IDENTIFICACIÓN DE LA ESTRUCTURA ESPACIAL DE ÁREA RECTANGULAR: UNA PUERTA DE ENTRADA AL DESARROLLO DE PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Edwin Yesyd Parra Buitrago

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Maestría en Docencia de la Matemática

Bogotá, 2020

IDENTIFICACIÓN DE LA ESTRUCTURA ESPACIAL DE ÁREA RECTANGULAR: UNA PUERTA DE ENTRADA AL DESARROLLO DE PENSAMIENTO ALGEBRAICO

EDWIN YESYD PARRA BUITRAGO
CÓDIGO: 2016185011

Trabajo de Grado realizado como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Docencia de la Matemática

Directora:
CECILIA AGUDELO VALDERRAMA
PhD. en Educación Matemática
Monash University

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Bogotá, 2020

A mis padres, Alcira y José, por su inconmensurable apoyo y razón de ser

A Alicia, a Carlos y a Jei, los quiero

A mis amigos

A mis estudiantes,

Pero sobre todas las cosas al Creador… a Yoshua Yahweh

Declaración

Para todos los efectos, declaro que el presente estudio es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he proporcionado los respectivos créditos.

Edwin Yesyd Parra Buitrago

____

Edwin Yesyd Parra Buitrago

Reconocimientos

Reconocimiento especial a mi asesora del proyecto, la profesora Cecilia Agudelo Valderrama, por su enorme disposición y paciencia, y por la gran cantidad de tiempo que dedicó para asesorarme durante el desarrollo de este trabajo de grado; además por darme la oportunidad de abrir mi pensamiento hacia una mirada más reflexiva de lo que es el conocimiento, las matemáticas escolares y mi rol como profesor, abriéndome así una puerta hacia mi crecimiento personal y profesional. Si bien reconozco que inicié este proceso con el propósito de fortalecer mi formación académica, hoy me siento gratificado al haber podido involucrarme en un proceso de aprendizaje y reflexión que no solo aportó a mi formación académica sino, también, a mi desarrollo personal que hoy da sus frutos en mi forma de ver el mundo: abierto a la posibilidad de cambio, y en gran medida, dependiendo de nosotros mismos—donde la educación es motor fundamental para el desarrollo de ciudadanos críticos y reflexivos. Considero este trabajo como uno de sus frutos.

Quiero subrayar que este reporte está escrito en primera persona del singular porque, de manera concertada con la profesora Cecilia, se consideró necesario, dada la naturaleza y propósito del trabajo de grado en el contexto de la maestría en su modalidad de “profundización”; como se deja en claro en líneas anteriores, en ningún momento intento desconocer el meritorio lugar del trabajo de mi directora.

Reconozco que ahora entiendo lo que mis profesores intentaron mostrarme durante el desarrollo de los espacios académicos que pude cursar en la maestría.

A mis estudiantes, de quienes aprendo tanto, gracias porque me han dado la oportunidad de reflexionar y reconocer por qué muchas veces no entendían lo que hacían. Ahora espero contar con más herramientas que me permitan seguir mejorando día a día en mi rol como profesor.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***Identificación de la estructura espacial de área rectangular: una puerta de entrada al desarrollo de pensamiento algebraico,*** presentado por el estudiante:

Edwin Yesyd Parra Buitrago, Cód. 2016185011, CC. 1.030.568.292

como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática** y analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada,** cuarenta y dos (42) puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 25 días del mes de febrero de 2020.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesora: ANA CECILIA AGUDELO (UPN)

Jurados:

Profesor: ÉDGAR ALBERTO GUACANEME (UPN)

Profesor: JAIME FONSECA GONZÁLEZ (UPN)

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Lista de Transcripciones

Lista de Apéndices

Capítulo 1: Origen y contexto de este proyecto

Este proyecto se enfoca en la promoción del desarrollo de pensamiento algebraico, y tuvo su origen en una inquietud que me surgió a partir de una situación que viví en mí propia aula de enseñanza de las matemáticas, antes de iniciar el programa de maestría en el que este se enmarca. En virtud de ello, considero relevante iniciar la presentación de este trabajo compartiendo con el lector tal situación (ver la Figura 1.1), los interrogantes que sobre esta inicialmente me surgieron, y cómo esos interrogantes fueron cambiando a medida que fui profundizando sobre lo que significa *pensar algebraicamente*, y lo que puede estar implicado en mi práctica de enseñanza cuando el propósito es apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico desde los grados de básica primaria.

> *Cuando a Samuel, un estudiante de Grado 8°, quien ha realizado algún trabajo sobre el tema "expresiones algebraicas", se le presenta una expresión como:*
>
> $$x - 20 = 151$$
>
> *y se le pregunta acerca del valor de la "x" en la expresión, se le observa su cara de asombro y, con ella, su respuesta: "Profe, ¿me recuerda que hay que hacer?. . . en realidad, no recuerdo cómo se hace eso".*
>
> *Ahora, cuando a Sara, una estudiante de Grado 4° de primaria quien ha venido trabajando en un contexto aritmético, se le presenta una expresión como:*
>
> $$\square - 20 = 151$$
>
> *y se le pregunta acerca del valor que va en la casilla, fácilmente, luego de pensar unos cuantos segundos y de hacer unos sencillos cálculos aritméticos, ve que en* $\square$ *va el número 171, es decir que:* $\square = 171$

Figura 1.1: *La situación que originó la idea de desarrollar este proyecto*

Ante la situación de Samuel, descrita en la Figura 1.1, la pregunta que inicialmente me surgió fue, ¿por qué Samuel pierde el sentido de su conocimiento aritmético cuando se le presenta una ecuación como $x - 20 = 151$, en la que en cambio de aparecer una caja vacía, hay una letra, y ello, a pesar de su experiencia en la manipulación de expresiones con literales?

A través del estudio inicial de la literatura, y de la interacción con mi asesora, llegué a ver que el caso de Samuel es el de muchos estudiantes de Grado 8° en el contexto colombiano y en contextos internacionales, incluso de muchos estudiantes que llegan a Grado 11° sin haber atribuido a las letras, en álgebra, el significado matemático que tienen (ver, por ejemplo, Agudelo-Valderrama, 2000; 2002; Küchemann, 1981; Mason, Graham, Pimm, y Gowar, 2014). Lo recalcado por estos autores, y mi experiencia propia como profesor, señalan que para muchos estudiantes el trabajo en álgebra resulta aburrido, sin sentido y muy difícil. Más aún, Agudelo-Valderrama (2002) subraya cómo el álgebra, en algunos casos, se vuelve "el coco" de la escuela.

El telón que cubría lo que yo veía como un problema o dificultad propia de los estudiantes, y en este caso de Samuel, empezó a correrse, pues a través del largo proceso de interacción con mi asesora y su constante apoyo para que aprendiera a escudriñar estudios y resultados de investigaciones relevantes, llegué a reconocer mi incomprensión sobre lo que es el pensamiento algebraico, y su importancia en el proceso de asignación de significado al uso de las letras en álgebra. Las profundizaciones conceptuales alcanzadas sobre lo que puede estar involucrado en la enseñanza y el aprendizaje en el inicio del trabajo algebraico escolar, esto es, en un trabajo que apoye el desarrollo del pensamiento algebraico desde edades tempranas—profundizaciones que he empezado a delinear en este capítulo, y que son presentadas de manera más amplia en el Capítulo 2—me llevaron a replantearme las preguntas que estaba haciendo para el caso de Samuel. Ahora, las preguntas que repicaban en mi mente sobre el caso de Samuel se referían a la pertinencia de mis decisiones y actos de enseñanza, y no a las dificultades de los estudiantes. Presento a continuación, dos de esas nuevas preguntas, seguidas de clarificaciones y reflexiones específicas alcanzadas que apoyaron mi reconsideración de la problemática con la que inicié mi recorrido en esta maestría e impulsaron la decisión de centrar la atención, en este proyecto, en el caso de la enseñanza de estructura de área rectangular como contexto para apoyar el desarrollo de pensamiento algebraico:

- *¿Acaso solucionar una ecuación como $x - 20=151$, requiere del estudiante, el uso de pensamiento algebraico?*

- *¿Puedo como profesor esperar que Samuel le encuentre sentido a esa letra, y que la entienda como un número indeterminado solo porque le muestro esa expresión simbólica?*

En primer lugar, la solución de la ecuación $x - 20 = 151$ no requiere uso de pensamiento algebraico, ya que esta se puede solucionar con un pensamiento netamente aritmético, y esto es lo que hacen muchos estudiantes cuando se pretende introducirlos a su trabajo algebraico simplemente con la presentación de ecuaciones como la presentada a Samuel que, en este caso, corresponde a una ecuación de la forma $ax + b = c$ (ver por ejemplo, Filloy y Rojano, 1989; Küchemann, 1981; MacGregor y Stacey, 1991). *En segundo lugar*, la ecuación se le presenta a Samuel, aislada de una situación-problema específica que le pueda ayudar a encontrar sentido, significado y posibilidades de acceso para que use el conocimiento que ya tiene. Como lo subrayan Radford (1996) y Rojano (1996) (citados en Agudelo-Valderrama, 2002), empezar con el uso de símbolos para representar cantidades desconocidas o cantidades que cambian no fue el proceso de desarrollo natural del álgebra a través de la historia. La búsqueda de solución a problemas específicos representó el punto inicial en el desarrollo del álgebra; además, en la búsqueda de formas de solucionar problemas específicos o familias de problemas, cuando apareció el uso de lenguaje simbólico, la creación de las expresiones simbólicas "no tuvo lugar en forma desconectada de la situación problema a la que se le buscaba solución" (Agudelo-Valderrama, 2002, p. 19). Esto ayuda a explicar la dificultad para asignarle significado al uso de letras en álgebra, y "el sinsentido que se crea para muchos estudiantes cuando se les presenta el álgebra escolar como una nueva materia en la que se trabaja con letras" (Agudelo-Valderrama, 2014, p. x).

En tercer lugar, y el más importante, el pensamiento algebraico en el contexto del trabajo con ecuaciones tiene que ver con el reconocimiento de la incógnita como una *cantidad indeterminada,* y la capacidad de *operar* con ésta; esto es, para quien soluciona la ecuación, antes de encontrar el valor de la incógnita, ésta representa *cualquier número,* esto es una *generalidad* porque es un número que no se conoce; sin embargo, puede *operar* con ese número (Filloy y Rojano, 1989). En este sentido, *el número indeterminado* (la incógnita) contiene una manifestación de *variable,* por cuanto su primera percepción, por parte de quien contempla o considera la ecuación, como ya subrayé, debe ser la de “cualquier valor”, cualquier número (Trigueros y Ursini, 2001), la *variable* como *número general.* Sin embargo en mis prácticas de enseñanza en la introducción al álgebra elemental siempre he orientado a los estudiantes desde la solución de ecuaciones como la presentada a Samuel en la Figura 1.1, sin estar consciente, yo mismo, de que iniciar el trabajo algebraico con la presentación de ecuaciones, como la presentada a Samuel, puede no promover la idea de *indeterminación* (cualquier número o generalidad) que debe estar involucrada al considerarse lo que representa la x en la ecuación x - 20 = 151, antes de que por razón de haberse operado con esta y se encuentre el valor que satisface la igualdad (Trigueros y Ursini, 2001)—observándose, así, las dificultades ya subrayadas.

Agudelo-Valderrama (1999) resalta que a raíz de la identificación de las limitaciones de una enseñanza que normalmente inicia el trabajo algebraico con un énfasis en la presentación de ecuaciones para hallar la incógnita—sin que los estudiantes hayan encontrado un sentido al uso de las letras en álgebra[1]—y el conocimiento de la variedad de dificultades de los estudiantes para alcanzar una noción de la versatilidad del concepto de variable, la comunidad internacional de educadores matemáticos propuso varias formas de abordar el inicio del trabajo algebraico escolar. Se hizo, entonces, gran énfasis en la promoción del desarrollo del pensamiento algebraico desde una aproximación a la noción de variable como *número general* (ver, por ejemplo, Küchemann, 1981; Mason et al. ,2014; Kieran, 1996). Es de resaltar, en este punto, que si bien el desarrollo del álgebra empezó por la necesidad de solucionar problemas específicos, esto es, inició con el uso de la incógnita, la investigación ha mostrado que a los niños les queda muy fácil identificar regularidades y patrones, esto es, identificar *generalidad* (Agudelo-Valderrama, 2000; Mason, 1999; Mason et al., 1999). Consecuente con lo anterior, los lineamientos curriculares de las matemáticas escolares en contextos internacionales (Ver, por ejemplo, National Council of Teachers of Mathematics, NCTM), y en nuestro contexto nacional,

[1] Énfasis que corresponde a lo que yo viví como estudiante de álgebra escolar, y he continuado en mi enseñanza como se evidencia en la Figura 1.1.

recomendaron impulsar, desde edades tempranas, el desarrollo de la capacidad para identificar y comunicar generalizaciones matemáticas.

Sin embargo, a pesar de las recomendaciones de los lineamientos y estándares curriculares de matemáticas (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 1998, 2006), en mi propia aula de clase, y según las percepciones surgidas de mi experiencia como profesor, en muchas aulas de clase del contexto escolar, el estudio del álgebra se ve reducido a procesos netamente "instrumentales" (Skemp, 1976) que conducen al estudiante a manipular expresiones simbólicas *dadas,* mediante el uso de la memoria y la reproducción mecánica de reglas de procedimiento presentadas por el profesor o los textos guía. Estas prácticas, ahora entiendo, están apoyadas en una concepción de las matemáticas escolares como una lista de tópicos fragmentados y organizados jerárquicamente (Agudelo-Valderrama, Clarke y Bishop, 2007) que se deben entregar en el aula para que los estudiantes las *reciban* y las reproduzcan. Así, los temas se parcelan y se presentan, cada uno como un *objetivo* de enseñanza y aprendizaje que se puede alcanzar fácilmente en un tiempo pre-especificado, esto es, el álgebra se concibe como un "curso empaquetado, prefabricado" (Agudelo-Valderrama *et al*., 2007) consistente en la presentación, por parte del profesor—y reproducción, por parte de los estudiantes—de una colección de reglas de procedimiento para manipular expresiones simbólicas dadas que poco significado tienen para los estudiantes. Según mi interpretación de los planteamientos de Stenhouse (1991), esta forma de concebir lo que es el conocimiento matemático y este enfoque de enseñanza se convierten en "un currículo por objetivos conductuales", como se explica en el Capítulo 2. Un vivaz ejemplo de lo señalado se encuentra en la enseñanza y el aprendizaje de "área rectangular" que tiene lugar principalmente por los esquemas señalados en algunos textos guía populares (ver un ejemplo en la Figura 2.5 del Capítulo 2), los cuales por lo regular presentan rutinas de trabajo para el contenido a enseñar (área del rectángulo), ligadas a unos objetivos regularmente de procedimiento (*e.g.*, aprender a hallar el área del rectángulo). Como subrayan Skemp (1976) al describir el aprendizaje *instrumental*, y Agudelo-Valderrama (2000), al dar un ejemplo de un minicurrículo de objetivos conductuales (ver la Figura 1. 2), la rutina de clase inicia con la presentación de la fórmula

(A= b × h), seguida por el desarrollo de ejemplos de su aplicación, y luego de ejercicios similares para aplicar y mecanizar[2] la fórmula. La evaluación del aprendizaje está enfocada a verificar que los estudiantes, en ejercicios del mismo tipo de los ya trabajados, aplican la fórmula y hallan una respuesta correcta.

Agudelo-Valderrama (2000) explica que la estructura esquematizada (que presento en la Figura 1.2) fue diseñada intencionalmente para ilustrar el caso de un minicurrículo netamente *conductista* que convierte el aprendizaje en un simple *entrenamiento* (Stenhouse, 1991). Considero que aunque se tengan en cuenta los elementos centrales que podemos considerar al tomar decisiones curriculares en la cotidianidad del aula: decisiones sobre el *qué,* el *para qué y porqué, y* el *cómo* de la enseñanza y el aprendizaje (Agudelo-Valderrama, 2000), el esquema subraya la intención de mostrar a los estudiantes cómo *usar* una fórmula dada—y no cómo involucrarlos en un proceso de construcción conceptual de la fórmula. Así, la conceptualización y planeación de la clase se convierte en una guía de enseñanza que no tiene en cuenta la complejidad del aprendizaje, no permite reflexionar en torno a los diferentes procesos de pensamiento de los estudiantes con quienes se trabaja; es decir que se deja de lado el contexto del aula para el cual se diseña, y se ignoran los tipos de potencialidades naturales de los estudiantes.

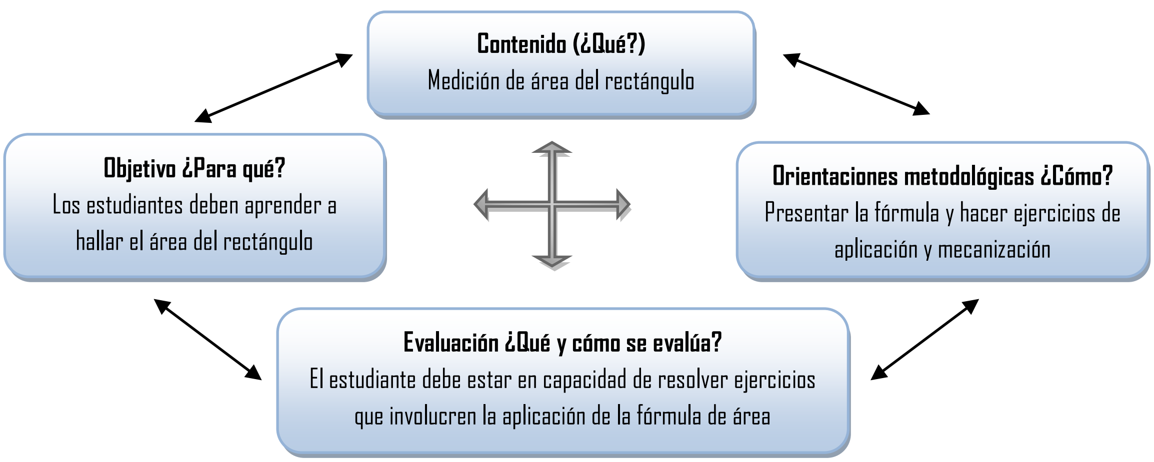


Figura 1.2: *Una esquematización que describe un currículo por objetivos conductuales en la enseñanza de área rectangular, según Agudelo-Valderrama (2000, p. 10)*

[2] Con la palabra "mecanizar" me refiero al entrenamiento que el estudiante hace al hacer muchos ejercicios que le implican aplicar instrumental y repetitivamente la fórmula de área rectangular.

Además, esta forma de enseñanza del concepto, que considero tan relevante en el ámbito escolar, se queda en apoyar el *saber qué hacer* a partir de la memorización de la fórmula, y pone un velo al reconocimiento de las relaciones numérico-espaciales que la estructuran, así como de la estructura multiplicativa que representa, es decir, al *saber qué, cómo y por qué* (Skemp, 1976). Estas profundizaciones me motivaron a considerar para el desarrollo de este proyecto, la necesidad de involucrarme en un proceso de aprendizaje y reflexión en torno a los diferentes elementos curriculares y, por ende, conceptuales implicados en la enseñanza y aprendizaje de estructura de área rectangular, por el potencial identificado en este foco matemático para apoyar el desarrollo de *pensamiento algebraico*, dados los procesos de *generalización* inmersos en la construcción de la fórmula.

Consecuentemente, el trabajo del proyecto que aquí se reporta tuvo como preocupación, apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico de un grupo de estudiantes de primaria, mediante *la identificación y comunicación de la estructura espacial de área rectangular,* es decir, el reconocimiento y comunicación de la estructura matemática subyacente en la fórmula de área rectangular—reconocimiento que involucra el uso de pensamiento numérico, pensamiento métrico-espacial y, en términos del desarrollo de pensamiento algebraico al que anteriormente hice referencia, la identificación de variable *como número general.* Con este foco de atención en mente, el propósito general de este proyecto fue *identificar los alcances en el desarrollo de pensamiento algebraico de un grupo de estudiantes de grado quinto de primaria, de una innovación curricular—una secuencia de actividades—diseñada con la intención de apoyar el reconocimiento de estructura espacial de área rectangular.*

1.1 Justificación del trabajo de este proyecto

Para el desarrollo de este proyecto consideré crucial trabajar en la *identificación de la estructura espacial que subyace a la fórmula de área rectangular*, ya que como nos sugieren Outhred y Mitchelmore (2000), el tema de área es un tema particularmente importante en el desarrollo de comprensión de las matemáticas escolares y, por ende, es importante tenerlo en cuenta como foco central en el diseño y desarrollo del currículo escolar. Además, la medición de área rectangular es una de las actividades/tareas de medición más comunes de la vida cotidiana. La identificación de la estructura espacial de área rectangular es fundamental en el desarrollo del razonamiento multiplicativo; en un contexto como el de la enseñanza del álgebra de grado 8°, permite relacionar y reconocer las *estructuras matemáticas espaciales y numéricas* que están presentes, por ejemplo, en la multiplicación de expresiones algebraicas y la factorización.

De igual manera, vi en esta temática una oportunidad para promover *pensamiento algebraico* desde edades tempranas, ya que como nos muestran Mason y colegas (2014), es posible desarrollar el pensamiento algebraico de los niños, a partir de situaciones problema concretas que los llevaran a explorar *regularidades* y a reconocer *patrones* y expresarlos como generalizaciones; en el contexto de este proyecto, a partir de la identificación y comunicación de la estructura espacial de área rectangular. Esto coincide con las recomendaciones de los estándares curriculares (MEN, 2006), de crear oportunidades de aprendizaje para la construcción de estructuras conceptuales que fundamenten el estudio de la variación y el cambio, y una forma apropiada de apoyar un aprendizaje significativo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico. Para ello se sugiere iniciar con el reconocimiento de *regularidades* que pueden incluir formas espaciales y numéricas, y el reconocimiento de sus reglas de formación que dan lugar a la identificación y comunicación de patrones; "estos pueden ser reproducidos o representados de manera general por medio de un determinado procedimiento, algoritmo o fórmula" (p. 66); se habla, entonces, de elementos conceptuales que son centrales en el desarrollo de *pensamiento algebraico*.

Por último, el desarrollo de este proyecto me implicó como profesor en un proceso de aprendizaje y desarrollo profesional, retándome a profundizar y reflexionar sobre mis concepciones que me llevaron a estar inmerso en procesos de aula no solo como profesor, sino como estudiante e indagador de los procesos de pensamiento y aprendizaje de los niños, para poder tomar decisiones pertinentes sobre mi enseñanza. Estos planteamientos son señalados por Stenhouse (1991) en su propuesto modelo curricular *por procesos*, modelo en el que el profesor necesita mantenerse en procesos continuos de aprendizaje y mejoramiento de la práctica profesional.

1.2 Estructura de este trabajo

En este capítulo se presentó una descripción general de la naturaleza y propósito del trabajo de este proyecto, así como de su origen en las preocupaciones profesionales de su autor. En el Capítulo 2 se hace una descripción de los principales elementos teóricos que sirvieron como referentes para el desarrollo de dicho propósito, y que permitieron al autor reflexionar frente a los procesos de enseñanza y aprendizaje propuestos y vividos en el aula, así como la toma de decisiones para el diseño de la secuencia de actividades desarrollada que se enfocó en la identificación de la estructura matemática de área rectangular. Luego, el Capítulo 3 se dedica a presentar el enfoque metodológico que resulta de mi nueva concepción de la naturaleza del conocimiento matemático y consecuentemente de mi rol en el aula; este es seguido por una descripción del proceso de indagación, enseñanza y reflexión que tuvo lugar a lo largo del desarrollo de este proyecto. De allí se desglosan los resultados obtenidos en la secuencia desarrollada, los cuales son presentados en el Capítulo 4. Por último, el Capítulo 5 da una mirada retrospectiva del proyecto, dando cuenta y razón de los aprendizajes, reflexiones y conclusiones finales alcanzadas del proceso desarrollado en este proyecto.

Capítulo 2: Marco referencial

El propósito de apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico, en un grupo de estudiantes de grado quinto, a partir de la identificación de la estructura espacial que involucra la fórmula de área rectangular, me llevó a involucrarme en un proceso de aprendizaje que me permitió alcanzar una mejor comprensión de la problemática planteada en el capítulo anterior. Dicho proceso necesariamente incluyó el estudio de la literatura pertinente que nos presenta avances en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de este foco conceptual involucrado, que es identificado como objeto crucial de aprendizaje en las matemáticas escolares. Al haber alcanzado una mejor comprensión de los elementos conceptuales que surgieron como centrales, de acuerdo con el foco y propósito de este proyecto, en interacción y colaboración permanente con mi asesora se construyó el marco referencial que se estructuró como se muestra en la Figura 2.1

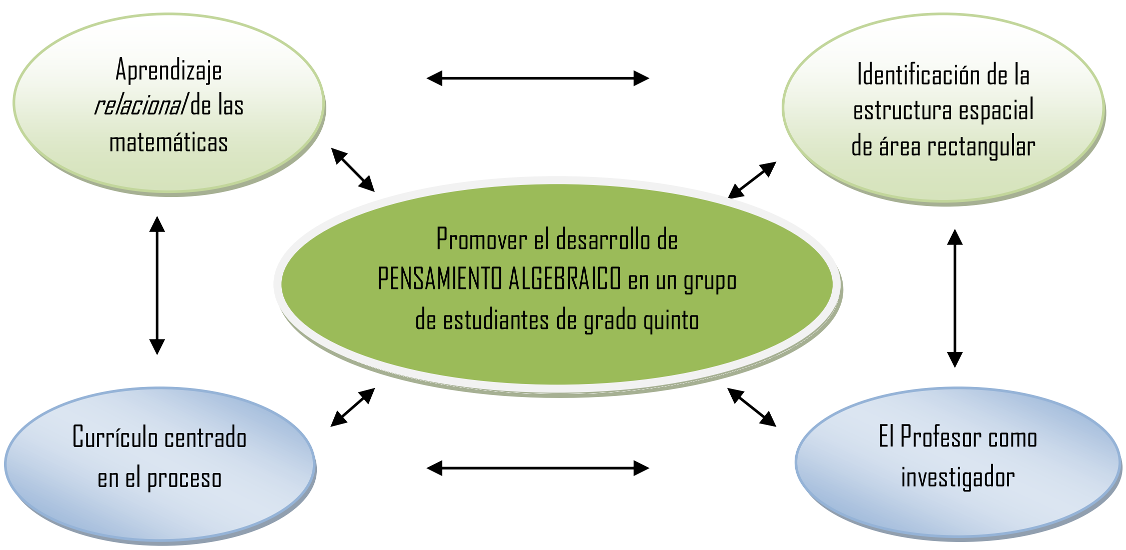


Figura 2.1: *Estructura general del marco referencial*

Promover el desarrollo de *pensamiento algebraico* en un grupo de estudiantes de grado quinto requiere apoyar en ellos un *aprendizaje relacional*, es decir, que al abordar una situación (problema), el estudiante debe saber *qué* hacer y *por qué,* y no simplemente memorizar reglas dadas en el aula, y sin razón (Skemp, 1976). En el contexto de este proyecto, un aprendizaje relacional tiene que ver con la *identificación de la estructura espacial de área rectangular: Identificarla, comunicarla y explicarla en su forma general, e* identificar estructura espacial para el caso general, que como lo veremos en la siguiente sección, requiere de pensamiento algebraico. Para promover un aprendizaje relacional es necesario que el profesor reflexione frente a la perspectiva educativa con que se posiciona al tomar decisiones para el aula; decisiones que tienen que ver con el *qué* el *cómo* y el *porqué* de lo que se propone y se lleva a la acción en la enseñanza. Mi propuesta se fundamenta en una perspectiva curricular centrada en el proceso (Stenhouse, 1998), ello quiere decir que el profesor se convierte en un profesional de la educación que se involucra en procesos de indagación en el aula y reflexión sobre su propia práctica para mejorarla y atender a las necesidades de aprendizaje de los estudiantes, por lo cual se apodera del rol de profesor como investigador (Stenhouse, 1998); por esta razón todos los elementos de mi marco referencial están dinámicamente conectados como se muestra en la Figura 2.1.

2.1 Qué significa pensar algebraicamente en el contexto de este proyecto

No presumo intentar dar un tratamiento exhaustivo sobre lo que significa pensar algebraicamente. Partiendo de mi propósito de apoyar un aprendizaje con comprensión, esto es, un aprendizaje relacional en matemáticas (Skemp, 1976), y del reconocimiento de la declaración de Agudelo-Valderrama (2005, p. 380):

> el inicio del trabajo algebraico escolar, en el marco de una enseñanza basada en 'la comprensión y el significado', está relacionado con la provisión de ambientes de trabajo en el aula que ayuden a los niños a involucrarse activamente en procesos *generativos del concepto multifacético de variable,* que por naturaleza está en el corazón del pensamiento algebraico,

me propongo alcanzar una profundización sobre algunas formas de apoyar el desarrollo *de* pensamiento algebraico en el aula, su generación, en lo que se relaciona con el uso de variable como *número general*. En esta sección me ocupo en dar explicaciones breves sobre lo que significa ‘pensar algebraicamente’ en el contexto de este proyecto, y sobre el carácter multifacético de variable.

Ya se subrayó en el Capítulo 1, que pensar algebraicamente, en el contexto de una situación matemática dada, requiere *reconocer, representar cantidades indeterminadas, y operar con ellas* (Filloy y Rojano, 1989; Trigueros y Ursini, 2001); esto conlleva al trabajo con *números generales*, lo cual contrasta con lo que sucede en el pensamiento numérico donde las cantidades con las que se opera son cantidades determinadas, conocidas y específicas. Por ejemplo, en la fórmula convencional de área rectangular ($A = b \times h$), b y h representan números generales; consecuentemente para que los estudiantes *mismos* construyan la fórmula de área del rectángulo se hace necesario involucrarlos en actividades de aula que apoyen la identificación de tales *números generales*, así como de la forma como estos se relacionan (esto es, reconocer que se puede operar con ellos). Construir la fórmula de área del rectángulo requiere de pensamiento algebraico ya que para ello los estudiantes necesitan usar lo que para nosotros los profesores representa la *variable* como número general—una de las facetas de variable, pues como se muestra más adelante, variable es un concepto 'multifacético'. ¿De qué *número general* o qué *números generales* hablamos en este caso?

- ✓ El primer número general puede ser el número que representa una agrupación de unidades cuadradas, organizadas horizontalmente en una *fila*, que puede cambiar o variar según las dimensiones del rectángulo como se muestra en la Figura 2. 2 (b).

- ✓ El segundo número general puede ser el número que representa una agrupación de unidades cuadradas alineadas verticalmente en una *columna*, que puede cambiar o variar según las dimensiones del rectángulo, que además sirve para reconocer el número de filas, como se muestra en la Figura 2. 2 (c).

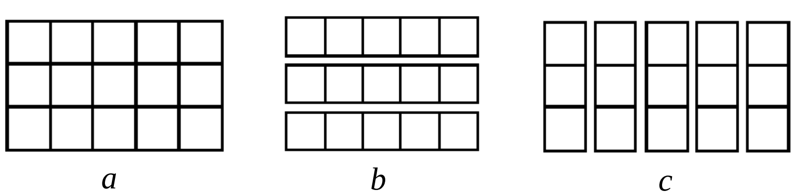
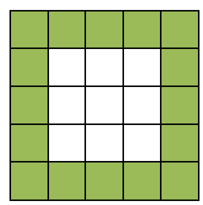


Figura 2.2: *(a) Un rectángulo cubierto por unidades cuadradas, (b) la organización de las unidades que lo cubren agrupadas horizontalmente por filas, y (c) la organización de las unidades que lo cubren alineadas verticalmente en columnas*

Concepto multifacético de variable

Una vez más, resalto que estos números generales en álgebra elemental son una manifestación de *variable* (Trigueros y Ursini, 2001), la cual en el contexto de una situación determinada, puede tener diferentes usos, y verse o entenderse como: un número general, como una incógnita o como variable en relación funcional (Küchemann, 1981; Trigueros y Ursini, 2001). En la situación problema que se presenta en la Figura 2.3, intento presentar una ilustración de estos tres usos de la variable.

Con baldosas cuadradas de color verde, Jesús coloca *bordes* alrededor de jardineras de distintos tamaños, que también son cuadradas. Los tamaños de las jardineras se muestran en la figura con baldosas blancas.



Para hacer el borde de la jardinera que se representa en la figura se necesitan 16 cuadritos verdes

a. *¿Cuántas baldosas verdes se necesitan para hacer el borde de una jardinera que tiene, de lado, 9 baldosas blancas?*

b. *Explica la estrategia que usaste para encontrar el número de baldosas del borde para la jardinera de lado 9*

c. *¿Qué estrategia usarías para encontrar el número de baldosas que se requieren para el borde de una jardinera de cualquier tamaño?*

Figura 2.3: *Una situación en la que puede ser posible reconocer los tres usos de variable, arriba mencionados*

Esta situación busca apoyar en los estudiantes la identificación y comunicación de la relación que hay entre las dos variables involucradas: el *número de baldosas* del borde, y el número de baldosas en el lado de la jardinera. Dicha situación permite al estudiante abordar el desarrollo de la tarea de acuerdo con sus preferencias y con las formas de conteo que a bien tenga, pues podría pensar en el número total de baldosas de toda la pieza (es decir el cuadro y su borde), también pensar en el número total de cuadritos en el lado de la jardinera, o incluso en el número total de cuadritos de la jardinera (entendiéndose que la jardinera es el conjunto de cuadritos blancos dado que cambia). Así, cuando el estudiante reconoce que el *número de baldosas del borde* o el *número de baldosas en el lado de la jardinera* pueden ser dos números cualesquiera que cumplen con la condición de la situación, es decir, que pueden tomar un conjunto de valores, de alguna manera se puede decir que está reconociendo la variable como *número general*. Sin embargo, según Mason y colegas (2014), identificar tales *números generales* solo es un paso hacia la identificación y expresión de la *generalidad*; por ello se hace necesario apoyarlos a que encuentren, comuniquen (digan) y registren (escriban) la relación entre estos, es decir, la generalización del patrón subyacente.

En el contexto del embaldosado que realiza Jesús, podemos presentarle al estudiante otra situación en la que su tarea es encontrar un valor específico pedido (el valor de una incógnita), a partir del conocimiento del valor de una de las variables antes consideradas; digamos: “Para hacer el borde de una de las jardineras, Jesús necesitó 256 baldosas verdes. ¿Cuál es el número de baldosas que hay en el lado de esa jardinera?” En el caso en que esta pregunta se presente al estudiante después de haber abordado las preguntas que se plantearon en la situación inicial (ver la Figura 2.3), ya cuenta con la fórmula general, y solo necesita usar el valor dado para proceder a encontrar el valor pedido. En este caso se podrá entender que el *número pedido* representa una de las posibilidades—un valor para un caso específico de las jardineras a las que Jesús les va a colocar un borde—y en este sentido, se espera que el trabajo con los dos usos de variable, número general e incógnita representen *una* oportunidad en el proceso del estudiante para asignarle sentido y significado a la noción de variable. En cuanto al uso de variable en relación funcional, es claro que su aceptación como número general precede la identificación de la variación ligada de las cantidades involucradas en una situación problema o un patrón figural dado (Radford 1996). En consecuencia, cuando el estudiante encuentra por sí mismo la regla general, o estrategia, para encontrar el total de baldosas en el borde como una dependencia del número de baldosas en el lado de la jardinera, está reconociendo la *variable en relación funcional*, i.e. un *patrón.*

2.2 Identificar un patrón es identificar estructura matemática

Observemos que en la situación anterior, la de la Figura 2.3, de manera intencionada, no se ha presentado una secuencia de figuras de las jardineras, como comúnmente se observa en textos guía para el trabajo con *patrones.* La situación se ha diseñado así porque la investigación muestra que cuando a los niños se les presenta una secuencia ordenada de figuras se les ofrece un camino fácil para que ellos identifiquen una regla computacional, *i.e*. una regla de recurrencia (MacGregor y Stacey, 1995), para encontrar cualquier término de la secuencia pedido, sin que haga conciencia, identifique y explique la relación que existe entre las cantidades involucradas (ver Agudelo-Valderrama y Martínez, 2015; McGregor y Stacey, 1995). Ello no les permite atender a lo que en realidad sería la identificación y comunicación de un *patrón matemático* en una situación dada, es decir, reconocer y comunicar la forma como se relacionan las variables que en ella intervienen.

En la Figura 2.4 se presenta un ejemplo de una situación problema, incluida en un cuestionario para profesores (diseñado por Agudelo-Valderrama en 2018), donde se presenta una descripción de la forma como un estudiante de Grado 7°, Juan, aborda la situación que ilustra lo planteado anteriormente[3]. En su respuesta a las preguntas dadas en la situación, se puede observar que la fórmula de Juan parece haber sido obtenida de cálculos hechos con los números que puso en una tabla, pero cuando describe el conteo del número de palillos para cada una de las figuras no lo hace describiendo una misma estructura, o una regularidad observable para cada caso; por el contrario, Juan está comunicando el conteo, cada vez, de forma diferente. Dicha situación permite inferir que Juan no identificó la *estructura matemática* presente, la forma como se relacionan las dos variables involucradas, sino una regla computacional que le permite hallar datos pedidos;

[3] Esta situación fue tomada de un cuestionario, diseñado por Agudelo-Valderrama en 2018, para explorar el pensamiento de profesores de matemáticas participantes del proyecto, *Universidad y Escuela*: *Creando Comunidades de Aprendizaje alrededor de las Experiencias de Práctica Pedagógica de Futuros Profesores de Matemáticas***,** UPN.

por consiguiente, se puede decir que realmente no ha identificado el *patrón* que está presente en la situación.

La siguiente situación-problema fue presentada a un grupo de estudiantes de Grado 7° que, según su profesora, había trabajado en la identificación de patrones desde Grado 6°

Usando palillos de los que se pueden encontrar en las mesas de algunos restaurantes, un estudiante armó una secuencia de figuras con cuadrados. Presentamos a continuación la figura de 3 cuadrados.

1. Encuentre y registre una fórmula para determinar el número de palillos que se necesitan para armar una figura de cualquier número de cuadrados.
2. Describa de manera detallada su pensamiento o las posibles imágenes que su mente va creando a medida que se va moviendo hacia el encuentro de su fórmula.

Un estudiante, Juan, inicialmente organizó una tabla de dos columnas en la que colocó las parejas de valores (1, 4); (2, 7); (3, 10); (4, 13), y luego escribió:

"El patrón es MÁS 3" [haciendo referencia a las cantidades dependientes],

Luego concluyó: La fórmula es: *"Número de la figura × 3 más 1"*

Cuando se le pidió que explicara su fórmula, dijo, a medida que iba señalando con el dedo en las figuras:

Para 1 [un cuadrado], se multiplica por 3. Es 1, 2, 3 [refiriéndose a 3 lados del cuadrado], más 1 [refiriéndose al lado vertical izquierdo del cuadrado].

Para el de 2 cuadrados en la figura 2, cuento los palos de afuera y le adiciono el 1 que está en la mitad.

Para la de 3 [cuadrados], hay un grupo de 3 [refiriéndose a los últimos 3 palillos del último cuadrado adyacente], dos grupos de 3 [refiriéndose a los anteriores dos cuadrados], más 1 [refiriéndose al primer lado vertical del primer cuadrado]

Figura 2.4: *La respuesta de Juan a una situación problema, que muestra la regla computacional o de procedimiento que presenta sin mostrar comprensión del patrón involucrado*

Es importante que el profesor atienda al pensamiento de los estudiantes y a los argumentos que ellos pueden tener cuando se les pide abordar situaciones problema como la presentada en la Figura 2.4, pues si queremos apoyar a los estudiantes en el desarrollo de sus procesos de pensamiento algebraico, resulta crucial apoyarlos hacia el reconocimiento y comunicación de la relación matemática existente entre las variables involucradas; para ello es necesario apoyarlos: hacerles preguntas que les ayuden a centrar atención en la *estructura matemática* presente en casos particulares de una secuencia (un patrón), que luego pueden ver y comunicarla de manera general.

Tipos de patrones

De acuerdo a Mulligan, English, Mitchelmore, Welsby y Crevensten (2011) los niños de edades tempranas aprenden las ideas matemáticas observando patrones en caminos organizados, buscando diferencias y similitudes; de esta manera afirman que los patrones matemáticos, desde el pensamiento de los niños, pueden ser (Mulligan, et. al. 2011, p.1023):

- *Repeticiones simples:* Tales como una "unidad de repetición": ABC, ABC, ABC…
- *Patrones espaciales:* Tales como diseños de 2 o 3 dimensiones; teselaciones o transformaciones
- *Patrones de crecimiento:* Tales como aumentos o disminuciones sistemáticas; por ejemplo, el patrón de los números triangulares: 1, 3, 6, 10, 15,…
- *Funciones:* Funciones donde la relación entre las variables está formada, por ejemplo en una tabla de valores

Quiero resaltar dos aspectos relaconados con lo que he venido subrayando sobre lo que involucra identificar un *patrón;* en primer lugar, un patrón *no* necesariamente debe ser observado en "caminos organizados", porque se puede tender a encontrar reglas de recurrencia, tal como se mencionó al iniciar esta sección. En segundo lugar, lo que los autores consideran pueden ser patrones matemáticos los puedo resumir a uno solo: el patrón *funcional.* Por ejemplo, en la situación descrita en la subsección anterior en la que Jesús coloca bordes alrededor de jardineras (ilustrada en la Figura 2.3) y se promueve identificar el *patrón* que estructura la situación, o la relación de dependencia, i.e. la relación funcional entre las dos variables involucradas: el *número de baldosas del borde* y el *número de baldosas en el lado de la jardinera*—se abre la posibilidad de representarlo por medio de figuras de jardineras de distintos tamaños que conserven la misma estructura y que crezcan en forma regular; es decir podría verse involucrando un patrón *espacial* y un patrón de *crecimiento*. Incluso en un patrón de *repetición simple* es posible establecer una relación funcional entre números naturales y la posición que ocupa el elemento que se repite.

