TIPOS DE RECURSOS EN GEOGEBRA Y SU INCIDENCIA EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL.

SAYDA YINETH QUIROGA CAMPOS
FABIO STEVEN JAIMES GÓMEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ, D.C.
2020

TIPOS DE RECURSOS EN GEOGEBRA Y SU INCIDENCIA EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL.

SAYDA YINETH QUIROGA CAMPOS
FABIO STEVEN JAIMES GÓMEZ

Trabajo de grado como requisito parcial para optar al título
Magister en Docencia de la Matemática

Director
WILLIAM ALFREDO JIMÉNEZ GÓMEZ
Magister en Docencia de la Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ, D.C.
2020

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales se ha requerido el trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos.
(Parágrafo 2, del Artículo 42 del Acuerdo 031 de 2007 del Consejo Superior de la Universidad Pedagógica Nacional)

Agradecimientos

A mis padres y hermanos por acompañarme desde que decidí embarcarme en este camino, por seguirme en cada idea y ser el pilar de lo que hoy soy.

A mis abuelos, a él por ser al bastón que no me ha dejado caer, a ella por haber sido el mejor modelo de emprendimiento, responsabilidad, fe, fortaleza y amor sin condiciones.

A mis amigos, que siempre creyeron en mí, me apoyaron y motivaron para no desfallecer en este proceso.

A mi compañera de trabajo, Sayda Quiroga, por su entrega en el desarrollo de este y por aportar constantemente a mi proceso de formación.

Al profesor Camilo Sua por sus valiosos aportes para la correcta construcción de este trabajo.

Al profesor, asesor, colega y amigo William Jiménez por la confianza puesta en mí, por ser un excelente ejemplo que seguir y por poner todo de su parte para que este trabajo fuera llevado a cabo.

A la Universidad Pedagógica Nacional por ser el espacio en el cual conocí a grandes personas, por brindarme la oportunidad de formarme profesional y personalmente.

A todas las personas que en algún momento hicieron parte de este bonito proyecto y me apoyaron, y se sienten identificados: ¡gracias!

Steven Jaimes

A mis padres Beatriz y Alfonso, por ser mi apoyo incondicional y mi motivación para llevar a cabo cada proyecto.

A Jorge, por su compañía, amor y apoyo, por creer en mí y recordarme constantemente que los sueños sí se cumplen.

A los profesores William Jiménez, Camilo Sua y Fabio Jaimes por su paciencia, constancia, dedicación y aportes para llevar a cabo este proyecto.

Sayda Quiroga

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***Tipo de recursos en Geogebra y su incidencia en el desarrollo del pensamiento variacional***, presentado por los estudiantes:

Fabio Steven Jaimes Gomez, Cód. 2018185013, CC. 1031160248
Sayda Yineth Quiroga Campos, Cód. 2018185017, CC. 1032466984

como requisito parcial para optar al titulo de **Magister en Docencia de la Matemática** y analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobada,** con cuarenta y siete puntos (47) puntos.

Observaciones: Se postula el trabajo de grado a distinción meritoria.

En constancia se firma a los 24 dias del mes de agosto de 2020.

JURADOS

Director del Trabajo: Profesor: ______________________
WILLIAM ALFREDO JIMÉNEZ GÓMEZ
(UPN)

Jurados:

Profesor: ______________________
EDWIN ALFREDO CARRANZA VARGAS
(UPN)

Profesor: ______________________
SERGIO ANDRÉS RUBIO PIZZORNO
(Cinvestav)

TABLAS

FIGURAS

Introducción

En la actualidad, las tecnologías digitales (TD) han tomado un papel importante en cuanto a enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se refiere; la investigación en educación matemática ha tenido un enfoque bastante amplio en lo que tiene que ver con la descripción de todas sus potencialidades y posibilidades, descritas a partir de las diferentes ramas de las matemáticas, de manera particular, en lo referente a variación y cambio. Los adelantos de tales investigaciones han generado estrategias para la enseñanza del cálculo en el ámbito escolar, buscando brindar herramientas a los estudiantes para poder realizar descripciones de la variación y el cambio que presenta una curva que modele algún tipo de situación. Por esto es importante que quienes se vinculen a la investigación en educación matemática, puedan diseñar e implementar tareas que atiendan aspectos relevantes con los procesos de aprendizaje de la variación y el cambio.

Por otra parte, de acuerdo con Villa-Ochoa (2012), el estudio de la variación representa una ruta para atender algunas de las dificultades que los estudiantes presentan al establecer conexiones entre conceptos matemáticos de fuertes componentes dinámicos, sus representaciones y el movimiento real de los objetos en diferentes contextos. Estas dificultades se asocian principalmente a que en la escuela se enfatiza en los desarrollos procedimentales basados en manipulaciones algebraicas. De igual manera, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, EBCM (2006), mencionan que el pensamiento variacional resulta ser indispensable en cuanto se requiera realizar la identificación de elementos que se relacionen con la variación y el cambio, situaciones que pueden abordarse a partir del estudio de patrones, relaciones entre objetos variables y constantes, funciones, razones de cambio y situaciones de dependencia e independencia entre variables. Adicionalmente, el MEN (2004) plantea que la incorporación de los sistemas analíticos se debe realizar de manera explícita en los grados de sexto a noveno, sustentados en el reconocimiento de la importancia, necesidad y pertinencia del estudio de situaciones de cambio, resaltando la relevancia del uso de las tecnologías computacionales para la enseñanza del cálculo.

En relación con lo mencionado acerca de los elementos de variación y cambio y su articulación a través de tecnologías digitales, planteamos esta propuesta investigativa en el marco de la línea de Cálculo de la Maestría en Docencia de la Matemática del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, como producto de la preocupación que surge al consultar en la literatura, sin resultados favorables, algún tipo de categorización de recursos GeoGebra que describan sus potencialidades y así, realizar una correcta intervención en el aula con el apoyo de estos.

Nuestro estudio tiene como propósito la clasificación de recursos elaborados en GeoGebra con el fin de tener un amplio aprovechamiento de estos en el aula e indagar por su incidencia en el desarrollo del pensamiento variacional. Para ello se toma como fundamento el planteamiento del problema que guía el desarrollo del trabajo, así como los aspectos metodológicos que se tuvieron en cuenta y por medio de los cuáles es posible generar algunos resultados y conclusiones a partir del análisis desarrollado.

En el presente documento se encuentra el desarrollo de la investigación mencionada, atendiendo en primer lugar a la justificación de esta y el planteamiento del problema, así como los objetivos tanto general como específicos y la consulta de estudios preliminares en relación con la clasificación de recursos tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas. Enseguida, se encontrarán los marcos teóricos adoptados tanto para el diseño de tareas como para su posterior análisis; el primero, centrado en las categorías de razonamiento covariacional, propuestas por Carlson (2003) y el segundo, centrado en el análisis de las interacciones entre un sujeto y una herramienta tecnológica, a saber, Abstracción situada, cuyos autores más representativos son Noss y Hoyles (1996). Para la construcción de categorías, se realizó una revisión documental, mediante la cual se construyeron algunas tablas con el fin de decantar aquella información relevante de la lectura de los documentos y así llevar a cabo esta, enseguida, el lector encontrará el proceso desarrollado para esto.

Posteriormente se encontrará una descripción de los aspectos metodológicos llevados a cabo en este trabajo, a saber: enfoque y estrategia investigativa, contexto experimental, descripción del objeto matemático, el diseño de tareas, elementos para recolección, registro y análisis de la información y los enlaces para acceder a los recursos. Finalmente, se realiza el análisis de las intervenciones realizadas a partir de las tareas y los resultados obtenidos en ellas, para finalmente, pasar a las conclusiones generales del trabajo.

En anexos se podrán encontrar los archivos de planeación de tareas, transcripciones y tabla de información de la lectura de documentos para la construcción de categorías.

CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo presentamos el asunto de estudio de esta investigación. En primer lugar, presentamos la problemática que se quiere atender apoyados en evidencias empíricas y teóricas. Esto nos lleva a plantear una pregunta de investigación y unos objetivos que permitirán trazar una ruta de navegación. Posteriormente mostramos algunos antecedentes investigativos a este estudio, de cara a identificar el estado de la investigación en esta línea y sustentar la pertinencia del estudio que en este documento se desarrolla.

1.1. Justificación

Según los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas – en adelante EBCM- (2006) el pensamiento variacional, a pesar de su complejidad, resulta indispensable para identificar elementos relacionados con la variación tales como, lo que cambia y lo que se mantiene constante. Es decir, las variables, los valores dependientes e independientes y las relaciones entre esas variables. Una de las maneras más comunes de abordar situaciones de cambio es a partir de actividades que involucren la formulación de patrones y el proceso de generalización. El estudio de patrones guarda una relación directa con nociones y conceptos del pensamiento variacional como constantes, variables, funciones, razones de cambio, y situaciones de dependencia e independencia entre variables. De esta manera, dichos elementos se pueden relacionar directamente con conceptos propios del Cálculo como límite, derivada e integral. En este orden de ideas, se esperaría que teniendo como finalidad que el aprendizaje de los conceptos mencionados previamente fuese efectivo, se trabajara en la escuela alrededor de situaciones que involucren la variación y el cambio.

Sin embargo, hemos evidenciado, a partir de nuestra experiencia docente y la de varios colegas con los que hemos compartido esta apreciación, que aunque los planes de estudio del área de matemáticas de las instituciones educativas del país tienen en cuenta para su formulación los planteamientos de los EBCM y los Lineamientos Curriculares, lo que sucede en las aulas no está en consonancia con dichos planteamientos. Esto debido a que el estudio de los diferentes contenidos asociados al pensamiento variacional se limita a procedimientos algorítmicos. No se da lugar a procesos de la actividad matemática como la modelación, ni se involucran situaciones cercanas al contexto de los estudiantes que permitan estudiar propiamente las variables que allí intervienen y las relaciones que pueden existir entre las mismas. En el trabajo realizado por Fiallo y Parada (2018), se alude a otra de las dificultades identificadas respecto a la enseñanza de contenidos relacionados con el pensamiento variacional. Esta se refiere a que, en ocasiones, en las clases de matemáticas inicialmente se dan a conocer a los estudiantes un sinfín de definiciones que no le hacen justicia al Cálculo ni al análisis. Seguido a esto se presentan ejemplos que privilegian la ejercitación de procedimientos algorítmicos y al final se propone realizar tareas del mismo tipo. Mientras tanto, las situaciones que involucran el análisis del cambio y la variación se quedan relegadas al finalizar la miscelánea de tareas propuestas en los libros de texto, o bien, no son comprendidas por los estudiantes. Esto debido a que durante las clases no se privilegia el desarrollo de procesos y pensamientos propios de la actividad matemática, sino que se limita al trabajo con memorización de fórmulas y ejercitación de algoritmos. A continuación, presentamos un ejemplo de la situación descrita previamente, basándonos en un apartado del libro de grado noveno de la serie *Activamente,* de la editorial Santillana del año 2019.

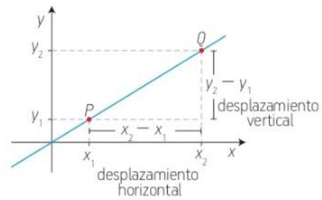
Presentación de contenido

Pendiente de una recta

La pendiente de una recta que pasa por dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ se halla mediante la expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ o } m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \text{ con } x_1 \neq x_2$$

De donde la pendiente se interpreta como la razón entre el incremento vertical y el incremento horizontal de la recta.



