MEMORIAS DE LA ELABORACIÓN DE UNA PROPUESTA DE INTERVENCIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS, A PARTIR DE LA APROPIACIÓN Y USO DE ALGÚN ASPECTO DE LA HISTORIA DE LAS CURVAS

BETHSY MARCELA RUCINQUE LOPEZ
JENNYFER ALEJANDRA ZAMBRANO ARIAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGIA
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA CON ÉNFASIS EN HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS
BOGOTÁ DC

2013

MEMORIAS DE LA ELABORACIÓN DE UNA PROPUESTA DE INTERVENCIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS, A PARTIR DE LA APROPIACIÓN Y USO DE ALGÚN ASPECTO DE LA HISTORIA DE LAS CURVAS

BETHSY MARCELA RUCINQUE LOPEZ
JENNYFER ALEJANDRA ZAMBRANO ARIAS

Trabajo de grado para optar el título de especialistas en educación matemática con énfasis en Historia de las Matemáticas

Director
EDGAR ALBERTO GUACANEME SUAREZ
Magister en Educación Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGIA
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA CON ÉNFASIS EN HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2013

Agradecimientos

Gracias a Dios por guiarme en este nuevo reto, dándome fortaleza para continuar, a mi mamá por su incondicional apoyo, empeño y dedicación para sostenerme y tenerme donde estoy y a todas aquellas personas que han hecho parte de este proceso de formación…Gracias

Bethsy Marcela Rucinque

A Dios que me da la fortaleza para asumir cada reto en mi vida
Que me bendice con mi linda familia que siempre me acompaña
Que pone en mi camino a personas sabias que me orientan y me dejan grandes enseñanzas… Gracias...

Jennyfer Alejandra Zambrano

.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***"Memorias de la elaboración de una propuesta de intervención en el aula de matemáticas, a partir de la apropiación y uso de algún aspecto de la historia de las curvas"*** Presentado por los estudiantes:

Bethsy Marcela Rucinque - 2013182027
Jennyfer Alejandra Zambrano - 2013182035

Como requisito parcial para optar al título de **Especialización en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigno la calificación de **Aprobado** con **48** puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 10 días del mes de diciembre de 2013.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) Edgar O. Guacaneme S.
EDGAR GUACANEME

Jurado:

Profesor(a)
JOHN HELVER BELLO

	FORMATO
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE
Código: FOR020GIB	**Versión: 01**
Fecha de Aprobación: 10-11-2013	**Página 5 de 5**

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Memorias de la elaboración de una propuesta de intervención en el aula de matemáticas, a partir de la apropiación y uso de algún aspecto de la historia de las curvas.
Autor(es)	Rucinque López, Bethsy Marcela; Zambrano Arias, Jennyfer Alejandra
Director	Guacaneme Suárez, Edgar Alberto
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 189 páginas, 2013. 90 p
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Trisección del ángulo, regla y compás, exactitud, curva.

2. Descripción
Se presenta las Memorias del proceso de elaboración de una propuesta curricular que trabajo algún aspecto de las curvas involucrando aspectos de la Historia de las Matemáticas. de acuerdo a esto, se presenta de forma narrativa la experiencia de dos profesoras de matemáticas, dispuestas a mirar en "cámara lenta" el proceso que llevan a cabo al diseñar una propuesta curricular, estrategia para identificar el cómo se hace un

diseño; tal narrativa se realizará utilizando como herramienta metodológica la elaboración de unas memorias, donde se dará a conocer paso a paso el proceso de diseño, identificando el para qué y por qué hacer unas memorias de la elaboración de una propuesta curricular. La propuesta que aquí se presenta, tiene un aspecto fundamental y es el hecho de discutir en la clase de matemáticas ¿Qué son las matemáticas?, mediado bajo una discusión sobre el problema de la «exactitud» en el desarrollo Histórico de las Matemáticas más específicamente en el proceso de medición de ángulos, a través del estudio de la trisección del ángulo.

En la referencia historia de la trisección del ángulo se identifican dos momentos, el primero es abordado con los instrumentos clásicos como la regla y compás, y el segundo, haciendo uso de Geogebra en la construcción de soluciones al problema aplicando curvas familiares a los estudiantes como la parábola y la cubica, invitando a los estudiantes a discutir la cuestión de la exactitud en las matemáticas. Finalmente se presenta las reflexiones en cuanto al proceso de diseño, al proceso de elaboración de las memorias, al conocimiento y experiencia adquirida en la realización de la propuesta.

3. Fuentes

Arenzana, H. V. (1998). Las curvas mecánicas en la geometría griega. La cuadratriz de Dinóstrato. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 31-36.

Furinghetti, A. D. (2011). *History, Figures and Narratives in Mathematics Teaching* . Italy: University of Genova.

Loy, J. (2003). *Trisection of an Angle*. Recuperado el 12 de Mayo de 2013, de http://www.jimloy.com/geometry/trisect.htm

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas.* Bogotá.: Magisterio.

MEN. (2003). *Estándares Curriculares de matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

Panza, M. (2011). Repensar la exactitud geométrica. Historia Mathematica. *Historia Mathematica*, 42-95.

Siavash, H. S. (2012, enero). A Possible Solution of Trisection Problem. *n Actas de la sexta conferencia internacional WSEAS en Ingeniería Informática y Aplicaciones y, Actas de la Conferencia Americana de 2012, sobre Matemática Aplicadas* (págs. (pp. 277-285)). Evanston, Illinois: Mundial de la Ciencia y la

Academia de Ingeniería y Sociedad (WSEAS).

Suzuki, J. (1 de febrero de 2008). A Brief History of Impossibility. *Matemáticas Revista, VOL. 81*(1), 27-38.

4. Contenidos

En breve se realizará un recorrido por el eje temático que compone este trabajo; en el primer capítulo se da a conocer la justificación del porqué se quiere realizar las memorias de la elaboración de una propuesta curricular, allí se presentan diferentes razones y motivaciones que nos llevaron a la necesidad de mirarnos a nosotros como profesores en ejercicio. En el segundo capítulo se da a conocer los elementos metodológicos que se utilizaron para llevar a cabo el proceso de diseño reconociendo que no es una propuesta basada en las condiciones de una investigación acción, sino una propuesta basada principal y únicamente en la narrativa dada en las discusiones que se generan a partir del ejercicio de mirarnos a nosotros mismos.

En el tercer capítulo se presenta una revisión teórica del problema de la trisección del ángulo, identificando algunas posturas de cómo se originó y como abordaron los matemáticos de la antigüedad dicho problema. Esta segunda parte llevo a muchas discusiones alrededor de la idea de exactitud y por ello se presenta una revisión de diferentes posturas en el cuarto capítulo.

Posteriormente en el quinto capítulo se exponen las reflexiones y conclusiones de todo el proceso, evidenciando los aportes del espacio de formación y resaltando los aprendizajes que se obtienen al hacer el ejercicio de observar aspectos de la Historia de las Matemáticas y del registro del cómo se realiza el diseño de una propuesta curricular. Finalmente se presenta como producto de divulgación la ponencia "*La trisección del ángulo, un problema que se puede resolver en la clase de matemáticas"* en la Cuarta Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática.

5. Metodología

La metodología utilizada es la producción de las memorias que dan cuenta de cada momento que se vivió en el proceso de elaboración de la propuesta curricular, donde se reporta de manera narrativa lo que se hizo y como se hizo. Para la realización de estas memorias se tuvo como insumo los registros de audio que se tomaron de las asesorías con el Director del trabajo, los registros de audio de las conversaciones que se generaban alrededor de los aspectos que se presentan, así mismo los registros escritos de las construcciones hechas con regla y compás, y finalmente los ejercicios hechos con algunos niños que nos colaboraron en la validación de algunas hipótesis.

6. Conclusiones

La elaboración de estas memorias, nos ha permitido de manera paralela al proceso de narrar cada momento, reflexionar sobre lo narrado, puesto que no nos limitamos a describir el proceso, sino que de manera natural el ejercicio de mirar lo que se hace y como se hace lleva implícito y casi difícil de separar un ejercicio de reflexión. Es por ello que se presentará una reflexión de las reflexiones hechas, lo que conlleva a unas conclusiones del ejercicio de reflexionar.

De acuerdo al proceso que se ha realizado y después de mirar hacia atrás, se identifica que no se pueden establecer conclusiones a nivel general, y por ello, se nos hace necesario presentar dichas conclusiones de acuerdo a diferentes aspectos:

- Una gran reflexión que sobresale es en los errores que cometemos inconscientemente en nuestras prácticas docentes, por un lado de enseñar a resolver problemas como se aprendió, y por otro lado, mostrar una matemática que siempre tiene una solución a todo tipo de problemas.
- Se identifica en la tarea del diseño, que este no es lineal y que se presenta de manera cíclica lo que implica que no se deben determinar momentos estrictamente en el orden propuesto, ya que estos se determinan según la apropiación que se tenga del tema y de las tareas que se le proponen a los estudiantes, que su vez deben estar conectados con los objetivos propuestos.
- El proceso de diseño registrado, garantiza una conciencia de cómo estamos realizando la tarea, reconociendo que no es una tarea trivial y sobre todo de cómo podemos usar la Historia de las Matemáticas en lo que llevamos al aula, y no

quedándonos en una breve reseña de algún matemático en un momento de introducir un tema.

En este sentido, la elaboración de la propuesta no permite replantearnos sobre *¿Que tanto el conocimiento del profesor se debe ver reflejado en la presentación de las actividades y tareas que se llevan al aula?* Reconociendo que si bien el profesor no enseña todo lo que sabe, si debe saber muy bien todo lo que enseña.

Elaborado por:	Rucinque López, Bethsy Marcela; Zambrano Arias, Jennyfer Alejandra
Revisado por:	Edgar Guacaneme

Fecha de elaboración del Resumen:	02	11	2013

CONTENIDO

Pág.

INTRODUCCIÓN

En este documento, se quiere presentar la descripción de un proceso a partir de la elaboración de unas *Memorias*, relatando cada una de las acciones que se llevan a cabo en el proceso de diseño y planeación curricular. Por ello lo invitamos a recorrer los pasos que dos profesoras de matemáticas iniciaron, buscando una ruta que las llevara a comprender y reflexionar sobre sus prácticas docentes. Advirtiendo desde un inicio, que dicha ruta no fue lineal, tuvimos que retroceder y cambiar de rumbo, buscar caminos menos estrechos e inseguros, subir tramos y volverlos a bajar, y sin ánimo de que no siga la lectura, podemos afirmar que no hemos llegado a la meta y que se continua caminando, buscando no la respuesta sino el crecimiento profesional en esta aventura de ser maestro.

Esta propuesta, nace en el espacio de formación de la Especialización en Educación Matemática la cual tiene como énfasis la Historia de las Matemáticasespecíficamente alrededor del objeto matemático La Curva. Al iniciar el proceso de formación continuada, nos cuestionamos sobre *¿Qué es una curva?* reconociendo que lo que sabemos es una leve percepción de ella, y creemos saber definirla porque manejamos en el aula de clase contenidos asociados a las diferentes secciones cónicas como la parábola, la elipse, la circunferencia o la hipérbola. Pero, durante el proceso evidenciamos que trabajar con curvas no se limita a la manipulación de expresiones algebraicas y representaciones en el plano cartesiano; entendiendo que la curva no es un contenido, sino en sí un objeto matemático, y es este carácter lo que nos permite pensar en una propuesta donde se aborde algún aspecto de las curvas.

Por ello, se da a conocer en el primer capítulo la justificación del porqué se quiere realizar las memorias de la elaboración de una propuesta curricular, donde se presentan diferentes razones y motivaciones que nos llevaron a la necesidad de mirarnos a nosotros como profesores en ejercicio. Así mismo se proponen algunos objetivos encaminados a generar principalmente una auto-reflexión sobre nuestras prácticas en el aula de clase de matemáticas a partir del proceso de diseño y planeación de una propuesta curricular.

En el segundo capítulo se da a conocer los elementos metodológicos que se utilizaron para llevar a cabo el proceso de diseño reconociendo que no es una propuesta basada en las condiciones de una investigación acción, sino una propuesta basada principal y únicamente en la narrativa dada en las discusiones que se generan a partir del ejercicio de mirarnos a nosotros mismos. Por ello, se hace el ejercicio de señalar cada una de las acciones realizadas, identificando que este proceso de diseño no es lineal, no se tiene una receta indicando paso por paso cómo se hace un diseño, ya que se avanza y se retrocede a medida que se explora nueva información, se toman decisiones, se hacen correcciones y se cambia de dirección etc. En consecuencia, coincidimos en que tomar un referente teórico en el proceso de diseño, tomando tal vez una de las muchas posturas teóricas de la didáctica de las matemáticas, no permite evidenciar las dificultades, los aprendizajes y las reflexiones que el ejercicio de diseñar conlleva a la práctica docente.

En el tercer capítulo se presenta una revisión teórica del problema de la trisección del ángulo, identificando algunas posturas de cómo se originó y cómo abordaron los matemáticos de la antigüedad dicho problema. En esta revisión se hace una comparación entre dos momentos cruciales de la historia del problema de la trisección del ángulo, ya que inicialmente se abordó con las únicas herramientas permitidas dentro de la geometría griega las cuales eran la regla y el compás, y luego se abordó el problema con el manejo de instrumentos más sofisticados que trazaban curvas a partir de puntos fijos y puntos que se generaban por un movimiento. Esta segunda parte llevo a muchas discusiones alrededor de la idea de exactitud y por ello se presenta una revisión desde diferentes posturas.

Posteriormente, en el quinto capítulo se exponen las reflexiones y conclusiones de todo el proceso, evidenciando los aportes del espacio de formación y resaltando los aprendizajes que se obtienen al hacer el ejercicio de observar aspectos de la Historia de las Matemáticas y del registro del cómo se realiza el diseño de una propuesta curricular. Finalmente se presenta como producto de divulgación la ponencia "*La trisección del ángulo, un problema que se puede resolver en la clase de matemáticas"* en la Cuarta Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática. A continuación lo invitamos a conocer el camino y los pasos que seguimos para este proyecto:

Capítulo 1 ¿POR QUÉ Y PARA QUÉ HACER UNAS MEMORIAS DE LA ELABORACIÓN DE UNA PROPUESTA CURRICULAR?

En este capítulo, se hace referencia a las diferentes motivaciones que se presentaron para elaborar las memorias, donde se explicita por qué y para qué de la realización de las mismas. Esto nos permitió plantearnos el objetivo de elaborar un documento que registrará el proceso de diseño de una propuesta curricular, así mismo se presenta como están organizadas dichas memorias.

La labor docente implica la realización de diversas tareas las cuales están clasificadas como de tipo académico (construcción de la malla curricular, planeación de clases, control de procesos académicos de los estudiantes etc.), o tareas de tipo convivencial (dirección de curso, realización de proyectos transversales, seguimiento disciplinario de los estudiantes, etc.), todas ellas importantes ya que hacen parte de sus prácticas docentes y son funciones dentro de su contexto laboral. De acuerdo a lo anterior, se quiere hacer una mirada a una tarea específica del hacer diario del profesor; esta tarea hace referencia al "*proceso de diseño y planeación de las propuestas curriculares que se llevan a la clase de matemáticas".*

Esta mirada se quiere hacer, ya que como docentes de matemáticas en ejercicio, vemos la necesidad de hacer una reflexión sobre este proceso, interesándonos principalmente en mirarnos a nosotros mismos, en el *cómo* realizamos dicha tarea. En este sentido, se reconoce que solamente para el diseño de una actividad se llevan a cabo múltiples acciones que casi nunca se registran, porque no se tiene el tiempo, ni las condiciones para mirarse a sí mismo y hacer una descripción de lo que hace y es probable que el profesor no sepa como hizo esa tarea y se quede únicamente en el cumplimiento de un deber.

Por esta razón, se inicia este trabajo con el *saber del profesor*, con el conocimiento profesional que se trae del proceso de formación del pregrado y del conocimiento que se ha adquirido con la experiencia y la práctica. De esta manera, se parte de algunas convicciones sobre el proceso de diseño, las cuales se ponen en discusión a la hora de trabajar en equipo y hacer una propuesta.

Por ello, lo primero que se socializa a la hora de iniciar este trabajo es la respuesta a la pregunta *¿Qué y cómo diseña una propuesta curricular el profesor de matemáticas?* La cual inicialmente se responde haciendo referencia a un conjunto de acciones que se llevan a cabo como por ejemplo; buscar actividades en los libros, realizar esquemas en hojas consignando diferentes situaciones tratando de consolidar la que le permita abarcar el objeto matemático, se escriben y se borran problemas, luego se solucionany finalmente se presentan en la clase. Por otro lado, se piensan preguntas que debe formular para llevar a cabo el objetivo de enseñanza-aprendizaje. Así mismo, se identifica si la situación que en ese momento se está planteando es de interés, si será significativa y con valor para los estudiantes, también se propone qué instrumentos o recursos son los más apropiados, cómo se va organizar el trabajo en clase y sobre todo qué aspecto va a evaluar y finalmente debe preguntarse si todo lo anterior le permitirá lograr el objetivo de la clase.

De acuerdo a lo anterior, se reconoce que no es tan elemental y fácil la tarea de diseñar y llevar propuestas al aula, dado que existen muchas variables, muchos elementos que influyen en la atmosfera de la clase de matemáticas y sobre todo muchas maneras de abordar un mismo concepto. En consecuencia, el interés fundamental para realizar esta propuesta, es detenernos un poco, para analizar el *cómo* se lleva a cabo esta tarea. Cuando hacemos referencia al ***"cómo",*** se quiere hacer una mirada "*en cámara lenta"* de cada una de las acciones, decisiones, aciertos, desaciertos, borradores y tal vez inquietudes que se le presentan al profesor a la hora de pensar en el ***qué*** llevar al aula de clase.

Por esta razón, se quiere pensar en la realización de *"memorias"* con el propósito de mostrar paso a paso el proceso que se vive, cómo se construye una propuesta curricular respondiendo tal vez a preguntas como; *¿Qué hace el profesor para preparar la clase?, ¿Qué recursos maneja?, ¿Qué metodología utiliza?, ¿Cómo y de dónde surgen las ideas? Etc.*

Al establecer los objetivos de la propuesta, se reflexiona en el *¿Para qué miramos el cómo diseña un profesor de matemáticas una propuesta de intervención en el aula de matemáticas?* llegando a que creemos fielmente que el disponer de un documento que registre no un producto final donde solo se están presentando actividades que fueron aplicadas y de las cuales se obtuvieron unos resultados, sino una descripción detallada del *"cómo, por qué y para qué"*, nos permite como profesores de matemáticas ser conscientes de cómo estamos llevando a cabo nuestras prácticas docentes y tal vez el ser más consientes nos ayude a mejorarlas.

En este sentido se formula como objetivo general***; Realizar las memorias de la elaboración de una propuesta de intervención en el aula de matemáticas, a partir de la apropiación y uso de algún aspecto de la historia de las curvas.*** Y como objetivos específicos; la elaboración de las memorias encaminadas a reportar el proceso de construcción de una propuesta de intervención en el aula a partir de la apropiación y uso de algún aspecto histórico de las curvas, donde se presente una reflexión sobre nuestras prácticas docentes en relación al cómo se planean actividades para la clase de matemáticas, haciendo una exploración sobre que tanto peso tiene la integración del aspecto histórico en la construcción de una propuesta.

1.1¿CÓMO SE PENSÓ EL DESARROLLO DE LAS MEMORIAS?

La producción de las memorias refleja lo que se vivió en el proceso de elaboración de la propuesta curricular, donde se reporta de manera narrativa[1] lo que se hizo y cómo se hizo. Para la realización de estas memorias se tuvo como insumo los registros de audio que se tomaron de las asesorías con el Director del trabajo, los registros de audio de las conversaciones que se generaban alrededor de los aspectos que se iban presentando, así mismo los registros escritos de las construcciones hechas con regla y compás, y finalmente los ejercicios hechos con algunos niños que nos colaboraron en la validación de algunas

[1] Se entiende narrativa en este documento, como la descripción de las acciones, decisiones, discusiones, etc. que surgieron en el desarrollo de la propuesta.

hipótesis. En este sentido, las memorias se organizan de acuerdo a los diferentes momentos que se presentaron para consolidar la propuesta curricular:

Momento 1: Se presentó a la hora de establecer qué del objeto matemático se iba a tratar, identificando el problema de la trisección del ángulo como un posible prospecto para la elaboración de la propuesta curricular.

Momento 2: Se generan discusiones sobre las implicaciones de abordar el problema de la trisección del ángulo y se buscan situaciones que permitan abordarlo.

Momento 3: Se hace necesario buscar documentos sobre el proceso histórico de la solución del problema de la trisección del ángulo.

Momento 4: Se plantea un diseño inicial con algunas tareas para los estudiantes, partiendo únicamente de la exploración del problema, ya que se había resuelto con algunas curvas mecánicas.

Momento 5: Aparece una reflexión sobre las actividades que se proponen, identificando algunos conceptos que no son claros y se evidencia la necesidad de estudiar el problema, por ello sebuscan documentos que nos permita profundizar en el tema.

Momento6: Se validan algunas construcciones con regla y compás y luego se explora con diferentes estudiantes, intentando identificar las variables del problema.

Momento7: Se encuentran discusiones sobre la exactitud de la medida de los ángulos, llevándonos a identificar esta variable en el diseño, por ello se reformulan las tareas propuestas y se modifica el diseño inicial.

Momento8: Se buscan documentos y se estudian aspectos sobre la exactitud y la precisión.

Momento9: Se vuelve hacer ajustes al diseño, teniendo en cuenta generar una discusión sobre la exactitud.

Momento10: Se revisan aspectos generales del diseño y se consolida el producto final.

A continuación se presentan en los siguientes capítulos, la descripción de cada uno de los momentos, tratando de narrar los avances y dificultades que se presentaron en el recorrido del proceso del diseño de la propuesta curricular:

Capítulo 2 DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE DISEÑO

Se presenta a continuación el proceso de diseño de una propuesta de intervención en el aula donde se parte de una condición importante; la vinculación de la Historia de las Matemáticas a partir del trabajo con curvas. Para llevar a cabo el diseño de la propuesta, inicialmente se tuvieron en cuenta los siguientes interrogantes:

2.1 ¿PARA QUÉ Y PORQUÉ EL DISEÑO?

Esta pregunta, nos invita a reflexionar sobre *¿Cuándo el profesor se ve en la necesidad de diseñar?* Y se puede responder identificando diferentes situaciones que generen la necesidad de diseñar, como por ejemplo: ***i***. Cuando no se encuentra un diseño de lo que va a trabajar, ***ii.*** Cuando lo que tiene a la mano no le satisface porque no se ajusta a lo que se quiere trabajar, ***iii.*** Cuando no se encuentran situaciones o actividades que se ajusten a la perspectiva curricular que se maneja o ***iv***. Cuando se quiere aprender de la actividad de diseño, se quiere reflexionar y profundizar sobre la experiencia.

