle proporcionar ejemplos de situaciones azarosas solamente hace mención de ejemplos relacionados al mundo social, lo cual se puede corroborar en la Imagen 6.

A partir de su vida cotidiana, plantee cuatro ejemplos de situaciones en las que usted considera que interviene el azar.

i. Jugando Parques

ii. Dominó

iii. Cartas

iv. Poder Montarse en un bus

SITUACIÓN	SE PERCIBE EL AZAR (Sí o no)	CÓMO (Explique)
B. En el partido final de un campeonato de baloncesto, un jugador lanza el balón en el último minuto buscando anotar tres puntos para ganar el partido.	Sí	Puede o no anotar, depende la capacidad del jugador y factores extra que son probable sea
C. Determinar si mañana sale el sol en Bogotá.	Sí	Aunque hay pronosticos del tiempo no son 100% fidedignos
D. Los colombianos decidieron que para el periodo del 2018-2022, el doctor Iván Duque Márquez fuese su presidente.	Sí	Por factores independientes de cada votante

Imagen 6. Evidencia de azar en los cuatro mundos

El porcentaje restante (5 de 36 participantes) percibe el azar en tres de los cuatros mundos; en el social (AZ₁) nuevamente presentan ejemplos en el marco de los juegos de casino, y en el político (AZ₃) hacen referencia explícitamente a elecciones; respecto al físico (AZ₄), son conscientes cuando existe o no el azar en cuestiones meteorológicas (Imagen 7), dejando a un lado el mundo biológico (AZ₂).

A partir de su vida cotidiana, plantee cuatro ejemplos de situaciones en las que usted considera que interviene el azar.

i. juegos con cartas

ii. dados

iii. maquinas roba monedas

iv. elecciones

SITUACIÓN	SE PERCIBE EL AZAR (Sí o no)	CÓMO (Explique)
C. Determinar si mañana sale el sol en Bogotá.	No	si sale, de pronto las neblinas no lo dejen descubierto, el sol siempre está

Imagen 7. Evidencia de azar en tres mundos social-político-físico.

En cuanto a la justificación de dichas percepciones el 16,7 % (6 de 36 participantes) tienen un discurso del orden [AZ₅], puesto que la interpretación que hacen de este es a partir de la coincidencia de varias causas independientes en una situación, por ejemplo en la Imagen 8 se evidencia que las causas que asociaron son el organismo y las defensas de las personas.

SITUACIÓN	SE PERCIBE EL AZAR (Sí o no)	CÓMO (Explique)
A. En un cuarto de hospital se encuentran las personas A, B y C. La persona A tiene un virus, el cual se contagia solamente a la persona B.	No	Porque ya es de acuerdo al organismo y defensas del cuerpo B y C

Imagen 8. Evidencias del discurso del azar: orden

Otro 16,7 % presentan evidencias para caracterizar su discurso en azar o necesidad [AZ₆], debido a que lo relacionan con la suerte, es decir que se basan en fuerzas incontroladas de origen sobrenatural, divino o mágico (Imagen 9); y el 63,9% de los participantes (23 de 36) se centra en experiencias propias, creencias o en la ausencia de causas, por tanto manifiesta un discurso de poder de voluntad [AZ₇ y AZ₈] (Imagen 10). Cabe aclarar que las respuestas de un estudiante no se pueden clasificar en ninguno de estos discursos debido a que no se cuenta con insumos suficientes para ello.

a. ¿A cuál premio se postularía? B ¿por qué? Para mí es algo más de suerte, pero me inclinaria más por otra opción

Imagen 9. Evidencias del discurso del azar: azar o necesidad

SITUACIÓN	SE PERCIBE EL AZAR (Sí o no)	CÓMO (Explique)
B. En el partido final de un campeonato de baloncesto, un jugador lanza el balón en el último minuto buscando anotar tres puntos para ganar el partido.	Si	Mas bien suerte aunque hay una estrategia es muy difícil lograr puntos en el último minuto
SITUACIÓN	SE PERCIBE EL AZAR (Sí o no)	CÓMO (Explique)
B. En el partido final de un campeonato de baloncesto, un jugador lanza el balón en el último minuto buscando anotar tres puntos para ganar el partido.	Si	Puede o no anotar, depende la capacidad del jugador y factores extra que son probable sea

Imagen 10. Evidencias del discurso del azar: poder de voluntad

En el mundo biológico (AZ₂), los pocos estudiantes que perciben el azar solo lo hacen en situaciones médicas, donde algunas justificaciones son alrededor del sistema inmunológico y creencias respecto al contagio de virus, puesto que manifiestan que una persona con bajas defensas es más propensa al contagio de algún alguna bacteria o enfermedad, lo cual se ve en la Imagen 11; por tanto se caracteriza como un Discurso de poder de voluntad (AZ₇ y AZ₈).

SITUACIÓN	SE PERCIBE EL AZAR (Sí o no)	CÓMO (Explique)
A. En un cuarto de hospital se encuentran las personas A, B y C. La persona A tiene un virus, el cual se contagia solamente a la persona B.	Si	El virus se le pudo pegar a cualquier persona, esto depende de varios factores, un ejemplo se contagia el de <u>bajas defensas</u>

Imagen 11. Evidencia del discurso de azar: poder de voluntad -mundo biológico-

Quienes ven el azar en el mundo político (AZ₃) lo hacen únicamente en situaciones donde se involucra la elección de un elemento o una persona (Imagen 12). En relación con el mundo físico (AZ₄), reportan respuestas en torno al clima y a la vida útil de algunos artefactos (Imagen 13). Sin embargo, al momento de justificar dichas percepciones solo lo hacen para cuestiones climáticas con base en estudios meteorológicos y rutinas del clima en algún lugar, presentando así nuevamente un Discurso de poder de voluntad (AZ₇ y AZ₈).

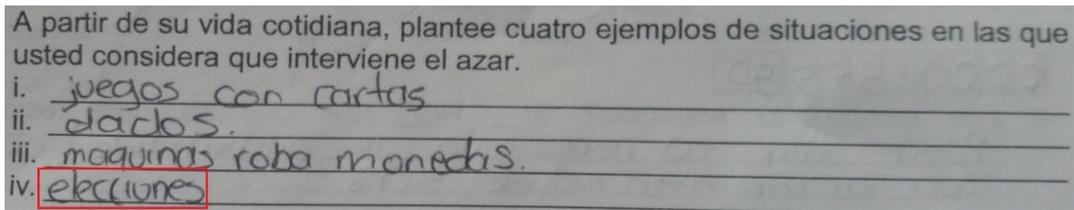


Imagen 12. Evidencia del azar en el mundo político

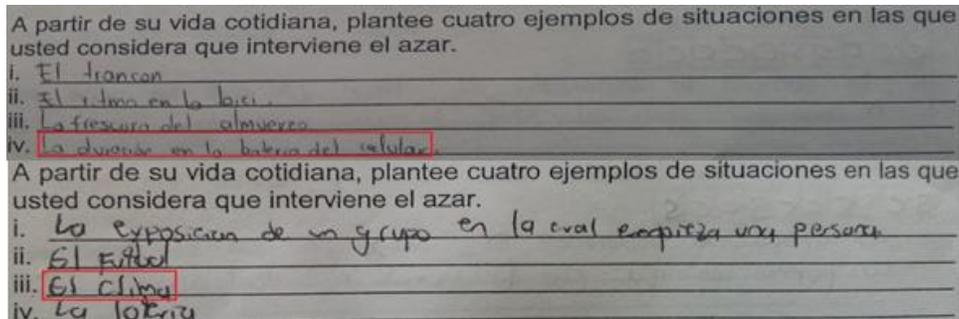


Imagen 13. Evidencias del azar en el mundo físico

Finalmente, los contextos en los que los participantes enmarcan los ejemplos presentados y donde evidencian el azar se presentan en la Tabla 7, en la cual se han clasificado estos respecto al mundo al que pertenecen. A pesar de que en general se contemplan los cuatro mundos, es evidente que la mayoría de contextos recaen en el social (AZ₁), seguido por el físico (AZ₄); sin embargo al momento de ejemplificar situaciones en donde este se percibe no mencionan algo relacionado con el mundo biológico (AZ₂).

CANTIDAD DE EJEMPLOS DE AZAR EN CADA MUNDO								
	Contextos							
	Juegos de casino	Transporte	Juego tradicional	Situaciones de la vida	Clima	Control de calidad	Situación médica	Elección
Mundo	Social	15	5	1	13	-	-	-
	Biológico	-	-	-	-	-	-	1
	Físico	-	-	-	-	3	1	-
	Político	-	-	-	-	-	-	-
Estudio: Concepciones sobre azar y aleatoriedad de estudiantes que ingresan en el 2018-II a la LM-UPN.								
Fuente: Elaboración propia								

Tabla 7. Cantidad de ejemplos de azar en cada mundo, según participantes

Asimismo se evidencia que la manera de preguntar (directa o indirecta) por la existencia del azar parece influir en la concepción del participante frente a esta noción, pues a pesar de que al preguntar directamente, el 100% de los 36 participantes identifica el azar en el mundo social (Imagen 14), solo el 72,2 % (26 de 36 estudiantes) lo hizo de una mejor manera o correctamente, debido a que presentan argumentos robustos que permiten determinar la forma en que perciben el azar en determinada situación, Imagen 15. Sin embargo al preguntar de manera indirecta, son más los estudiantes que logran identificar el azar en dicho mundo de una manera correcta, pues en promedio 14 lo hacen, y directamente son solamente 11 participantes, Gráfico 2.

<p>B. En el partido final de un campeonato de baloncesto, un jugador lanza el balón en el último minuto buscando anotar tres puntos para ganar el partido.</p>	<p>SI</p>	<p>Puede entrar o no.</p>
--	-----------	---------------------------

Imagen 14. Percepción vaga del azar en el mundo social

<p>C. Determinar si mañana sale el sol en Bogotá.</p>	<p>No</p>	<p>No hay azar porque todos los días sale el sol en Bogotá, y la rotación de la tierra alrededor del sol no es AZAR</p>
---	-----------	---

Imagen 15. Evidencia discurso de azar: poder de voluntad - mundo físico-

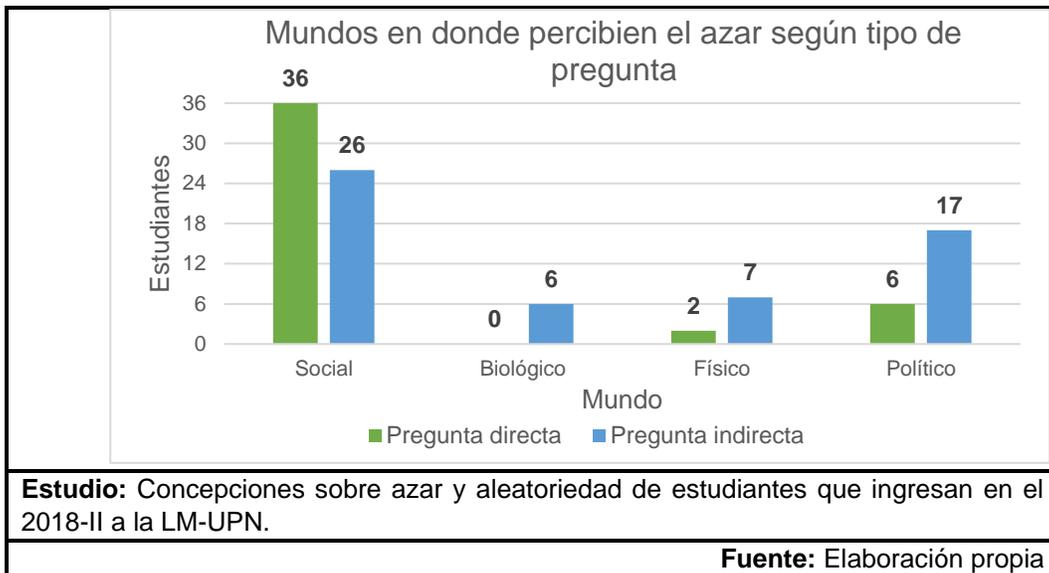


Gráfico 2. Mundos en donde perciben el azar según tipo de pregunta

El Gráfico 2 muestra la relación entre el tipo de pregunta (directa e indirecta) y los mundos en que los participantes de este estudio evidencian la presencia del azar, relacionando ello con la categoría Mundos en los que se percibe el azar.

No obstante, al mostrar situaciones donde deben tomar decisiones, asociadas éstas a mundos, solo el 8,3 % lo hacen teniendo en cuenta la existencia del azar, aunque exclusivamente manifiesten la presencia de éste en los juegos de casino (juegos de dados, cartas, bingo, lotería, concursos, entre otros), es decir, se mueven en el mundo social (AZ₁).