El objeto matemático propuesto para trabajar en el apartado que seleccionamos es la pendiente de una recta. A partir de la presentación que hace el libro de texto, podemos evidenciar que se muestra inicialmente una definición que induce de manera implícita a los estudiantes a memorizar la fórmula dada. Pues, aunque se hace alusión a que la pendiente se interpreta como la razón entre los incrementos verticales y horizontales de la recta, lo primero que aparece es la fórmula en mención. En adición a lo anterior, no se está dando a conocer una situación familiar para los estudiantes en la que puedan realizar un análisis de los cambios verticales y horizontales que presenta la recta. Esto a su vez, podría inducirlos a interpretar la fórmula en lugar de memorizarla.

Ejemplos propuestos

EJEMPLO **3**

Con base en la situación del mantenimiento de las atracciones mecánicas, si *y* es el costo de mantenimiento de *x* máquinas, ¿cuál es la ecuación de la recta que representa la relación?

Primero, se identifican los correspondientes puntos. Los puntos son (3, 500) y (8, 1.250).

Segundo, se determina la pendiente.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Ecuación de la pendiente.

$m = \frac{1.250 - 500}{8 - 3} = \frac{750}{5} = 150$ Se remplazan los valores y se realizan las operaciones.

Luego, se remplaza la pendiente 150 y uno de los puntos, por ejemplo, (3, 500).

$y = mx + b$ Ecuación de la recta.

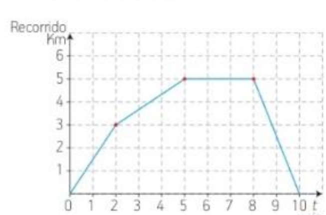
$500 = 150 \cdot 3 + b$, de donde $b = 50$ Se remplazan los datos y se despeja *b*.

Finalmente, se obtiene la ecuación de la recta remplazando los valores de *m* y *b*, así: $y = 150x + 50$.

Al remitirnos a la sección de ejemplos, encontramos el que se presenta en la figura. En este se plantea una tarea en la que se solicita relacionar mediante la ecuación de una recta el costo del mantenimiento de las atracciones mecánicas de un parque, con la cantidad de estas. Los estudiantes cuentan con las coordenadas de dos puntos que pertenecen a la recta. Ahora bien, en la solución de la tarea se muestra cómo obtener pendiente de la recta al reemplazar las coordenadas de los puntos. Seguido a esto se muestra el procedimiento para obtener el punto de corte. Sin embargo, no se hace ninguna interpretación del valor de la pendiente ni de la ecuación como tal en términos de la situación propuesta.

Tareas propuestas

6 CREA → Soluciona a partir de la siguiente gráfica donde se representa el movimiento de un objeto entre 0 y 10 minutos.



a. Escribe las ecuaciones de cada una de las rectas que describen el movimiento del objeto.

b. ¿Qué se puede decir del movimiento entre 5 minutos y 8 minutos?

c. ¿En qué sector el objeto recorrió más kilómetros en menos tiempo?

En la sección "*Actividades para aprender*", se proponen algunas tareas para que los estudiantes las realicen. Esta es la última tarea que aparece en la sección. Si bien, el objetivo es que interpreten la gráfica en términos de la situación propuesta, es probable que dado a la manera en que se presentó el objeto matemático en estudio y los ejemplos, los estudiantes no sepan cómo realizar la interpretación.

Tabla 1: Ilustración de la dificultad expuesta por Fiallo y Parada (2018) a través de un apartado de un libro de texto

Los autores afirman que llevar a cabo prácticas como las que se ilustran en el ejemplo propuesto han provocado que se pierda la razón de ser de los conceptos estudiados y que se olvide que estos nacieron de la necesidad de resolver problemas de la vida cotidiana o de las diferentes ciencias.

Otra dificultad que guarda relación con los asuntos descritos en párrafos anteriores es que el estudio de los conceptos matemáticos se restringe al uso exclusivo de una de sus representaciones y no a todo lo que implica el concepto en sí mismo. Es decir, el resto de sus representaciones, los procesos matemáticos que se pueden promover a partir de él y los algoritmos relacionados con este. Esto puede limitar el aprendizaje de dichos conceptos, en tanto que no se permite a los estudiantes explorarlos a partir de todas las representaciones con las que cuentan y establecer relaciones entre estas. Por ejemplo, Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2008), hacen referencia a la investigación de Habre y Abboud (2006), basada en la introducción del concepto de derivada a través de múltiples representaciones. Uno de los resultados de este estudio fue que los estudiantes no tenían la misma comprensión del concepto de derivada en el modo analítico que en el modo gráfico. Por esta razón, se considera que el uso de múltiples representaciones de un concepto matemático de manera simultánea permite complementar las ideas que se tienen alrededor de este y resulta favorable en el aprendizaje del mismo. Para hacer frente a la dificultad mencionada en el párrafo anterior, Hoyles y Lagrange (2010) proponen como alternativa la inclusión de recursos o tareas que permitan a los estudiantes tener acceso a múltiples representaciones de un concepto de manera simultánea. Esto es posible gracias a la implementación de tecnologías digitales en el aula, pues el uso de juegos, simulaciones, aplicativos y en general, ambientes de aprendizaje mediados por tecnología digital contribuyen aprendizaje de las Matemáticas. Adicionalmente, los autores mencionan que las múltiples representaciones de un objeto matemático promueven su aprendizaje, pues la información que se obtiene al combinar diferentes representaciones es mayor que la que brinda una sola. Además, porque cuando se tiene la posibilidad de establecer relaciones entre diferentes representaciones de un mismo objeto matemático, como ocurre en los ambientes tecnológicos, el estudiante tiene la posibilidad de enfrentarse a tareas que promueven la comprensión de este.

En este sentido, es válido afirmar que la tecnología digital (TD) propicia espacios que hacen posible que el estudiante pueda vivir experiencias matemáticas. Esta debe ser aprovechada por los diseñadores de currículo para propender por la construcción de un conocimiento matemático más amplio y potente por parte del estudiante. Si bien, como lo plantea Gómez (1997), la tecnología no es la panacea de los problemas que tienen lugar en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, hay indicios de que se puede convertir en un agente catalizador del proceso de cambio en la Educación Matemática. Lo anterior, teniendo en cuenta que la tecnología no sustituye la labor del profesor, quien funge como organizador de un encuentro entre el sujeto y el medio para que surja el conocimiento. Esto sin dejar de lado la estructura social de la clase, los saberes iniciales de los estudiantes, el tiempo didáctico, el objeto de enseñanza y los saberes de referencia. Además, sin desconocer que el papel de la tecnología trasciende de ser el de una herramienta auxiliar, para convertirse en un medio con el cual se produce conocimiento.

Ahora bien, pensar la tecnología digital como un agente catalizador, también trae a colación los planteamientos de Villareal (2004), quien afirma que el entusiasmo por la modernización tecnológica en la clase de matemáticas puede dar origen a propuestas con escasas reflexiones de tipo epistemológico, curricular o administrativo. En consecuencia, involucrar la tecnología no surtirá ningún efecto si se mantienen invariantes los objetivos de enseñanza, los contenidos, las metodologías o las formas de evaluación. En adición a lo anterior, Araya (2007) señala que resulta importante que el profesor tenga conocimiento de las características que poseen las tecnologías que pretende utilizar, pues esto le permitirá determinar cuándo y cómo usarlas. En la siguiente tabla, relacionamos algunas de las principales problemáticas identificadas por autores de literatura situada en el campo de la Educación Matemática, con las potencialidades que representa la tecnología digital para hacer frente a estas.

Autor	Problemática	Potencialidades reconocidas
Gómez y Carulla (1998)	Para dar solución a una situación problema, los estudiantes tienden a recurrir únicamente a la representación gráfica de un objeto matemático y esto genera obstáculos epistemológicos que no permiten la construcción de un conocimiento matemático adecuado.	Varios programas de geometría dinámica permiten acceder a los distintos sistemas de representación de un mismo objeto matemático de manera simultánea, eso permite al sujeto manipular los objetos matemáticos y sus relaciones
Laborde et. al (2001)	Al resolver tareas utilizando lápiz y papel, no siempre se obtiene una retroalimentación inmediata de las acciones ejecutadas.	Al usar tecnología digital, los estudiantes tienen la posibilidad de revisar sus construcciones a través del arrastre de puntos o probar sus conjeturas usando varias herramientas
Ruthven, Hennessy y Deaney (2005)	Al resolver tareas con lápiz y papel la cantidad de casos o ejemplos a considerar para formular una conjetura son limitados.	La función de arrastre que ofrecen varios programas de geometría dinámica brinda la posibilidad de trabajar a partir de varios casos o ejemplos.
Gamboa (2007)	El autor manifiesta que el abordaje rutinario en la enseñanza ha generado una separación entre los conceptos teóricos y su aplicabilidad. Esto debido a que, los estudiantes se limitan a mecanizar algoritmos son comprender las ideas y conceptos que están detrás de estos.	La tecnología permite ir más allá de los procedimientos rutinarios, en tanto que propicia un ambiente de descubrimiento y reflexión. Además, según Laborde (2001),

Tabla 2. Problemáticas identificadas en la enseñanza de las matemáticas vs Potencialidad de las TD para atenderlas

En adición al planteamiento expuesto en un párrafo anterior, Boon (2006) reporta que existe una considerable colección de applets encaminados hacia la práctica de la Educación

Matemática. El autor da cuenta y razón del aprecio que se tiene por estas nuevas herramientas en las diferentes instituciones debido a su potencial. En este informe el autor realiza una clasificación de ciertos applets en tres categorías:

- **Applets que ofrecen una realidad virtual:** Estos applets se usan para representar y simular objetos y procesos del mundo real que forman la base del razonamiento matemático.
- **Applets que facilitan el uso de modelos:** Estos applets ofrecen modelos interactivos que pueden ser útiles para construir y comprender los conceptos y objetos matemáticos más abstractos.
- **Applets que ofrecen un micromundo matemático:** En estos applets se pueden construir y transformar objetos matemáticos como fórmulas, ecuaciones y gráficos.

Para cada categoría se presenta ejemplos y finalmente menciona la importancia del papel que juega cada uno en una trayectoria de aprendizaje establecida. Además, resalta la necesidad de seguir realizando investigaciones respecto a su uso con el fin de tener una perspectiva más amplia respecto a las posibilidades y limitaciones de estas herramientas, especialmente para el aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido y de acuerdo con los intereses de esta investigación, procedimos a indagar respecto a la potencialidad que tiene el uso de tecnologías digitales, particularmente para el estudio de los procesos de cambio y variación. Al respecto Fiallo y Parada (2018) manifiestan que la modelación y la simulación de un problema de variación en un medio digital, permite la visualización de las variantes e invariantes de este. Además, posibilita reconocer las variables que intervienen, las relaciones importantes entre ellas, sus atributos, el comportamiento tendencial de las gráficas, entre otras. También se facilita la conexión entre las representaciones gráficas, algebraicas, numéricas y geométricas. En otras palabras, los autores manifiestan que la utilización de herramientas computacionales posibilita que los estudiantes "manipulen las matemáticas". En adición a lo anterior, señalan que en los últimos años GeoGebra (GGB) se ha convertido en el programa de geometría dinámica de mayor aceptación entre los profesores de matemáticas. Este se caracteriza por su calidad, versatilidad y su carácter abierto y gratuito; además, cuenta con una amplia comunidad de usuarios que comparten a diario recursos realizados en él.