También, se identifica que el docente puede utilizar diseños de actividades ofrecidas por los libros u otras fuentes bibliográficas, donde se puede hacer referencia a la tarea del docente de hacer un "*Rediseño*" dado que no solamente debe buscar y seleccionar aquellas situaciones y/o actividades que le permitan desarrollar un pensamiento matemático a través del trabajo de un objeto matemático, asimismo modificar, adaptar y organizar según las necesidades del currículo, del grupo de estudiantes y de los recursos disponibles.

Ahora, si se considera el diseño como parte fundamental de las prácticas docentes, pues este elemento hace parte de las tareas del docente en el proceso de planeación de clase, se puede decir que "*se puede planear sin diseñar*" por lo tanto, la tarea de diseñar recae únicamente en la selección de actividades pertinentes con el tema a trabajar. Por ello, cuando se quiere responder el para qué y porqué el diseño, se identifican los siguientes aspectos:

Tabla 1 Paralelo entre el Por qué y Para qué el diseño. (Conversación 5)

¿Por qué el diseño?	*¿Para qué el diseño?*
El diseño de actividades es parte esencial de la planeación que hace el docente de las actividades que lleva al aula.	Para organizar las temáticas y contenidos que se deben abordar según una malla curricular que organiza el plan de estudios.
El diseño debe evidenciar los objetivos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.	Para orientar al docente sobre las acciones (actividades, preguntas, recursos etc.) que debe llevar a cabo en el aula y que estas acciones sean coherentes con los objetivos de enseñanza.
El diseño permite abordar uno o varios aspectos de un objeto matemático, por medio de tareas mediadas por el docente.	Determinar qué aspectos específicos (temáticas) aborda de un objeto matemático, permitiéndole al estudiante explorar diferentes aspectos de un objeto matemático.
Da seguridad al profesor de matemáticas al abordar una temática en el aula.	Proyecte claridad en los temas que se quieren trabajar, y pueda establecer qué tipo de actividades, preguntas, recursos etc. se deben utilizar para que el estudiante lleve a cabo procesos matemáticos que permitan cumplir los objetivos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

2.2 ¿QUÉ SE DEBE TENER EN CUENTA A LA HORA DE DISEÑAR UNA PROPUESTA DE INTERVENCIÓN EN EL AULA?

En este interrogante se dio la necesidad de conversar sobre el proceso de formación que se ha llevado, identificando modelos metodológicos utilizados, teorías estudiadas, propuestas realizadas durante las prácticas docentes, etc. Y aunque son diferentes, convergen en puntos comunes, los cuales permitieron llegar a los siguientes acuerdos en cuanto al diseño: entonces, después de una negociación se establecen diferentes criterios para organizar el proceso de diseño:

2.2.1 Establecer qué aspecto del objeto matemático se va a trabajar.

Para abordar este aspecto, se considera necesario establecer la relación con los Lineamientos y los Estándares Curriculares de Matemáticas, también se identifica que pensamiento matemático se puede desarrollar con el objeto matemático escogido. Por otro lado se debe determinar qué aspecto de las curvas se quiere trabajar, dado que esto nos permitirá plantear unos objetivos de enseñanza–aprendizaje de las matemáticas. En este proceso de establecer qué aspecto de las curvas se quiere abordar se hace necesario realizar una revisión teórica que nos de claridad **(Momento 3)**.

Establecer qué aspecto de las curvas se quiere abordar es elemento principal, que implica identificar no solo que tanto se sabe cómo profesor, sino como se va a llevar ese aspecto a la clase de matemáticas. Por esta razón, al definirlo se presentaron algunas discusiones, guiadas por interrogantes como¿En qué nivel de la educación básica y media se puede abordar las curvas? ¿Qué temáticas se pueden abordar en relación con las curvas? ¿Qué pensamiento matemático me permite desarrollar el trabajo con curvas? ¿En qué Estándares Curriculares se hace referencia a las curvas? ¿Qué aspectos de las curvas se trabajan en la escuela?...

Estos interrogantes generaron conversaciones que permitieron, no solo poner en juego los conocimientos de dos profesionales, sino además dejar en evidencia que aunque el proceso de formación como docentes de matemáticas se llevó desde diferentes enfoques didácticos, los planteamientos convergen en la propuesta metodológica de los Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Por ello, se coincidió en aspectos de la malla curricular, de las temáticas que se abordan en los diferentes niveles y en el enfoque de resolución de problemas. Ahora, la gran pregunta *¿Qué aspecto de las curvas se trabajará?*

Para responder a esta pregunta se tiene en cuenta:¿Qué es una curva?, ¿Qué aspectos caracterizan lo que se quiere abordar como curva?, A través de la historia ¿Cómo se interpretó y se trabajó la curva? Y ¿Qué problemas matemáticos generaron la necesidad de tomar curvas? Estas preguntas nos llevaron a la formulación del trabajo con la trisección de ángulo (**Momento 1)**, por diferentes razones:

Tabla 2: Aspectos generales que se presentaron para determinar el aspecto de las curvas. (Conversación Asesoría 3)

Propuesta	¿Por qué se pensó esto?	Qué implicaciones tenía.
Abordar el problema clásico de la trisección del ángulo.	Se trabajó en los diferentes seminarios de la especialización y generó impacto, por lo tanto se quiere transmitir esa experiencia.	Se identifica que dicha situación abarca aspectos de la historia de las matemáticas como conceptos geométricos. Sin embargo, este problema requiere para su solución una demostración con rigor matemático que implica preconceptos tanto en construcciones geométricas, en procesos de demostración y en representaciones graficas (construcción).
	Se considera que desde la primaria hasta el bachillerato se aborda en la clase de matemáticas los “ángulos”. Por lo tanto se considera que puede ser un tema familiar para los estudiantes, que se puede abordar en diferentes niveles y que permite contar con conceptos previos por los estudiantes.	Se debía identificar en que grados se podía aplicar la propuesta, estableciendo una relación entre los contenidos que se abordan en el grado y los contenidos que se abordan con el problema.
	Es un tema que permite abordar diferentes pensamientos matemáticos (Espacial, numérico, métrico y variacional)	El problema de la trisección del ángulo implica abordar los siguientes aspectos: - Ángulos - Medida de ángulos - Teorema de Tales - Relaciones proporcionales - Razones - Variaciones

		- Rectas paralelas y perpendiculares - Nociones geométricas fundamentales.
	Se presta para trabajarlo desde la resolución de problemas.	Se debe plantear una situación problema que sea global y que genere sub problemas. Donde se piensa en proponer una situación que involucre no solo la trisección de un ángulo, sino la generalización de la división de un ángulo en *n* partes.

Esta propuesta lleva al profesor a probar cada una de las acciones que realiza, porque de cierta manera "*Uno no enseña lo que no maneja, o a veces lo enseña mal" (conversación 4)*, y por ello, nos pusimos a la tarea de recrear una situación que le generará la necesidad al estudiante de trisecar un ángulo y llevarlo a un proceso de generalización, determinando la forma de dividir cualquier ángulo en *n* partes iguales.

En este momento se reconoce que pensar en una situación que permita llevar al estudiante a cuestionarse sobre la necesidad de trisecar un ángulo, es una tarea muy compleja que implica buscar en la Historia de las Matemáticas cuáles fueron las causas que llevaron al hombre a cuestionarse sobre dicho problema. Lo que nos llevó a identificar en que contextos se hace necesario trabajar con ángulos específicamente como en la orientación y ubicación espacial en el mar o en aire, en el cine, en el cálculo de posiciones utilizando coordenadas, para la construcción de polígonos regulares, entre otros.

Sin embargo, en esta parte del camino, sentimos que llegamos al final de una lisa y pavimentada carretera, para enfrentar una trocha de piedras grandes que presenta varios desvíos, y es necesario determinar qué dirección tomar; por ello se pensó en algunos aspectos de la propuesta "*la trisección del ángulo*" que nos hicieron dudar y que de cierta manera nos llevó a pensar en cambiar la ruta. Dentro de estas consideraciones tenemos:

Tabla 3: Discusiones que se presentaron alrededor de las implicaciones del problema de la trisección del ángulo. (Conversación 5)

Propuesta	¿Por qué se pensó esto?	¿Qué implicaciones tenía?
No abordar El problema clásico de la trisección del ángulo.	Cuando nosotros bisecamos no necesitamos utilizar alguna curva (solamente la circunferencia), entonces porque queremos llevar la idea que para trisecar sí.	El bisecar un ángulo no implica la construcción de una curva, lo podemos hacer de la forma Euclidea. Si se le mostraba al estudiante que se puede bisecar con un conjunto de pasos porque para trisecar no.
	El problema de la trisección del ángulo implica: Construir una curva, la cuál puede ser la de Dinostrato, la de Pascal o la de Nicomedes.	La construcción de la curva de Dinostrato es un proceso complejo, que implica un conocimiento amplio y por ende un dominio del tema.
	La construcción de un punto perteneciente a la curva, implica no el uso de una curva sino que dicha curva la establece relaciones proporcionales.	Se debe demostrar que en realidad ese punto pertenece a la curva, lo cual es un proceso igual de complejo que la misma construcción de la curva
	Es muy prematuro enseñar la construcción de la curva de Dinostrato, o de Pascal o de Nicomedes etc., como medio para la trisección del ángulo.	Hace poco estamos familiarizados con la construcción de tal curva y es algo que aunque sabemos manejar, se es consciente que aún no se domina totalmente.
	No es acertado, que se proponga un problema a los estudiantes que no tenga solución.	Más que en encontrar un valor, lo que se quiere es que el estudiante identifique el proceso por el cual geométricamente se triseca un ángulo y así poder llegar a generalizar la división de un ángulo en partes iguales. Por ello, al pensar en que la única solución que conoce el docente requiere de una demostración

		geométrica acompañada de una construcción, dificulta la propuesta de intervención ya que implica el pensar cómo explicar dicha construcción.
	Se debe tener un conocimiento y manejo amplio de la construcción de la curva.	Ello implica saber: - Paso a paso la construcción de la curva y que condiciones (proporciones) cumplen los puntos que pertenecen a la curva. - El cómo la curva soluciona el problema de la trisección del ángulo. - Los argumentos que justifican la construcción. - La lógica de la demostración.
	La construcción de la curva es un proceso complejo para nosotras y se considera que más aún para los estudiantes.	La construcción de la curva de Dinostrato resultará ser un problema más para resolver el problema de la trisección del ángulo

De acuerdo a lo anterior, se intenta esquivar el problema (**Momento 2)**, dado que la mayor dificultad es el pensar cómo hacerlo entendible a los estudiantes, con la implicación de que fue bastante complejo entenderlo:

> *"Somos muy ´primíparas´ para enseñar tal curva, apenas nosotros la aprendimos, teniendo en cuenta que la propuesta que nosotras queremos hacer es trabajar la curva, y para trisecar el ángulo con esa curva es muy complicado. Apenas la estamos aprendiendo y ya enseñarla, necesitamos conocerla al derecho y al revés" ¿Cómo mostrarle la trisección del ángulo sin la curva? (Conversación 3)*

Por otro lado, se cae en el error de pensar que la forma en que aprendimos a solucionar el problema de la trisección del ángulo con curvas mecánicas es la forma de enseñarles a los estudiantes y dado que fue compleja, pensamos que es casi imposible llevarla al aula de clase. Sin embargo, esta reflexión nos permitió evidenciar y sentir la necesidad de hacer la solución del problema de la trisección del ángulo comprensible para los estudiantes, lo que se denomina como Transposición Didáctica (Chevallard, (1991)):

> *Si yo le voy a mostrar la curva de Dinostrato va a ser un problema más para resolver el otro problema (la trisección del ángulo) Cómo le vamos a mostrar la trisección del ángulo, si como nosotros la conocemos es una manera muy difícil y nosotros no se la podemos mostrar como la aprendimos.(Conversación 3)*

En este momento, se reflexiona sobre *¿Cuál es la idea de matemáticas que tenemos y que de cierta manera se proyecta en nuestras prácticas docentes?* Porque al parecer se tiene en mente una matemática exitosa, porque esto es lo que hemos construido desde nuestra formación y no queremos mostrar en el aula una matemática no exitosa. Entonces, esta discusión propicia una reflexión sobre la idea de matemáticas que se está llevando a los niños, una matemática perfecta, sin errores, que solo la pueden comprender y manejar cierto grupo de personas "inteligentes".

En este sentido, se hace necesario iniciar una búsqueda de documentos (**Momento 3)** que nos permitan conocer cómo fue que abordaron el problema de la trisección del ángulo los antiguos matemáticos, y porqué establecieron que era un problema irresoluble[2].

Por lo tanto, después de hacer la respectiva indagación se validan construcciones y se concluye que este problema permite abordar La curva como un recurso utilizado para generar la solución de la trisección, identificando dos momentos cruciales en el proceso de solución: El primero, abordado a partir del uso estricto de la regla y el compás, y el segundo haciendo uso de curvas mecánicas.

2.2.2 Identificar la población

Dado que ya se tenía claro que se va a trabajar el problema de la trisección del ángulo, se inicia la tarea de caracterizar tanto el contexto curricular donde se aplicara el diseño como la población. En este sentido se presentan discusiones sobre la implicación de las

[2]Esta idea se amplía en el Capítulo 3 que hace referencia a algunos aspectos revisados sobre el problema de la trisección del ángulo.

temáticas que se abordan en la solución del problema identificando desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Curriculares de Matemáticas (MEN, 2003) qué Pensamientos Matemáticos y Estándares pueden desarrollar alrededor del trabajo con el problema de la trisección del ángulo. En esta parte del proceso se identifica que este tipo de decisiones no son libres y están condicionadas según dos ámbitos constitucional e institucional.

Tabla 4 Paralelo entre los Pensamientos Matemáticos y los Estándares que se asocian al trabajo con la trisección del ángulo.

	Pensamientos Matemáticos Lineamientos Curriculares en matemática (1996)	**Estándares curriculares de matemáticas (2003)**
8° y 9°	Pensamiento Espacial y sistemas geométricos.	Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.
	Pensamiento métrico y sistemas de medida	Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.
	Pensamiento Numéricos y sistemas numéricos	Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
10° y 11°	Pensamiento Numéricos y sistemas numéricos	Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.
	Pensamiento Espacial y sistemas geométricos.	Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias
	Pensamiento métrico y sistemas de medida	Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.

En este sentido, se identifica que la propuesta se puede aplicar en los grados desde 8° a 11° teniendo en cuenta que para abordar el problema de la trisección del ángulo se deben contar con unos preconceptos.

2.2.3 Establecer los objetivos de enseñanza-aprendizaje de la propuesta.

Se reconoce, que al empezar a pensar en los objetivos de la propuesta, se hizo necesario ponernos en el papel del estudiante y pensar por un momento qué voy aprender con los que presenta el profesor. En este sentido, llegamos a la conclusión de que con el problema de la trisección del ángulo no se quiere enseñar ningún aspecto del objeto matemático Curva, sino que el objeto matemático es el medio por el cual se quiere propiciar una discusión que permita reconocer que existen diferentes respuestas para un mismo problema, y que dichas requieren de un proceso de argumentación y demostración a partir del uso de diferentes representaciones, ya sean algebraicas y/o geométricas.

Así mismo, se quiere abordar una discusión sobre el problema de la «exactitud» en el desarrollo Histórico de las Matemáticas y más específicamente en el proceso de medición de ángulos. Finalmente, se quiere evidenciar que en el proceso Histórico de las matemáticas existieron problemas irresolubles y que la idea de unas matemáticas perfectas, exactas y que tienen una solución para todos los fenómenos es discutible, dando a conocer a los estudiantes una mirada humana de las matemáticas.

Estos objetivos de la propuesta, fueron pensados y formulados, porque reflejan parte de las reflexiones que se han presentado a lo largo del proceso, y hacen parte de nuestra experiencia como profesores enfrentándonos al problema de la trisección del ángulo tomando por un momento la postura del estudiante. Por lo tanto, estos objetivos que se quieren alcanzar con los estudiantes, inicialmente los alcanzamos como profesores.

2.2.4 Realizar un primer borrador del diseño.

Al realizar un esquema borrador se presentó una tarea que para el profesor implica pensar que situaciones hacen necesario la aplicación del objeto matemático. En este sentido, se debía pensar cómo y cuándo se hizo necesario trisecar el ángulo. Inicialmente se pensó en situaciones donde fuera necesario trisecar el ángulo, como por ejemplo:

***Embarcación perdida en el océano**:*

En cierta expedición, un grupo de Biólogos estaban estudiando el comportamiento de una especie desconocida de peces. En una tormenta el barco recibió varios impactos con unas olas muy grandes y fuertes, y a causa de eso el sistema satelital de ubicación se dañó por completo, y aunque los motores servían a la perfección y tenían bastante combustible, no sabían qué dirección tomar. Uno de los biólogos encontró un plano del océano el cual estaba representado por medio de coordenadas polares, lo que implicaba leer ángulos, y como no tenían ni siquiera una brújula, les toco construir un transportador. Una vez analizado el mapa tenían que medir con precisión un ángulo de 20 grados. ¿Es posible construir un transportador que mida con precisión un ángulo de 20 grados? Se preguntó el biólogo y en sus intentos se daban cuenta que al no ser precisos se desviaban demasiado, al desvaírse gastaban el combustible y temían quedar perdidos en el océano.

Esta situación, llevaba a que el estudiante se cuestionara sobre cómo fue que construyeron un instrumento que usualmente lo utilizan en clase de matemáticas, el cual es el transportador y ver que el trabajar con ángulos se evidencia en diferentes contextos donde pueden ser muy útiles si se saben utilizar. Sin embargo, al enfrentarnos a dicha situación, nos dimos cuenta que la situación implicaba explicar el manejo de coordenadas polares y el hecho de construir el transportador no le solucionaba el problema porque tenía otras variables como el determinar los puntos cardinales; por otro lado, se consideró que dicha situación no era de interés para los estudiantes y por lo tanto se descartó. (**Momento 5)**

Esta tarea hace parte del diseño, dado que el pensar una situación no es un ejercicio espontáneo, además se reconoce que era necesario indagar cómo se puede vincular la Historia de las Matemáticas a una propuesta en el aula. Por ello, se consulta en varios documentos los diferentes usos de la Historia de las Matemáticas y buscando ejemplos donde hicieron propuestas curriculares se encuentra que (Furinghetti, 2011) presenta una propuesta de intervención en el aula basada en la acción de reconstruir objetos del pasado como pinturas, donde se evidencia una conexión entre el arte y las matemáticas, así mismo mostrar el sentido humano de las matemáticas.

La propuesta que presenta (Furinghetti, 2011) busca principalmente recrear pinturas de fuentes originales donde los estudiantes crean e imaginan historias alrededor de imágenes, proponiendo personajes, dándole valor a los objetos que rodean las imágenes con la condición de utilizar dentro de sus relatos argumentos matemáticos. Dentro de esta propuesta, encontramos la siguiente imagen la cual nos llamó la atención y la consideramos pertinente para generar un contexto interesante para los estudiantes:

Ilustración 1 Imagen extraída de (Furinghetti, 2011)

Esta imagen, nos llamó la atención, y el primer ejercicio que realizamos fue recrear el contexto de la imagen, donde se resalta: la situación está basada en una guerra donde se evidencia el uso de instrumentos similares a un compás, además vemos en la imagen que dicho instrumento es utilizado para determinar la dirección del cañón que utilizan para atacar al enemigo. Por otro lado, ubicamos el contexto de la imagen en una época de castillos y pueblos con casas hechas de piedra, donde utilizaban cascos y armaduras, además podemos relacionar que la persona que maneja el instrumento tiene una gran responsabilidad en la guerra, ya que si no determina el punto débil o donde puede hacer más daño pueden perder la guerra.

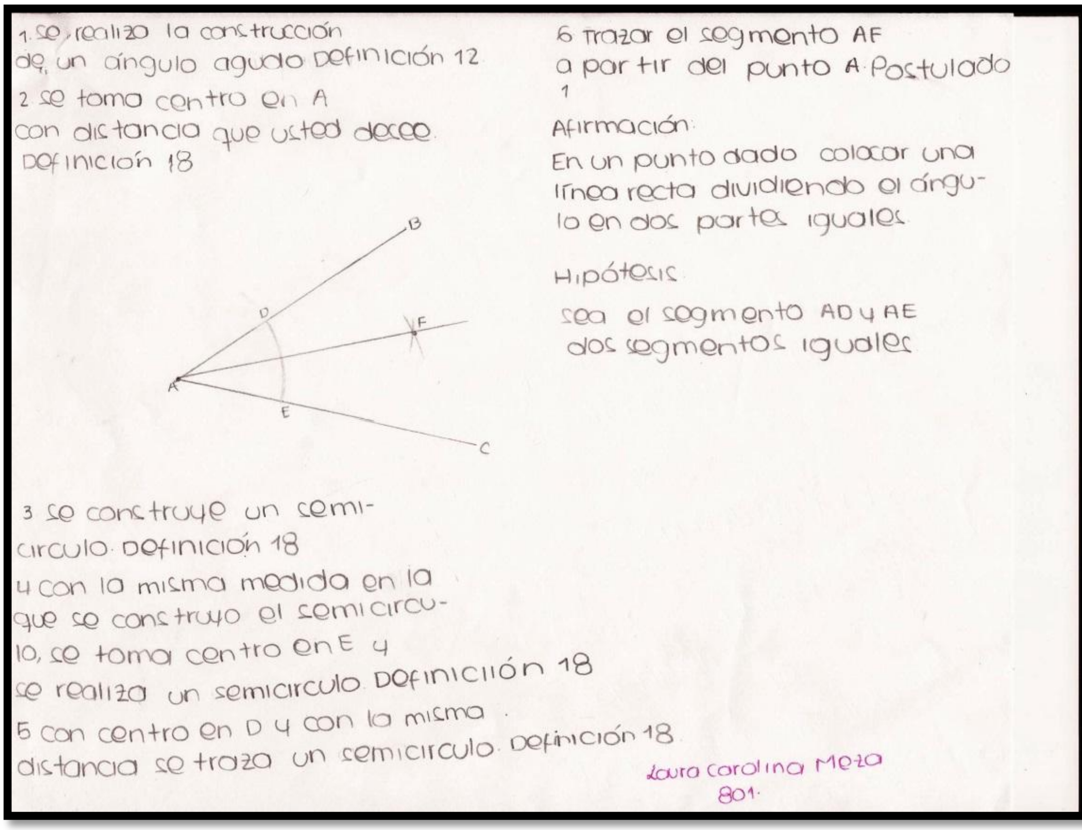
Al ver que dicha imagen podía tener diferentes historias, diferentes personajes y diferentes contextos, se evidencia que notablemente todas las historias que se recreen pueden converger en lo que más sobresale de la imagen, que es la persona que maneja un instrumento similar a un transportador. Por ello, se piensa en agregar dicho elemento al diseño, con el objetivo de invitar a los estudiantes a generar el contexto y recrear una historia con la condición de utilizar argumentos matemáticos.