Haciendo un contraste con lo reportado por los estudiantes y las subcategorías para caracterizar las concepciones de azar, se evidencia que los participantes justifican la manera de ver esta noción teniendo en cuenta experiencias propias o leyes físicas (AZ₈) que para ellos siempre se cumplen, pues se basan en situaciones similares que han vivido o en ciclos naturales, lo cual es asociado al discurso de poder de voluntad; tal como se ve en el Gráfico 3: Estado del discurso del azar según tipo de pregunta.

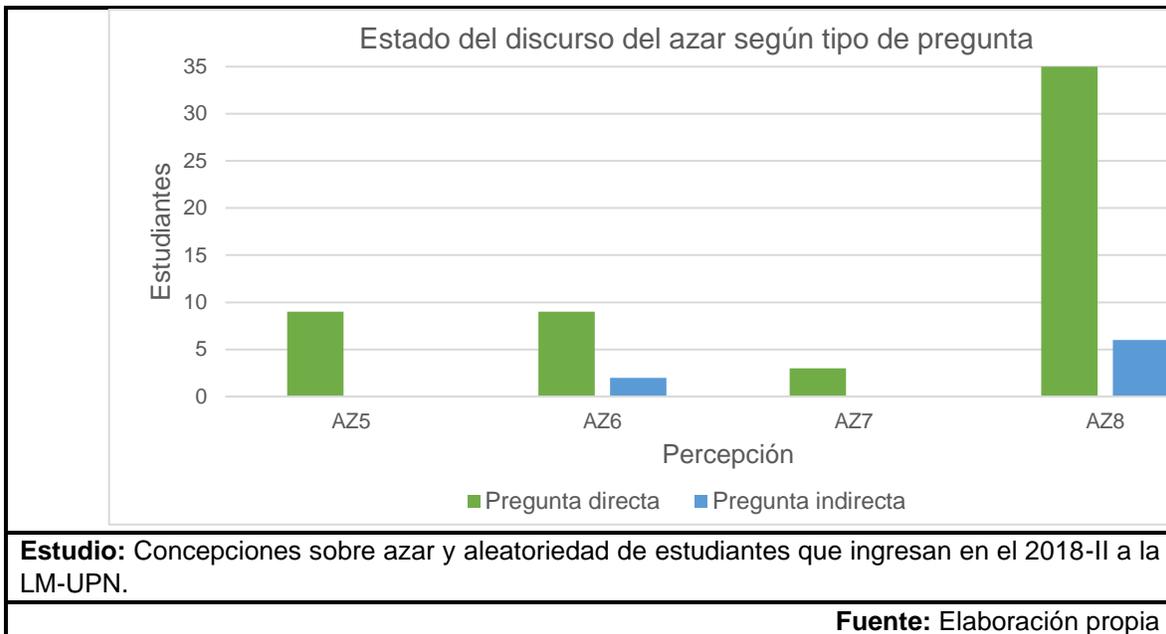


Gráfico 3. Estados del discurso del azar según tipo de pregunta

Con base en descrito a lo largo del análisis de las respuestas manifestadas por los participantes respecto a la noción de azar, se puede afirmar que el 88,8 % (32 de 36), perciben el azar solamente en tres mundos a lo mucho, es decir que dejan de lado las situaciones problemas asociadas a uno de los cuatro mundos que propone Batanero y Godino (2002), lo cual indica que perciben el azar parcialmente [AZ₁₀]; y el 47,2 % solamente tiene en cuenta el cálculo de probabilidades al momento de decidir en situaciones azarosas, por tanto asocia la noción de estudio con procesos sistemáticos como la Regla de Laplace [AZ₉].

6.2.2 Concepciones sobre aleatoriedad

Respecto a la aleatoriedad, en primera instancia se analiza la habilidad de los participantes para proponer experimentos aleatorios, y con base en esto se presentan los tipos de eventos que manifiestan; luego se muestran interpretaciones de esta noción y cómo son empleadas para justificar la existencia de la aleatoriedad en determinada situación, además se expone cómo la forma de preguntar influye en estas concepciones; y cómo los estudiantes toman decisiones relacionada con

eventos aleatorios, para finalizar con el contraste entre los datos y las subcategorías referentes a la noción de aleatoriedad.

Por un lado se evidencia que solo un estudiante no manifiesta algún ejemplo de evento aleatorio; y por otro, el 11,1 % (4 de 36) de los participantes da a conocer un ejemplo, el 22,2 % (8 de 36) presenta dos y el 64 % proporcionan tres. Entre los eventos aleatorios que ellos proponen, el 43 % de estos hacen mención a situaciones de la vida cotidiana, presentando ejemplos como: encontrarse algo o a alguien, perder algo, enfermarse, hora de llegada, entre otros; el 35 % están relacionados con los juegos de casino y el porcentaje restante (22 %) no son ejemplos de eventos aleatorios (Gráfico 4).

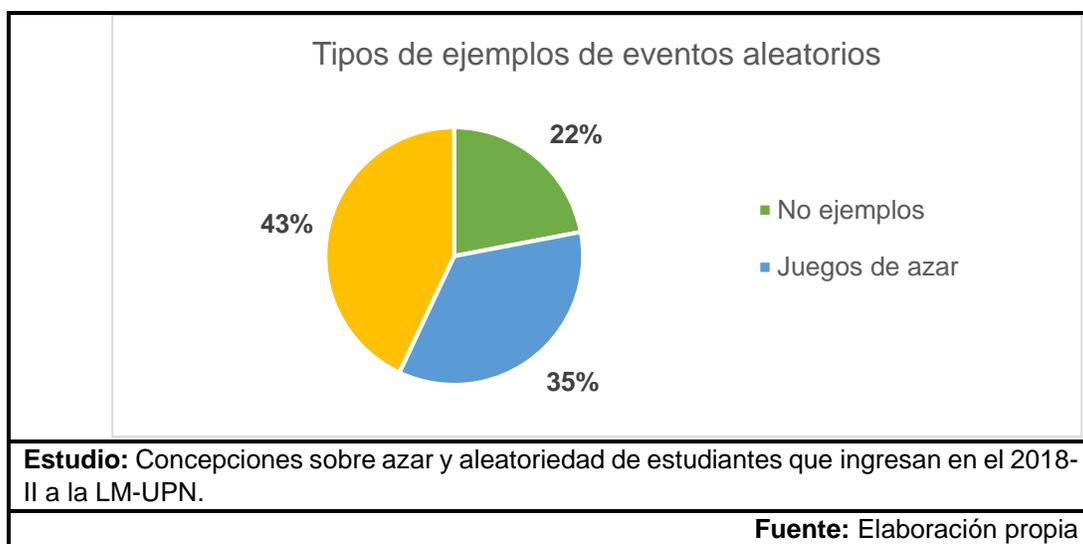


Gráfico 4. Tipos de ejemplos de eventos aleatorios

El 78 % de los participantes (28 de 36) exponen elementos que permiten afirmar que ellos han desarrollado actitud enmarcada en el diseño de experimentos [AL₁₁], pues en la Imagen 16 se evidencia que brindan ejemplos de eventos aleatorios en diversos contextos. No obstante, el 35 % de estos se enmarcan en los juegos de casino, pues mencionan 14 situaciones donde se involucran dados,

cartas, sorteos, rifas, bingo, ruletas, concursos, entre otras, tal como se observa en la Imagen 17.

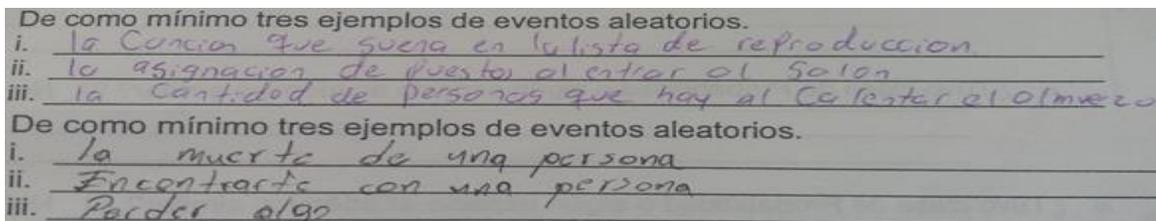


Imagen 16. Evidencias de diseño de evento aleatorio en contextos cotidianos

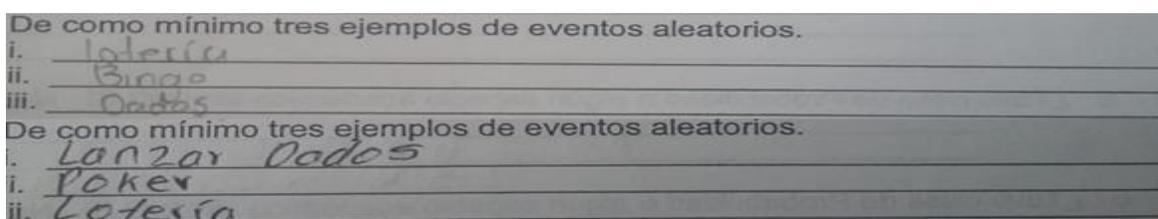


Imagen 17. Evidencia de ejemplos de evento aleatorio: juegos de casino

Al indagar indirectamente sobre qué es aleatoriedad se obtuvo una mayor cantidad de respuestas correctas, las cuales se enmarcan en una concepción frecuencial [AL₆] (Imagen 18). En la Tabla 8 se ve que los estudiantes entre más repeticiones hagan de un experimento, se convencen de que la frecuencia obtenida es cercana o igual a la frecuencia esperada, por tanto se evidencia una concepción frecuencial en el 41,7 % de los participantes (15 de 36); sin embargo ninguno asocia esta cercanía entre la frecuencia teórica y la frecuencia experimental con la aleatoriedad, pues se centran en ideas o modelos probabilísticos como la Regla de Laplace.

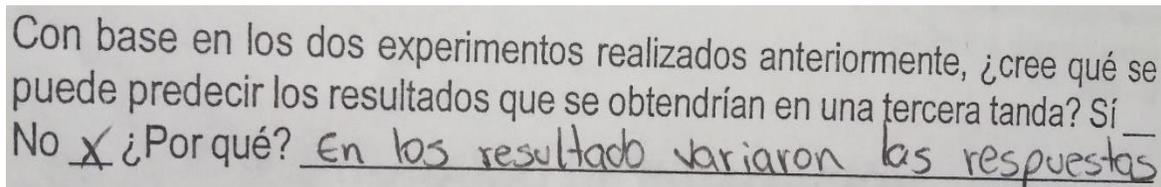


Imagen 18. Evidencia de concepción frecuencial

REPETICIONES DE UN EXPERIMENTO Y PERCEPCIÓN DE LA ALEATORIEDAD			
		Perciben la aleatoriedad	
		Sí	No
Número de repeticiones de un experimento	1	15	21
	2	20	16
Estudio: Concepciones sobre azar y aleatoriedad de estudiantes que ingresan en el 2018-II a la LM-UPN.			
Fuente: Elaboración propia			

Tabla 8. Repeticiones de un experimento y percepción de la aleatoriedad

Respecto a la concepción absoluta [AL₃], el 27,8 % de los participantes (10 de 36) manifiestan características (ejemplo en la Imagen 19), que permiten afirmar que perciben la aleatoriedad de esta manera, pues mencionan que algo ocurre aleatoriamente cuando no está presente algún patrón en los resultados de un experimento aleatorio que permita conocer el comportamiento de estos.

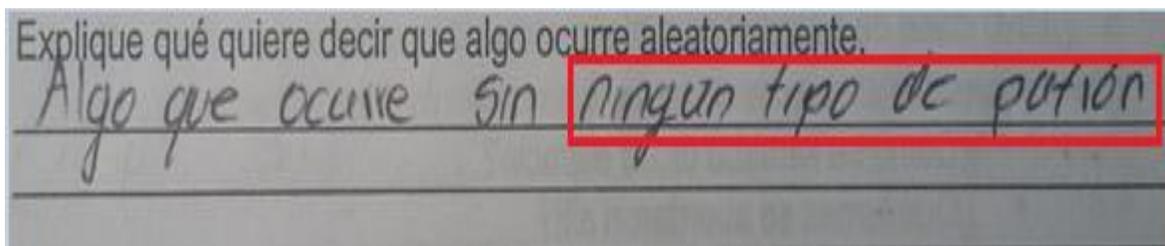


Imagen 19. Evidencia de concepción absoluta

De otra parte, a pesar de cambiar la forma de preguntar ningún participante concibe la aleatoriedad como la equiprobabilidad en los resultados de un evento aleatorio [AL₅], es decir que no manifiestan indicios de una concepción clásica; sin embargo 5 estudiantes indicaron que una situación o evento es aleatorio si se elige cualquier objeto o cosa sin condición alguna, tal como se evidencia en la Imagen 20, lo cual no se contempló en el diseño del instrumento, por tanto surge la subcategoría denominada [AL₁₆]: Elección sin condición.