2.3 Identificación de la estructura espacial de área rectangular: Una puerta de entrada al desarrollo de pensamiento algebraico

Battista, Clements, Arnoff,. Battista, y Borrow (1998, p. 531) advierten que "la estructura de filas y columnas [presente en una cuadrícula rectangular] no reside en las imágenes/diagramas o cuadrículas que les presentamos a los niños"; de igual manera, Outhred y Mitchelmore (2000), de sus estudios con grupos de niños de Grados 1°, 2°, y 3° concluyeron que tal estructuración necesita ser construida personalmente por el individuo, pues esta no está en el arreglo de cuadritos que conforman la cuadrícula dada. Esto significa que es necesario involucrar a los estudiantes, inicialmente, en el cubrimiento de superficies rectangulares con una unidad de su misma naturaleza (Curry y Outhred, 2005; Nunes, Light, Mason, 1993; Outhred y Mitchelmore, 2000), es decir, con una unidad cuadrada[4], de manera que posteriormente se les facilite la identificación de la bidimensionalidad (Battista et al., 1998; Mulligan y Mitchelmore, 2009).

Como se describió en la sección anterior, cuando los cuadritos que conforman una cuadrícula dada son organizados de forma horizontal, por filas, y las filas son reconocidas por un estudiante o una persona como *nuevas unidades* para el conteo y, además de esto, reconoce que el número de *filas* que se requieren para cubrir un área rectangular dependerá del número de cuadritos de la *columna*, es porque ha reconocido la bidimensionalidad; en palabras de Battista y colegas (1998) ha reconocido la ortogonalidad[5], esto es, la estructura espacial de la cuadrícula. Una vez los estudiantes han visualizado e identificado, por su propia cuenta, la organización de los cuadritos de forma ortogonal en una cuadrícula particular, es posible apoyar el reconocimiento de dicha organización en otros casos, donde pueden variar las dimensiones del rectángulo, es decir que pueden empezar a identificar el patrón matemático presente en la estructura espacial de área rectangular; de esta forma, para encontrar el total de cuadritos que cubren un rectángulo será necesario observar el

---

[4] En el contexto de este proyecto cuando hablo de "unidad cuadrada" me refiero a los cuadritos o cuadrados que cubren un rectángulo.

[5] Ortogonal (del griego *ortos* 'recto' y *gonos* 'ángulo') puede entenderse como una generalización de la noción de perpendicularidad, es decir se puede considerar un adjetivo que sirve para nombrar todo aquello que esté organizado en ángulo recto (Ortogonalidad-Matemáticas, Wikipedia, s.f.).

número de cuadritos de una fila, y considerarlo tantas veces como lo señale el número de cuadros que hay en una columna, (multiplicar el *número de cuadritos de una fila* por el *número de filas*).

Si involucramos a los niños en actividades para identificar, por ejemplo, el número de baldosas que se requieren para cubrir una superficie rectangular, y los apoyamos en el reconocimiento de un número cualquiera de cuadritos que se itera tantas veces como sea necesario, según el número de cuadritos de la columna, estaremos apoyando la identificación de la generalización de la estructura que subyace a la fórmula de área rectangular. Por tanto, cuando hablo de "*identificación de la estructura espacial de área rectangular: una puerta de entrada al desarrollo de pensamiento algebraico*", me refiero a apoyar, en los estudiantes, procesos de pensamiento que involucran la identificación de la(s) *regularidad(es)* numérico-espacial(es) presente(s) en la estructura espacial de las cuadrículas rectangulares, de modo que ellos mismos puedan reconocer y comunicar de manera *general* su *estructura espacial* como una relación específica entre dos *números generales.*

Apoyar la identificación de la estructura espacial de área rectangular en los estudiantes, esto es, apoyar un aprendizaje relacional de la fórmula, requiere apoyarlos en su proceso de identificación de la estructura espacial y su comunicación como una generalización: la fórmula; posición contraria a lo descrito al respecto en el Capítulo 1, donde comúnmente resulta "más fácil" para su enseñanza "darles" la fórmula y que ellos la retengan y la mecanicen, a partir de la repetición de ejercicios que requieran de su aplicación. A partir de esta diferenciación en el aprendizaje de las matemáticas, *i.e*., aprendizaje relacional y aprendizaje instrumental (Skemp, 1976), me es posible establecer dos formas de abordar la enseñanza de área rectangular en el contexto escolar, las cuales aluden a dos concepciones diferentes de la naturaleza del conocimiento y, consecuentemente, de la naturaleza del aprendizaje, lo que conecta con los *dos* enfoques curriculares señalados por Stenhouse (1998): el currículo centrado en el proceso, y el currículo centrado en objetivos conductuales.

Mi constructo de currículo

Sobre la noción de currículo que he alcanzado por razón del desarrollo de este proyecto, considero necesario, en este punto, hacer explícito que inicialmente, para mí, el currículo era una directriz organizativa de contenidos que se debían enseñar grado a grado, propuesta por el colegio; el currículo me hablaba sobre "qué enseñar". Ahora veo que currículo tiene que ver con la toma de decisiones no solo sobre los contenidos a enseñar sino, además, sobre el cómo de la enseñanza y el aprendizaje (el enfoque de trabajo en el aula) y el propósito de la enseñanza (el porqué y el para qué). Estos focos o elementos de decisión se pueden considerar en el nivel micro (el del aula), el meso (el de una institución o el de un área curricular) y en el nivel macro (los lineamientos para un sistema educativo). Como lo veremos más adelante, el diseño y desarrollo del currículo requiere de una profunda y continua reflexión, por parte del profesor, en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje que esta apoya en los estudiantes. En resumen, el currículo hace relación a las decisiones, acciones y reflexiones que toma el profesor frente a las siguientes preguntas (Agudelo-Valderrama, 2000, Stenhouse, 1998):

- ✓ ¿Qué enseñar?
- ✓ ¿Para qué y por qué enseñar?
- ✓ ¿Cómo enseñar?, y ¿cómo se lleva a cabo el aprendizaje de los estudiantes? (esto incluye la evaluación de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, y su propósito)

2.4 Aprendizaje relacional y currículo centrado en el proceso

Como ya se subrayó, para que haya un aprendizaje con significado en matemáticas, y particularmente en la identificación de la estructura espacial de área rectangular, se hace necesario involucrar a los estudiantes, inicialmente, en el cubrimiento de superficies rectangulares con una unidad de su misma naturaleza, de manera que se facilite la identificación de la bidimensionalidad. Si los niños logran identificar esta misma estructura en otras situaciones donde las dimensiones del rectángulo varían y, además, la comunican de manera general, estarían dando un paso importante en su proceso de asignación de *significado* al concepto. Esto es posible gracias a que en realidad lo están construyendo por sí mismos, ya que están creando conexiones entre los conceptos que ya conocen, tales como contar, sumar, multiplicar ya sea por unidades simples o compuestas, y que se requieren para encontrar el total de unidades que cubren una superficie rectangular, a partir de la identificación de su *estructura espacial.*

Cuando el estudiante logra reconocer, en la cuadrícula dada, un esquema que le permite visualizar las relaciones entre los elementos que están involucrados, es decir, entre el número de cuadritos en una fila y el número de filas, se puede decir que el ambiente de clase organizado ha apoyado lo que Sierpinska (1994, citada en Agudelo-Valderrama y Martínez, 2015) denomina un "acto de comprensión tentativa" que ha de constituir un logro significativo en el proceso de construcción conceptual de medición de área rectangular. Esto conlleva a que además del saber *qué*, se promueve el saber *por qué* y *cómo* (cómo se puede construir la fórmula). De esta manera se estará apoyando un aprendizaje con significado y comprensión en la escuela (MEN, 1998, 2006).

Currículo centrado en el proceso

Poner en acción en el aula una secuencia de enseñanza, con un propósito explícito sobre el aprendizaje que se quiere promover, y que está guiado por un enfoque en el que las diferentes formas de pensar de los estudiantes y sus posibles procesos de construcción conceptual representan el centro de atención para el profesor, requiere de una forma de saber matemáticas con la que yo no contaba al inicio de del trabajo de este proyecto. La forma de saber matemáticas a la que me refiero está asociada a una posición filosófica constructivista (una forma de ver el mundo y de concebir el conocimiento y su aprendizaje) que subraya el *rol activo* de quien aprende en la construcción de sus comprensiones (sus aprendizajes, sus conceptos) de las matemáticas, mediante la identificación de conexiones entre sus ideas y conocimientos previos con los que está estudiando en la escuela, y conexiones entre conceptos específicos y sus contextos (Agudelo-Valderrama y Martínez, 2015). Estos planteamientos muestran coherencia con los de un aprendizaje relacional de

Skemp (1976) que ya expliqué, y, a su vez con el enfoque curricular centrado en el proceso (Stenhouse, 1998).

Como he venido resaltando, la comprensión alcanzada a través del largo proceso de estudio y aprendizaje en el que he estado envuelto, con el ánimo de iniciar una enseñanza que apoye un posible proceso de desarrollo de pensamiento algebraico en mis estudiantes de Grado 5°, me llevó a establecer que, indiscutiblemente, era necesario que como profesor me posicionara como un indagador de los procesos de pensamiento de los estudiantes al proponerme involucrarlos en una secuencia de actividades diseñadas para apoyar el reconocimiento de la estructura espacial de área rectangular—esto es, para que puedan crear y construir las conexiones entre los elementos numérico-espaciales que involucra la identificación y comunicación de dicha estructura espacial.

2.5 Aprendizaje instrumental y currículo por objetivos conductuales

Contrario a lo descrito en la sección anterior, y como se describe en el Capítulo 1, cuando la enseñanza se concibe como una tarea de presentación y explicación minuciosa de una serie de definiciones de conceptos y reglas de procedimiento para solucionar problemas y ejercicios correspondientes a temas establecidos para un curso determinado, promovemos en los estudiantes un aprendizaje que radica en la memorización y reproducción de los algoritmos dados por el profesor o por el texto guía (ver, por ejemplo, Agudelo-Valderrama 2002). En este caso, estamos conduciendo a los estudiantes a un saber *cómo* hacer un ejercicio determinado para hallar una respuesta solicitada, y estamos promoviendo en ellos un aprendizaje netamente *instrumental* de las matemáticas (Skemp, 1976). Este enfoque de enseñanza-aprendizaje es promovido en aulas de clase de matemáticas (ver, por ejemplo, Nunes et al., 1993; Skemp, 1976), particularmente en la enseñanza de medición de área rectangular, el cual, en ocasiones, puede estar apoyado por libros de texto populares cuando proponen, para su enseñanza, presentarle a los estudiantes la fórmula con la cual pueden calcularla; es decir que el área de un rectángulo es un número que resulta de usar la fórmula "$A = b \times h$", sabiendo las longitudes de los lados. Se presenta la fórmula, que "te dice que para obtener el área de un rectángulo, debes multiplicar el largo por el ancho" (Skemp, 1976, p. 2); veamos el ejemplo presentado en la Figura 2.5.

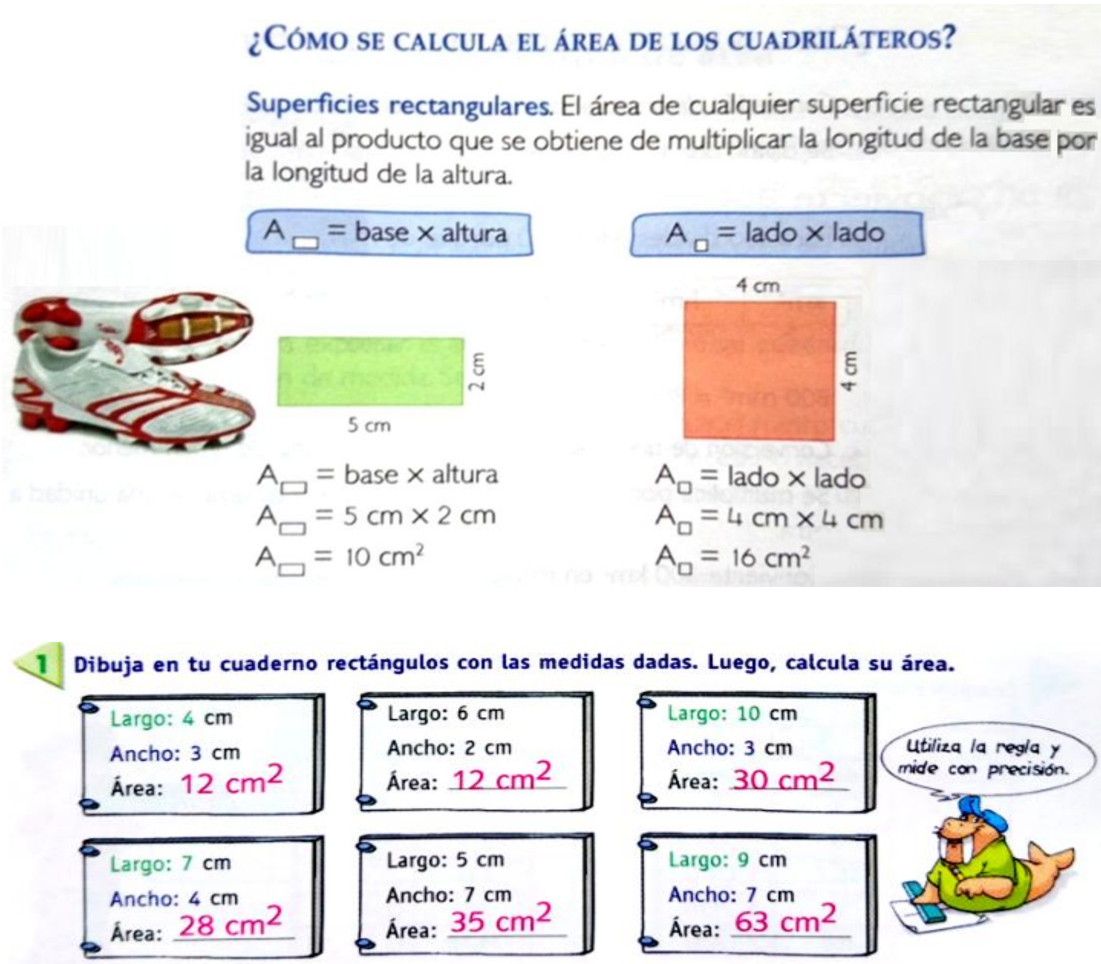


Figura 2.5: *Una forma de presentar y trabajar el tema de medición de área rectangular en un libro de texto colombiano*

Para observar si los estudiantes han "comprendido" la fórmula de área rectangular, lo que considero como una "retención" de la fórmula, se les pide que resuelvan una serie de ejercicios en los que pueden reemplazar valores numéricos dados, de modo que la puedan mecanizar y memorizar, tal como se observa en la Figura 2.6; es decir, se considera que si los estudiantes logran encontrar la respuesta correcta es porque han mostrado "comprensión" en cuanto a lo que significa medir área rectangular. Estas situaciones hacen que el proceso de medición de área rectangular se vea reducido a hacer una multiplicación entre dos valores de longitudes dadas—trabajo netamente procedimental—que los lleve a obtener un número o resultado final, sin saber *por qué* este puede funcionar, de dónde resulta, y el aprendizaje de los estudiantes se reduce a la sustitución de valores y mecanización de la fórmula, sin haber podido atribuirle algún significado a los *números generales* involucrados, las letras que aparecen en la fórmula. Este planteamiento fue descrito ampliamente en la descripción de la problemática y se puede observar en el Capítulo 1, la Figura 1.2. Cabe preguntarnos entonces, por qué muchos estudiantes, cuando se les pregunta por el valor del área, en una situación determinada, ofrecen respuestas numéricas como, el área es 25 metros (ver, Parra, 2018).

Currículo por objetivos conductuales

Mientras que una enseñanza que se fundamenta en el principio de que la responsabilidad del profesor está en organizar ambientes de aprendizaje para que los estudiantes usen sus ideas y el conocimiento que ya tienen para que ellos mismos construyan sus ideas matemáticas, una enseñanza que se guía por la pre-especificación de objetivos de aprendizaje definidos y puntuales a alcanzar en tiempos determinados (normalmente se establecen para que se logren en una clase), está asociada al rol del profesor como instructor y explicador y dador de respuestas (Stenhouse, 1998). Como se planteó en la sección anterior, caso de la enseñanza de medición de área rectangular, este enfoque de enseñanza promueve un aprendizaje instrumental. El manejo *instrumental* de la fórmula, además de no permitir a los estudiantes reconocer la estructura multiplicativa que subyace la fórmula de área, puede hacerlos caer en errores conceptuales como el de confundir letras con objetos como lo muestra Lesley Booth (citado en Mason et al., 2014). Esta forma en la que es presentada la fórmula de área, tiene que ver una concepción *absolutista* de las matemáticas escolares (Ernest, 1991), es decir, estas son concebidas como un conjunto de formalizaciones ya establecidas, un conocimiento definido, único, y *externo* al sujeto que conoce o aprende, y se encarga de retenerlo y reproducirlo (Agudelo-Valderrama, 2007; Ernest, 1991; Stenhouse, 1998). El currículo por objetivos mantiene vigencia y fuerza en la escuela y en contextos de la educación superior debido a su utilidad para la verificación de los aprendizajes que se han definido bajo este enfoque y concepción de la naturaleza del conocimiento (Stenhouse, 1998). En la Figura 2.6 se intenta mostrar los dos posibles enfoques de enseñanza descritos anteriormente.

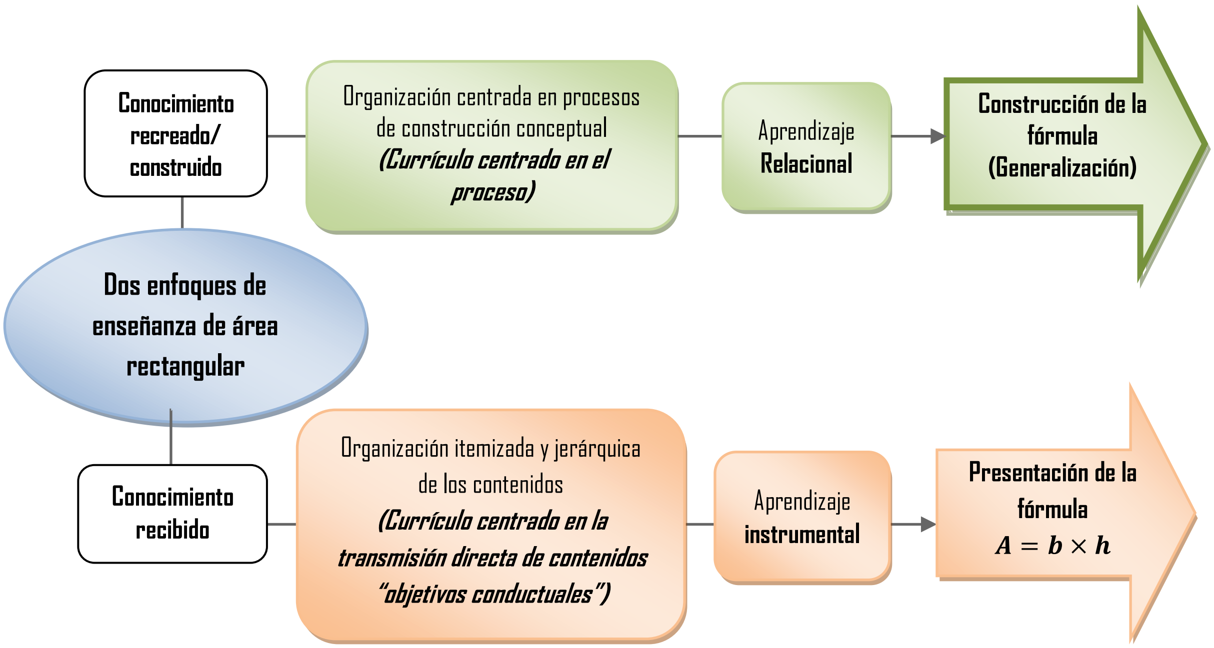


Figura 2.6: *Dos enfoques curriculares para la enseñanza de área rectangular*

2.6 Apoyando la identificación y construcción de la estructura espacial de área rectangular en el aula de Grado 5°

Para apoyar la enseñanza de área rectangular en el ámbito escolar, Outhred y Mitchelmore (2000) proponen dos posibles rutas de enseñanza que emergen de su estudio:

- ✓ La primera tiene que ver con introducir el concepto de área y luego explorar su medición vista como el cubrimiento de una región rectangular con una unidad cuadrada, de modo que se puedan observar las formas de cubrimiento usadas y relacionarlas con las dimensiones del rectángulo.

- ✓ La segunda inicia con el cubrimiento de una superficie rectangular con la unidad cuadrada, luego a través de procesos de conteo se busca reconocer la bidimensionalidad u ortogonalidad para la identificación de la estructura espacial y, por último, se introduce o formaliza el concepto de área.

Godino, Batanero y Roa (2002) hacen alusión a *dos* conceptos que están interrelacionados cuando se mide un atributo geométrico como el de “área rectangular”: el de *superficie* y el de *área*. El primero hace alusión a lo yo llamaría el “objeto”, en el cual podríamos identificar u observar características o rasgos *cualitativos* que pueden ser medidos, es decir la o las *magnitudes* asociadas al objeto, en nuestro caso la extensión o *superficie* del rectángulo. El segundo hace alusión al “número”, es decir la cantidad, valor numérico, o rasgo *cuantitativo* que puede tomar o representar la magnitud *superficie,* es decir el *área*. Por su parte Curry y Outhred (2005) llaman medición espacial a encontrar la relación entre una unidad de medida y un objeto de su misma naturaleza, es decir que compartan el mismo “atributo” espacial. Para ello una actividad que involucre medición conlleva iterar la unidad de medida en el objeto que se quiera medir, ya sea en un sentido espacial unidimensional (longitud), bidimensional (*área*) o tridimensional (volumen), para luego identificar el patrón que se forma cuando las unidades llenan el objeto, esto es, encontrar la estructura *numérico-espacial* presente.

En este sentido cuando hablo de apoyar en los estudiantes el proceso de medir la *superficie* de un rectángulo me refiero a que reconozcan que esta consiste en la acción de cubrir con una unidad cuadrada, la unidad de medida, el rectángulo, y una vez cubierto por completo apoyarlos a que puedan identificar las formas de organizar o agrupar el conjunto de unidades que lo cubren, esto es, identificar la *estructura espacial bidimensional* de los cuadritos (Battista et al., 1998) que puede ser representada a través de números, o en forma cuantitativa a partir de su *estructura numérica* o *multiplicativa,* es decir la estructura del *área* del rectángulo. Según Outhred y Mitchelmore (2010), este proceso puede ser desarrollado teniéndose en cuenta cuatro *principios operacionales* que se pueden observar en la Tabla 2.1 y que fueron identificados en sus investigaciones.

Tabla 2.1: *Principios operacionales para la enseñanza de área rectangular propuestos por Outhred y Mitchelmore, (2000)*

Principio	Generalidad
Uno: Cubrir completamente	El rectángulo debe estar cubierto completamente por unidades cuadradas sin solapamientos ni espacios entre ellos
Dos: Reconocimiento de la estructura espacial	Las unidades cuadradas deben estar alineadas con el mismo número de unidades en cada fila o columna. Esto se refieren a que las filas en una cuadrícula sean congruentes
Tres: Reconocimiento de la estructura multiplicativa de la cuadrícula	El número de unidades ubicadas horizontalmente en el lado del ancho representa el número de unidades de la fila y el número de unidades que se ubica en el lado del alto representa el número de filas. Para encontrar el total de unidades de en una cuadrícula rectangular puede ser hallada a partir del producto el número de unidades de una *fila* por el número de filas o el número de unidades de una *columna* por el número de columnas. Quienes hacen una iteración de *filas* o de *columnas*, visto como una suma repetida, muestran implícitamente una estructura multiplicativa; es decir un conteo a partir de múltiplos (unidades compuestas).

Además proponen un cuarto principio que es el *reconocimiento de la fórmula de área,* en el cual se requiere una comprensión de la estructura numérica del cubrimiento que se deriva de su estructura espacial. Así este principio se adapta para el contexto de este proyecto como la generalización y comunicación de la fórmula en términos de su estructura multiplicativa, lo cual sería equivalente a comunicar la estructura espacial de área rectangular de forma general:

Principio cuatro: *El número total de unidades que cubren una cuadrícula rectangular es equivalente al número de unidades que hay en una fila (número de unidades que cubren el lado del ancho) por el número de filas, o número de unidades que hay en una columna (número de unidades que cubren el lado del alto).*

Además de los 4 principios descritos, estos autores proponen 2 principios adicionales que están relacionados entre sí:

- ✓ La medición de la longitud de los lados del rectángulo
- ✓ Relacionar la longitud de los lados del rectángulo con el número de unidades de la fila o la columna

Ambos principios se tuvieron en cuenta para la Fase 1 (tal como se describe en las bases de referencia del Capítulo 3) donde se siguió la Ruta de enseñanza 1 (Ruta 1), que se observa en azul en la Figura 2.7, comenzando con la medición de longitud. Sin embargo, para la Fase 2, se adaptó y siguió la ruta de enseñanza que se observa en verde en la Figura 2.7 (Ruta 2), comenzando con el cubrimiento de un rectángulo.

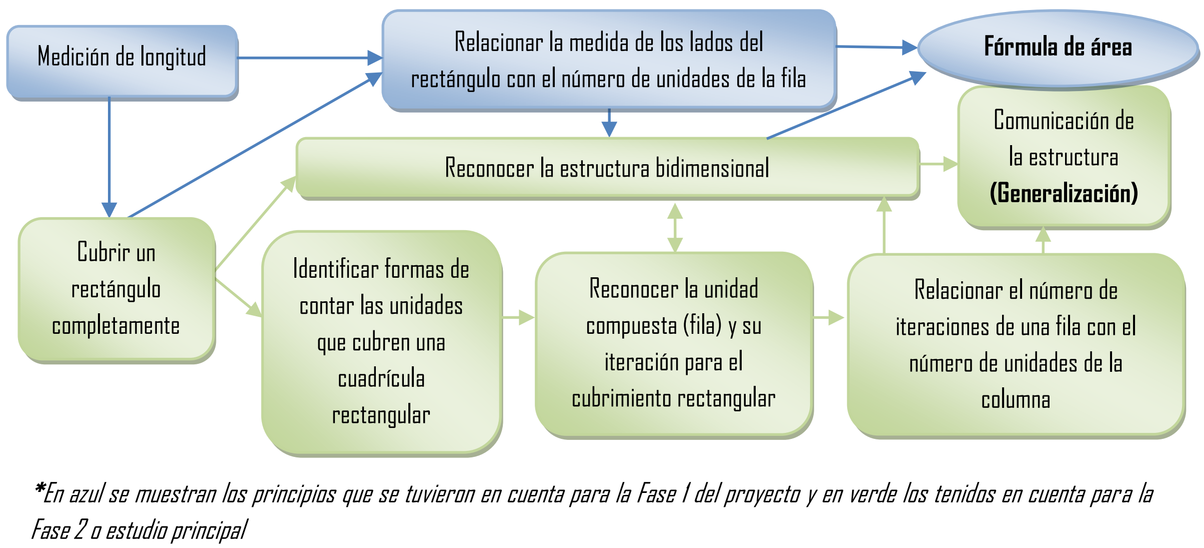


Figura 2.7: *Principios del proceso desarrollado en la identificación de la estructura espacial, adaptados para este proyecto de Outhred y Mitchelmore (2000).*

De forma paralela, Battista y colegas (1998) hacen un estudio similar al de estos autores, pero enfocado particularmente a observar las formas y el proceso—niveles de pensamiento—que siguen los estudiantes desde que inician con el cubrimiento de rectángulos y el conteo de las unidades cuadradas, hasta llegar a la identificación de la estructura espacial, soslayando el trabajo que conlleva la medición de longitud de los lados y su relación con el tamaño, o número de unidades, de la fila o la columna. En este sentido, para apoyar el desarrollo del pensamiento e identificación de la estructura espacial en el grupo de estudiantes, se siguió además de los principios operacionales de Outhred y Mitchelmore (2000), la orientación dada por Battista y colegas sobre ciertos niveles de pensamiento que se describen en la siguiente sección, siendo una guía para observar y caracterizar el proceso de pensamiento seguido por los estudiantes.

2.7 Observando y caracterizando el pensamiento de los estudiantes en la identificación de la estructura espacial

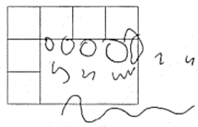
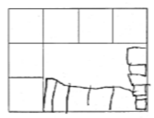
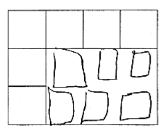
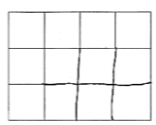
Inicio esta sección presentando en la sección 2.7.1 los resultados de estudios realizados con grandes grupos de niños de primaria (de grados 1° a 4°) realizados por Mulligan y Mitchelmore (2009; 2012) y por Battista et al. (1998), que fueron tomados como referentes, y luego en la subsección 2.7.2, presento los niveles de pensamiento adaptados para caracterizar el pensamiento de los estudiantes participantes en este estudio:

2.7. 1 Niveles de pensamiento en la identificación de la estructura espacial, según la investigación

Para apoyar el proceso de identificación de la estructura espacial en lo estudiantes, así como para caracterizar sus pensamientos, se tuvo en cuenta el trabajo de tres estudios realizados por varios autores, con grupos grandes de niños de los niveles de básica primaria (Grados 1° a 4°); en ellos observaron los procesos involucrados para la identificación de estructura de área rectangular, e identificaron niveles de pensamiento estructural. Los dos primeros de: Mulligan y Mitchelmore (2009; 2012) y el segundo de Battista et al., (1998).

Los estudios de Mulligan y Mitchelmore (2009; 2012) muestran resultados de sus trabajos que han sido desarrollados por años con niños de primaria y que hace énfasis en la identificación de patrones y estructura matemática, como parte de la construcción de relaciones estructurales en las matemáticas tempranas (Ver, por ejemplo, Mulligan 2010; Papic, Mulligan y Mitchelmore, 2011; Mulligan, y Mitchelmore, 2013). Así han identificado 4 niveles de *pensamiento estructural;* estos son: *Pre estructural, emergente, estructural parcial y estructural* (Ver Tabla 2.2), que pueden ser observados de acuerdo con las representaciones que usan los estudiantes para comunicar sus pensamientos (Mulligan y Mitchelmore, 2009; 2012) y fueron tenidos en cuenta para caracterizar el pensamientos de mis estudiantes en la Fase 1 y Fase 2 del proyecto:

Tabla 2.2: *Los niveles de pensamiento estructural de Mulligan y Mitchelmore (2009; 2012)*

Nivel	**Ejemplo** (De la estructura espacial)	**Generalidad**
Pre estructural		Las representaciones carecen de cualquier evidencia de estructura numérica o espacial. La mayoría de los ejemplos muestran características distintivas de acuerdo a cada niño.
Emergente		Las representaciones muestran algunos elementos relevantes de la estructura dada, pero la estructura numérica o espacial no está representada.
Estructural parcial		Las representaciones muestran los aspectos más relevantes de la estructura numérica o espacial, pero la representación es inexacta o incompleta.
Estructural		Las representaciones integran correctamente las características de la estructura numérico-espacial.

En Mulligan y Mitchelmore (2012) se resalta que el reconocimiento inicial de similitudes y diferencias haciendo uso de *diferentes representaciones matemáticas* desempeñan un papel fundamental en la identificación de patrones y estructuras matemáticas; entre ellas enfatizan que la *estructuración espacial* es necesaria en los procesos de visualización y organización de situaciones concretas dadas.

Battista et al. (1998) establecen de manera análoga a Mulligan y Mitchemore (2009; 2012) 5 niveles de *pensamiento estructural espacial*—o niveles de sofisticación en la identificación de la estructuración de las cuadrículas. Estos niveles fueron identificados en el trabajo con estudiantes de segundo grado de primaria entre los 7 y 8 años, y estudiantes de tercer y cuarto grado, cuando los involucran en tareas que requieren cubrir rectángulos a partir de un cuadrado dado y determinar el número de cuadrados necesarios para hacerlo y explicar cómo los cuentan. Para ello requieren de alguna manera estructurar los cuadrados para el conteo. Los niveles son identificados mediante la realización de entrevistas en las que se les presentan a los estudiantes figuras rectangulares específicas, y se les muestran cuántos cuadrados organizados horizontalmente cubren la figura (la fila superior) y cuántos cuadrados organizados verticalmente se necesitan para formar la columna (izquierda), luego se les pide que predigan cuantos cuadrados se necesitan para cubrir el rectángulo, y, por último, se les pide que lo dibujen y expliquen cómo los cuentan. Battista y colegas no sugieren que los niveles de pensamiento sucedan de manera secuencial. Resaltan que los niveles representan los de los estudiantes entrevistados.

A continuación se describen los niveles de pensamiento identificados en los estudiantes, seguidos de ejemplos en los que se presentan las preguntas específicas dadas y la descripción de sus pensamientos.

1. ***Ausencia total de estructura por filas o columnas:*** El estudiante no reconoce una fila o una columna como una unidad compuesta, muestra dificultad para visualizar la ubicación de los cuadritos en el arreglo rectangular, así como para contarlos.

La Figura 2.8 ilustra la dificultad de estudiantes para ubicar, dibujar, contar, y explicar cómo cuentan, y por ende estructurar, los cuadritos que cubrían un rectángulo dado, vacío de 3×7 con marcas a los lados (Ver la Figura 2.8 a), luego de preguntarles por el número de cuadrados que lo cubren. Para predecir el número de los cuadrados que lo cubren, un estudiante cuenta uno por uno, y usa 2 dedos juntos para contar los cuadrados 1 al 6 y 22 al 25, tal como se muestra en la Figura 2.8 (b), obteniendo un total de 30 cuadrados. Luego dibuja los cuadrados haciendo "unidades simples" no equivalentes y de distintos tamaños, como se observa en la Figura 2.8 (c), y los contó siguiendo una ruta de conteo "unidimensional" no sistemática, comenzando por los bordes y terminando en el centro, encontrando 32 cuadrados en total. Esto se debió a que contó dos veces un mismo cuadrado en las filas 2 a 4 de la columna derecha. Luego los enumeró con un lápiz mientras los contaba, uno por uno, y llegó a un total de 30 (Figura 2.8 d). Finalmente se le pidió cubrir el rectángulo con cuadritos (cuadritos movibles), sin embargo después de hacerlo correctamente, nuevamente los contaba mal.

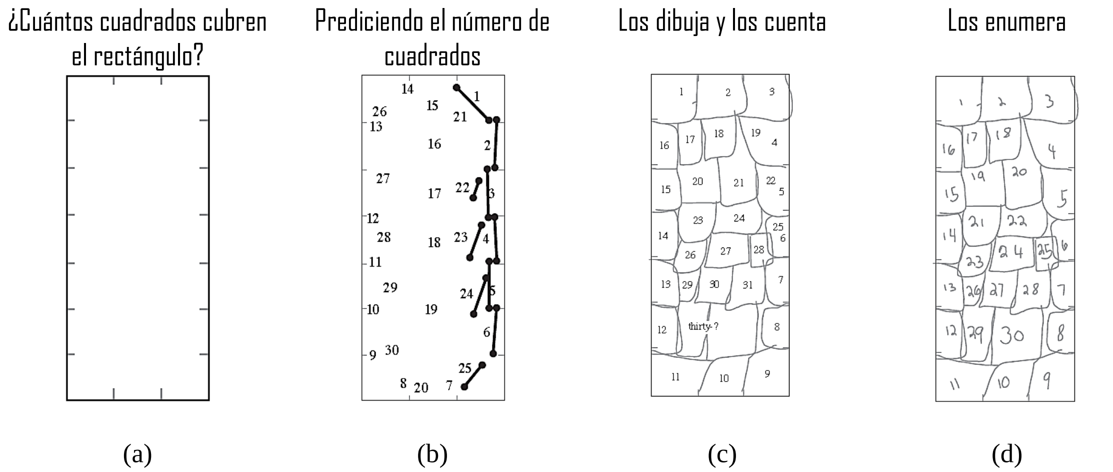


Figura 2.8: *Dado un rectángulo vacío con marcas a los lados, se muestra una forma de predecir, dibujar y contar los cuadritos que lo cubren, donde hay ausencia total de estructura*

2. ***Estructura parcial de fila o columna:*** El estudiante identifica una fila o columna como una unidad compuesta, pero esta no la utiliza para cubrir todo el rectángulo.

La Figura 2.9 muestra el ejemplo de un estudiante al que se le entrega un rectángulo de 6×3 con marcas a los lados (Figura 2.9 a), e identifica la estructura para las partes superior e inferior del rectángulo, pero no lo hace para el centro de la figura (Figura 2.9 b).

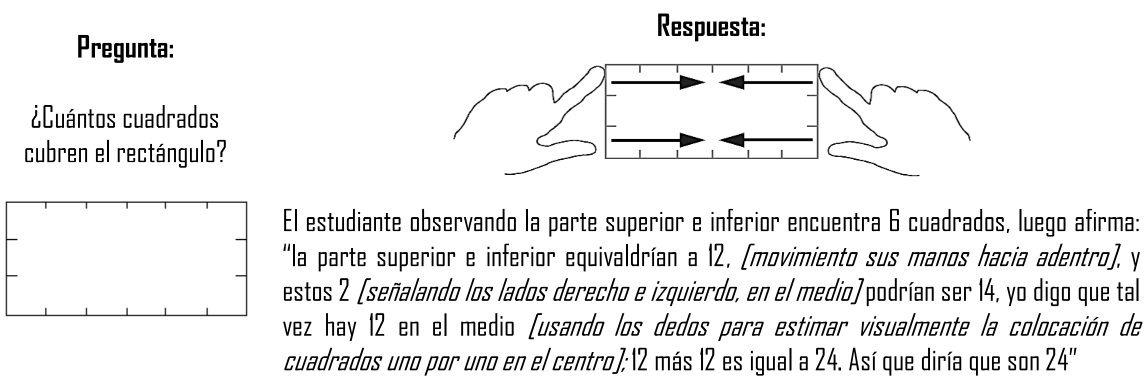
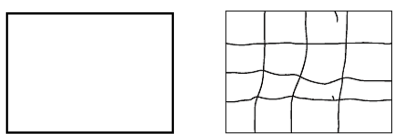


Figura 2.9: *El ejemplo de un estudiante que ante la pregunta y el rectángulo dados, muestra y describe una identificación de estructura parcial de fila*

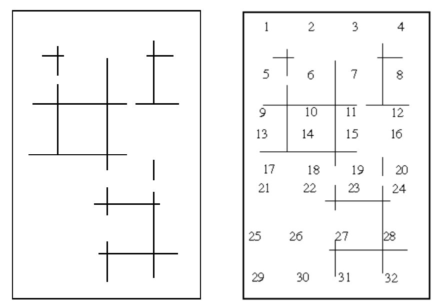
3. ***Estructura de la cuadrícula como un conjunto de filas o columnas:*** El estudiante reconoce la cuadrícula como una organización cubierta por grupos de filas, pero no las coordina adecuadamente con la dimensión ortogonal o bidimensional.

La Figura 2.10 presenta un ejemplo en el que a un estudiante se le entrega un rectángulo de 4×3 sin ningún tipo de marca (Figura 2.10 a), e identifica la parte superior como una fila con 4 cuadros que usa para cubrir el rectángulo; sin embargo no encuentra el número correcto de iteraciones de la fila, ignorando el número de cuadrados de la columna y estimando visualmente el número de filas, encontrando que 4 lo cubrían (y no 3 como era correcto). Luego, a pesar de que le presentan otro rectángulo de 4×6 con marcas en el interior (Figura 2.10 b), seguía ignorando las marcas dadas en las columnas. En ambos casos las preguntas del entrevistador juegan un papel crucial en la comunicación del pensamiento del estudiante.



Entrevistador	***Estudiante***
¿Cuántos cuadrados cubren el rectángulo?	Yo predigo que son 20 *[contando uno por uno]*
¿Cómo lo conseguiste?	Porque conté cada fila de a 4 *[Luego cubre el rectángulo por filas, y cuenta 16 cuadrados]*
¿Por qué habías conseguido 20 antes?	Porque yo pensé que estos eran más pequeños *[después encuentra que son 12]*
¿Por qué ahora piensas que es diferente a los 16 que dibujaste?	No estoy realmente seguro, porque puede ser que los dibujé mas grandes o más pequeños...¡Más pequeños!"

(a)



Entrevistador	***Estudiante***
¿Cuántos cuadrados cubren el rectángulo?	Aquí podrían ser 1, 2, 3, 4 *[continuando el conteo ilustrado en la figura],* 32
¿Cómo supiste hasta qué punto debías contar?]	Porque me gustó intentar pensar de que tamaño era el cuadrado"

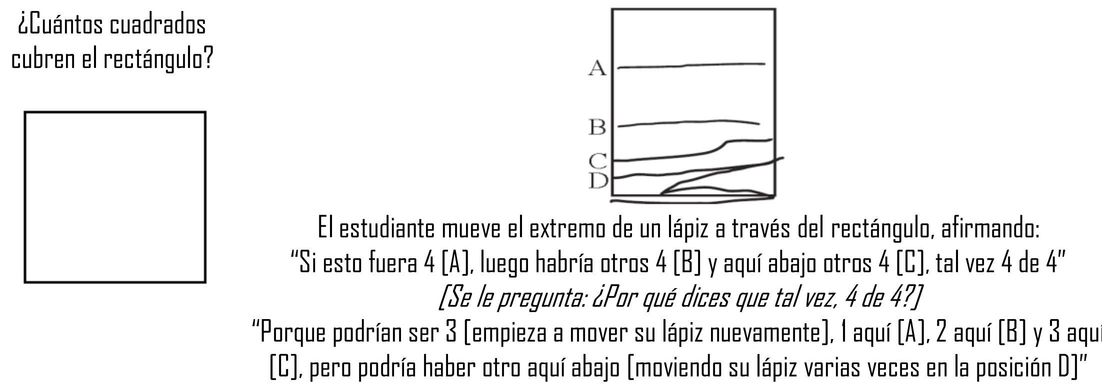
(b)

Figura 2.10: *La respuesta de un estudiante que estructura la cuadrícula como un conjunto de filas, ignorando el número de cuadrados de la columna y las marcas dadas sobre el rectángulo*

4. ***Iteración visual por filas o columnas:*** El estudiante itera una fila como unidad compuesta que distribuye sobre, o relaciona con, los cuadritos de una columna. Allí se pueden diferenciar dos casos. Cada caso se realiza con el mismo estudiante:

a. Cuando no hay unidades dibujadas, el estudiante determina el número de iteraciones estimando visualmente cómo encajan las filas en el rectángulo.