Seguido a esto, se empieza a proponer una ruta en el diseño reconociendo que se deben formular preguntas que guíen el trabajo del estudiante, para ello empezamos a cuestionar acciones que se evidencian en la imagen como por ejemplo: ¿Cómo surgió la necesidad de medir ángulos?, ¿Cómo y por qué surgió el transportador? ¿Por qué el transportador tiene como referencia una circunferencia? Etc. el formular estas preguntas nos permiten pensar dentro del diseño un espacio de discusión con los estudiantes sobre estos aspectos.

Por tal razón, se pidió la colaboración de un grupo de niños de grado octavo, donde previamente se habían hecho trabajos de exploración utilizando la regla y el compás en el desarrollo de las primeras proposiciones del libro I de Los Elementos de Euclides (construcción de un triángulo equilátero, trasladar un segmento a un punto dado, dividir un segmento en dos partes iguales). Esto les dio herramientas a los niños para enfrentarse a diferentes problemas geométricos, utilizando únicamente la regla y el compás:

Problema 1: Se le pide a los estudiantes dividir un ángulo en dos partes iguales, utilizando las definiciones y teoremas del libro 1 de los Elementos de Euclides trabajados en clases anteriores.

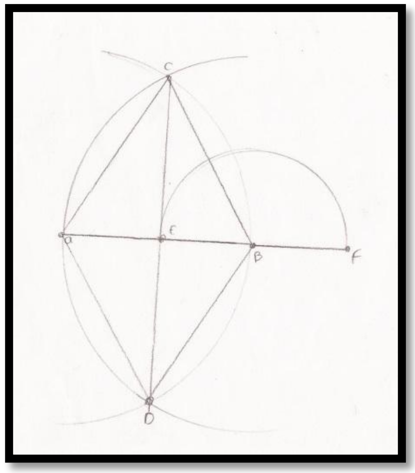
Ilustración 2: Desarrollo del problema de dividir un ángulo en dos partes iguales realizado por estudiante de grado octavo.


1. se realizo la construcción de un ángulo agudo Definición 12
2 se toma centro en A con distancia que usted decee. Definición 18
3 se construye un semi-circulo. Definición 18
4 con la misma medida en la que se construyo el semicircu-lo, se toma centro en E y se realiza un semicirculo. Definiciión 18
5 con centro en D y con la misma distancia se trazo un semicirculo. Definición 18
6 Trazar el segmento AF a partir del punto A. Postulado 1
Afirmación:
En un punto dado colocar una línea recta dividiendo el ángu-lo en dos partes iguales.
Hipótesis
sea el segmento AD y AE dos segmentos iguales
Laura Carolina Meza
801.

Al enfrentarse a este problema, se resaltó la manera en que el estudiante utiliza las definiciones para explicar un conjunto de pasos que conllevan a la construcción geométrica de la bisección de un ángulo, sin embargo dicho problema carece de una demostración donde se evidencie que la medida de los ángulos es la misma.

Problema 2: Se le pide a los estudiantes de grado octavo dividir en tres partes iguales un segmento dado. Donde se identificó dos formas de abordar el problema, y como es muy difícil para los chicos trabajar de manera individual, en general se evidencio que:

Ilustración 3: Propuesta de estudiante de grado octavo para dividir un segmento en tres partes iguales.

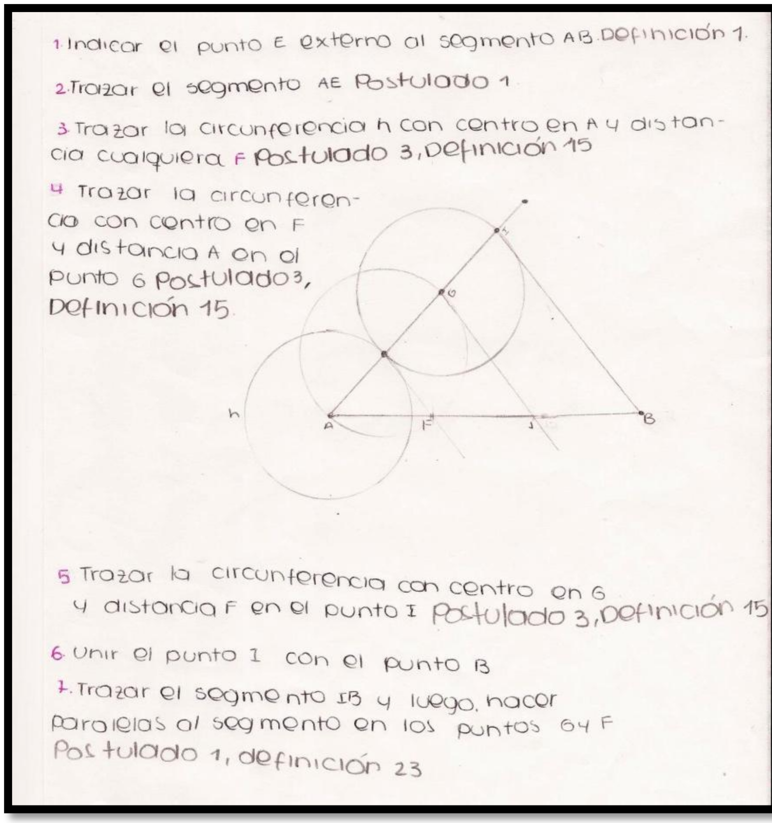


El estudiante aborda el problema de dividir un segmento en tres partes iguales, tomando como referencia un segmento dado, luego lo biseca utilizando la intersección de dos circunferencias con el mismo radio, y a parir de ello prolonga uno de los lados, indicando que es la tercera parte. En esta explicación el estudiante aclara que dado cualquier segmento puede sacar la tercera parte.

Esta forma de razonar del estudiante, nos guía sobre la importancia de las preguntas orientadoras en el diseño y la claridad a la hora de presentar una tarea, ya que al no haber condicionado la situación, el estudiante podía abordar el problema sin restricciones. Por ello, se hace necesario reformular las preguntas que posiblemente orienten el diseño en el proceso de la trisección de un ángulo.

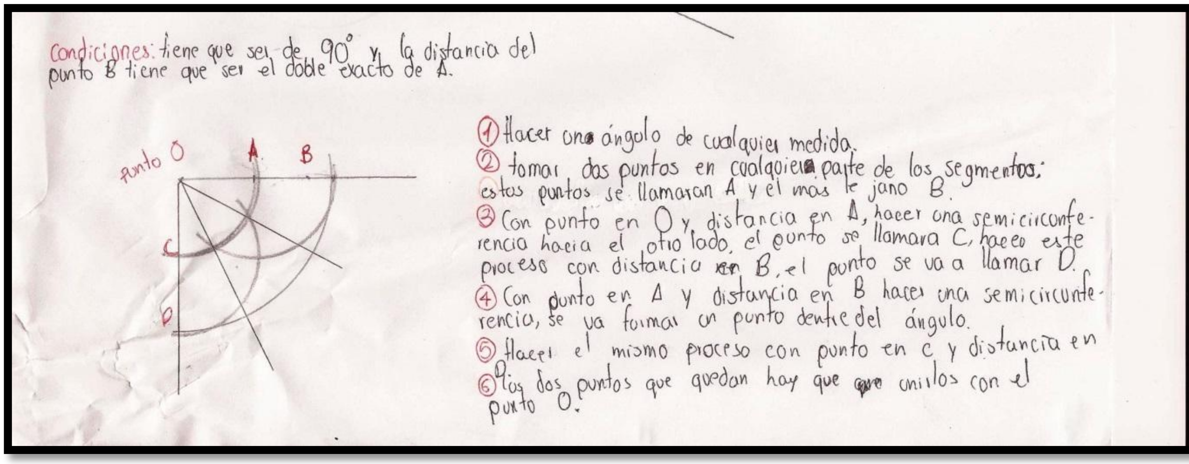
También, se hace referencia a otra forma de abordar el problema, donde el estudiante hace una indagación en la web sobre como dividir un segmento en tres partes iguales, y comenta en su explicación, que encuentra un video en YouTube que orienta su trabajo. Sin embargo, utiliza en su desarrollo lo trabajado dentro de la clase y trata de explicarlo utilizando sus palabras. Lo que es importante, ya que logra utilizar las definiciones y postulados en el desarrollo del problema.

Ilustración 4: Desarrollo del problema de dividir un segmento en tres partes iguales utilizando el Teorema de Tales, realizado por un estudiante de grado octavo.



Problema 3: Se le pide a los estudiantes después de haber desarrollado los problemas anteriores dividir en tres partes iguales un ángulo. En el desarrollo de este problema se evidenció que la mayoría de estudiantes abordan el problema utilizando inicialmente un ángulo de 90°, guiados por la forma de bisecar un ángulo, proponen algunas construcciones que permiten resolver el problema. En esta parte el estudiante da a conocer los pasos con regla y compás, sin embargo es general que no utilicen argumentos para probar que cada ángulo subdivido es la tercera parte del ángulo mayor. Luego se le pregunta si considera que dicha construcción es posible para cualquier ángulo, y empiezan a probar con diferentes amplitudes utilizando como referencia el compás.

Ilustración 5: Desarrollo del problema de trisecar un ángulo, tomando como referencia el ángulo de 90°. Realizado por un estudiante de grado octavo.

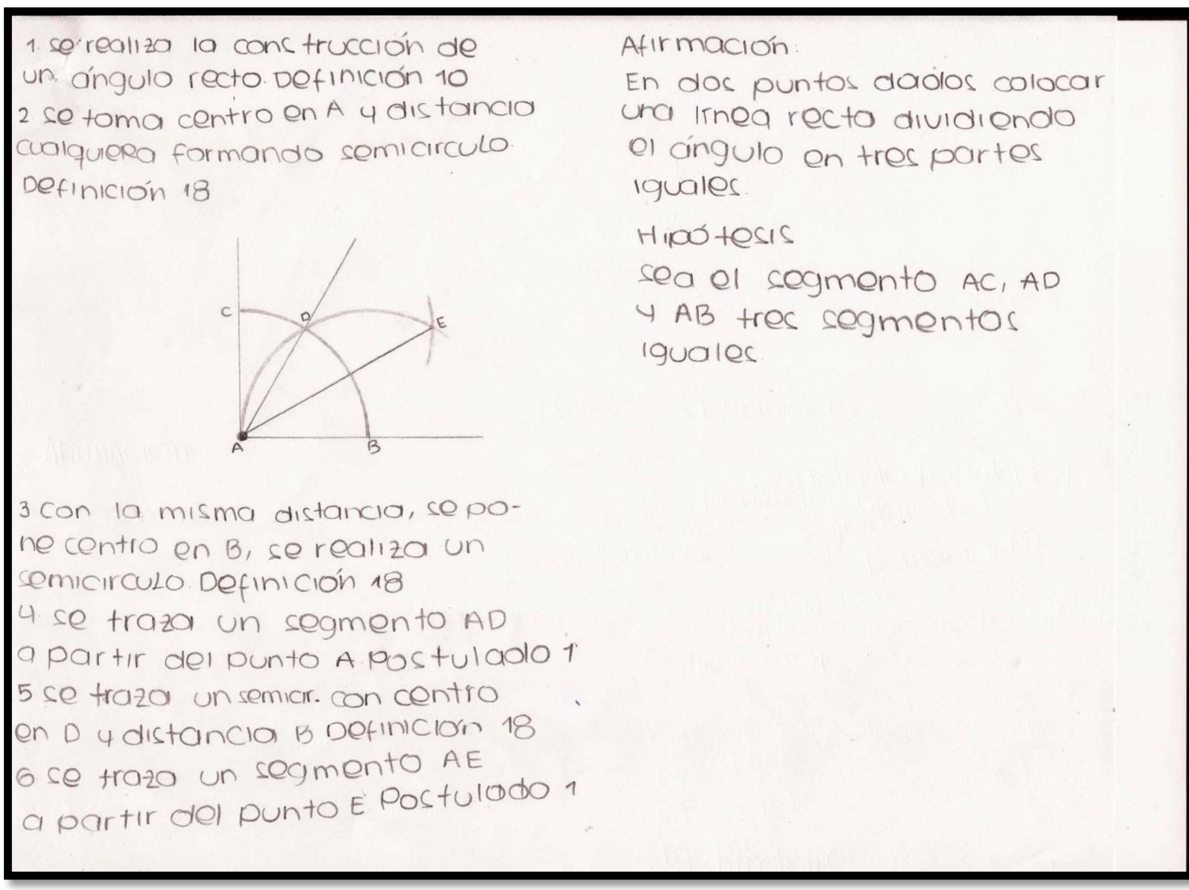


Condiciones: tiene que ser de 90° y la distancia del punto B tiene que ser el doble exacto de A.

punto O A B C D

① Hacer una ángulo de cualquier medida.
② tomar dos puntos en cualquiera parte de los segmentos; estos puntos se llamaran A y el mas lejano B.
③ Con punto en O y distancia en A, hacer una semicircunferencia hacia el otro lado, el punto se llamara C, hacer este proceso con distancia en B, el punto se va a llamar D.
④ Con punto en A y distancia en B hacer una semicircunferencia, se va formar un punto dentro del ángulo.
⑤ Hacer el mismo proceso con punto en C y distancia en D.
⑥ Los dos puntos que quedan hay que unirlos con el punto O.

Ilustración 6: Desarrollo del problema de trisecar el ángulo. Realizando circunferencias. Realizado por estudiante de grado octavo.



1. se realiza la construcción de un ángulo recto. Definición 10
2 se toma centro en A y distancia cualquiera formando semicirculo Definición 18

C D E A B

3 Con la misma distancia, se pone centro en B, se realiza un semicirculo. Definición 18
4. se traza un segmento AD a partir del punto A Postulado 1
5 se traza un semicir. con centro en D y distancia B Definición 18
6 se traza un segmento AE a partir del punto E Postulado 1

Afirmación:
En dos puntos dados colocar una linea recta dividiendo el ángulo en tres partes iguales.

Hipótesis
sea el segmento AC, AD y AB tres segmentos iguales

Ilustración 7: Propuesta para la solución al problema de trisecar un ángulo. Realizado por estudiante de grado octavo.

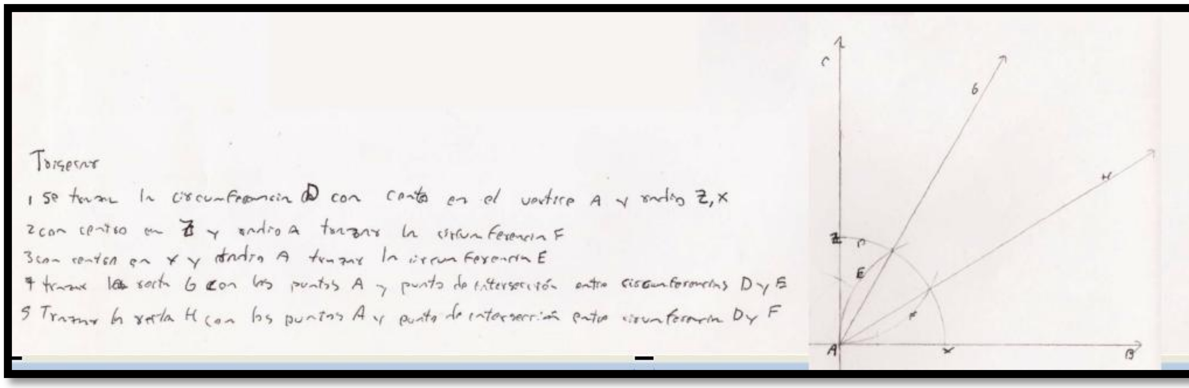


Ilustración 8: Desarrollo del problema de trisecar un ángulo. Realizado por estudiante de grado octavo.

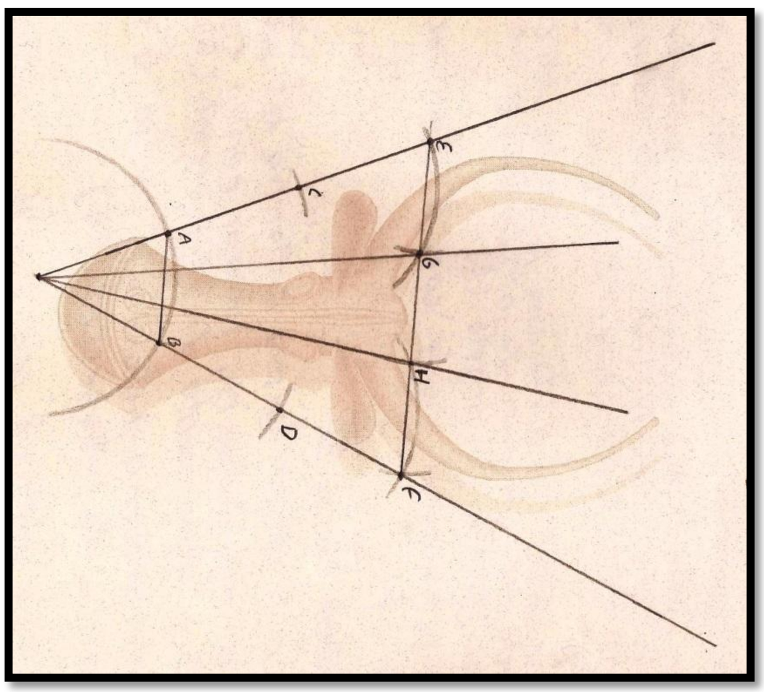
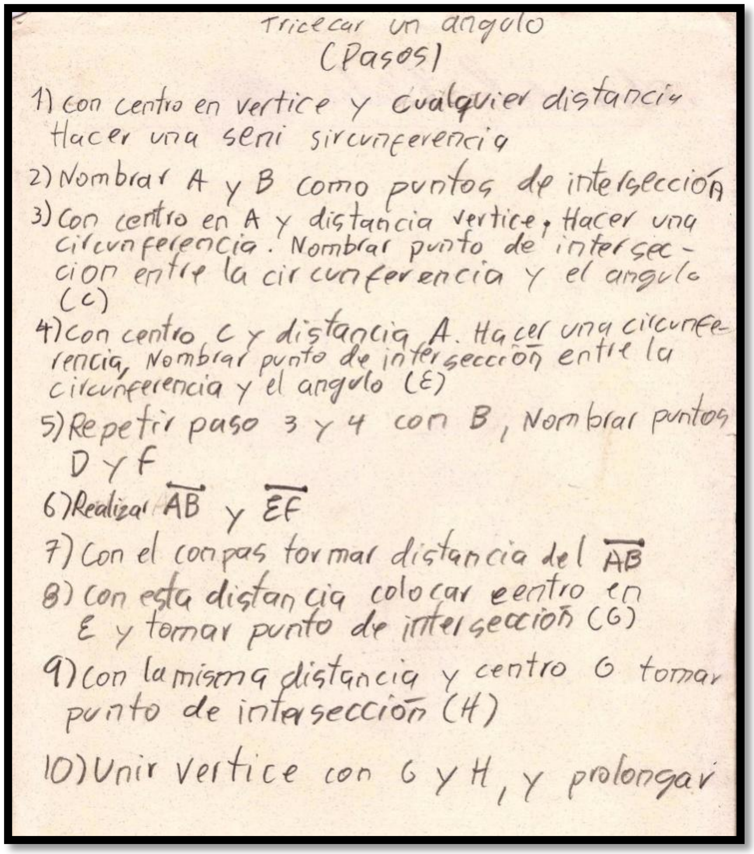


Ilustración 9: Explicación del proceso de construcción (ilustración 8) desarrollo del problema de la trisección


Tricecar un angulo
(Pasos)
1) con centro en vertice y cualquier distancia Hacer una semi sircunferencia
2) Nombrar A y B como puntos de intersección
3) Con centro en A y distancia vertice, Hacer una circunferencia. Nombrar punto de intersección entre la circunferencia y el angulo (C)
4) Con centro C y distancia A. Hacer una circunferencia, Nombrar punto de intersección entre la circunferencia y el angulo (E)
5) Repetir paso 3 y 4 con B, Nombrar puntos D y F
6) Realizar $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{EF}$
7) Con el compas tomar distancia del $\overline{AB}$
8) con esta distancia colocar centro en E y tomar punto de intersección (G)
9) Con la misma distancia y centro G tomar punto de intersección (H)
10) Unir vertice con G y H, y prolongar

De acuerdo a las propuestas de los estudiantes de grado octavo, se identificó que dentro del diseño debe haber una previa exploración de las definiciones de conceptos geométricos que maneja Euclides en el libro 1 de Los Elementos, ya que estas le permiten al estudiante reconocer que herramientas tiene para resolver el problema. Así mismo, es necesario abordar sub problemas como construir un triángulo equilátero con regla y compás, o como bisecar un ángulo entre otras, ya que por medio de esa exploración el estudiante reconocerá de qué manera utilizar la regla y el compás, de lo contrario no sabrán que camino abordar para resolver el problema de trisecar un ángulo.

2.2.5 Proponer una organización metodológica para llevar la actividad al aula.

En este aspecto, se inicia una conversación alrededor de nuestra experiencia en el aula, identificando qué estrategias se aplican para organizar y desarrollar tareas y actividades de matemáticas. En este sentido, se concuerda con la necesidad que evidencian los estudiantes de socializar su trabajo y de validar sus respuestas a partir de lo que hizo el otro, donde coincidimos en que por lo general un niño no trabaja solo.

Por ello, se propone en el diseño de la propuesta curricular tareas que se desarrollen en equipo y momentos de socialización general. Se descarta absolutamente una producción netamente individual. Por otro lado, se proponen partes del diseño que se espera, se desarrollen cada uno en una sesión de clase teniendo ocho sesiones de clase aproximadamente. Se quiere aclarar que esta propuesta curricular no está sustentada en ningún modelo didáctico específico, pues se puede evidenciar dentro de su estructura los aportes de diferentes posturas del diseño curricular en matemáticas que hacen parte de la formación que cada una de las profesoras ha adquirido.

Por otro lado, se resalta que dentro del diseño el papel del profesor se traslada más a ser un mediador de las discusiones que en el presentador de contenidos matemáticos, donde son las preguntas que formule las que guían el trabajo, que las respuestas que dé a los estudiantes. Ahora, consideramos importante para el desarrollo de las tareas propuestas el rescatar cada uno de los argumentos que den los estudiantes, donde el profesor no debe indicar si son correctos o no, sino invitar al estudiante a llevar un ejercicio de demostración a partir del uso de argumentos que permitan validar una hipótesis dada.

En consecuencia, es necesario aclarar que con la propuesta curricular no se espera que el estudiante aprenda a trisecar ángulos, sino que se genere en la clase de matemáticas discusiones alrededor de la percepción que ellos tiene de las matemáticas, mostrar que hay problemas que son irresolubles y que tardaron muchos años en proponer una solución, y que parte de esta solución esta mediada por una discusión sobre la exactitud. Por esta razón, es importante y fundamental el papel del profesor.

En último lugar, se hace necesario dentro del diseño el uso de Geogebra, cuya función específica es modelar y validar la medición de los ángulos en las diferentes construcciones geométricas, ya que este software permite llegar a las comparaciones cruciales entre el modelo físico (regla y compás) y el mundo abstracto de las matemáticas.