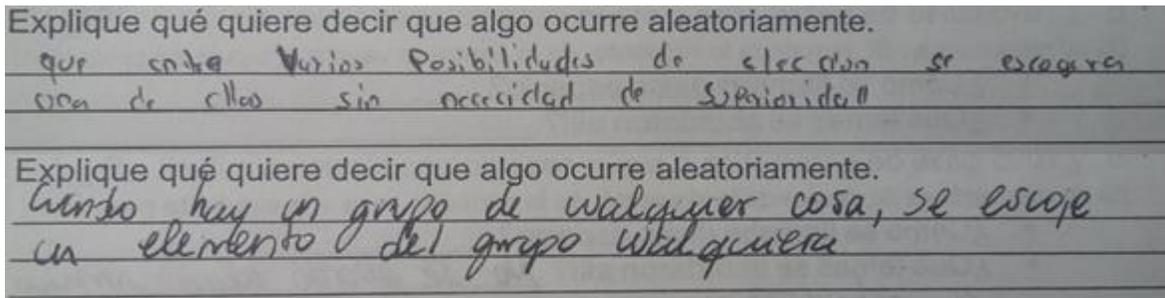


Imagen 20. Evidencias de la subcategoría AL₁₆: Elección sin condición

Teniendo en cuenta lo anterior se observa nuevamente que el tipo de pregunta (directa o indirecta) influye en la manera en que la concepción se manifiesta, pues como se evidencia en el Gráfico 5 en promedio son más los participantes que reconocen la aleatoriedad cuando se les pregunta de forma indirecta, que cuando se hace de forma directa.

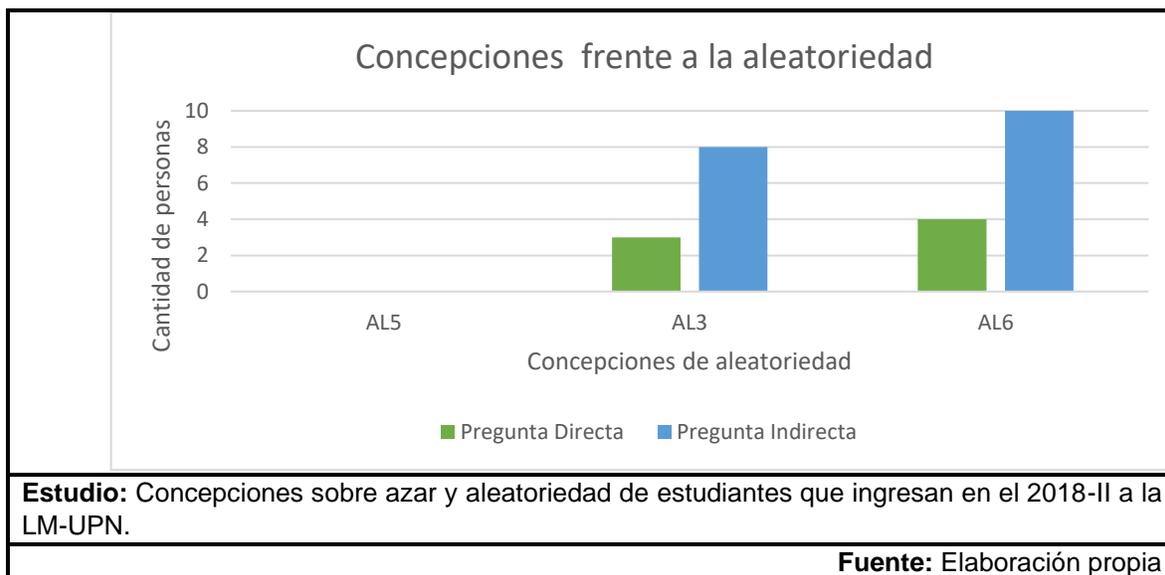


Gráfico 5. Concepciones frente a la aleatoriedad

El 92 % de los participantes (33 de 36) deciden en una situación aleatoria, donde solo un participante toma esta decisión con base en una interpretación cualitativa y cuantitativa de la aleatoriedad [AL₁₂] y [AL₁₃] (Imagen 21), a diferencia de 32 estudiantes que tomaron dicha decisión haciendo una interpretación

cuantitativa (aspecto parcial [AL₈] y [AL₁₂]) (Imagen 22), debido a que al señalar que la persona que ganaría el Bingo es Paola porque es quién tiene más tarjetones, se están solamente basando en la posibilidad de ganar con respecto a los demás jugadores sin tomar conciencia de que en dicha situación está la aleatoriedad, por consiguiente se asocia al proceso sistemático de la ocurrencia de un evento aleatorio (Regla de Laplace). No obstante, al mostrarles una situación donde deben predecir el comportamiento de los datos a partir de la información recogida, 22 estudiantes hacen una interpretación parcial de la aleatoriedad (AL₈), de los cuales el 63,6 % (14 de 22 estudiantes) la relacionan con la Regla de Laplace [AL₇].

En un bingo, Walter, Paola y María están participando con dos, tres y un tarjetón, respectivamente. Si ellos son los únicos participantes ¿Quién cree usted que ganará? Los 3 ¿Por qué? lo 3 al tener las mismas tarjetones tienen las mismas posibilidades de ganar, ya entraña la aleatoriedad con la que salga el número

Imagen 21. Evidencia de las subcategorías AL₁₂ y AL₁₃

En un bingo, Walter, Paola y María están participando con dos, tres y un tarjetón, respectivamente. Si ellos son los únicos participantes ¿Quién cree usted que ganará? Paola ¿Por qué? La probabilidad de que gane es mayor ya que tiene más cartones.

Imagen 22. Evidencia de las subcategorías AL₈ y AL₁₂

Respecto a las predicciones, teniendo en cuenta los resultados de cada una de las repeticiones de dicho experimento aleatorio, por un lado solo 2 participantes manifiestan poder predecir posibles resultados del experimento (Imagen 23), lo cual es sustentado desde el modelo probabilístico de Laplace; y por otro, los estudiantes que indican lo contrario, se basan en el comportamiento de los resultados, expresando ello como la ausencia de patrones (Concepción absoluta), la incertidumbre, la variabilidad, entre otros motivos (Gráfico 6), dichas predicciones se enmarcan en la subcategoría de actitudes frente a la aleatoriedad [AL₁₀].

Con base en los dos experimentos realizados anteriormente, ¿cree que se puede predecir los resultados que se obtendrían en una tercera tanda? Sí No ¿Por qué? En los resultado variaron las respuestas

Con base en los dos experimentos realizados anteriormente, ¿cree que se puede predecir los resultados que se obtendrían en una tercera tanda? Sí No ¿Por qué? Por que al aumento otra tanda el numero de posibles resultados aumenta a 30, serian entonces 15 y 15

Con base en los dos experimentos realizados anteriormente, ¿cree que se puede predecir los resultados que se obtendrían en una tercera tanda? Sí No ¿Por qué? La moneda siempre tendra un sentido el cual se se sube el cual va a caer.

Imagen 23. Evidencias de las subcategorías AL₁₀: modelos probabilísticos

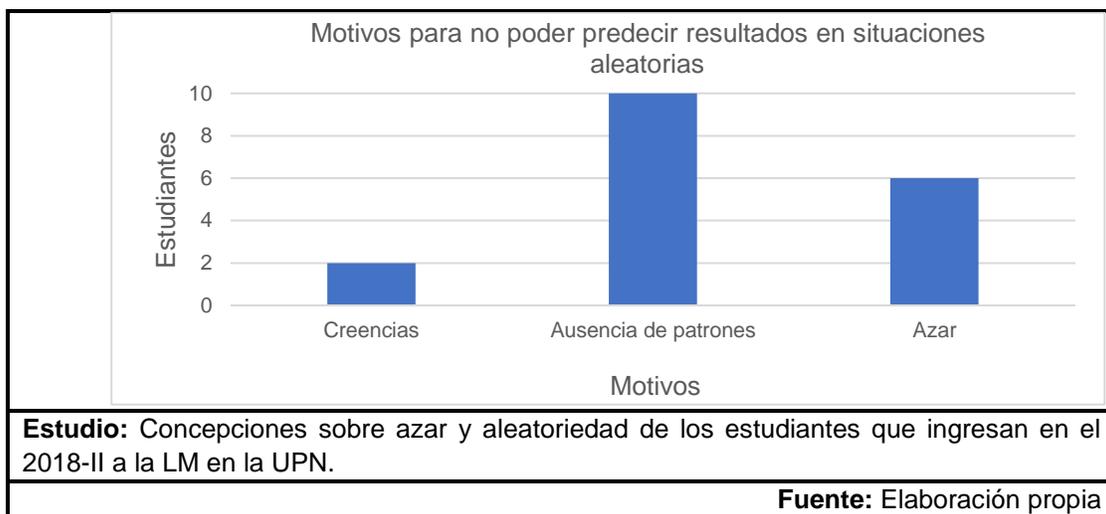


Gráfico 6. Motivos para no poder predecir resultados en situaciones aleatorias

Debido a la naturaleza de esta investigación y el propósito del cuestionario de indagación (conocer las concepciones de los estudiantes para profesor de matemáticas respecto a las nociones de azar y aleatoriedad), las preguntas o situaciones que se plantearon en el instrumento no proporcionan información para afirmar algo respecto a la forma (innata o no) en que las concepciones manifestadas fueron adoptadas por los participantes, es decir si son iniciales o inducidas por la enseñanza en la etapa escolar.

6.3 RESULTADOS

A partir de los insumos recolectados y la perspectiva de Artigue (1989) respecto a las partes que constituyen una concepción son:

- i) Situaciones problema, en dónde perciben un objeto en cuestión.
- ii) Significantes, esto es la interpretación o justificación que brindan respecto a la percepción del objeto.
- iii) Herramientas, lo que utilizan para llegar a construir dichos significantes.

A continuación se establece una relación entre los datos presentados en el Anexo D y las partes de una concepción, con el fin de caracterizar las concepciones de los participantes. Se empieza por la noción del azar describiendo tales relaciones en la Tabla 9.

% de participantes	PARTES DE UNA CONCEPCIÓN		
	Situaciones problema	Significantes	Herramientas
5,4 %	Social	Estado del discurso del azar: El discurso del orden	Experiencias o creencias
8,1 %	Social y físico		
	Social y biológico		
	Social y político		
2,7 %	Social, biológico y físico		
	Social, político y físico		
13,5 %	Social y físico	Estado del discurso del azar: El discurso del azar o necesidad	Conocimiento práctico y experiencias
	Social y biológico		
	Social y político		
2,7 %	Social, biológico y físico		
	Social, político y físico		
21,7 %	Social	Estado del discurso del azar: El poder de voluntad	Leyes físicas o naturales, creencias o experiencias
35,1 %	Social y físico		
	Social y biológico		
	Social y político		
8,1 %	Social, biológico y físico		
	Social, político y físico		
2,7 %	Social, biológico, físico y político		

Tabla 9. Participantes según concepciones respecto al azar

Teniendo en cuenta la información reportada en la Tabla 9, se evidencia que los estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas (2018-2) manifiestan concepciones centradas en tres significantes, desde la mirada de los discursos del azar propuestos por Azcarate, Cardeñoso y Serradó (2005). Respecto al discurso del orden el 16,2 % de los participantes se relacionan con este discurso, en donde las experiencias o creencias son las herramientas que manifiestan usar al enfrentar una situación problema, ya sea reconociendo el azar solo en el mundo social (33,33 % del 16,2 %), o en este mundo junto con alguno de los otros (50 %), o en tres mundos el 16,67 % del 16,2 %.

En relación con el discurso de azar o necesidad, el 16,2 % de los 36 participantes se relaciona con este, en donde las situaciones problemas en un 83,3 % del 16,2 % se centran en el mundo social y otro mundo, y el restante (17,7%) trabajan en el mundo social, físico y alguno de los otros dos; para abordar dichas situaciones usan como herramientas los conocimientos prácticos y las experiencias.

En cuanto al poder de voluntad, en el grupo restante de participantes (67,6%) se evidencia que mencionan más situaciones problema, pues el 27,8 % de ellos ven el azar en un mundo, el 51,9 % en dos, el 12 % en tres, y el restante en los cuatro mundos. Estos participantes para trabajar en estas situaciones usan como herramientas las leyes físicas o naturales, creencias y experiencias.

A continuación se presenta de manera global la cantidad de respuestas asociadas a cada subcategoría empleada para caracterizar las concepciones de azar de los participantes de este estudio, Gráfico 7; en donde se evidencia que el 80,5 % de los 36 participantes presentan *misconceptions*, puesto que perciben el azar pero las justificaciones que manifiestan para explicar ello son imprecisas, ambiguas y vagas.