Por otro lado, destacan que este programa combina en un mismo entorno elementos de geometría, álgebra, probabilidad, tablas, gráficos, cálculos estadísticos y simbólicos. De modo que, permite acceder a las diferentes representaciones de un mismo objeto o concepto matemático de manera simultánea. Esto a su vez, exige a los estudiantes interpretar las diferentes representaciones y establecer conexiones entre ellas. Los autores también reconocen que GGB es una herramienta excelente para la creación de simulaciones y fenómenos variacionales. Este carácter dinámico del programa permite a los estudiantes experimentar y descubrir regularidades que, con el trabajo tradicional con lápiz y papel, tomarían mucho más tiempo y esfuerzo. Además, el trabajo con el programa posibilita estimular y potenciar la observación, la generalización, la elaboración de conjeturas y su verificación experimental.

En los párrafos anteriores presentamos, por un lado, la necesidad planteada por Gamboa (2007) y Boon (2006), respecto a la identificación de potencialidades y limitaciones de las herramientas tecnológicas que resultan ser de utilidad para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por otro lado, hicimos alusión a las ventajas que Fiallo y Parada (2018) reconocen en GGB, que en este caso funge como representante de las TD, para el estudio de los procesos de cambio y variación. En esta vía, consideramos pertinente, determinar qué tipos de recurso se pueden elaborar en GGB, y qué incidencia tienen estos en el estudio de los procesos del cambio y la variación, así como en la potenciación del desarrollo del pensamiento variacional.

1.2. Pregunta de investigación

De acuerdo con los planteamientos expuestos en el apartado anterior, surge la necesidad de indagar respecto a los posibles tipos recurso que pueden ser construidos en GGB, en función de su uso en la implementación de tareas en el aula. Esto con el fin de aprovechar sus potencialidades para optimizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos relativos al cambio y la variación. Uno de los referentes para llevar a cabo nuestra investigación, es el trabajo de Jiménez (2018), quien realizó una video conferencia titulada *"Categorización de aplicaciones para la enseñanza de las matemáticas escolares: El caso de GeoGebra".* Durante esta, expuso las características de algunos recursos elaborados en GGB y los situó en las categorías que se enuncian a continuación: Aplicativos de conjetura, aplicativos de acompañamiento, aplicativos de aprendizaje autónomo y aplicativos calculadora.

Teniendo como referencia el trabajo mencionado con antelación y las ideas expuestas en el apartado dedicado a la justificación de este estudio, proponemos las preguntas que orientarán el desarrollo de este:

¿Cuáles son los tipos de recurso situados en el pensamiento variacional que se pueden construir en GeoGebra en función de su uso en la implementación de tareas en el aula?

¿Cuál es la incidencia que tienen estos recursos en el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de Educación Básica?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Elaborar una clasificación de recursos elaborados en GeoGebra en función de su uso, situados en el pensamiento variacional, con el fin de propender por el máximo aprovechamiento de estos en el aula, así como indagar por la incidencia que tienen los recursos emergentes de la clasificación, en el desarrollo del pensamiento variacional.

1.3.2. Objetivos específicos

- Realizar una revisión documental que brinde elementos para clasificar los diferentes tipos de recursos que se pueden construir en GeoGebra.
- Formular una clasificación de los tipos de recursos elaborados en GeoGebra en función de su uso, situados en el pensamiento variacional, en la implementación de tareas en el aula.
- Construir recursos GeoGebra que se sitúen en algunas de las categorías planteadas y realizar una serie de entrevistas basadas en tareas a partir de estos.
- Diseñar instrumentos de recolección y análisis de la información obtenida a partir de la implementación, a la luz de los marcos teóricos que fundamentan la investigación.

- Determinar la incidencia que tuvo cada tipo de recurso GeoGebra diseñado en el desarrollo del pensamiento variacional.

1.4. Antecedentes bibliográficos

En este apartado, presentamos una breve descripción de investigaciones que consideramos afines a la nuestra. En primer lugar, hacemos alusión a investigaciones que involucran elementos conceptuales relacionados con la clasificación de recursos tecnológicos utilizados en la enseñanza de las matemáticas. En segundo lugar, hacemos referencia a investigaciones que involucran el estudio de conceptos relacionados con los procesos del cambio y la variación, además del uso de tecnología digital en las intervenciones realizadas.

1.4.1. Sobre la clasificación de recursos tecnológicos usados en la enseñanza de las matemáticas

En primer lugar, nos remitimos a la investigación realizada por Laborde et. al. (2001). Estos autores, realizan una clasificación de los tipos de tarea usadas por profesores en entornos de geometría dinámica. Los tipos de tarea se describen en seguida.

- **Tipo I:** En estas tareas el entorno facilita las acciones materiales, pero no cambia la tarea para los estudiantes. Por ejemplo, producir figuras y medir sus lados.
- **Tipo II:** En estas tareas el entorno facilita a los estudiantes la exploración y el análisis. Por ejemplo, identificar relaciones en una figura a través del arrastre.
- **Tipo III:** Estas tareas tienen una contraparte con lápiz y papel, pero pueden ser resueltas de manera diferente en el entorno. Por ejemplo, tareas de construcción que puedan ser resueltas en entornos digitales usando una transformación o la suma de vectores.
- **Tipo IV:** Estas tareas no pueden ser planteadas sin la mediación del entorno. Por ejemplo, tareas que solicitan construir un diagrama dinámico a través de experimentación con este para identificar sus propiedades.

Los investigadores aclaran que en los Tipos I y II, el entorno facilita la realización de las tareas. Mientras que, en los tipos III y IV las tareas cambian de alguna manera por la mediación del entorno digital, ya sea porque cambia la manera de resolución o porque no es posible realizar la tarea fuera del entorno.

En segundo lugar, presentamos el estudio realizado por Durmus (2006), en este se alude al concepto de *"Manipuladores"*. Estos se entienden como posibles modelos concretos que involucran conceptos matemáticos u objetos físicos que puedan hacer que las ideas y símbolos abstractos tengan mayor significado y sean más comprensibles para los estudiantes. De esta manera, es probable que el proceso de construcción o descubrimiento de relaciones u objetos matemáticos sea óptimo mediante el uso apropiado de materiales manipulables con una tarea adecuada. Este estudio menciona que existen los *Manipuladores Virtuales*, definidos como " *representaciones visuales interactivas basadas en la web de un objeto dinámico que presentan oportunidades para construir conocimiento matemático*" (Moyer et al., 2002, p.337) citado en Durmus (2006). En este sentido, GeoGebra podría entenderse como un *manipulador virtual.* También se menciona en la investigación, que los estudiantes deben tener la oportunidad de interactuar con este material, pues una sola demostración del maestro con esta no es suficiente para aprovechar todo su potencial. Suydam y Higgins (1976) citados en Durmus (2006), afirman que incluir estos materiales en clase adecuadamente y construirlos de una manera correcta, producirá mayores logros en cuanto a construcción de objetos matemáticos que las lecciones en las que no se usan. Adicionalmente, Clements y Mcmillen (1996, p.77) citado por Durmus (2006) proponen algunas características que debe cumplir un manipulador virtual para ser beneficioso en la enseñanza de las matemáticas, dichas características son:

- Tener acciones simples de cambio, repetición y anulación;
- Permitir a los estudiantes guardar configuraciones y secuencias de acciones;
- Vincular dinámicamente diferentes representaciones y mantener una estrecha conexión entre los objetos y símbolos en la imagen;
- Permitir que los estudiantes y profesores planteen y resuelvan sus propios problemas;
- Permitir a los estudiantes desarrollar un control creciente de una herramienta matemática flexible y extensible. Tales programas también sirven para muchos propósitos y ayudan a formar conexiones entre ideas matemáticas.

En adición a lo anterior, Moyer (2008) plantea que al escoger un manipulador virtual es necesario tener en cuenta ciertas consideraciones en relación con aspectos de fidelidad matemática, cognitiva, pedagógica y las representaciones externalizadas de cada herramienta. De allí la pertinencia de tener en cuenta todos los elementos mencionados al trabajar con ciertas herramientas tecnológicas.

En tercer lugar, presentamos la clasificación de recursos GeoGebra expuesta por Jiménez (2018) en la video conferencia mencionada en un apartado anterior. En la siguiente tabla, relacionamos las categorías que plantea el autor con sus respectivas características.

Aplicativos de conjetura	Aplicativos de acompañamiento
La finalidad de estos recursos es ejemplificar hipótesis o supuestos asociados al objeto o situación, ratificar las ideas iniciales o invalidarlas. Este tipo de aplicativos juega en la relación saber – profesor, cuando el profesor está estudiando o haciendo matemáticas. Se caracterizan por: ▪ Ausencia de textos que indiquen un proceso a seguir. ▪ Por lo general quien los usa es quien los construye. ▪ Se tiene acceso a la vista algebraica activa y a la ventana de ejecución. ▪ No hay botones ni casillas de entrada. ▪ Las preguntas se encuentran por fuera del recurso.	Estos recursos se constituyen en material de apoyo para las explicaciones dadas por el profesor, en su mayoría son representaciones gráficas debido a la naturaleza de GeoGebra. Se caracterizan por: ▪ No tener textos de apoyo para las indicaciones a seguir, pero sí señales. ▪ Casos limitados ▪ Su utilidad carece de sentido sin la presencia del profesor.
Aplicativos de aprendizaje autónomo	**Aplicativos calculadora**
Estos recursos son útiles para caracterizar algún concepto o procedimiento sin acompañamiento obligatorio del profesor. Son aplicativos más robustos que se caracterizan por: ▪ Tener botones, casillas de entrada o casillas de control. ▪ Tener indicaciones de uso ▪ Existe una amplia gama de casos a estudiar. ▪ No hay acceso a la vista algebraica.	Estos recursos permiten realizar diversos tipos de cálculo, no requieren ningún tipo de programación. GeoGebra es usado como una calculadora. Se caracterizan por: ▪ Tener indicaciones breves. ▪ Brinda la posibilidad de realizar una gran cantidad de cálculos. ▪ En general, tiene la misma funcionalidad de una calculadora.

Tabla 3. Clasificación de recursos GeoGebra planteada por Jiménez (2018)

1.4.2. Sobre el estudio del cambio y la variación en contextos escolares

En primer lugar, hacemos referencia a la investigación realizada por Rodríguez C., Fiallo J. y Parada S. (2018), quienes proponen diseñar, aplicar y evaluar una secuencia didáctica basada en la resolución de problemas. Esta tiene como finalidad mostrar qué habilidades cognitivas es necesario estimular en el aula, para conceptualizar la derivada como razón de cambio. Los investigadores realizaron de entrevistas estructuradas y basadas en tareas respecto a la resolución de un problema modelado en GeoGebra y tareas específicas que tienen como objetivo que los estudiantes logren transitar por los cinco niveles de Razonamiento Covariacional, propuestos por Carlson et. al. (2003).