Capítulo 3 REFERENCIA HISTÓRICA AL PROBLEMA DE LA TRISECCIÓN DEL ÁNGULO

Para hacer referencia al problema de la trisección del ángulo, es necesario hacer una mirada al contexto histórico de la época, a los instrumentos que utilizaban y a la geometría que aplicaban. Por ello, inicialmente nos remitimos a Euclides siglo III a.C, quien expone en su libro*Los Elementos* la demostración de proposiciones mediante una forma encadenada de razonamientos deductivos, sin permitirle al lector saber qué instrumentos utiliza, porque nunca hace referencia a estos.

Ahora, cuando Euclides presenta los tres primeros postulados[3] expone las características de ciertos instrumentos que utilizaría para el proceso de construcción y demostración de las diferentes proposiciones; por ejemplo, en el Postulado 1 indica que dados dos puntos se puede trazar una línea recta, y además complementa con el postulado 2, dándole la propiedad a dicha línea recta de prolongarse indefinidamente. Así mismo en la Definición 2 indica que "*Una línea es una longitud sin anchura*" y la Definición 4 "*Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella"* estos argumentos ponen en evidencia la aparición de un instrumentos simple como *"la regla"*, que puede ser tan larga como se quiera, que no tiene medidas y que tendría como función representar geométricamente líneas rectas.

Por otro lado, en el *Postulado 3* hace referencia a la construcción de otro tipo de línea (sin indicar que es una curva) dado un punto como centro y una distancia como radio; así mismo la *Definición 15*indica que un círculo es una figura plana comprendida por una sola línea (llamada circunferencia) de tal modo que todas las rectas dibujadas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí. Esta definición se complementa con el *Postulado 3*, así Euclides de una manera implícita presentó la utilización de un instrumento como el *"compás"* el cual debía tener un punto fijo y de

[3]Principios que se admiten como ciertos sin necesidad de ser demostrados y que sirve como base para otros razonamientos.

cierta manera uno en movimiento, porque tenía la función de plasmar un rastro formando lo que definió como circunferencia. De esta manera como Arenzana (1998) indica "*la geometría griega se había planteado una serie de problemas y los había resuelto con el uso de los utensilios permitidos para las construcciones geométricas, la regla y el compás"* por lo tanto, se tenía una regla y un compás para realizar diferentes operaciones entre magnitudes como suma, resta, multiplicación y división, además construir raíces cuadradas a partir de una unidad de longitud y números de la forma $a + b\sqrt{n}$., donde $a, b\ y\ n$ son racionales.

Sin embargo, los problemas que se presentaban consistían en la realización de un número finito de pasos para demostrar teoremas, haciendo uso de definiciones, postualdos y nociones comunes. No obstante, Arenzana (1998) manifiesta que "*no todas las cuestiones que se planteó la matemática griega se pudieron resolver con las operaciones que permitian realizar la regla y el compás"* porque cuando surgieron los problemas clásicos griegos como la trisección del ángulo, la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo, la regla y el compás no permitían solucionarlos y por ello los catalogaron como imposibles.

En este sentido Rodríguez y Benjamín (S:F) indican que el problema de la trisección del ángulo, consiste en dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales usando únicamente la regla y el compás. Hay varias razones por las cuales este problema difiere de los otros problemas clásicos griegos: primero, no hay una historia real que relate la manera cómo el problema llegó a ser estudiado por primera vez; segundo, es un problema de otro carácter, ya que no es posible cuadrar un círculo ni duplicar un cubo, pero sí es posible trisecar ciertos ángulos.

La primera curva creada para resolver este problema, se atribuye a Hipias de Elis y aparece en el siglo V a.C. Esta curva apareció antes de las cónicas y permitía no solo dividir un ángulo en tres partes sino en cualquier número de partes. En la antigüedad el problema también es resuelto por Arquímedes de Siracusa con su espiral uniforme, por Nicomedes con su Concoide y por Pappus con su Hipérbola. En los últimos cuatro siglos aparecen otros mecanismos y curvas para resolver el problema, tales como la cicloide de Ceva, el caracol y el trisector de Pascal, la trisectríz de Maclaurin entre otras.

En este sentido, Jim Loy (2003) indica que entender el problema de la trisección del ángulo conlleva establecer una relacion entre lo que se podia y no se podia hacer dentro de lo que consideraban como geométria, dado que "*Es mas difícil probar que algo es imposible, lo que es para demostrar que algo es posible"*. Por esta razón, se analiza cuál era la condición que le daba la característica de *"problema imposible"* a los problemas clasicos griegos; por ejemplo en la **Cuadratura del Circulo** el problema radica en construir un cuadrado con la misma área de un círculo dado, donde la imposibilidad estaba en la construcción de una longitud igual a π que a su vez requeria encontrar la raíz de π. Este número, como lo demostró Ferdinand Lindemann en 1882, no se puede contruir con regla y compás, dado que no se puede expresar de la forma $a + b\sqrt{n}$ por lo tanto era un número transcendente.

Por otro lado, estaba el problema de la **Duplicación del Cubo** el cual consistía en encontrar la raíz cúbica de una longitud, raíz cúbica que no se podia construir con la regla y compás. Por lo tanto la imposibilidad de los problemas clasicos griegos la demostraban los matematicos mostrando que no se podian construir con la regla y el compás.

Ahora, el problema de la **Trisección del ángulo** implica la división en tres partes iguales de una longitud de arco, lo que llevaba a pensar en el proceso de rectificación de una curva, ahora como se debía encontrar una relación de ángulos triples[4] se debía solucionar una ecuación cúbica, que como se evidencia en la duplicación del cubo, ya era algo imposible.

Por ello, uno de los cuestionamientos de este trabajo, consiste en pensar como abordaron inicialmente el problema de la trisección del ángulo, utilizando únicamente la regla y el compás y entender *¿Cómo fue que llegaron a la conclusión que no era posible la trisección utilizando la regla y compás?* Este interrogante fue respondido en 1837 cuando el matemático francés Pierre Wantzel (1814-1848) demostró que esto no puede ser. En este

[4]Relación que se deriva de la suma de ángulos $sen\,(a+\ b)\ =\ sin\,(a)\,cos\,(b) - cos\,(a)\,sin\,(b)$ como $sen3a = 3sina - 4sin^3a$

sentido, (Suzuki, 2008) explica que la trisección de un ángulo corresponde a una ecuación cúbica de la siguiente manera:

Dada una circunferencia de centro O y radio unidad, con ángulo central AOC igual a 3θ. Queremos encontrar el punto B en el círculo donde ángulo BOC es igual a θ. Si dejamos caer AD y BE perpendicular OC, tenemos $AD = sin\, 3\theta$y $BE = sen\, \theta$. Estas cantidades se relacionan a través de la identidad: $\boldsymbol{sin\, 3\theta = 3\, sin\theta - 4\, sin^3\theta}$

Desde el ángulo AOC es el ángulo dado, entonces 3θ es una cantidad conocida que podemos designado como l. Así, si las raíces reales del$l = 3x - 4x^3$ no son construibles con regla y compás, por lo tanto se concluye que la trisección del ángulo correspondiente es imposible.

Sin embargo. (Siavash, 2012, enero) aborda una posible solución al problema griego de trisección de un ángulo arbitrario utilizando sólo regla y compás, presentando su prueba algebraica; para ello, considera que si esta construcción requiere de la existencia de raíces racionales de la ecuación cúbica$x^3 - 3x - 1 = 0$, se debe tener en cuenta que Descartes plantea una solución a partir de la intersección de una parábola y una circunferencia, indicando que en vez de enfrentar este problema con una expresión cubica se muestra a depender de la ecuación cuadrática $y^2 - 3 + c = 0$donde c es una constante.

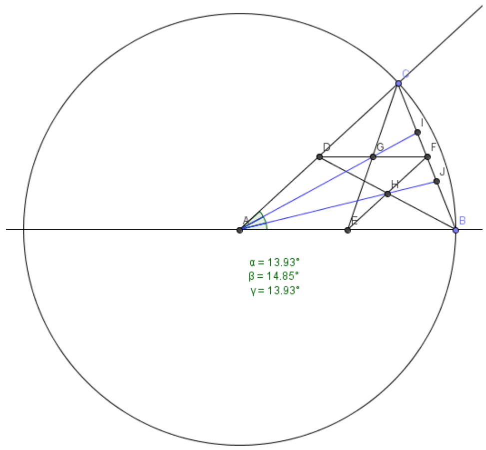
Por ello, se hace referencia a Descartes (1596-1650) que en su libro La Geometría (1637) señalo que para demostrar ciertas construcciones imposibles se debía tener en cuenta que al tomar las longitudes de los segmentos de línea como números reales, era necesario determinar que los diferentes problemas se debían representar de manera geométrica como algebraica, así mismo expresar simbólicamente la solución convirtiendo la expresión algebraica en un procedimiento de construcción geométrica.

Al ver, que hay demostraciones de la posibilidad e imposibilidad del problema de la trisección del ángulo, se busca entender cómo se abordó el problema inicialmente, y para ello, encontramos que Jim Loy (2003) presenta una recopilación de diferentes construcciones donde se intenta trisecar un ángulo utilizando regla y compás y cita trabajos como los de Yates (1942) *The Trisection Problema* , George E, Martin (1998) *Geometric Constructions,* Clayton w. Dodge (1984) *Euclidean Geometry And Transformations*, Nicholas D. Kazarinoff (2003) *Ruler And The Round; Classic Problems In Geometric Constructions* entre otros más, quienes demuestran que la imposibilidad de la trisección del ángulo con regla y compás es una cuestión de exactitud, donde la curva viene a representar una estrategia para la solución de los tres problemas clásicos griegos.

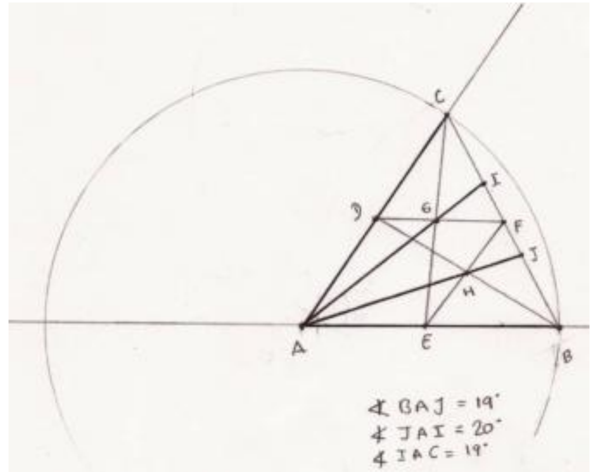
A continuación se presentan algunas de las construcciones que presenta Jim Loy (2003) las cuales se se realizaron con regla y compás **(Momento 6)** y así mismo la modelación en el programa Geogebra:

Construcción 1:

- Sean los puntos A y B y una recta m que pasa por ellos.
- Constrúyase la circunferencia con centro en A y radio AB
- Se ubica un punto C sobre la circunferencia AB
- Se traza una semirrecta que pasa por el centro 'A' y el punto C
- Se construye el segmento CB
- Se ubican los puntos medios D y E de los segmentos AC y AB respectivamente.
- Se traza un segmento que una los puntos C y E y otro que una los puntos D y B
- Se ubica el punto medio F del segmento CB
- Se traza el segmento EF y DF
- Se encuentra el punto de intersección entre el segmento DF y CE, el cual llamaremos G
- De manera análoga al paso anterior, se encuentra el punto de intersección entre el segmento CB y EF, el cual llamaremos H
- Se construye una semirrecta que pase por A y G, y análogamente una semirrecta que pase por A y H.
- Se encuentra el punto de intersección I entre la semirrecta AG y el segmento CB, análogamente se halla el punto de intersección J entre la semirrecta AH y el segmento CB.



Modelo realizado en Geogebra

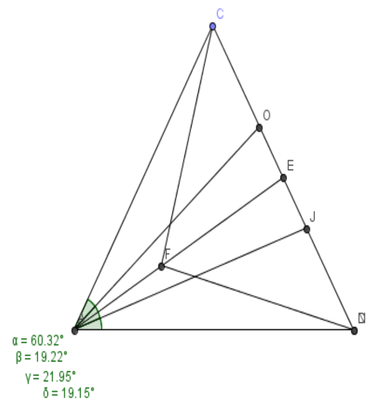


Modelo realizado con regla y compás

Construcción 2:

- Sean los puntos A y B y una recta m que pasa por ellos.
- Constrúyase la circunferencia con centro en A y radio AB.
- Se ubica un punto C y D sobre la circunferencia AB.
- Se construye el segmento AC, AD y CD.
- Se halla el punto medio E del segmento CD.
- Se construye el segmento AE
- Dado el punto E se construye una circunferencia C_E con centro en E y que pasa por el punto D,
- Se halla el punto de intersección entre la circunferencia C_E y el segmento AE llamándose punto F
- Se traza el segmento FC y FD
- Se traza la circunferencia con centro D y radio DE, llamándose C_D
- Se hallan los puntos de intersección de la circunferencia C_D y la circunferencia C_E, llamándose a estos puntos, los puntos G y H
- Se construye la circunferencia C_F con centro en F y radio FC.
- Se traza el segmento AH y FH
- Se halla el punto de intersección J entre los segmentos AH y CD

- Se halla el punto de intersección L entre la recta FH y la circunferencia C_F
- Se traza dos mediatriz, una entre los puntos J y L y otra e los punto L y H
- Se halla el punto de intersección entre las dos mediatrices llamándosele M.
- Se construye la circunferencia C_M con centro en M y radio HM
- Se construye la circunferencia C_J, tiene centro en J y pasa por el punto D
- Se halla el punto de intersección O entre el segmento CD y la circunferencia C_J
- Ángulos.

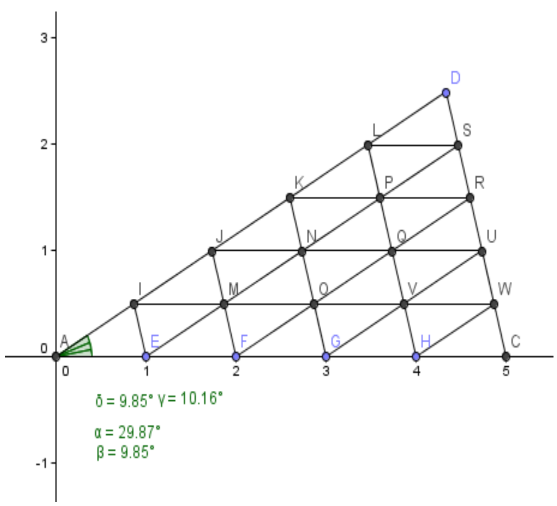


Modelo realizado en Geogebra

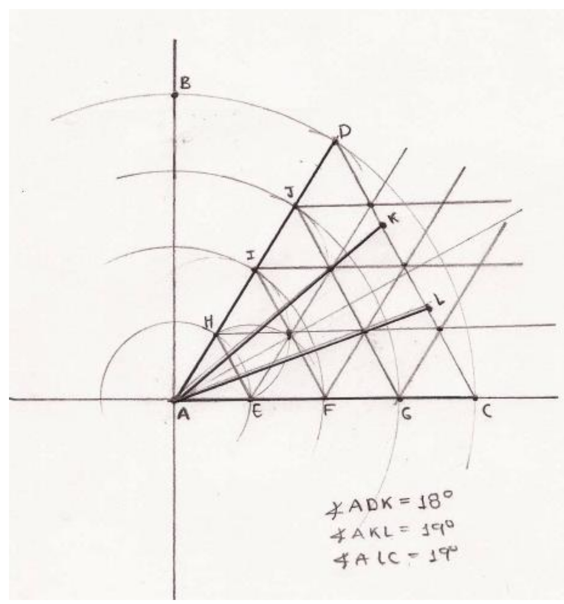
Construcción 3:

- Sea el punto A la intersección entre los ejes y e x y B un punto sobre el eje y
- Sean los puntos A y B y la circunferencia C_A con centro en A y radio AB
- Se halla punto de intersección C entre la circunferencia C_A y el eje x
- Se toma un punto D que este sobre la circunferencia C_A
- Se traza el segmento AD
- Se traza la bisectriz del ángulo $\measuredangle DAC$
- Se marcan los puntos E, F, G y H, todos conservando la misma distancia entre ellos.
- Se trazan cuatro circunferencias con centro en A y que pasan por los puntos E, F, G y H respectivamente.

- Se trazan los puntos I, J, K y L como puntos de intersección entre las circunferencias trazadas en el paso anterior y el segmento AD
- Se trazan rectas paralelas al eje x y a su vez que pasan por los puntos I, J, K, L y D.
- Se traza rectas paralelas al segmento AD y que pasan por los puntos E, F, G y H
- Luego se hallan los puntos de intersección entre las primera recta paralela construida al eje x y que pasa por I y la primera recta paralela construida al segmento AD que pasa por E, luego el punto de intersección entre la primera recta paralela al eje x y la segunda paralela al eje y así sucesivamente hallamos los puntos de intersección M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W.
- Se trazan segmentos que pasan por los puntos de intersección, segmento EI, segmento FJ, segmento GK, segmento HL y segmento CD.
- Ángulos.



Modelo realizado en Geogebra

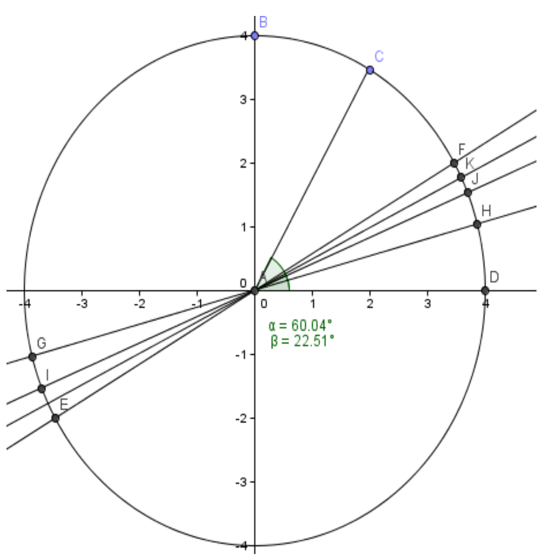


Modelo realizado con regla y compás

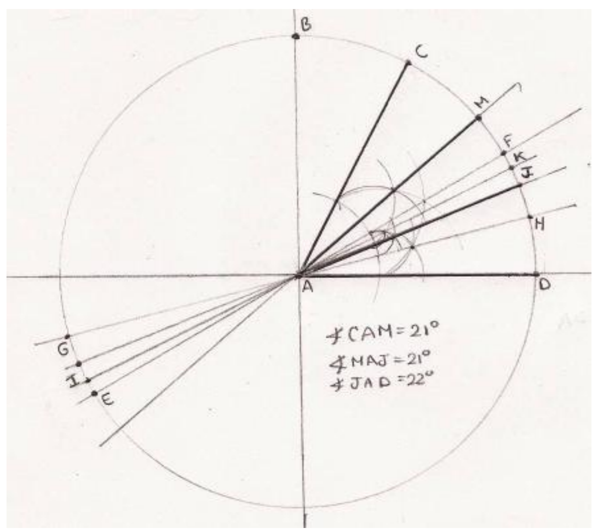
Construcción 4:

- Punto de intersección A entre los ejes x e y
- Se marca un punto cualquier B sobre el eje y
- Se traza la circunferencia C_A con centro en A y radio AB
- Se traza un punto C sobre la circunferencia C_A

- Se halla el punto de intersección D entre el eje x y la circunferencia C_A.
- Se traza el segmento AC
- Se traza la bisectriz de $\measuredangle CAD$
- Se hallan los puntos de intersección E y F entre la circunferencia C_A y la bisectriz anteriormente trazada.
- Se halla la bisectriz F, A y D
- Se hallan los puntos de intersección H y G entre la circunferencia C_A y la bisectriz anteriormente trazada.
- Se halla la bisectriz F, A y H.
- Se hallan los puntos de intersección I y J entre la circunferencia C_A y la bisectriz anteriormente trazada.
- Se halla la bisectriz F, A y J.
- Se hallan los puntos de intersección I y J entre la circunferencia C_A y la bisectriz anteriormente trazada.
- Se halla el punto de intersección K entre la circunferencia C_A y la bisectriz anteriormente trazada.



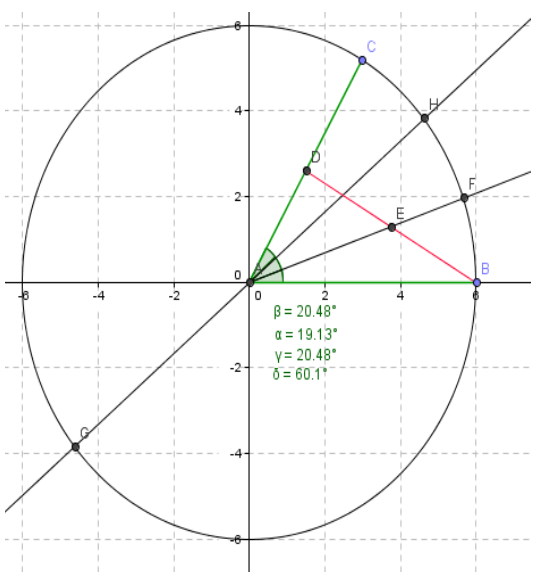
Modelo realizado en Geogebra



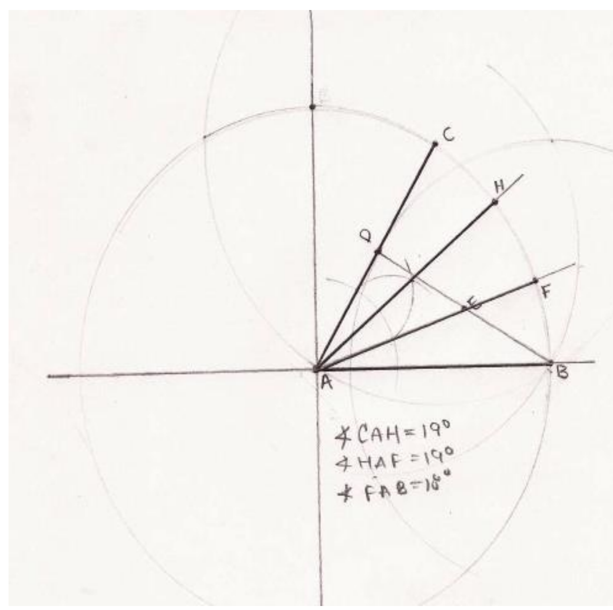
Modelo realizado con regla y compás

Construcción 5:

- Punto de intersección A entre los ejes x e y
- Se marca un punto cualquier B sobre el eje x
- Se traza la circunferencia C_A con centro en A y radio AB
- Se traza un punto C sobre la circunferencia C_A
- Se traza el segmento AB y AC
- Se halla el punto medio C del segmento AC
- Se traza el segmento DB.
- Se halla el punto medio E del segmento DB
- Se traza una semirrecta que pasa por los puntos A y E.
- Se marca un punto de intersección F entre la semirrecta anteriormente trazada y la circunferencia C_A.
- Se traza una bisectriz entre los puntos C, A y F.
- Ángulos.