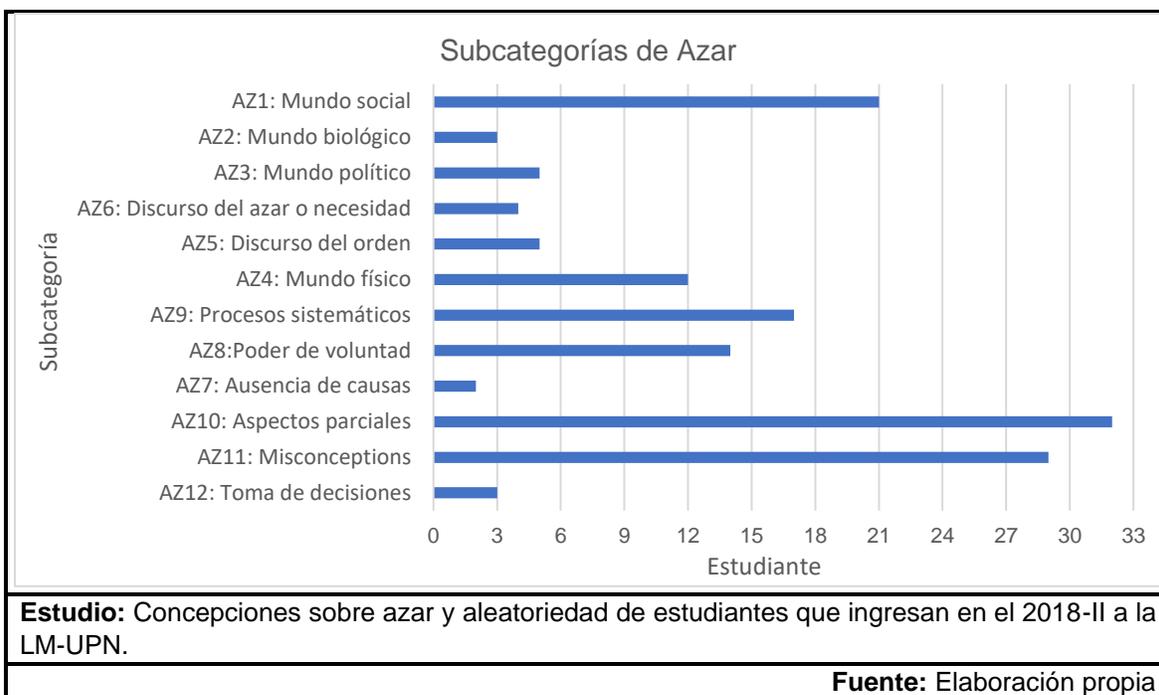


Gráfico 7. Características de la concepción de azar

Así como en la anterior tabla se mostró la relación entre las partes de una concepción y la noción de azar, en la Tabla 10 se muestra una correspondencia en torno a lo manifestado por los participantes, las situaciones problema y los significantes frente a la aleatoriedad, y en la Tabla 11 lo referente a las situaciones problema y las herramientas que emplean respecto a esta noción.

% de participantes	SITUACIONES PROBLEMA Y SIGNIFICANTES				
	Situaciones problema	Significantes			
13,5 %	Juegos de casino y contextos cotidianos	Concepciones de aleatoriedad	Absoluta	Conceptos relacionados con aleatoriedad	No refieren
5,4 %					
2,7 %	Juegos de casino		Frecuencial		Causas desconocidas
27 %					Casualidad
2,7 %					No refieren
5,4 %					Casualidad
8,1 %	Juegos de casino y		No refieren		Casualidad
10,8 %					

	contextos cotidianos				
2,7 %	Juegos de casino				Casualidad y Causas desconocidas
2,7 %	No refieren ninguna situación aleatoria		Absoluta		Causas desconocidas
18,9 %		Los que refiere no son apropiados para esta noción			

Tabla 10. Participantes según las situaciones problema y los significantes de la aleatoriedad

% de participantes	SITUACIONES PROBLEMA Y HERRAMIENTAS	
	Situaciones problema	Herramientas
27 %	Juegos de casino y contextos cotidianos	Conjunto de resultados de un experimento
2,7 %		
13,5 %		
8,1 %		
2,7 %	No refieren ninguna situación aleatoria	
5,4 %	Juegos de casino	Conjunto de resultados de un experimento y conocimiento probabilístico (Regla de Laplace)
2,7 %		
2,7 %		Creencias y experiencias
10,8 %	Juegos de casino y contextos cotidianos	Conjunto de resultados de un experimento, creencias y experiencias
5,4 %		
18,9 %	No refieren ninguna situación aleatoria	Conocimiento probabilístico

Tabla 11. Participantes según las situaciones problema y herramientas de la aleatoriedad

Teniendo en cuenta la Tabla 10 y 11, se evidencia que las concepciones manifestadas por los participantes de este estudio se centran en dos tipos de situaciones problema en donde el 40,5 % son solo juegos de casino, de los cuales el 73,3 % usan solamente el conjunto de resultados de un experimento como herramienta, el 20 % emplean el conjunto de resultados y los conocimientos probabilísticos que tienen, y la cantidad restante se centran en creencias y experiencias; dichas herramientas son aplicadas viendo la aleatoriedad de manera absoluta o frecuencial, como la casualidad o las causas desconocidas de una situación aleatoria.

El 37,8 % de los participantes ve los juegos de casino y los contextos cotidianos como las situaciones problemas donde la aleatoriedad se hace presente, usando el conjunto de resultados como herramienta para construir su concepción (el 57,1 % del 37,8 % lo hacen), el 28,6 % usan sus creencias y experiencias, mientras que el porcentaje restante hace uso de las dos herramientas ya mencionadas. Independientemente de lo empleado por los participantes para manifestar la presencia o no de la aleatoriedad ellos (37,8 %) la interpretan de manera frecuencial, es decir, como la relación entre la frecuencia esperada y observada, como la casualidad y como la causa desconocida de los resultados de determinada situación.

En lo manifestado por el porcentaje restante de participantes (21,6 %) no se evidencia situación alguna en donde trabajen o vean la aleatoriedad, sin embargo el 12,5 % reportan que la ven de manera absoluta y como las causas desconocidas, pero el restante (87,5 % de 21,6 %) en lo reportado no proporciona evidencias para relacionar algo respecto a la noción de estudio, clasificando ello como una *misconception*; en cuanto a las herramientas relacionadas con esta noción reportan el conjunto de resultados y sus conocimientos probabilísticos.

En el Gráfico 8 se expone de manera general, el número de respuestas de los participantes en cada subcategoría planteada para caracterizar la noción de estudio, es decir la aleatoriedad.

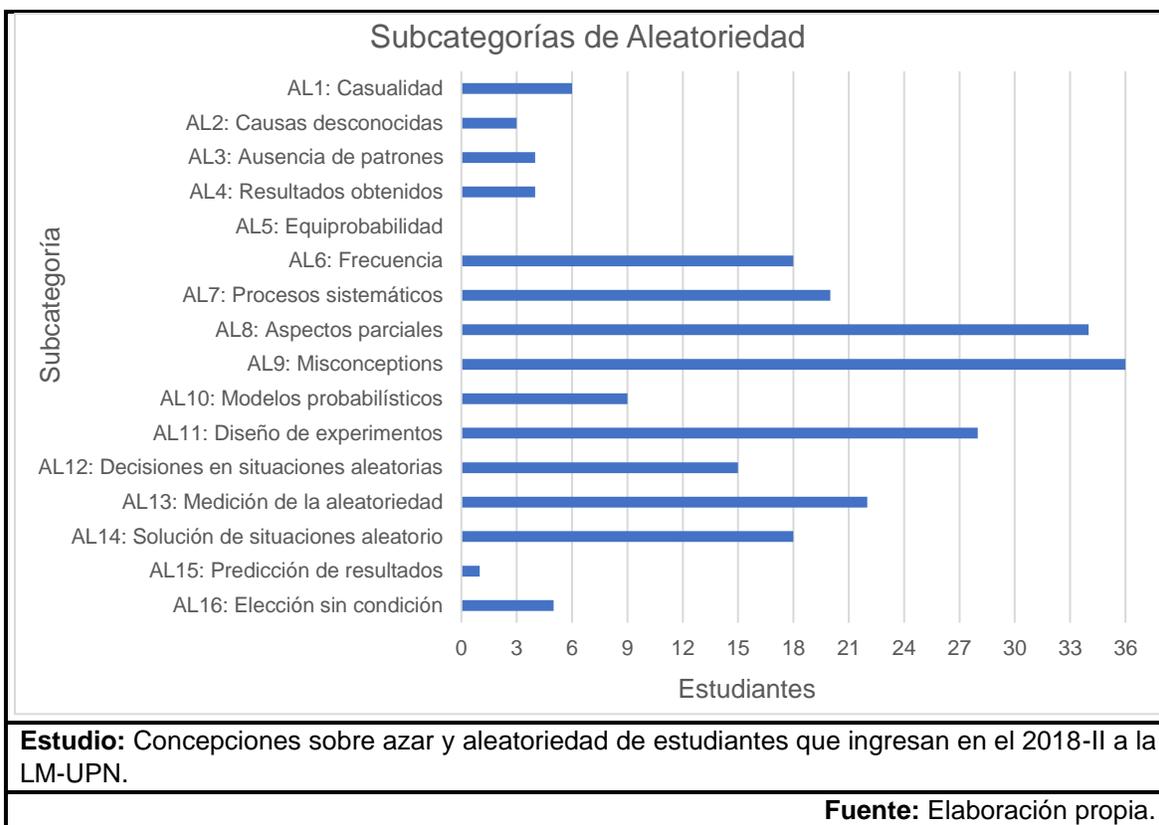


Gráfico 8. Características de las concepciones de aleatoriedad

Debido a que Brousseau (1986) manifiesta que las concepciones de cada participante de un estudio se asocian al campo cognitivo y las de todos los partícipes al epistemológico; respecto al primer campo, es evidente que en el cuestionario aplicado en esta indagación se acopiaron evidencias sobre los conocimientos que cada participante posee sobre la noción de azar y de aleatoriedad y no a concepciones colectivas, las cuales se asociarían con el campo epistemológico; y al segundo, es notorio que el análisis realizado no se hace por persona sino de manera colectiva, debido a que se pretende caracterizar las concepciones de los maestros en formación de matemáticas de la cohorte 2018-2 respecto a la noción de azar y de aleatoriedad.

7. RECOMENDACIONES PARA EL DESARROLLO DE CONCEPCIONES

Las recomendaciones que se presentan a continuación se proponen con base en las respuestas reportadas por los participantes de este estudio y los referentes teóricos que sustentan este trabajo de grado; éstas recomendaciones son principalmente para contribuir en el desarrollo de las concepciones de azar y de aleatoriedad, es decir acercar sus ideas a la teoría referente a estos constructos, esperando que con ellas adquieran o afiancen las habilidades de: i) reconocer la presencia del azar o la aleatoriedad en diversos contextos, ii) proponer situaciones azarosas o aleatorias relacionadas con el entorno, iii) decidir con base en la interpretación de la manifestación del azar o la aleatoriedad en la situación en cuestión y, iv) diferenciar la forma en que las nociones de estudio se revelan en diferentes entornos.

Para ellos, con base en el análisis y los resultados, se recomienda trabajar situaciones como las que se presentan en la Tabla 12 (asociadas al azar), pues estas ayudan a percibirlo en los cuatro mundos que Batanero y Godino (2002) proponen, puesto en lo manifestado por los estudiantes, se evidencia que tienen una concepción limitada del azar debido a que la mayoría lo perciben en los juegos de casino. En la Tabla 13 (asociada a la aleatoriedad) se encuentran situaciones que buscan desarrollar más esta concepción de los partícipes de este estudio, pues la relacionan de manera cuantitativa, es decir con la probabilidad del evento.