La Figura 2.11 ilustra un ejemplo en el que a un estudiante se le entrega un rectángulo vacío de 4×4, e identifica la fila que le sirve para cubrir el rectángulo, sin embargo no encuentra el número correcto de veces que debe iterarla (Figura 2.11 b), solo lo estima.

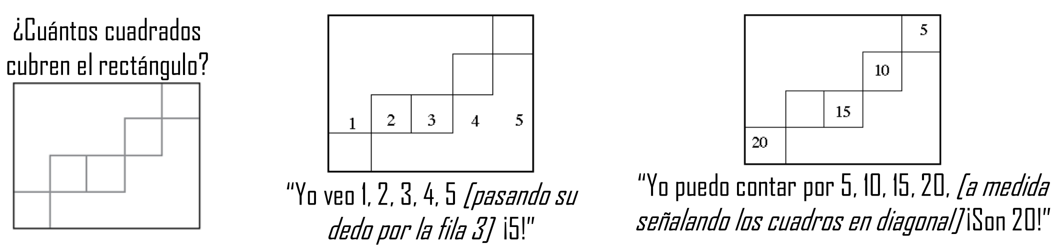


(a) *(b)*

Figura 2.11: *Un estudiante que identifica una fila de 4 cuadrados, la itera y estima visualmente cómo encajan las filas en el rectángulo, ignorando el número de cuadrados de la columna*

b. Cuando hay cuadritos dibujados verticalmente, los usa para indicar el número de veces que se itera la fila.

Luego al mismo estudiante del ejemplo "*a*", de la Figura 2.11, se le entrega un rectángulo de 5×4 con unos cuadritos dibujados en diagonal (Figura 2.12 a). Allí luego de identificar el número de cuadrados de la fila (Figura 2.12 b), usa el conjunto de cuadros para relacionar, o indicar, el número de iteraciones de la fila (Figura 2.12 c).



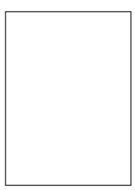
(a) *(b)* *(c)*

Figura 2.12: *El ejemplo del mismo estudiante del caso "a", en el que itera la fila y usa los cuadritos de la diagonal como indicadores del número de filas*

5. ***Estructuración por filas o columnas y proceso interiorizado de iteración:*** El estudiante ha interiorizado que itera una fila o columna como unidad compuesta, y que usa el número de cuadrados en una columna o fila de forma ortogonal para determinar el número de iteraciones. Aquí el estudiante puede no necesariamente realizar gráficamente la representación espacial de la estructura, porque ya la ha reconocido. Y tampoco requiere de material perceptivo (los cuadrados movibles o dibujados) para reconocer la estructura y puede llegar a "operacionalizar" la estructura fila por columna.

La Figura 2.13 muestra el ejemplo de un estudiante al que se le entrega un rectángulo vacío de 5×7 (Figura 2.13 a), y reconoce la fila como un conjunto de 5 cuadritos que usa para cubrir el rectángulo contando de 5 en 5 y además comunica que el número de filas está indicado por el número de cuadrados que hay en la columna.

¿Cuántos cuadrados cubren el rectángulo?



(a)

Luego de quitar los cuadrados que cubren la fila y la columna [Esta se ubicó en el centro del rectángulo] El estudiante dice:

"5 a través… *[Señalando con el dedo la fila superior (pausa)],* 7 hacia abajo… *[empieza a contar por múltiplos de 5 hacia abajo moviendo sus dedos de izquierda a derecha]* 5, 10, 15, 20, 25, 30, ¡35!

[El entrevistador le pregunta: ¿Por qué paraste en 35?]

Porque cuando levanté mi último dedo supe que había solamente 7,

[El entrevistador ahora pregunta: ¿qué te dijo eso, por qué 7?

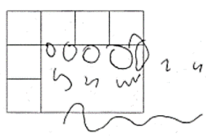
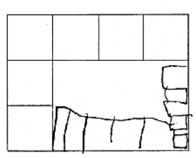
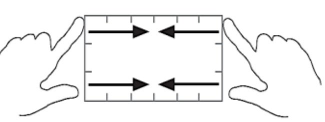
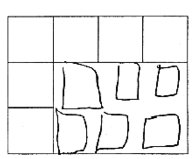
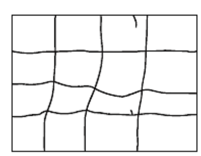
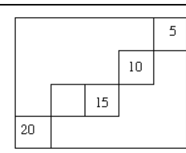
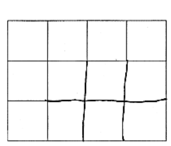
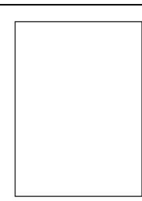
Porque solo hay 7 hacia abajo de esta manera [moviendo su dedo verticalmente por el centro]"

(b)

Figura 2.13: *Un rectángulo vacío (a) en el que un estudiante muestra que ha interiorizado el proceso de identificación de la estructura espacial, sin el uso de marcas, dibujos o cuadritos movibles*

Reconocer cada uno de los niveles de *pensamiento estructural* de Mulligan y Mitchelmore (2009), y los niveles de *pensamiento estructural espacial* de Battista, et al. (1998), me permitió ver una correspondencia, y coherencia, entre los descriptores de cada estudio a partir de sus distintos niveles. En este sentido, es posible establecer una relación entre cada uno de los niveles de ambos estudios, equiparándolos, tal como se observa en la Tabla 2.3.

Tabla 2.3: *Relación entre los niveles de pensamiento estructural Mulligan y Mitchelmore (2009, 2011), y de pensamiento estructural espacial de Battista et al. (1998) considerados para caracterizar el pensamiento de los estudiantes*

Pensamiento estructural (Mulligan y Mitchelmore, 2009):		**Pensamiento estructural espacial (Battista, et al. 1998)**	
Nivel/Ejemplo	**Generalidad**	**Nivel/Ejemplo**	**Generalidad**
Pre-estructural		**Ausencia total de estructura**	
	Las representaciones carecen de cualquier evidencia de estructura numérica o espacial. La mayoría de los ejemplos muestran características distintivas de acuerdo con el pensamiento de cada niño.		El estudiante no reconoce filas o columnas. Estructura la cuadrícula como un camino unidimensional, y tiene dificultad para visualizar la ubicación de los cuadritos sobre el rectángulo, así como para contarlos.
Emergente		**Estructura parcial de fila o columna**	
	Las representaciones muestran algunos elementos relevantes de la estructura dada, pero la estructura numérica o espacial no está representada.		El estudiante identifica una fila o columna como una unidad compuesta, pero esta no la utiliza para cubrir todo el rectángulo.
Estructural parcial		**Estructura de la cuadrícula como un conjunto de filas o columnas**	
	Las representaciones muestran los aspectos más relevantes de la estructura numérica o espacial, pero la representación es inexacta o incompleta.		El estudiante reconoce la cuadrícula como una organización bidimensional cubierta por grupos (o nuevas unidades compuestas) de filas o columnas, pero no las coordina adecuadamente con la dimensión ortogonal o bidimensional.
		Iteración visual por filas o columnas	
			El estudiante itera una fila como unidad compuesta que distribuye sobre, o relaciona con, los cuadritos de una columna.
Estructural		**Estructuración por filas o columnas: Proceso interiorizado de iteración**	
	Las representaciones integran correctamente las características de la estructura numérico-espacial.		El estudiante ha interiorizado que itera una fila o columna como unidad compuesta y que usa el número de cuadrados en una columna o fila de forma ortogonal para determinar el número de iteraciones.

2.7. 2 Niveles de pensamiento considerados para caracterizar el pensamiento de los estudiantes participantes en este proyecto

Para caracterizar el pensamiento de los estudiantes durante el proceso desarrollado en el que se apoyaron sus procesos de identificación de la estructura espacial, se tuvo como referente la relación entre los niveles de pensamiento estructural de Mulligan y Mitchelmore (2009, 2011), y de pensamiento estructural espacial de Battista et al. (1998) observados en la Tabla 2.3.

Dado que el propósito de este proyecto radicaba en la identificación y *generalización* de la estructura espacial de cuadrículas, Mulligan y Mitchelmore (2011) proponen un nivel de pensamiento adicional al estructural: el *estructural avanzado.* En este nivel los autores afirman que los niños reconocen la "generalidad de la estructura fundamental", integrando la estructura numérico-espacial presente. Sin embargo los autores no abordan la comunicación de la generalización de las estructuras que los niños trabajan. En este sentido, en el marco de este proyecto, el nivel de pensamiento *estructural avanzado* (Mulligan y Mitchelmore, 2012) es adaptado a las necesidades del contexto y equivale a *identificar* y *comunicar* la *generalización* de la estructura espacial de cualquier cuadrícula; por tanto no se presenta en la Tabla 2.3, ya que los estudios de los autores referenciados en esta sección (Mulligan y Mitchelmore, 2012 y Battista et al., 1998), no avanzaron a la "generalización" de estructura.

2.8 El profesor como investigador

Como se resaltó en la descripción de la problemática, así como en la sección anterior, una mirada curricular tradicionalista o conductual fundamentada en un pensamiento absolutista de las matemáticas, muchas veces lleva a ver la matemática como un conjunto de verdades acabadas y preestablecidas que deben ser memorizadas y replicadas por los estudiantes. Esta mirada trasciende a la práctica y puede fundamentar el centro de la actividad matemática a partir de objetivos conductuales y procedimentales que buscan el *entrenamiento* y la *instrucción* y que a su vez son fácilmente verificables a partir de las prácticas de evaluación enfocadas a observar la memorización y retención de información.

Este currículo se centra en el producto, y es el que Stenhouse (1991/1998) describe como un currículo por *objetivos* conductuales. Esta perspectiva curricular al centrarse mayormente en la ejercitación y en la promoción de un aprendizaje *instrumental,* es decir el *qué* hacer, no forma parte de un escenario propicio para motivar un aprendizaje *relacional* y con *comprensión* en los estudiantes, y además me convierte como profesor en un sujeto pasivo como simple instructor, transmisor y validador de los conocimientos dentro del proceso enseñanza y aprendizaje. En este sentido me propuse para el desarrollo de este proyecto, más que una serie de objetivos, la *finalidad* de trabajar bajo una mirada puesta en los procesos de construcción conceptual de la estructura espacial de área rectangular de un grupo de estudiantes de Grado 5°, en el que mi papel de profesor sea el de un sujeto activo y mediador en sus procesos de aprendizaje. Esto me implicó estar inmerso, e involucrarme dentro de los procesos de aula no solo como profesor, sino como estudiante, investigador e indagador, sobre los procesos de pensamiento de los estudiantes. Esto es, apoyarlos en la construcción de sus aprendizajes a través de la toma de decisiones pertinentes y necesarias sobre mi proceso de enseñanza y actuar en el aula, acorde a las necesidades del contexto real del grupo de estudiantes. Esta mirada hace parte de una concepción constructivista, o falibilista de las matemáticas (Ernest, 1991), en la que el estudiante se involucra en procesos de resolución de problemas prácticos en contextos matemáticos que son, en principio, un medio para la construcción de sus propios conocimientos. Estos planteamientos que señala Stenhouse, tienen que ver con un desarrollo *curricular por procesos*, en el cual se pretende apoyar los procesos de construcción de sus *conocimientos* que emergen de la solución de problemas prácticos y de un contexto próximo a la realidad los estudiantes—procesos enfocados al reconocimiento de la *estructura espacial de área rectangular*. Para ello, requerí involucrarme en procesos continuos de indagación y reflexión durante el desarrollo del proyecto, procesos sobre los cuales trata el siguiente capítulo: el enfoque metodológico.

Capítulo 3: Enfoque metodológico

El propósito de este proyecto y mi énfasis en apoyar procesos de construcción conceptual en el aula para fomentar un aprendizaje relacional (Skemp, 1976) me implicaron como sujeto activo y profesor en un continuo proceso de aprendizaje sobre los procesos de pensamiento de mis estudiantes para, así, poder tomar decisiones pertinentes sobre mi enseñanza y actuar en el aula. Tal como se resaltó en el Capítulo 2, las secuencias de actividades diseñadas y llevadas a la acción estaban inspiradas en una perspectiva curricular que atiende a los procesos que se dan en el aula, tanto para el estudiante como para el profesor (Stenhouse, 1998); por consiguiente, mi trabajo de enseñanza requirió mantenerme en el desarrollo de ciclos de indagación y reflexión, enfocando el pensamiento y construcciones de mis estudiantes, a medida que se involucraban en el desarrollo de las actividades de aula propuestas. El conocimiento de las ideas matemáticas y construcciones de los estudiantes, alcanzado a través la recolección sistemática de información y la identificación de evidencias, se iba convirtiendo en insumo central para la toma de decisiones curriculares a medida que se avanzaba en el desarrollo de la secuencia de actividades previstas (Agudelo-Valderrama, 2015; Ley N° 115, 1994). Esto significa que el enfoque de investigación acción se constituyó en el enfoque metodológico base de este proyecto.

Teniendo el enfoque de investigación acción como un marco amplio en el que se apoyó mi proceso de aprendizaje profesional durante el desarrollo de este proyecto, al describir la secuencia de trabajo diseñada, con el propósito de apoyar el aprendizaje de mis estudiantes, puedo entender y suscribir dicha secuencia de trabajo como lo que Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, y Schauble, (2003) y Molina, Castro, Molina, y Castro, (2011) denominan una *investigación de diseño*, ya que la actividad de enseñanza se diseña a partir del conocimiento de las ideas matemáticas de los estudiantes, i.e. de las evidencias de sus construcciones conceptuales y/o de sus necesidades de aprendizaje, según lo señale la información recolectada de manera sistemática, como se explica ampliamente en la sección 3.2, para revisar y reacomodar el diseño de enseñanza según las necesidades detectadas.

Desde esta óptica, el proceso de enseñanza se convierte en un continuo proceso de aprendizaje para el profesor (Stenhouse, 1998), pues la enseñanza requiere actitud y ojo indagador por parte del profesor, para así poder atender a los procesos de pensamiento de sus estudiantes, y entenderlos. Quiero resaltar, entonces, que en esta investigación de diseño—que en su puesta en acción se funde con los ciclos que planteo de investigación-acción antes descritos—hay un aspecto importante que la diferencia de los diseños reportados por Cobb y colegas: mientras que la investigación de diseño planteada por estos autores es realizada por investigadores profesionales, en la cual no se develan las oportunidades de aprendizaje profesional para el profesor colaborador, en este proyecto, la investigación de diseño estuvo bajo mi responsabilidad como profesor, obviamente con el apoyo continuo de mi asesora. Resaltar esta diferencia es importante aquí, ya que, siguiendo a Jaworski (2003), considero que los enfoques de investigación en el aula que apuntan *al mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas* requieren que el profesor colaborador esté involucrado no solo con el rol de facilitador, sino especialmente como sujeto activo que aprende en colaboración, indagando e investigando en su aula, y potenciando sus capacidades; de esta manera propende por el mejoramiento de la práctica de enseñanza de las matemáticas (Kieran, Krainer y Shaughnessy, 2013)

3. 1 El enfoque de investigación-acción

Como se mencionó anteriormente, el enfoque metodológico de este proyecto emerge de un enfoque curricular centrado en el proceso, en coherencia con una posición filosófica constructivista en la que el estudiante es quien construye sus conocimientos y el profesor es quien organiza ambientes de aprendizaje para apoyar sus procesos de construcción conceptual. Consecuentemente el trabajo de enseñanza necesitó desarrollarse como ciclos de indagación sobre lo que sucedía en el aula por razón de lo que como profesor proponía a los estudiantes—según Hopkins (1993), como ciclos de *investigación-acción.* Hopkins resalta que el enfoque de investigación-acción fue inspirado originalmente por el trabajo de Kurt Lewin en 1946, como una forma de abordar problemáticas sociales particulares en la época de la posguerra. En el campo de la educación este enfoque, de cierta forma, corresponde a la propuesta de Stenhouse (1998) de “el profesor como indagador en su aula", y por Kemmis y McTaggart (1988) como ciclos de acción reflexiva, quienes los ven como una puerta de entrada al profesor para cuestionar y cambiar su práctica en el aula, retomando y apropiando los elementos teórico-prácticos que permitan comprenderla y mejorarla.

Dentro de las etapas del proceso de investigación-acción, en este proyecto se consideró inicialmente el reconocimiento de una problemática o idea inicial en el contexto específico de mi práctica de enseñanza de las matemáticas en el aula (Idea inicial), la cual dio paso a la elaboración de un plan de acción para tratar de abordar dicha problemática en el contexto que se desarrolla, a través de la secuencia de actividades (Plan). Posteriormente este plan fue llevado a la práctica y observado (Acción y Observación), para finalmente reconocer y evaluar su efecto (Reflexión) en relación con la problemática. Así, como profesor me convertí en un indagador activo de mi propia práctica, enfocando los procesos de pensamiento y posibles aprendizajes de mis estudiantes. A partir de los resultados encontrados durante el desarrollo de la primera secuencia de actividades, o Fase 1, se encuentra que dicho trabajo es susceptible de mejora, lo cual requiere que dicha secuencia sea iterada de acuerdo con las necesidades del contexto identificadas en el aula, y al propósito del proyecto.

Haber dejado de lado el papel del profesor como mero instructor (que pasa del papel de sujeto "facilitador" en el proceso de investigación) al de investigador, en el que se convierte a través de la práctica en un indagador activo de los procesos de aprendizaje y pensamiento de los estudiantes, me permitió entender que la *investigación-acción*, además de representar un medio para resolver una problemática educativa particular, es una forma de ver y entender mi práctica profesional que involucra trabajo en la formación continua, y aporta la mejora de mis procesos de enseñanza y acciones en el aula. Desde este marco metodológico se propuso, para el desarrollo de este proyecto, diseñar una secuencia de enseñanza (o secuencia de actividades) que tuvo como propósito apoyar la identificación de estructura espacial rectangular en un grupo de estudiantes de grado quinto. Esta secuencia inicialmente esquematizada se fue adecuando a medida que fue desarrollándose para atender a las necesidades de aprendizaje que se identificaban en el aula, por lo que considero se convierte en un enfoque metodológico que posibilita el desarrollo curricular (Stenhouse, 1998).

El trabajo con los estudiantes en este proyecto se desarrolló en dos fases. En la “Primera Fase” tuvo lugar una secuencia de actividades (o secuencia de enseñanza) que se convirtió en lo que quiero llamar la Fase 1 que puede denominarse el “Estudio Piloto” de la secuencia, pues la experiencia y las reflexiones que de su puesta en acción emergieron, plantearon la necesidad de mejorarla y de nuevo llevarla a la acción, dándose paso a la Fase 2 de este trabajo, que he denominado “Estudio Principal” y es el objeto de atención del Capítulo 4. De esta manera, el trabajo en la Fase 1 se convirtió en un pilotaje de la secuencia de actividades, y, por ello, la Fase 2 fue una iteración de esta, pero mejorada.

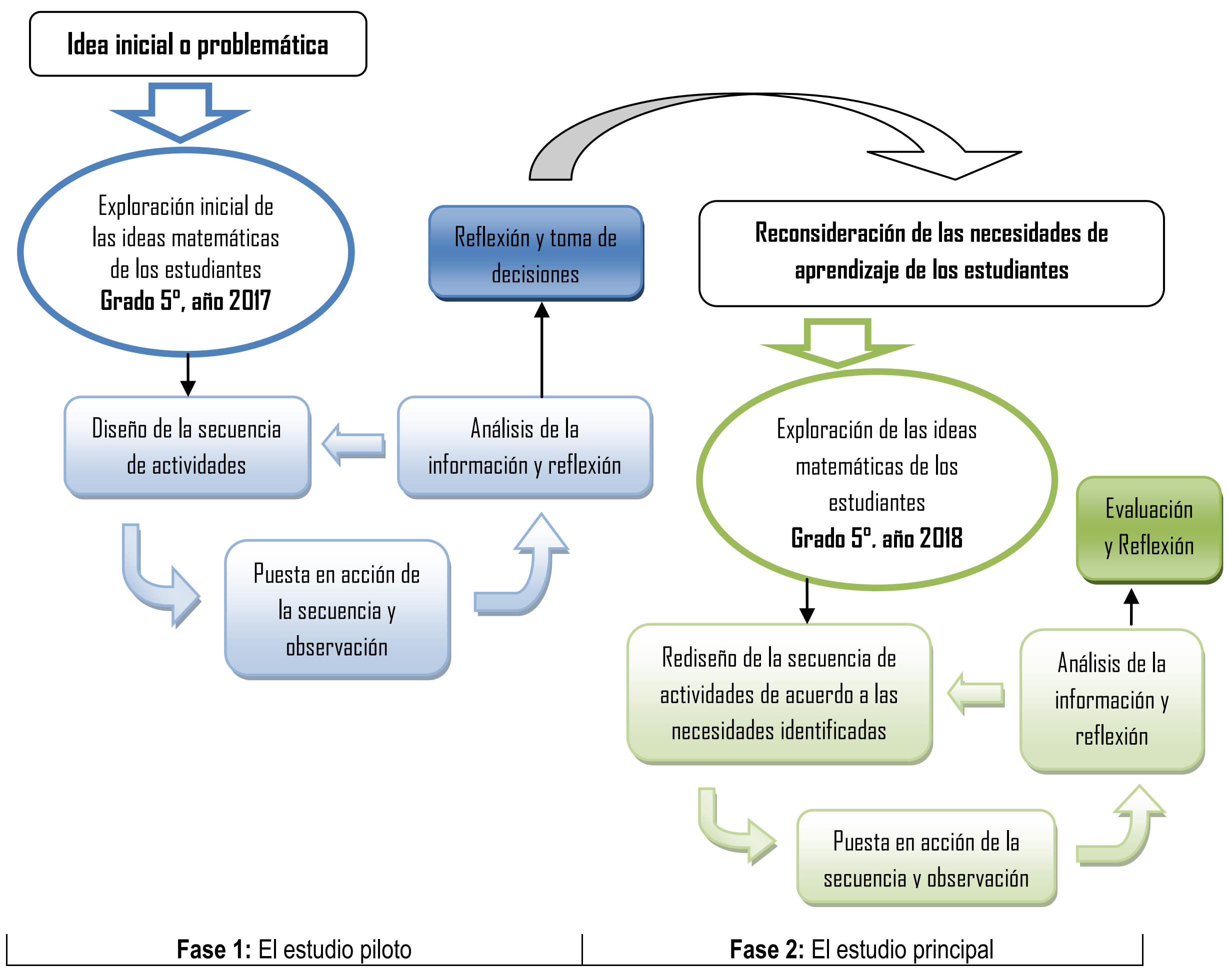


Figura 3. 1: *Las dos fases de la secuencia de trabajo desarrollado en este proyecto*

3. 2 La secuencia de trabajo que desde un enfoque de investigación-acción puede ser descrita como una investigación de diseño

En la Tabla 3.1 se describe de manera resumida la secuencia de trabajo desarrollada en este proyecto, en las dos fases, dando cuenta de manera relacionada, tanto de los ciclos de investigación-acción como de los ciclos de la investigación de diseño desarrollados.

Tabla 3.1: *Las secuencias diseñadas en este proyecto: La investigación de diseño inscrita en ciclos de investigación acción*

Fase	Investigación-Acción (I-A)	Investigación de Diseño (I-D)
Fase 1: Estudio piloto	Reconocimiento de la problemática en el contexto real del grupo de estudiantes de Grado 5º 2017	✓ Exploración inicial de las ideas matemáticas de los estudiantes (Grupo piloto-Grado 5º, 2017)
	Planeación, Acción y Observación	✓ Diseño de la secuencia de actividades (o secuencia de enseñanza) y de las formas de recolección de la información, durante el desarrollo de la secuencia de actividades ✓ Implementación de la secuencia, recolección y análisis de la información del desarrollo de cada actividad
	Análisis, reflexión y toma de decisiones	✓ Análisis integral de la información recolectada durante el desarrollo de la secuencia (2017) ✓ Reflexión y reconsideración de las necesidades de aprendizaje de los estudiantes y toma de decisiones para el mejoramiento de la secuencia de actividades que condujo a la Fase 2
Fase 2: Estudio principal (o iteración de la secuencia)	Reconsideración de las necesidades de aprendizaje de los estudiantes al terminar Grado 5º, 2017	✓ Exploración de las ideas matemáticas de los estudiantes (Grupo principal-Grado 5º, al inicio del año 2018)
	Planeación, Acción y Observación	✓ Diseño de la secuencia de actividades (o secuencia de enseñanza) y de las formas de recolección de la información, teniendo como referente los resultados de la Fase 1 y los resultados de la exploración de las ideas matemáticas de los estudiantes (Grado 5º, 2018) ✓ Implementación de la secuencia, recolección y análisis de la información
	Análisis y Reflexión	✓ Análisis integral de la información recolectada durante el desarrollo de la secuencia (2018) ✓ Reflexión y conclusiones generales del estudio

La secuencia de trabajo descrita en la Tabla 3.1 se presenta como una secuencia de pasos ordenados o etapas para mostrar de manera simple la secuencia de trabajo desarrollada. Sin embargo, en la realidad de aula estos procesos fueron mucho más complejos, y no se pueden presentar al lector en un solo esquema, ya que mientras hay planeación, hay análisis y reflexión; mientras hay acción también hay reflexión y elementos de planeación—hechos que viví a lo largo del desarrollo de mi trabajo y que realimentaron de forma continua las decisiones y acciones durante cada una de las dos fases de trabajo desarrolladas en el aula, pues a medida que se ponía en acción cada actividad de la secuencia, se necesitaba observar, analizar, y así decidir sobre la siguiente actividad.

En las secciones siguientes se presenta el proceso desarrollado para el diseño y puesta en acción de las dos fases de la secuencia de trabajo, las bases de referencia que se tuvieron en cuenta, así como las formas de recolección y análisis de la información

3. 3 Bases de referencia para el diseño y desarrollo de la secuencia de actividades y su iteración

Para el diseño de las secuencias desarrolladas, mientras que para el diseño de la Fase 1 se tuvieron en cuenta 3 bases de referencia, para la Fase 2 o estudio principal se tuvieron en cuenta 4 bases de referencia, así: Para la Fase 1, i) el contexto del grupo de estudiantes, ii) los resultados de la exploración inicial de su pensamiento e ideas matemáticas (como se muestra en la Tabla 3.1), y iii) el marco de referencia planteado en el Capítulo 2. Para la Fase 2 se tuvieron en cuenta estos mismos referentes, más, los aprendizajes y reflexiones logradas a partir del desarrollo de la Fase 1.

3.3. 1 El contexto de los grupos de estudiantes

Las secuencias de actividades se desarrollaron con dos grupos de estudiantes de grado quinto de primaria, en un colegio estatal de Bogotá que atiende estudiantes de un nivel socioeconómico medio, así:

- ✓ **Fase 1:** Se desarrolló en 8 sesiones de clase, durante un periodo de 4 meses, en el segundo semestre de 2017 con un grupo conformado por 28 estudiantes con edades entre los 10 y 11 años.
- ✓ **Fase 2:** Se desarrolló en 5 sesiones de clase, durante un periodo de 2 meses, al iniciar el año académico 2018, con un grupo conformado por 31 estudiantes con edades entre los 10 y 11 años de edad.

La razón por la que se consideró que la Fase 2 podía considerarse una iteración fue porque el contexto de ambos grupos fue similar, teniendo en cuenta que ambos trabajaron con el mismo profesor en grado cuarto, es decir en 2016 y 2017 respectivamente. Además la información recolectada sobre sus experiencias previas de aprendizaje de área rectangular en ambos grupos, mostró que este fue abordado desde la presentación de su fórmula, comenzando con la medición de las longitudes de las dos dimensiones y efectuando el producto entre estas. Esta información fue suministrada por el profesor encargado y confirmado por el trabajo registrado en los cuadernos de los estudiantes. Obsérvese la Figura 3.2:

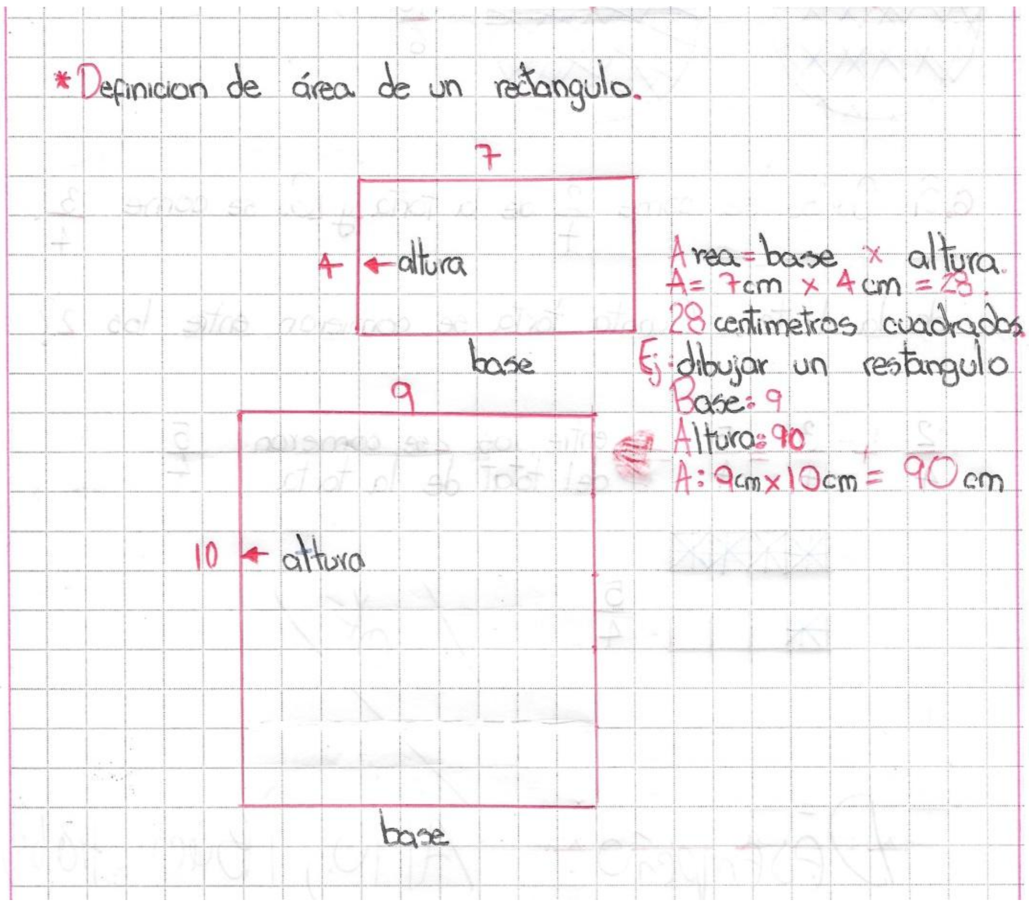


Figura 3. 2: *Una evidencia de la forma como los 2 grupos de estudiantes de Grado 5° abordaron el tema de área rectangular en Grado 4°*

3.3. 2 Resultados de la exploración inicial de los pensamientos e ideas matemáticas de los estudiantes

El propósito de la exploración inicial de las ideas matemáticas de los estudiantes a través del cuestionario y su entrevista de seguimiento, como su nombre lo dice, fue explorar su pensamiento en relación con el foco de atención matemático o disciplinar e identificar sus posibles necesidades de aprendizaje, tanto para la Fase 1 como para la Fase 2. Los resultados y necesidades de aprendizaje encontrados en dicha exploración permitieron reconocer el contexto real del grupo de estudiantes, para así tomar las decisiones pertinentes frente al diseño y desarrollo de la secuencia de actividades de las Fases 1 y 2. Estos se presentan en la sección 1 del Apéndice 1 (para la Fase 1) y en la sección 4.1 (para la Fase 2).

3.3. 3 Elementos conceptuales del marco referencial

Algunos de los componentes conceptuales, subrayados en el marco referencial (Capítulo 2) apoyaron la estructuración de las secuencias de actividades desarrolladas en cada una de las fases del proyecto; para el estudio principal (Fase 2) se dio especial atención a los planteamientos de Battista y colegas (1998), y a los principios operacionales propuestos por Outhred y Mitchelmore (2000). La secuencia de enseñanza seguida en el estudio principal compartió elementos básicos de la segunda ruta de enseñanza propuesta por Outhred y Mitchelmore (2000)—ya que estos autores proponen dos rutas a seguir (ver la Figura 2.7 del Capítulo 2), que nuevamente presento:

i) Introducir el concepto de área tempranamente, trabajar la medición de área como un cubrimiento de una región con una unidad fija, y luego investigar cubrimientos rectangulares en el contexto de medición de área.

ii) Comenzar el proceso con el cubrimiento de una superficie rectangular, investigar cubrimientos rectangulares para identificar estructura espacial para, luego, introducir el concepto de área.

La ruta de enseñanza se diseñó teniendo como referente importante los aprendizajes de los estudiantes y mis reflexiones sobre el desarrollo de la secuencia de enseñanza de la primera fase, reflexiones que se describen en la subsección siguiente 3.3.4. Así, se consideró para la Fase 2, centrar especial y mayor atención a la identificación de estructura espacial por parte de los estudiantes, apoyando la necesidad de crear formas efectivas de contar el conjunto de cuadritos que cubren un rectángulo dado, con miras a promover el conteo por agrupaciones relacionadas con alguna de las dimensiones del rectángulo, énfasis que no se presentó en la Fase 1.

3.3. 4 Los aprendizajes y reflexiones logrados a partir del desarrollo de la Fase 1.

Del análisis y reflexión alcanzada en la Fase 1 (para más detalle ver Apéndice 1) surgieron aprendizajes y aportes que permitieron tomar decisiones frente al proceso de enseñanza y aprendizaje a seguir con los estudiantes en la Fase 2 o estudio principal. De este análisis y reflexión puedo resaltar los siguientes aprendizajes que guiaron dichas decisiones para la Fase 2:

- ✓ Un primer aprendizaje me permitió reflexionar frente a la poca efectividad de la secuencia de enseñanza, teniendo en cuenta la cantidad y pertinencia de las tareas desarrolladas, las cuales fueron muy numerosas, y queriendo abarcar mucho, los estudiantes profundizaron poco en cuanto al foco conceptual de atención. Me centré más en que los estudiantes pudieran relacionar la longitud del ancho con el número de cuadritos en fila, y la longitud del alto con el número de cuadritos de la columna; esto les permitió encontrar números que podían fácilmente multiplicar para encontrar el total de cuadritos, sin relacionar la multiplicación con la estructura espacial (foco central del proyecto), dando evidencia de un aprendizaje *instrumental* o manejo *operacional* de las tareas, al hallar el número de cuadritos que cubren el rectángulo a través de las respuestas que comunicaron textualmente como: “multiplico los cuadritos del ancho por los cuadritos del alto”, “multiplico el ancho por el alto”, o “multiplico los números del ancho por el alto”. Además quiero resaltar que, ninguno de ellos, mostró o comunicó la identificación de la estructura espacial o multiplicativa presente en cuadrículas vista como una agrupación de cuadritos o unidad compuesta (fila) que se itera o repite para cubrir el rectángulo.

- ✓ Un segundo aprendizaje tiene que ver la ausencia de una exploración profunda del pensamiento de los estudiantes, por ejemplo, cuando respondían a preguntas como, "¿Cómo haces para encontrar el número de baldosas…?"; no se sondearon las razones por las que contestaban, por ejemplo, "multiplico el ancho por el alto, o "multiplico los números".
- ✓ De los dos aprendizajes anteriores y de lo observado en el desarrollo de la Fase 1, donde centré mi atención en el proceso de enseñanza en la medición de las longitudes del rectángulo, puedo concluir que no había creado espacios de aprendizaje para que los estudiantes dirigieran su atención a la identificación de la estructura espacial y la explicaran. A pesar de mi intención de alejarme de la promoción de un aprendizaje instrumental, había dejado el espacio para que los estudiantes recurrieran a reglas sobre área rectangular, con las que se habían familiarizado en el grado escolar anterior, que ya reporté (Ver la Figura 3.2).

De esta manera, partiendo de las reflexiones alcanzadas en esta Fase 1, con el apoyo de mi asesora y siguiendo a Nunes, Light y Mason (1993), quienes subrayan la dificultad que se genera para la identificación de estructura poder relacionar desde un inicio la longitud de los lados con el tamaño de las unidades de medición, dada la inexactitud que se puede generar entre estas, replanteé la secuencia, haciéndose evidente la necesidad realizar una iteración de esta con miras a alcanzar el propósito del proyecto, dando lugar a la Fase 2 de este trabajo.

3. 4 El estudio principal o Fase 2

Como se subrayó anteriormente, la Fase 2 de este proyecto correspondió a una *iteración* de la primera secuencia desarrollada en lo que llamé estudio piloto o Fase 1, guiada por las reflexiones alcanzadas en la Fase 1, y las demás bases de referencia. Esta iteración atendió a los principios operacionales de Outhred y Mitchelmore (2000) reportados en la Figura 2.7, y siguió la secuencia de trabajo que se observa en la Tabla 3.2, con sus correspondientes formas de recolección de la información.

La Fase 2 (al igual que la Fase 1) comenzó con la exploración de las ideas matemáticas de los estudiantes, para lo cual se aplicó *el cuestionario de exploración de las ideas matemáticas* que se puede ver en el Apéndice 3, y su correspondiente *entrevista de seguimiento.* El análisis de la información allí recolectada fue crucial para identificar los conocimientos previos de los estudiantes, así como sus necesidades de aprendizaje—elementos necesarios para apoyar sus aprendizajes en torno al desarrollo del foco del proyecto.

Tabla 3. 2: *La secuencia de trabajo y formas de recolección de la información de la Fase 2*

Secuencia de trabajo	**Propósitos**	**Actividades y propósitos**	**Formas de recolección de información**
✓ Exploración de las ideas matemáticas de los estudiantes (Grupo 5º año 2018),	Explorar las ideas matemáticas de los estudiantes, centrando atención en las estrategias de conteo de las unidades que cubren una superficie rectangular. Identificar necesidades de aprendizaje de los estudiantes.	E1: Aplicación del cuestionario y la entrevista de seguimiento al grupo de estudiantes que empezaban grado quinto (2018) E2: Sistematización y análisis de la información recolectada E3: Entrevista de seguimiento al cuestionario E4: Reflexión a partir de los resultados del cuestionario y su entrevista de seguimiento	Cuestionario y entrevistas de seguimiento
✓ Diseño de la nueva secuencia de enseñanza ✓ Implementación de la secuencia, recolección y análisis de la información de cada actividad	Esquematizar una posible secuencia de actividades enfocada a la identificación y comunicación de la estructura espacial de área rectangular Rediseño, implementación y análisis de la secuencia de enseñanza A medida que se desarrolla cada actividad de la secuencia se analizan sus resultados y se diseña la siguiente actividad.	D1: Actividad 1: Apoyando el reconocimiento de la estructura espacial D2: Actividad 2: Apoyando la comunicación y generalización de la estructura espacial D3: Actividad 3: Observando posibles formas de comunicar generalizaciones en una situación específica: con cuadrículas	-Hojas de trabajo de los estudiantes -Entrevistas de seguimiento -Video registro -Audio registro Diario de campo
✓ Análisis de la información recolectada. ✓ Reflexión y establecimiento de conclusiones	Sistematizar y analizar la información recolectada de manera retrospectiva para observar los alcances de la secuencia de actividades en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, y en el marco general del proyecto	R1: Sistematización y análisis global de la información recolectada, centrada en el proceso de identificación de la estructura espacial de los estudiantes R2: Análisis retrospectivo y reflexión sobre los alcances y aprendizajes alcanzados a partir del desarrollo de la secuencia	N/A

Luego de detectar las necesidades de aprendizaje de los estudiantes se da lugar al diseño de la secuencia de enseñanza, la cual tuvo lugar a través de tres actividades principales, y la documentación del pensamiento de los estudiantes, necesaria para realimentar los ciclos continuos de acción y reflexión, como se describió en la sección 3.2. En la Tabla 3.3 se presenta un esquema de la secuencia de actividades desarrollada con los propósitos y las tareas propuestas para cada una. El trabajo de la Fase 2 culminó con la evaluación y reflexión final, lo cual permitió dar una mirada global al proceso desarrollado en el proyecto. El Capítulo 4 centra su atención en el análisis de los resultados encontrados a partir de la implementación de la secuencia de enseñanza desarrollada en la Fase 2.

Tabla 3. 3: *Propósitos y tareas de la secuencia de enseñanza de la Fase 2*

Actividad	Propósito (por actividad)	Tareas
1: Apoyando el reconocimiento de la estructura espacial	Apoyar el reconocimiento de la estructura espacial de una cuadrícula	✓ Usando ventanas de Geogebra para cubrir rectángulos, a partir de cuadritos dados (unidades simples) ✓ Cubrir un rectángulo a partir de la identificación y cubrimiento por filas
2: Apoyando la comunicación y generalización de la estructura espacial	Observar el proceso de comunicación y generalización de la estructura espacial de una cuadrícula.	✓ Cubrir dos rectángulos dada la primera fila y comunicar la estructura espacial ✓ Encontrar una regla para encontrar el número de cuadritos que cubren un rectángulo de cualquier tamaño
3: Observando posibles formas de comunicar generalizaciones sobre estructura espacial en una situación específica con cuadrículas	Observar la identificación y comunicación de generalización para encontrar el número de cuadritos que bordean cuadrículas dadas	✓ Colocar bordes de cuadritos a cuadrículas dadas, y describir el procedimiento para encontrar el número de cuadritos en el borde

3. 5 Recolección de la información

La información obtenida en el proyecto fue recolectada usando los siguientes instrumentos y formas de recolección de información:

Cuestionario y entrevista de seguimiento: El propósito del cuestionario era explorar las ideas matemáticas de los estudiantes en contextos de cubrimiento de áreas rectangulares, y sus formas de conteo del conjunto de cuadritos que las cubren. Se quería establecer cómo estaban los estudiantes en cuanto a la identificación de estructura espacial de área rectangular. La entrevista de seguimiento al cuestionario tenía como propósito indagar con mayor profundad sobre el pensamiento de los estudiantes en sus respuestas al cuestionario. Tanto el cuestionario como la entrevista, en cada una de las fases, fueron debidamente piloteados[6]. Las entrevistas fueron audiograbadas y transcritas *verbatim* (palabra por palabra).