Los investigadores proponen una situación de lanzamiento vertical hacia arriba y pretenden que, a partir del desarrollo de esta, los estudiantes logren evidenciar comportamientos que permitan situarlos en el nivel 5 de covariación. Durante la implementación, los estudiantes argumentan por qué la razón de cambio instantánea entre la posición en función del tiempo representa la velocidad del objeto en un instante específico. Para esto, reconocieron y determinaron la interdependencia de las variables; el comportamiento del movimiento parabólico; la cantidad de cambio de las variables y las razones promedio alrededor de un valor de la variación. Este estudio tiene como finalidad hacer frente a la dificultad referenciada por Cuevas, Rodríguez y González (2014), quienes manifiestan que, al estudiar la derivada como razón de cambio, los estudiantes no evidencian una comprensión adecuada de esta. Esto debido a que, se aborda desde los procedimientos netamente algorítmicos, o bien porque su enseñanza se enfoca en contenidos formales que dejan de lado el significado y la interpretación del concepto.

En segundo lugar, presentamos la investigación realizada por Grueso, R. y González, G. (2016), quienes indican que los resultados obtenidos a partir de diferentes instrumentos de evaluación demuestran que las prácticas en el aula no están siendo lo suficientemente efectivas, a raíz de la no actualización de estas, en relación con la aprehensión del concepto de función. Además, resaltan la importancia de proponer un acercamiento a la enseñanza del concepto de función desde una perspectiva covariacional que tenga un verdadero impacto en al aula. Para ello, proponen tres situaciones problema, cada una compuesta por tres tareas, en las que esperan que los estudiantes construyan imágenes de dos variables dependientes que cambian simultáneamente. Se espera que los estudiantes evidencien a partir de las tareas propuestas, comportamientos asociados con las cinco acciones mentales propuestas en la herramienta analítica del marco conceptual de la covariación. Además, los autores señalan que, a partir de las situaciones propuestas, buscan verificar el nivel de apropiación de algunos conceptos en torno a la función. Asimismo, señalan que los fundamentos para la construcción del concepto de función nacen de la asociación y el estudio de fenómenos de cambio. Pues esto involucra las nociones de variable, dependencia, transformación y variación que permiten el acercamiento al concepto desde un punto de vista dinámico. Lo anterior porque responden a la necesidad de analizar el movimiento y formular preguntas orientadoras, que reflejan avances en el razonamiento utilizado por los estudiantes.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

2.1. El pensamiento variacional desde una perspectiva teórica

De acuerdo con la versión electrónica del diccionario de la Real Academia Española (RAE), la variación se entiende, en términos generales, como el cambio o modificación que experimenta un fenómeno para convertirse en otro. En matemáticas, según lo planteado por Fiallo y Parada (2018), se habla de variación cuando se abordan problemas en los que es menester la identificación y el uso de variables. Debe tenerse en cuenta que estas no se restringen a letras que representan valores desconocidos, sino que se entienden como cantidades que pueden medirse y cambian cuando las situaciones en que tienen lugar también cambian. Ahora bien, Parada, Conde y Fiallo (2016) afirman que comprender la variación implica dos acciones fundamentales. Por una parte, explicar la relación existente entre las magnitudes que cambian en determinada situación y por otra parte, medir y analizar de qué manera cambian esas magnitudes. Para estos autores el desarrollo del *pensamiento variacional*[1] en la escuela es un asunto de gran importancia, en tanto que este permite modelar y comprender procesos de la vida cotidiana.

Según Villa-Ochoa (2012) la variación implica la covariación y la correlación de magnitudes cuantificadas numéricamente; la forma de estudiar lo que matemáticamente se conoce como covariación, es el *razonamiento covariacional*. Este tipo de razonamiento se entiende, de acuerdo con Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu. (2003) como las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos magnitudes que varían, mientras se presta atención a la manera en que cada una de estas cambia respecto a la otra. A partir de la definición de razonamiento covariacional que presentan los autores, se infiere que este se entiende como un subconjunto propio del pensamiento variacional, pues la covariación es un tipo de variación en el que están involucradas dos magnitudes. Por lo anterior, el razonamiento covariacional y el pensamiento variacional no deben entenderse como sinónimos. Vale la pena mencionar que, atendiendo a estudios citados en el trabajo de los autores mencionados, es válido afirmar que aunque el razonamiento covariacional es esencial para la comprensión de conceptos primordiales del cálculo, y es tenido en cuenta en los currículos convencionales, estos no han logrado propender por su desarrollo en los estudiantes.

[1] En la sección 2.2 se presenta la definición de pensamiento variacional propuesta por el Ministerio de Educación Nacional en la normativa educativa nacional colombiana.

2.1.1. El marco conceptual de la covariación

Basándose en la descripción anterior, Carlson et al (2003) proponen uno de los marcos conceptuales que fundamentará este estudio. La herramienta analítica de este marco conceptual comprende cinco acciones mentales y cinco niveles del razonamiento covariacional. De acuerdo con los autores esta herramienta analítica surge a raíz de un estudio realizado por ellos, cuya población fue un grupo de estudiantes universitarios que habían terminado recientemente un curso de Cálculo con calificación sobresaliente. Se les solicitó responder cinco ítems que implicaban analizar aspectos covariantes de eventos dinámicos. A través de los comportamientos que exhibieron estos estudiantes, Carlson y sus colaboradores caracterizaron las acciones mentales mencionadas *a priori*.

Las acciones mentales describen las habilidades de razonamiento presentes en la representación e interpretación significativas de situaciones dinámicas que involucran dos cantidades que cambian de manera simultánea. Estas acciones a su vez permiten clasificar los comportamientos que muestran los estudiantes cuando se involucran en la resolución de tareas de covariación[2] y proveen una forma de jerarquizarlos. Por otro lado, los niveles permiten clasificar a un estudiante de acuerdo con la *imagen*[3] global que parece sustentar a las distintas acciones mentales que ese estudiante muestra en el contexto de resolución de una tarea. En la tabla 1 se presentan las cinco acciones mentales que hacen parte de la herramienta analítica del marco conceptual de la covariación, los comportamientos asociados a cada acción y la descripción de cada uno de ellos.

Acción mental	Descripción	Comportamiento
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios de la otra.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.

[2] A la luz de las ideas de Carlson et al (2003), se reconoce que una tarea de covariación es una situación problema propuesta a los estudiantes, que involucra el cambio que experimenta una magnitud con respecto a otra.

[3] Según Saldahna y Thompson (1998), la noción de covariación la evidencia alguien que tiene en mente una *imagen* sostenida de los valores de dos cantidades que cambian de manera simultánea. Lo que a su vez implica unir las dos cantidades, de modo que, en la comprensión de una, se forme un objeto multiplicativo de las dos, pues una cambia en función de la otra. Lo expuesto anteriormente, es lo que reconocen Carlson et al (2003) como *imagen de covariación*.

AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función, con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Tabla 4: Acciones mentales del marco conceptual para la covariación. Tomado de Carlson et al (2003, p.128).

Los estudiantes pueden reconocer en un primer momento que dos cantidades involucradas en una situación problema cambian juntas en una relación de dependencia, este comportamiento es propio de AM1. Si además de esto, pueden imaginar la dirección del cambio de una cantidad mientras imaginan un cambio en la otra estarán exhibiendo comportamientos asociados a AM2. Por ejemplo, reconocen que a medida que aumenta la cantidad de agua que agregan en un recipiente, también está aumentando la altura que alcanza el agua en el recipiente. estarán evidenciando un comportamiento asociado a AM2. Una vez evolucionan las habilidades de razonamiento covariacional de los estudiantes, ellos también son capaces de coordinar cuánto cambia una cantidad mientras se imaginan cambios en la otra cantidad (AM3): por ejemplo, reconocen que con cada taza de agua se agrega a un recipiente cónico, la altura del agua en el recipiente va aumentando cada vez a menor velocidad. Los estudiantes que muestran comportamientos asociados a AM4 pueden ver cómo la tasa de cambio de una cantidad con respecto a las otra cambia. Por ejemplo, pueden imaginar cambios en una cantidad a medida que se van agregando tazas de agua en un recipiente cónico, es decir que, pueden dar cuenta y razón de que la tasa de cambio de la altura con respecto al volumen aumenta hasta que el recipiente está lleno. Finalmente, AM5 implica imaginar cómo cambia una cantidad mientras se toman imágenes de los cambios continuos en una segunda cantidad. Por ejemplo, a medida que el agua se vierte en un recipiente, la altura del agua en el recipiente aumenta a un ritmo creciente.

En la tabla 2 se muestran los distintos niveles de razonamiento covariacional. De acuerdo con Carlson et al. (2003) es válido afirmar que un estudiante ha alcanzado un nivel de razonamiento covariacional, cuando exhibe comportamientos asociados a las acciones asociadas a ese nivel y a las acciones asociadas con todos los niveles previos. Por ejemplo, el cuarto nivel de covariación está asociado con las cuatro primeras acciones mentales, pues se puede afirmar que un estudiante se encuentra en este nivel cuando ha mostrado comportamientos que ilustran dichas acciones.

Nivel	Características
Nivel 1 (N1) Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2) Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 son sustentas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.

Nivel 4 (N4) **Razón promedio**	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5) **Razón de cambio instantánea**	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Tabla 5: Marco conceptual para los niveles de la covariación. Tomado de Carlson et al (2003, p.129)

En términos de Carlson et al. (2003), un estudiante puede clasificarse en el nivel 5 (N5) al realizar una tarea específica cuando logra realizar la acción mental 5 (AM5), pero también es capaz de descomponer dicha acción para razonar a través de niveles que impliquen las acciones mentales previas (AM1-AM4). Esto quiere decir que el estudiante en cuestión comprende que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos de la razón promedio que son cada vez más pequeños. Además, identifica un punto de inflexión como el punto en el que la razón de cambio pasa de ser decreciente a ser creciente o viceversa.

Sin embargo, Carlson, Oehrtman y Engelke (2010), sostienen que AM1 y AM2 deben preceder a AM3, AM4 y AM5, mientras que estas tres últimas no son necesariamente jerárquicas. Por ejemplo, un estudiante podría hablar sobre la naturaleza cambiante de la tasa de cambio de dos cantidades (AM4) sin entender cómo y cuánto cambia una cantidad mientras imagina cambios sucesivos en otra (AM3).

De acuerdo con Carlson y sus colaboradores, al analizar el razonamiento covariacional de un estudiante a partir de este marco, también es posible dar cuenta de procesos de pensamiento *pseudoanalíticos* y comportamientos del mismo tipo. Esto sucede cuando un estudiante aparentemente exhibe comportamientos asociados a determinada acción mental, pero al pedirle que verbalice su pensamiento sobre el desarrollo de la tarea propuesta, el estudiante evidencia no tener una comprensión que sustente dichos comportamientos.

A continuación presentamos el análisis de una tarea propuesta por Carlson et al.(2003) a un grupo de estudiantes que recientemente habían culminado un curso de cálculo, esto con el fin de ilustrar el funcionamiento las acciones mentales y los niveles de covariación descritos en párrafos anteriores.

Tarea:

Imaginar el llenado de una botella como la que se muestra en la figura 1 y hacer un bosquejo de la gráfica de la altura como una función de la cantidad de agua que hay en la botella.

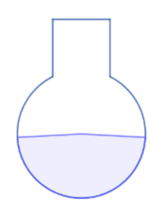


Figura 1: Botella con base esférica

Inicialmente mostramos en la tabla 3 algunos de algunos comportamientos asociados a la resolución de la tarea que podrían ilustrar las diferentes acciones mentales del marco.