SITUACIONES PARA DESARROLLAR LA NOCIÓN DE AZAR	
Situación	Mundo
La tía de Andrés esta asombrada porque su sobrino nació con el cabello de color castaño claro, pues su hermano y su cuñada tienen el cabello negro. ¿Puede ser esto posible? ¿Por qué?	Biológico
Martha tiene dos hijas, Laura y Ximena, ellas se sometieron al procedimiento quirúrgico para no tener más hijos, ligadura de trompas, el cual realizó el mismo ginecólogo, pues Laura ya tenía un hijo y Ximena tres; pero después de cinco años Laura es la única queda otra vez en embarazo. ¿Por qué cree que pasó esto?	
En el 2016 en varios colegios de Bogotá a un grupo de niñas mayores de diez años, personas vinculadas con la Secretaría de Salud les aplicaron la vacuna contra el	

<p>Papiloma Humano; en unos de los colegios las niñas tuvieron algunas complicaciones, según los padres de familia a causa de la vacuna. ¿Recomendaría la aplicación de esta vacuna? ¿Por qué?</p>															
<p>Diseñar una situación relacionada con las pulsaciones del corazón de diez bebés recién nacidos, en donde esté presente el azar.</p>															
<p>¿Se podría establecer si lloverá o no mañana en Bogotá antes del mediodía? ¿Por qué?</p>															
<p>¿Por qué el proyecto de Hidroituango tiene problemas y la Presa de las Tres Gargantas la cual está ubicada en China y es la más grande del mundo, no evidencia alguna problemática?</p>															
<p>Una empresa de computadores cada vez que cumple una década en el mercado tiene como costumbre fabricar cien computadores portátiles de edición especial. Cuatro empresarios decidieron aprovechar dicha edición, Carlos y Manuel cada uno compró 10 portátiles; y Felipe y Sebastián cada uno 15 computadores; los últimos dos empresarios llevaron los portátiles fuera de Bogotá. Al cabo de una semana, 3 de los computadores de Felipe no funcionan bien, Carlos y Manuel aún no han podido adecuar la planta física para poder instalarlos y a Sebastián, hasta el momento, todos los computadores le funcionan bien. ¿En los computadores que compró Carlos habrá alguno que no funcione bien? ¿Cuántos? ¿Por qué? ¿Cuál es la causa de que a Felipe le hayan salido 3 portátiles dañados?</p>	Físico														
<p>Diseñar una situación relacionada con recursos fósiles o naturales, en donde esté presente el azar.</p>															
<p>Debido a la situación de Venezuela, los ciudadanos de dicho país han decidido migrar. Si Venezuela tiene frontera terrestre con Brasil (2199 Km), con Colombia (2219 Km) y con la Guyana Esequiba (743 Km) ¿por qué la gran mayoría de venezolanos migran hacia Colombia?</p>															
<p>El Banco Mundial planteaba que Colombia para el 2017 tendría 49.065.615 habitantes. Según el Censo realizado por el DANE en Colombia en el 2018, en este país hay 45.500.000 habitantes ¿por qué ocurre esta diferencia de datos?</p>															
<div style="border: 1px solid black; padding: 10px;"> <p style="text-align: center;">Precio del galón de gasolina en Colombia durante los primeros meses del 2018</p> <table border="1" style="margin-top: 10px; width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>Mes</th> <th>Precio (miles de pesos colombianos)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Enero</td> <td>9,1</td> </tr> <tr> <td>Febrero</td> <td>9,0</td> </tr> <tr> <td>Marzo</td> <td>9,6</td> </tr> <tr> <td>Abril</td> <td>9,6</td> </tr> <tr> <td>Mayo</td> <td>9,1</td> </tr> <tr> <td>Junio</td> <td>9,3</td> </tr> </tbody> </table> </div>	Mes	Precio (miles de pesos colombianos)	Enero	9,1	Febrero	9,0	Marzo	9,6	Abril	9,6	Mayo	9,1	Junio	9,3	Político
Mes	Precio (miles de pesos colombianos)														
Enero	9,1														
Febrero	9,0														
Marzo	9,6														
Abril	9,6														
Mayo	9,1														
Junio	9,3														
<p>Datos tomados del Ministerio de Minas y Energías, febrero de 2019.</p>															
<p style="text-align: right;">Fuente: Elaboración propia</p>															
<p>¿Por qué cree que sube y baja el precio del galón de gasolina?</p>															
<p>Diseñar una situación relacionada con la tasa de natalidad y mortalidad en la ciudad de Bogotá, en donde se evidencie el azar.</p>															

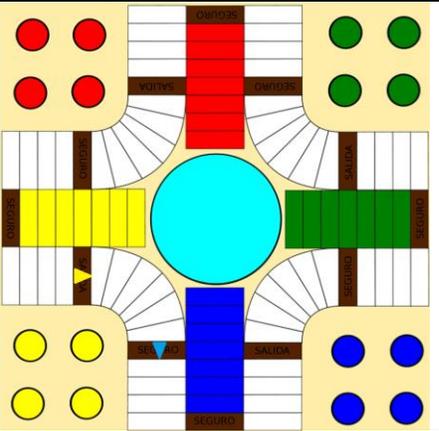
<p>Camilo y Orlando están jugando 'Piedrita' con las fichas azules y amarillas, respectivamente. Dicho juego consiste en ir saltando por el tablero de parqués de 'seguro' en 'seguro' hasta llegar a su respectiva meta. A cada uno de los jugadores le queda una ficha, como se puede ver la imagen de la derecha. ¿Será que Camilo logra llegar antes de que Orlando 'lo mate'? ¿Por qué?</p>		<p>Social</p>	
<p>Si el profesor de Matemáticas el año anterior realizó seis evaluaciones de cinco puntos cada una, ¿se podría determinar la cantidad de evaluaciones y los puntos de cada una de ellas que aplicará en el año en curso? ¿Por qué?</p>			
<p>Si el martes y el miércoles Pedro gasta en transportarse, de su casa a la Universidad, 40 minutos cada día. Si el jueves él debe estar en la Universidad a las 09:00 a.m. ¿le recomendaría que salga de su casa a las 08:20 a.m.? Justifique su respuesta. Si su respuesta es No, ¿a qué hora le recomendaría que saliera? ¿Por qué?</p>			
<p>Diseñar una situación relacionada con la cantidad de personas que hay en un cajero automático los primeros días de cada mes, en donde se evidencie el azar.</p>			

Tabla 12. Situaciones para desarrollar la noción de azar

Respecto al desarrollo de la noción de aleatoriedad, se plantean diversos ejercicios, unos fueron tomados y adaptados de diversos académicos del área (Fernández, Sarmiento y Zuñiga), y otros fueron diseñados por los autores de este trabajo.

SITUACIONES PARA DESARROLLAR LA NOCIÓN DE LA ALEATORIEDAD	
Situación	Fuente
<p>El ala de un aeroplano se arma con 1000 remaches, de los cuales algunos son defectuosos ¿es posible determinar la cantidad de remaches defectuosos que saldrán por caja, sabiendo que cada caja contiene 10 bolsas, y por bolsa hay 300 remaches? ¿Cada cuánto saldrá un remache defectuoso?</p>	
<p>¿Es posible que al lanzar tres veces dos monedas, en el último lanzamiento se obtenga cara en ambas monedas? ¿Por qué? ¿Cuántos lanzamientos se deben realizar para obtener cara en ambas monedas? ¿Por qué?</p>	<p>Fernández (2017b)</p>
<p>En un juego que consiste en sacar dos cartas de una baraja francesa, en el cual para ganar debe sacar dos ases. ¿Puede Andrés participar siete veces con la baraja completa y ganar al menos en cinco ocasiones? ¿Por qué?</p>	
<p>En los últimos cinco años los suscriptores a telefonía celular han aumentado notoriamente, de tal manera que el 1º de enero del año 1999 había 12.000 suscriptores y al 31 de diciembre del 2004 había 4.600.000 suscriptores. La siguiente tabla muestra los detalles:</p>	<p>Fernández y Sarmiento (2009)</p>

CRECIMIENTO DE POBLACIÓN DE SUSCRIPTORES		
Año	Suscriptores al inicio del año	Suscriptores al final del año
1999	12.000	36.000
2000	36.000	120.000
2001	120.000	400.000
2002	400.000	900.000
2003	900.000	2.000.000
2004	2.000.000	4.600.000

- a) ¿Por qué cree que el incremento de suscriptores es tan elevado?
 b) ¿Se puede determinar el número de suscriptores para el 2010?
 ¿En dicha situación percibe aleatoriedad? Sí ___ No ___ ¿Cómo?

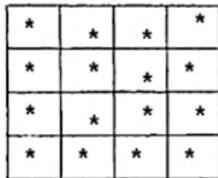
Durante los últimos veinte días laborables, el número total de horas de trabajo perdidas diariamente en una empresa de cien obreros viene dada por los datos:

1, 3, 1, 1, 2, 4, 2, 2, 1, 2, 800, 6, 8, 400, 1, 5, 4, 6, 3, 1

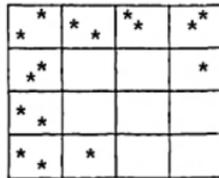
- a) Si se supone que la jornada laboral es de ocho horas diarias, ¿qué porcentaje medio de horas se han perdido en esos días?
 b) Encuentre la desviación absoluta media.
 c) Encuentre la desviación media respecto a la mediana.
 d) Con base en la información obtenida en b) y c), valore entre la media y la mediana, cuál de ellas es más representativa de la tendencia central de los datos.

El patio de una casa tiene 16 baldosas cuadradas. Comienza a llover. Después de un rato un total de 16 gotas de agua han caído en el patio. En las tres figuras siguientes se muestran las gotas con un asterisco (*).

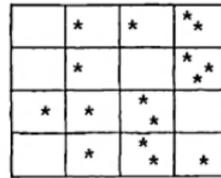
- a) ¿Qué figura muestra mejor la distribución de las gotas de agua sobre el patio?



(1)



(2)



(3)

Justifique su respuesta.

Zuñiga (2017)

		Dado rojo					
		1	2	3	4	5	6
Dado azul	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

En la tabla se evidencia que el siete es el resultado de la suma que más se puede obtener al lanzar dos dados. Lance ocho veces dos dados y apunte los resultados de las sumas. ¿Qué suma fue la que más se obtuvo? ¿Se cumplió lo esperado?

Elaboración propia

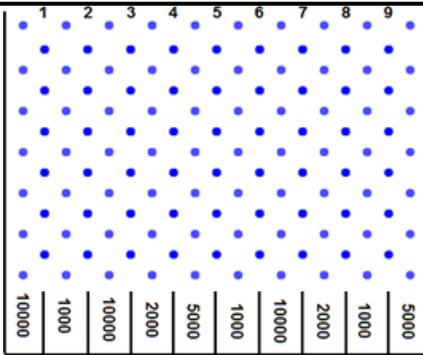
<p>Esteban, Daniela y Sara están jugando 'The Wall', el cual consiste en lanzar una pelota desde lo más alto del tablero con el fin de acertar a la casilla de mayor valor. ¿Por cuál casilla le recomendaría a Esteban realizar los lanzamientos para ganar 5000 puntos, sabiendo que Daniela y Sara lanzaron por la casilla 4, 5 y 6 y ganaron 1000 puntos cada una?</p>																			
<p>Durante los últimos diez años en Bogotá, después de las 4:00 p.m. todos los viernes santos ha llovido. ¿Es posible que esto suceda en el 2020? ¿Por qué?</p>																			
<p>El profesor Alejandro ha evidenciado que en los parciales de su materia algunos estudiantes hacen copia, pues ha escuchado que un compañero le dice a otro que la respuesta al punto 3 es la a), es decir que los parciales de él son de selección múltiple donde las respuestas siempre están en la misma opción. Por tanto, para el examen final ha decidido colocar los mismos puntos, pero las respuestas en diferente orden. Si se presenta la situación que se expone en la siguiente tabla,</p>																			
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Estudiante</th> <th>Ejercicio</th> <th>Respuesta correcta</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>E₁</td> <td>5</td> <td>e)</td> </tr> <tr> <td>E₂</td> <td>3</td> <td>b)</td> </tr> <tr> <td>E₃</td> <td>5</td> <td>c)</td> </tr> <tr> <td>E₄</td> <td>2</td> <td>b)</td> </tr> <tr> <td>Santiago</td> <td>1</td> <td>¿?</td> </tr> </tbody> </table>		Estudiante	Ejercicio	Respuesta correcta	E ₁	5	e)	E ₂	3	b)	E ₃	5	c)	E ₄	2	b)	Santiago	1	¿?
Estudiante	Ejercicio	Respuesta correcta																	
E ₁	5	e)																	
E ₂	3	b)																	
E ₃	5	c)																	
E ₄	2	b)																	
Santiago	1	¿?																	
<p>¿Es posible que Santiago determine la respuesta correcta al primer ejercicio a partir de la información expuesta en la anterior tabla?</p>																			
<p>Diseñe cuatro experimentos aleatorios en donde involucre cuatro contextos diferentes, es decir un experimento por contexto.</p>																			

Tabla 13. Situaciones para desarrollar la noción de la aleatoriedad

En pro de ampliar la formación en torno al azar y la aleatoriedad, también se recomienda consultar textos tales como los que se presentan en la siguiente tabla.

PROPUESTA DE BIBLIOGRAFÍA PARA CONSULTA	
NOCIÓN TRABAJADA	REFERENTE
Azar	<ul style="list-style-type: none"> Batanero, C., & Godino, J. D. (2002). <i>Estocástica y su didáctica para maestros</i>. Granada, España: Polígono Juncaril. Hernández, H. (2015). <i>El lenguaje del azar en alumnos de educación secundaria obligatoria</i>. (Tesis de maestría). Universidad de Granada, España.