-Cuestionario de la Fase 1. El cuestionario para Fase 1 se presenta en el Apéndice 2. Este cuestionario estaba compuesto por 6 preguntas; la primera pedía medir una longitud dada. Las demás preguntas requerían cubrir superficies rectangulares y explicar sus formas o estrategias de conteo.

-Cuestionario del estudio principal o Fase 2. El cuestionario de la Fase 2 estaba compuesto por 3 preguntas, inspiradas en los tres tipos de tarea que plantearon Outhred y Mitchelmore (2000) para indagar las estrategias de un grupo de niños para cubrir superficies rectangulares, y su conteo. La pregunta número 1 pide usar una unidad movible para cubrir un rectángulo dado; la pregunta 2 pide cubrir un rectángulo con una unidad no movible. La pregunta 3 requería cubrir un rectángulo con dimensiones dadas usando una unidad de dimensión 2×2 con la necesidad de identificar el cubrimiento rectangular, dadas solamente las dimensiones del rectángulo y de la unidad cuadrada. En cada pregunta se pide que describan las formas que usan para el conteo de las unidades. El cuestionario se presenta en el Apéndice 3.

Las respuestas de los estudiantes en el cuestionario fueron sistematizadas y categorizadas de acuerdo a los niveles de pensamiento que sirvieron como referente, y fueron discutidos en el Capítulo 2 (ver la Tabla 4.1 en el capítulo siguiente). Para la entrevista de seguimiento, se seleccionaron subgrupos de estudiantes de cada nivel identificado, como se muestra en la Tabla 4.1.

[6] El cuestionario de la Fase 1 fue piloteado con un grupo de estudiantes que finalizaba grado quinto en 2016.

Hojas de trabajo de los estudiantes: Durante el desarrollo de las actividades de clase, a cada estudiante se le entregaba una hoja trabajo en la que se registraba el trabajo o la forma de abordar las situaciones-problema dadas, o sus respuestas a las preguntas dadas. Su propósito fue recopilar la información de los pensamientos de los estudiantes.

Audio registro: Este instrumento se empleó para tener registro de los pensamientos de los estudiantes en situaciones particulares de clase que lo ameritaron, por ejemplo intervenciones puntuales de algunos estudiantes o preguntas hechas por el profesor para explorar sus pensamientos en torno a formas de pensamiento particulares. Además también fue una forma de registro del pensamiento de los estudiantes durante las entrevistas de seguimiento hechas a los grupos seleccionados.

Video registro: Para las sesiones que requirieron espacios de discusión o socialización de las tareas propuestas con los estudiantes, se realizó video registro, para luego observar con detalle momentos puntuales de clase que brindaban información específica sobre sus pensamientos.

Mi diario de campo: Este fue un instrumento que permitió tomar nota sobre aspectos cruciales que sucedieron durante los procesos de enseñanza y aprendizaje en los espacios de clases que lo requirieron, así como para la realimentaciones y reflexiones que se llevaron a cabo durante estas y durante las sesiones de asesoría del proyecto bajo la dirección de mi asesora.

3. 6 Análisis de la información

La información recolectada en cada una de las Fases del proyecto era analizada en forma continua ya que era necesario prestar atención al pensamiento y aprendizajes de los estudiantes, al finalizar cada una de las tareas, con el fin de tomar decisiones para las tareas siguientes, teniendo en cuenta los focos de atención propuestos para cada una. También se hizo un *análisis retrospectivo* al finalizar cada una de las Fases, la cual permitió observar y reconocer los alcances del trabajo del proyecto en general y reflexionar sobre la acción.

Para el análisis de la información recolectada en la exploración de las ideas matemáticas de los estudiantes a través de los cuestionarios y entrevistas de seguimiento, se utilizó la información primaria suministrada por ellos (tal como la presentaron), la cual se transcribió, sistematizó y sirvió como insumo para organizar en tablas de acuerdo a niveles de pensamiento, adaptados de los referentes teóricos y conceptuales planteados en el Capítulo 2.

En cuanto al análisis de la información recolectada en las secuencias de enseñanza se tuvo en cuenta la información recolectada a partir de sus distintas formas (diario, entrevistas y observaciones) e instrumentos o medios que se utilizaron para el registro y recolección de la información. Una vez la información primaria—esto es, tal como fue suministrada por los niños—fue levantada, se procedió a su organización y reducción para contrastarla y triangularla, cuando era posible, y así poder presentarla de manera útil para la observación de resultados.

Por último quiero resaltar que el análisis retrospectivo, además de ser clave para observar el proceso desarrollado en la Fase 1, permitió tomar decisiones para la Fase 2 (como se describe en la subsección 3.3.4) frente al proceso de enseñanza y aprendizaje a la luz de los resultados obtenidos en la primera fase. De igual manera, sirvió como insumo para dar una mirada general al desarrollo del proyecto, lo cual se puede observar en las conclusiones generales del estudio en el capítulo 5.

3.7 Aspectos de ética y calidad de investigación del proceso de actividad desarrollado

La información suministrada por los estudiantes, así como su identidad, se manejó de manera anónima siguiendo los principios de la ética de la investigación. Además para los registros (audio y video registros) se elaboró un consentimiento informado, comunicando a los padres de familia el proyecto del cual participarían los estudiantes (si así lo permitían), así como la confidencialidad en el manejo de la información que pudiese llevar a la identificación de alguno de ellos. En el Apéndice 6 se observa el consentimiento informado suministrado a los padres de familia, y el consentimiento firmado por la profesora del grupo de estudiantes con quienes se realizó el pilotaje del cuestionario y la entrevista de seguimiento para la Fase 1.

Capítulo 4: El estudio principal

En este capítulo se hace una descripción del proceso desarrollado en la Fase 2 o estudio principal, así como de los alcances logrados por los estudiantes en su proceso de construcción conceptual de estructura espacial de área rectangular. Para facilidad del lector el trabajo correspondiente a la Fase 1 o estudio piloto—la primera secuencia de actividades—se presenta en el Apéndice 1, al igual que las reflexiones y aprendizajes alcanzados en el desarrollo de esta fase.

En la Sección 4.1 se muestran los resultados de la exploración inicial de las ideas matemáticas de los estudiantes, obtenidos a través del cuestionario y la entrevista de seguimiento (descritos metodológicamente en la sección 3.5), estos resultados sirvieron como referente para el diseño de la secuencia de actividades que se llevó al aula en el estudio principal. En la Sección 4.2 se describe.

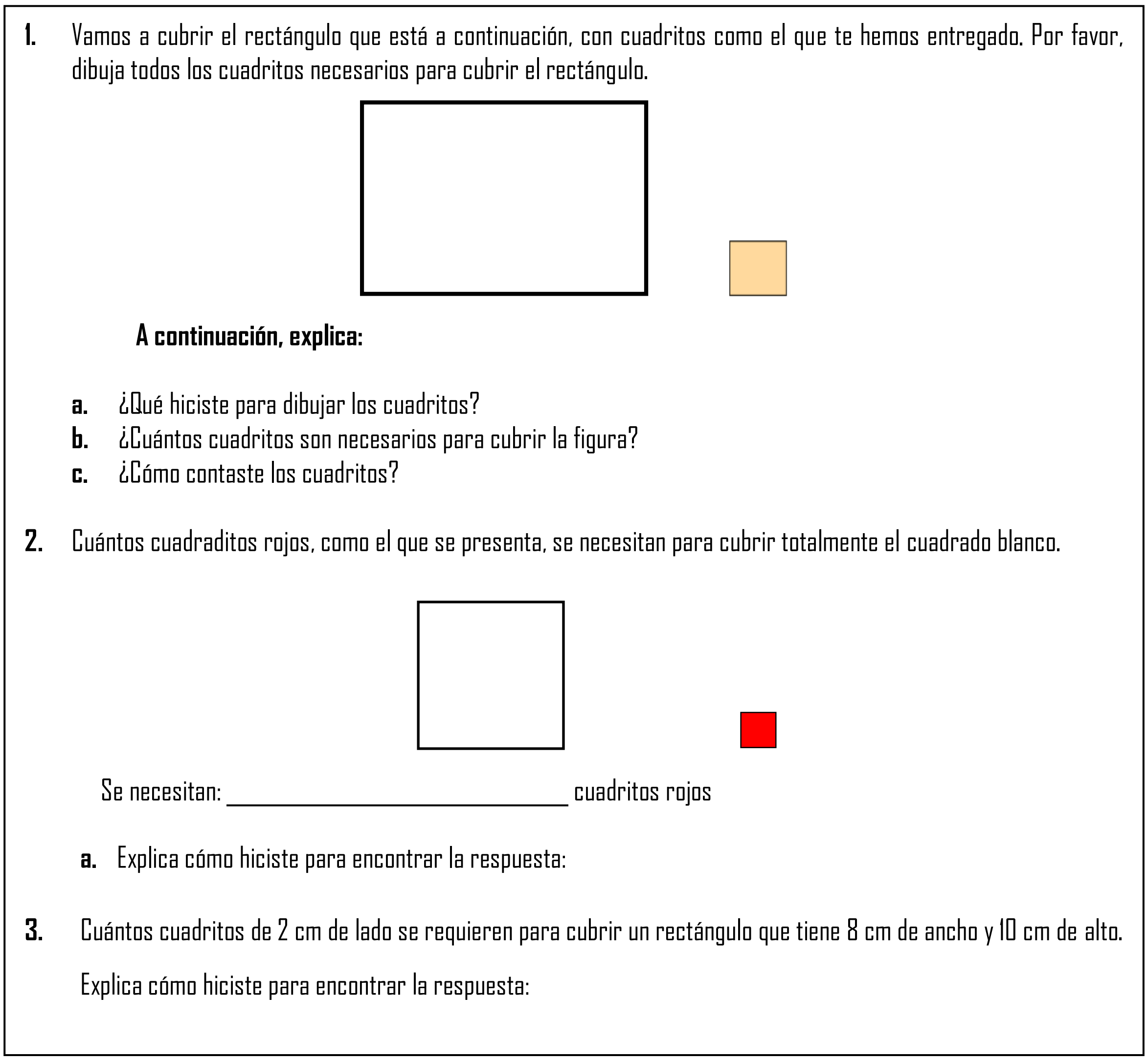
4.1 Resultados de la exploración inicial de las ideas matemáticas de los estudiantes

El propósito de la exploración inicial de las ideas matemáticas de los estudiantes fue observar y prestar atención a la forma como los estudiantes cubrían un rectángulo a partir de una unidad dada, y sus estrategias de conteo, con miras a la identificación de los conocimientos con los que contaban, así como de sus necesidades de aprendizaje. Para facilidad del lector, presento a continuación las tres preguntas que conformaron el cuestionario, diseñadas a partir de los tres tipos de tarea propuestas por Outhred y Mitchelmore (2000). El cuestionario se puede ver en el Apéndice 3, y en la Figura 4.1 se presentan las 3 preguntas del cuestionario.

Para el desarrollo de la pregunta 1 se entrega una hoja en la que hay un rectángulo de $12cm \times 8cm$ junto con las explicaciones requeridas y, además, un cuadrito de cartón de $2cm \times 2cm$, con el fin de observar si los estudiantes hacían un cubrimiento adecuado del rectángulo usando el cuadrito, pero esencialmente para observar las estrategias de conteo de los cuadritos que lo cubrían.

Para el desarrollo de la pregunta 2 se entrega una hoja en la que aparecen dibujados un cuadrado de $16cm \times 16cm$ y un cuadrito rojo de $2cm \times 2cm$ junto con la explicación pedida que se observa en la Figura 4.1. Se quería observar si cubrían adecuadamente el rectángulo a partir del cuadrito dibujado, pero principalmente para observar las formas de encontrar el total de unidades que lo cubren.

Para la pregunta 3 se entrega la pregunta y la explicación pedida que se observa en la Figura 4.1, sin ninguna representación gráfica, con el fin de observar las estrategias de solución que proponen y comunican los estudiantes frente a la situación.



1. Vamos a cubrir el rectángulo que está a continuación, con cuadritos como el que te hemos entregado. Por favor, dibuja todos los cuadritos necesarios para cubrir el rectángulo.

   A continuación, explica:

   a. ¿Qué hiciste para dibujar los cuadritos?
   b. ¿Cuántos cuadritos son necesarios para cubrir la figura?
   c. ¿Cómo contaste los cuadritos?

2. Cuántos cuadraditos rojos, como el que se presenta, se necesitan para cubrir totalmente el cuadrado blanco.

   Se necesitan: ______________________ cuadritos rojos

   a. Explica cómo hiciste para encontrar la respuesta:

3. Cuántos cuadritos de 2 cm de lado se requieren para cubrir un rectángulo que tiene 8 cm de ancho y 10 cm de alto.

   Explica cómo hiciste para encontrar la respuesta:

Figura 4.1: *Las 3 preguntas del cuestionario del estudio principal*

El cuestionario de exploración, compuesto por las tres preguntas anteriormente descritas, se entregó a los estudiantes y se destinó un total de 60 minutos para que lo solucionaran. A medida que los estudiantes lo desarrollaban, el profesor pasó por sus puestos de trabajo verificando que entendieran lo que se pedía que hicieran. Una situación particular allí presentada fue que algunos empezaron a usar el cuadrito de cartón de la pregunta 1 para solucionar la pregunta 2, incluso la pregunta 3, por lo que hubo que indicar que este era de uso exclusivo de la pregunta 1. A partir de las explicaciones escritas y orales que el profesor solicitó a varios estudiantes de manera individual, se pudieron observar las formas y estrategias que usó el grupo de estudiantes para contar el total de cuadritos necesarios para cubrir por completo cada uno de los rectángulos. Los resultados obtenidos del cuestionario y la entrevista de seguimiento realizada a 11 estudiantes seleccionados a partir de los tres niveles de pensamiento identificados (5 para el nivel *uno*, 5 para el *dos* y 1 para el *tres*) se pueden observar, de forma sintética y organizada, en la Tabla 4.1.

En cada una de las preguntas los estudiantes cubrieron los rectángulos dados de manera adecuada, es decir sin dejar espacios o solapamientos entre los cuadritos que los cubrían, atendiendo a los requerimientos dados; para ello usaron el cuadrito de cartón (unidad movible) o el cuadrito dibujado (unidad no movible). Esto era de esperarse, dado el nivel de escolaridad, Grado 5° (con edades entre los 10 y 11 años). A partir de la observación de las estrategias utilizadas o ideadas por ellos para el conteo de las unidades (cuadritos) que cubrían los rectángulos; las respuestas se pudieron organizar en 3 niveles (Ver Tabla 4.1):

- ✓ El nivel *uno* con el 39% (12 de 31 estudiantes) no reconoce ningún tipo de estructura para el conteo y usa una estructura netamente aditiva, ya que cuentan por unidades simples o “de 2 en 2”. A partir de la entrevista de seguimiento (un ejemplo de las entrevistas se puede observar en el Apéndice 5) se pudo observar que 1 estudiante contaría de “2 en 2”, 2 estudiantes pasarían a contar por filas y 2 estudiantes multiplicarían los cuadritos del ancho por los del alto, sin explicar por qué la multiplicación funciona. Esto era de esperar, ya que como se describió en la Sección 3.3, habían tenido un primer acercamiento al concepto de área rectangular a partir de la presentación de la fórmula.

Tabla 4.1: *Niveles de pensamiento del grupo de 31 estudiantes identificados de las respuestas al cuestionario y su entrevista de seguimiento realizada a 11 de los 31 estudiantes*

CUESTIONARIO			ENTREVISTA DE SEGUIMIENTO (Realizada a 11 estudiantes)			
Nivel / Generalidad: ***El conteo de los cuadritos que cubren los rectángulos lo hacen...***	**Porcentaje**	**Estrategias de conteo (Ejemplos textuales de los estudiantes)**	**Propósito**	**Pregunta(s) que orientaron la entrevista**	**Descriptores de sus respuestas**	**Número de estudiantes**
Uno: Contando "De uno en uno" o "de dos en dos"	**39 %** 12 Estudiantes	"Cuento de 1 en 1" "Cuento de 2 en 2"	Indagar con mayor profundidad sobre sus estrategias de conteo presentadas en el cuestionario	¿Podrías idearte una forma distinta o más rápida de contar los cuadritos?	Pasaría de contar "de 1 en 1" a contar de "2 en 2"	1 de 5
					Pasaría a contar por el número de cuadritos de las filas	2 de 5
					Pasaría a multiplicar el ancho por el alto (sin relacionar las estructura)	2 de 5
Dos: **(45 %)** **-**Multiplicando el ancho por el alto **-**Contando por el número de cuadritos de una fila (4 cuadritos) o de una columna (6 cuadritos)	**16 %** 5 Estudiantes	"Multipliqué el ancho por el alto y me dio el resultado"	Indagar si al multiplicar están relacionando la multiplicación con la estructura espacial de los rectángulos	¿Por qué si haces una multiplicación, puedes obtener el número de cuadritos?	Multiplica porque es una forma rápida de obtener el resultado	1 de 2
					Ve la multiplicación como una suma repetida de filas o columnas (reconociendo la estructura)	1 de 2
	29 % 9 Estudiantes	"Cuento de 4 en 4" "Cuento de 6 en 6"	Indagar con mayor profundidad sobre sus estrategias de conteo. [Además observar si a partir de las preguntas es posible apoyarlos a que avancen de nivel]	¿Por qué cuentas en múltiplos de 4 ó 6? ¿Qué significa para ti ese número? (El 4 o el 6) ¿De qué depende el número de veces que se repiten las filas?	Seguiría contando por el número de cuadritos de la fila	1 de 3
					Seguiría contando por el número de cuadritos de la fila o la columna, según el que menos cuadritos. Intenta asociar el número de filas con los cuadritos de la columna, pero no lo reconoce claramente	1 de 3
					Multiplicaría el número de cuadritos de la fila por el de la columna	1 de 3
Tres Mostrando un reconocimiento de la estructura espacial de los cuadritos	**16 %** 5 Estudiantes	"Multiplico el ancho y el alto, nos da $6 \times 4 = 24$, porque las filas se repiten 4 veces".	Indagar con mayor profundidad sobre el conteo de los cuadritos para saber si efectivamente lo están relacionando con la estructura espacial	¿Cómo contaste los cuadritos del rectángulo? ¿Cómo contarías los cuadritos que cubren un rectángulo de cualquier tamaño?	Muestra la relación entre el número de cuadritos de la fila y el número de filas para poder multiplicar	1 de 1

- ✓ El nivel *dos* con el 45% (14 de 31 estudiantes) usan diferentes explicaciones pero se asimilan en un solo nivel. Allí se pueden identificar 2 grupos:

    - Un *primer grupo* del 16% (5 de 31 estudiantes) realiza una multiplicación de los cuadritos del ancho y del alto para contar o encontrar el total de cuadritos. A partir de la entrevista, se observó que 1 estudiante ve la multiplicación como una forma de obtener el resultado, es decir una forma instrumental de ver la fórmula de área rectangular, pero no la asocia con la estructura espacial, ya que "su mamá le dijo que multiplicando se podía". Por otro lado 1 estudiante multiplica porque ve en la multiplicación una suma que se repite, ya sea por filas o por columnas.

    - El *segundo grupo* con el 29% (9 de 31 estudiantes) agrupa para el conteo los cuadritos por filas o columnas, ya que los cuentan por múltiplos según como los hayan agrupado. A partir de la entrevista, 1 estudiante seguiría contando por el número de cuadritos de la fila, 1 estudiante contaría según el número de cuadritos por fila o columna (según la agrupación que menor número de cuadritos tenga, sin relacionar claramente la relación ortogonal), y 1 estudiante multiplicaría el número de cuadritos de la fila por el número de cuadritos de la columna.

- ✓ Y el nivel *tres* con el 16% (5 de 31 estudiantes) comunica el número de cuadritos que cubren los rectángulos en términos de su estructura, es decir que cuentan los cuadritos que ven en una fila (o hilera como uno ellos le llama), luego cuentan el número de filas y multiplican tales números. A partir de la entrevista realizada a 1 estudiante en este nivel, se pudo observar que efectivamente el conteo lo hizo a partir de la observación de la estructura espacial de los cuadritos en cada uno de los rectángulos dados en las tres preguntas.

En conclusión, la exploración inicial de las ideas de los estudiantes mostró que en general el grupo cubre los rectángulos de forma adecuada, es decir sin dejar espacios o solapamiento entre los cuadritos, y el 84% necesita ser involucrado en experiencias de aprendizaje que apoyen la identificación de la estructura de las cuadrículas. Por ello se decidió que para la secuencia de actividades de la Fase 2 era necesario: Involucrar a los estudiantes en el desarrollo de actividades que requirieran centrar la atención en formas de conteo más eficaces con miras de apoyar la idea de agrupación.

4. 2 La secuencia de actividades del estudio principal

Esta sección se dedica a describir el proceso desarrollado durante el estudio principal, el cual tuvo lugar a partir de tres actividades principales tal como se puede observar en la Tabla 3.3 del Capítulo 3, y que presento nuevamente a continuación en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2: *Propósitos y tareas de la secuencia de enseñanza (Actividades 1,2 y 3) de la Fase 2*

Actividad	Propósito (por actividad)	Tareas
1: Apoyando el reconocimiento de la estructura espacial	Apoyar el reconocimiento de la estructura espacial de una cuadrícula	✓ Cubrir un rectángulo a partir de cuadritos dados (unidades simples) ✓ Cubrir un rectángulo a partir de la identificación y cubrimiento por filas
2: Apoyando la comunicación y generalización de la estructura espacial	Observar el proceso de comunicación y generalización de la estructura espacial de una cuadrícula	✓ Cubrir dos rectángulos dada la primera fila y comunicar la estructura espacial ✓ Encontrar una regla para encontrar el número de cuadritos que cubren un rectángulo de cualquier tamaño
3: Observando posibles formas de identificar y comunicar estructura de manera general en una situación específica: Encontrando el número de cuadritos que bordean una cuadrícula dada	Observar cómo podían comunicar posibles formas de generalización para el conteo del número de cuadritos que componen los bordes de cuadrículas	✓ Colocar bordes de cuadritos a cuadrículas de distintos tamaños y encontrar una estrategia para contarlos (los cuadritos que componen los bordes) sin importar su tamaño

4.2.1 Actividad 1: Apoyando el reconocimiento de la estructura espacial

Con la intención de apoyar en los estudiantes el reconocimiento de la estructura espacial rectangular se diseñaron dos tareas que fueron entregadas en dos hojas de trabajo para que registraran por escrito. Cada tarea la trabajaron por parejas de estudiantes con el apoyo de dos ventanas diferentes diseñadas en el software Geogebra. Para el desarrollo de las dos tareas de la Actividad 1 y la discusión de clase que giró en torno a la pregunta 2 se destinó un total de 90 minutos. A medida que los estudiantes desarrollaban las tareas, el profesor estuvo presto a:

- ✓ Atender las dudas o inquietudes que ellos tuvieran
- ✓ Verificar que en cada pregunta entendieran lo que efectivamente se les estaba pidiendo, y si no era así mirar qué estaban entendiendo en cada pregunta
- ✓ Observar en qué centraban su atención a medida que iban trabajando para poder apoyar sus procesos de construcción conceptual
- ✓ Observar cómo comunicaban lo que hacían y sus pensamientos a partir de cada pregunta

Estos aspectos a los cuales el profesor estuvo presto durante el desarrollo de la Actividad 1, también formaron parte de las demás actividades desarrolladas en el estudio principal (Actividades 2 y 3). Por tanto, tales aspectos no serán enunciados en las descripciones de los *desarrollos* de las Actividades 2 y 3.

4.2.1.1 *La Tarea 1 de la Actividad 1*

El propósito de esta actividad era ofrecer un espacio dinámico (que se presumía, ayudaría a centrar la atención de los niños en la forma como se organizan las unidades de cubrimiento) para que los estudiantes cubrieran un rectángulo dado, manipulado las unidades cuadradas disponibles en una ventana de Geogebra, previamente diseñada, al mismo tiempo que se familiarizaban con el software. La ventana utilizada para la Tarea 1, que se presenta en la Figura 4.2, mostraba un rectángulo A de 4×3, y 17 cuadritos sueltos de distintos colores.

La Tarea consistía en cubrir el rectángulo A con cuadritos azules. Una vez cubierto, se debía dibujar en la Hoja de trabajo entregada a cada estudiante, que pedía: “Dibuja el rectángulo, tal como quedó cubierto con los cuadritos azules”.

Tarea 1

Vamos a cubrir el rectángulo **A**, usando cuadritos azules

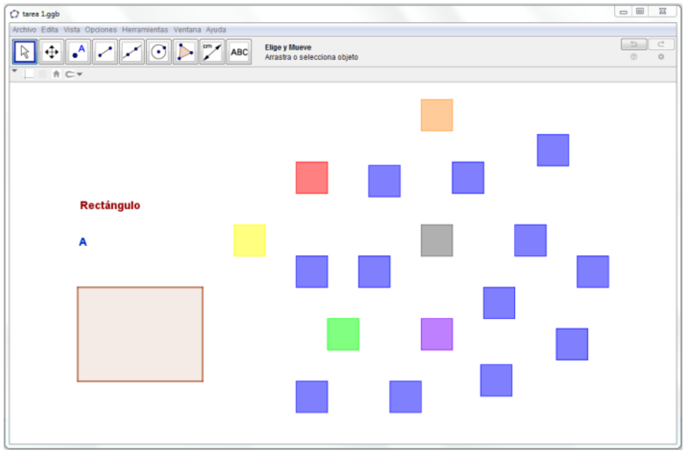


Figura 4.2: *Ventana de Geogebra utilizada para la Tarea 1 de la Actividad 1*

El desarrollo de la Tarea 1 tuvo una duración de 20 minutos. Allí se observó que el 100% de los estudiantes no presentó inconvenientes para cubrir el rectángulo con los cuadritos dados correctamente, tanto en la ventana, como en sus hojas de respuestas.

4.2.1.2 *La Tarea 2 de la Actividad 1*

Esta Tarea 2 se diseñó pensando en observar las estrategias que pudieran comunicar los estudiantes para cubrir el rectángulo "B" y las formas de agrupar los cuadritos que lo cubrían. Las preguntas que orientaron la tarea se presentan en la Figura 4.3. La ventana utilizada para la tarea, que se presenta en la Figura 4.3 (a), mostraba un rectángulo B de 3×5 y 4 cuadritos sueltos (3 verdes y 1 rojo).

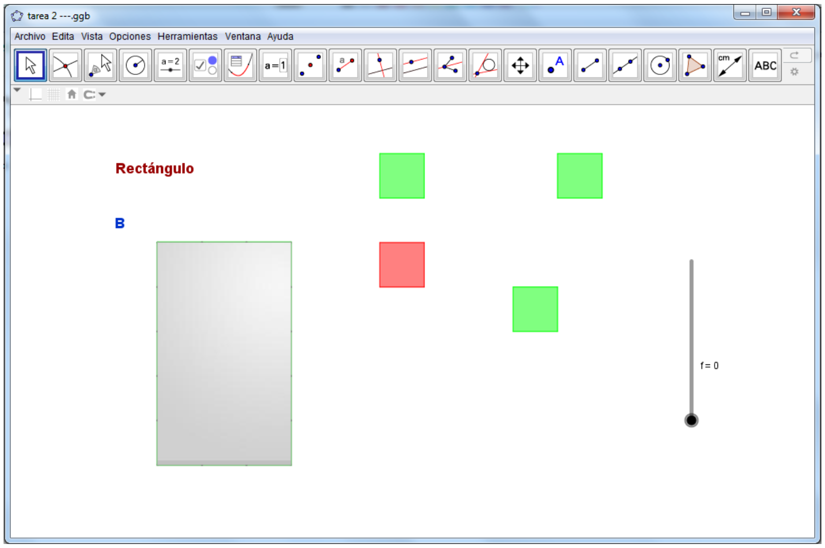
La Tarea consistía en cubrir el rectángulo B con cuadritos verdes, estos alcanzaban solamente para cubrir una fila y no una columna. Una vez se cubría la primera fila, esta se volvía una sola agrupación, o unidad compuesta, y con el movimiento de un deslizador podían copiar las filas de modo que se podía cubrir todo el rectángulo. En la Figura 4.3 (b) se observa la fila que se copia 3 veces, por acción del movimiento del deslizador , para f=3 (3 filas según el programa).

Tarea 2

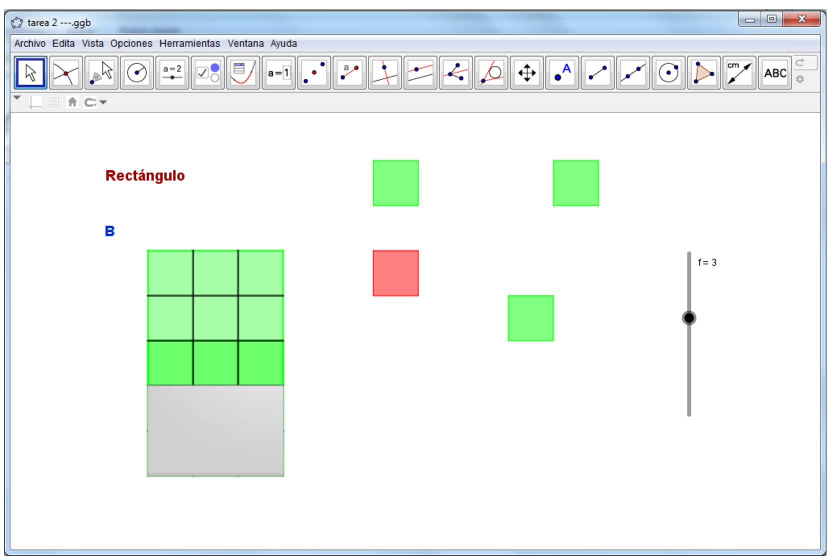
Vamos a cubrir el rectángulo **B**, usando cuadritos verdes

A. A partir de los cuadritos verdes dados, ¿qué estrategia usarías para cubrirlo completamente?

B. ¿Cuántos cuadritos verdes harían falta para cubrirlo? ¡Explica por qué!



(a)

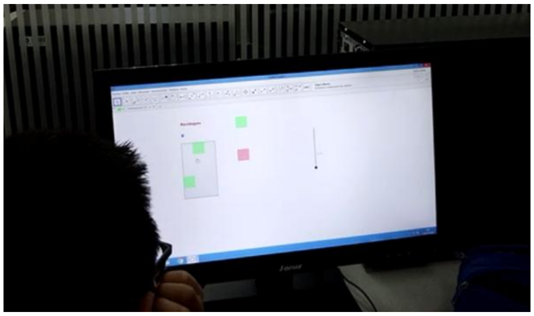


(b)

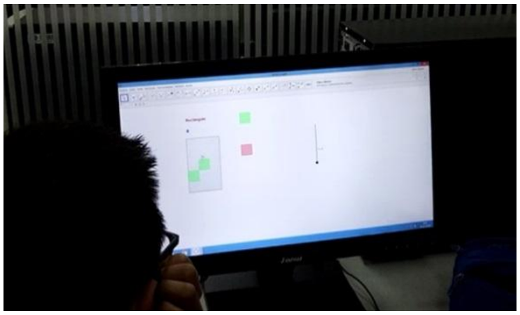
Figura 4.3: *La ventana de Geogebra utilizada para la Tarea 2 de la Actividad 1*

El desarrollo de la Tarea 2, junto con la discusión de clase guiada por el profesor que giró en torno a esta tuvo una duración de 70 minutos. Esta inició pidiendo a los estudiantes que cubrieran el rectángulo usando cuadritos verdes, tal como se observa en la ventana de la Figura 4.3(a). Mientras los estudiantes realizaban la tarea, el profesor[7] pasó por los puestos observando el trabajo de los estudiantes, mientras una maestra en formación acompañaba haciendo la videograbación de la sesión de clase. Allí se pudo observar que algunos estudiantes intentaron ubicar los cuadritos por columnas, pero estas quedaban incompletas con solamente 3 cuadritos disponibles, o 4 para los que usaban el cuadrito rojo, y ante esta restricción vieron la necesidad de ubicarlos en una fila.

Dos parejas de estudiantes (4 estudiantes) intentaron ubicarlos sobre el espacio bidimensional o superficie del rectángulo como cuadritos o unidades sueltas, mostrando inicialmente una ausencia total de estructura (Battista et al., 1998), o nivel de pensamiento pre estructural (Mulligan y Mitchelmore, 2009, 2012), como se observa en la situación de Camilo y Enrique (Obsérvese la Figura 4.4 (a) y (b))



(a)

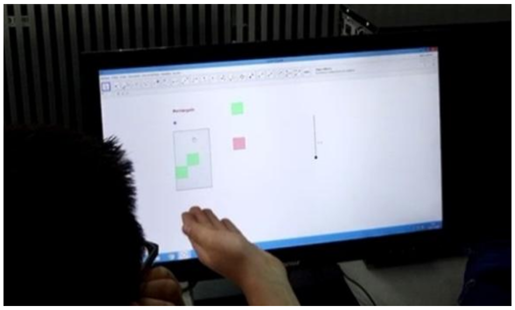
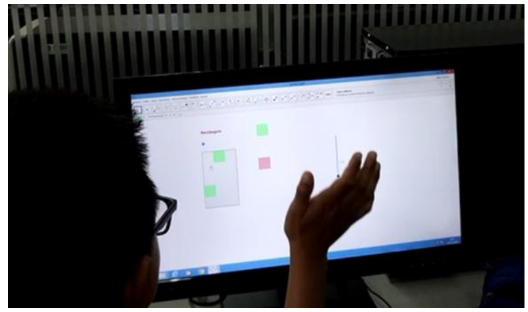


(b)

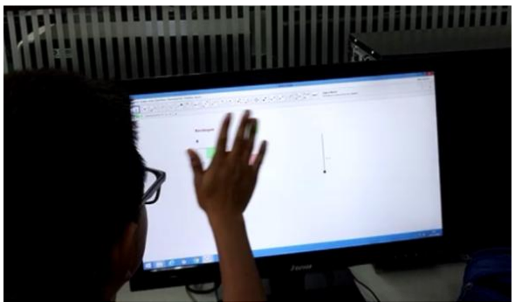
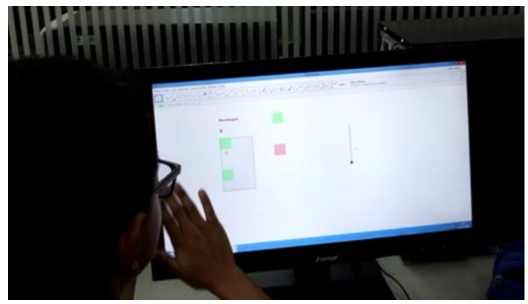
Figura 4.4: *Dos estudiantes que cubren de manera no sistemática el rectángulo*

En este mismo grupo, Camilo señala a su compañero Enrique, con su mano, que con esos cuadrados no alcanzan a cubrir el rectángulo (Figura 4.5 a), y luego Enrique le señala que hay que cubrirlo completamente haciendo un “barrido con su mano” de derecha a izquierda sobre la pantalla. (Figura 4.5 (b) (c) y (d))

[7] Mi directora de proyecto estuvo presente en esta sesión de clase, pues ofreció su colaboración en la recolección de la información.

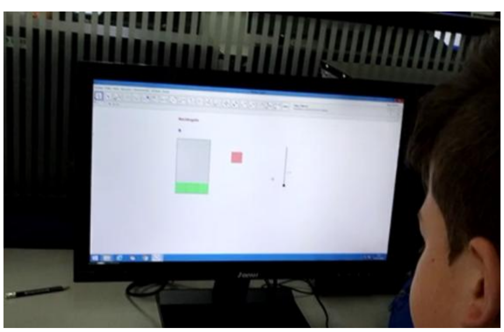
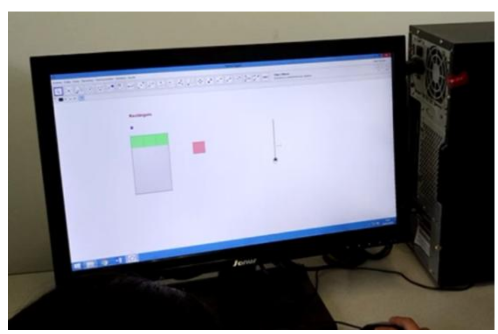
(a) *(b)*

(c) *(d)*

Figura 4.5: *Camilo mostrando a Enrique que los cuadritos no alcanzan a cubrir el rectángulo (a) y Enrique haciendo un "barrido" con su mano señalando la necesidad de cubrirlo completamente (b)(c) y (d).*

Luego de ello, Camilo y Enrique, proceden a ubicar los cuadritos en fila en la parte inferior del rectángulo como en la Figura 4.6 (a) y de forma similar los demás estudiantes del curso los ubican en fila en la parte superior del rectángulo (Figura 4.6 b).

(a) *(b)*

Figura 4.6: *Los estudiantes Camilo y Enrique mostrando una fila inferior (a) y otra pareja de estudiantes ubicando la fila superior (b), mostrando en cada cado una estructura emergente o local de la estructura*

Esto permite ver que el grupo de estudiantes ha llegado a reconocer la necesidad de hacer una agrupación de cuadritos horizontalmente, lo cual sería equivalente a reconocer una fila. Cuando se observa que los estudiantes han ubicado los cuadritos en fila, se procede a socializar el ejemplo de una de las estudiantes, Laura, quien muestra al grupo su organización o agrupación de los cuadritos en forma de "fila" en la parte superior del rectángulo como se muestra en la Figura 4.7

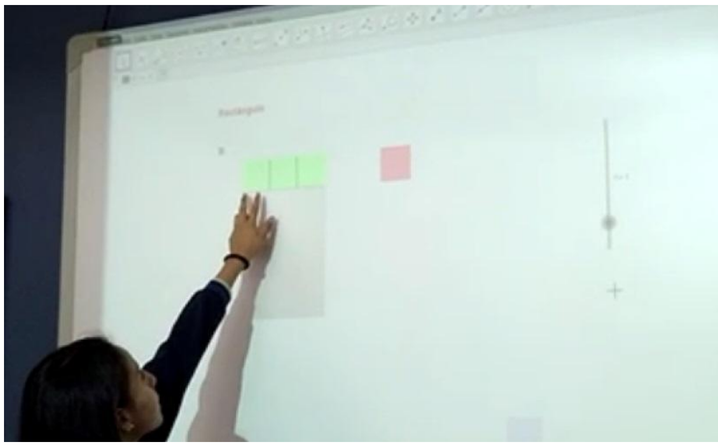


Figura 4.7: *Laura mostrando al grupo la fila o agrupación horizontal de cuadritos formada*

A continuación, con la necesidad de apoyar el pensamiento de los estudiantes, usando los términos que involucra la estructura espacial rectangular, el profesor busca que los estudiantes den nombre a esta agrupación de cuadritos o unidad compuesta, para ello pregunta al grupo de estudiantes:

¿Cómo están organizados los cuadritos que está señalando Laura?

De esta pregunta, la mayor parte de los estudiantes afirman que por "fila" otros la llaman "hilera" o "columna"; de allí el profesor sigue con la afirmación: "*Entonces a esta organización horizontal de cuadritos le llamaremos Fila"*, quedando como acuerdo con el grupo que a dicha organización se le llamaría "fila". El proceso siguiente fue apoyarlos a que avanzaran a reconocer la estructura de la cuadrícula como un conjunto de filas (Battista et al., 1998); es decir, que observaran que podían usar esta fila, o nueva unidad compuesta por 3 cuadritos para cubrir todo el rectángulo. Para ello se siguió con la discusión de clase que se describe en la Transcripción N° 4.1:

Profesor: Ahora, a partir de esta fila ¿qué podríamos hacer para cubrir todo el rectángulo?

Sofía: Podemos seguir bajando los cuadritos, bajándolos, bajándolos, y así.

Profesor: El hecho es que solo tenemos esos tres cuadritos verdes…

[En este momento de clase se observó que el hecho de tener solo los 3 cuadritos verdes generó dificultad en los estudiantes para observar cómo cubrir todo el rectángulo; por ello se les propuso que pensaran en una situación de la vida real donde debían "embaldosar un piso" representado por los cuadritos verdes y el rectángulo dado]

Profesor: Pero si no tenemos más baldosas verdes, ¿qué hacemos?, ¿qué se les ocurre hacer?

Samuel: Partirlas

Profesor: No se podría porque si las partimos y las movemos nos quedaría un pedazo sin embaldosar. Entonces, ¿Qué se les ocurre?

Juan Pablo: Comprar más baldosas verdes

Profesor: ¡Bien!, comprar más baldosas verdes. Luego de que las hayamos comprado, ¿qué hacemos?

Juan Pablo: Ponerlas

Profesor: ¿cómo las ponemos?

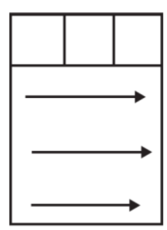
Julián: En filas

Profesor: ¡Bien! en filas, y ¿cómo las ubicarías?

Mariana: Copiándolas

Laura: ¡Yo sé profe, yo quiero pasar!