Acción mental	Comportamiento asociado
AM1	Coordinación de la altura con los cambios en el volumen. Esto puede evidenciarse cuando el estudiante asigna los ejes coordenados a la gráfica y además, manifiesta que cuando cambia el volumen, también cambia la altura que alcanza el agua en la botella.
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de la altura, mientras se consideran cambios en el volumen. Es posible dar cuenta de esta acción mental cuando el estudiante verbaliza que a medida que aumenta la cantidad de agua, también aumenta la altura de esta en la botella.
AM3	Coordinación de la magnitud del cambio de la altura con la magnitud del cambio del volumen. Un indicador de esto es que el estudiante reconozca que al iniciar el proceso de llenado, la altura cambia rápidamente, pero que al agregar la misma cantidad de agua en la mitad de la botella, la altura aumenta a una velocidad menor.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la altura con respecto al volumen para cantidades iguales del volumen. Esto se puede evidenciar cuando el estudiante verbaliza ideas concretas sobre la pendiente y la razón de cambio de cantidades fijas de agua. Por ejemplo, puede hacer alusión a que al iniciar el proceso de llenado la pendiente de la gráfica es mayor, luego se nivela y luego vuelve a ser mayor.
AM5	Coordina la razón de cambio instantánea de la altura, con respecto al volumen, con cambios en el volumen. Esto puede evidenciarse cuando el estudiante realiza una curva suave que es cóncava hacia abajo, luego es cóncava hacia arriba y finalmente lineal. Además de lo anterior, también reconoce que la pendiente cambia a medida que se vierte el agua a razón constante e identifica el punto de inflexión como un punto de simetría en el que la razón a la que se está llenando la botella pasa de ser creciente a decreciente.

Tabla 6: Acciones mentales y comportamientos asociados a la tarea propuesta

Para reconocer las habilidades de un estudiante en cuanto al razonamiento covariacional usando las acciones y niveles propuestos, es necesario identificar, a partir de sus comportamientos durante la resolución de la tarea propuesta, las acciones mentales desarrolladas. Después, teniendo en cuenta dichas acciones, se procede a determinar el nivel de razonamiento covariacional en el que él se encuentra.

Por ejemplo, si el estudiante manifiesta que cuando cambia la altura del agua en la botella, también cambia el volumen, pero no da cuenta de cómo cambian estas variables, está evidenciando un comportamiento asociado exclusivamente a AM1, por lo que estaría situado en el nivel 1 de razonamiento covariacional. Sin embargo, si el estudiante reconociera que a medida que aumenta la cantidad de agua, también aumenta la altura de esta en la botella y que además, la altura cambia más rápidamente al iniciar el proceso de llenado que en la mitad de este (comportamientos asociados AM2 y AM3 correspondientemente) estaría exhibiendo una habilidad ligada al nivel 3. En este orden de ideas, un estudiante situado en el nivel 5, debe exhibir comportamientos que sustenten todas las acciones mentales.

Cabe mencionar, que resulta fundamental solicitar al estudiante que sustente los comportamientos presentados durante la resolución de la tarea, esto con el fin de verificar si efectivamente está desarrollando las acciones mentales asociadas a los mismos. Carlson et al. (2003) muestran en los resultados de su investigación el caso de una estudiante que elaboró una gráfica que correspondía con la situación de covariación propuesta en la tarea presentada a modo de ejemplo en este apartado; este podría ser un indicio aparente de AM5. Sin embargo, cuando se pidió proporcionar una justificación al respecto, la estudiante indicó que de acuerdo con sus experiencias esa debía ser la apariencia de las gráficas que representaban situaciones como la de la tarea propuesta. Esta respuesta fue clasificada como *pseudoanalítica,* pues no tuvo en cuenta la manera en que cambiaban las variables involucradas en la tarea, sino en hechos memorizados.

Consideramos pertinente el uso de la herramienta analítica propuesta en el marco conceptual de la covariación para el estudio reportado en este documento, puesto que según lo planteado por sus autores, esta herramienta permite caracterizar el razonamiento covariacional de una manera más detallada respecto a lo que había sido posible en el pasado. Además, porque permite clasificar este razonamiento en el contexto del desarrollo de una tarea específica[4], a través de un lenguaje y una estructura que posibilitan describir las habilidades generales de un estudiante, en lo que atañe a la covariación.

2.3. El pensamiento variacional desde los estándares propuestos por el NCTM

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés) se reconoce como la organización más grande a nivel mundial relacionada con la Educación Matemática. Su objetivo es proporcionar a los profesores de Estados Unidos y Canadá recursos y orientaciones en lo que respecta a la enseñanza de las matemáticas desde preescolar hasta el grado 12. Estas orientaciones están plasmadas en los *Principios y Estándares para la Matemática Escolar* (NCTM, 2000). En este documento se presentan inicialmente los principios, los cuales hacen referencia a las características particulares de la educación matemática de alta calidad. Después se hace alusión a los estándares, los cuales describen el contenido matemático y los procesos que deben promoverse en los estudiantes. Los principios y estándares en conjunto describen lo que la instrucción en matemáticas debería permitir a los estudiantes saber y hacer.

En total se presentan diez estándares, cinco de ellos referidos a contenidos y los otros cinco a procesos. Los estándares de contenido son: números y operaciones, álgebra, geometría, medición y análisis de datos y probabilidad. Los estándares de procesos son: resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación. Según el documento de principios y estándares del NCTM, todos los estándares son transversales a la trayectoria académica de los estudiantes y el desarrollo de los mismos se va refinando con el tiempo. En cada grado de escolaridad se enfatiza de manera distinta en cada uno de los estándares de contenido. Vale la pena aclarar que los estándares se organizan teniendo en cuenta cuatro conjuntos de grados (preescolar a segundo, tercero a quinto, sexto a octavo y noveno a doce).

Centraremos la atención en el estándar de álgebra, pues este hace referencia al trabajo sobre las relaciones entre cantidades, incluyendo funciones, formas de representar relaciones matemáticas y el análisis del cambio (contenidos fundamentales en el estudio que se presenta en este documento). En la formulación general de este estándar se menciona que la experiencia sistemática de los estudiantes con patrones desde edades tempranas puede ayudar a construir en grados superiores la idea de función. También se resalta la importancia de enseñar a los estudiantes que existen situaciones que con frecuencia pueden describirse usando matemáticas, pues de esta forma ellos pueden empezar a formar nociones elementales de modelación matemática[5]. Particularmente, se espera que desde el trabajo realizado en los

[4] Consideramos que este aspecto demanda rigurosidad respecto a la formulación de las tareas que se van a proponer a los estudiantes; esto tiene la intención de evitar comportamientos que puedan catalogarse como *pseudoanalíticos*.

[5] El NCTM adopta la definición de modelación matemática propuesta en las *Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education* (GAIMME). En este documento definen modelación como

programas instruccionales, en lo que atañe al estándar de álgebra para los diferentes grados de escolaridad, el estudiante desarrolle cuatro competencias. En primer lugar, la comprensión de patrones, relaciones y funciones. En segundo lugar, la representación y análisis de situaciones y estructuras matemáticas usando símbolos algebraicos. En tercer lugar, el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas. En cuarto lugar, el análisis del cambio en diferentes contextos. Para cada una de estas competencias se formulan expectativas[6] específicas dirigidas a los diferentes conjuntos de grados.

2.2. El pensamiento variacional desde la normativa nacional

En la normativa educativa nacional colombiana se hace referencia al estudio de la variación y también se reconoce la importancia de promoverlo en el aula. En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006), se presentan algunas pautas o niveles de alcance [7]para el desarrollo de las competencias asociadas a cada uno de los tipos de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. Estos estándares se distribuyen en cinco conjuntos de grados (primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a once). En este documento se plantea que el pensamiento variacional está relacionado con la percepción, identificación y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos (p. 66).

En adición a lo anterior se afirma que uno de los propósitos al trabajar el desarrollo del pensamiento variacional es el de construir, desde una edad escolar temprana, diferentes derroteros y acercamientos significativos para comprender y utilizar los conceptos y procedimientos relacionados con las funciones. Se debe tener en cuenta también el aprendizaje con sentido del cálculo numérico, algebraico, diferencial e integral. Por otro lado, los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998), plantean que este tipo de pensamiento puede empezar a desarrollarse desde la educación básica primaria. Esto a través del trabajo con tablas, patrones numéricos (aditivos y multiplicativos) y gráficas cartesianas, entre otros elementos; adaptados al nivel de aritmética abordado en cada grado. Cabe aclarar que el trabajo con dichos elementos también será fundamental en niveles de escolaridad superiores para el tratamiento de la noción de función y la construcción del continuo numérico.

"un proceso que utiliza las matemáticas para representar, analizar, hacer predicciones o proporcionar información sobre fenómenos del mundo real" (GAIMME 2016, p.8).

[6] Estas expectativas se pueden observar con detalle en el documento de Principios y Estándares (NCTM, 2000., pp. 72-366). Están organizadas teniendo en cuenta las competencias descritas y son diferentes para cada grado de escolaridad.

[7] Dado que los Estándares hacen referencia a las competencias básicas que debe desarrollar un estudiante en matemáticas al finalizar cierto grado de escolaridad, al hablar de niveles de alcance nos referimos a la evolución que exhibió un estudiante en el desarrollo de dichas competencias.

2.2.1. Comparación entre la teoría la normativa nacional y lo propuesto en los NCTM

En este apartado presentamos una comparación entre lo que plantea el estándar de álgebra propuesto en los *principios* y … del NCTM, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBCM) referidos al pensamiento variacional y los niveles de razonamiento covariacional que proponen Carlson y sus colaboradores. La finalidad de realizar este contraste es determinar qué tanto distan unos planteamientos de otros. En la primera columna de la tabla 4, se presentan los niveles de covariación propuestos por Carlson, en la segunda columna se presentan algunos de los estándares correspondientes al pensamiento variacional propuestos en los EBCM y en la tercera columna algunas de las expectativas propuestas para las competencias que se espera desarrollar a partir del estándar de álgebra del documento planteado por el NCTM. Los estándares y expectativas que aparecen en las columnas 2 y 3 fueron seleccionados teniendo en cuenta que existiera una correspondencia entre los mismos y el nivel de razonamiento covariacional al que fueron asignados.