Aleatoriedad	<ul style="list-style-type: none"> • Restrepo, E. (2012). <i>Aleatoriedad, nociones previas en estudiantes de educación media</i>. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Colombia. • Zuñiga, F. (2017). <i>Implementación de una secuencia didáctica basada en situaciones problemas para promover la comprensión de la noción de aleatoriedad</i> (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Colombia.
Azar y aleatoriedad	<ul style="list-style-type: none"> • Barajas, F. A. & Salinas, L. Y. (2018). <i>Concepciones de los estudiantes para profesores de matemáticas sobre azar y aleatoriedad</i>. (Tesis de pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Colombia. • Londoño, D., & Montoya, E. (2011). <i>Azar, aleatoriedad y probabilidad: significados personales en estudiantes de educación media</i>. (Tesis de maestría). Universidad de Manizales, Colombia.

Tabla 14. Propuesta de bibliografía de consulta

Siguiendo con el interés de ayudar en el del desarrollo del pensamiento estadístico se propone que con estos estudiantes se aborden aprendizajes esperados tales como:

- Reconocer la existencia del azar en diversos contextos respecto al mundo físico, biológico, político y social.
- Reconocer la existencia de la aleatoriedad en situaciones de la vida cotidiana.
- Diferenciar el azar de la aleatoriedad en diferentes situaciones contextualizadas.
- Proponer situaciones azarosas relacionadas con su contexto.
- Proponer situaciones aleatorias relacionadas con su contexto.

Lo anterior se propone con el fin de desarrollar no solo las concepciones que tienen los participantes de este estudio sobre azar y aleatoriedad, sino las de los futuros estudiantes que ellos tendrán a su cargo durante el desarrollo de sus prácticas educativas y en su práctica profesional, pues parafraseando a Hassad (2007) citado por Álvarez, Andrade y Fernández (2017) si el docente tiene un desarrollo adecuado de algún conocimiento sus estudiantes lo tendrán correctamente, en este caso, si se tiene el desarrollo, sus estudiantes también lo tendrán.

8. CONCLUSIONES

En este capítulo se plantean las conclusiones a las que llegaron los autores del trabajo con el desarrollo de la propuesta, tanto desde el punto de vista de las concepciones de los participantes como de los objetivos y la hipótesis que orientó esta indagación.

Del análisis de las respuestas manifestadas por los participantes se percibe que la forma en que se pregunta dentro de las situaciones de estudio, influye en la percepción de la existencia del azar o de la aleatoriedad. En cuanto al azar, se identifica que lo divisan en diversos mundos, especialmente en el mundo social, además lo asocian con experiencias o creencias, esto es cuando se pregunta indirectamente. En relación con la aleatoriedad, a partir de la indagación indirecta, lo manifestado por los participantes deja ver que la concepción se acerca a la aproximación entre la frecuencia experimental y la teórica de los resultados al realizar un evento aleatorio, además algunos la conciben como la ausencia de patrones, en donde emplean conocimientos prácticos y probabilísticos, especialmente la Regla de Laplace. Por consiguiente, es evidente que es mayor el acierto para identificar tales nociones cuando se pregunta de manera indirecta, lo cual no sucede cuando se pregunta directamente por alguna de estas.

En cuanto a la noción de azar, una gran mayoría de los participantes se centran en las situaciones que han vivido, empleando leyes físicas o naturales y sus creencias generadas por alguna experiencia o consenso familiar, siendo estas las herramientas empleadas al momento de justificar la presencia de éste en diversas situaciones problema, respecto a estas últimas la mayoría de los estudiantes percibe el azar en el mundo social, específicamente en los juegos de casino, debido a que pocos perciben esta noción en todos los mundos y que el ideal eso pase entonces la concepción de azar que manifestaron los participantes es parcial; respecto a la manera de percibir el azar en los diferentes contextos se centran en el

estado del discurso: poder de voluntad, siendo esto el principal significativo de la concepción de azar.

Respecto a la aleatoriedad, surge la subcategoría AL₁₆: Elección sin condición, la cual consiste en concebir esta noción como la elección de un elemento sin condición o causa alguna, es decir que se entiende como la falta de una razón, motivo o causa para hacer una determinada elección; además la interpretan a partir de la aproximación que existe entre la frecuencia experimental y la esperada; como la ausencia de patrones en los resultados de un experimento aleatorio, y otros la relacionan con la posibilidad de la ocurrencia de un evento; siendo esto parte del conjunto de significantes manifestados por los participantes.

No obstante, a pesar de tener diversos significantes, las situaciones problema en su mayoría recaen en los juegos de casino, y en algunas ocasiones en situaciones de la vida cotidiana; donde la herramienta más empleada por ellos es el cálculo de probabilidades a partir de la Regla de Laplace, es decir que solamente realizan una interpretación cuantitativa de esta; por tanto se considera que las concepciones expuestas frente a esta noción son parciales con aspectos sistemáticos como el algoritmo de casos favorables sobre casos posibles.

Asimismo, algunos participantes relacionan la aleatoriedad con la coincidencia de varias causas independientes de un suceso, es decir que lo ven como el azar, específicamente como el discurso del orden; llevando esto a caracterizar sus respuestas como *misconceptions*.

Las anteriores ideas y el análisis expuesto en el sexto capítulo, llevan a confirmar la hipótesis planteada, puesto que los estudiantes de primer semestre (2018-2) de la Licenciatura Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional presentan concepciones vagas, imprecisas o erradas frente al azar y la aleatoriedad, ya que de alguna manera el 100 % de los participantes manifiestan

concepciones erradas, indistintamente de la noción estudiada, donde el 81 % presentan tres o más *misconceptions*, tales como la imposibilidad de ver el azar porque el evento es determinístico, confundir las nociones de estudio con otras del Pensamiento Aleatorio tales como incertidumbre o determinismo, posibilidad y probabilidad de un evento; especialmente confunden azar y aleatoriedad. Asimismo se evidencia que el conjunto de situaciones problema es limitado puesto que los estudiantes perciben el azar mayormente en el mundo social y algún otro mundo (biológico, físico y político), donde los juegos de casino son la mayoría de los ejemplos a los que acuden. En cuanto a la aleatoriedad, el 47 % la asocia a procesos sistemáticos como la probabilidad del evento que está involucrado, asimismo cuando quieren referirse a esta hacen mención al término 'probabilidad', lo que deja ver que no las diferencian.

Debido a que los participantes del estudio ya culminaron su proceso de formación escolar en Colombia y manifiestan concepciones inconsistentes sobre las nociones de azar y aleatoriedad, se establecen unas recomendaciones en pro de aportar al desarrollo de su Pensamiento Aleatorio, la cual consiste en trabajar con situaciones donde se evidencien y desarrollen las nociones de estudio, pero no solo en torno a los juegos de casino ni de forma indirecta.

Debido a que los participantes del estudio ya culminaron su proceso de formación escolar en Colombia y manifiestan concepciones inconsistentes sobre las nociones de azar y aleatoriedad, se establecen unas recomendaciones en pro de aportar al desarrollo de su Pensamiento Aleatorio, las cuales consisten en trabajar con situaciones donde se evidencien y desarrollen las nociones de estudio, pero no solo en torno a los juegos de casino ni de forma indirecta, asimismo se sugiere una bibliografía de consulta para ampliar y profundizar el trabajo de dichos constructos, y finalmente se proyectan unos aprendizajes esperados que se espera adquieran con la puesta en marcha de dichas recomendaciones.

REFERENCIAS

- Álvarez, I., Andrade, L., & Fernández, F. (2017). Panorama de la investigación en educación estadística desde tesis doctorales 2000-2014. *Revista TED*, (41), 87-107. doi: 10.17227/01203916.6039.
- Artigue, M. (1989). Épistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(23), 241-286.
- Ayton, P., Hunt, A.J., & Wright, G. (1989). Psychological conceptions of randomness. *Journal of behavioral decision making*, (2), 221-238.
- Azcarate, P., Cardeñoso, J., & Serradó, A. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: Su incidencia desde los libros de texto. *Statistics education research journal*, (4), 59-81. doi: 10.13140/2.1.4818.6569.
- Batanero, C., & Serrano, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *UNO: Revista didáctica de las matemáticas*, (5), 15-28.
- Batanero, C. (2001). Aleatoriedad, modelización, simulación. En D. de la Coba (Ed.) *X Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, 119-130. España: Sociedad canaria Isaac Newton de profesores de matemáticas.
- Batanero, C., & Godino, J. D. (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Granada, España: Polígono Juncaril.
- Batanero, C. (2005). Significado de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* (8) 247-263.
- Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales.
- Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. En J. Contreras, C. Batanero, J. Godino, G. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.

- Gea y M. López (Eds.) *I Jornadas virtuales de didáctica de la estadística, la probabilidad y la combinatoria* 55-61. Granada, España: Universidad de Granada.
- Bennett, D. J. (1993). *The development of the mathematical concept of randomness; educational implications*. (Tesis doctoral). New York University, Estados Unidos.
- Bennett, D. J. (1998). *Randomness*. Londres, Inglaterra: Harvard University Press.
- Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. (Tesis doctoral). Universidad de Bordeaux. Burdeos, Francia.
- Cano, M. & Zapata, D. (2016). Análisis del pensamiento aleatorio desde las representaciones semióticas presentes en las pruebas saber grado quinto. (Tesis de maestría). Medellín, Colombia : Universidad de Medellín.
- Carranza, S. & Guerrero, A. (2016). El pensamiento aleatorio como fundamento para el desarrollo del pensamiento matemático y sus componentes. (Trabajo de grado). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Cardeñoso, J., González, F., & Moreno, A. (2014). Los significados de la aleatoriedad de los profesores de matemática y de biología en formación. En P. Lestón (Ed.) *Acta latinoamericana de matemática educativa*, (27), 1963-1972. Coalcalco, México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- Contreras, L. (1998). Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula. (Tesis doctoral). Huelva, España: Universidad de Huelva.
- El-Bouazzaoui, H. (1988). *Conceptions des élèves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction*. (Tesis doctoral). Université Laval, Canada.
- Fernández, F., & Sarmiento, B. (2009). *Curso básico de estadística descriptiva*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

- Fernández, F. (2017a). *Diapositivas de estadística*. Material de clase del espacio académicos Probabilidad 2017-1. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.
- Fernández, F. (2017b). *Diapositivas de probabilidad*. Material de clase del espacio académicos Probabilidad 2017-1. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.
- Fine, T. L. (1973). *Theories of probability an examination of foundations*. London, Inglaterra: Academic Press.
- Hacking, I. (2006). *La domesticación del azar*. Barcelona: Gedisa.
- Hernández, H. (2015). *El lenguaje del azar en alumnos de educación secundaria obligatoria*. (Tesis de maestría). Universidad de Granada, España.
- Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of function as an example. *Problemas of representation in the teaching and learning of mathematics* 67-71.
- Johsua, S. (1989). La perdurance des obstacles épistémologiques: Un révélateur de leur nature. En N. Bernariz y C. Garnier (Eds.) *Construction des savoirs: Obstacles y conflicts* 110-116. Montreal, Canadá: Universidad de Quebec.
- Konold, C. (1991). Comprender las creencias de los estudiantes sobre la probabilidad. En E. von Glasersfeld (Ed.) *Constructivismo radical en la educación matemática* 139-156. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.
- Kyburg, H. (1974). *The logical foundations of statistical inference*. Boston: Reidel.
- Licenciatura en Matemáticas (2017). *Contenido programático de Estadística*. Archivos del Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.
- Licenciatura en Matemáticas (2017). *Contenido programático de Probabilidad*. Archivos del Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.
- Londoño, D., & Montoya, E. (2011). *Azar, aleatoriedad y probabilidad: significados personales en estudiantes de educación media*. (Tesis de maestría). Universidad de Manizales, Colombia.

- Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Serie de Lineamientos Curriculares.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Serie de Estándares.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2017a). *Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas, 2*. Bogotá: Serie de Derechos de Aprendizaje.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2017b). *Mallas Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Serie de Mallas Curriculares.
- Ponte, J. P. (1999). Las creencias y concepciones de maestros como un tema fundamental en formación de maestros. En K. Krainer & F. Goffree (Eds.) *On research in teacher education: From a study of teaching practices to issues in teacher education* 43-50. Osnabrück Alemania: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik
- Restrepo, E. (2012). *Aleatoriedad, nociones previas en estudiantes de educación media*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Colombia.
- Ruiz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics* (22) 1-36. Países Bajos: Springer.
- Sierpinska, A. (1989). *On 15-17 years old student's conceptions of functions, iteration of functions and attractive points*. Warsaw, Polonia: Preprint.
- Steinbring, H. (1991). The concept of chance in everyday teaching: Aspects of a social epistemology of mathematical knowledge. En A. Bakker. (Ed.) *Educational studies in mathematics* (pp. 503-522). Países Bajos: Springer.
- Vergnaud, G. (1983). Didactique du concept du volumen. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10, (23), 133-170.