En ese instante pasa Laura al tablero y muestra al grupo cómo ubicaría las filas, haciendo señas con su dedo y señalando los espacios donde se ubicaría cada una de las filas, tal como se ilustra en el diagrama siguiente:



Transcripción N° 4.1: *La discusión de clase que da lugar a la identificación de filas y su iteración*

Una vez el profesor ha observado que Mariana y Laura reconocen la necesidad de copiar, esto es iterar, las filas para cubrir el rectángulo, tal como se lo muestra a sus compañeros, se puede ver que está identificando y comunicando, al grupo, la estructura de la cuadrícula como un conjunto de filas que cubren el rectángulo. Por tanto, se procede a centrar la discusión de clase hacia la identificación de la estructura espacial de este rectángulo a través de la participación de los demás estudiantes, como respuesta a los planteamientos de Laura. De esta manera la discusión continúa como se observa en la Transcripción N° 4.2:

> *Profesor: Y ahí ¿ya quedaría cubierto todo el rectángulo?*
>
> *Sary: ¡Si profe!*
>
> *Profesor: ¿Cómo podemos saber cuántas veces colocamos las filas?*
>
> *María Paula: Poniendo las que tenemos (señalando los cuadritos de la fila) en una columna (Mostrando una relación entre las filas y los cuadritos de una columna)*
>
> *Profesor: Entonces, ¿Cómo podríamos saber cuántas filas se necesitan?*
>
> [En ese momento el grupo de estudiantes hace silencio]

Transcripción N° 4.2: *La discusión que generó la necesidad de usar el deslizador para cubrir el rectángulo a partir de la iteración de filas*

A partir de la discusión, se observa que el grupo de estudiantes no sabe cómo sacar las demás filas para cubrir el rectángulo y así apoyar el reconocimiento de la estructura espacial. Por ello se les explica que mover el deslizador les permite "tener más filas de baldosas", es decir sacar más filas que les permita cubrir el rectángulo. A continuación se deja un espacio de 15 minutos para que con ayuda de la ventana de Geogebra las parejas comuniquen sus pensamientos en torno a la Tarea 2 (ver la Figura 4.3). Para ello los estudiantes contaron con el apoyo tanto del profesor, como de su colaboradora, la asesora del proyecto, quienes pasaban por los puestos de trabajo observando sus trabajos, atendiendo a las inquietudes o dudas que se generaron y apoyando la comunicación de sus pensamientos. Luego de este espacio, se procede con la socialización de las ideas dadas por los estudiantes en torno a esta tarea, tal como se describe en la Transcripción N° 4.3, comenzando con la estrategia que encontraron para cubrir el rectángulo completamente:

Profesor: ¿Qué estrategia usaron para cubrir el rectángulo?

Natalia: Pegando más filas

Profesor: Y, ¿cómo las pegaron?

Natalia: Sacando más cuadritos con el deslizador

Profesor: Bien, y ¿cuántos cuadritos verdes hacían falta?

Sebastián: Pues nosotros lo hicimos con filas, pero nosotros usamos 5 filas con 3 cuadritos

Profesor: 5 filas con 3 cuadritos…Y eso ¿qué quiere decir para ustedes?

Sebastián: Que las filas y cuadritos necesarios son 5 y 3 para llenar todo el cuadro (rectángulo)

Profesor: ¿Están todos de acuerdo?

[El grupo de estudiantes a una sola voz afirma que ¡sí!]

Profesor: Ok., ¡sigamos!, ¿Qué les indica el 3?

Sebastián: Que cada fila se llena de 3 cuadritos

Profesor: Y que les indica el 5?

Sebastián: Que todo el rectángulo se llena con 5 filas

Transcripción N° 4.3: *La discusión en torno a la pregunta 2 que mostró la identificación de la estructura espacial por parte de Sebastián*

El espacio de clase mostró que para Natalia, "pegar más filas" es la estrategia que le permite cubrir el rectángulo, similar a lo que observa Sebastián. Cuando se les pregunta por el total de cuadritos que harían falta, este último a pesar que no indica el número de cuadritos que faltarían, comunica la cantidad en términos de su estructura espacial, es decir "5 filas con 3 cuadritos"; hecho que permite ver que ha reconocido la relación ortogonal de los cuadritos para este caso. A continuación, el profesor retoma las ideas de estos dos estudiantes y muestra a todo el grupo con ayuda de la ventana 2 de Geogebra el cubrimiento rectangular visto como una "repetición de filas de 3 cuadritos, una por una", usando el deslizador. Esta situación la apoya Helen, quien levanta la mano y dice: "¡Profe, ya entendí!, ¿puedo pasar?", el profesor le da la palabra y sigue la pequeña discusión que se observa en la Transcripción N° 4.4.

Profesor: Bueno Helen, ¿qué idea nos querías comentar?

Helen: Que para poder saber cuántos cuadritos hay en el rectángulo, toca realizarlos en filas

Profesor: Ok., y entonces, ¿qué harías ahí?

Helen: Hacerlo en filas

[En ese momento Helen señala la ubicación de las filas de forma similar a la que mostró Laura en la Figura 4.7]

Profesor: ¿Así?

[En ese momento el profesor cubre el rectángulo solo con las tres primeras filas usando el deslizador]

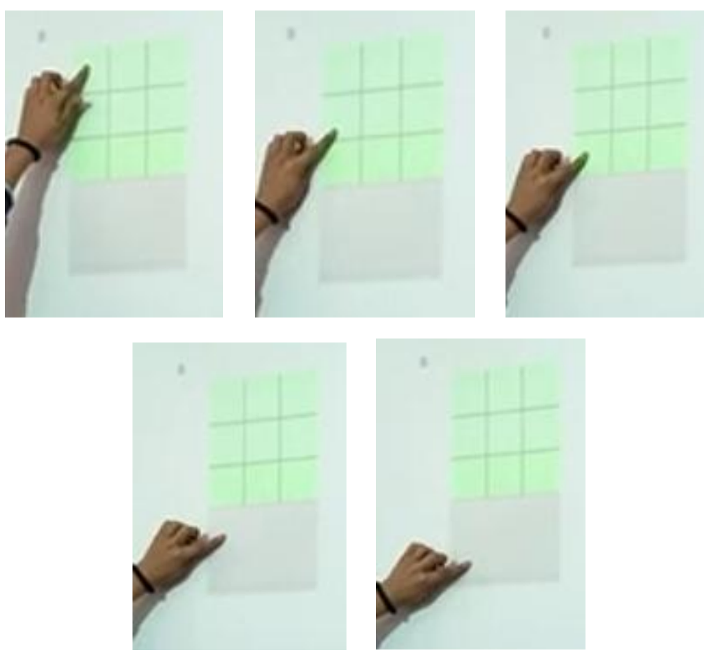
Profesor: Listo, ¿Y ahora?

Laura: Volverlo a hacer en filas, con todo el rectángulo

[En ese momento el profesor pregunta a todo el grupo: ¿Cuantas filas creen que le van a salir a Laura?, todos de forma unánime responden: ¡5!]

Profesor: ¿si, Laura?, ¿por qué?, ¿estás de acuerdo?, muéstranos con el dedo

[Enseguida Laura afirma que sí, y cuenta 1, 2, 3, 4, 5 señalando los cuadritos de la columna del borde izquierdo, tal como se muestra en la secuencia de imágenes]



Transcripción N° 4.4: *La discusión en torno a la Tarea 2 donde Helen muestra junto al grupo de estudiantes la identificación de la estructura espacial del cubrimiento rectangular*

La discusión muestra que Helen ha identificado la fila como una nueva unidad, compuesta por 3 cuadritos, que se repite para cubrir todo el rectángulo, además que estas repeticiones dependen de los cuadritos de la columna, relacionando así cada fila con cada uno de los cuadritos de la columna del borde izquierdo. Esto permite ver que ha reconocido la organización ortogonal de los cuadritos. Cuando se observa que la discusión de clase con el grupo de estudiantes ha llegado a este nivel de reconocimiento de la estructura (que sería equivalente a un reconocimiento parcial de la estructura, o de iteración visual por filas) se retoma el ejemplo pero enfocándolo hacia la identificación y comunicación de la estructura espacial, o nivel de pensamiento estructural o estructuración por filas o columnas.

Profesor: ¿Quién nos puede decir, qué es una fila?,

Daniela: Son las que van horizontales

Profesor: Las agrupaciones de cuadritos que van horizontales, y ¿qué es una columna?

Kevin: Las filas verticales (habla el estudiante sin que se le dé la palabra)

María José: Pues la agrupación de las filas

Profesor: ¿Cómo así que la agrupación de las filas?

María José: Si, o sea la columna me sirve para saber cuántas filas hay

Profesor: Muy bien, observen que María José le está dando un uso a la columna, ahora, en esta figura (señalando el rectángulo), ¿Cuántos cuadritos hay en la columna?

[En ese momento lo niños responden en coro: ¡5 Cuadritos!]

Profesor: Entonces según lo que me indica María, ¿qué me indica ese número de cuadritos?

Jesús: Que hay 5 filas

Profesor: Entonces, ¿de qué depende el número de filas que cubren un rectángulo?

Juan Diego: De la columna

Profesor: Entonces ¿qué le ven a la columna?

Juan David: Pues los cuadritos

Profesor: Entonces, ¿de qué depende el número de filas que cubren un rectángulo?

Sofía: Pues de los cuadritos que hay en la columna

Profesor: ¡Bien, del número de cuadritos que hay en una columna!

Transcripción N° 4.5: *La discusión con los estudiantes, en la que María José muestra la identificación de la estructura espacial de forma general*

La discusión que se muestra en la Transcripción N° 4.5 es realizada por los estudiantes y protagonizada especialmente por una de ellas, María José, quien, a partir de las intervenciones hechas por los compañeros y las preguntas hechas por el profesor, comunica cómo emerge la identificación de la estructura espacial, a partir del reconocimiento de la relación entre la fila y el número de cuadritos de la columna. Este espacio de discusión permitió retomar las ideas de varios estudiantes y guiarlos hacia el reconocimiento de la estructura espacial de manera general, encontrando así la relación ortogonal de los cuadritos que cubren las dos dimensiones del rectángulo, es decir la relación entre la fila y sus iteraciones, o número de unidades en la columna.

Posteriormente se retomaron las ideas comunicadas por el grupo de estudiantes para las dos preguntas en sus hojas de trabajo, evidenciándose que a partir de lo visto en la socialización de clase, el 100% reconocieron la fila como una unidad que se "itera" para cubrir el rectángulo, y evidentemente ninguno de ellos usó propiamente esa palabra, sino términos como: "cubrir", "pegar", "repetir", "duplicar", "ubicar", "poner", "acomodar", "llenar" o "rellenar"; a partir de la fila.

A partir de las respuestas dadas por los estudiantes a estas preguntas en sus hojas de trabajo, y en momentos a partir de la interacción con ellos, y centrando especial atención en las formas como cubrirían el rectángulo completamente, se pudieron identificar dos niveles de pensamiento en el grupo de estudiantes:

- ✓ El primer grupo con el 58% (18 estudiantes) se ubicó en un nivel de reconocimiento parcial de la estructura o de estructuración de la cuadrícula como un conjunto de filas o columnas (Battista et al., 1998; Mulligan y Mitchelmore, 2009), ya que reconocieron la fila como una nueva unidad compuesta que les permite cubrir el rectángulo, aunque no relacionan sus iteraciones con la dimensión ortogonal.
- ✓ El segundo grupo con el 42% (13 estudiantes) se ubicó en un nivel de pensamiento estructural o de estructuración por filas (Battista et al., 1998; Mulligan y Mitchelmore, 2009), ya que relacionan el cubrimiento de las dos dimensiones del rectángulo a partir de la fila y el número de filas, o número de cuadritos de la columna (número de iteraciones).

Las estrategias mostradas por los estudiantes de forma general, de acuerdo con estos dos niveles de pensamiento identificados, se pueden clasificar como se observa en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3: *Los niveles de pensamiento observados en el grupo de estudiantes a partir de sus estrategias para el cubrimiento del rectángulo "B" de la Actividad 1*

Nivel de pensamiento	**Generalidad del cubrimiento**	**%**	**Estrategias observadas para el cubrimiento (Ejemplos textuales de los estudiantes)**
Reconocimiento de la estructura de la cuadrícula como un conjunto de filas o de columnas (Nivel estructural parcial) **58%**	Reconocen el cubrimiento como una iteración de filas, sin comunicar la relación ortogonal (es decir reconocer o comunicar de qué depende el número de iteraciones)	55%	"Compraría más baldosas y luego las ubicamos en filas" "Dibujando más cuadraditos en filas de 3 en 3, y así rellenarían el rectángulo" "Listo, tenemos la primera fila, después como no tenemos más, los compraría con mi dinero y llenaríamos todas y lo organizaría en filas de 3"
	Muestran una multiplicación "5x3"como forma de cubrir el rectángulo	3%	"Multiplicando los cuadritos, 3×5"
Reconocimiento de la estructuración por filas y columnas (Nivel estructural) **42%**	Relacionan el número total de filas con la altura del rectángulo	6%	"Lo que usaría, sería dibujar más cuadritos en filas de 3 en 3 y así se completaría según la altura del rectángulo"
	Relacionan el número total de filas con las unidades de la columna	13	"Poner los cuadritos en 5 filas de a 3 cuadros por fila. El número de filas depende de los cuadros de la columna"
	Comunican la estructura como el número de filas compuestas por el número de cuadritos	23%	"Yo cubriría el rectángulo con 5 filas de 3 cuadritos" "Pegaría 5 filas de 3 cuadros hasta que se llene"

El desarrollo y los resultados obtenidos en esta Actividad 1 suscitaron las siguientes reflexiones:

- ✓ La primera fue que, en general, el 100% de los estudiantes reconocieron la fila como unidad compuesta que les permite cubrir el rectángulo.

- ✓ La segunda es que 8 estudiantes asociaron la iteración de filas o cubrimiento rectangular con el uso del deslizador en Geogebra, por lo cual era necesario que se desprendieran de esta mirada centrada en el programa y la reconocieran independientemente del uso del software.

- ✓ La tercera fue reconocer la necesidad de apoyar el grupo que se ubica en el reconocimiento parcial, o que reconocen la estructura como un conjunto de filas, a que avancen al reconocimiento del número de veces que se itera la fila para cubrir un rectángulo completamente.

- ✓ Y la cuarta fue reconocer la necesidad de apoyar al grupo en general a que avance al reconocimiento y comunicación de la generalización de la estructura espacial; es decir sin importar el número de unidades que componen las filas, o el número de filas.

Por ello se decidió que para la Actividad 2 era necesario apoyar al grupo a que identificaran la estructura espacial vista como la iteración de filas que depende del número de unidades de la columna, es decir a que progresaran a un nivel de pensamiento estructural y a su vez que la comunicaran de manera general.

4.2.2 Actividad 2: Apoyando la comunicación y generalización de la estructura espacial

La Actividad 2 se diseñó con la intención de continuar apoyando a los estudiantes en el reconocimiento de la estructura espacial de cuadrículas dadas, para aquellos estudiantes que se encuentran en un nivel de identificación de la estructura parcial, así como para apoyarlos en la comunicación de dicha estructura y su generalización. Para ello, se diseñaron 2 tareas que se desarrollaron en dos momentos:

- ✓ En el momento 1 se apoyó el reconocimiento y comunicación de la estructura espacial a partir de la Tarea 1.

Luego de analizar los resultados encontrados en este primer momento, se diseñó la Tarea 2 que guió el segundo momento.

- ✓ En el momento 2 se instó a los estudiantes hacia la comunicación de la generalización de dicha estructura espacial.

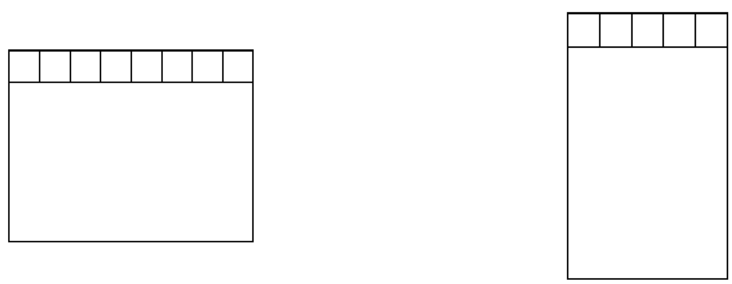
El proceso desarrollado en los dos momentos, y los resultados encontrados a partir de las Tareas 1 y 2, son presentados en esta subsección.

4.2.2.1 *La Tarea 1 de la Actividad 2: Apoyando la comunicación de la estructura espacial*

La primera tarea de la Actividad 2, fue diseñada en una hoja de trabajo como se observa en la Figura 4.8, con el fin de observar el pensamiento de los estudiantes cuando requieren contar las unidades que se necesitan para cubrir dos rectángulos determinados; un rectángulo A (de 8×6) y un rectángulo B (5×8), dada solamente la primera fila en cada uno.

Tarea 1

1. Termina de cubrir cada uno de los siguientes rectángulos



Rectángulo A **Rectángulo B**

a. ¿Cuántos cuadritos se necesitaron para cubrir todo el rectángulo?

b. Describe cómo los contaste

Figura 4.8: *La Tarea 1 de la Actividad 2 dada en una hoja de trabajo*

Para desarrollar la Tarea 1 se destinaron 45 minutos de clase, en los que cada estudiante, de forma individual, registró su pensamiento en la hoja de trabajo que se le entregó. En la primera parte de la clase (25 minutos) cada uno trabajó de forma individual en su hoja de trabajo. En la segunda parte (20 minutos) el profesor fue acompañando a los estudiantes a través de preguntas orientadoras que les permitieron clarificar lo que estaban pensando, debido a la dificultad que causó, para algunos, comunicar su pensamiento de forma clara en términos de la estructura espacial. De acuerdo con lo que pensaban y decían los estudiantes, algunas de estas preguntas orientadoras, fueron:

- ✓ Cuando no usaban los términos fila, número de filas o de columna, sino que se referían a la ubicación de los cuadritos “horizontal” o “vertical”, se les preguntaba: ¿A qué te refieres cuando dices horizontal?, o ¿a qué te refieres cuando dices vertical?
- ✓ Cuando no hablaban del número de cuadritos en las filas, sino de “miro la fila” o “miro la columna” se les preguntaba: ¿qué observas cuando “miras” una fila? o ¿qué observas cuando “miras” una columna? o ¿que conforma una fila?
- ✓ En el momento en el que decían de forma operacional “cuento los cuadritos de la fila y la columna y multiplico”, se les preguntaba: ¿Qué representa una fila para ti?, y ¿qué representa una columna?
- ✓ Cuando los estudiantes decían que sumaban “por filas” se les preguntaba ¿De qué depende el número de veces que sumas las filas?, y algo similar cuando sumaban por múltiplos ya fuera “de 8 en 8” o “de 5 en 5”, allí se les preguntaba ¿de qué depende el número de veces que sumas 8?, o ¿de qué depende el número de veces que sumas 5?

A partir de la intervención en el aula, y de los pensamientos comunicados por los estudiantes en torno a las formas como cubrirían los rectángulos dados, se identificaron dos grupos de acuerdo con sus niveles de pensamiento:

- ✓ Un primer grupo conformado por el 29% (9 estudiantes) pudo “quizá” haber identificado la estructura, pero la comunicó de forma incompleta, ya que la enunciaron como una multiplicación entre el número de cuadritos de la fila y el número de cuadritos de la columna.

- ✓ Un segundo grupo conformado por el 71% (22 estudiantes) describió y comunicó el conteo de los cuadritos que cubrían ambos rectángulos en términos de la estructura espacial rectangular, lo cual me permitió ubicarlos en un nivel de pensamiento estructural o de estructuración por filas (Battista et al., 1998; Mulligan y Mitchelmore, 2009), ya que para cubrimiento de las dos dimensiones de los rectángulos relacionaron el número de cuadritos de la fila y el número de filas.

De esta manera, el desarrollo y los resultados obtenidos luego del desarrollo de la Tarea 1, de la Actividad 2, me dejaron 3 reflexiones principales, con el fin de seguir apoyando sus procesos de construcción conceptual para el momento 2:

- ✓ La primera fue observar el progreso de los estudiantes en sus procesos de identificación y comunicación de la estructura espacial, ya que los resultados de la Actividad 1 mostraron que el 42% de los estudiantes se ubicaba en un reconocimiento de la estructura, mientras que al finalizar esta actividad este porcentaje aumentó significativamente al 71%. Además solamente el 29% se ubica en un reconocimiento parcial de la estructura.

- ✓ La segunda es resaltar que haber apoyado a los estudiantes por parte del profesor pasando por sus puestos de trabajo explorando sus pensamientos, sirvió significativamente para que centraran la atención en los elementos cruciales de la estructura (numero de cuadritos por fila, la iteración y la relación de dependencia entre la fila y el número de cuadritos de la columna) para que así pudieran comunicar mejor sus formas o estrategias para comunicar la estructura.

- ✓ La tercera es reconocer que posiblemente la atención y apoyo prestado por parte del profesor al grupo de estudiantes que se ubicó en un reconocimiento parcial o global de la estructura no fue suficiente durante el espacio de intervención, por lo cual no centraron la atención en los elementos cruciales de la estructura que quizá les hubiera permitido una mejor o más completa comunicación de sus pensamientos en torno a la estructura espacial.

Ante estas evidencias del pensamiento de los estudiantes, se procedió a seguir apoyando sus procesos de comunicación y generalización de la estructura espacial.

4.2.2.2 *La Tarea 2 de la Actividad 2: Apoyando la identificación y comunicación de la estructura espacial en forma de generalización*

La Tarea 2 buscó apoyar los estudiantes a la identificación y comunicación de la generalización de la estructura espacial. Fue diseñada, tal como se presenta en la Figura 4.9, con el fin de observar el pensamiento de los estudiantes cuando requieren encontrar y proponer estrategias para encontrar el total de cuadritos que se necesitan para cubrir un rectángulo de cualquier tamaño.

Tarea 2

1. En el siguiente espacio, dibuja un rectángulo del tamaño que tú quieras y cúbrelo con cuadritos del tamaño que tú quieras

Encuentra una regla para hallar el número de cuadritos que lo cubren

Ahora, si te entregamos un rectángulo cubierto de cuadritos, sin importar su tamaño,

¿Qué regla usarías para hallar el número de cuadritos que lo cubren?

Figura 4.9: *La Tarea 2 de la Actividad 2*

Tal como lo muestra la Figura 4.9, la pregunta se diseñó bajo un contexto, pensado en que ellos mismos crearan una cuadrícula rectangular del tamaño que quisieran[8], observaran y comunicaran su estructura, y a partir de ella propusieran una regla donde comunicaran la estructura espacial de manera general.

Para desarrollar la Tarea 2 con el grupo se destinaron 90 minutos de clase, donde cada estudiante de forma individual comunicó sus pensamientos en la hoja de trabajo que se le entregó. Cada uno trabajó de forma individual en su hoja de trabajo, y eventualmente, junto

[8] Se pidió que crearan una cuadrícula “ya cubierta por cuadritos”, pensando en apoyar los estudiantes a la identificación y comunicación de la estructura espacial, mas no pensando en apoyarlos a que midieran la superficie rectangular a partir de la unidad de medida, teniendo en cuenta que sus lados podrían no ser divisores de los lados del rectángulo.

con el acompañamiento del profesor, quien pasó por los puestos de trabajo observando sus respuestas, con miras a apoyarlos para que pudieran comunicar al máximo sus pensamientos en torno a la generalización de la estructura espacial, y teniendo en cuenta la dificultad que podía generar para algunos dicha comunicación.

El análisis de las respuestas de los estudiantes en torno a la generalización de la estructura, es decir, la “regla” que construyen a partir de la pregunta de la Figura 4.9, y que usarían para *hallar el número de cuadritos que cubren un rectángulo cubierto sin importar su tamaño*, permitió identificar dos grupos de acuerdo con sus niveles de pensamiento:

- ✓ El primer grupo conformado por el 6% (2 estudiantes) no logró identificar ni comunicar la estructura de manera general, ya que al proponer la regla, la comunicaron como una multiplicación entre la cantidad de cuadritos de la fila y la cantidad de cuadritos de la columna, sin relacionar la multiplicación con la identificación de la estructura espacial rectangular. Esto me permitió ubicarlos en un nivel de pensamiento parcial de la estructura, ya que comunicaron la regla de forma operacional (Skemp, 1976).

- ✓ El segundo grupo conformado por el 94% (29 estudiantes) logró identificar y comunicar la estructura espacial de manera general, i.e. la generalización de la estructura espacial, ya que cuando propusieron o construyeron la regla, la comunicaron de diferentes maneras, pero siempre mostrando el reconocimiento de la estructura espacial rectangular, así las palabras usadas no la describieran de manera explícita, tal como se puede observar en la Tabla 4.4. Este proceso me permitió ubicar al grupo en un nivel de pensamiento estructural avanzado, según los niveles de pensamiento planteados en la Sección 2.7 del Capítulo 2.

Las formas en que los estudiantes comunicaron la regla de forma general, de acuerdo con los dos niveles de pensamiento identificados, se pueden clasificar y describir como se observan en la siguiente Tabla 4.4:

Tabla 4.4: *Los niveles de pensamiento observados en el grupo de estudiantes a partir de la regla que comunican en la Tarea 2 de la Actividad 2*

Nivel de pensamiento	**Forma en la que comunican la generalización de la estructura espacial**	**%**	**Regla que usarían para encontrar el número total de cuadritos que cubren un rectángulo de cualquier tamaño** **(Ejemplos textuales de los estudiantes)**
Reconocimiento parcial de la estructura (Nivel estructural parcial) **6%**	Miran "Cuántos" cuadritos hay en una fila y en una columna y multiplican las cantidades	6%	"Primero cuento cuántos cuadritos hay en una fila, luego cuento cuántos cuadritos hay en una columna y multiplico los dos resultados y me da el resultado" *[Ante esta afirmación el profesor le pregunta: ¿Para qué cuentas los cuadritos de las filas y de las columnas?]* "Los cuento para saber cuántos cuadritos tiene la columna y cuantos tiene la fila" *[Nuevamente el profesor pregunta: ¿Por qué si multiplicas estos números obtienes el resultado?]* "Porque si los cuento uno por uno (los cuadritos) me da lo mismo, o sea el mismo número"
Reconocimiento y generalización de la estructura (Nivel estructural avanzado) **94%**	Cuentan "el número" de cuadritos en una fila y "el número" de filas y multiplican los números	42%	"Multiplico el número de cuadritos que hay en una fila por el número de filas que tenga el rectángulo" "Pues yo contaría el número de cuadritos que hay en una fila y multiplico por el número de filas"
	Cuentan "la cantidad" de cuadritos en una fila y "la cantidad" de filas y multiplican las cantidades	13%	"Yo multiplicaría la cantidad de filas por la cantidad de unidades de la fila. Ejemplo: 5x6=30"
	Cuentan "el número" de cuadritos en una fila y "la cantidad" de filas y los multiplican	10%	"Multiplico el número de cuadritos que hay en una fila por el total de filas"
	Cuentan "el número" de cuadritos en una fila y "el número" de cuadritos en una columna y multiplican las cantidades [Mostrando el reconocimiento de la estructura espacial como una iteración de filas que depende del número de cuadritos de la columna]	23%	Multiplicaría el número de cuadritos que tiene la primera fila de arriba por el número de cuadritos que tiene la primera columna de la izquierda, así yo lo haría. *[Ante esta afirmación el profesor le pregunta: ¿Qué representa para ti el número de cuadritos que tiene una columna?]* "Para mi representa el número de veces que sumo una fila"
	Cuentan "la cantidad" de cuadritos en una fila y "la cantidad" de cuadritos en una columna y multiplican las cantidades [Mostrando el reconocimiento de la estructura espacial como una iteración de filas que depende de la cantidad de cuadritos de la columna]	6%	Multiplicaría los cuadritos de una fila y de una columna y así hallo el número de cuadritos que cubren el rectángulo

De esta manera, el desarrollo y los resultados obtenidos, luego del desarrollo de la Tarea 2 me dejaron 4 reflexiones principales, en torno al proceso desarrollado por los estudiantes:

- ✓ El primero de ellos fue observar el progreso de los estudiantes hacia la generalización y comunicación de la estructura espacial, en comparación con la Tarea 1 de esta Actividad 2, en la que el 29% de los estudiantes se ubicaba en un reconocimiento parcial o global de la estructura, bajando así el porcentaje de este grupo al 6%. De igual manera el 71% que se había ubicado en un nivel de reconocimiento estructural, avanzó al nivel estructural avanzado que implicó la generalización y comunicación de la estructura espacial rectangular, alcanzando un total del 94%.

- ✓ El segundo fue poder resaltar que el grupo, en general, pudo relacionar la estructura espacial rectangular, o generalización que propusieron, con una "regla" que les permitía encontrar el número total de cuadritos de un rectángulo de cualquier tamaño; es decir la estructura de la fórmula de área del rectángulo

- ✓ La tercera es resaltar que haber apoyado a los estudiantes por parte del profesor pasando por sus puestos de trabajo explorando sus pensamientos, sirvió significativamente para que centraran la atención en los elementos cruciales de la estructura (número de cuadritos por fila, la iteración y la relación de dependencia entre la fila y el número de cuadritos de la columna) para que así pudieran identificarla y comunicar mejor sus pensamientos.

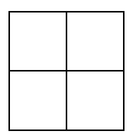
- ✓ Y la cuarta, a raíz de las dos anteriores, fue observar y concluir que el grupo en general identificó y comunicó la estructura espacial rectangular, por tanto se pensó en proponer una situación que permitiera ver otro posible proceso de generalización, e identificación de estructura, a partir del conteo del número de cuadritos que componen cuadrículas.

Así, se procedió con el trabajo de la Actividad 3, que se enfocó a *observar cómo podían comunicar posibles formas de generalización para el conteo del número de cuadritos que componen lo que llamo "bordes" de cuadrículas dadas.*

4.2.3 Actividad 3: Observando posibles formas de identificar y comunicar estructura espacial de manera general en una situación específica: Encontrando el número de cuadritos que bordean una cuadrícula dada

La Actividad 3 se diseñó con el propósito de continuar explorando el pensamiento de los estudiantes, en cuanto a la identificación de la estructura espacial de área rectangular, en un contexto distinto al que habían trabajado inicialmente de contar cuadritos en cuadrículas determinadas. Se quería corroborar si estaban viendo las agrupaciones horizontales y verticales que habían manifestado al finalizar la Actividad 2. En esta Actividad ya no tenían la cuadrícula para contar cuadritos, sino que a una cuadrícula dada debían ponerle un borde con cuadritos de un color dado. Para ello se diseñaron 2 preguntas que estructuraron la actividad en torno a colocar bordes de cuadritos alrededor de una cuadrícula dada, y luego, alrededor de cuadrículas que ellos mismos proponían (ver la Figura 4.10).

Pregunta 1: Quiero poner un borde azul, de un cuadrado de ancho, alrededor de esta cuadrado.



¿Cuántos cuadritos necesitaré para el borde?

Pregunta 2: Ahora escoge cuadrados de diferentes tamaños y ponles un borde de color de un cuadrado de ancho

¿Qué puedes decir sobre el número de cuadritos que se necesitan para el borde, en los casos que escogiste?

Figura 4.10: *Las preguntas 1 y 2 dadas en la hoja de trabajo de la Actividad 3*

En esta actividad se prestó especial atención a la segunda pregunta, la cual se diseñó para observar la creación de cuadrículas de distintos tamaños con sus bordes correspondientes y, específicamente, para observar formas de conteo que involucraran la identificación de una misma estructura espacial para los casos propuestos, que luego podrían comunicar.

Luego de observar las estrategias de los estudiantes que iban comunicando a medida que respondían, en especial en la pregunta 2, el profesor observó la ambigüedad de algunos de sus pensamientos en torno a la identificación de una posible estructura, por lo que reflexionó en cuanto a la poca efectividad de esta pregunta y propuso una "tercera pregunta" que les permitiera centrar la atención en observar y comunicar una estrategia para encontrar el número de cuadritos en el borde:

Pregunta 3: *¿Cómo harías para saber cuántos cuadritos hay en el borde de un cuadrado, sin importar su tamaño?*

En torno a esta pregunta giró mi observación centrada en la identificación y comunicación de una posible estructura, y luego la socialización de clase que buscó que los mismos estudiantes compartieran con el grupo las formas creadas e ideadas por ellos mismos para encontrar el número de cuadritos.

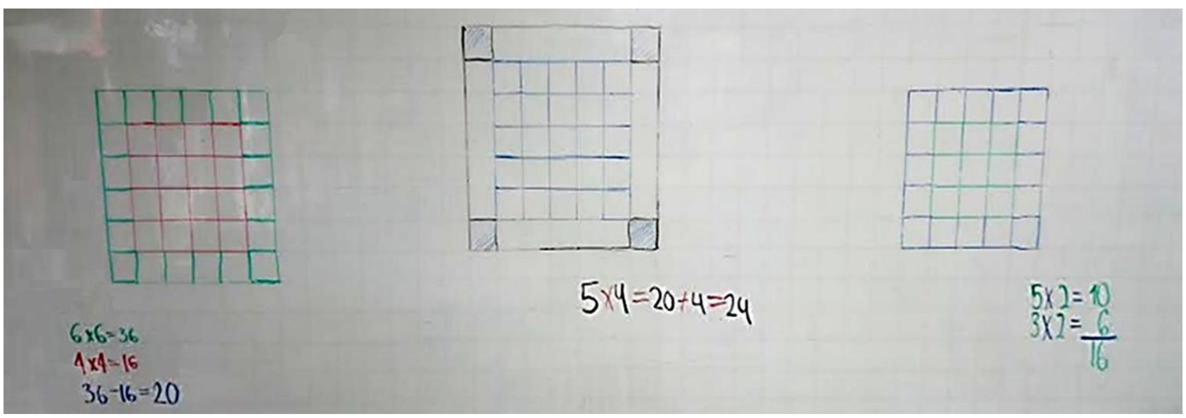


Figura 4.11: *Ejemplos de cuadrículas propuestas por los estudiantes mismos, para luego hacerles un borde*[9]

Para desarrollar las tres preguntas y la discusión de clase se destinó un total de 90 minutos. En la primera parte de la clase (65 minutos) los estudiantes se centraron en solucionar cada una de las preguntas de forma individual, o con el acompañamiento del profesor en los casos que alguna pregunta no les fuera clara. En la segunda parte (25 minutos) se dio la

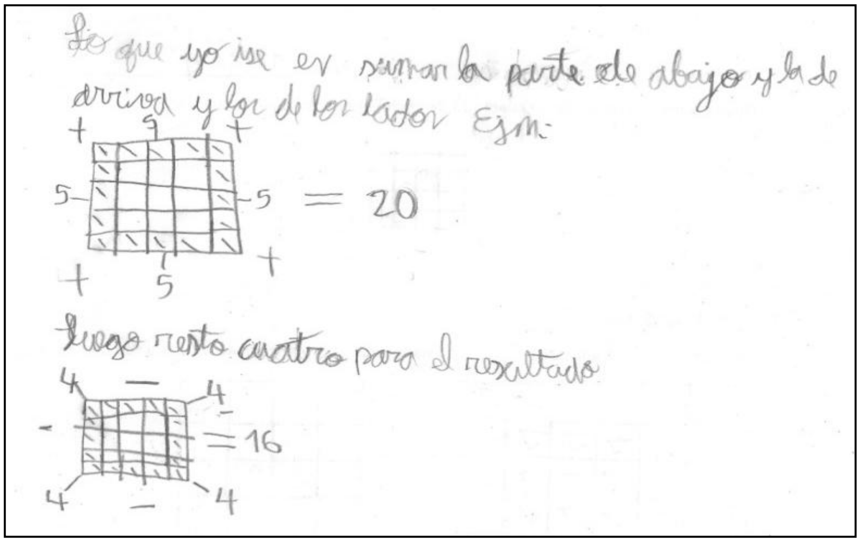
[9] La respuesta del estudiante de la figura del centro fue revisada para señalar el uso incorrecto del signo igual

discusión de clase guiada por el profesor, pero protagonizada principalmente por los estudiantes, quienes compartieron con sus compañeros las estrategias planteadas para cuadrículas propuestas por ellos mismos en respuesta a la pregunta 3, a medida que las iban explicando. Tres estrategias socializadas por ellos se pueden ver en la Figura 4.11.

A partir de las estrategias de trabajo comunicadas por los estudiantes, específicamente en la pregunta 3, esto es, en torno a posibles formas de conteo de los cuadritos del borde de cuadrículas dadas, sin importar sus tamaños, se identificaron tres niveles de pensamiento:

- ✓ Un primer grupo conformado por el 13% (4 estudiantes) identifica y comunica la estructura de forma parcial o incompleta, ya que ignoran las esquinas de los bordes. 3 estudiantes la comunicaron como una multiplicación del número de cuadritos de la fila por 4, y 1 como una suma. Sus respuestas me permitieron ubicarlos en un nivel de pensamiento parcial de la estructura, ya que, si bien reconocen partes de la estructura, no identifican la generalidad de la cuadrícula dada con la estructura del borde.

- ✓ Un segundo grupo conformado por el 23% (7 estudiantes) describió y comunicó el conteo de los cuadritos del borde, usando una estructura válida que involucraba el uso de la fila para cubrir o construir los bordes. 3 estudiantes relacionaron el número de cuadritos de uno de los bordes (la fila de la cuadrícula “aumentada en 2 cuadritos”) para cubrir los lados superior e inferior, y luego los cuadritos de la columna para los lados laterales (ver la estrategia de la parte derecha de la Figura 4.11), luego sumaban cada una de las cantidades para obtener el total de cuadritos que bordeaban el cuadrado. 4 estudiantes tomaban uno de los bordes, lo sumaban 4 veces y restaban las esquinas. En la Figura 4.12 se observa el ejemplo dado por uno de ellos en el que señala las 4 esquinas con un “4” para indicar que las está restando (y no que cada esquina vale 4, como se podría interpretar a primera vista). Las formas de pensamiento de este segundo grupo me permitieron ubicarlos en un nivel de pensamiento estructural



Transcripción:

Lo que yo hice es sumar la parte de abajo y la de arriba y los de los lados.

Ejemplo…

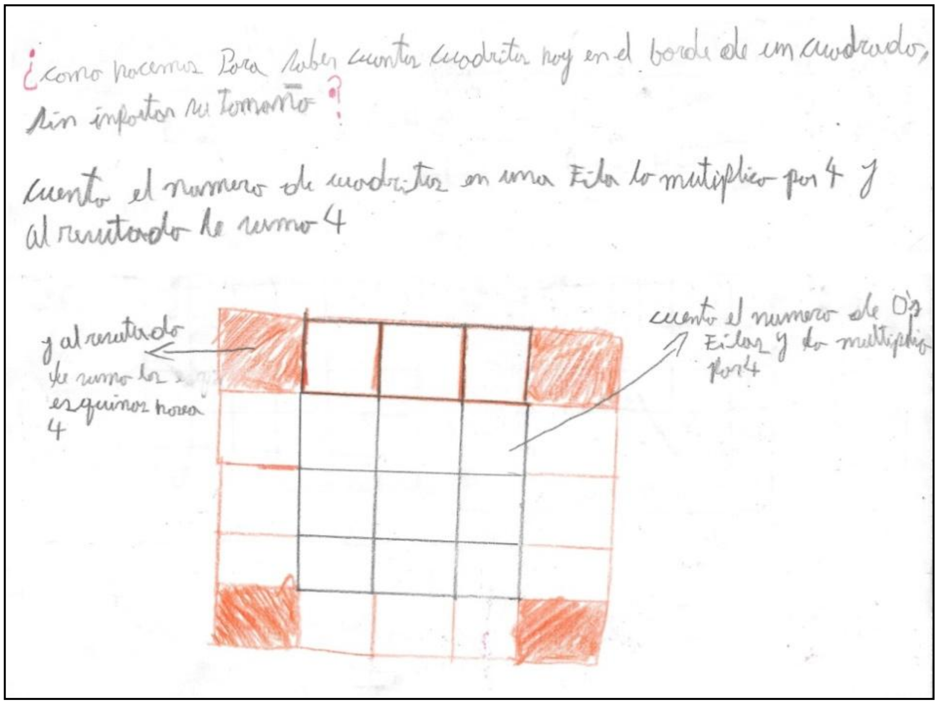
Luego resto 4 para el resultado

Figura 4.12: *Un estudiante que reconoce el número de cuadritos del borde mostrando que los cuadritos de las esquinas los había repetido en el conteo inicial*

✓ Y un tercer grupo conformado por el 64% (20 estudiantes) identificó la estructura de manera uniforme y la comunicó de manera general, a partir de dos estrategias observadas:

- La primera estrategia comunicada por un 38,5% (12 estudiantes) consistió en construir los bordes, o contar el número de cuadritos que lo conforman, relacionando la fila de la cuadrícula con el cubrimiento de los 4 lados del cuadrado y luego sumar sus esquinas (ver Figuras 4.13 y 4.14).

- Por su parte a través de la segunda estrategia comunicada por un 25,5% (8 estudiantes) consistió en la identificación la pieza completa (conformada por la cuadrícula y el borde). Allí reconocían que la pieza contenía la cuadrícula dada, entonces para encontrar el número de cuadritos del borde debían restarle a la pieza el número de cuadritos de la cuadrícula (ver la Figura 4.15).



Transcripción:

¿Cómo hacemos para saber cuántos cuadritos hay en el borde de un cuadrado, sin importar su tamaño?

Cuento el número de cuadritos en una fila [señala con la flecha la fila], lo multiplico por 4 y al resultado le sumo 4 [señala el cuadrito rojo de la esquina superior izquierda]

Figura 4.13: *Un estudiante que cuenta el número de cuadritos en una fila, las multiplica por 4 y suma las esquinas, mostrando su respuesta con un ejemplo figural*

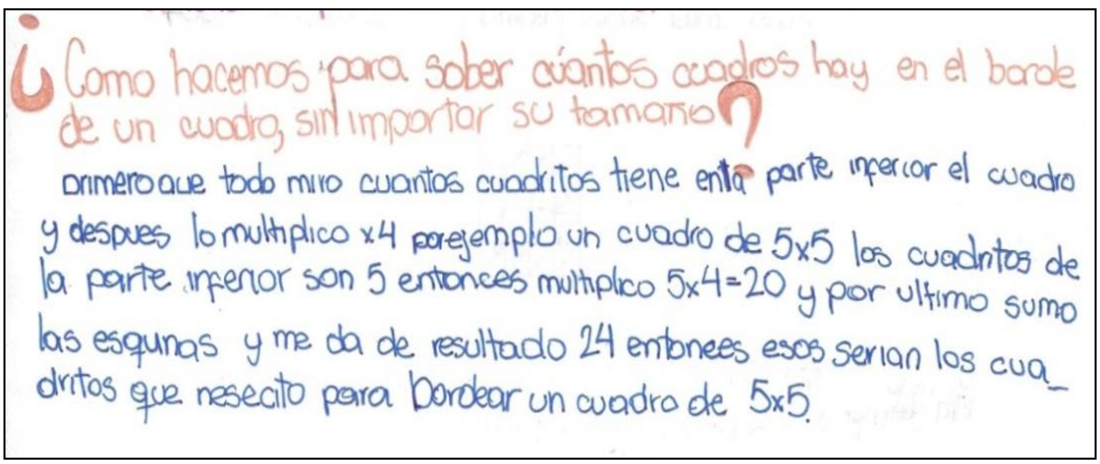
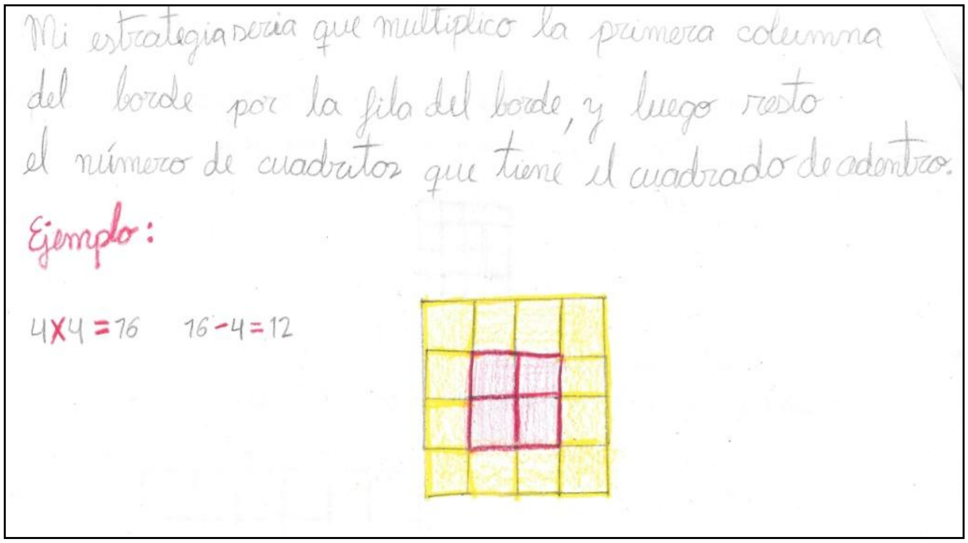


Figura 4.14: *Un estudiante que cuenta el número de cuadritos en una fila, las multiplica por 4 y suma las esquinas, usando su lenguaje natural*



Transcripción:

Mi estrategia sería que multiplico la primera columna del borde por la fila del borde, y luego resto el número de cuadritos que tiene el cuadrado de adentro.