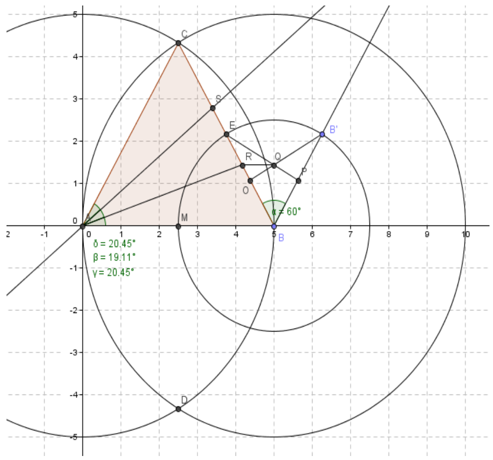
Modelo realizado en Geogebra



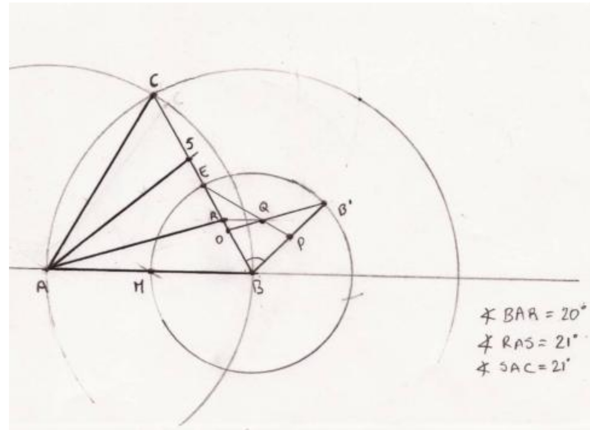
Modelo realizado con regla y compás

Construcción 6:

- Punto de intersección A entre los ejes x e y.
- Se marca un punto cualquier B sobre el eje y.
- Se traza la circunferencia C_A con centro en A y radio AB.
- Se traza la circunferencia C_B con centro en B y radio BA.
- Se hallan los puntos de intersección A, B, C y D entre las circunferencias C_A y $C_{B.}$
- Se construye el triángulo equilátero ABC.
- Se halla el punto medio E del segmentos CB.
- Se construye la circunferencia C_B con centro en B y radio BE.
- Se marca el punto de intersección M entre el eje x y la conferencia C_B.
- Se marca un punto B’ que este sobre la circunferencia $C_{B.}$
- Se traza una semirrecta que pase por los puntos B y B’.
- Se halla el ángulo E, B y B’
- Se hallan los puntos intersección O y P del ángulo construido y la los segmentos BE y BB’
- Se traza el segmento OB’ y EP.
- Se halla el punto de intersección Q entre los segmentos OB’ y EP.
- Se construye una recta paralela al eje x que pase por Q y se halla el punto de intersección R entre la paralela y el segmento BC (lado del triángulo)
- Se traza un segmento cuyos extremos son los puntos A y R.
- Se construye la bisectriz del ángulo RAC.
- Se halla el punto de intersección S de la bisectriz con el segmento BC (lado del triángulo)
- Ángulos.



Modelo realizado en Geogebra

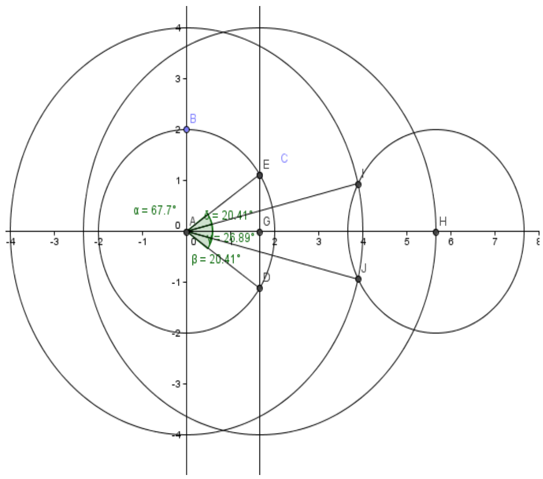


Modelo realizado con regla y compás

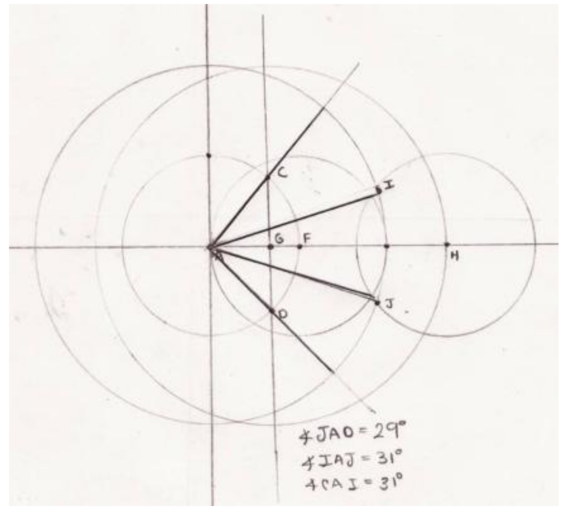
Construcción 7:

- Punto de intersección A entre los ejes x e y.
- Se marca un punto cualquier B sobre el eje y.
- Se traza la circunferencia C_A con centro en A y radio AB.
- Se traza un punto C sobre la circunferencia $C_{A.}$
- Se traza una recta a paralela al eje y que pase por el punto C.
- Se halla el punto de intersección D entre la circunferencia C_A y la recta a paralela al eje x.
- Se halla el punto de intersección F entre el eje x y la circunferencia C_A .
- Se halla el punto de intersección G entre la recta a y la circunferencia $C_{A.}$
- Se traza el segmento AC y AD.
- Se traza un circunferencia C_{A1} con centro en el punto A y con el doble de radio de la circunferencia C_A
- Se traza un circunferencia C_G con centro G y radio el doble de radio de la circunferencia C_A
- Se halla el punto de intersección H entre la circunferencia C_G y el eje x.
- Se traza una circunferencia C_H con centro en H y de radio el de la circunferencia $C_{A.}$
- Se halla los puntos de intersección I y J entre la circunferencia C_H y la circunferencia C_{A1}

- Se trazan los segmentos AI y AJ.
- Ángulos.



Modelo realizado en Geogebra

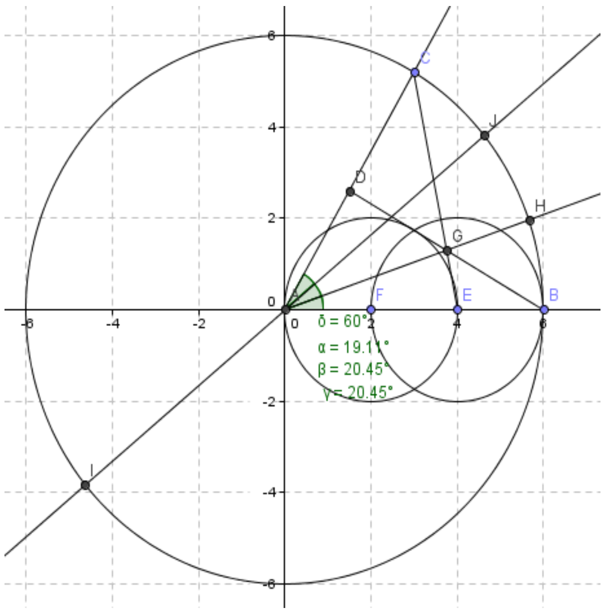


Modelo realizado con regla y compás

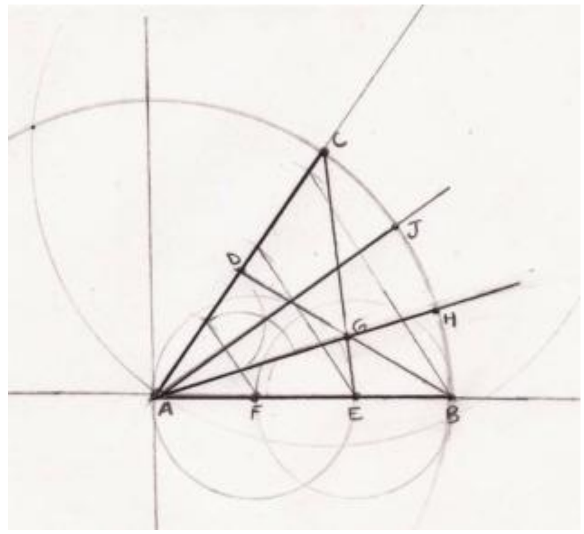
Construcción 8:

- Punto de intersección A entre los ejes x e y
- Se marca un punto cualquier B sobre el eje x
- Se traza la circunferencia C_A con centro en A y radio AB
- Se traza un punto C sobre la circunferencia C_A
- Se traza una semirrecta que pasa por los puntos A y C.
- Se halla el punto medio entre el punto A y C.
- Se ubican los puntos un punto E y F en el eje x, tal que AF=FE=EB
- Se traza el punto medio del segmento AC y lo nombramos D
- Se trazan los segmentos DB y CE.
- Se halla el punto de intersección G entre los segmentos DB y CE.
- Se traza una semirrecta que pasa por los puntos A y G.
- Se marca el punto de intersección H entre la semirrecta trazada en el paso anterior y la circunferencia $C_{A.}$
- Se traza la bisectriz dada entre los puntos C, A y H.

- Se marca el punto de intersección J entre la bisectriz trazada en el paso anterior y la circunferencia $C_{A.}$
- Ángulos.



Modelo realizado en Geogebra

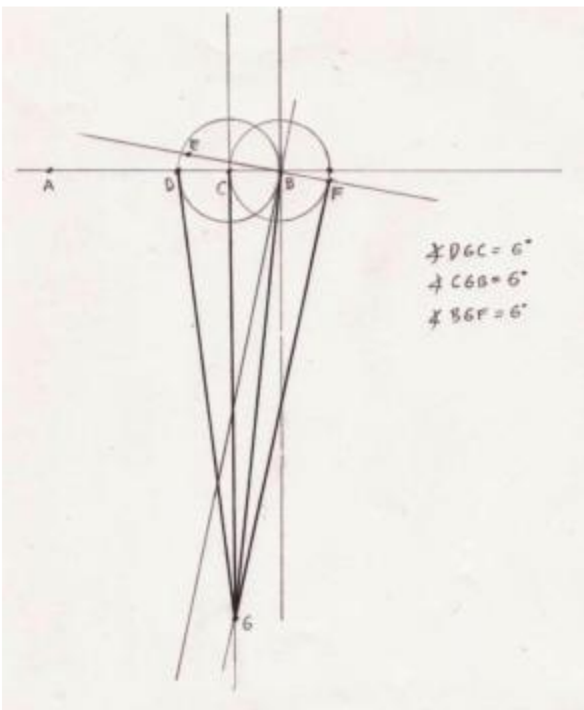


Modelo realizado con regla y compás

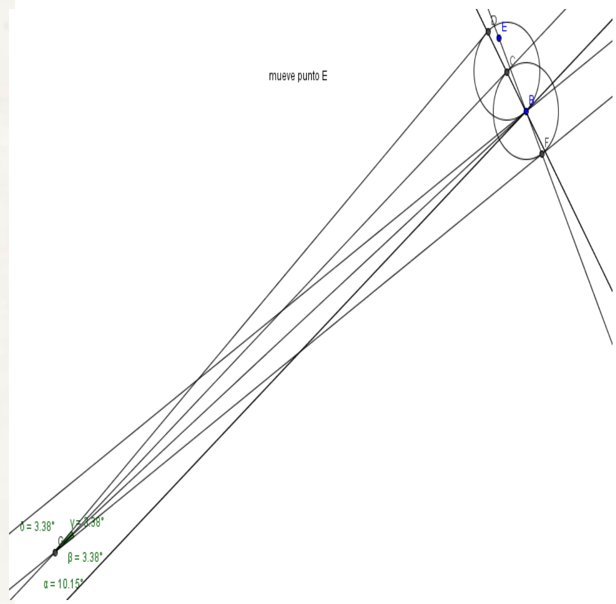
Construcción 9:

- Sean los puntos A y B y una recta a que pasa por ellos.
- Se marca un punto C que este en el segmento AB
- Se traza la circunferencia C_B con centro en B y que pase por C.
- Se traza dos rectas perpendiculares a la recta a que pasen por B y por C, recta d y recta e respectivamente.
- Se traza la circunferencia C_C con centro en C y radio CB
- Se halla el punto de intersección D entre la circunferencia C_C y la recta a
- Se ubica un punto E cualquiera.
- Se traza una recta h que pase por E y por B
- Se traza una recta i perpendicular a la recta h que pase por B

- Se halla el punto de intersección F entre la recta h y la circunferencia C_B
- Se traza una recta perpendicular j a la recta h que pase por F
- Se halla un punto de intersección G entre las rectas e y j
- Se traza el segmento DG, GB
- Ángulos



Modelo realizado con regla y compás

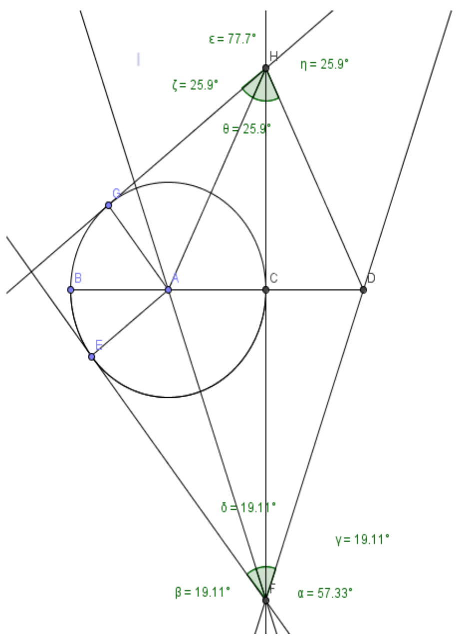


Modelo realizado en Geogebra

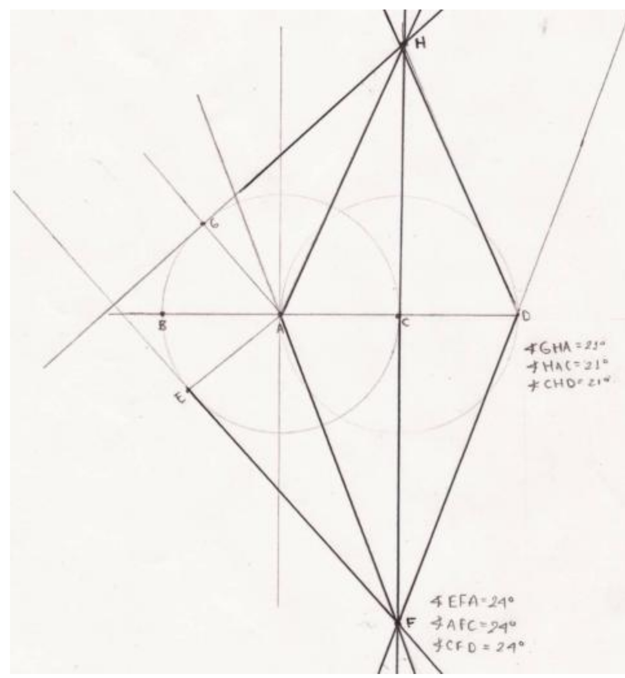
Construcción 10:

- Punto de intersección A entre los ejes x e y
- Se marca un punto cualquier B sobre el eje x
- Se traza la circunferencia C_A con centro en A y radio AB
- Se halla el punto de intersección entre el eje x y la circunferencia $C_{A.}$
- Se traza la circunferencia C_C con centro en C y radio AC
- Se halla el punto de intersección entre el eje x y la circunferencia $C_{C.}$

- Se traza una recta perpendicular g al eje x que pase por C.
- Se ubica un punto E sobre la circunferencia
- Se traza el segmento EA.
- Se traza una recta perpendicular i al segmento EA en el punto E. Luego se traza una perpendicular sobre EA en el punto A. Se toma G como el punto de intersección entre la perpendicular y la circunferencia C_A
- Se halla el punto de intersección F entre la recta g y la recta i anteriormente trazada.
- Se indica el punto D tal que AC=CD.
- Se traza una recta j que pase por los puntos F y A.
- Se traza una recta j que pase por los puntos F y D.
- Ángulos.



Modelo realizado en Geogebra

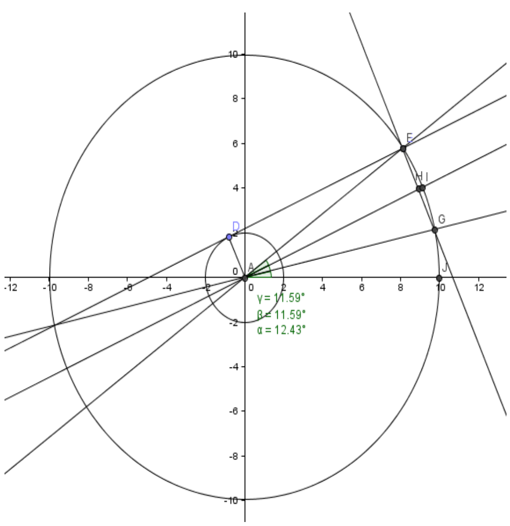


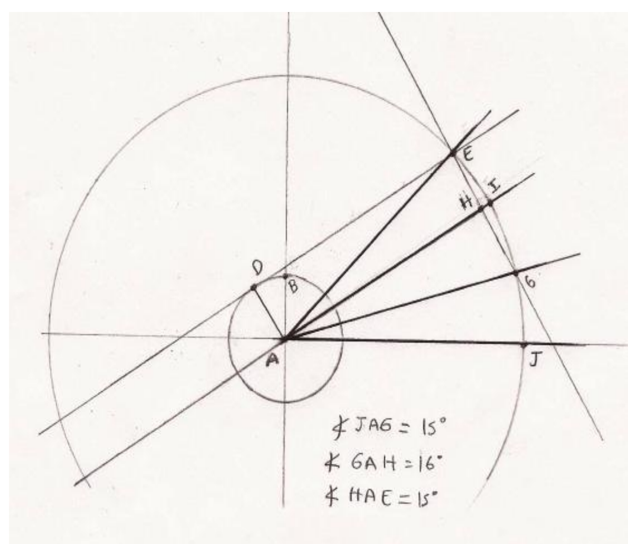
Modelo realizado con regla y compás

Construcción 11:

- Punto de intersección A entre los ejes x e y
- Se marca un punto cualquier B sobre el eje y
- Se traza la circunferencia C_A con centro en A y radio AB

- Se traza un punto D sobre la circunferencia $C_{A.}$
- Se traza el segmento AD.
- Se traza una recta b perpendicular al segmento AD que pasa por D.
- Se traza una recta d perpendicular al segmento AD que pasa por A.
- Se traza un punto E sobre la recta b
- Se construye una circunferencia C_A con centro en A y que pasa por el punto E, es decir con radio AE.
- Se traza una recta e perpendicular a la recta b que pasa por el punto E.
- Se halla el punto de intersección G entre la recta e trazada en el paso anterior y la circunferencia C_A con centro en A y que pasa por E.
- Se halla el punto de intersección H entre la recta e y la recta d.
- Se halla el punto de intersección I entre la recta d y la circunferencia C_A con centro en A y que pasa por E.
- Se traza una recta f que pase por los punto A y G
- Se traza una recta h que pase por los punto A y E.
- Ángulos.





Modelo realizado en Geogebra

Modelo realizado con regla y compás

Estas son algunas de las construcciones que suponemos se realizaron en el intento de solucionar el problema con los instrumentos con los que contaban. Sin embargo en el proceso de construcción se evidenció que al realizar dichas construcciones en una hoja blanca, a mano y con lápiz, esos valores mínimos no se pueden percibir. En este sentido nos cuestionamos sobre ¿Qué instrumentos de medida utilizaron aquellos matemáticos que se enfrentaron al problema de la trisección del ángulo, para concluir que dichas construcciones y demostraciones no eran posibles con regla y compás?

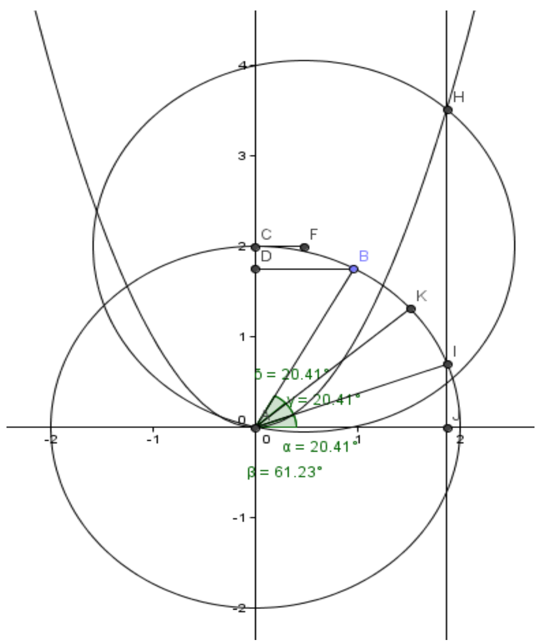
Esto nos permite reflexionar sobre el papel del dibujo, de las representaciones gráficas y de lo tangible donde nuestros sentidos nos pueden arrojar información que posiblemente nos lleve a concluir que una medida es exacta. Sin embargo, el proceso de demostración no se limita a la construcción, sino que pone en juego el manejo de argumentos matemáticos que confirmen y validen un proceso de medición.

Desde este cuestionamiento, aparece otra forma de resolver el problema de la trisección del ángulo, donde no se siguen las normas de la utilización únicamente de la regla y el compás, porque se dieron cuenta que la trisección del ángulo no era exacta, por lo tanto vieron la necesidad de violar las reglas, ello implica la utilización de instrumentos movibles. Tales instrumentos construyen curvas que son generadas por una composición de movimientos en el plano, donde matemáticos como Arquímedes presentaba curvas que se trazan utilizando instrumentos movibles. En las siguientes construcciones se validará la exactitud de la trisección del ángulo utilizando para ello diferentes curvas:

Construcción 12:

- Se gráfica la función x^2 (parábola), simétrica con respecto al eje y.
- Se halla el punto de intersección A entre la función y el eje x
- Se traza le circunferencia C_A con centro en A y radio 2 unidades.
- Se ubica un punto B sobre la circunferencia C_A
- Se traza una recta *a* paralela al eje x que pasa por el punto B.
- Se halla el punto de intersección entre la circunferencia C_A y el eje y.
- Se halla el punto de intersección D entre la recta *a*y el eje y.

- Se halla el punto medio E entre los puntos D y B.
- Se traslada la distancia que hay entre los puntos D y E como radio de la circunferencia C_C con centro en C.
- Se traza una recta *b* paralela al eje x que pasa por C
- Se hallan los puntos de intersección F y G entre la recta *b* y la circunferencia C_C
- Se traza la circunferencia C_F con centro en F y radio FA.
- Se halla el punto de intersección H la función x^2 y la circunferencia C_F
- Se traza una recta i perpendicular al eje x que pase por H.
- Se hallan los puntos de intersección I y J entre la recta i y la circunferencia C_A y entre la recta iy el eje x.
- Se traza el segmento AI y AB.
- Se biseca el ángulo formado por los puntos B, A y I.
- Se halla el punto de intersección K entre la bisectriz trazada y la circunferencia C_A
- Ángulos.