Zuñiga, F. (2017). *Implementación de una secuencia didáctica basada en situaciones problemas para promover la comprensión de la noción de aleatoriedad* (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Colombia.

ANEXOS

ANEXO A. Cuestionario de Indagación.

	UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <i>Educadora de educadores</i>	FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Licenciatura en Matemáticas Fredy Alexander Barajas Prieto Luisa Yesenia Salinas Vanegas 2018 - 2
CUESTIONARIO DE INDAGACIÓN		
<p>El presente cuestionario tiene como finalidad conocer las concepciones de los estudiantes para profesor de matemáticas sobre las nociones de azar y aleatoriedad. Este fue diseñado en el marco de un trabajo de grado de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Por tanto, se pide colaboración y honestidad con la información reportada, pues es parte de los insumos para la culminación de la indagación. La información que sea suministrada será usada solamente con fines académicos.</p>		
<ul style="list-style-type: none">• ¿Cuál es su código estudiantil de la UPN? _____• ¿Ha estudiado antes en alguna Institución de Educación Superior? Sí _ No _ (Si su respuesta es Sí, responda lo siguiente, de lo contrario vaya al punto 1):<ul style="list-style-type: none">○ ¿En cuál? _____○ ¿A cuál programa académico perteneció? _____○ ¿Hasta qué semestre cursó por materias? _____○ ¿Tuvo clase de Estadística o algún espacio académico similar? Sí_ No _ (Si su respuesta es Sí, responda lo siguiente, de lo contrario vaya a la siguiente pregunta):<ul style="list-style-type: none">▪ ¿Cómo se llamaba dicho espacio? _____▪ ¿Qué temas se abordaron allí? _______________○ ¿Tuvo clase de Probabilidad o algún espacio académico similar? Sí_ No _ (Si su respuesta es Sí, responda lo siguiente, de lo contrario vaya al punto 1):<ul style="list-style-type: none">▪ ¿Cómo se llamaba dicho espacio? _____▪ ¿Qué temas se abordaron allí? _______________		
<p>1. A partir de su vida cotidiana, plantee cuatro ejemplos de situaciones en las que usted considera que interviene el azar.</p> <ul style="list-style-type: none">i. _____ii. _____iii. _____iv. _____		

2. En un concurso se están asignando tres premios dependiendo de lo que se obtenga al lanzar dos monedas no cargadas. Para ganar el premio A se debe hacer una postulación y obtener cara en las dos monedas, para el premio B se debe obtener sello y cara, y para el premio C se debe obtener sello y sello en las dos monedas.

a. ¿A cuál premio se postularía? _____ ¿por qué? _____

b. ¿Es posible que Juan participe una vez en cada juego y siempre gane? Sí__ No__ ¿por qué? _____

3. Escribir una lista de mínimo 5 palabras que usted use para referirse a "aleatoriedad".

4. Explique qué quiere decir 'que algo ocurre aleatoriamente'.

5. Dé como mínimo tres ejemplos de eventos aleatorios.

i. _____

ii. _____

iii. _____

6. En un bingo, Walter, Paola y María están participando con dos, tres y un tarjetón, respectivamente. Si ellos son los únicos participantes ¿Quién cree usted que ganará? _____ ¿Por qué? _____

7. Al lanzar una moneda se espera que salga la misma cantidad de caras que de sellos. Lance

una moneda diez veces y apunte los resultados

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

a. ¿Se cumplió lo esperado? Sí__ No__ ¿A qué se debe esto? _____

b. Lance nuevamente la moneda diez veces y apunte los resultados

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

c. Con base en los dos experimentos realizados anteriormente, ¿cree que se puede predecir los resultados que se obtendrían en una tercera tanda? Sí __ No __ ¿Por qué? _____

d. Si su respuesta fue Sí, ¿Cuáles serían esos resultados de esa tercera tanda?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

8. En cada una de las siguientes situaciones indique en cuál(es) usted percibe el azar y en cuál(es) no, explicando su selección.

SITUACIÓN	SE PERCIBE EL AZAR (Sí o no)	CÓMO (Explique)
A. En un cuarto de hospital se encuentran las personas A, B y C. La persona A tiene un virus, el cual se contagia solamente a la persona B.		
B. En el partido final de un campeonato de baloncesto, un jugador lanza el balón en el último minuto buscando anotar tres puntos para ganar el partido.		
C. Determinar si mañana sale el sol en Bogotá.		
D. Los colombianos decidieron que para el periodo del 2018-2022, el doctor Iván Duque Márquez fuese su presidente.		

ANEXO B. Formato de consentimiento para menores de edad.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Formando al Profesional</small>	<i>FORMATO</i>	
	CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA LA PARTICIPACIÓN EN INVESTIGACIONES ADULTO RESPONSABLE DE NIÑOS Y ADOLESCENTES	
Código: FOR025INV	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 02-06-2016	Página 1 de 2	
Vicerrectoría de Gestión Universitaria Subdirección de Gestión de Proyectos – Centro de Investigaciones CIUP Comité de Ética en la Investigación		
<p>En el marco de la Constitución Política Nacional de Colombia, la Ley 1098 de 2006 – Código de la Infancia y la Adolescencia, la Resolución 0546 de 2015 de la Universidad Pedagógica Nacional y demás normatividad aplicable vigente, considerando las características de la investigación, se requiere que usted lea detenidamente y si está de acuerdo con su contenido, exprese su consentimiento firmando el siguiente documento:</p>		
<u>PARTE UNO: INFORMACIÓN GENERAL DEL PROYECTO</u>		
Facultad, Departamento o Unidad Académica	Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas.	
Título del proyecto de investigación	Concepciones de los estudiantes para profesor de matemáticas sobre azar y aleatoriedad	
Descripción breve y clara de la investigación	Este trabajo de grado se enmarca en la enseñanza y el aprendizaje de la Estocástica, con el fin de contribuir en el desarrollo del Pensamiento Matemático, en especial el Pensamiento Aleatorio, pues se ha evidenciado que las nociones de azar y aleatoriedad no se desarrollan del todo ni en la escuela ni en los cursos de Estadística y Probabilidad de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Por tanto se indaga sobre las concepciones de un grupo de estudiantes frente a estas nociones y con base en los resultados se deja como insumo, un instrumento para que los docentes tengan una manera de conocer las concepciones de los estudiantes en cuanto a éstas nociones pues él, debe proponer situaciones con el fin de aproximarlos de manera acertada al objeto en cuestión (Brousseau, 1986), y unas recomendaciones didácticas para direccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje tanto para el grupo de maestro en formación participante de la indagación, como para los espacios académicos de Estadística y Probabilidad del plan de estudio de la Licenciatura en Matemáticas.	
Descripción de los posibles riesgos de participar en la investigación	Ninguno.	

Descripción de los posibles beneficios de participar en la investigación.	Ninguno.
Datos generales del investigador principal	Fredy Alexander Barajas Prieto. fabarajasp@upn.edu.co Luisa Yesenia Salinas Vanegas. dma_lysalinasv038@pedagogica.edu.co

	<i>FORMATO</i>
	<i>CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA LA PARTICIPACIÓN EN INVESTIGACIONES ADULTO RESPONSABLE DE NIÑOS Y ADOLESCENTES</i>
Código: FOR025INV	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 02-06-2016	Página 2 de 2

PARTE DOS: CONSENTIMIENTO INFORMADO

Yo _____ mayor de edad, identificado con cédula de Ciudadanía N° _____ de _____ y _____ correo electrónico: _____

Como adulto responsable del niño y/o adolescente con:

Nombre(s) y Apellidos: _____ Tipo de Identificación _____ N° _____

Autorizo expresamente su participación en este proyecto y

Declaro que:

1. He sido invitado(a) a participar en el estudio o investigación de manera voluntaria.
2. He leído y entendido este formato de consentimiento informado o el mismo se me ha leído y explicado.
3. Todas mis preguntas han sido contestadas claramente y he tenido el tiempo suficiente para pensar acerca de mi decisión de participar.
4. No tengo ninguna duda sobre mi participación, por lo que estoy de acuerdo en hacer parte de esta investigación.
5. Puedo dejar de participar en cualquier momento sin que esto tenga consecuencias.
6. Conozco el mecanismo mediante el cual los investigadores garantizan la custodia y confidencialidad de mis datos, los cuales no serán publicados ni revelados a menos que autorice por escrito lo contrario.
7. Autorizo expresamente a los investigadores para que utilicen la información y las grabaciones de audio, video o imágenes que se generen en el marco del proyecto.

Sobre esta investigación me asisten los derechos de acceso, rectificación y oposición que podré ejercer mediante solicitud ante el investigador responsable, en la dirección de contacto que figura en este documento.

En constancia, el presente documento ha sido leído y entendido por mí, en su integridad de manera libre y espontánea. Firma el adulto responsable del niño o adolescente,

Nombre del adulto responsable del niño o adolescente:

N° Identificación: _____ Fecha: _____

Declaración del Investigador: Nosotros certificamos que le hemos explicado al estudiante la naturaleza y el objeto de la presente investigación y los posibles riesgos y beneficios que puedan surgir de la misma. Adicionalmente, le hemos absuelto ampliamente las dudas que ha planteado

y le hemos explicado con precisión el contenido del presente formato de consentimiento informado.

En constancia firman los investigadores responsables del proyecto,

Fredy Alexander Barajas Prieto

Luisa Yesenia Salinas Vanegas

ANEXO C. Formato de consentimiento para mayores de edad.

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Formando al Profesional</small>	<i>FORMATO</i>	
	CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA LA PARTICIPACIÓN EN INVESTIGACIONES ADULTO RESPONSABLE DE NIÑOS Y ADOLESCENTES	
Código: FOR025INV	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 02-06-2016	Página 1 de 2	
Vicerrectoría de Gestión Universitaria Subdirección de Gestión de Proyectos – Centro de Investigaciones CIUP Comité de Ética en la Investigación		
<p>En el marco de la Constitución Política Nacional de Colombia, la Ley 1098 de 2006 – Código de la Infancia y la Adolescencia, la Resolución 0546 de 2015 de la Universidad Pedagógica Nacional y demás normatividad aplicable vigente, considerando las características de la investigación, se requiere que usted lea detenidamente y si está de acuerdo con su contenido, exprese su consentimiento firmando el siguiente documento:</p>		
<u>PARTE UNO: INFORMACIÓN GENERAL DEL PROYECTO</u>		
Facultad, Departamento o Unidad Académica	Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas.	
Título del proyecto de investigación	Concepciones de los estudiantes para profesor de matemáticas sobre azar y aleatoriedad	
Descripción breve y clara de la investigación	Este trabajo de grado se enmarca en la enseñanza y el aprendizaje de la Estocástica, con el fin de contribuir en el desarrollo del Pensamiento Matemático, en especial el Pensamiento Aleatorio, pues se ha evidenciado que las nociones de azar y aleatoriedad no se desarrollan del todo ni en la escuela ni en los cursos de Estadística y Probabilidad de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Por tanto se indaga sobre las concepciones de un grupo de estudiantes frente a estas nociones y con base en los resultados se deja como insumo, un instrumento para que los docentes tengan una manera de conocer las concepciones de los estudiantes en cuanto a éstas nociones pues él, debe proponer situaciones con el fin de aproximarlos de manera acertada al objeto en cuestión (Brousseau, 1986), y unas recomendaciones didácticas para direccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje tanto para el grupo de maestro en formación participante de la indagación, como para los espacios académicos de Estadística y Probabilidad del plan de estudio de la Licenciatura en Matemáticas.	
Descripción de los posibles riesgos de participar en la investigación	Ninguno.	