Figura 4.15: *Un estudiante identifica la pieza completa (la cuadrícula y el borde) y resta la cuadrícula dada*

Las 2 estrategias comunicadas por este tercer grupo me permitieron ubicarlos en un nivel de pensamiento estructural avanzado.

Las estrategias mostradas por los estudiantes en cada nivel de pensamiento me permitieron reconocer sus potenciales para observar las regularidades presentes en esta actividad que involucraba un mayor nivel de complejidad, ya que podían relacionar, de alguna manera, la estructura espacial de las cuadrículas propuestas por ellos mismos con el borde que ellos le ponían. Las estrategias que idearon y comunicaron se pueden clasificar y describir, de forma general, en 7 formas diferentes ilustradas en la Tabla 4.5.

Tabla 4.5: *Los niveles de pensamiento observados en el grupo de estudiantes a partir de la Pregunta 3 y sus estrategias mostradas desarrollada en la Actividad 3*

<table>
<tr><th>Nivel de pensamiento</th><th colspan="2">Forma en la que identifican y comunican la generalización de la estructura</th><th>Total %</th><th>Regla que usarían para encontrar el número total de cuadritos que se necesitan para el borde de un rectángulo de cualquier tamaño
(Ejemplos textuales de los estudiantes)</th></tr>
<tr><td>Reconocimiento parcial de la estructura (Nivel estructural parcial)
13%</td><td colspan="2">Distingue la fila del borde de la fila del cuadrado dado, pero al contar los cuadritos del borde ignora que se repiten los cuadritos de las esquinas</td><td>13%
4 Est.</td><td>“Miraría la fila del borde que es más grande que el cuadrado que nos dan y la multiplico por 4”</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Reconocimiento de la estructura (Nivel estructural)
23%</td><td colspan="2">Encontraría el número de cuadritos de una fila del borde para cubrir dos lados de la cuadrícula, luego suma dos filas o dos columnas para completar el borde</td><td>10%
3 Est.</td><td>“Yo multiplicaría el número de cuadritos que tenga el borde de abajo por 2, y la cantidad de cuadritos que tenga una fila del cuadrado de adentro por 2 y los números que me den los sumo”</td></tr>
<tr><td colspan="2">Encontraría el número de cuadritos de una fila del borde, la multiplica por 4 y le resta las esquinas</td><td>13%
4 Est.</td><td>“Sumar los 4 lados del borde, según las unidades que hay en cada fila y restar las esquinas”</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Reconocimiento general de la estructura (Pensamiento estructural avanzado)
64%</td><td rowspan="2">Estructuran a partir de la fila
38,5%
12 Est</td><td>Encontrarían el número de unidades de una fila, lo multiplican por 4 y le sumarían las esquinas</td><td>22,5%
7 Est</td><td>“Lo que haría sería multiplicar al número de cuadritos que hay en cada fila por 4 porque estoy cubriendo cada lado del cuadrado, y después le sumo los 4 cuadritos de las esquinas y así me daría el total del borde”</td></tr>
<tr><td>Construirían el borde a partir de 4 filas que ubicarían a los lados y le agregarían las 4 esquinas</td><td>16%
5 Est.</td><td>“Todos los bordes se pueden hallar de la misma forma; En cada lado del cuadrado le pones una fila con el mismo número de cuadritos del cuadrado, luego súmale 4 cuadritos que son las esquinas del borde”.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Estructuran la pieza
25,5%
8 Est.</td><td>Encontrarían el número de cuadritos de la pieza (cuadrícula y borde) y le restarían el número de cuadritos del cuadrado dado $[área\ mayor - área\ menor]$</td><td>22.5%
7 Est.</td><td>“Mi estrategia sería que multiplico la primera columna del borde por la fila del borde, y luego resto la cantidad de cuadritos que tiene el cuadrado de adentro”</td></tr>
<tr><td>Reconoce la pieza como la cuadrícula con 2 cuadritos más de ancho, donde al quitar la cuadrícula obtendría el borde $[superficie\ mayor - superficie\ menor]$</td><td>3%
1 Est.</td><td>“Bordear el cuadrado es hacer un cuadrado de la misma medida encima del cuadrado, pero con 2 cuadritos más de ancho y entonces le quito el primer cuadrado y ahí me queda el borde buscado”</td></tr>
</table>

4. 3 Resumen

En este capítulo se presentó y describió el proceso desarrollado por los estudiantes para la identificación y comunicación de la estructura espacial de cuadrículas, para luego apoyar su posterior generalización, a partir de las dos actividades propuestas para el alcance de este propósito, las Actividades 1 y 2. La identificación de la estructura espacial de cuadriculas se continuó explorando a través de la Actividad 3, en la que requerían bordear con color cuadrículas dadas. A continuación, se presenta el resumen de los alcances de los niños en su desarrollo de pensamiento, luego de cada actividad.

4.3. 1 Actividades 1 y 2: Apoyando el reconocimiento, la comunicación y generalización de la estructura espacial

En el desarrollo de estas actividades quiero resaltar la utilidad de Geogebra en el proceso de enseñanza de la Actividad 1, apoyando en los estudiantes la identificación de una nueva unidad compuesta, conformada por los cuadritos agrupados en la primera fila, que luego podían usar de manera dinámica para cubrir el rectángulo dado. Este recurso los involucró en un proceso de discusión de clase, guiado por el profesor, en el que podían ver la variación y relación entre el número de filas usadas para el cubrimiento y el número de cuadritos de la columna. Al finalizar la *Actividad 1* el 42% se ubicó en un nivel de pensamiento estructural (13 estudiantes) y el 58% de los estudiantes (18 estudiantes) en un nivel de pensamiento parcial de la estructura.

Posteriormente en la *Actividad 2*, buscando continuar apoyando la identificación y comunicación de la generalización de la estructura espacial, luego de la Tarea 1 el 71% de los estudiantes se ubicó en un nivel de pensamiento estructural (22 estudiantes) y el 29% en un nivel de pensamiento parcial de la estructura (9 estudiantes). Luego, al finalizar la Tarea 2, solo el 6% de los estudiantes (2 estudiantes) se ubicó en un nivel de pensamiento parcial de la estructura y el 94% (29 estudiantes) identificaron la relación entre las dos variables involucradas en la estructura espacial: el número de cuadritos de la fila, y el número de cuadritos de la columna (el número de filas) encontrando diversas formas de comunicarla en sus propias palabras, es decir usando un lenguaje natural (Mason, 1999), tal como se puede observar en la Tabla 4.4. Esto me permitió caracterizarlos en un nivel de pensamiento estructural avanzado. En la Figura 4.16, se observa el progreso en los niveles de pensamiento estructural luego de las Actividades 1 y 2.

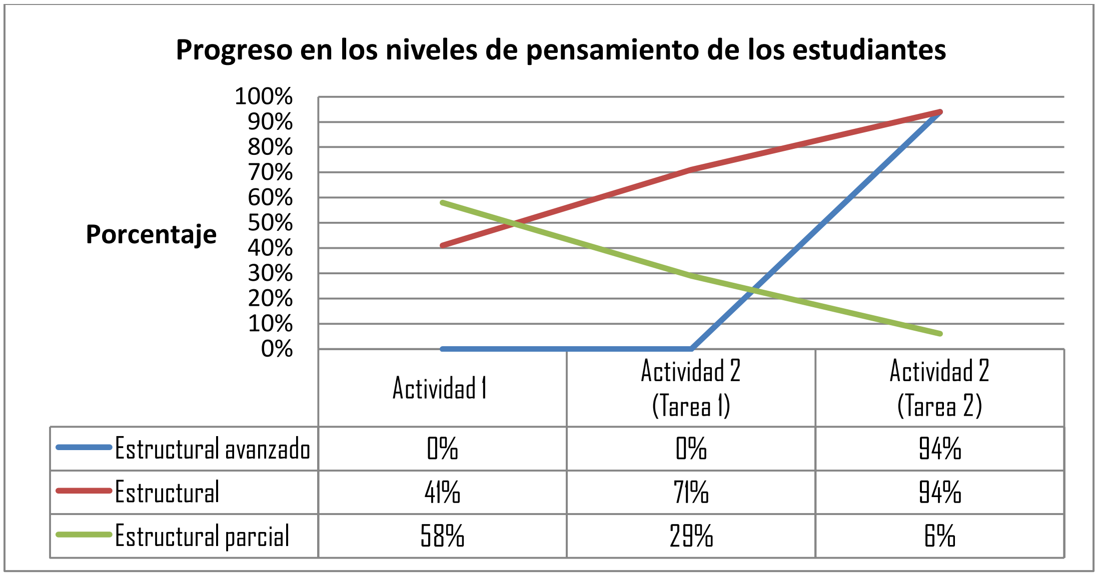


Figura 4.16: *El progreso de los estudiantes en sus niveles de pensamiento en torno a la identificación y generalización de la estructura espacial, a partir de las Actividades 1 y 2*

De este modo se pudo ver que el proceso de generalización de dicha estructura permitió apoyar a los estudiantes a dar un pequeño paso al inicio del desarrollo de su pensamiento algebraico, es decir, *la identificación y generalización de la estructura espacial de área rectangular como una puerta de entrada al desarrollo del pensamiento algebraico.*

4.3. 2 Actividad 3: Encontrando el número de cuadritos que bordean una cuadrícula dada

Luego de observar las estrategias comunicadas por los estudiantes para contar y bordear con cuadritos de un color determinado, cuadrículas dadas, en el desarrollo de la Actividad 3 fue posible reconocer sus potenciales para observar regularidades presentes en situaciones de mayor complejidad, al tener que relacionar la estructura espacial de la cuadrícula a bordear con el borde que ellos mismos le ponían. Al finalizar la actividad, el 64% de los estudiantes (20 estudiantes) evidenció estar en un nivel de pensamiento estructural avanzado, el 23% en un nivel de pensamiento estructural (7 estudiantes) y el 13% de los estudiantes (4 estudiantes) se ubicó en un nivel de pensamiento estructural parcial. Estos niveles se presentan en la Tabla 4.5.

Capítulo 5: Resultados, reflexiones y aprendizajes del estudio

El propósito de este proyecto era identificar los alcances de una innovación curricular—diseñada con la intención de apoyar el reconocimiento de estructura espacial de área rectangular—en el desarrollo de pensamiento algebraico de un grupo de estudiantes de Grado 5°. En el Capítulo 1 subrayé la importancia de la comprensión, por parte de los estudiantes, del tema de medición de área rectangular ya que dicha comprensión es central en el aprendizaje de las matemáticas escolares; también señalé la necesidad de considerar el tema de la estructura espacial de área rectangular como un foco de atención fundamental para el diseño y desarrollo curricular de las matemáticas escolares en el nivel elemental. En el transcurso del desarrollo de este proyecto me hice consciente de que la identificación de la estructura espacial de área rectangular, además de apoyar el desarrollo de pensamiento algebraico por medio del estudio de la variación y el cambio, representa un espacio muy significativo para el desarrollo de razonamiento multiplicativo, como lo evidencian los resultados de la actividad de aula presentados en el capítulo anterior. Estas evidencias, así como las conclusiones y reflexiones alcanzadas, que presento en este capítulo, son producto del desarrollo de ciclos de indagación en el aula y reflexión, en los que me involucré como profesor y como estudiante de los procesos de pensamiento y aprendizaje de los estudiantes de Grado 5°. El resultado del desarrollo de estos ciclos de indagación sistemática y reflexión sobre mi acción como profesor está representado en un *cambio* significativo de mis *concepciones*[10] (*i.e.*, mi conocimiento y creencias, mi actitud y disposición como profesor) sobre las matemáticas escolares, su enseñanza, y aprendizaje; en otras palabras: un cambio de paradigma en relación con la naturaleza del conocimiento matemático y el mejoramiento de mi práctica profesional como profesor de matemáticas.

[10] Ver Agudelo-Valderrama, Clarke y Bishop (2007)

En este capítulo se presentan los resultados del estudio, así como las reflexiones y aprendizajes alcanzados de mi proceso de aprendizaje profesional, durante el desarrollo de este proyecto, en relación con el foco disciplinar del proyecto, su enseñanza y aprendizaje. En la Sección 5.1 se presenta un resumen de los resultados ya expuestos en el Capítulo 4, y la Sección 5.2 se ocupa de la descripción de mis reflexiones, y la explicación de los aprendizajes que considero más relevantes, en conexión con la situación problemática de mi practica de enseñanza, descrita en el Capítulo 1.

5. 1 Resultados del estudio

La identificación de la estructura espacial que subyace a la fórmula de área rectangular se convirtió en el foco central de la innovación curricular, o secuencia de actividades, que fue llevada al aula con el fin de explorar posibilidades de apoyo al desarrollo del pensamiento algebraico en el grupo de estudiantes de Grado 5°. Así, las secuencias de actividades fueron diseñadas teniendo como referentes centrales las potencialidades y necesidades de aprendizaje de los estudiantes, que fueron identificadas mediante las actividades de exploración de su pensamiento en cada fase del trabajo. A continuación presento los alcances del trabajo de aula del estudio principal o Fase 2 del proyecto (Actividades 1, 2 y 3), en relación con la identificación de la estructura espacial y el desarrollo de pensamiento algebraico. Como ya se advirtió, los resultados del trabajo de aula que se convirtió en Fase 1, o piloto, se presentan en el Apéndice 1.

5.1.1 Resultados del trabajo en las Actividades 1 y 2: Apoyando el reconocimiento, la comunicación y generalización de la estructura espacial

Al final del proceso desarrollado en las Actividades 1 y 2, el 6% del grupo de estudiantes evidenció reconocimiento de la estructura de una cuadrícula como un conjunto de filas o de columnas; esta fue una “identificación parcial de la estructura”, ya que si bien reconocían el cubrimiento de un rectángulo como una organización de cuadritos por filas, para encontrar el total de cuadritos que lo cubren multiplican el número de cuadritos de la fila por los de ya columna, pero explican que “multiplicar es más fácil” porque “no toca hacer el conteo”, por ejemplo, de a “uno en uno”; esto se interpreta como ausencia de identificación de la estructura de la multiplicación en la organización del total de cuadritos de las cuadrículas dadas.

El 94% del grupo de estudiantes (29 estudiantes de 31) logró avanzar hacia el reconocimiento de la estructura espacial de una cuadrícula, ya que a partir del reconocimiento de “el número de cuadritos de una fila” como una nueva unidad para el conteo, “una unidad compuesta”, que se itera para completar la cuadrícula (o para cubrir un rectángulo), comunicaron la *generalización* de la estructura espacial de cualquier cuadrícula. Este logro en el desarrollo de razonamiento de los estudiantes, se convierte en lo que yo considero el *fulcro* o punto de apoyo para el desarrollo de pensamiento multiplicativo y, eventualmente, algebraico, teniendo en cuenta que, más adelante, identificaron que había *dos cantidades que cambian* (que pueden tomar diferentes valores), presentes en la situación: el número de cuadritos de la fila y el número de filas. Este 94% del grupo de estudiantes reconoció y comunicó a partir de una “regla”, creada por ellos mismos, que para encontrar el número total de cuadritos que cubren un rectángulo de cualquier tamaño debía tenerse en cuenta cuántos cuadritos hay en una fila y en una columna, comunicando su regla de conteo de la siguiente manera:

- *El número de cuadritos de la fila por el número de filas* **(13 estudiantes)**
- *El número de cuadritos de la fila por el número de cuadritos de la columna* **(16 estudiantes)**. Este segundo subgrupo explicó que el número de cuadritos de la columna representaba el número de filas.

La regla comunicada por este grupo de estudiantes equivale a identificar y comunicar la *generalización* de la estructura espacial (o el patrón matemático) que subyace a la fórmula de área rectangular; es decir, se evidencia un reconocimiento de la estructura multiplicativa presente, y un aprendizaje *relacional* de la estructura espacial rectangular.

5.1.2 Resultados del trabajo en la Actividad 3: Encontrando el número de cuadritos que bordean una cuadrícula dada

Los resultados de la Actividad 3—propuesta con la intención de continuar apoyando la identificación de estructura espacial de área rectangular, pero en una situación contextual de mayor complejidad, luego de los resultados identificados en las Actividades 1 y 2—fueron una muestra de la firmeza de las construcciones conceptuales de los estudiantes, evidenciadas en las estrategias que propusieron, cuando en el contexto de cuadrículas dadas o imaginadas por ellos que, debían bordearlas, pues identificaron un *patrón*, usando la representación gráfica y el lenguaje natural para comunicarlo. Esto se tradujo en que el 64% del grupo de estudiantes pudo comunicar la generalidad, esto es el patrón, y se ubicó en un nivel de pensamiento *estructural avanzado* (ver la Sección 2.3, Capítulo 2): El 23% del grupo se ubicó en un nivel de pensamiento *estructural*, y el 13% en un nivel de pensamiento *estructural parcial*. Las formas de comunicación de dicho patrón se pueden observar en la Tabla 4.5 del Capítulo 4.

Los estudiantes que alcanzaron un nivel de pensamiento estructural avanzado encontraron diversas formas de comunicar la generalización de la estructura en sus propias palabras, es decir, usando un lenguaje natural (Mason, 1999), sin tener que hacer uso del lenguaje "simbólico" presente en la fórmula del área del rectángulo, como tradicionalmente es memorizada y replicada por los estudiantes de muchas aulas de clase en las cuales la adquieren de manera *instrumental* ya que no entienden qué representan las letras (Agudelo-Valderrama, 2002; Parra, 2018). Estos resultados son una muestra de la potencialidad que tienen los niños para la identificación y comunicación de regularidades y generalizaciones (Mason et. al., 2014), aún en períodos cortos para el aprendizaje.

Al finalizar el desarrollo de la Actividad 3 pude constatar que el proceso desarrollado—que partió de la exploración *inicial* de las ideas matemáticas de los estudiantes, en relación con el tema foco de atención d este proyecto—me permitió detectar sus necesidades de aprendizaje y, así, apoyarlos de manera acorde en su construcción conceptual de la estructura espacial de área rectangular; de igual manera, en la identificación y comunicación en *su lenguaje natural* de la generalización de la estructura presente—la identificación y comunicación del patrón—en una situación de mayor complejidad, ya que se requería bordear cuadrículas de cualquier tamaño. La secuencia de actividades diseñada, puesta en acción, observada y analizada permitió apoyar al grupo de estudiantes a dar un pequeño paso en su proceso de desarrollo de pensamiento algebraico, esto es, *la identificación y generalización de la estructura espacial de área rectangular se constituyó en una puerta de entrada al desarrollo del pensamiento algebraico.*

5. 2 Reflexiones y aprendizajes

En esta sección se presentan mis reflexiones y aprendizajes principales, a partir de la situación descrita en el Capítulo 1 (ver la Figura 1.1), la cual viví en mi aula con Samuel y Sara, situación que rondó mi pensamiento y me motivó a estudiar la maestría en la que se desarrolló este proyecto. Posteriormente se presentan unas reflexiones en torno al desarrollo del proyecto en general.

5.2. 1 Reflexiones y aprendizajes a partir de la situación de aula vivida con Samuel y Sara

La pregunta que originó la idea de desarrollar este proyecto, y que se muestra en la Figura 1.1 del Capítulo 1 fue:

¿Por qué Samuel pierde el sentido de su conocimiento aritmético cuando se le presenta una ecuación como $x - 20 = 151$*, en la que en cambio de aparecer una caja vacía, hay una letra, y, ello, a pesar de su experiencia en la manipulación de expresiones con literales?*

Esa dificultad de Samuel yo la atribuía a su desinterés por aprender el álgebra de Grado 8°, y esto fue algo que viví con frecuencia en mi aula de clase, y me llevó a plantear y pensar en torno a las dos siguientes preguntas, también descritas en el Capítulo 1, pero que en este punto del desarrollo de este proyecto, entiendo, son más complejas. Estas preguntas eran:

¿Acaso solucionar una ecuación como x - 20=151, requiere el uso de pensamiento algebraico?

¿Puedo como profesor esperar que Samuel le encuentre sentido a esa letra, que la entienda como un número indeterminado, y que además opere con ella, solo porque le muestro esa expresión simbólica?

Inicialmente yo le estaba pidiendo a Samuel, y a sus compañeros, que operara con esa letra. Así pues, lo primero que identifiqué fue que Samuel, al igual que sus compañeros, no le encontraba significado a las letras, entonces si no le encontraba significado a la x, menos iba a *operar* con ella. De aquí, la propuesta de empezar a trabajar en contextos de donde pudiera surgir la idea de "números generales" para ver si los estudiantes lograban encontrar un *sentido* de la generalidad, partiendo de la identificación de cantidades específicas con las que normalmente los estudiantes operan; para ello se escogió el tema de la estructura de área rectangular, gracias a su versatilidad, teniéndose en cuenta que representa un contexto propicio para identificar estructura porque los estudiantes tienen la opción de manipular, de tener y usar material concreto si se necesitara, y de *vivenciar* la variación a parir de cuadrículas de distintos tamaños.

El hecho de haber enfocado la atención en la identificación de estructura tanto espacial como numérica me llevó a reconocer que prácticamente a todo concepto matemático subyace una estructura matemática, la cual puede tener diferentes formas de representación (no necesariamente simbólicas). Además, esto me hizo ver que, antes, en mi enseñanza del álgebra yo mismo no identificaba la *estructura* de los conceptos matemáticos—ni era consciente de que existía—y mucho menos la promovía en el aula como profesor. Un ejemplo claro está en que yo pensaba que lo que le preguntaba a Sara ($\square - 20 = 151$) era adecuado en un contexto aritmético (ver Figura 1.1), para empezar a promover su pensamiento algebraico, sin ser consciente que este tipo de expresiones son aritméticas y pueden promover un tratamiento netamente computacional, y no la identificación de estructuras aritméticas, de tal manera que éstas constituyan en un punto de partida para la promoción de pensamiento algebraico.

Con esta tarea que le proponía a Sara y a sus compañeros, ni siquiera estaba promoviendo un aprendizaje relacional, si lo considero en un contexto de trabajo aritmético (pensamiento numérico), puesto que solo estaba promoviendo un enfoque computacional, y pensaba que porque hacía eso, ella estaba lista para empezar un trabajo con letras. Con lo anterior, estoy resaltando que inicialmente yo solo estaba cuestionando lo que le estaba planteando a Samuel, sin ser consciente que lo que le presentaba a Sara, también necesitaba ser cuestionado, al ser poco adecuado para apoyar un aprendizaje relacional (Skemp, 1976). En lugar de la expresión presentada inicialmente, en la que se ve el signo igual como el indicador de una operación, una respuesta, para apoyar un aprendizaje relacional sería más conveniente presentar, inicialmente, una expresión como:

$$\square - 20 = 170 - 19$$

En esta expresión matemática se puede apoyar a los estudiantes para que construyan un significado *relacional* del signo igual, estableciendo una equivalencia entre cantidades; será posible apoyarlos a que establezcan una relación entre los sumandos de ambos lados de la igualdad, donde se disminuye en 1 cada uno, es decir:

$$-\mathbf{1}$$

$$\boxed{171} - 20 = 170 - 19$$

$$-\mathbf{1}$$

Situación a partir de la cual estarían encontrando la estructura de la igualdad, relacionando los términos involucrados. Cuando los estudiantes han reconocido la estructura que opera en esa igualdad aritmética, aparece la posibilidad de considerar la misma estructura, cambiando los números, y producir/comunicar una *generalización de la estructura* allí presente. Lo anterior lo quise describir para resaltar que, en la Fase 1, durante el proceso de enseñanza centré toda mi atención en la medición de las longitudes de los lados del rectángulo, lo cual me permitió concluir que no había creado espacios de aprendizaje para que los estudiantes dirigieran su atención a la identificación de la estructura espacial y la explicaran, conduciendo a los estudiantes a que recurrieran a las reglas de procedimiento para hallar área rectangular—reglas que, para ellos, eran más prácticas, pues las habían aprendido en el grado escolar anterior (Grado 4°)—esto es, "simple: multiplicar el ancho por el alto" para encontrar el área. Esta situación fue reportada en el Capítulo 3, y además, es algo que, según mi experiencia, sucede en muchas aulas de clase, y que se reporta en estudios como, por ejemplo, el de Nunes et al. (1993), favoreciendo escenarios en los que se promueve un aprendizaje netamente *instrumental*. Los resultados de la Fase 1 crearon la necesidad de replantear y mejorar la estrategia de enseñanza, creándose la Fase 2 del proyecto, con el objeto de apoyar a los estudiantes para que centraran la atención en la estructura espacial. Los resultados del trabajo de la Fase 2 constituyen evidencia robusta del potencial de los niños para generar sus propias construcciones matemáticas, comunicarlas y avanzar a la identificación de una estructura de mayor complejidad, en este caso: bordear con cuadritos una cuadrícula cualquiera, y establecer una regla que comunique el método para hallar el número de cuadritos en el borde.

Finamente dentro del proceso desarrollado en torno a la situación de aula vivida con Samuel y Sara, y en este proyecto, además me encontré y quise hacer énfasis en las siguientes reflexiones que quiero rescatar y compartir con el lector:

- ✓ Para lograr una comprensión sobre la profundidad de las preguntas con las que inicié el trabajo de este proyecto fue necesario involucrarme en un proceso de reflexión y metacognición que me permitió reconocer que además de "aprender más" debía "desaprender mucho"; esto me llevó a cuestionar mis conocimientos de las matemáticas, mis prácticas de enseñanza y mi rol como profesor en los procesos de aula que promovía. ¡Solo hasta el momento de iniciar mi proyecto, empecé a hacerme preguntas relacionadas con el *Qué, el Para qué, el Porqué,* y el *Cómo* de la enseñanza del álgebra escolar!

- ✓ Consideraba que por presentarle a Samuel—y en general a mis estudiantes—ecuaciones o expresiones simbólicas como la presentada en la descripción de la situación que dio origen al desarrollo de este proyecto (ver la Figura 1.1), y entrenarlo en "la manipulación de tales expresiones", Samuel entendería que las letras representaban *un* *número indeterminado, i.e.*, cualquier número, y que además estaba desarrollando su pensamiento algebraico. Desconocía que lo importante de mi enseñanza en el inicio del trabajo algebraico escolar radicaba en poder apoyar a los niños para que reconozcan *números generales*: cantidades que cambian; cantidades indeterminadas, y además, para que puedan operar con estos números indeterminados. En este sentido, percibir o reconocer la *incógnita* como una *cantidad indeterminada* (una manifestación de variable), o como "cualquier número" con el cual se puede operar, mucho antes de pensar en encontrar el valor que representa.

5.2. 2 Reflexiones y aprendizajes a partir del desarrollo del proyecto en general

Mi motivación inicial de entrar a la maestría fue tratar de responder muchas preguntas que a diario me surgían como un cuestionamiento a mis prácticas y papel como profesor, preguntas sobre situaciones de mi aula de matemáticas, de las cuales no entendía su génesis. Hoy en día veo que muchas de ellas se han clarificado, encontrando luces que, creo, me han movido hacia un nivel profesional como educador, si considero que he construido herramientas conceptuales cruciales que considero se constituyen en pivotes del conocimiento del profesor de matemáticas. Las profundizaciones alcanzadas sobre la naturaleza del conocimiento matemático, con especial atención al desarrollo del pensamiento algebraico en el nivel escolar, su enseñanza y su aprendizaje, como ya lo afirmé, tuvieron inmediata conexión con mi visión del "Currículo", al haberme impulsado a cuestionarme sobre mis ideas y creencias en relación con el *Qué, el Para qué, el Porqué,* y el *Cómo* de la enseñanza del álgebra escolar. A continuación comparto la mirada que tenía en torno a cada uno de estos focos conceptuales, antes de iniciar este proyecto, y la visión desde la cual hoy me posiciono como profesor (descrita con atención al *álgebra escolar*). Este cambio sobre mis concepciones se ilustra en la Figura 5.1.

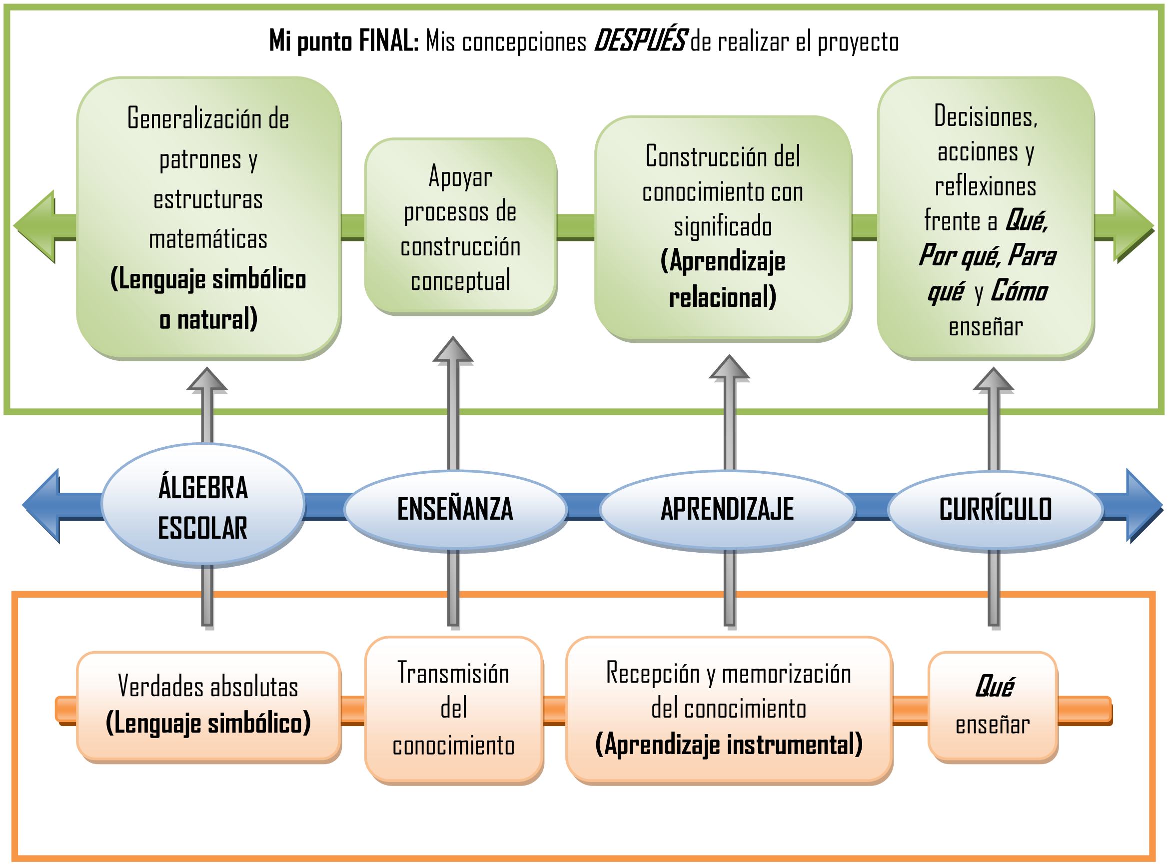


Figura 5.1: *El cambio sobre mis concepciones como profesor, luego del desarrollo del proyecto*

1. Mi concepción del *álgebra escolar* se resumía en: Un conjunto de verdades absolutas y estáticas, representadas por medio de expresiones simbólicas y reglas de procedimiento cuyo fin radica en poder encontrar el o los valores numéricos que representaban los símbolos (un enfoque *absolutista* de las matemáticas). Ahora reconozco que esta debe atender de manera natural, así como en la historia, a dar solución a problemas particulares o familias de problemas que involucren trabajar y operar con cantidades indeterminadas o desconocidas (identificación de la *variable*), sin necesariamente involucrar el uso de un lenguaje simbólico de forma inicial, es decir, la veo como una forma de expresar relaciones matemáticas de forma *general*, esto es, la generalización de *patrones* o de *estructura matemática*.

- ✓ La *enseñanza* del álgebra a mis estudiantes se enfocaba en la *transmisión* de lo que yo consideraba era el álgebra escolar. Ahora veo que mi tarea al enseñar debe centrarse en *apoyar* sus procesos de *construcción* conceptual, es decir la construcción de las estructuras matemáticas que conforman los conceptos en álgebra y en consecuencia las matemáticas en general, i.e. *apoyar* el desarrollo del *pensamiento algebraico*, esto es en últimas su pensamiento matemático.

- ✓ El papel de mis estudiantes en el *aprendizaje* del álgebra y de las matemáticas era el de *receptores* del conocimiento, de lo que antes consideraba el álgebra escolar; es decir un *aprendizaje instrumental* del álgebra. Ahora veo que para que logren crear un verdadero *significado* de lo que aprenden, es decir un *aprendizaje relacional* del álgebra, es necesario que ellos mismos logren atribuir significado a las *variables* presentes en situaciones problema y, además, que logren reconocer cómo estas se relacionan, se operan y estructuran un *patrón*, es decir que *construyan* y comuniquen la generalidad.

- ✓ El *currículo* lo concebía como una directriz organizativa de temas, contenidos y objetivos de procedimiento (dada por el colegio a través de un currículo "manifiesto"), que me indicaban o explicitaban "qué enseñar", es decir, una mirada de currículo ligada a una perspectiva *curricular por objetivos conductuales*. Ahora veo que el currículo lo diseña el profesor y además debe contemplar los procesos de enseñanza y aprendizaje que se viven en el aula y que lo empoderan frente a las decisiones que toma en torno a *qué* enseñar, *cómo* hacerlo y *para qué* hacerlo, atendiendo a las experiencias vividas en el aula, al contexto, los pensamientos y necesidades de aprendizaje de los estudiantes—una mirada de currículo ligada a una perspectiva *curricular por procesos*. Ahora puedo entender por qué, a pesar de las recomendaciones curriculares del MEN (1998), de promover el desarrollo del pensamiento algebraico desde grados de primaria, este se sigue concibiendo como una asignatura de octavo y noveno en la que se ve la matemática, pero con "letras", y creo tener explicaciones para la siguiente pregunta que me surgió durante el desarrollo de mi proyecto:

¿Por qué si los lineamientos curriculares de matemáticas en Colombia, vigentes desde 1998—y la comunidad internacional de educadores matemáticos (e.g., Agudelo- Valderrama, 2002;, Mason, 1999; Mason et al., 1999)—recomiendan apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico desde grados de primaria, mi práctica de enseñanza y la que he podido observar en el contexto de la institución en la que me desempeño no refleja esto?

2. Mi forma de *concebir* las matemáticas y, en particular, el álgebra escolar antes de iniciar el proyecto repercutía directamente en mis prácticas de enseñanza y en la forma como veía el aprendizaje de mis estudiantes, ya que consideraba esta forma como la "única". Estas concepciones tienen que ver con un sistema de creencias o "*herencia cultural*" propias de la cultura colombiana, incluso internacional (Bishop, 2005), y los paradigmas en los cuales he estado inmerso y he vivido como estudiante y como profesor. De hecho, cuando reconocemos que existen "otras" concepciones, podemos involucrarnos en procesos de reflexión que nos permiten confrontar y mejorar nuestras prácticas de aula y posicionarnos como profesionales de la educación: competentes para construir el currículo, y consciente del currículo que opera en nuestras aulas de clase (Agudelo-Valderrama, 2006).

3. Las creencias sobre las matemáticas se tornan no solo escolares, sino como lo mencioné anteriormente, *culturales*. Esto lo pude evidenciar en el desarrollo de mi proyecto cuando dos padres de familia de los estudiantes del curso en el que se implementaron las actividades en la Fase 1 cuestionaron mi práctica de enseñanza, y manifestaron su inconformismo, argumentando que en trabajos como estos los estudiantes no "avanzaban en temas", y que los niños se quedaban solamente "contando cuadritos", y que además para el Grado 5° "los niños ya tenían que haber visto otra cierta cantidad de contenidos". Esto me hace ver que enfoques diferentes de trabajo en la enseñanza pueden ser cuestionados por el contexto de la misma cultura, lo cual puedo interpretar como un apego a las matemáticas como ellos (los padres) las experimentaron en su colegio y como un cierto "temor" al cambio.

4. Antes de iniciar mi proyecto, siempre me centré en apoyar un aprendizaje *instrumental* de las matemáticas, y veía de manera fragmentada los contenidos en la escuela. Esto no me permitía ver que los conceptos matemáticos mantienen una *estructura matemática* que permanece a través de los contenidos o focos disciplinares que hacen parte de una estructura curricular escolar, solo que con distintos niveles de complejidad. Las formas convencionales o *instrumentales* de presentar las matemáticas a los niños fácilmente, hoy en día, las pueden encontrar en libros, en Internet o en la sapiencia de sus mismos padres y familias quienes, en su mayoría, han crecido y aprendido en el contexto de una cultura que les ha mostrado esta imagen sobre las matemáticas.

5. Antes no me detenía a observar que prácticamente a todo concepto matemático subyace una estructura *espacial* y *numérica,* las cuales se encuentran relacionadas gracias a la generalidad de su *estructura matemática,* o el *patrón matemático* que lo forma. Bien lo resaltan Mulligan y Mitchelmore (2009, p 33) al afirmar que "el poder de las matemáticas reside en las relaciones y transformaciones que dan lugar a los patrones y las generalizaciones". Así, identificar y trabajar con la estructura matemática equivale a alcanzar una profunda comprensión de los conceptos, y por ende se convierte en *la meta del aprendizaje de las matemáticas* (Mulligan y Mitchelmore, 2009, p. 33).

6. El impacto en mi visión como profesor, que tuvo el proceso de trabajo desarrollado en este proyecto, fue identificado con mayor claridad cuando reconocí el papel que jugamos los maestros en los procesos de contribución al mejoramiento y desarrollo de las prácticas educativas, y al de la educación matemática en general, como medio para acercar al estudiante a la construcción de los conocimientos con significado, y al reconocimiento de su entorno y realidad.

7. Ahora veo que el enfoque metodológico adaptado para el desarrollo de este proyecto, centrado en un enfoque *curricular por procesos* que se fundía con los ciclos de *investigación-acción* y con la propuesta de *investigación de diseño,* no debería formar parte solamente de un proyecto de grado, sino de mis prácticas cotidianas de enseñanza en el aula—quizá sin el mismo rigor de la sistematización que aquí se involucró—como

una manera de realimentar y *mejorar mis procesos de enseñanza*. Esto lo vislumbro a partir del diseño de tareas y actividades que pueda llevar a la acción para atender a las necesidades de aprendizaje de los estudiantes, y que me permitan *indagar* sobre sus procesos de pensamiento para apoyarlos a la construcción significativa de su aprendizaje de las matemáticas.

Referencias

Agudelo-Valderrama. C. (1999). Presentación de la 1ra edición en español. En Mason, J. H., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N., *Raíces del álgebra/Rutas hacia el álgebra* [Traducción al español y Edición de Cecilia Agudelo-Valderrama, p. viii]. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Agudelo-Valderrama, C. (2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Agudelo-Valderrama, C. (2002). Promoción del pensamiento algebraico en la escuela primaria: Una propuesta que cobra sentido de acuerdo con nuestras concepciones sobre el conocimiento matemático. Aula Urbana, (37), 18-19. Bogotá.

Agudelo-Valderrama, C. (2005). Explicaciones de ciertas actitudes hacia el cambio: las concepciones de profesores y profesoras de matemáticas colombianos sobre los factores determinantes en su práctica de enseñanza del álgebra escolar. EMA, 375-412.

Agudelo-Valderrama, C., Clarke, B. y Bishop, A. (2007). Explanations of attitudes to change: Colombian mathematics teachers´ conceptions of the crucial determinants of their teaching practices of beginning algebra. Journal of Mathematics Teacher Education, 10(2), 69-93.

Agudelo-Valderrama, C. (2014). Presentación de la 2da edición en español. En Mason, J. H., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N., *Raíces del álgebra/Rutas hacia el álgebra.* [Traducción al español y edición de Cecilia Agudelo-Valderrama, pp. ix-xiii]. Ibagué: Universidad del Tolima.

Agudelo-Valderrama, C. y Martínez, D. (2015). En busca de una manera conectada de saber: El caso de una profesora de Matemáticas. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 13*(3), 121-141.

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., y Borrow, C. (1998). Students'spatial structuring of 2D arrays of squares. Journal *for Research in Mathematics Education, 29*(5), 503-532.

Bishop, A. J. Las matemáticas occidentales: el arma secreta del imperialismo cultural (2005). En Bishop, A. J. *Aproximación sociocultural a la educación matemática* (pp. 27-41). Cali: Universidad del Valle.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiment in Educational Research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Curry, M., & Outhred, L. (2005). Conceptual understanding of spatial measurement. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), Building connections: Theory, research and practice. Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia [MERGA] (pp.265-272). Sydney: MERGA.