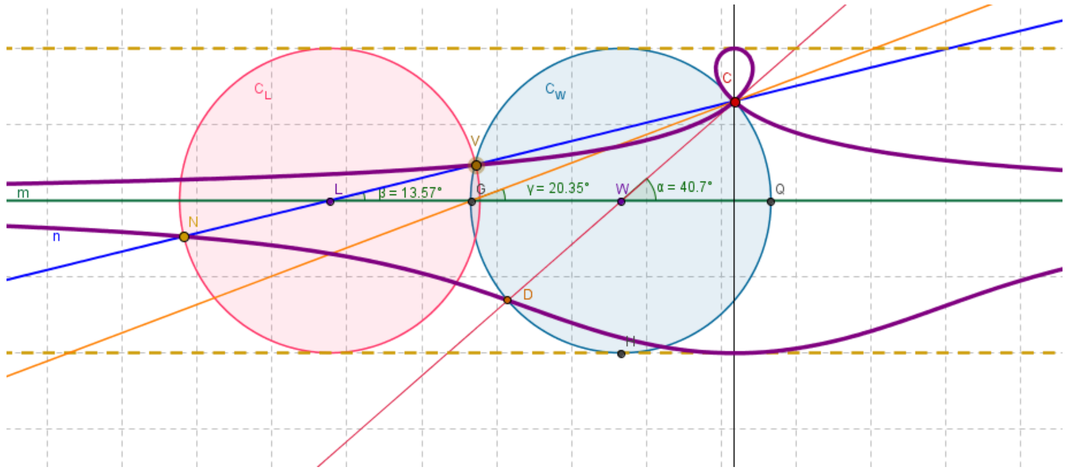
Construcción 13:

- Se gráfica la función $x^3/2$, simétrica con respecto al eje y.
- Se ubica el punto A como la intersección entre los ejes x e y
- Se traza la circunferencia C_{A1} con centro en A y radio 1

- Se traza la circunferencia C_{A2} con centro en A y radio 2 (doble del radio de la circunferencia C_{A1})
- Se hallan los puntos de intersección B y C entre la circunferencia C_{A1} con el eje x.
- Se traza la recta a perpendicular al eje x que pase por el punto C.
- Se halla el punto D como el punto de intersección entre la recta a y la circunferencia $C_{A2.}$
- Se traza la semirrecta AD.
- Se traza la circunferencia C_{A3} con centro en A y radio 4 (doble del radio de la circunferencia C_{A2})
- Se halla el punto E como el punto de intersección entre la circunferencia C_{A3} y la semirrecta AD.
- Se halla el punto de intersección F entre la circunferencia C_{A1} y el eje y.
- Se traza la recta g siendo ésta una recta paralela al eje x que pasa por el punto F.
- Se halla el punto G como la intersección entre la recta g y la circunferencia $C_{A3.}$
- Se traza el segmento cuyos extremos son los puntos A y G.
- Se traza la recta i como la perpendicular al eje x que pase por el punto G.
- Se halla el punto de intersección H entre la recta i y la función cúbica.
- Se traza la recta j que pase por los puntos F y H.
- Se halla el punto de intersección I entre la circunferencia C_{A3} y el eje x.
- Se traza el ángulo formado entre los puntos G, A e I.
- Se halla la bisectriz del ángulo GAI.
- Se halla el punto de intersección J entre la bisectriz trazada y la circunferencia $C_{A3.}$
- Se traza la recta k que pasa por los puntos A y J.
- Se traza los ángulos IAG, GAJ y JAE.

Construcción 14:

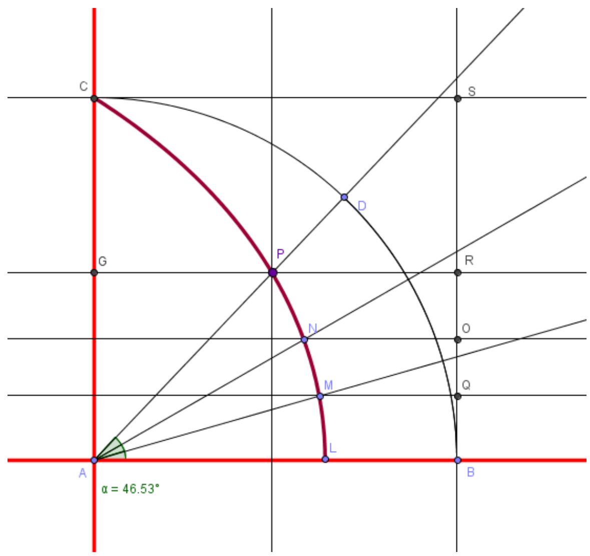
- Sea k un número real positivo.
- Trazar una recta horizontal m (directriz).
- Sean L y W dos puntos sobre la recta m tales que la distancia (D,M) >2k.
- Trazar la circunferencia C_W con centro en W y radio k.
- Sea C un punto sobre la circunferencia C_B.
- Se traza la recta h que pasa por los puntos W y C.
- Trazar la circunferencia C_L con centro en L y radio k.
- Se traza la recta n que pasa por los puntos L y C.
- Sean N y V las intersecciones de la circunferencia C_L y la recta h.
- El lugar geométrico generado por los puntos N y V cuando se mueve W sobre la recta m es la Concoide de Nicomedes.
- Movilizamos por la directriz la circunferencia C_W hacia la izquierda hasta donde el punto V sea la intersección entre la circunferencia C_W y la Concoide de Nicomedes.
- El ángulo $\sphericalangle CLQ$ es la tercera parte del $\sphericalangle CWQ$.



Construcción 15:

- Se traza la recta m que pasa por los puntos A y B tal que distancia (A,B) = 1
- Se traza la circunferencia C_A con centro en A y radio la distancia AB
- Se traza un segmento AC, tal que sea radio de la circunferencia C_A y a su vez perpendicular a la recta m
- Se traza el arco CB
- Se ubica el punto D sobre el arco CB.
- Se traza la semirrecta AD
- Sea G un punto sobre el segmento AC tal que $\frac{m(CG)}{m(CA)} = \frac{m(CD)}{m(CB)}$. La anterior relación de proporción significa que la medida m(CG) aumenta con velocidad constante conforme aumenta medida $m(CD)$ con velocidad constante
- Se traza la recta h de tal manera que sea perpendicular al segmento AC y que pase por G
- Sea P un punto de intersección entre la recta h y la semirrecta AD
- Sea la Cuadratríz de Dinostrato el lugar geométrico generado por el punto P cuando se mueve D sobre el arco CB.
- Sea R la intersección de la recta h con el segmento SB.
- Se divide el segmentos SB en tres partes iguales utilizando el Teorema de Tales, consiguiendo los puntos O y Q.
- Se trazan las rectas perpendiculares m y n al segmento SB que pasan por los puntos O y Q respectivamente.

- Se hallan los puntos de intersección N y M entre las rectas m y n y la Cuadratríz de Dinostrato.
- Se trazan las semirrectas AN y AM.
- La medida del ángulo LAM es la tercera parte del ángulo LAP.



Ahora, en la construcción de las curvas mecánicas, la regla y el compás dejaban ver solo puntos que pertenecían a dichas curvas pero rompían la continuidad que exigía su trazado. Por lo tanto, dichas curvas en movimiento debían ser trazadas a partir de instrumentos que se caracterizaran por su estructura dado que debían tener partes fijas y partes móviles y por su diseño, puesto que debían tener medidas específicas y cumplir con relaciones proporcionales entre ellas. Consecuentemente, eran instrumentos cuya construcción exigía un problema el cual hacía referencia a garantizar la exactitud en la medida de los ángulos.

En este sentido, Jim Loy (2003) distingue dos momentos cruciales en el abordaje del problema de la trisección del ángulo; el primero que lo llama *"legal"* usando únicamente la regla y el compás, y el segundo *"violando las reglas"* haciendo uso de curvas mecánicas. Sin embargo, lo que diferencia estos dos momentos, no se limita únicamente al uso de algunos instrumentos para construir geométricamente la trisección del ángulo, sino que llevaba de fondo una discusión muy fuerte alrededor de la exactitud y la precisión de dichas construcciones. Por ello, a continuación se presentan algunos aspectos generales que se consolidaron a partir de la revisión de algunos documentos **(Momento 8):**

3.1 PROBLEMA DE LA PRECISIÓN Y LA EXACTITUD

El desarrollo histórico de las Matemáticas, trae consigo interrogantes que posiblemente fueron puntos claves de discusión entre antiguos matemáticos y que permitieron establecer teorías, técnicas e instrumentos que dieron respuesta a dichos interrogantes, y uno de ellos pudo ser ¿Qué es la exactitud?

De acuerdo a este interrogante, (Peralta, 1998) intentando establecer una relación entre las matemáticas y el arte (música, pintura y literatura) indica que *"…el ideal en el estilo no era el casticismo, ni el adorno, ni la elocuencia; lo era en cambio, la claridad, la rapidez. Lo que se necesita es exactitud y claridad; después, si se puede, elegancia, pero lo primero es exactitud"* mostrando la exactitud como una cualidad necesaria para encontrar armonía en las diferentes manifestaciones culturales del hombre.

Por otro lado, esta idea de exactitud es comparada por (Auger, 1961)quien de una manera jocosa establece que *"La exactitud actual es comparable a encontrar un grano de café imperfecto entre 500 toneladas de café seleccionado"* reconociendo una gran complejidad en este proceso, en el gran reto de establecer que algo es "exacto".Así mismo, (Redondo, 2001)identifica que el único ingrediente que hacía intrínsecamente diferente a la Matemática del resto del conocimiento científico era la validez incontestable de sus resultados, sin embargo esta imagen se diluía, porque había comenzado lo que Kline (1985) denominaría *"desastres"* dado que hasta en el propio método axiomático-deductivo, en esa aproximación *"perfecta"* a la exactitud del conocimiento, se encontraban fallos.

No obstante, la idea de exactitud la han asociado estrictamente a una cualidad de las ciencias "*exactas*" que son exactas porque involucran en la modelación de sus fenómenos las Matemáticas. Así mismo, se pueden encontrar diferentes características de la exactitud como las que presenta (Cromer & Fernández Ferrer, 2010)quienes indican que *"La exactitud depende de los errores sistemáticos que intervienen en la medición, denotando la* *proximidad de una medida al verdadero valor y, en consecuencia, la validez de la medida",* otras fuentes indican que la exactitud implica la inexistencia de error o del fallo, también se puede considerar como la capacidad de un instrumento para medir un valor cercano a la magnitud real. Estas definiciones dejan evidenciar quelo que se conoce como exactitudestá vinculado con la cercanía del valor medido y el valor real. En este sentido, (Chamorro, 1994) en el *Problema de la Medida* indica que

> La mayoría de veces en la vida corriente, no se precisa conocer de manera exacta la medida de un objeto, basta con dar encuadres (esta entre tanto a tanto) o aproximaciones (alrededor de). Pero si medir es una técnica que se va depurando y que requiere de un adiestramiento a través de la práctica, aproximar es igualmente complejo…pág. 72

Entonces, la exactitud, es una característica que se le ha consagrado a las Matemáticas como lo afirma (Godino, 2003)"*La matemática es una "ciencia exacta", los resultados de una operación, una transformación son unívocos"* donde a partir de esto, la percepción de las matemáticas conlleva a una ciencia que no admite el error. En consecuencia, el proceso de enseñanza de las matemáticas que se lleva a la escuela, está condicionado por un peso gigante que se le da al resultado "exacto" de una operación en la solución de un problema. En relación a esto, (Godino, 2003)establece que

> … es frecuente que las propuestas curriculares potencien exclusivamente una cara de la moneda: la que se ajusta mejor a la imagen tradicional de las matemáticas como ciencia exacta. Así, por ejemplo, se prefiere la matemática de la certeza ("sí" o "no", "verdadero" o "falso") a la de la probabilidad ("es posible que. . . ", "con un nivel de significación de. . . "); la de la exactitud ("la diagonal mide √2", "el área de un círculo es πr2",...) a la de la estimación ("me equivoco como mucho en una décima", "la proporción áurea es aproximadamente 5/3", ...).pág. 26

En este sentido, (Cromer & Fernández Ferrer, 2010)explica que es necesario reconocer que el valor exacto de una magnitud física es un concepto *utópico,* ya que es imposible conocerlo sin incertidumbre alguna. Por lo que es evidente, que una cosa es encontrar un valor "exacto" en el mundo abstracto de las matemáticas y otra cosa es modelizar esa magnitud en el mundo físico, real y tangible. Esta afirmación la confirma (Godino, 2003)cuando en el momento de comparar la modelización matemática de un cierto hecho de la realidad, siempre es aproximada, porque el modelo nunca es exacto a la realidad.

Las discusiones sobre la exactitud, sin lugar a duda se debieron presentar cuando los antiguos matemáticos buscaban la solución a los problemas clásicos griegos como la trisección del ángulo, la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo (año 430 AC). En esta búsqueda, los matemáticos para resolver un problema contaban con una serie de definiciones, postulados y teoremas e instrumentos como la regla y el compás, donde a partir de los tres postulados de Euclides se delimitaba las acciones que se podían efectuar con dichos instrumentos. En este sentido, (Suzuki, 2008)indica que la *"imposibilidad*" se deriva de una restricción, supuestamente impuesta por Platón (427-347 ac) donde los geómetras no utilizan instrumentos además del compás y una regla.

Teniendo como objeto de observación, la trisección del ángulo, el dividir un ángulo cualquiera en tres partes *iguales* conlleva a garantizar que cada una de las partes mide *exactamente* lo mismo, dado que si alguna de las partes no es igual, no se garantiza la trisección. Esta condición, deja ver que la "exactitud" vista como "perfección" fue una condición esencial para validar un resultado. En este sentido, (Arenzana, 1998)resalta que

> *La matemática griega estaba dominada por la geometría y sus métodos donde las operaciones elementales se hacían mediante construcciones geométricas y estas construcciones estaban en la base de sus razonamientos. Para los griegos el hecho de hacer una multiplicación más aproximada carecía de sentido y consistiría, en todo caso, en esmerarse al máximo en el dibujo, en la construcción geométrica con la que se realizaba la operación. Con todo, siempre existiría el convencimiento de que la perfección era inalcanzable pero que el dibujo realizado para resolver un problema nos evocaría la construcción perfecta. Pág.32*

Esta afirmación, evidencia la importancia que tenía para los griegos el buscar la exactitud, donde el trabajo con curvas permitía dicho objetivo. Sin embargo, trabajar con curvas inicialmente no fue muy aceptado, ya que los griegos las diferenciaron entre aquellas curvas que se consideraban dentro de la geometría y otras que se consideraban "*Mecánicas"* que no eran aceptadas porque no se podían realizar con la regla y el compás. En este sentido, (Arenzana, 1998)explica que

> *La razón de la exclusión de la geometría de las curvas mecánicas no sería porque, al ser líneas más complejas, fuera necesaria mayor precisión de trazado o aparatos más sofisticados que no alcanzaran a dar la exactitud requerida, puesto que la verdadera*

> *perfección de la geometría griega se lograba en el pensamiento, esto es, en la claridad del método para llevar a cabo las construcciones. P34*

Así mismo, Descartes opinaba que si se entendía por geométrico lo que era exacto y por mecánico lo que no lo era, afirma que *"si la geometría era la ciencia que estudiaba y enseñaba a conocer la medida de todos los cuerpos, no había razón para excluir de la geometría el estudio de las curvas más complejas con tal de que se pudieran imaginar generadas por movimiento o por composición de varios"*.(Pág. 32)

En este sentido, (Panza, 2011)propone un "*Repensar la exactitud geométrica*" exponiendo una preocupación por la exactitud y se basa en algunas posturas de Henk Bos (2001) para establecer una comparación entre la Geometría Plana de Euclides y la Geometría de Descartes, manifestando que aunque hay algunas similitudes, Descartes logra una extensión conservadora de la geometría de Euclides (EG) *"Descartes's geometry is a conservative extension of Euclid's, and providing this extension is Descartes's way of responding to the exactness concern" (*Pag,43) porque Descartes utiliza en su trabajo, aspectos generales de la GE, sin embargo, el problema se generaba, dado que se debían concretar si algunos objetos, procedimientos o argumentos debían o no permitirse dentro de esta ciencia.

Dentro de las consideraciones de (Panza, 2011)se evidencia un cambio del concepto de construcción dado por Euclides y modificado por Descartes, puesto que Euclides propone un proceso deductivo por medio de un conjunto de definiciones y teoremas,donde caracteriza sus demostraciones a partir de pasos consecutivos utilizando la regla y el compás, y Descartes se apropia de un sistema cerrado, igualmente bien enmarcado como GE, pero involucrando instrumentos que se construían a partir de relaciones proporcionales, y que involucraban movimientos en sus trazados.

Una comparación que hace evidente el cambio entre Euclides y Descartes, está en el razonamiento que se aplica a la hora de hacer una demostración, donde Euclides era totalmente deductivo y Descartes aunque se apropia de las herramientas dadas por Euclides, modifica su Geometría agregando un lenguaje simbólico utilizando las consonantes (x, y, z,) para valores que representa los segmentos como valores numéricos conocidos y (a,b,c, d, e) como valores que son desconocidos (incógnitas) pero que en el proceso de demostración supone que conoce.

Descartes se refería principalmente a la solución de problemas,esto hace que sea muy natural pensar que la preocupación de Descartes a la exactitud geométrica es el aspecto geométrico de su búsqueda de la claridad y distinción. Para Descartes, la claridad y la distinción son ingredientes necesarios de la búsqueda de la verdad y la certeza que Panza (2011) citando a Bos (2001) indica que *"el contexto geométrico en esta búsqueda se refiere a lo que se define con el término 'exactitud"* donde la claridad y la distinción en la geometría no podían ser simplemente una cuestión de lo concebible racional, sino que debe ser estrictamente ligada a la satisfacción de las necesidades constructivas que, como lo afirma Panza (2011) deriva directamente desde Euclides.

De acuerdo a Panza (2011) la preocupación por la exactitud de la geometría clásica no era una cuestión de precisión. Precisión fue sin duda un requisito para la geometría práctica o aplicada dado a que se requiere para llevar a cabo algunos procedimientos (materiales) con un grado suficiente de precisión, pero el requisito de la exactitud en la geometría pura fue una preocupación muy grande y está obligada a argumentar con relaciones geométricas sustentando todos los aspectos.

Ahora, según los planteamientos de (Bos, 2001) desde el siglo XVI y hasta el siglo XVIII la idea de Exactitud Geométrica ocupó las mentes de muchos matemáticos los cuales retomaban los trabajos de geómetras clásicos quienes ya sabían por experiencia que muchos problemas quedaron sin solución si la geometría se limitaba únicamente al uso de regla y compás. Ellos habían sugerido diversos medios adicionales de construcción más allá de las líneas rectas y círculos, pero sus textos no explican claramente por qué estos nuevos medios deben ser aceptables. La cuestión de exactitud se relacionaba directamente con las construcciones geométricas.

Por ello, el álgebra apareció como una poderosa herramienta analítica que los matemáticos comenzaron a usar para la resolución de problemas geométricos, en este sentido más problemas podrían ser resueltos, viejos problemas fueron resueltos más fácilmente, y al mismo tiempo el nuevo método sugerido muchos problemas nuevos. Así, el campo de la resolución de problemas geométricos creció considerablemente, y este crecimiento hizo necesario un replanteamiento de la cuestión de lo que significaba para resolver un problema.

Dentro de los planteamientos de Panza (2011) quien se basa en Bos (2001) se identifica la curva como objeto de estudio, como medio de construcción, y como soluciones de problemas geométricos. En este sentido, se hizo necesario estudiar las características y propiedades de las curvas, analizar su construcción geométrica y la demostración de las relaciones que en ella sobresalen. Como consecuencia de ello, se presentó un gran crecimiento del campo de la resolución de problemas geométricos, la cuestión de cuándo una curva se conocía lo suficiente, o cómo podría aceptablemente construirse, adquirió una gran importancia.

Para comprender la esencia de la exactitud Bos (2001) distingue varias actitudes de los matemáticos en el proceso de la interpretación de la exactitud:

1. ***Apelar a la autoridad y la tradición:*** hace referencia a que ciertos procedimientos de construcción tradicionales se habían desarrollado y codificado en la Geometría moderna temprana. Aunque las obras clásicas proporcionaron poca explicación de por qué eran aceptables las construcciones geométricas, los propios procedimientos eran lo suficientemente claras. Por lo tanto, los geómetras modernos tempranos podían optar por trabajar en el estilo de esa tradición, limitándose a los procedimientos de construcción que se encuentran en las obras clásicas y argumentando que éstos necesitan ningún otro aval de la autoridad de los grandes matemáticos como Euclides, Arquímedes y Apolonio.

2. ***La idealización de la práctica y de métodos***: Algunos matemáticos argumentaron a favor o en contra de la adopción de los procedimientos de construcción haciendo referencia a la práctica de los dibujantes que utilizan reglas, compases y otros instrumentos para construir figuras con gran precisión, como las divisiones de las

escalas o las curvas en las placas de los astrolabios o en los relojes de sol. La precisión y la fiabilidad de un instrumento o de un procedimiento en la práctica era un argumento a favor de la adopción de la idealización del instrumento o el procedimiento como legítimo en la geometría pura. En este caso la interpretación de exactitud se basa en una idealización de una práctica geométrica.

3. ***El análisis filosófico de la intuición geométrica***: hace referencia a la intuición de la certeza en la geometría. Algunos matemáticos analizaron esta intuición filosófica con el fin de encontrar argumentos para la adopción de su particular interpretación de exactitud constructiva. El defensor más importante de este enfoque en el período moderno temprano fue Descartes, cuya visión de la geometría entera fue moldeada por su preocupación filosófica por la certeza de las operaciones geométricas, en particular de las construcciones.

4. ***La apreciación de las matemáticas resultantes:***este aspecto hace referencia a la calidad de las matemáticas que resultan reconocidos implícita o explícitamente, cuando los matemáticos aceptan o rechazan ciertos métodos de construcción. En ese caso, el razonamiento no se refería principalmente a la validez del procedimiento en sí, sino más bien el interés y la calidad del sistema matemático resultante.

5. ***La negativa, el rechazo de toda norma****:* En la interpretación de los matemáticos la exactitud geométrica permitía tomar la decisión de aceptar o rechazar cierta construcción.

6. ***El desinterés:*** Los matemáticos que no estaban interesados en la exactitud como requisito en la construcción y el la solución de problemas geométricos. Una figura importante en la categoría de no-interés es Fermat, quien, a pesar de sus importantes contribuciones a los métodos para el análisis de problemas geométricos, parece haber tenido muy poca afinidad a las preguntas de la aceptabilidad de las construcciones que se encuentran por estos métodos.

En este proceso Bos (2001) reconoce que aunque hubo un tiempo de “despreocupación” del rigor entre los matemáticos del siglo XVI y XVIII, no era una actitud de falta de interés hacia la exactitud, sino que los matemáticos estaban más preocupados por la fundación de su ciencia que por la exactitud.