Descripción de los posibles beneficios de participar en la investigación.	Ninguno.
Datos generales del investigador principal	Fredy Alexander Barajas Prieto. fabarajasp@upn.edu.co Luisa Yesenia Salinas Vanegas. dma_lysalinasv038@pedagogica.edu.co

 <small>UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL</small> <small>Formación de Profesionales</small>	<i>FORMATO</i>	
	CONSENTIMIENTO INFORMADO PARA LA PARTICIPACIÓN EN INVESTIGACIONES ADULTO RESPONSABLE DE NIÑOS Y ADOLESCENTES	
Código: FOR025INV	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 02-06-2016	Página 2 de 2	

PARTE DOS: CONSENTIMIENTO INFORMADO

Yo _____ mayor de edad, identificado con cédula de Ciudadanía N° _____ de _____ y _____ correo electrónico: _____

Autorizo expresamente su participación en este proyecto y

Declaro que:

8. He sido invitado(a) a participar en el estudio o investigación de manera voluntaria.
9. He leído y entendido este formato de consentimiento informado o el mismo se me ha leído y explicado.
10. Todas mis preguntas han sido contestadas claramente y he tenido el tiempo suficiente para pensar acerca de mi decisión de participar.
11. No tengo ninguna duda sobre mi participación, por lo que estoy de acuerdo en hacer parte de esta investigación.
12. Puedo dejar de participar en cualquier momento sin que esto tenga consecuencias.
13. Conozco el mecanismo mediante el cual los investigadores garantizan la custodia y confidencialidad de mis datos, los cuales no serán publicados ni revelados a menos que autorice por escrito lo contrario.
14. Autorizo expresamente a los investigadores para que utilicen la información y las grabaciones de audio, video o imágenes que se generen en el marco del proyecto.
15. Sobre esta investigación me asisten los derechos de acceso, rectificación y oposición que podré ejercer mediante solicitud ante el investigador responsable, en la dirección de contacto que figura en este documento.

Declaración del Investigador: Nosotros certificamos que le hemos explicado al estudiante la naturaleza y el objeto de la presente investigación y los posibles riesgos y beneficios que puedan surgir de la misma. Adicionalmente, le hemos absuelto ampliamente las dudas que ha planteado y le hemos explicado con precisión el contenido del presente formato de consentimiento informado.

En constancia firman los investigadores responsables del proyecto,

Fredy Alexander Barajas Prieto

Luisa Yesenia Salinas Vanegas

ANEXO D. Acopio y sistematización de datos.

Se presentan algunos datos obtenidos en la recolección de información (Tabla A); luego se muestran los códigos usados para la tabulación de los datos (Tabla B); y finalmente, en la Tabla C se muestra la correlación de las respuestas obtenidas y los elementos de los ejes (Tabla 3, 4, 5 y 6).

Preámbulo											Punto 1				Punto 2				Punto 3	Punto 4	Punto 5	Punto 6			
Código	Ha estudiado	En dónde	Carrera	Semestre	Estadística			Probabilidad			Situación	Premio	¿Por qué?	Gana siempre	¿Por qué?	A	Explicacio	A	Gana	porque	Serie 1	esperado			
					tuvo	nombre	temas	tuvo	nombre	temas															
1	16	1	1	1	2	0	NA	NA	NA	NA	1,2;3;4	2	1	0	1	1,2;3;4;99	1	1,2;3	2	1	CCCSCSSCS	1			
2	24	0	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	4;5;6;7	2	2	0	2	1;5;6;7;8	1	4;5;99	1	2	CCSCCSCSC	0			
3	7	1	1	2	3	0	NA	NA	0	NA	8;9;10;11	2	1	0	3	1;8;9;10;11	2	6;7;8	2	1	SSCCSCSSCC	1			
4	58	1	2	3	3	0			0		7;12;13;14	2	1	1	4	12;13;14;6;8	1	9;7;99	2	1	CCSSCCCCCS	0			
5	17	1	3	4	2	0			0		10;6;4;15	1	3	1	3	15;16;8;1;17	3	10;11;12	1	1	SSSSCCCCCC	0			
6	29	0									10;16;7	2	1	1	5	14;18;19;1;20;	4	13;14;4	2	1	SSCCSCSCCC	0			
7	1	0									7;17;18;19	2	1	1	4	21;12;1;22	2	15;10;16	2	1	CCCSCSCCS	0			
8	70	0									8;20;21;22	2	1	1	4	1;22;15;17	5	6;17	1	1	CCCCSSSSS	0			
9	25	0									23;17;7;19	2	1	1	4	1;24;6;25	6	5;16;18	1	3	SSSSCSCSSC	0			
10	66	1	1	5	3	0			0		7;19;18;24	2	1	1	4	8;1;16	7	15;4;19	3	1	SCSCCCSCCS	0			
11	30	0									25;18;19;2	1	4	0	4	1,8;16	8	4;15;13	2	1	SCSCCCSCCS	0			
12	63	0									8;27;28;20	2	1	1	4	3;5;26	9,1	17;19;20	99	99	SSSSCSCSSC	0			
13	72	1	4	6	1	0			0		29;7;20;8	2	1	0	4	8;12;27;6	10	4;5;14	4	1,4	SSCSCSCCSC	0			
14	48	0									1;22;20	2	1	1	4	1;15;8;21;12	11;1	13;21;17	2	1	SSCCSCSCS	0			
15	49	1	5	7	2	0			0		30;26;31;4;3	2	1	0	6	1;12;8;21;15	1	14;22;23	1	1	CCSCCSCCS	0			
16	55	1	1	2	2	0			0		32;33;8;7	2	1	1	1	1;8;10;9;20	10;12	24;25;26	4	1	SSSCCSCSC	0			
17	64	1	6	8	1	0			0		26;7;11	2	1	0	4;6	28;14;29;20;30	13	21;17;11	2	1	CCCSCCSCC	0			
18	66	0									31;34;8;18	2	1	0	4	17;18;12;1	10	17;19;4	2	1	CCSCSCCSC	1			
19	11	0									30;1;26;31	2	1	0	4	1;13;8;28	14	13;20;24	2	1	CCCCCCCCC	0			
20	31	1	7	2	2	0			0		7;8;34;5	2	1	0	7	1;16;8;15	15	17;6;7	3	1	CSSCSCSSC	0			
21	41	1	1	9	3	0			0		7;35;36;37	2	1	0	6	1;24;31;5;32	2	27;10;28	2	1	CCCSCCCCC	0			
22	44	0									31-8-34	2	1	0	4-8	33-34	12	14-17-4	2	1	SCCSCSSSS	0			

Tabla A. Datos en bruto

Preámbulo				Punto 1						Punto 8 a		Punto 8 b		Punto 4				
Universidad en la que estudió	Cód	Programa académico	Cód	Situaciones azarosas	Cód	Situaciones azarosas	Cód	Situaciones azarosas	Cód	Cómo	Cód	Cómo	Cód	Qué quiere decir aleatoriedad	Cód			
Universidad Distrital	1	Tecnología Industrial	1	Apuestas	1	Hora de ...	11	Casino	30	Defensas	1	Probabilidad	1	Azar	1			
Universidad Pedagógica Nacional	2	Matemáticas	2	Competencias	2	Todo bien sin esfuerzo	12	Chance	31	Determinístico	2	Habilidad jugador	2	No hay patrón	2			
Fundación Konrad Lorenz	3	Lic. en Matemáticas	3	Concursos	3	Encontrar algo ...	13	Parqués	32	Estado de salud	3	Incertidumbre	3	Sin causa	3			
Universidad Santo Tomás	4	Ing. Industrial	4	Rifas	4	Llueve y alcanzó a llegar	14	Domino	33	Cercanía	4	Distancia a la cesta	4	Por suerte	4			
Universidad San Buenaventura	5	Ing. Electrónica	5	Buscando tbj	5	Filas	15	Bingo	34	Diagnóstico	5	Suerte	5	Imprevisto	5			
Universidad ECCI	6	Contaduría Pública	6	Armandos grupos	6	Coincidir en compras	16	Almuerzo	35	Inmuné	6	Experiencia	6	Varias causas	6			
Universsidad Sergio Arboleda	7	Ing. Aeronáutica	7	Transporte	7	Conocer personas	17	Duración de bacteria	36	Organismo	7		7	Sin control	7			
SENA	8	Ing. Mecánica	8	Juego de cartas	8	Marcador de un partido	18	Ritmo de la bicicleta	37	Probabilidad	8		8	Rifas	8			
		Lic. Básica con énfasis en Matemáticas	9	Piedra, papel o tijera	9	Clima	19	Accidente	38	Aleatoriedad	9		9	Determinado	9			
		Diseño	10	Coger silla en ...	10	Dados	20	Ingreso a la U	39	Curar a A	10		10	Variabilidad	10			
Punto 2 a				Punto 2 b		Máquina roba monedas		21		Solicitar cita médica		40		Clase del virus		11		
Premio de postulación	Cód	Justificación	Cód	b	Cód	Elecciones	22	Puntualidad	41	Incierto	12		12	Desorden	11	Probabilidad	12	
A	1	Probabilidad	1	No pueden ganar al tiempo	1	Semáforo	23	Llevar algo (sombriilla)	42	Punto 8 c		Punto 8 d		Incertidumbre		13		
B	2	Suerte	2	Juego de azar	2	Publicidad de Youtube	24	Comer recién comprado	43	Cómo	Cód	Cómo	Cód	Impredicible		14		
C	3	Experiencia	3	Azar	3	Orden de ...	25	Lugar caída	44	Estudios metereológico	1	Elección	1	Elección sin condición		15		
Cualquiera	4	Confianza en sí mismo	4	Probabilidad	4	Lotería	26	Asignación de temas	45	Incertidumbre	2	Corrupción	2	Sorteo		16		
				Varian los resultados	5	Monedas (C o S)	27	Fiesta	46	Por el clima	3	No se sabe quien ganab:	3	Reglas universales		17		
				Incertidumbre	6	Ruleta rusa	28	Cantidad de trabajos	47	Certeza	4	Influenza	4					
				Lanzamiento de la moneda	7	Sorteos	29		48	Probabilidad	5	Determinístico	5					
				Experiencia	8				49	Experiencia	6	Probabilidad	6					
				Aleatoriedad	9				50		7	Creencia	7					
				Suerte	10				51									
Punto 3				Punto 6		Quién ganará		Cód		Justificación		Cód		Punto 5		Eventos aleatorios		
Sinónimos de aleatoriedad	Cód	Sinónimos de aleatoriedad	Cód	Sinónimos de aleatoriedad	Cód	Walter	1	Probabilidad	1	Eventos aleatorios		Cód	Eventos aleatorios	Cód	Eventos aleatorios	Cód	Eventos aleatorios	Cód
Azar	1	Cualquiera	16	Incógnita	31	Paola	2	Más cercano	2	Clase	1	Tipos de ejercicios	18	Monedas (C o S)	35			
Conjunto	2	Mezcla	17	Variabilidad	32	María	3	Género	3	Exposición	2	Dados	19	Caída	36			
Variedad	3	Incierto	18	Repetición	33	Los tres	4	Aleatoriedad	4	Discusión	3	Monedas (C o S)	20	Bostezar	37			
Sucesos	4	Arriesgado	19	Periodo	34	Cualquiera	5		5	Bingo	4	Parqués	21	Encontrar ...	38			
Opciones	5	Fortuito	20	Tanteo	35					Sorteo	5	Tingo tingo tango	22	Perder ...	39			
Sorteo	6	Posibilidad	21	Esporádico	36					Lanzamiento de la moneda	1	Fuerza de lanzamiento	1	Ruleta rusa	40			
Bombo	7	Descarte	22	Coincidencia	37					Probabilidad	2	Movimientos de la moneda	2					
Suerte	8	Sin secuencia	23	Secuencia	38					Incertidumbre	3	Varian los resultados	3					
De buenas	9	Aleatorio	24	Pinchazo	39					Suerte	4	Incertidumbre	4					
Chiripa	10	Chance	25	Dios	40					Aleatoriedad	5	Juego de azar	5					
Baja probabilidad	11	Asociar	26	Dedocracia	41					No hay patrón	6	No hay patrón	6					
Probable	12	Tal vez	27	Lotería	42					Giros de la moneda	7	Probabilidad	7					
Destino	13	Impredicible	28	Ocasional	43					Azar	8	Experiencia	8					
Casualidad	14	Accidentalmente	29							Variabilidad	9	Azar	9					
Desorden	15	Imprevisto	30									Patrón	10					
												Aleatoriedad	11					
												Suerte	12					

Tabla B. Codificación datos

ANEXO E. Relación de subcategoría y punto del cuestionario

		SUBCATEGORÍAS VS PUNTOS DE CUESTIONARIO																											
		SUBCATEGORÍA																											
		AZ ₁	AZ ₂	AZ ₃	AZ ₄	AZ ₅	AZ ₆	AZ ₇	AZ ₈	AZ ₉	AZ ₁₀	AZ ₁₁	AZ ₁₂	AL ₁	AL ₂	AL ₃	AL ₄	AL ₅	AL ₆	AL ₇	AL ₈	AL ₉	AL ₁₀	AL ₁₁	AL ₁₂	AL ₁₃	AZ ₁₄	AZ ₁₅	
PUNTO	1	X	X	X	X																								
	2					X	X	X	X				X																
	3													X	X	X		X			X	X							
	4													X	X	X		X			X	X							
	5																								X				
	6																										X	X	
	7																X		X					X					X
	8	X	X	X	X	X	X	X	X																				

Tabla D. Subcategorías vs puntos cuestionario