Ernest, P. (1991) The Philosophy of Mathematics Education, London: Falmer Press.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989), Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2003). Medida y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-2-X. [87 páginas; 0,9 MB] (Recuperado el 10 de febrero de 2018 de http://www.ugr.es/local/jgodino/)

Hopkins, D. (1993). Guide to Classroom Research. Buckingham: U. K.

Kieran, C., Krainer, K., & Shaughnessy, J. M. (2013). Linking research to practice: Teachers key stakeholders in mathematics education research. In K. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung, (Eds.), *Third international handbook of research in mathematics education* (pp. 361–392). New York, NY: Springer.

Kemmis, S., y McTaggart, R. (Eds.). (1988). The action research planner. (3rd edition). Geelong: Deakin University Press.

Küchemann, D. (1981). Children’s understandig of numerical variables. In *Mathematics in school*, (4), 23-27

Lewin, K (1970). Psicología dinámica. Paidós, Buenos aires.

Ley N° 115. Congreso de la República de Colombia, Bogotá, Colombia. 8 de Febrero de 1994.

MacGegor, M. y Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on student perceptions of functional relationships. Mathematics Education Research Journal, 7(1), 69-85.

Mason, J. (1999). Incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: las secuencias de Tunja. Revista EMA, 4(3), pp. 232-246.

Mason, J. H., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (2014). Raíces del álgebra/Rutas hacia el álgebra. (Traducción al español y edición de Cecilia Agudelo-Valderrama). Ibagué: Universidad del Tolima.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadan*as. Bogotá: Magisterio.

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. Enseñanza de las Ciencias, 29(1), 75–88

Mulligan, J., Mitchelmore, M., (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. Mathematics Education Research Journal, 21(2), 33-49.

Mulligan, J. T., English, L. D., Mitchelmore, M. C., Welsby, S. & Crevensten, N. (2011a). Developing the pattern and structure assessment (PASA) interview to inform early mathematics learning. In J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer & S.Thornton(Eds.), Mathematics: Traditions and [New] Practices (Proceedings of the joint conference of the Australian Association of Mathematics Teachers and the Mathematics Education Research Group of Australasia, pp. (1022-1030). Alice Springs, NT: AAMTMERGA.

Mulligan J.T., Mitchelmore M.C. (2013) Early Awareness of Mathematical Pattern and Structure. In: English L., Mulligan J. (eds) Reconceptualizing Early Mathematics Learning. Advances in Mathematics Education. Springer, Dordrecht.

Nunes, T., Light, P., & Mason, J. (1993). Tools for thought: The measurement of length and area. Learning and Instruction, 3, 39-54.

Outhred, L. y Mitchelmore, M. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematical Education, 31*(2),144-167.

Papic, M. M., Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers’ mathematical patterning. Journal for Research in Mathematics Education, 42(3),237–268.

Parra, E. (2018). *Aprendizaje relacional de medición de área rectangular: Mucho más que aplicar una fórmula*. En J. Arteta y R. Amador (Organizadores), VII Simposio Internacional de Didáctica de las Ciencias y las Matemáticas. Simposio llevado a cabo en Barranquilla, Colombia.

Posner, G. J. (2005) Theoretical Perspectives on Curriculum in Lattuca, L. et al (Eds) College and University Curriculum. Boston: Pearson Custom Publishing.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. En Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Eds.) Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (1996). The Roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective. En Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Eds.) Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Rojano, T. (1996). The role of problems and problem solving in the development of algebra. En Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Eds.) Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. Mathematics Teaching, 77, 20–26. (Traducción al español de Cecilia Agudelo-Valderrama).

Stenhouse, L. (1998). Investigación y desarrollo del currículum. Madrid. Ed. Morata S.A.

Trigueros, M., Ursini S. (2001). Approaching the study of Álgebra through the concept of variable. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds). *Proceedings of the 12th ICMI Study conference. The future of the teaching and learning of álgebra 2* (pp 598-605). Melbourne: The University of Melbourne.

Apéndices

APÉNDICE 1: LA FASE 1 O ESTUDIO PILOTO

Este apéndice (que he llamado la *Fase 1 o estudio piloto*), describe el proceso desarrollado por el grupo de estudiantes con el que se trabajó en el segundo semestre de 2017 durante la Fase 1 del proyecto. Para ello, este se estructura a partir de dos secciones:

- ✓ **SECCIÓN 1:** Resultados de la exploración inicial del pensamiento sobre las ideas matemáticas de los estudiantes a través del cuestionario inicial y entrevista de seguimiento
- ✓ **SECCIÓN 2:** Descripción de la secuencia de actividades desarrollada en la Fase 1 del proyecto y de los resultados observados a partir de su puesta en acción

A continuación se describe cada sección a partir de las preguntas (para el cuestionario) o actividades (para la secuencia), sus propósitos y los resultados observados en cada una.

SECCIÓN 1: Resultados de la exploración inicial de las ideas matemáticas de los estudiantes

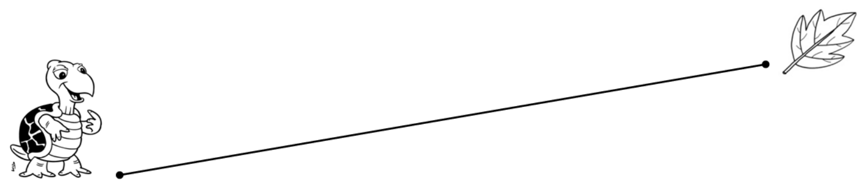
La exploración inicial del pensamiento de los estudiantes se realizó a través del cuestionario de exploración de las ideas matemáticas de los estudiantes de la Fase 1, y su correspondiente entrevista de seguimiento. El cuestionario está conformado por 6 preguntas que se pueden observar en el Apéndice 2 (para facilidad de lectura y organización de la información de este apéndice). Los propósitos de cada una de las preguntas del cuestionario se pueden ver en la siguiente Tabla 1:

Tabla 1: *Las preguntas del cuestionario de exploración inicial de la Fase 1 y sus propósitos*

PREGUNTAS	PROPÓSITO
1	Observar si los estudiantes miden correctamente longitud
2	Observar las estrategias de los estudiantes para el conteo de bolitas organizadas en forma rectangular
3, 4, 5 y 6	Observar las estrategias de conteo de los cuadritos que se requieren para cubrir rectángulos dados: ✓ A partir de un cuadrito de cartón (Pregunta 3) ✓ Dada la primera fila y la primera columna (Pregunta 4) ✓ A partir del cuadrito dibujado (Pregunta 5) ✓ Dada la primera fila (Pregunta 6)

El cuestionario, compuesto por las seis preguntas anteriormente descritas, se entregó a los estudiantes de manera escrita, destinando un total de 90 minutos para su solución. A medida que los estudiantes lo desarrollaban, el profesor pasó por sus puestos de trabajo verificando que entendieran lo que se pedía que hicieran. En la Figura 1 se ilustra la pregunta 1.

1. **La tortuga quiere comerse la hoja; para ello debe seguir el camino que se observa en la figura. ¿Qué distancia en centímetros deberá recorrer?** (si no tienes una regla avísale al profesor)



En el espacio siguiente, escribe la distancia que debe recorrer la tortuga, y explica a qué pusiste atención al medir:

Figura 1: *La pregunta 1 del cuestionario de exploración*

En la Tabla 2 se presentan de manera general los resultados observados en esta pregunta (P1), que centró especial atención en si los estudiantes sabían medir correctamente longitud, mostrando que el 82% lo hace de manera correcta y el 18% restante encontró longitudes diferentes a la distancia pedida que es de 12cm.

Tabla 2: *Las generalidades observadas en la medición de longitud de la pregunta 1 y su entrevista de seguimiento*

CUESTIONARIO (PREGUNTA 1)			ENTREVISTA DE SEGUIMIENTO		
Generalidad	**Total**	**Descripción de la medición de longitud (Ejemplos textuales de los estudiantes)**	**Propósito**	**Pregunta(s) que orientaron la entrevista**	**Respuestas de los estudiantes**
Miden la longitud de manera adecuada Encuentran la longitud exacta 12cm	82 %	"La tortuga tiene que recorrer 12cm" "Debe recorrer 12cm porque con la regla me dió del 0 hasta el 12"	Indagar con mayor profundidad sobre sus estrategias de medición de longitud	N/A	N/A

Encuentran longitudes diferentes	18%	"La distancia es 20 cm, en los dos puntos que había midiendo de extremo a extremo"	Indagar con mayor profundidad sobre sus estrategias de medición de longitud.	¿Cómo hiciste para encontrar la distancia que debía recorrer la tortuga?	De 3 estudiantes entrevistados se concluyó que: ✓ 1 usó una regla rota, midió desde el 7, y no tuvo en cuenta las unidades de medida, solo consideró el número final de la medición (20) ✓ 1 midió con la escuadra y no prestó atención a los cm, sino a las pulgadas que contó ✓ 1 midió desde el uno, y no desde el cero

En cuanto a las demás preguntas (P2, P3, P4, P5 y P6) que centraron especial atención en las estrategias usadas por los estudiantes para contar los cuadritos que cubren los rectángulos dados, y debido a que en su mayoría cada estudiante no siguió un mismo patrón de conteo para cada pregunta, se obtuvo el promedio de cada nivel obtenido en cada una de las 5 preguntas (nivel uno, dos y tres), tal como se puede ver en la Figura 2.

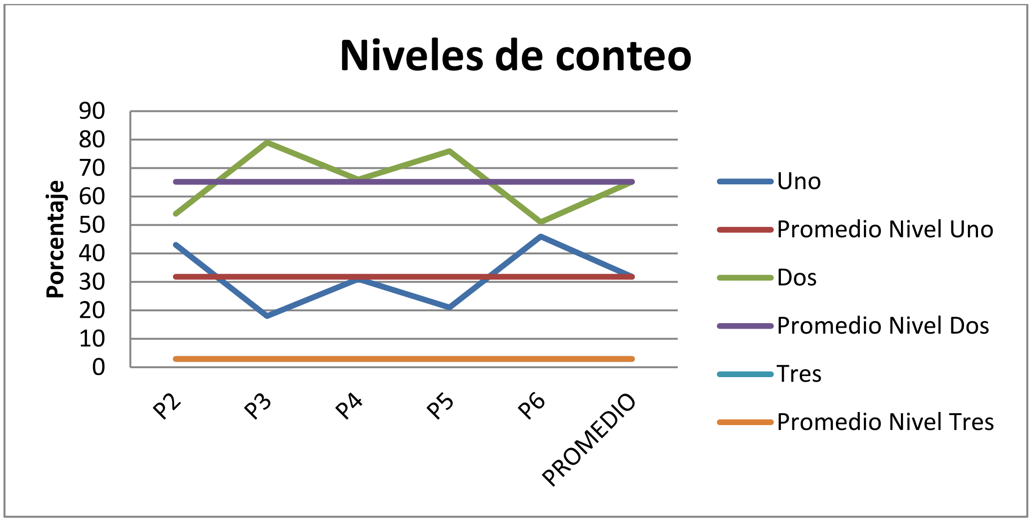


Figura 2: *El porcentaje de los niveles uno dos y tres para cada pregunta (P2 a P6) y el promedio de todas, identificados para el conteo de los cuadritos*

De acuerdo con los resultados observados y el promedio obtenido que dio lugar a los tres niveles de conteo identificados, y como se observa en la Tabla 3, se pueden clasificar las estrategias de conteo tal como se pueden ver, obteniendo que:

Tabla 3: *Los niveles de pensamiento identificados a partir de las preguntas 2, 3, 4, 5 y 6 y su entrevista de seguimiento*

<table>
<tr><th colspan="3">CUESTIONARIO
(PREGUNTAS 2, 3, 4, 5 Y 6)</th><th colspan="4">ENTREVISTA DE SEGUIMIENTO</th></tr>
<tr><th>Nivel / Generalidad: Generalidad: El conteo de los cuadritos que cubren los rectángulos lo hacen…</th><th>Total</th><th>Estrategias de conteo (Ejemplos textuales de los estudiantes)</th><th>Propósito</th><th>Pregunta(s) que orientaron la entrevista</th><th>Descriptores de respuestas de los estudiantes</th><th>Número de estudiantes</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Uno

Contando: “De uno en uno” o “de dos en dos”</td><td rowspan="3">9 Est.

32 %</td><td rowspan="3">“Cuento de 1 en 1”
“Cuento de 2 en 2”</td><td rowspan="3">Indagar con mayor profundidad sobre sus estrategias de conteo.</td><td rowspan="3">¿Podrías contar los cuadritos de una forma distinta o más rápida?</td><td>“Yo contaría de 2 en 2”</td><td>2 de 4</td></tr>
<tr><td>“No veo otra forma de contar”</td><td>1 de 4</td></tr>
<tr><td>“Yo contaría de 4 en 4”</td><td>1 de 4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Dos

- Multiplicando el ancho por el alto, pero no pueden explicar por qué funciona la multiplicación

-Contando por los números de una fila (4 cuadritos) o de una columna (6 cuadritos)</td><td>7 Est.

25 %</td><td>“Multipliqué el ancho por el alto y me dio el resultado”</td><td>Indagar si al multiplicar están relacionando la multiplicación con la estructura espacial de los rectángulos</td><td>¿Por qué si multiplicas ambos números (el ancho por el alto), obtienes el número total de cuadritos?</td><td>“Porque es una forma de obtener el resultado” [no la relaciona con la estructura espacial]”</td><td>2 de 2</td></tr>
<tr><td>10 Est.

36 %</td><td>“Cuento de 4 en 4”
“Cuento de 6 en 6”</td><td>Indagar con mayor profundidad sobre sus estrategias de conteo.</td><td>¿Por qué cuentas en múltiplos de 4 ó 6?

¿Podrías contar los cuadritos de una forma distinta o más rápida?</td><td>“Porque así es más rápido para contar”</td><td>2 de 2</td></tr>
<tr><td>Tres

Mostrando un reconocimiento de la estructura espacial de los cuadritos</td><td>2 Est.

7%</td><td>“Multiplico el ancho y el alto, y me da $6 \times 4 = 24$”</td><td>Indagar con mayor profundidad sobre el conteo de los cuadritos para saber si efectivamente lo están relacionando con la estructura
Espacial</td><td>¿Por qué si haces una multiplicación, puedes obtener el número de cuadritos?</td><td>“Porque es como si sumara el 6 por 4 veces”</td><td>1 de 1</td></tr>
</table>

- ✓ El nivel *uno* con el 32% (9 estudiantes) no reconoce ningún tipo de estructura para el conteo y está vinculado al reconocimiento y uso de una estructura aditiva, ya que cuenta por unidades simples o “de 2 en 2”. A partir de la entrevista de seguimiento se pudo observar que un estudiante pasaría de contar de 1 en 1 a contar de 2 en 2, otro pasaría al nivel *uno “A”* y el otro al *dos*.

- ✓ En el nivel *dos* con el 61% se encuentran 2 grupos:

  - Un grupo con el 25% (7 estudiantes) realiza una multiplicación de los cuadritos del ancho y del alto para contar o encontrar el total de cuadritos. A partir de la entrevista, se observó que 2 estudiantes ven la multiplicación como una forma de obtener el resultado—es decir una forma instrumental de ver la fórmula de área rectangular, pero no la asocia con la estructura espacial.

  - Otro grupo con el 36% (10 estudiantes) agrupa para el conteo los cuadritos por filas o columnas, ya que los cuentan por múltiplos según como los hayan agrupado. A partir de la entrevista realizada, un estudiante seguiría contando por filas, y el otro contaría por filas o columnas, según la agrupación que mayor número de cuadritos tenga (para contar más rápido), ninguno reconocería la estructura espacial.

- ✓ El nivel *tres* con el 7% (2 estudiantes) reconocen la multiplicación relacionándola con la estructura, es decir que observan una suma repetida.

En conclusión, la exploración inicial de las ideas matemáticas de los estudiantes mostró que en general a través del cuestionario, el 82% del grupo de estudiantes sabe medir longitud de forma correcta. Como el 18% del grupo no encontró la longitud correcta, para la secuencia de actividades se consideró necesario prestar atención a este aspecto. Además en general el grupo está distribuido en los tres niveles de pensamiento de forma equitativa, con mayor proporción en para quienes cuentan por filas (36%, 10 estudiantes), seguido de quienes cuentan de 1 en 1 o de 2 en 2 (32%, 9 estudiantes), y luego muy cerca los que multiplican (25%, 7 estudiantes) y solamente el 7% (2 estudiantes) muestra un acercamiento al reconocimiento de la estructura. Esto permitió que para la primera actividad de la secuencia de actividades se centrara la atención en saber qué entienden los estudiantes por medir una longitud y particularmente en los lados de rectángulos.

SECCIÓN 2: Descripción de la secuencia de actividades desarrollada en la Fase 1 del proyecto

La secuencia de actividades desarrollada en la Fase 1 (o estudio piloto) estuvo conformada por cuatro actividades diseñadas teniendo en cuenta los resultados de la exploración de las ideas matemáticas de los estudiantes:

- ✓ Medir longitud
- ✓ Dibujar una cuadrícula y comunicar su estructura,
- ✓ Cubrir un rectángulo, reconocer y comunicar su estructura.
- ✓ Comunicar la estructura espacial

En la Tabla 4, se observan las actividades junto con los propósitos de cada una, así como las tareas que las compusieron. Para el análisis de los pensamientos de los estudiantes, mostrados para cada una de las actividades y en cada uno de los momentos, tuve en cuenta los siguientes focos en los que centré mi atención al momento de la observación del trabajo, y de la recolección y análisis de la información:

- ✓ ¿Qué entienden los estudiantes sobre lo que se les pregunta?
- ✓ ¿En dónde y en qué ponen su atención?
- ✓ ¿Cómo justifican sus afirmaciones, declaraciones y/o generalizaciones?

Por tanto en esta sección se presenta una descripción detallada de los resultados de cada una de las 4 actividades

Tabla 4: *La secuencia de actividades de la Fase 1 y sus propósitos*

ACTIVIDAD	PROPÓSITO	TAREAS
UNO: Medir longitud	Explorar el significado de *medir* para los estudiantes, cuando se involucran en el proceso de medir longitudes. Además apoyar al reconocimiento de las dimensiones del rectángulo y llegar a un acuerdo en la forma de nombrar cada una	Dibujando y construyendo una regla en papel
		Medir la longitud de una lana usando lanas de distintas longitudes como unidad de medida
		Medir la longitud de los lados de un rectángulo y comunicar el nombre de sus dimensiones
DOS: Dibujar una cuadrícula y comunicar su estructura	Observar las estrategias que reconocen los estudiantes al observar y comunicar la estructura espacial de cuadrículas de distintos tamaños	Dibujar y comunicar la estructura espacial de cuadrículas observadas en fichas
		Comunicar una estrategia que permita dibujar la estructura de una cuadrícula cualquiera sin importar su tamaño
TRES: Cubrir un rectángulo, reconocer y comunicar su estructura	Observar los pensamientos que describen y comunican los estudiantes al momento de apoyarlos a que: ✓ Relacionen, las dimensiones de la unidad de medida (unidad cuadrada) con las del rectángulo, sin necesidad de dibujarlas. ✓ Reconozcan y comuniquen de manera general su estructura espacial	Encontrar el número de cuadritos necesarios para cubrir dos rectángulos dados (sin necesidad de cubrirlos) y explicar cómo lo encontraron
		Describir lo que se observa y el número de cuadritos que cubren 3 rectángulos que donde varia el número de filas y 3 donde varia el número de columnas
		Encontrar el número de cuadritos necesarios para cubrir dos rectángulos dada la medida de sus dimensiones (sin necesidad de dibujarlos) y explicar cómo lo encontraron
		Encontrar una estrategia que permita encontrar el número de baldosas que cubren un rectángulo de cualquier tamaño usando una ventana en Geogebra
CUATRO: Comunicar la estructura espacial	Apoyar la comunicación de la estructura de la estructura espacial en el contexto de medición de área	Comunicar "por teléfono" la estructura espacial de dos cuadrículas
		Observar las formas de comunicación de medición de área

ACTIVIDAD UNO: Medir longitud

Para la Actividad 1 se diseñaron las tres tareas que se observan en las Figuras 2, 3 y 4, destinando un total de 90 minutos de clase para su trabajo con el propósito de explorar el significado de medir para los estudiantes:

Tarea 1: Dibujando y construyendo una regla en papel

La actividad pedía que pintaran una regla en una tira de papel, y estuvo conformada por dos momentos; el primero en el que lo hacen individualmente y la segunda en la que debían hacerlo por parejas; en cada caso se les pide que describan lo que van pensando y a qué ponen atención al momento que la van pintando (ver la Figura 3).

1. Se les entrega a los estudiantes de manera individual una tira de papel blanca en forma de rectángulo de 27,9 cm $\times$ 3 cm:

   Y se les pide que en esa tira de papel pinten una regla. Por el respaldo deben explicar cómo la pintaron.

2. Luego se les entregó en parejas a los estudiantes una tira de papel idéntica a la del trabajo individual (punto 1) y se les pidió que en ella pinten la regla y por el respaldo expliquen cómo la pintaron

Figura 3: *La Tarea 1 de la Actividad 1*

Del trabajo individual se pudo concluir que un 68% del grupo prestó atención a ubicar los cm y los milímetros que dibujan, teniendo en cuenta que para dibujar los milímetros o los centímetros se debe tener en cuenta que la distancia (o unidad de medida que estimaban) entre ellos debe ser la misma. Mulligan & Mitchelmore (2012) definen este pensamiento como un pensamiento *estrcutural*, ya que los niños reconocen la generalidad de la estructura (repetir una misma unidad de medida). Por su parte, el 32% restante de los estudiantes se ubica en un nivel de pensamiento *estructural parcial* al representar correctamente la estructura de la regla, pero no la comunican de manera adecuada, ya que prestan principalmente a los nombres de los centímetros o milímetros, pero no preponderaban la importancia de que haya la misma unidad de medida entre ellos

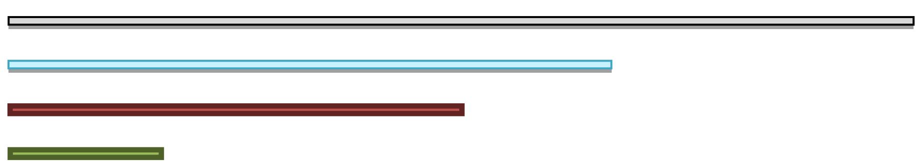
En el trabajo en parejas se logró observar conclusiones similares al trabajo individual, a diferencia que un grupo manifestó que pusieron especial atención a la decoración (muestra de un pensamiento *pre-estructural*), ya que gracias al trabajo individual ya sabían cómo pintar la regla, sin embargo luego del trabajo en grupo fueron reconociendo que la unidad de medida debía ser igual para los centímetros y los milímetros que dibujaban, al igual que los demás grupos, en lo que se observó un trabajo colaborativo. Finalmente luego de la socialización en el tablero de la actividad surgieron las mismas ideas que manifestaron de manera individual, concluyendo que era necesario usar la misma unidad de medida; para ello los niños usaron la "tapa del esfero", otro los "dedos", los "lápices", "borradores", u objetos para mostrar cómo replicarían las unidades para construirlas iguales.

En conclusión, a pesar que las reglas quedaron distintas y en todas las unidades de medida para la construcción fueron diferentes, los estudiantes comunicaron la necesidad que para poder pintar la regla era necesario que la unidad de medida empleada para dibujar los centímetros o milímetros debía ser la misma.

Tarea 2: Medir la longitud de una lana usando lanas de distintas longitudes como unidad de medida

Para esta situación se plantearon algunas preguntas para observar qué describen los niños por medir, como se observa en la Figura 4:

1. Luego se les entregarán cuatro tiras de lana de 3cm (Verde), 9cm (Roja), 12cm (Azul) y 18cm (Blanca) de longitud



Y se les entregará una hoja con las siguientes preguntas:

- ¿Puedes medir la longitud de cada una de las lanas, usando la lana verde?
- ¿Cuánto mediría cada una?
- Y, ¿qué otras lanas puedes usar para medir la longitud de las demás?
- ¿Para ti, en qué consiste el proceso de medir longitudes?

Figura 4: *La Tarea 2 de la Actividad 1*

Ante la pregunta: *¿Puedes medir la longitud de cada una de las lanas, usando la lana verde?,* el 100% responde que sí. Luego, ante la pregunta: *¿Cuánto mediría cada una?,* se pueden observar dos grupos; El primer grupo con un 82% usa la iteración de la unidad de medida para medir las demás, es decir la lana verde. Para ello afirman que compararían la unidad de medida con las demás lanas que buscan medir. De este grupo, el 53% se ubican en el nivel de pensamiento de *estructura parcial,* ya que reconocen las características más relevantes de la estructura, pero sus representaciones son inexactas o incompletas, teniendo en cuenta que relacionan la medida de la lana con su dedo pulgar y miden con el dedo, por lo que afirman que usarían pulgadas, y otro grupo de estudiantes estima que la lana mide 3cm (lo cual concidencialmente es cierto), por tanto comparan cuantas veces cabe la lana en las demás y encontrando múltiplos de 3 llegarían a la medida buscada. Por su parte el 29% restante iterarían la lana verde y observarían cuantas veces caben en las demás, es decir que reconocen la generalidad de la estructura, ubicándose en el nivel de pensamiento *avanzado*.

En cuanto al segundo grupo conformado por el 18% restante, el 4% estimaría de manera visual o "a ojo" cuántas veces cabe la lana verde en las demás, el 7% afirma que la lana verde mide 1cm y de allí pude comparar y medir las demás y el otro 7% doblaría las lanas que quiere medir el número de veces que sea necesario para llegar hasta la medida de la lana verde, quienes se ubican en los niveles *emergente, estructural parcial* y *avanzado* respectivamente.

Ahora, frente a la pregunta: *¿Cuánto mide cada una?,* el 100% responden de manera acertada, incluso quienes estiman la medida, además el resultado de la medición de cada lana está relacionado con la forma en que midieron, es decir quienes compararon la unidad de medida con las demás lanas afirmaron que la verde cabe en la roja 3 veces, en la azul 4 y en la blanca 6 veces respectivamente, hecho al que también llegaron los estudiantes que doblaron la lana hasta llegar a la unidad de medida. Los que midieron con el dedo igualmente encontraron este número de veces y los que midieron iterando los centímetros, encontraron las medidas directamente que son de 9cm, 12cm y 18cm en cada caso. Y para la pregunta que busca indagar sobre lo que piensan sobre medir: *¿Para ti, en qué consiste el* *proceso de medir longitudes?*, el 61% afirma que es encontrar la distancia entre dos puntos, el 25% dice que es el proceso de sumar una misma unidad de medida, es decir iterar, ubicándose en un pensamiento *estructural* y el 14% restante afirma que es comparar lo que se busca medir con lo que se mide, ubicándose en un nivel de pensamiento *avanzado*.

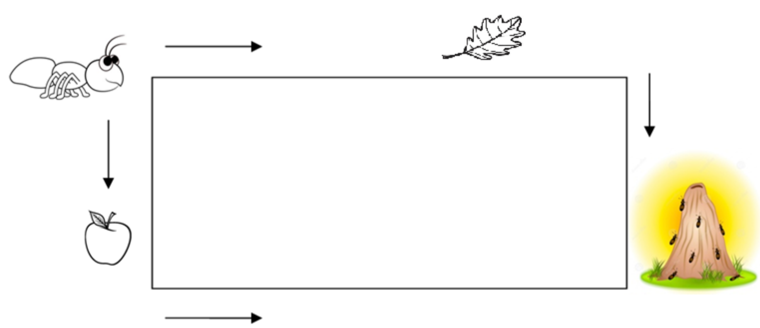
En conclusión se pudo observar, a partir de la actividad de medir con las lanas, que para los estudiantes el proceso de medir tiene que ver con crear estrategias donde "iteran" una misma unidad de medida, y la relacionan con procesos como "sumar", "comparar", o con "encontrar la distancia" entre dos puntos.

Tarea 3: Medir la longitud de los lados de un rectángulo y comunicar el nombre de sus dimensiones

Las preguntas que guiaron la tarea 3 (Figura 5) buscaban observar si median adecuadamente longitud con la regla y que reconocieran las dimensiones del rectángulo

La "hormiguita"

Para llegar a su hormiguero, la hormiga solo puede seguir dos caminos como indican las flechas. Un camino es la línea por donde está la hoja y el otro es la línea por donde está la manzana. ¿Cuál camino sería más corto? Y ¿Por qué lo puedes afirmar?



Para la parte dos se usará la situación de la hormiga. Para ello se les preguntará:

- ✓ ¿Qué recorrido hace la hormiga cuando sigue el camino por el que está la hoja?
- ✓ ¿Qué recorrido hace la hormiga cuando sigue el camino por el que está la manzana?
- ✓ ¿Qué tienen en común los dos recorridos?

Figura 5: *La Tarea 3 de la Actividad 1*

En esta actividad el 93% de los estudiantes encontraron de manera correcta la distancia del recorrido (alrededor del rectángulo) entre la hormiga y el hormiguero que es de 13cm, además afirmaron que ambos recorridos tienen la misma medida. Solo el 7% pensó en que podría ser diferentes, teniendo en cuenta que la hormiga no llegaba a la base del hormiguero, sino que por el recorrido saltaría directamente a este.

A partir de la socialización surgieron distintas formas de nombrar el ancho del rectángulo como "lo horizontal", el recorrido hacia "adelante" o hacia "el lado", pero cuando se les pregunta por la figura que describe los recorridos, fácilmente afirman que es un rectángulo y al preguntarles por la forma como se ubican sus lados, lograron asociar lo horizontal con el ancho y lo vertical con el largo, elemento necesario para trabajar más adelante con la estructura de los arreglos rectangulares por filas o columnas.

A partir del desarrollo de la Actividad 1, los niveles de pensamiento identificados luego de cada tarea se resumen en la Tabla 5:

Tabla 5: *Los niveles de pensamiento identificados en la Actividad 1*

	ACTIVIDAD UNO : MEDIR LONGITUD (Tareas)		
Tarea / Nivel	**1**	**2**	**3**
Estructural	**68%** Afirman que "La distancia entre cm o mm debe ser la misma", es decir reconocen la importancia de usar la misma unidad de medida	**36%** Comparan la unidad de medida, y la iteran de manera general observando el número de veces que se itera	**93%** Encuentran la distancia adecuada del recorrido entre la hormiga y el hormiguero
Estructural parcial	**32%** Prestan atención a los cm y mm que dibujan, mas no a la importancia de usar la misma unidad de medida	**50%** Comparan la unidad de medida, e iteran de manera particular, asignando valor numérico a la unidad **10%** Reconocen la generalidad de la estructura, pero usan el dedo para medir "la pulgada"	**7%** Miden inadecuadamente longitud, estiman la medida
Emergente		**4%** Estimaría la medida visualmente, ignorando la necesidad de usar lanas	

Teniendo en cuenta los resultados de la Actividad 1, se prosigue con la Actividad 2, pensando en observar las estrategias que reconocen los estudiantes al observar y comunicar la estructura espacial de cuadrículas de distintos tamaños

ACTIVIDAD DOS: Dibujar una cuadrícula y comunicar su estructura

Para la actividad 2 se diseñaron las dos tareas que se observan en las Figuras F5 y F6, destinando un total de 90 minutos de clase para su trabajo, con el propósito de observar las estrategias que reconocen los estudiantes al observar y comunicar la estructura espacial de cuadrículas de distintos tamaños y una posible forma general.

Tarea 1: Dibujar y comunicar la estructura espacial de cuadrículas observadas en fichas

En la Tarea 1, se trabajó por parejas en la comunicación de la estructura de las dos cuadrículas propuestas una **A** $(\mathbf{4} \times \mathbf{3})$ y una B de $(\mathbf{2} \times \mathbf{4})$ para lo cual se dio 5 segundos para recordar cada cuadrícula. Este trabajo se realizó en parejas. A cada estudiante se le entrega una ficha, cada una con una cuadrícula como se observa en las Figura 6:

Ficha estudiante A **Ficha estudiante B**

[Cada estudiante le mostrará la ficha a su compañero (en un tiempo no mayor a 5 segundos) y en cada caso se les preguntará:]

- ✓ Dibuja la cuadrícula que te mostró tu compañero
- ✓ ¿Cómo hiciste para recordar y poder dibujar la cuadrícula?

Figura 6*:* *La Tarea 1 de la Actividad 2*

El 100% de los estudiantes dibujó cada cuadrícula correctamente, y se pudo identificar 5 estrategias que describen los estudiantes para recordarla y dibujarla. Dentro de ellas está el de recordar el número de unidades horizontales y verticales con un 36%, el de recordar el número de unidades a lo ancho y a lo alto con el 28%, el 14% que muestra el arreglo expresado como una multiplicación, el 11% que recuerda el número de unidades por filas y el 11% restante que recuerda las unidades por filas y columnas

En este sentido, se puede afirmar que en general el grupo reconoce la estructura de los arreglos como conjuntos de filas y columnas, y al momento de comunicarla solamente el 22% hace alusión a filas y columnas o replicando el número de unidades de la fila, por su parte el 78% relacionan la cantidad de unidades de una fila con el ancho o lo horizontal y el número de filas con el alto o lo vertical, o la expresan a través de una multiplicación. En general se puede concluir que el grupo se ubica en un nivel de pensamiento *estructural parcial*, ya que reconocen y describen los arreglos como conjuntos de filas o columnas, pero no reconocen la organización ortogonal bidimensional.

Tarea 2: Comunicar una estrategia que permita dibujar la estructura de una cuadrícula cualquiera sin importar su tamaño

Esta tarea (ver Figura 7) fue similar a la Tarea 1, pero centrada en la comunicación de la estructura de una cuadricula sin importar su tamaño. Inicialmente debían observar la estructura de las cuadriculas A $(\mathbf{3} \times \mathbf{2})$ y B $(\mathbf{3} \times \mathbf{3})$.

Este trabajo se realizará en parejas. A cada estudiante se le entregará una ficha cada una con una cuadrícula como se observa en las figuras siguientes:

Ficha estudiante A **Ficha estudiante B**

[Cada estudiante le mostrará la ficha a su compañero (en un tiempo no mayor a 5 segundos) y en cada caso se les preguntará:]

- ✓ ¿Cómo hiciste para recordar y poder dibujar la cuadrícula?
- ✓ ¿Qué estrategia usarías para recordar y poder dibujar una cuadrícula que te muestren en otra ficha, sin importar su tamaño?

Figura 7*:* *La Tarea 2 de la Actividad 2*

En esta actividad el 100% de los estudiantes dibuja las cuadrículas correctamente, sin embargo al momento de comunicar la estrategia que usaron para recordarlas y dibujarlas hablan del ancho y del alto, sin hacer alusión a la estructura, sino a la memorización de lo que observan, y a que "la recordaron muy bien para poderla dibujar". Dentro de las distintas las maneras de recordarlas, se encuentran respuestas textuales como: el 25% indican que "me fijaría en las filas y las columnas para poder dibujarlas", el 17% afirma que "yo contaría las filas y las columnas y así la recuerdo", el 11% dice "yo miraría las unidades de la primera fila y la primera columna y así la dibujo", y el 4% restante dice "yo recordaría las unidades horizontales que son filas y las verticales que son columnas". Por su parte el 29% describe "yo me memorizo el ancho y el alto y así la puedo dibujar", y el 14% lo describen como una multiplicación, es decir "yo multiplico el ancho por el alto, por ejemplo la primera Figura es de 3×2 y así haría con las demás"

Las estrategias comunicadas por los estudiantes al finalizar esta Actividad me permitieron observar que no identificaron y comunicaron la estructura como yo esperaba, por ejemplo al entrevistar algunos estudiantes que les preguntaba que por qué una multiplicación servía para describir la organización de los cuadritos en la cuadrícula para dibujarlos, me manifestaban que "porque era una forma rápida de hacerlo y porque daba el mismo resultado que si contaban los cuadritos uno por uno", es decir que estaban viendo una forma rápida para encontrar el resultado, algo operacional, pero no observaban formas eficaces para el conteo basadas en la identificación de filas o columnas—su estructura. Además mi forma de guiar la Actividad, tampoco me permitió generar conciencia en que fijaran atención en elementos fundamentales de la estructura como la agrupación de los cuadritos por filas o columnas y la forma como estas se relacionan para el cubrimiento.

En conclusión, y pese a las diversas estrategias empleadas y descritas por los estudiantes, el 100% se ubica en un nivel de pensamiento *estructural parcial*, teniendo en cuenta que: El 58% relaciona el ancho de la cuadrícula con las filas y el alto con las columnas, sin embargo no las usa de forma relacionada para describir el cubrimiento del rectángulo u organización ortogonal. El 29% cuentan los cuadros de los lados solo para recordar el ancho y el alto, y el 14% restante señalan que una "multiplicación del ancho por lo alto" les permite recordar la cuadrícula para dibujarla. De esta manera, se continúa el proceso con la Actividad 3, diseñada con el propósito de observar los pensamientos que describen y comunican los estudiantes al momento de apoyarlos a que relacionen, las dimensiones de la unidad de medida (unidad cuadrada) con las del rectángulo, sin necesidad de dibujarlas, y además, que reconozcan y comuniquen de manera general su estructura espacial

ACTIVIDAD TRES: Cubrir un rectángulo, reconocer y comunicar su estructura

Para la actividad tres se diseñaron las cuatro tareas que se observan en las Figuras 8, 9, 10 y 11, destinando un total de 340 minutos de clase (3 sesiones de clase) para su trabajo:

Tarea 1: Encontrar el número de cuadritos necesarios para cubrir dos rectángulos dados

La tarea se diseñó con el propósito de que asociaran la medida de las dimensiones de la unidad con la de las dimensiones de un rectángulo. Allí se pide que indiquen el número de baldosas que cubren cada rectángulo sin necesidad de dibujarlas (Figura 8).

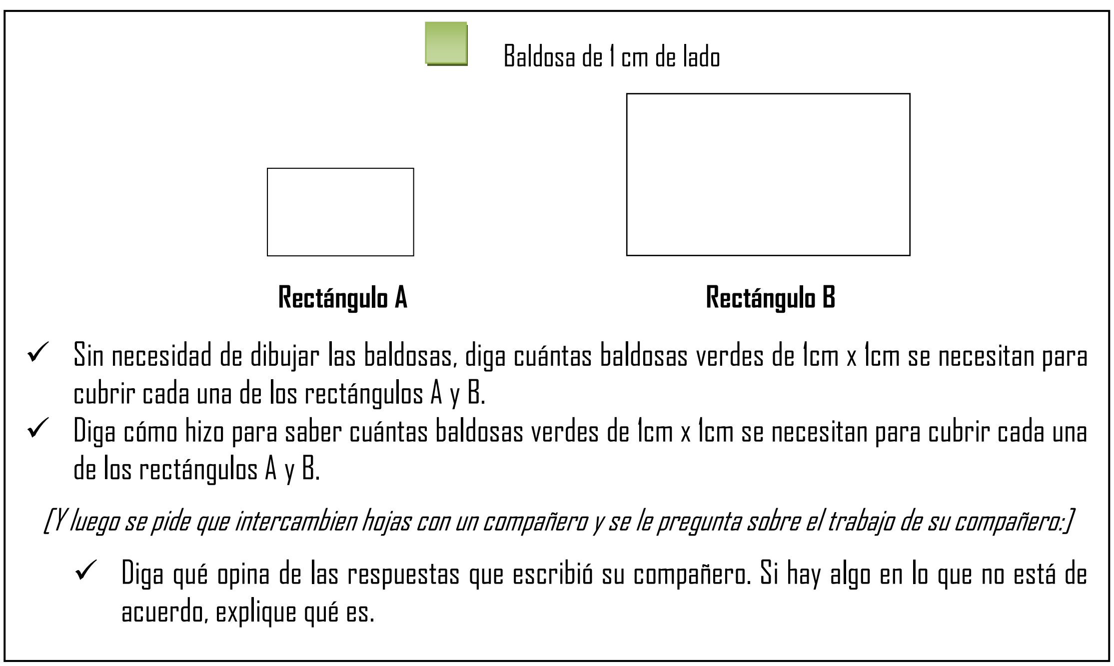


Figura 8: *La Tarea 1 de la Actividad 3*

En cuanto a cómo lo hicieron, son distintas las formas que comunicaron para encontrar el total de baldosas: el 46% afirma que multiplicaría para encontrar el total de unidades, para lo cual debían medir el ancho y el alto de los rectángulos, el 21% indicaron que relacionaron el número de unidades con cada fila, el 11% tendría en cuenta el número de filas y de columnas, el 7% afirman que calcularon las unidades en una fila y contaría por múltiplos teniendo en cuenta el número de filas, al igual que otro 7% que miraría las columnas y las unidades en ellas, un 4% miraría la primera fila y la primera columna y el último 4% que estimaría el total de unidades.

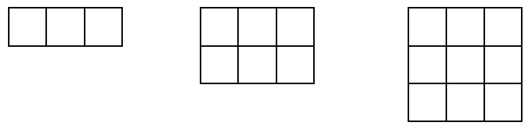
De los resultados de la Tarea 1 se puede observar cómo son dos formas de pensamiento las que presentan los estudiantes; por una parte con el 96% el nivel de pensamiento *estructural parcial*, con el 50% de los estudiantes que reconocen la estructura del arreglo como un conjunto de filas y columnas, y que escriben los arreglos usando esos términos (filas y columnas), otro grupo que básicamente hace una multiplicación de las medidas del ancho y el alto para encontrar el total de unidades (46%), y, por otra parte, el grupo del 4% que se ubica en un nivel *emergente* que estimaría el total de unidades.

Tarea 2: Describir lo que se observa y el número de cuadritos que cubren 3 rectángulos que donde varía el número de filas y el número de columnas

Esta tarea presenta una secuencia de rectángulos en la que se varía una dimensión (número de cuadritos en filas o número de filas), mientras la otra permanece constante, con el propósito de observar qué generalidad(es) logran visualizar (ver Figura 9)

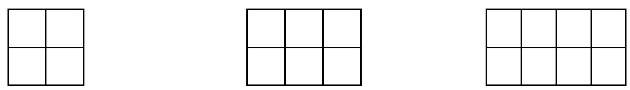
En esta actividad, en la primera parte todos los estudiantes reconocen que el tamaño del alto varía, algunos lo asocian con el número de unidades por fila, otros lo expresan como "lo alto", u otros hacen la descripción de que aumenta a la "parte inferior" del rectángulo. Para encontrar el número de unidades de cada figura, el 50% muestra cómo a medida que aumenta el alto, ven fácilmente que estas aumentan en múltiplos de 3, el 35% muestran que para encontrar el total de unidades multiplican el ancho por el alto, un 10% al ver que el ancho es contante, multiplicarían 1, 2 o 3 por el "3" que permanece constante y el 5% muestra una multiplicación para encontrar las unidades.