Niveles de razonamiento covariacional	Estándares EBCM	Expectativas NCTM
Nivel 1 (N1) Coordinación En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable.	▪ Describir e interpretar variaciones representadas en gráficos. (4°- 5°)	▪ Indagar cómo un cambio en una variable se relaciona con un cambio en una segunda variable. (3°- 5°) ▪ Identificar y describir situaciones con tasas constantes o variables de cambio y compararlas. (3°- 5°)
Nivel 2 (N2) Dirección En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra.	▪ Analizar y explicar relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales. (4° - 5°) ▪ Analizar las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos. (6°- 7°)	▪ Usar gráficos para analizar la naturaleza de los cambios en cantidades en relaciones lineales. (6°- 8°)

Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra.	▪ Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica. (4° - 5°) ▪ Reconocer el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación). (6°-7°)	▪ Representar, analizar y generalizar una variedad de patrones con tablas, gráficos, palabras y, cuando sea posible, reglas simbólicas. (6°-8°)
Nivel 4 (N4) Razón promedio En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada.	▪ Identificar y utilizar diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación. (8° - 9°) ▪ Analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas. (8° - 9°)	▪ Explorar las relaciones entre las expresiones simbólicas y los gráficos de rectas, prestando especial atención al significado de la intersección y la pendiente. (6°-8°) ▪ Comprender y comparar las propiedades de los diferentes tipos de funciones, incluyendo exponenciales, polinomiales, racionales, logarítmicas y periódicas. (9°-12°)
Nivel 5 (N5) Razón de cambio instantánea En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario.	▪ Identificar la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan. (8° - 9°) ▪ Interpretar la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollar métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos. (10° - 11°)	▪ Aproximar e interpretar las tasas de cambio de gráficos y datos numéricos. (9°-12°) ▪ Identificar relaciones cuantitativas esenciales en una situación y determinar la clase o clases de funciones que podrían modelar las relaciones. (9°-12°) ▪ Analizar las funciones de una variable investigando las tasas de cambio, las intercepciones, los ceros, las asíntotas y el comportamiento local y global. (9°-12°)

Tabla 7: Comparación entre los niveles de covariación de Carlson et al, los EBCM y las expectativas propuestas por el NTCM.

El ejercicio realizado deja ver que en los dos documentos normativos se reconoce la importancia de desarrollar competencias y habilidades relacionadas con el análisis del cambio y la variación en distintos contextos. También se resalta la importancia del trabajo con patrones y de la modelación, pues se señala la necesidad de plantear situaciones que permitan a los estudiantes dar cuenta de que hay un sinfín de fenómenos que pueden describirse con ayuda de las matemáticas.

Ahora bien, aunque reconocemos que la estructura y organización de los EBCM y de los estándares y principios propuestos por el NCTM es similar, se aprecia que en la propuesta del NCTM existen algunos planteamientos que evidencian mayor especificidad en los procesos que se espera promover en los estudiantes. Por ejemplo, el estándar propuesto en el documento de los EBCM, que asociamos al nivel 1 de covariación (N1), alude a la descripción e interpretación de variaciones en gráficas. Sin embargo, en el planteamiento de este no se especifica si la descripción de esas variaciones también incluye las relaciones que se pueden establecer entre los cambios de dos variables (covariación). En contraste, las expectativas propuestas por el NCTM asociadas a N1, se refieren puntualmente a la covariación y a la comparación de tasas de cambio entre variables.

Por otro lado, consideramos que tanto las expectativas como los estándares que relacionamos con N2, describen situaciones puntuales que se corresponden con el desarrollo de AM1 y AM2, pues estos están orientados al reconocimiento de relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad. Esto sustenta la habilidad de los estudiantes para coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. En cuanto a N3, que en esencia alude a la cuantificación del cambio, encontramos estándares y expectativas bastante similares, enfocados principalmente en la predicción y reconocimiento de regularidades y patrones usando diferentes representaciones. En este caso, también resaltamos que uno de los estándares del documento de los EBCM, se encuentra más próximo a la idea de cuantificación del cambio. Esto debido a que está orientado al reconocimiento del conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio.

Los estándares y expectativas asociados a N4 también resultan ser bastante similares entre sí y se corresponden de manera exacta con las habilidades que se espera exhiba un estudiante que se encuentre en este nivel. Es decir, el estudio de la pendiente y la razón de cambio de cantidades involucradas en una situación problema. Particularmente los estándares y expectativas hacen referencia al análisis de los comportamientos de cambio de diferentes tipos de funciones en representaciones gráficas, así como al estudio e interpretación de la pendiente. En lo que respecta a N5, se evidenció que las expectativas y los estándares asociados resultan ser complementarios entre sí, pues en conjunto aluden a todas las habilidades que debería mostrar un estudiante que se encuentra en este nivel de razonamiento covariacional. En particular estos apuntan a la identificación de la relación que existe entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una función y los cambios que se presentan en la representación gráfica de la misma. Así como a la interpretación de la derivada como razón de cambio, a la aproximación de tasas de cambio en gráficos, a la determinación de funciones que podrían modelar relaciones cuantitativas y al comportamiento local y global de las funciones.

Otro aspecto que vale la pena mencionar está relacionado con que los estándares y expectativas asociados a los primeros niveles de covariación corresponden a los primeros grados de escolaridad y a su vez, los estándares y expectativas asociados a los últimos niveles, están planteados para ser alcanzados en los últimos grados. Esto podría ser un indicador de que el desarrollo del razonamiento covariacional es un proceso que tiene lugar durante toda la trayectoria escolar de un estudiante y se va favoreciendo en el tránsito dentro de este. Además, a raíz de la comparación realizada entre los niveles de covariación y los documentos curriculares, podría pensarse que una de las expectativas respecto a un estudiante en el contexto colombiano, es que al culminar sus estudios de educación básica y media se encuentre en el nivel más alto de razonamiento covariacional. Esto nos lleva a cuestionarnos qué tan cercana es dicha expectativa de la realidad.

Por último, consideramos que el contraste realizado deja ver que los planteamientos elaborados por Carlson et al (2003), no están muy distantes de los planteamientos expuestos en los dos documentos consultados. Además, se hizo evidente que aunque uno de los documentos normativos es más específico en su formulación, el otro documento también cuenta con propuestas que podrían complementar al primero y viceversa.

2.3. Abstracción Situada

Presentamos en este apartado algunas ideas sobre la Abstracción Situada (AS). La inclusión de este referente conceptual atiende a la necesidad de contar con herramientas que permitan analizar las posibles relaciones existentes entre un entorno computacional, los objetos matemáticos corporeizados en este y los sujetos que interactúan con tales medios. Inicialmente se construye la noción de *red* a partir de la noción de *andamiaje*, elemento que permite examinar las conexiones que puede establecer un sujeto entre su conocimiento propio y el conocimiento formal a partir del trabajo en un entorno virtual. Posteriormente realizamos una aproximación al concepto de Abstracción Situada, el cual permite analizar las acciones realizadas por un individuo dentro de un entorno tecnológico y cómo son relacionadas con objetos y/o conceptos matemáticos. Para esta aproximación tomamos como punto de partida los conceptos de *abstracción* y *cognición situada*. Al final mostramos el carácter complementario entre la *red* y la *abstracción situada*, carácter que permite relacionar el conocimiento inicial del estudiante, el conocimiento construido gracias al medio y el conocimiento formal.

2.3.1. Redes y Abstracción Situada

Noss y Hoyles (1996) mencionan dos elementos teóricos centrales, a saber: *Redes* y *Abstracción Situada.* Según los autores, estos elementos pueden ser abordados de manera independiente; sin embargo, al analizar el trabajo con entornos computacionales se reconoce que estos son complementarios, ya que los individuos muestran su propio conocimiento al realizar algunas acciones particulares dentro del medio y al mismo tiempo articulan fragmentos de ese conocimiento, encapsulados en objetos y/o relaciones computacionales. Ellos afirman que los significados se construyen mediante la interacción con objetos y relaciones virtuales, de los cuales al menos algunos se convierten en reales para el estudiante (entendiendo "real" como aquellos elementos más significativos para el estudiante o aquellas relaciones entre estos significativamente mejor conectadas). Autores como Pratt y Ainley (1997), coinciden con Noss y Hoyles (1987, 1996), en que los significados construidos por los estudiantes son una consecuencia de la relación dialéctica existente entre las acciones en el medio y el conocimiento. Involucrar acciones – conocimiento en conjunto permite analizar la naturaleza de las relaciones que construye un individuo en el entorno computacional y los enlaces que surgen entre su conocimiento y el conocimiento formal en la construcción de significado alrededor de un dominio específico*.*

Lo anterior permite reconocer la existencia de dos matices, uno centrado en las relaciones que establece un individuo entre su conocimiento inicial, el conocimiento que construye a partir de sus interacciones con el medio y el conocimiento formal; y el otro centrado en las acciones realizadas por un estudiante en un entorno tecnológico y el cómo relaciona con objetos y/o conceptos matemáticos.

La idea de *red* está construida a partir del establecimiento de un paralelismo entre esta y la idea de andamio que desarrollaron Wood, Bruner y Ross ((1976); citados por Noss y Hoyles, (1996)), este paralelismo se ve reflejado en la construcción de una estructura (*red o andamio*) por la que el individuo puede moverse y construir su conocimiento conforme avanza y reconoce conexiones conceptuales en ella, teniendo en cuenta que ambas estructuras están basadas en el apoyo de agentes externos al estudiante; la idea de andamio está basada en el apoyo que proporciona un segundo sujeto (el profesor), mientras que la idea de red está basada en el apoyo proporcionado por un entorno tecnológico.

En cuanto a la Abstracción Situada, Drijvers et al. (2010) coinciden con Noss y Hoyles (1996) en que se trata de un proceso natural de abstracción, centrado particularmente en un entorno computacional. Es decir, las acciones realizadas por un estudiante en un medio dan luces de la forma en que este está construyendo su conocimiento.

2.3.2. Redes

De acuerdo con Noss y Hoyles (1996), la noción de andamios, desarrollada por Wood et al. (1976) es el punto de partida en la construcción de la idea de *redes*; sin embargo esta noción no es la única considerada, ya que los autores también tienen en cuenta la noción de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) desarrollada por Vygotsky (1978; citado por Noss y Hoyles, (1996)) y la relación existente entre estas. Según Wood et al. (1976) en ambas nociones es relevante el papel del sujeto que interviene como guía o que proporciona apoyo al aprendizaje del estudiante. La teoría de andamiaje se centra en la asistencia graduada que proporciona un segundo sujeto (tutor, profesor, guía…) a un estudiante en la construcción de su conocimiento, la cual progresivamente va desvaneciéndose hasta el punto de desaparecer. En correlación inversa a este proceso, la participación y conocimiento del estudiante aumenta.

Aun cuando la teoría de andamiaje no contempla el trabajo con ambientes computacionales, Noss y Hoyles (1987) proponen extender esta idea a un contexto en el que estos recursos tengan presencia, a las conexiones entre conocimientos que los estudiantes construyen allí, es a lo que denominaron “*red*”. Tal ejercicio trae consigo cuestionamientos sobre la manera en que se podría extender la noción de andamiaje a un entorno computacional y, en particular, la forma en que una computadora podría desempeñar el papel normalmente asignado a un tutor humano.

Para responder a estos cuestionamientos, Noss y Hoyles (1996) consideran las ideas desarrolladas alrededor de andamiaje y determinan cuáles de estas pueden extenderse a configuraciones en las que intervengan entornos computacionales y la forma en que estas se podrían desarrollar allí, dando paso así a la noción completa de *red,* finalmente, esto concurre en responder a la pregunta ¿qué del andamiaje puede desarrollarse en una red?