Sin embargo, se traía de la geometría griega a la moderna que estudiar la exactitud, se encontraba dentro de los requisitos que debía cumplir un procedimiento para ser aceptado dentro de las matemáticas porque los procedimientos aproximados si bien es cierto, eran de gran utilidad en la práctica pero no eran aceptables en la geometría real.

En este sentido, el estudio de la aceptabilidad de algunos procedimientos geométricos giraban alrededor de preguntas como ¿Cuándo se resuelve un problema? ¿Cuándo se conoce realmente un objeto? ¿Qué procedimientos son aceptables en las matemáticas para resolver problemas? Donde aquellos matemáticos que se tuvieron que enfrentar a la cuestión de qué procedimientos debían ser aceptados tenían que explicar ¿Qué requisitos harían los procedimientos matemáticos exactos?, ello implicaba que tuvieran que interpretar lo que significaba exactitud para proceder exactamente en matemáticas.

Panza (2011) al explicar de cierta manera la preocupación de Descartes por la cuestión de la exactitud, presenta diferentes curvas como la Cuadratríz de Dinostrato para trisecar un ángulo, da una idea de cómo la curva es la solución a un problema, sin embargo deja en evidencia otro problema implícito ya que debía construir nuevos instrumentos que permitieran trazar con exactitud dichas curvas.

3.1.1 Trisectores “nuevos instrumentos”

Aunque se reconoce que, con regla y compás podían dividir cualquier ángulo en partes iguales, siempre y cuando fueran potencias de dos, porque su procedimiento consistía en bisecar sucesivamente un ángulo; entonces alguno de ellos, se preguntó¿Cómo dividir un ángulo en partes impares? Entonces surgió un arduo trabajo en responder dicha pregunta.

En este proceso de trisecar un ángulo, diferentes matemáticos propusieron diferentes instrumentos para una misma tarea, instrumentos que a su vez originaron curvas mecánicas fascinantes y procesos de demostración, basados siempre en relaciones proporcionales, en puntos móviles y fijos; donde los trisectores son una forma de mostrar los mecanismos que a su vez originan curvas que permiten formalizar la utilización de los trisectores en la representación de curvas.

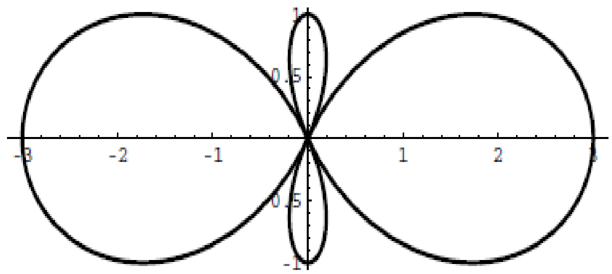
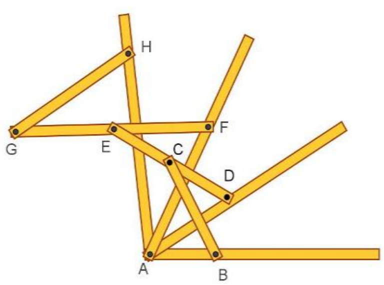
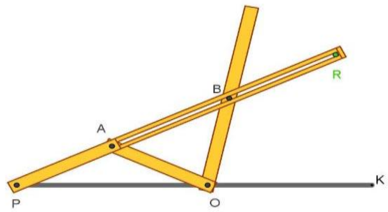
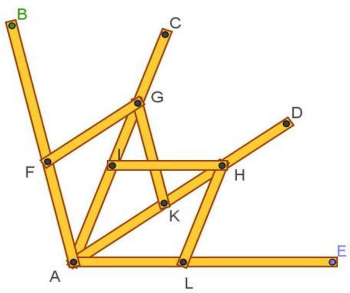
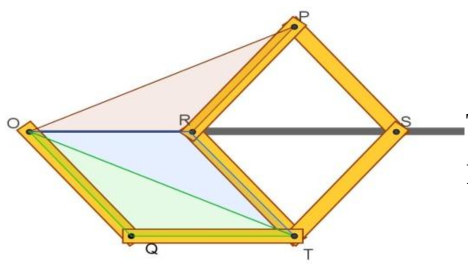
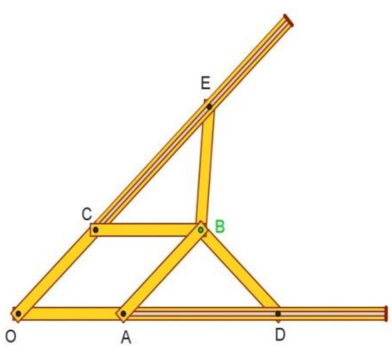


Ilustración 10: Ejemplo de curva que se forma al modelar en el plano el trisector de Ceva

A continuación, se muestran algunos trisectores que se emplearon, presentando las relaciones proporcionales que evidencian en su diseño y los puntos que se identifican como fijos y móviles:

Instrumento	Nombre	Característica	Relaciones proporcionales
	Trisector de Kempe	Puntos móviles H,G,E,C,F Puntos Fijos A,B	$\frac{GF}{GH} = \frac{HA}{FA}$ $\frac{ED}{DA} = \frac{FA}{FE}$

	Trisector de Pascal	Puntos móviles A , B y O Puntos fijos p	$\frac{\theta}{1}=\frac{BOK}{3}$ $3\theta{=}BOK$
	Trisector Cartesiano	Puntos móviles G Y H Puntos fijos F, L, A	$\frac{GF}{GK}=\frac{HL}{HI}$ $FA = AL$
	Trisector de Rouse Ball	Puntos móviles Q,T,P Puntos fijos S,R,O	$\frac{OQ}{RT}=\frac{RP}{QT}$ $RT = PS$
	Trisector de la Ceva	Puntos móviles C,A,B Puntos fijos O,E,D	$\frac{OC}{CE}=\frac{OA}{AD}$ $CB = AB$ $CB = AB$ $EB = BD$

Finalmente, se hace referencia al trisector cartesiano, el cual se le atribuye a Descartes para entender como la creación de un instrumento para trisecar ángulos nos lleva a reflexionar sobre la idea de exactitud, la cual cita Panza (2011, P85)

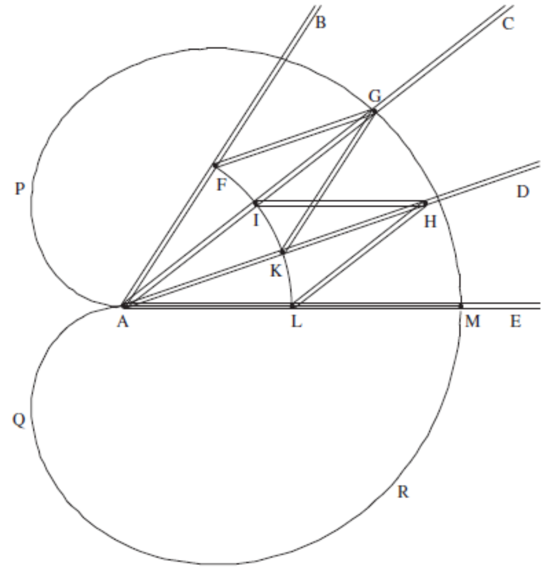


Ilustración 11: Trisector Cartesiano presentado por Descartes

El mecanismo de este instrumento está constituido por dos varillas (segmentos) con bisagras AL y AF en A y atrás dos varillas (segmentos) AG y AH y G que tiene dos deslizadores. El punto G se mueve con el segmento AC y H con el segmento AD. Los segmentos FG, GK, IH, HL tienen la misma longitud y están articulados respectivamente, en F, I, K y L de tal manera que AF = AI = AK = AL, luego todos equidistan de A.

Se muestra que triángulos ($\Delta AFG, \Delta AKG, \Delta HAI, \Delta AFG, \Delta ALH$) son los mismos, luego los ángulos BAC, CAD y DAR también son iguales menores que 180°. Por lo tanto, el instrumento permite trisecar ángulos que coinciden con el vértice del ángulo; para trisecar un α el trisector se debe abrir hasta que el $\sphericalangle BAE = \alpha$. El trisector tiene dos puntos movibles G y H, y puntos fijos los cuales son F, L y A. Conservando las siguientes proporciones:

$$\frac{GF}{GK} = \frac{HL}{HI}$$

$$FA = AL$$

Panza (2011, P85) indica que *"Descartes admite curvas geométricas por el hecho de ser trazables a través de enlaces geométricos"*,ello implica que dichas curvas deben conservar vínculos geométricos; los vínculos geométricos están concebidos como configuraciones móviles de objetos geométricos, ahora bien si ello se ha de cumplir en las curvas también se debe cumplir en los instrumentos que trazan tales curvas.

Los geómetras de la época estaban limitados por lo que era estático, Descartes inicialmente lo estaba, luego se dio cuenta que si en el movimiento generado por instrumentos diferentes a la regla y el compás existen medidas que se pueden relacionar entre sí, es decir, entre dichas medidas existen relaciones de proporcionalidad, en ese sentido tal instrumento es aceptado por la geometría.

Teniendo en cuenta lo estudiado en el Trisector Cartesiano, este instrumento cumple relaciones de proporcionalidad que garantiza que la trisección del ángulo que éste forma al abrirse es exacta y que por lo tanto es aceptada por Descartes. Por lo tanto, identificamos la curva como la solución al problema de la trisección, donde los puntos que determinan la curvan cumplen con condiciones establecidas por relaciones proporcionales.

Capítulo 4 DISEÑO PRODUCTO FINAL: “LA TRISECCIÓN DEL ÁNGULO UNA CUESTIÓN DE EXACTITUD”

De acuerdo a todo el proceso realizado, se presenta a continuación la propuesta curricular en diferentes partes, en la primera se propicia al grupo de estudiantes tener una conversación sobre lo qué son las matemáticas como parte de la introducción de la propuesta, luego se presenta una imagen la cual nos va a permitir generar un contexto al problema de la trisección del ángulo, el cual se espera que aborden mediante una fase de exploración utilizando las herramientas como la regla y el compás, así mismo las herramientas del software Geogebra. Más adelante, los estudiantes realizaran diferentes construcciones geométricas con el propósito de propiciar una discusión alrededor de la validez de los argumentos, de la medida de ángulo, de la exactitud etc. A continuación se presenta el desarrollo ampliado de cada uno de los aspectos señalados:

4.1 “HABLEMOS SOBRE LA MATEMÁTICA”

Partimos de las siguientes preguntas: ¿Qué son las matemáticas?, ¿Las matemáticas son exactas? ¿Existen problemas matemáticos que aún no se pueden solucionar? , las respuestas iniciales a estas preguntas por parte de los estudiantes nos permitirán conocer la imagen o concepción que ellos tienen acerca de las matemáticas, y además saber si para ellos el término matemáticas es sinónimo de exactitud, perfección, solubilidad en todo lo que se la ha planteado, es decir, si tienen la idea de una matemática exitosa. Se espera que el profesor tome apuntes de los aportes de los estudiantes y resalte cada una de las ideas propuestas. Estos aportes son insumo para concluir la propuesta.

4.2 "CONTEXTUALIZACIÓN"

Se presenta una imagen[5] a los estudiantes con el propósito de invitarlos a interpretar y recrear las situaciones que en ella se presentan, identificando un contexto que les permita darle sentido a la imagen, creando personajes y su vez condicionada según los siguientes parámetros: La narración debe incluir aspectos matemáticos, se deberá recurrir a la imaginación mediante la reorganización y la selección de aquellos eventos que son significantes en la imagen.

Figure 10.4. Picture in Caramuel's treatise on theoretical and practical mathematics[4].

4.3 "PRESENTACIÓN DE LA SITUACIÓN"

Teniendo en cuenta todo lo observado en la imagen por los estudiantes y la narración (cuento, historieta, relato etc.) que ellos han recreado, se realizará una socialización. Esta socialización estará mediada por unas preguntas que nos permitirán crear un vínculo entre

[5]Imagen extraída de Adriano Dematte and Fulvia Furinghetti,(2011) History, Figures and Narratives in Mathematics TeachingUniversity of Genova, Italy

la Historia De Las Matemáticas y la trisección del ángulo, mediante la construcción de un instrumento de medición de ángulos, que es el transportador.

Preguntas orientadoras

- *¿Hace cuánto tiempo cree usted que fue tomada esa imagen?*
- *¿Qué actividad creen que están realizando las personas?*
- *¿Cuál cree que es el objetivo de la actividad que las personas están realizando?*
- *¿Cómo se relacionan las actividades de los personajes con las matemáticas?*
- *¿Qué de matemático tiene la imagen?*
- *¿A qué se le parece el instrumento?*
- *¿Qué papel juega el instrumento en el contexto que usted ha creado?, ¿Para qué cree que se utilizaba el instrumento?*
- *¿Cómo cree que aparece ese instrumento en las manos de los personajes?*
- *¿Cree usted que ellos lo crearon?*
- *Si la respuesta a la anterior pregunta es positiva ¿qué elementos iniciales tuvieron en cuenta los personajes de su historia para la creación del instrumento?*
- *¿Cómo crearon un instrumento que mide ángulos en la antigüedad?*

Finalmente, después de analizar todos los aspectos involucrados en la imagen se propone la siguiente situación: ***"Si usted fuera uno de los personajes de la historia que ha recreado y el instrumento se estropeará, ¿Cree usted que lo podría construir? ¿Cómo?"***Para ello, se propone organizar grupos de tres o cuatro estudiantes, que reflexionen sobre la situación propuesta y propongan estrategias.

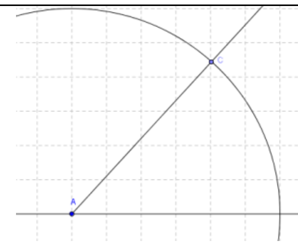
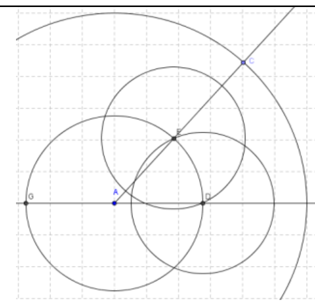
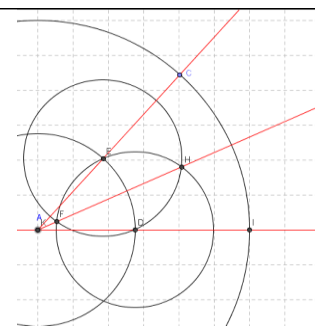
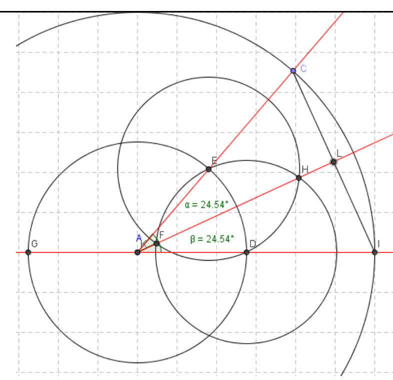
4.4 "TRABAJO DE EXPLORACIÓN"

Inicialmente las herramientas con las que los estudiantes podrá construir será con aquellas que se denominaban "legales", es decir la regla y el compás y luego validará tales construcciones con Geogebra. Para ello es necesario que el estudiante tenga algunas nociones básicas sobre el trabajo con regla y compás y posteriormente con Geogebra, pues ello le permitirá tener más herramientas a la hora de crear el instrumento que consecutivamente le permitirá medir de manera precisa diferentes ángulos. Por tal razón, para el trabajo con los elementos antes mencionados, se deben tener en cuenta algunas nociones geométricas previas tales como (se pueden trabajar inicialmente con regla y compás):

- *Segmentos, rectas, puntos.*
- *Ángulos*
- *Medida de ángulos*
- *Construcción de triángulos*
- *Relaciones proporcionales*
- *Razones*
- *Bisectriz*
- *Dividir un segmento en dos partes iguales*
- *Teorema de Tales*
- *Rectas perpendiculares y paralelas.*
- *Nociones geométricas fundamentales*.

El propósito en esta parte de la propuesta es orientar el trabajo de los estudiantes a la necesidad de crear un instrumento que mida ángulos, donde es posible que dirijan su mirada a un instrumento que utilizan en la escuela, como lo es el *transportador*. Sin embargo, se debe resaltar que no se admite la reproducción de dicho instrumento, sino la posibilidad de crearlo trasladando a los estudiantes a una época histórica donde los matemáticos no contaban con dicho instrumento. En este sentido, se puede orientar el trabajo del estudiante presentándole la manera de bisecar cualquier ángulo utilizando regla y compás:

Tabla 5: Proceso para bisecar un ángulo.

Proceso para bisecar un ángulo	**Representación gráfica del proceso de construcción**
Sea h una recta en el plano Escoger un punto A cualquiera Con centro A y radio AI (cualquiera) trazar la circunferencia C_A Escoger un punto C cualquiera sobre la circunferencia C_A	
Trazar otra circunferencia C_B con centro en A y distancia G menor que el radio AC. Sean D y E los puntos de intersección entre la circunferencia C_B y la recta h y el segmento AC respectivamente. Con centro E y radio ED trácese la circunferencia C_E, así mismo con centro D y radio DE trácese la circunferencia C_D.	
Sean H y F los puntos de intersección entre las circunferencias C_E yC_D. Luego se traza una recta que une los puntos A y H. y se forman los ángulos $\measuredangle IAH$ y $\measuredangle HAC$.	
Si se traza el segmento CI y se toma el punto L con la intersección de la semi recta AH, se tiene que por el teorema LAL los triángulos ALC y ALI son semejantes. Por lo tanto los ángulos $\measuredangle IAH$ y $\measuredangle HAC$ son iguales.	

En este proceso se le pide al estudiante dividir en varias partes un ángulo dado, utilizando ahora la herramienta de Geogebra, donde debe determinar si puede obtener cualquier ángulo dividiendo siempre por mitades. Luego se le plantea al estudiante construir un ángulo de 20°. En este proceso el estudiante debe presentar su trabajo a partir del uso de la regla y el compás, y más adelante validar las construcciones en Geogebra, el estudiante deberá familiarizarse con sus herramientas, realizar construcciones y comprobar utilizando medidas.

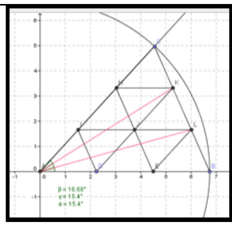
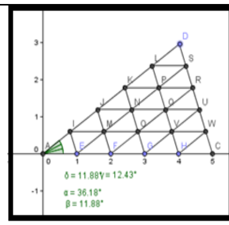
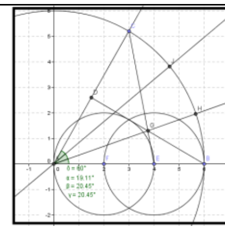
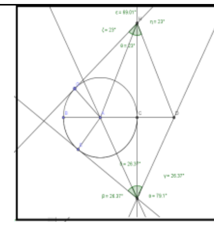
4.5 "SOCIALIZACIÓN DE LAS DIFERENTES PROPUESTAS DE TRABAJO"

Posterior al trabajo de exploración, con la herramientas del software Geogebra y la experiencia de realizar una construcción con regla y compás en hojas, se inicia un proceso de socialización y discusión de las diferentes estrategias que proponen los grupos para obtener un ángulo de 20°, que finalmente permitirá construir un transportador similar al que se mostraba en la imagen 1. En esta parte de la propuesta, se espera identificar procesos matemáticos como la argumentación, donde el estudiante utilice sus conocimientos geométricos para explicar la estrategia planteada y la validación en la medida que se utilicen herramientas en el programa Geogebra como el mismo transportador para medir los ángulos obtenidos y validar las propuestas.

4.6 "VALIDACIÓN DE LAS PROPUESTAS"

Después de que los estudiantes dieran a conocer las propuestas, el profesor debe propiciar una discusión en la clase, identificando elementos de cada uno de los grupos. Luego, se entrega a cada grupo una secuencia de pasos para trisecar un ángulo (Ver Capitulo 3) utilizando regla y compás. Cabe aclarar que cada secuencia es diferente, y que la tarea asignada consiste en hacer la construcción de un modelo geométrico que conlleve a la trisección del ángulo, donde deben validar si se triseca o no un ángulo cualquiera con la construcción dada.

Tabla 6 Construcciones geométricas realizadas en Geogebra

En el momento en que el estudiante empiece a validar la construcción que ha hecho utilizando el programa de geometría dinámica Geogebra, se dará cuenta que las medidas no son exactas, llegará a la conclusión que con regla y compás no es posible trisecar un ángulo de manera precisa.

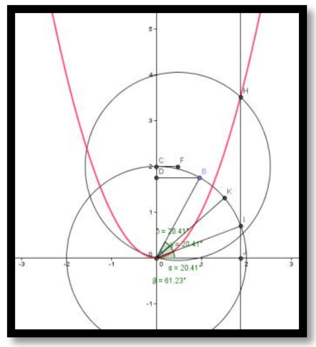
En este punto, se encontrará con un problema de exactitud, dado que visualmente la construcción y el modelo geométrico (físico) puede inducir a garantizar una exactitud, pero al validar usando el programa se identificarán esas cifras decimales que no garantizan la exactitud. Sin embargo es necesario que el estudiante haya realizado la construcción con regla y compás en una hoja de papel y así mismo en el programa de Geogebra, para poder generar una discusión en la clase sobre las matemáticas en el mundo físico y las matemáticas en el mundo abstracto.

La discusión será mediada por el profesor en la medida que se identifique que dicha discusión fue parte del desarrollo histórico de las matemáticas. Resaltando, que si bien es cierto, que lo legal en ese momento eran las construcciones que se hacían con regla y compás, entonces en ese momento con lo legal no se podía trisecar un ángulo de manera exacta. De manera particular, un ángulo de 60° no se podía trisecar con regla y compás.

4.7 VIOLANDO LAS REGLAS.

Se dice “violando las reglas” porque los instrumentos aquí utilizados para trisecar el ángulo no son precisamente la regla y el compás, son las curvas generadas por el movimiento y era algo que en esa época no estaba aceptado dentro de lo que se consideraba como matemático. El profesor presentará algunas curvas y los estudiantes deberán probar que éstas trisecan exactamente el ángulo, ellos evidenciaran que mediante las curvas es factible trisecar un ángulo de manera exacta; se le mostrarán aquellas curvas que para ellos son familiares como la parábola, la cúbica entre otras.

Validación de modelos con el trabajo con curvas.



- **Socialización de modelos "exactitud" utilizando las curvas.**

Se socializa con los estudiantes las diferentes construcciones realizadas con curvas que trisecan el ángulo, se media a los estudiantes por medio de preguntas que lo lleven a concluir que sólo mediante las curvas se puede trisecar de manera exacta.

- ¿En verdad trisecó el ángulo en tres partes iguales?
- ¿Si se mueve algún punto de la construcción se mantiene la propiedad de la trisección?

4.8 SOCIALIZACIÓN

Después de todo el trabajo realizado, los estudiantes volverán a las preguntas inicialmente planteadas:

- ¿Qué son las matemáticas?
- ¿Las matemáticas son exactas?