Observa la siguiente secuencia de rectángulos. Pensemos que los cuadritos pequeños, dentro de cada rectángulo, son baldosas que los cubren.



- ✓ Describe de manera detallada todo lo que observas en la secuencia de rectángulos.
- ✓ ¿Cómo haces para encontrar el número de baldosas de cualquiera de los 3 rectángulos? Explica completamente.

La secuencia de rectángulos, ahora es así:



- ✓ Describe de manera detallada todo lo que observas en esta secuencia de rectángulos.
- ✓ ¿Cómo haces para encontrar el número de baldosas de cualquiera de los 3 rectángulos? Explica completamente.

Figura 9: *La Tarea 2 de la Actividad 3*

En la segunda parte, de igual manera los estudiantes reconocen que también varía el tamaño, pero en este caso es más fácil para los estudiantes ver cómo varía el ancho, ya que lo describen en términos de ancho, o de columnas a la derecha. Para encontrar el número de unidades de cada figura, se mantiene una relación con las formas de conteo para encontrar el número de unidades de cada figura que usaron para la primera parte.

En este sentido, se pudo observar que el 100% de los estudiantes usa estrategias de conteo que involucran el reconocimiento de una estructura *parcial* de los arreglos rectangulares, ya sea multiplicando el ancho por el alto o contando por filas o columnas a partir de los múltiplos.

Tarea 3: Encontrar el número de cuadritos necesarios para cubrir dos rectángulos, dada la medida de sus dimensiones

En la tarea deben relacionar la medida de la unidad con las dimensiones de dos rectángulos en las que no pueden hacer la representación espacial y deben reconocer la cantidad de cuadritos que los recubren (Figura 10).

Sin necesidad de dibujar, escribe cuantas baldosas de $1cm \times 1cm$ como la que se observa en la figura, se requieren para cubrir algunos rectángulos que tienen las siguientes dimensiones:

A. 4 cm de ancho y 2 de alto
B. 3 cm de ancho y 4 de alto

✓ Explica claramente cómo hiciste para encontrar el número de baldosas de cualquiera de los 2 rectángulos anteriores A y B.

[Luego se pide que intercambien hojas y respondan:]

✓ Diga qué opina de las respuestas que escribió su compañero. Si hay algo en lo que no está de acuerdo, explique qué es.

Figura 10: *La Tarea 3 de la Actividad 3*

En esta actividad cabe resaltar que el 100% de los estudiantes logran reconocer de manera correcta la cantidad de baldosas que cubren cada uno de los rectángulos, es decir 8 baldosas el rectángulo A y 12 en el rectángulo B. En cuanto a las estrategias, el 11 % hace alusión a relacionar la unidad con el número de cuadritos que hay en la fila y en la columna, en la que afirman hacer una representación mental de la situación pensando en los cuadritos que los cubren. Por su parte el 64% afirma que deben multiplicar el ancho por el alto teniendo en cuenta que son las medidas de los lados alto y ancho de los rectángulos.

De esta actividad se puede ver que el grupo se ubica en un nivel de pensamiento *estructural parcial*, teniendo en cuenta que el 11% trata de relacionar la unidad con las dos dimensiones del rectángulo, ya sea por filas o por columnas, sin embargo no reconoce, o describe la estructura los rectángulos, y el 89% restante solucionan correctamente la situación, pero lo hacen mediante una multiplicación (de manera instrumental) y no hacen alusión a la estructura presente.

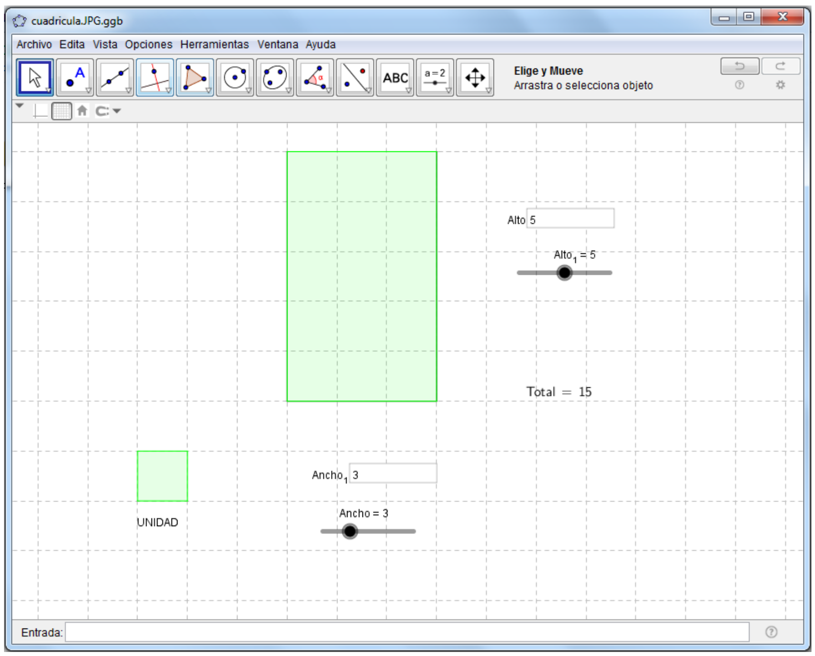
Tarea 4: Encontrar una estrategia que permita encontrar el número de baldosas que cubren un rectángulo de cualquier tamaño usando una ventana en Geogebra

En la Tarea 4 se pretendía que los estudiantes, de manera general, pudieran comunicar cómo encontrar el número de unidades cuadradas que cubren un rectángulo, sin importar su tamaño. Para ello se diseñó una ventana en Geogebra con un rectángulo en el que podían variar la dimensión ancho y la dimensión alto con un deslizador, a medida que este iba quedando cubierto por unidades cuadradas. La Ventana y la Tarea 4 se pueden observar en la Figura 11.

La Tarea 2

[Primero se les explicará la generalidad del applet, en el que deben mover el deslizador de ancho o alto según la dimensión que quieran variar, o sencillamente ubicar el número en las casillas de entrada]

- ✓ Describan qué pasa si mueven solo el deslizador ancho
- ✓ Describan qué pasa si mueven solo el deslizador largo
- ✓ ¿Cómo harían para encontrar el número total de baldosas de un rectángulo de cualquier tamaño?



[Para terminar la actividad, se le pedirá a cada grupo que lea sus respuestas a todo el curso, buscando socializar las distintas opiniones dadas por sus compañeros]

- ✓ Luego de escuchar a sus compañeros, ¿cambiarían alguna de sus respuestas?
- ✓ Expliquen cuál o cuáles y digan por qué.

Figura 11: *La Tarea 4 de la Actividad 3*

En conclusión se puede observar que los estudiantes se ubican en un nivel de pensamiento *estructural parcial* al finalizar esta tarea, clasificados en dos grandes grupos según sus estrategias; el primero con el 8% habla del número de unidades en el alto y en el ancho, sin embargo no hablan de la fila como unidad que permita cubrir el rectángulo. Por su parte el restante 92% ven la necesidad de "medir" los lados del rectángulo, para multiplicar las dos longitudes, haciendo un manejo operacional o instrumental para el conteo de las baldosas, sin comunicar estructura espacial.

Finalmente los niveles de pensamiento identificados en la Actividad 3 se resumen en la Tabla 6:

Tabla 6: *Los niveles de pensamiento identificados en la Actividad 3*

	ACTIVIDAD 3: CUBRIR UN RECTÁNGULO, RECONOCER Y COMUNICAR SU ESTRUCTURA			
Tarea / Niveles	1	2	3	4
Estructural parcial	**50%** Comunican la estructura del arreglo en términos de filas y columnas **46%** Comunican la estructura como una multiplicación	**60%** Ven la variación de las cuadrículas por filas o columnas a partir de múltiplos **40%** Expresan la estructura de cualquier cuadrícula como una multiplicación	**11%** Comunican la estructura del arreglo para justificar el total de unidades **89%** Comunican la estructura como una multiplicación	**8%** Comunican la estructura de un arreglo de cualquier tamaño relacionando la unidad con el rectángulo **69%** Comunican la estructura del arreglo en términos de ancho y alto **23%** Comunican la estructura del arreglo, pero ven la necesidad de medir
Emergente	**4%** Cuentan de manera no sistemática			

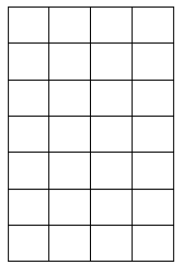
ACTIVIDAD CUATRO: Comunicar la estructura espacial

En vista que los estudiantes no comunicaban la estructura espacial, esta actividad se centró en apoyar y observar si finalmente lograban comunicarla. Para ello se plantearon dos tareas que se pueden ver en las Figuras 12 y 13.

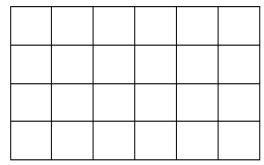
Tarea 1: Comunicar "por teléfono" la estructura espacial de dos cuadrículas

En esta tarea se les pide a los estudiantes que describan como si estuvieran hablando "por teléfono" la estructura de las cuadrículas A y B (ver Figura 12).

1. Suponga que va a llamar por teléfono a su mejor amigo para hacer una tarea, y necesita describirle completamente las siguientes cuadrículas para que las dibuje:



Cuadrícula A



Cuadrícula B

Descríbalas de manera que su amigo las pueda dibujar correctamente

2. Dibuje las siguientes cuadrículas, e indique cuantos cuadritos tiene cada una:

a. 3 filas y 6 columnas

b. 8 columnas y 5 filas

Figura 12: *La Tarea 1 de la Actividad 4*

A partir de la primera pregunta se encontró que el 61 % describe la estructura de la cuadrícula como un conjunto de filas y columnas, por su parte el 25% lo describe como una cuadrícula compuesta por cuadritos a lo ancho y a lo alto, y el 14% lo describe como un "rectángulo con un número de cuadros", ignorando comunicar la forma como se organizan en las dos dimensiones del rectángulo.

En este sentido, se puede asociar el 86% a un nivel de pensamiento *estructural parcial*, teniendo en cuenta que a pesar que reconocen filas y columnas, no reconocen la relación ortogonal entre ellas, y el 14% restante a un pensamiento emergente, ya que al tener que comunicar la estructura, no la relacionan con las dimensiones de la cuadrícula, ignorando la organización bidimensional.

Las cuadrículas que se pide que dibujen lo hacen adecuadamente, sin embargo para contarlos ninguno comunica la estructura, solamente muestran el resultado sin decir cómo lo obtienen (54%) y los que describen afirman que "multiplicando".

Tarea 2: Observar las formas de comunicación de medición de área

Antes de empezar la tarea se les dijo a los estudiantes que cuando cubren la superficie de un rectángulo con baldosas cuadradas la están comparando, es decir que la están midiendo; ahora cuando encuentran el número de esas baldosas que cubren la superficie están encontrando el "área del rectángulo". Luego se les entrega la tarea en una hoja (ver Figura 13) con el propósito de observar si efectivamente reconocían y comunicaban la estructura en ese contexto de medición de área.

1. ¿Cómo encontrarían el área total de una superficie que tenga forma rectangular, sin importar su tamaño?
2. Expliquen por qué es cierta la afirmación que han hecho
3. ¿Cuál sería el área del siguiente rectángulo? [Se entrega un rectángulo de $6cm \times 5cm$]

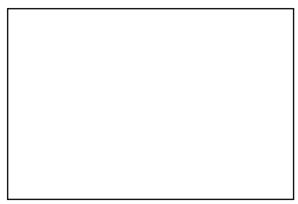


Figura 13: *La Tarea 2 de la Actividad 4*

A partir de la primera pregunta se encontró que el 14% reconoce y centra su atención en el número de cuadritos en la fila y en la columna para multiplicarlos y encontrar el área, el 62% relacionan los cuadritos con el ancho y el alto para luego multiplicar las cantidades, sin hacer manifiesta la identificación o comunicación de filas o columnas; ambos grupos se pueden ubicar en un nivel de pensamiento *estructural parcial.* Por su parte el 24% centran su atención en la medida de las longitudes ancho y alto, que luego multiplican para encontrar el área, sin hacer alusión a la relación de la unidad cuadrada con el cubrimiento total, ubicándose en un nivel *emergente*.

En la pregunta 2 todos comunican que la afirmación es cierta porque "si multiplican encuentran el resultado" (38%), porque "es una manera rápida en cambio de contar uno por uno" (14%), porque "es igual a como lo han hecho durante las clases anteriores" (refiriéndose a las Tareas de esta Fase 1) (28%) y porque "cuando se multiplican las filas por las columnas se encuentra el total" (20%). En la pregunta 3 el 100% encontraron el número correcto de unidades, sin embargo el 28% dijo que el área serían “30 cuadritos”, el 24% solo dijo “30” y el 48% dijo “30 cm”, hechos que vislumbran un manejo puramente operacional de la fórmula de área rectangular.

Los niveles de pensamiento identificados en la Actividad 4 se resumen en la Tabla 7:

Tabla 7: *Los niveles de pensamiento identificados en la Actividad 4*

	ACTIVIDAD 4: COMUNICAR LA ESTRUCTURA ESPACIAL	
Tarea / Niveles	**10**	**11**
Estructural parcial	**61%** Comunican la estructura de un arreglo en términos de las dimensiones de un rectángulo por filas y/o columnas **25%** Comunican la estructura de un arreglo en términos de una cuadrícula	**14%** Observan la generalidad de un cubrimiento de filas o columnas compuestas por cuadritos. Expresan la generalidad en términos de una “multiplicación” como “multiplico el número de cuadritos de la fila por el número de cuadritos de la columna” **62%** Comunican la generalidad para encontrar el área en términos de una “multiplicación” como “multiplico los cuadritos a lo ancho por los cuadritos a lo alto”
Emergente	**14%** Comunican la estructura de un arreglo, sin mencionar rectángulo ni cuadrícula.	**24%** No logran comunicar claramente su idea de medición de área, ni en qué elementos de la estructura fijan su atención. Se acercan a la fórmula de área afirmando “multiplicando el ancho por el alto”

RESUMEN

En este apéndice se presentó y describió el proceso desarrollado por los estudiantes a partir de las 4 Actividades diseñadas e implementadas con el propósito de apoyar en la identificación de la estructura espacial en la Fase 1 del proyecto. Al final del proceso se puede concluir que en general el grupo de estudiantes no identificó la estructura espacial, teniendo en cuenta que ninguno de ellos progresó más allá del nivel estructural parcial y que la estrategia común que fue comunicada por ellos para describir la estructura fue “multiplicar el ancho por el alto” o “multiplicar las filas por las columnas”, sin haber una concientización clara de la identificación de fila como una nueva unidad compuesta que se usa para cubrir el rectángulo, ni de la organización ortogonal de los cuadritos en una cuadrícula.

Resultados y reflexiones de la Fase 1

Luego del desarrollo de la secuencia de actividades, y particularmente luego de la Tarea 2 de la Actividad 4 (actividad final), en la que se pide a los estudiantes “una forma” de encontrar el área de una superficie rectangular, sin importar su tamaño, se puede concluir que el 76% se ubicó en un nivel de pensamiento *estructural parcial*. De este grupo solamente el 14% logró relacionar las dimensiones del rectángulo con el número de unidades de la fila y la columna, para luego multiplicar los números, sin embargo no muestran una relación entre el número de unidades de la columna y el número de filas. Por su parte el 62% usan los cuadritos de las dimensiones “alto y ancho” para multiplicarlos y así encontrar el total de cuadritos, sin embargo no relacionan los cuadritos con la composición de filas o columnas, ni con la estructura espacial. Por otra parte el 24% fija su atención en los números que representan las longitudes de los lados y los multiplican, ubicándose así en un nivel *emergente*.

De esta manera, el desarrollo y puesta en acción de la Fase 1 me llevó a tener las siguientes conclusiones:

1. Los resultados identificados en la Tarea 2 de la Actividad 4, y en general a lo largo de la secuencia de actividades, muestran la poca efectividad de la secuencia de enseñanza, ya que los pensamientos comunicados por los estudiantes mostraron que estaban alejados del foco de atención del proyecto, esto lo pude observar en la presentación de sus respuestas, lo que para mí fueron sus pensamientos, en los que mostraron un dominio netamente *instrumental* de la fórmula de área; ya que al buscar que comunicaran la estructura espacial lo hacían de forma instrumental a partir de estrategias como “multiplico los cuadritos del ancho por los cuadritos del alto” y “multiplico el ancho por el alto”, resaltando que ninguno de ellos mostró la identificación de la estructura espacial o multiplicativa inmersa en cuadrículas rectangulares vista como una agrupación de cuadritos o unidad compuesta (fila) que se itera o repite para cubrir el rectángulo. Esto considero se debió a la falta de una adecuada creación de ambientes de aprendizaje que los apoyara a construir y comunicar la estructura, debiéndose a factores como:

- La forma como formulé las preguntas de la secuencia en términos de “Diga cuántas baldosas se necesitan…”, de “Escriba cuántas baldosas se requieren…” o de “¿Cómo haces para encontrar el número de baldosas…?”; giraron en torno a “cuántos”, es decir al *cómo,* lo cual los llevó a comunicar la estructura de la fórmula desde un enfoque más *instrumental*, y no relacional como se pretendía o esperaba
- La cantidad de tareas desarrolladas fue muy numerosa y poco pertinentes, ya que queriendo abarcar mucho profundizaron poco en el foco de atención del proyecto, desviándome de su esencia. En consecuencia, se generó la conclusión siguiente
- Me centré más en enfocarlos a comunicar la estructura rectangular como una relación entre las dimensiones del rectángulo (medición de longitud de los lados del rectángulo y su relación con el número de unidades de la fila o columna) y el total de unidades que lo cubren, y no en sus procesos de identificación de la estructura espacial desde la identificación de la fila como unidad compuesta y su iteración (número de filas).
- Como se observa en la Figura 3.2, un primer acercamiento a la presentación de la fórmula de área rectangular en Grado 4° pudo afectar la forma de comunicar los pensamientos, ya que era muy familiar para ellos decir “multiplico el ancho por el alto” para encontrar los cuadritos de una cuadrícula, y al momento de preguntarles el por qué servía la multiplicación, la principal afirmación era “porque si multiplico y si cuento uno por uno me da el mismo resultado”, haciéndose visible un interés de ellos más por el resultado, que por la justificación o reconocer el *por qué* funciona.

2. El asumir por primera vez como profesor una perspectiva curricular por procesos, no fue una tarea ni un proceso fácil desde lo metodológico; muestra de ello fueron los resultados evidenciados en esta fase del proyecto que mostraron cómo me salí un poco del foco central del proyecto debido a mi propuesta de enseñanza centrada más hacia un manejo instrumental de las matemáticas, una concepción sobre mi visión y forma de trabajo en la que estuve inmerso durante varios años en mi aula de clase, y a pesar del proceso de estudio y reflexión desarrollado en esta primera fase, con el apoyo de mi asesora, no fue suficiente para alcanzar el verdadero propósito en el aula, creándose la necesidad de iterar y replantear la secuencia, dando paso a la Fase 2.

3. Reconozco que fallé en la forma como guié la secuencia de enseñanza, en la que la formulación de las preguntas, y por ende de las actividades, fue crucial para no obtener los resultados de aprendizaje esperados en los estudiantes. Ello me llevó a reflexionar y replantear la secuencia de la Fase 2.

4. Puedo inferir de la experiencia vivida en esta Fase, y del contexto del grupo de estudiantes, que para muchos de ellos la matemática es vista como algo netamente procedimental y de “buscar un resultado”—*instrumental*, por lo cual tienden a buscar una operación para encontrar la respuesta en una situación particular, y no ven la importancia de analizar el contexto ni de comunicar las ideas que les permita justificar lo que hacen y entender sus pensamientos.

APÉNDICE 2: EL CUESTIONARIO DE EXPLORACIÓN DE LAS IDEAS MATEMÁTICAS DE LA FASE 1

Exploremos nuestras ideas matemáticas

Nombre: ____

Fecha: _______________________**Curso**: ________________ **Edad:** ___ años

Recuerda que

Esta no es una prueba para evaluar tu rendimiento en este período. Solo queremos identificar aspectos que nos ayuden a mejorar el trabajo que se realiza en el aula de clase.

- Por favor, lee atentamente cada pregunta y asegúrate de que entiendes lo que se está preguntando, antes de que empieces a contestar.

- Si no estás seguro o segura de qué es lo que se pregunta, levanta la mano para que el profesor te colabore.

- Trata de contestar las preguntas que más puedas, pero no te preocupes si encuentras algunas que son desconocidas para ti.

- Escribe todas tus respuestas y operaciones en los espacios que se proporcionan.

- Revisa tu trabajo cuidadosamente.

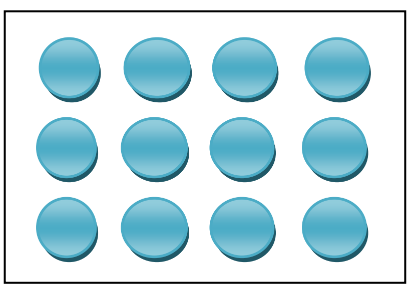
1. **La tortuga quiere comerse la hoja; para ello debe seguir el camino que se observa en la figura. ¿Qué distancia en centímetros deberá recorrer?** (si no tienes una regla avísale al profesor)

En el espacio siguiente, escribe la distancia que debe recorrer la tortuga, y explica a qué pusiste atención al medir:

2. **En las fichas de un juego para niños, que se muestran a continuación, se ven bolitas azules.** Al frente de cada ficha, escribe el número de bolitas azules que hay en ella, y explica cómo las contaste.

   Nota: *Si consideras necesario, haz o marca una señal en las bolitas con lápiz, a medida que las cuentes, para que el profesor pueda saber de qué manera las contaste.*

Ficha A

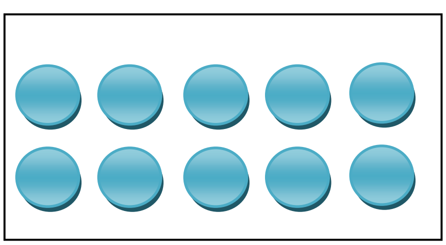


Número de bolitas en la Ficha A = _____

¿Cómo las contaste?

____

Ficha B



Número de bolitas en la Ficha B = _____

¿Cómo las contaste?

____

3. **Usando el cuadrito que te hemos entregado [Se le entrega un cuadrito de cartón de $1cm \times 1cm$], por favor dibuja todos los cuadritos necesarios para cubrir la siguiente figura.**

A continuación, explica:

¿Qué hiciste para dibujar los cuadritos?

____

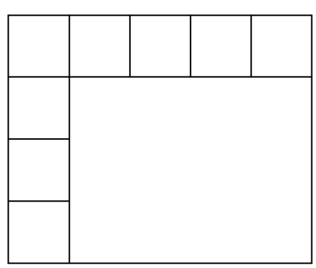
¿Cuántos cuadritos son necesarios para cubrir la figura?________________________

¿Cómo contaste los cuadritos?

____

EMBALDOSANDO CON JESÚS

4. **Jesús trabaja embaldosando pisos.** Para embaldosar con baldosas verdes el piso de una sala que tiene forma de rectángulo, Jesús empezó a pegar las baldosas como se muestra en la figura.

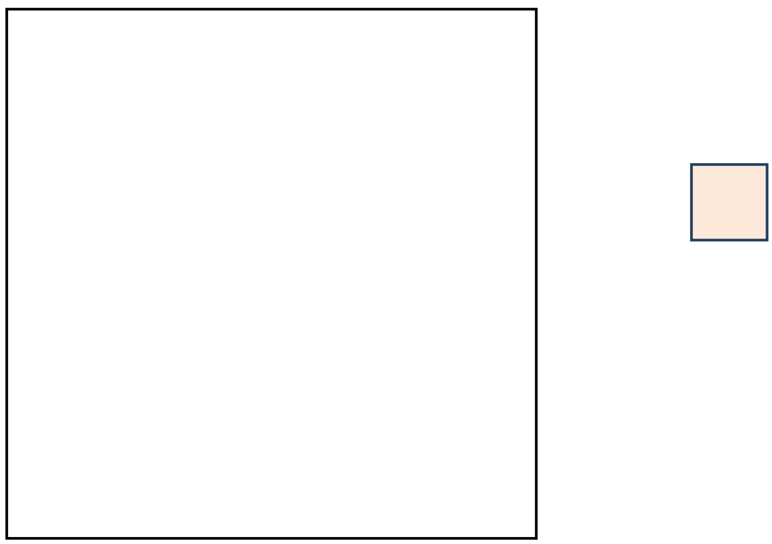


A. Termina de dibujar las baldosas para cubrir totalmente el piso de la sala.

B. Cuando hayas terminado de cubrir el piso totalmente, cuenta las baldosas que fueron necesarias, y di cómo hiciste para contarlas: ________________________

____

5. Di cuántos cuadraditos rojos necesita Jesús para cubrir totalmente el cuadrado blanco.



Jesús necesita: ___________________________________ cuadritos

Explica cómo hiciste para encontrar la respuesta:

____

____

6. **Jesús siempre se preocupa por saber cuántas baldosas utilizará cada vez que trabaja.** Sin necesidad de dibujar las baldosas, indica el número total de baldosas que usará en cada una de las siguientes figuras:

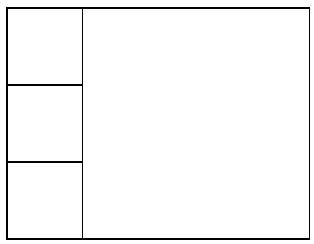


Figura A

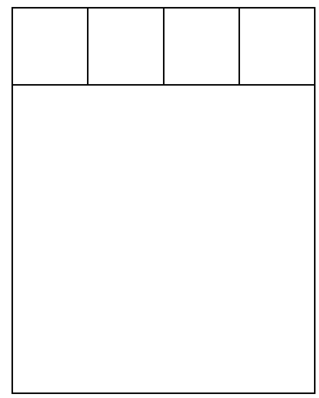


Figura B

- En la figura **A** usará _____________ baldosas

Explica que hiciste para encontrar el número total de baldosas de la figura **A:**

- En la figura **B** usará _____________ baldosas

Explica que hiciste para encontrar el número total de baldosas de la figura **B:**

APÉNDICE 3: EL CUESTIONARIO DE EXPLORACIÓN DE LAS IDEAS MATEMÁTICAS DE LA FASE 2

Exploremos nuestras ideas matemáticas

Nombre: ____

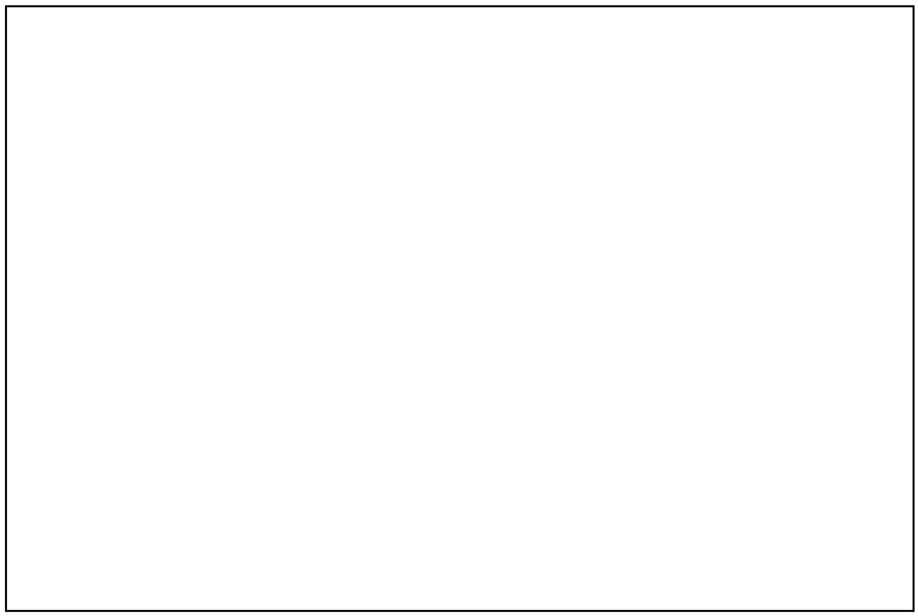
Fecha: ________________________**Curso**: _________________ **Edad:** ___ años

Recuerda que

Esta no es una prueba para evaluar tu rendimiento en este período. Solo queremos identificar aspectos que nos ayuden a mejorar el trabajo que se realiza en el aula de clase.

- Por favor, lee atentamente cada pregunta y asegúrate de que entiendes lo que se está preguntando, antes de que empieces a contestar.
- Si no estás seguro o segura de qué es lo que se pregunta, levanta la mano para que el profesor te colabore.
- Trata de contestar las preguntas que más puedas, pero no te preocupes si encuentras algunas que son desconocidas para ti.
- Escribe todas tus respuestas y operaciones en los espacios que se proporcionan.
- Revisa tu trabajo cuidadosamente.

1. Vamos a cubrir el rectángulo que está a continuación, con cuadritos como el que te hemos entregado [Se le entrega un cuadrado de cartón de $2cm \times 2cm$]. Por favor, dibuja todos los cuadritos necesarios para cubrir el rectángulo.

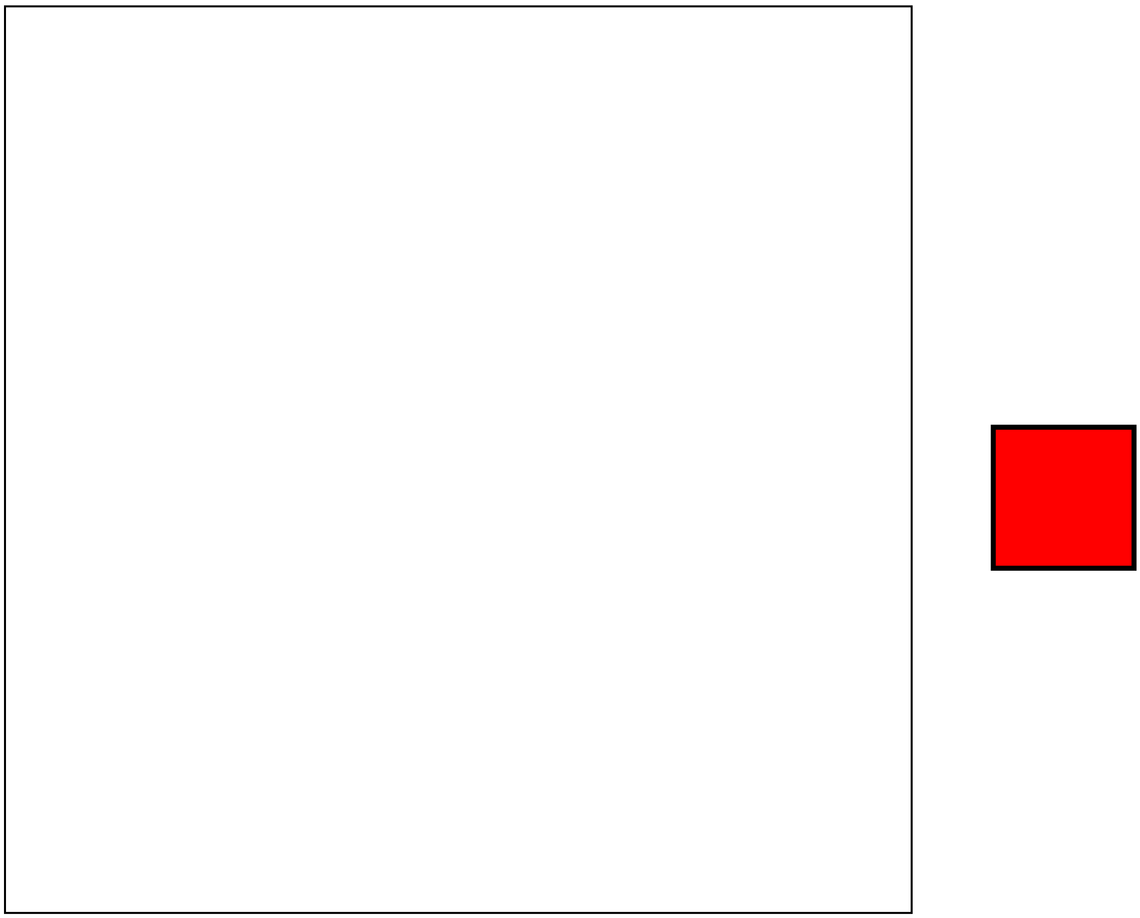


a. ¿Qué hiciste para dibujar los cuadritos?

b. ¿Cuántos cuadritos son necesarios para cubrir la figura?

c. ¿Cómo contaste los cuadritos?

2. Cuántos cuadraditos rojos, como el que se presenta, se necesitan para cubrir totalmente el cuadrado blanco.



Se necesitan: ______________________________ cuadritos rojos

a. Explica cómo hiciste para encontrar la respuesta:

3. Cuántos cuadritos de 2 cm de lado se requieren para cubrir un rectángulo que tiene 8 cm de ancho y 10 cm de alto.

Explica cómo hiciste para encontrar la respuesta:

APÉNDICE 4: LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES DEL ESTUDIO PRINCIPAL

Actividad 1

Tarea 1[11]

Nombre: _________________________________ Fecha: ______________

Vamos a cubrir el rectángulo A, usando cuadritos azules

[11] El desarrollo de esta tarea estuvo apoyado por la ventana diseñada en Geogebra que se puede observar en la Figura 4.2 del Capítulo 4

Tarea 2[12]

Nombre: ___________________________________ Fecha: ______________

Vamos a cubrir el rectángulo B, usando cuadritos verdes

1. A partir de los cuadritos verdes dados, ¿Qué estrategia usarías para cubrirlo completamente?

2. ¿Cuántos cuadritos verdes harían falta para cubrirlo? ¡Explica por qué!

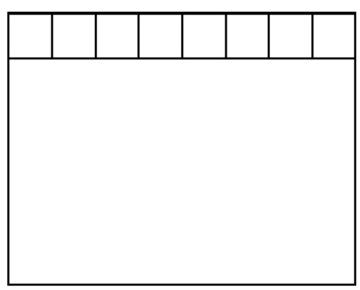
[12] El desarrollo de esta tarea estuvo apoyado por la ventana diseñada en Geogebra que se puede observar en la Figura 4.3 del Capítulo 4

Actividad 2

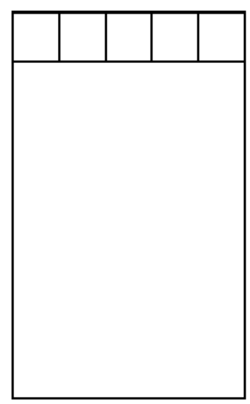
Tarea 1

Nombre: _________________________________ Fecha: _____________

1. Termina de cubrir cada uno de los siguientes rectángulos



Rectángulo A



Rectángulo B

a. ¿Cuántos cuadritos se necesitaron para cubrir todo el rectángulo?

b. Describe cómo los contaste

Tarea 2

Nombre: _________________________________ Fecha: ______________

1. En el siguiente espacio, dibuja un rectángulo del tamaño que tú quieras y cúbrelo con cuadritos del tamaño que tú quieras

Encuentra una regla para hallar el número de cuadritos que lo cubren

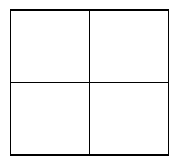
2. Ahora, si te entregamos un rectángulo cubierto de cuadritos, sin importar su tamaño,

¿Qué regla usarías para hallar el número de cuadritos que lo cubren?

Actividad 3

Nombre: ___________________________________ **Fecha:** _______________

1. Quiero poner un borde azul, de un cuadrado de ancho, alrededor de esta cuadrado.



¿Cuántos cuadritos necesitaré para el borde?

2. Ahora escoge cuadrados de diferentes tamaños y ponles un borde de color de un cuadrado de ancho

¿Qué puedes decir sobre el número de cuadritos que se necesitan para el borde, en los casos que escogiste?

APÉNDICE 5: UN EJEMPLO DE LA TRANSCRIPCIÓN DE UNA DE LAS ENTREVISTAS DE SEGUIMIENTO AL CUESTIONARIO INICIAL DE EXPLORACIÓN DE LAS IDEAS MATEMÁTICAS DE LA FASE 2

Santiago (S.)

Profesor: ¿Cómo contaste los cuadritos que cubren el rectángulo del punto 1?
S.: Con el dedo y por 6
Profesor: ¿Cómo lo hiciste?
S.: Pues como aquí hay 6 cuadritos en la primera hilera [señalando la primera fila] y en las demás hileras también hay 6 cuadros, trazo líneas con la regla 6 más 6, 12, más 6, 18, más 6, 24
Profesor: Bien, en el punto 2, dices que encontraste la respuesta copiando el cuadro, pero ¿Cómo los contarías?
S.: Por hileras, igual que la primera parte, porque como acá también hay 6, entonces 6 más 6, 12, más 6, 18, más 6, 24, más 6, 30, más 6, 36.
Profesor: En el punto 3 dices que dividiendo ¿Cómo?
S.: Es que como el tiempo no me alcanzó, lo hice a la rápida
Profesor: Pero ¿qué hiciste?
S.: Pues como decía que cuadritos de 2cm, entonces eran 18, 16 cuadros
Profesor: Ah ¿son 16?,
S.: Son 22
Profesor: ¿Cómo los cuentas?
S.: Por filas: 4 más 4, 8, más 4, 12, más 4, 16, más 4, 22, eh digo, 20
Profesor: ¿Cómo harías entonces para contar todos los cuadritos que cubran un rectángulo sin importar su tamaño?
S.: Pues contaría uno por uno cuantos cuadritos hay en la primera hilera y con la cantidad que tengo puedo resolver el problema

El profesor le entrega una cuadrícula de 14×8

S.: Digamos aquí hay 2,4,6,…14, hay 14. Entonces 14 más 14, 28, más 14, 42, más 14, 56, mas 14, 60, ah no 70, más 14, 84, más 14, 98, más 14, sería 112, 116,
Profesor: Ok, entonces en ese habrían…
S.: [El estudiante dura un momento pensando] 106 cuadros
Profesor: Entonces tú estás sumando 14 varias veces, ¿Cuántas veces lo sumarías?
S.: 8, 8x14, me daría 106
Profesor: ¿por qué multiplicas?, tú venías sumando ¿por qué pasaste ahora a multiplicar?
S.: Es sencillo porque estos cuadros son de multiplicar, mi otra técnica sería esta, contar los cuadritos de la primera hilera y los de la primera columna y ahí con esos dos resultados multiplicaría y me daría el resultado fácilmente
Profesor:¿Qué indica para ti el número de cuadritos de la columna?
S.: Las columnas, las hileras! [pensativo]… Indicaría que toca multiplicar.

APÉNDICE 6: CARTAS DE CONSENTIMIENTO INFORMADO

CONSENTIMIENTO INFORMADO PADRES O ACUDIENTES DE ESTUDIANTES

Proyecto: *Un programa de innovación en el desarrollo del pensamiento algebraico inicial en estudiantes de Grado 5 °*

Prof. Edwin Parra	**Prof. Cecilia Agudelo**
Estudiante de Postgrado	*Asesora de proyecto*
Responsable del Proyecto	*Docente U.P.N*

Yo ____ Mayor de edad, [ ] Madre, [ ] padre, [ ] acudiente o [ ] representante legal del estudiante __________________________________ de ______ años de edad, he sido informado acerca de la participación de mi acudido en una práctica de investigación escolar en el área de Matemáticas, en la que los estudiantes proyectan su voz o su figura de manera total o parcial de acuerdo a los cánones de la etiqueta y la moral. El proceso de recolección de información en el que participarán los estudiantes de Grado 5°, se hará mediante las siguientes formas:

- ✓ Cuestionario con preguntas sobre las ideas matemáticas de los estudiantes y entrevista de seguimiento al mismo (que serán audiograbadas)
- ✓ Audiograbaciones de las sesiones de trabajo
- ✓ Videograbaciones de las sesiones de trabajo
- ✓ Evidencias del trabajo que los estudiantes realizarán durante las actividades de clase

Declaramos que hemos sido invitados(as) a participar en el estudio de manera voluntaria, y entendemos también, que la información que se recolecte es confidencial y que ninguna información que pueda conducir a la identificación de la institución o de cualquier individuo participante será revelada en ninguno de los reportes de este proyecto, o a terceros.

Autorizamos SI, [ ] NO, [ ] el desarrollo del trabajo de aula propuesto por Edwin, así como el proceso de recolección de información.

Nombre: ______________________________ Firma: ________________________

La Universidad Pedagógica Nacional agradece sus aportes y decidida colaboración

CARTA DE CONSENTIMIENTO PARA LA PROFESORA RESPONSABLE DE GRADO QUINTO DONDE SE HARÁ LA RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN DEL ESTUDIO INICIAL MEDIANTE LA PRUEBA PILOTO

Bogotá, Septiembre 23 de 2016

PROYECTO: El impacto de un programa de intervención en la comprensión de variable en un grupo de estudiantes de grado sexto

El estudiante **Edwin Yesyd Parra Buitrago** de la Maestría en docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, me ha explicado los propósitos del proyecto que realiza en el marco de su estudio de posgrado y sobre el proceso de recolección de información, en el cual se verán involucrados algunos estudiantes de grado 5, de quienes actualmente soy profesora de matemáticas:

- Prueba piloto sobre algunas ideas matemáticas relacionadas con la noción de patrón y estructura.
- Algunas entrevistas de seguimiento a la prueba piloto (las cuales serán audio grabadas)

Además, entiendo que el manejo de la información recolectada se hará con fines académicos y que ninguna información relacionada con la identificación de los estudiantes será revelada a terceros.

Por lo anterior, autorizo a Edwin Yesyd Parra Buitrago para que desarrolle la prueba piloto y su correspondiente proceso de recolección de información.

Nombre: Yamile Noriega R

Firma:

Fecha: 23 de septiembre/16