- En primer lugar, el andamiaje es entendido como una estructura erigida alrededor del estudiante por agentes externos (aulas, libros, juegos, entorno, …) y un tercer sujeto guía; estructura que concurre en la construcción del conocimiento del estudiante a partir del aumento de su participación en el proceso de aprendizaje y la disminución del apoyo del tercer sujeto al estudiante en este proceso. Al extender este elemento a la configuración computacional no nos fijamos en un tercer sujeto, este es sustituido por un entorno computacional, centrando así la atención en las conexiones entre la forma en que el estudiante estructura su propio aprendizaje y la forma en que el entorno lo estructura. Hablamos aquí de dos tipos de conexiones, las primeras son las que se establecen de manera jerárquica entre el conocimiento inicial del estudiante y lo que va adquiriendo durante el proceso de interacción con el entorno, sin pasar necesariamente al plano formal; las segundas conexiones son las que tienen lugar entre el conocimiento que va construyendo el estudiante y el conocimiento considerado como formal (Noss & Hoyles, 1996; Trouche & Drijvers, 2014).
- En segundo lugar, nos referimos a la "zona", la cual está definida en la teoría de andamiaje como un "territorio" de aprendizaje delimitado por la guía e interacción con el tercer sujeto, sobre el cual los andamios pueden sustentar las estructuras construidas por el estudiante, es decir, los andamios (proporcionados por el tercer sujeto), sirven de base en la construcción del aprendizaje del estudiante. En el entorno computacional esta zona también existe, sin embargo, es abierta y deja libre la definición de sus límites, debido a que ya no existe un sujeto que sirva de guía, sino un entorno que media la actividad, pero no la dirige. Esto determina una zona en la que las conexiones se construyen de manera libre y sin límite (Drijvers et al., 2010; Noss & Hoyles, 1996).
- En tercer y último lugar se señalan ideas acerca del desvanecimiento del apoyo brindado por un guía. En el entorno computacional quien toma el papel de "tercer sujeto" es el medio. Noss y Hoyles (1996) consideran que no tiene sentido que el medio desaparezca, así como tampoco lo tiene una supresión progresiva de "accesorios" para evidenciar el conocimiento matemático adquirido. Este desvanecimiento es sustituido entonces por la conexión que puede establecer el estudiante con otras configuraciones, otros sistemas de notación y otros significados, de tal suerte que se evidencien las conexiones y el conocimiento que ha adquirido gracias al medio (Drijvers et al., 2010; Hershkowitz, Schwarz, & Dreyfus, 2001; Noss & Hoyles, 1996; Trouche & Drijvers, 2014).

La idea de red se configura a partir de los elementos mencionados previamente, provenientes de la extensión del andamiaje a la configuración computacional. Reconocemos entonces que la red está constituida por las conexiones que un estudiante establece entre su conocimiento previo, el conocimiento que se va construyendo a partir del medio y el conocimiento formal, todo esto a partir del apoyo que brinda el entorno computacional como reemplazo del tercer sujeto en el andamiaje. Las conexiones establecidas por el estudiante están construidas en una zona ilimitada de aprendizaje, debido a la libertad que tiene al interactuar con el medio, lo cual lo lleva a establecer relaciones con otras configuraciones, así como otros sistemas de notación y significados.

Las ideas en relación con la red que se han presentado hasta ahora se ilustran a través de un representación gráfica que busca explicar su composición, a partir de la construcción propia de conocimiento a través del medio, en relación con el conocimiento previo y el formal.
En primer lugar, el estudiante posee un conocimiento inicial sobre el cual se van a ir construyendo nuevas nociones u objetos mediante la interacción con un entorno computacional, este conocimiento estará representado por un conjunto de puntos relacionados entre sí.

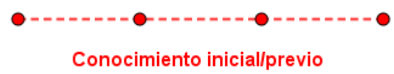


Figura 2: Representación del conocimiento inicial
Fuente. Elaboración propia

Conforme el estudiante interactúa con el entorno computacional, sus ideas iniciales se van transformando, de esta manera surge un nuevo conocimiento jerárquicamente más robusto que el inicial, pues los elementos del entorno han tenido un impacto sobre este y lo seguirá teniendo en tanto el estudiante siga interactuando con él.

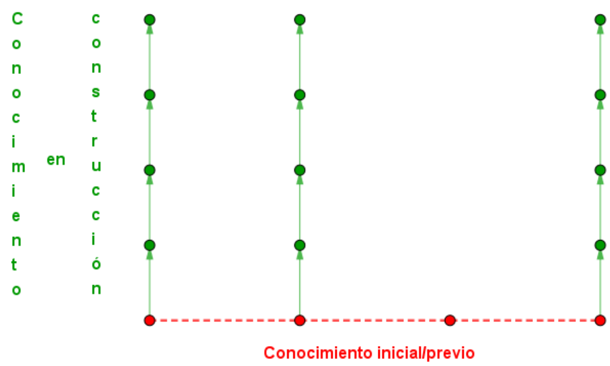


Figura 3: Representación del conocimiento en construcción
Fuente: Elaboración propia

El conocimiento inicial del estudiante y el que surge a partir de sus interacciones con el entorno se va fortaleciendo mediante una mayor interacción allí, además de esto toma un papel importante el conocimiento formal, pues es con este con el que el estudiante creará conexiones posteriormente.

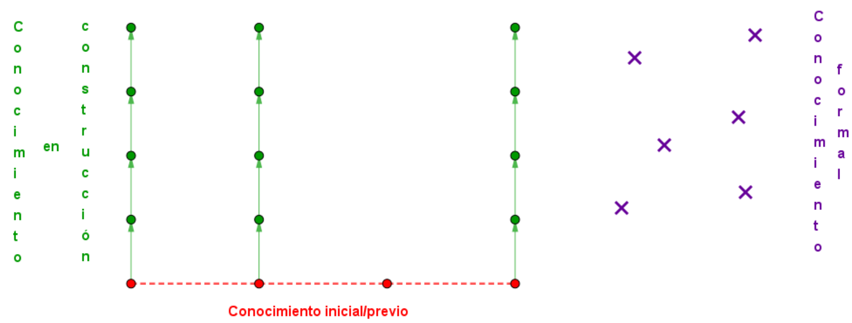


Figura 4: Representación del conocimiento formal
Fuente: Elaboración propia

Conforme las ideas del estudiante van evolucionando, estas se ponen en correspondencia con elementos del conocimiento formal, relacionándolos, llevando así al estudiante a una reelaboración robusta de sus conocimientos. Estos elementos en conjunto, representan la estructura completa de la red. La representación de esta se ve reflejada en la figura 5.

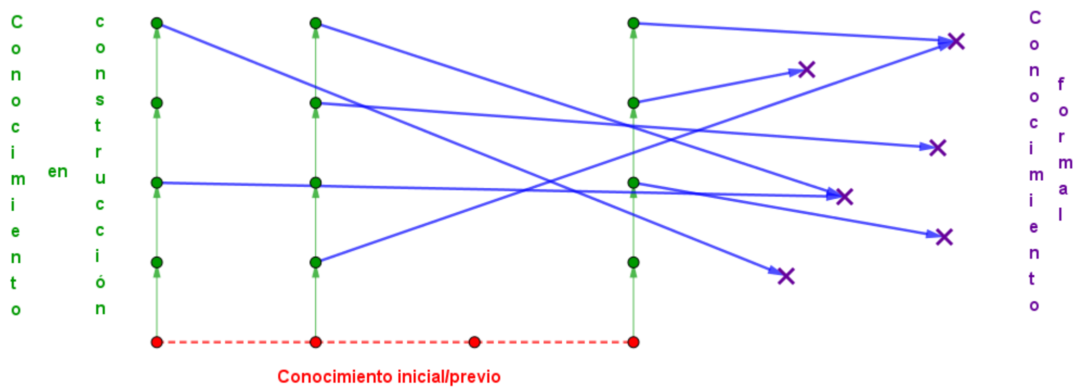


Figura 5: Interpretación de la red como conexión de elementos.
Fuente: Elaboración propia

En el esquema anterior, las flechas en verde pueden considerarse como las acciones propias realizadas por el estudiante dentro del medio, las cuales a su vez generan una transformación del conocimiento que puede relacionarse de manera directa con el conocimiento formal, esto se encuentra representado en el esquema por las flechas azules.

Es importante además, mencionar que la red puede ser tan amplia como el estudiante alcance a construirla, es decir, sus límites no están definidos, esto depende estrictamente de sus conocimientos iniciales y de las relaciones que va estableciendo, así como del dominio en el cual se le permita moverse. Además la construcción de esta red es completamente subjetiva, cada estudiante construye una red diferente y establece relaciones diferentes, que probablemente van a concurrir en un mismo objeto formal. Noss y Hoyles (1996) y Drijvers et al. (2010) describen esta red como una estructura que los alumnos pueden utilizar y reconstruir a partir de las interacciones con el entorno y las ideas matemáticas emergentes allí; sin embargo, estas ideas matemáticas por lo general pueden encontrarse completamente enraizadas en el entorno computacional, sin tener una relación con las matemáticas oficiales (Noss & Hoyles, 1996). Esto lleva a considerar entonces, que si estas matemáticas están enraizadas en el entorno, luego de la interacción, ¿El estudiante qué interioriza de esta estructura (red) que ha construido? En otras palabras, ¿Qué de toda la red de relaciones el estudiante es capaz de abstraer? O, como sugieren Noss y Hoyles (1996), ¿Cómo podemos rescatar al alumno del limbo matemático en el que podemos haberlo dejado?

Trouche y Drijvers (2014) coindicen con Noss y Hoyles (1996) en que la idea de red es uno de los motores fundamentales en la construcción del significado matemático y da paso a la abstracción situada, pues las estructuras resultantes de la interacción con el medio son el resultado de unas acciones puntuales realizadas por el estudiante, estas forman un sistema de soporte para el aprendizaje del estudiante. Esta estructura de red está disponible para que el estudiante pueda acceder a ella y tenerla bajo control, esto quiere decir que puede reestructurarla en la medida que sus acciones con el medio proporcionen mayores elementos. En este sentido, Trouche y Drijvers (2014), exponen que los entornos digitales tienen la particularidad de brindar mejores oportunidades para reconstruir conocimiento y utilizar esta estructra que se moldea por y dentro del medio.

2.3.3. Abstracción Situada

Hershkowitz et al. (2001) reconocen que la abstracción surge de un conjunto de objetos o procesos matemáticos y consiste en centrarse en algunas propiedades y relaciones específicas de estos, en lugar de en los objetos como tal, de esta forma, el producto de la abstracción consiste en "el conjunto" de todos los objetos que tienen ciertas propiedades distintivas y pueden enmarcarse en una ley que los cobija. Este proceso de abstracción es, pues, un proceso de descontextualización: el objeto cumple con algunas características construidas independientemente del contexto en el que se elaboró. Este proceso de abstracción descontextualizado es reconocido por Noss y Hoyles (1996), como "abstracción reflexiva", que puede reconocerse como una visión tradicional de cómo las objetos y experiencias se interiorizan, induciendo a los estudiantes la idea de que las matemáticas están referidas a un conjunto de expresiones simbólicas carentes de conexión con cualquier fragmento de su conocimiento. Lo que reduce la comprensión matemática a un conjunto de destrezas para manipular símbolos (Armella & Waldegg, 2001).

Para responder a esta visión tradicionalista y descontextualizada de las matemáticas, Noss y Hoyles (1996) apropian el concepto de Cognición Situada, cuyas bases teóricas están dadas por Lev Vygotsky (1986; 1988), Leontiev (1978), Luria (1987) y Díaz (1999). Este concepto se refiere a que el conocimiento es situado, es decir, es parte y producto de la actividad, el contexto y la cultura en el cual se desarrolla y utiliza. Según Díaz (1999), la cognición situada genera un tipo de conocimiento a partir del entorno en el cual se trabaje, lo que implica entonces una particularización de lo que el estudiante puede aprender, sesgado por las acciones realizadas en el entorno del cuál es partícipe.