Ahora los estudiantes tendrán más herramientas para argumentar sus respuestas y luego del trabajo realizado compararlas con sus respuestas iniciales.

Capítulo 5 CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

La elaboración de estas memorias, lleva consigo no solo la narrativa de cada momento, sino que adicional, cada momento está narrado a partir de una reflexión, puesto que no nos limitamos a describir el proceso, sino que de manera natural el ejercicio de mirar lo que se hace y cómo se hace, lleva implícito y casi difícil de separar un ejercicio de reflexión. Por ello, en este último capítulo, se presenta una reflexión de las reflexiones hechas, lo que conlleva a unas conclusiones del ejercicio de reflexionar.

De acuerdo al proceso que se ha realizadoy después de mirar hacia atrás, se identifica que no se pueden establecer conclusiones a nivel general, y por ello, se nos hace necesario presentar dichas conclusiones de acuerdo a diferentes aspectos:

5,1 FRENTE A LA TAREA DE DISEÑO

Inicialmente se parte del conocimiento del profesor, del *saber sabio*, donde se inició la tarea de diseño identificando aspectos que se consideran se tienen en cuenta. En esta parte del proceso se presentó una negociación de conocimientos, un compartir de experiencias en el aula y en el proceso de formación, un momento de trabajo colaborativo donde los aportes de cada una, son parte del proceso de aprendizaje que se lleva en el desarrollo de las memorias.

Por otro lado, es importante resaltar, que para este trabajo no se contó con un marco didáctico y metodológico establecido *-lo que puede como no afectar el diseño-*, por lo que cada momento de la propuesta se pensó en la medida que se iba explorando y profundizando sobre el problema de la trisección del ángulo.

En este sentido, se hace evidente la necesidad de buscar documentos que nos permitieran comprender mejor el problema de la trisección, ya que indudablemente el profundizar sobre el tema, le da más herramientas al profesor para llevar una propuesta curricular a la clase de matemáticas, aclarando que aunque con este trabajo se abordaron características de dicho problema, aún queda una gran cantidad de material bibliográfico por revisar dado que están en diferentes idiomas, son muy complejos y abordan diferentes aspectos que pueden ser tomados para profundizar sobre el tema.

También, en la tarea del diseño, se reconoce que al proponer el problema de la trisección del ángulo, el conocimiento con el que se contaba alrededor del problema era muy leve, pues aunque se había explorado en el espacio de formación de la Especialización con curvas mecánicas como la Cuadratríz, la Concoide y la Cisoide, no se tenía una idea clara de cómo habían llegado a concluir que era irresoluble. Sin embargo, esta experiencia nos permitió vivir y sentir, que no es suficiente saber resolver un problema para considerar que ya lo podemos enseñar en la escuela.

En consecuencia, una gran reflexión que sobresale es en los errores que cometemos inconscientemente en nuestras prácticas docentes, ya que muchas veces se cae en el error, por un lado de enseñar a resolver problemas como se aprendió, y por otro lado, mostrar una matemática que siempre tiene una solución a todo tipo de problemas. Por ello, rescatamos el valor de la propuesta que se presenta, ya que como evidenciaron en la lectura, los objetivos no están propuestos a enseñar, sino a generar discusiones en el aula sobre las Matemáticas, y lo rescatamos porque recordamos desde nuestra experiencia inicial como estudiantes de colegio y luego como profesoras actualmente, que casi nunca -para no decir nunca-, se lleva al aula discusiones sobre características de las Matemáticas, casi siempre se llevan conceptos, formulas y procedimientos ya consolidados y aceptados como verdaderos e irrefutables.

Por lo tanto, el hecho de mostrarles a los estudiantes un problema que antiguamente no se puedo solucionar, presenta otra cara de las Matemáticas, la cara humana, que como todo lo que hace el humano tiene un proceso, y en ese proceso tuvo inconvenientes, errores, retrocesos, etc., y se discute la idea de unas Matemáticas exactas, perfectas y siempre encaminadas a la verdad y a la certeza. Por ello, en la tarea del diseño, algunos aspectos de la Historia de Las Matemáticas nos permitieron orientar la propuesta, ya que está basada en su totalidad en el proceso de la solución del problema de la trisección del ángulo, desde la geometría propuesta por la antigua Grecia hasta la geometría propuesta por Descartes en el siglo XVII.

Dentro de la tarea de diseñar, el profesor debe identificar qué recursos son necesarios para llevar a cabo su propuesta, en este sentido, agradecemos el contar con programas de geometría dinámica como lo es Geogebra, ya que de cierta manera éste permite realizar procesos de generalización, ya que en una construcción de un modelo geométrico, se pueden validar hipótesis para cualquier ángulo, lo que tal vez no se puede percibir fácilmente desde la construcción hecha en papel con regla y compás. Adicional a esto, está la herramienta de medir ángulos en Geogebra la cual tiene mayor precisión que la medición de ángulos con transportador.

Finalmente, se identifica en la tarea del diseño, que este no es lineal y que se presenta de manera cíclica lo que implica que debe ser flexible, es decir que no se deben determinar momentos estrictamente en el orden propuesto, ya que estos se determinan según la apropiación que se tenga del tema y de las tareas que se le proponen a los estudiantes, que a su vez deben estar conectados con los objetivos propuestos.

5.2 FRENTE AL EJERCICIO DE CONSTRUIR UNA MEMORIA

El realizar las memorias, nos permitió generar las anteriores conclusiones, porque si de cierta manera en este documento solo se mostrara el diseño de la propuesta final como una secuencia de tareas que se le proponen alos estudiantes, se deja de lado todo el proceso que se llevó, y pues si el ejercicio de llevar una propuesta curricular al aula no le deja enseñanzas al profesor, no se puede pretender dejar una enseñanza en los estudiantes.

En consecuencia, no sabemos si el diseño garantiza alcanzar los objetivos propuestos, porque como tal no se ha validado la propuesta (aplicar a un grupo específico de estudiantes y registrar su proceso) pero lo que si podemos afirmar es que el proceso de diseño registrado, garantiza una conciencia de cómo estamos realizando la tarea, reconociendo que no es una tarea trivial y sobre todo de cómo podemos usar la Historia de las Matemáticas en lo que llevamos al aula y no quedarnos en una breve reseña de algún matemático en un momento de introducir un tema.

En este sentido, concordamos en que una de las dificultades en la elaboración de las memorias consistía en tener herramientas que nos permitieran abordar un problema histórico, porque reconocemos que en nuestro proceso de formación, la Historia de Las Matemáticas hacían parte de un marco teórico y no de la propuesta didáctica que se proponía. Entonces, el escuchar las conversaciones que se daban en el proceso de diseño se veían todas las falsas ideas que se tenían de los usos de la historia, creyendo que hacían parte de una clase de historia y no de la clase de matemáticas.

Por ello, creemos que esta experiencia no puede generalizarse a todos los profesores de matemáticas, es decir, puede ser que otros profesores tengan otras estrategias y tomen otras rutas para realizar la tarea de diseñar una propuesta curricular, pero si hace parte de las reflexiones de dos profesoras que cada día llevan una idea de *"Las Matemáticas"* al aula, idea que no influye a un estudiante, sino tal vez a miles. Por ello, rescatar que dos profesoras sean conscientes de cómo realiza la tarea de diseñar y qué idea de matemáticas está llevando, permite mejorar poco a poco sus prácticas en el aula, reconociendo que el mayor aprendizaje que se obtiene, es aquel que se reflexiona y se refleja en nuestras acciones.

5.3 DEL CONOCIMIENTO Y LA EXPERIENCIA

Este último aspecto, engloba gran parte de los objetivos de esta propuesta, ya que se parte de pensar como algo que parecía tan simple como construir *"un diseño"* se vuelve tan complejo, donde a partir de la elaboración de memorias, el diseño se hace paralelo al describir y reflexionar. En este sentido, la memoria no es una memoria con una linealidad temporal sino se presenta un proceso cíclico, donde se presentan aspectos que no se reconocen en la literatura sobre el diseño, el ejercicio de hacer una narrativa es una estrategia para identificar el cómo se hace un diseño y sin embargo algunas de las cosas que se van evidenciando pueden no estar necesariamente presentes.

La propuesta que aquí se presenta, tiene un aspecto fundamental y es el hecho de discutir en la clase de matemáticas ¿Qué son las matemáticas?, donde escuchar las respuestas de los estudiantes y tenerlas en cuenta, no solo lo hace participe sino que le permite al docente abordar otro tipo de competencias matemáticas evidenciando procesos de razonamiento, de comunicación matemática y de modelación.

Por ello, se refleja en la propuesta el papel moderador del profesor al encontrar y debatir las diferentes posturas sobre la exactitud que presentan los estudiantes, dejando de lado un profesor expositor de contenidos matemáticos. Así mismo, se reconoce que el conocimiento del profesor va más allá de lo que pone en la clase, pero no se ve explícito en el diseño cuando este solo presenta un producto final.

En este sentido, la elaboración de la propuesta nos permite replantearnos sobre *¿Qué tanto el conocimiento del profesor se debe ver reflejado en la presentación de las actividades y tareas que se llevan al aula?* Reconociendo que si bien el profesor no enseña todo lo que sabe, si debe saber muy bien todo lo que enseña.

Si bien, nos hemos visto enfrentadas a situaciones que implican la exactitud en la clase de matemáticas, nunca nos hemos planteado la necesidad de discutir sobre este aspecto, por ello, esta propuesta no solo se quiere llevar al aula, sino principalmente a nuestro proceso de formación continuada reportando no tanto la comprensión de la exactitud, sino el hecho de que muchas cosas de esas son incomprensibles para el docente, porque no está mal reconocer que como profesores ignoramos y no entendemos muchas cosas. Así pues, aunque se abordó la postura de diferentes autores como Panza (2011) quedamos cortos en el análisis y comprensión de lo que es exactitud y cómo esta es parte de las Matemáticas, donde la exactitud y la precisión es un aspecto que permite generar la discusión alrededor de características propias del estudio de las matemáticas y el cual se puede concebir como un objeto matemático, que conlleva a identificar la percepción e ideario que llevan los estudiantes de las matemáticas.

Finalmente, reconocemos que el diseño curricular frente al problema de la trisección del ángulo es una propuesta que difícilmente podríamos aplicar, porque de cierta manera los profesores nos enfrentamos al encasillamiento de contenidos matemáticos en determinado espacio de tiempo. Puesto que se debe tener en cuenta que el aplicar una propuesta de diseño curricular como la que se ha planteado a lo largo del trabajo se quiere generar discusiones en la clase de matemáticas sobre las matemáticas, es necesario contar con el espacio para ello, porque si bien es cierto, en muchos colegios la planeación curricular más que ser una herramienta que le permita al profesor llevar un orden y secuencia en las temáticas es una camisa de fuerza que no le permite salirse de ese esquema y llevar la clase a un contexto diferente como generar discusiones alrededor de contenidos, porque ello le implica aplazar clases y romper el esquema planeado.

Capítulo 6 DIVULGACIÓN

Tomando algunos aspectos generales del diseño, se presenta la ponencia "***La trisección del ángulo, un problema que se puede solucionar en la clase de matemáticas"*** a la Cuarta Escuela Nacional de Historia y EducaciónMatemática ENHEM realizado en la ciudad de Cali en el mes de Octubre del 2013, siendo acepta y presentada a la comunidad educativa.

LA TRISECCIÓN DEL ÁNGULO, UN PROBLEMA QUE SE PUEDE SOLUCIONAR EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS

Bethsy Marcela Rucinque López Jennyfer Alejandra Zambrano Arias
bethsy1516@hotmail.comnifer86@gmail.com
Universidad Pedagógica Nacional

La Historia de las Matemáticas en la educación matemática

Educación básica y Media

Resumen

Se presenta una propuesta de intervención en el aula a partir del problema de la trisección del ángulo, dividida en dos momentos importantes, el primero es abordado con los instrumentos clásicos como la regla y compás por medio de la elaboración de construcciones geométricas en papel (físico) y el segundo, haciendo uso de Geogebra en la construcción de soluciones al problema aplicando curvas familiares a los estudiantes como la parábola y la cubica, invitando a los estudiantes a discutir la cuestión de la exactitud en las matemáticas.

Palabras Claves: trisección del ángulo, regla y compás, exactitud, curva.

La Trisección del ángulo: el problema

Es ampliamente conocido que los griegos utilizaban los instrumentos como la regla y el compás, porque con estos, se podían realizar diferentes operaciones entre longitudes. Sin embargo, cuando surgieron los problemas clasicos griegos, la regla y el compás no eran suficientes para solucionarlos y por ello los catalogaron como problemas imposibles de solucionar.

En este sentido, la trisección del ángulose consideraba imposible porque implica la división en tres partes iguales de una longitud de arco, lo que llevaba a pensar en el proceso de rectificación de una curva, ahora como se debía encontrar una relación de ángulos triples[6] se debía solucionar una ecuación cubica, que como se evidencia en la duplicación del cubo, ya era algo imposible. En este sentido la trisección del ángulo comprende como lo propone Jim Loy (2003) establecer una relación entre lo que se podia y no se podia hacer dentro de lo que consideraban como geométria.

Por ello, uno de los cuestionamientos en este trabajo, consiste en pensar como abordaron inicialmente el problema de la trisección del ángulo, utilizando únicamente la regla y el compás, y entender cómo fue que llegaron a la conclusión de la imposibilidad de este problema. Reconocemos que demostrar que algo es imposible es más difícil y en ese camino Jim Loy (2003) presenta una recopilación de diferentes construcciones donde se intenta trisecar un ángulo utilizando regla y compás.

Propuesta para abordar la trisección del ángulo en la clase de matemáticas

El proceso de diseño de la propuesta se llevó a cabo en dos fases importantes: en la primera se realizó un proceso de indagación (saber del profesor) donde se cuestionó sobre qué aspecto de las curvas se quería abordar, luego se realiza una revisión de diferentes formas de abordar el problema para proponer diferentes situaciones que generen la necesidad de trisecar un ángulo, y esto permite seleccionar algunas actividades que permitieron construir una ruta de trabajo con los estudiantes.

Al momento de diseñar la propuesta se plantea que con ella se quiere llevar al estudiante a reconocer que existen diferentes respuestas para un mismo problema, por otro lado se

[6] Relación que se deriva de la suma de ángulos $sen\,(a+\,b)\;=\;sin\,(a)\,cos\,(b)-cos\,(a)\,sin\,(b)$ como $sen3a = 3sina - 4sin^3a$

espera abordar una discusión sobre el problema de la «exactitud» en el desarrollo Histórico de las Matemáticas, así mismo, evidenciar que en el proceso Histórico de las matemáticas existieron problemas irresolubles.

Se inicia la propuesta de intervención con una conversación con los estudiantes alrededor de las preguntas *¿Qué son las matemáticas? ¿Las matemáticas son exactas? ¿Existen problemas matemáticos que aún no se pueden solucionar?* Las respuestas obtenidas serán insumo para una conversación al finalizar el trabajo, así poder hacer una comparación de los resultados obtenidos con el momento inicial.

Luego se le presenta a los estudiantes una imagen[7] con el propósito de invitarlos a interpretar y recrear las situaciones que en ella se presentan, identificando un contexto que les permita darle sentido a la imagen, creando personajes teniendo en cuenta que la narración debe incluir aspectos matemáticos y que se deberá recurrir a la imaginación mediante la reorganización y la selección de aquellos eventos que son funcionales a los objetivos de la historia.

Ilustración 12: Imagen Utilizada para identificar una posible necesidad para crear un instrumento que mide ángulos

Teniendo en cuenta todo lo observado en la imagen por los estudiantes y el contexto que ellos han recreado, se realizará una socialización de los diferentes contextos. Esta socialización estará mediada por la siguiente situación: *Si usted fuera uno de los personajes de la historia que ha recreado y el instrumento se estropeará, ¿Cree usted que lo podría*

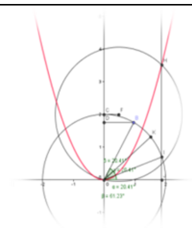
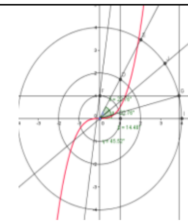
[7]Imagen extraida de de Adriano Dematte and Fulvia Furinghetti,(2011) History, Figures and Narratives in Mathematics TeachingUniversity of Genova, Italy

construir? ¿Cómo? Y por medio de esta última pregunta se invita al estudiante a la construcción de un instrumento de medición de ángulos como por ejemplo el transportador. Luego, de acuerdo al contexto creado por los estudiantes se le propone idear la manera de crear un transportador que le permita medir ángulos de manera precisa; en el proceso de buscar posibles maneras de construir el instrumento el estudiante inevitablemente se centrará en la necesidad de bisecar un ángulo, trisecarlo o partirlo en varias partes iguales.

Ahora bien, se organizan grupos de trabajo los cuales deben presentar un propuesta de la construcción de un instrumento que mida ángulos e inicialmente que mida un ángulo de 20°. En este proceso el estudiante debe presentar su trabajo a partir del uso de la regla y el compás, y más adelante validar las construcciones en Geogebra, el estudiante deberá familiarizarse con sus herramientas, realizar construcciones y comprobar utilizando medidas. En el momento en que el estudiante empiece a validar la construcción que ha hecho del transportador con un ángulo de 20° evidenciara las dificultades que tuvieron los matemáticos de aquella época.

Luego, Se le entrega a cada grupo una construcción diferente de la trisección del ángulo y ellos la van probar primero utilizando regla y compás y luego en Geogebra. Con esta actividad se espera que el estudiante valide si se puede trisecar el ángulo de manera precisa con lápiz, regla y compás o utilizando el programa Geogebra.

Posteriormente, se pretende hacer una comparación entre la realización de un modelo físico con regla y compás y la validación utilizando valores en el programa Geogebra. El profesor presentará algunas curvas y los estudiantes deberán probar que éstas trisecan exactamente el ángulo, ellos evidenciaran que mediante las curvas es factible trisecar un ángulo de manera exacta; se le mostrarán aquellas curvas que para ellos son familiares como la parábola, la cúbica entre otras.

	
Trisección del ángulo utilizando la parábola	Trisección del ángulo utilizando la curva cúbica

Finalmente Después de todo el trabajo realizado, los estudiantes volverán a las preguntas inicialmente planteadas: *¿Qué son las matemáticas? ¿Las matemáticas son exactas? ¿Existen problemas matemáticos que aún no se pueden solucionar?* Ahora los estudiantes tendrán más herramientas para argumentar sus respuestas y luego del trabajo realizado compararlas con sus respuestas iniciales.

Algunas Reflexiones

El problema de la trisección del ángulo fue considerado en un momento de la Historia de las matemáticas como "irresoluble" o "imposible" porque con las herramientas permitidas (regla y compás) no se podían construir números diferentes a las raíces cuadradas. Más adelante se involucró dentro de las matemáticas, el trabajo con curvas, las cuales permitieron resolver los diferentes problemas griegos. Por ello, llevar a la clase de matemáticas el problema de la trisección del ángulo, permite trasladar a los estudiantes a un momento de la Historia de las Matemáticas, donde todo no siempre se podía solucionar y se invita a tener la experiencia de resolver el problema y de analizar cuáles eran las discusiones que tenían los antiguos matemáticos.

Dentro de estas discusiones se propicia un espacio de la clase de matemáticas para conversar con los estudiantes sobre la percepción que tienen ellos de las matemáticas, para abordar específicamente el carácter de la exactitud de las matemáticas comparando procesos y representaciones en construcciones realizadas en el mundo físico utilizando regla y compás, y en el mundo abstracto utilizando el programa Geogebra. Por ello, se reflexiona en que con este tipo de actividades más que generar un aprendizaje geométrico se invita a los estudiantes a la discusión sobre el carácter de la exactitud de las matemáticas, sobre la percepción de una matemática perfecta, que no admite el error. Dado que en la propuesta se evidencia que a partir de los errores y de muchos intentos, se logra establecer no uno, sino varios métodos para resolver un mismo problema.

Como profesores de matemáticas, el ejercicio de diseñar una propuesta de intervención en el aula vinculando aspectos de la Historia de las matemáticas y específicamente el trabajo con curvas lleva a una gran reflexión sobre la importancia del saber del docente, dado que el conocer aspectos históricos de lo que manejamos cada día en el aula de clase, mejora la seguridad y la capacidad del profesor para proponer y planear actividades que conlleven al trabajo de una matemáticas más humana, con errores y con muchas cosas que descubrir.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arenzana, H. V. (1998). Las curvas mecánicas en la geometría griega. La cuadratriz de Dinóstrato. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 31-36.

Auger, P. (1961). Tendencias actuales de la investigación científica. *Revista de educación. Madrid, 1961, n. 140*, p. 124-126.

Bos, H. J. (2001). Redefining Geometrical Exactness. Descartes' Transformation of the Early modern concept of construction. En J. B. Toomer, *Studies and sources in the history of mathematics and physical sciences* (pág. 471). Utrecht: Springer.

Chamorro, C. B. (1994). *El problema de la medida. Estimación y aproximación. Importancia relativa en los errores de la medición. .* Madrid: Síntesis S.A.

Chevallard, Y. ((1991)). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Recuperado el 15 de Mayo de 2013, de http://www.e-historia.cl/: http://www.e-historia.cl/cursosudla/13-EDU413/lecturas/03%20-%20La%20Trasposicion%20Didactica%20-%20Del%20Saber%20Sabio%20al%20Saber%20Ense%C3%B1ado%20-%20Yves%20Chevallard%20(pag.%203-24).pdf

Collantes, A. (2005). Construcciones con regla y compás., (págs. 29-36).

Cromer, A. H., & Fernández Ferrer. (2010). *Física en la ciencia y en la industria* (3 ed.). Julián Editorial Reverté S.A.

Furinghetti, A. D. (2011). *History, Figures and Narratives in Mathematics Teaching* .Italy: University of Genova.

Godino, J. D. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Loy, J. (2003). *Trisection of an Angle*. Recuperado el 12 de Mayo de 2013, de http://www.jimloy.com/geometry/trisect.htm

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas.* Bogotá.: Magisterio.

MEN. (2003). *Estándares Curriculares de matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

Panza, M. (2011). Repensar la exactitud geométrica. Historia Mathematica. *Historia Mathematica*, 42-95.

Peralta, J. (1998). *Las matemáticas en el arte, la música y la literatura.* (Vol. 3). Tendencias Pedagógicas.

Redondo, F. G. (2001). Una visión histórica en torno a la generación del conocimiento matemático. *Revista complutense de educación*, 623.

Siavash, H. S. (2012, enero). A Possible Solution of Trisection Problem. *n Actas de la sexta conferencia internacional WSEAS en Ingeniería Informática y Aplicaciones y, Actas de la Conferencia Americana de 2012, sobre Matemática Aplicadas* (págs. (pp. 277-285)). Evanston, Illinois: Mundial de la Ciencia y la Academia de Ingeniería y Sociedad (WSEAS).

Suzuki, J. (1 de febrero de 2008). A Brief History of Impossibility. *Matemáticas Revista, VOL. 81*(1), 27-38.