Si las matemáticas se particularizan de acuerdo con el entorno en el que surgen (v.g. GeoGebra, Cabri, Lápiz y Papel), la atención de la abstracción se centra en cómo se pueden forjar los vínculos entre estos "tipos" de matemáticas y generar una perspectiva global que conduzca a una aproximación de objetos matemáticos aceptados por la comunidad, por parte del estudiante. Si hablamos ahora de un posible enlace entre varias cogniciones situadas generadas en distintos entornos sobre distintos objetos matemáticos, podremos hablar de cómo el conocimiento, además de construirse y reconstruirse constantemente a través de la experiencia, es también moldeado y reformado en torno a una perspectiva global, la que conduce al estudiante a adquirir parte del conocimiento formal a partir de las conexiones establecidas entre las diferentes cogniciones situadas.

Vemos aquí entonces que el término Abstracción Situada es una combinación entre lo que es la Abstracción y la Cognición Situada y su intención. Según lo expuesto por Noss y Hoyles (1996) y Drijvers (2010), la abstracción situada permite describir cómo los estudiantes construyen ideas matemáticas mediante las acciones realizadas por ellos mismos en un entorno particular que a su vez da forma a las ideas y su forma de expresión. Claramente todas las abstracciones y todas las actividades pueden considerarse "situadas"; sin embargo, a lo que nos referimos y sobre lo que queremos centrar la atención son precisamente las especificidades de la situación, los recursos lingüísticos y conceptuales que proporciona la situación para permitir expresar matemáticamente las ideas a través de ella.

La abstracción se puede ver como una forma de estratificar los significados entre sí, conectando la forma de conocerlos y verlos en lugar de buscar una forma de reemplazarlos. Noss y Hoyles (1996) consideran que esto puede suceder particularmente al trabajar en entornos computacionales, debido a las herramientas que estos proporcionan y las acciones que el estudiante puede realizar allí, pues estas a su vez están relacionadas con algunos objetos matemáticos puntuales, con la restricción de que diferentes entornos pueden generar el mismo resultado pero con conocimientos matemáticos más fuertes en uno que en otro, esto debido a la potencialidad matemática del software, al lenguaje que se utilice allí, que bien puede ser matemático o no, y a las relaciones que el estudiante es capaz de crear a partir de las acciones que realiza.

En este sentido, el principio central descrito por Noss y Hoyles (1996) es que un entorno computacional puede proporcionar una situación fructífera de la abstracción situada, pues allí podemos ver una cara más exteriorizada de los objetos matemáticos y las relaciones que se pueden entablar entre ellos, a través de la interfaz del software, apoyados en las estructuras lingüísticas, el lenguaje matemático y formas de notación definidas allí y las acciones que el estudiante realiza sobre todos estos. Sin embargo, en concordancia con Monaghan et al. (2016), si un software no proporciona al alumno un medio para expresar ideas matemáticas, tampoco permite la apertura de algún proceso de aprendizaje matemático. No importa si un estudiante trabaja con una buena simulación diseñada, si no se articulan de una manera óptima las relaciones involucradas en el medio, entonces solo se captará lo que se entrevé superficialmente del entorno. Es la completa articulación de todas esas relaciones y las acciones y el conocimiento del estudiante las que ofrecen cierta información sobre lo que este está pensando y es en este proceso de articulación que el estudiante finalmente logra aprender matemáticas por medio de la creación de estas.

Noss y Hoyles explican esta articulación partiendo de que la abstracción situada describe cómo los estudiantes son capaces de construir diferentes ideas matemáticas al dar vida y dinamismo al entorno digital sobre el cual se encuentran trabajando, haciendo uso de las respectivas herramientas que este le brinda y articulándolas con sus conocimientos previos, con el objeto y sus interacciones con estos (Monaghan et al., 2016).

Un ejemplo de esta articulación, descrita por Noss y Hoyles, es la siguiente, centrada en un entorno de micromundo (Monaghan et al., 2016):

Las herramientas no son pasivas: en un micromundo, por ejemplo, las intenciones del diseñador se constituyen en las herramientas de software. Estas herramientas envuelven parte de la ontología matemática del entorno y forman parte de la red de ideas y acciones incluidas en ella. Sin embargo, son los estudiantes quienes dan forma a estas ideas ... Un micromundo comprende herramientas para construir objetos. Pero estas herramientas son en sí mismas objetos que encapsulan relaciones. (Noss & Hoyles, 1996).

En el anterior ejemplo se evidencian algunos elementos centrales. En primer lugar, las herramientas propias del software (con las intencionalidades que tiene cada una), en segundo lugar, la parte matemática propia del entorno y en tercer lugar las acciones e interacciones del estudiante con estos elementos. La completa articulación de estos tres elementos con las ideas previas del estudiante, lo llevan a crear matemáticas.

Hershkowitz et al. (2001), en su trabajo, desarrollaron aún más la noción de abstracción situada. Ellos la han definido como una actividad de reorganización vertical de las matemáticas construidas previamente por el estudiante, una actividad en la que los elementos matemáticos se agrupan, estructuran, organizan, desarrollan, etc., en otros elementos más amplios, a menudo en forma más abstracta o formal que los originales que conforman una nueva estructura matemática y para esto han descrito tres acciones enlazadas de manera dinámica como sus componentes principales: construcción, reconocimiento y edificación. Estas pueden considerarse como las acciones entre las que se establece conexión para construir la idea de red presentada previamente.

De manera similar, Sinclair y Yerushalmy (2016) presentan un acercamiento un poco más coloquial de cómo se puede concebir la abstracción situada, propuesta por Psycharis (2006), los autores mencionan que esta teoría busca en gran manera describir cómo se puede concebir el conocimiento matemático como situado y abstracto, es decir, que este surge de contextos muy particulares, entendiendo esto en el cómo y dónde se aprende, pero manteniendo los respectivos invariantes matemáticos.

Las acciones realizadas por un estudiante en la interfaz de un entorno tecnológico permiten describir la forma en que este interviene en la transformación de sus ideas iniciales en algunas ideas jerárquicamente más avanzadas, estas acciones dan origen en cierto sentido a los enlaces que puede establecer el estudiante entre los objetos, sus intervenciones y las ideas formales, que a su vez se ven reflejadas en la red.
El estudiante realiza unas acciones iniciales en el entorno cuyo resultado es una primera transformación de su conocimiento, el cual posteriormente mediante otras acciones se seguirá desarrollando, ayudando así a construir su red de conocimiento.

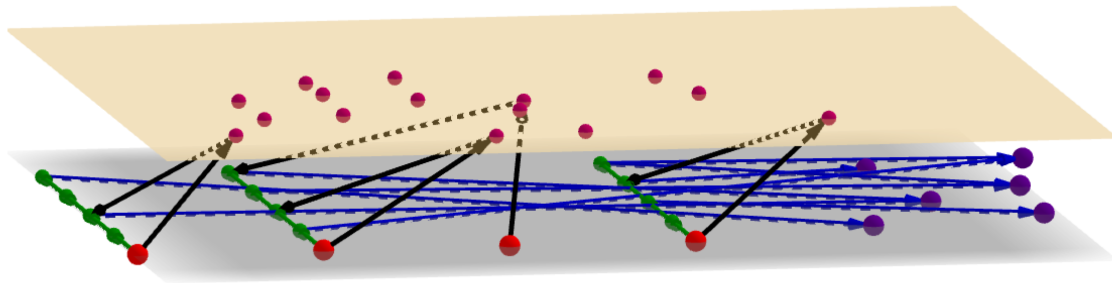


Figura 6: Representación de las acciones iniciales desarrolladas por el estudiante en el medio.

En el esquema (figura 6) **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**se muestran en u n segundo plano algunos puntos de color violeta que representan las acciones puntuales que un estudiante podría realizar en el medio a partir de su conocimiento inicial (puntos rojos), las flechas representan las relaciones que se establecen entre esta acción y una transformación en el conocimiento del estudiante.

Cada diferente acción que se realice en el medio puede significar un diferente enlace y transformación del conocimiento del estudiante y por tanto una construcción diferente de red. Esta está centrada en las ideas propias de cada estudiante y por tanto la subjetividad de cada uno moldea la construcción de su red, así como el entorno también lo hace. Incluso algunas acciones en el medio pueden concurrir en la formalización del objeto que se esté trabajando o alguna idea cercana.

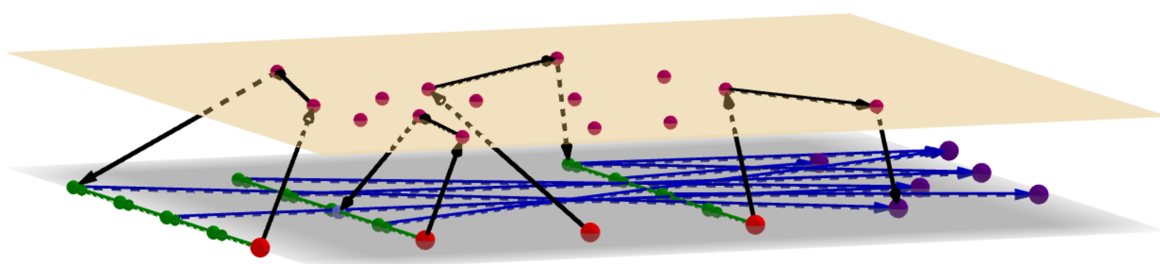


Figura 7: Diferentes acciones implican diferentes construcciones.

Finalmente, puede reconocerse que las acciones que realiza cada estudiante, las herramientas del entorno que usa, sus ideas iniciales y los elementos del objeto matemático a tratar, se entrelazan estableciendo una sinapsis que le permite formular relaciones de manera formal. Aquí podemos evidenciar una complementariedad entre la red y la abstracción situada que se ve reflejada en la construcción final de su conocimiento.

2.3.4. Red y Abstracción Situada: Complementariedad Esencial

Lo mencionado anteriormente, permite establecer una relación entre las dos nociones iniciales, Red y Abstracción Situada; podríamos considerar que estas se complementan de manera esencial, proporcionando así el marco explicativo más amplio para el trabajo. La Red básicamente se centra en el conocimiento propio y construcciones de objetos o nociones de los estudiantes gracias las interacciones que establece dentro del entorno con sus ideas iniciales y las ideas formales, mientras que la Abstracción Situada se centra en la articulación de fragmentos de ese conocimiento que se encuentra encapsulado en objetos y relaciones computacionales, las cuales se ven reflejadas en las acciones que desarrolla puntualmente allí y que le permiten abstraer dentro, no lejos de la situación. Esta complementariedad y el medio, en conjunto, proporcionan un tipo de puente entre lo que el software es capaz de brindar al estudiante y el modelo matemático o ideas formales, este puente genera la articulación del conocimiento que el estudiante adquiere durante la interacción con el medio y el objeto matemático formal. El nivel de lo que puede pensarse y hablarse se ve reflejado como “abstracciones situadas” dentro del medio con algunas acciones específicas como clics, herramientas del programa, movimientos, deslizadores entre otras, que en sí, son expresiones de abstracciones matemáticas.

La Red de conexiones entre las relaciones y objetos que ofrece el entorno, actúa como soporte para desarrollar nuevos significados y como medio para entablar relaciones con otras configuraciones, otros sistemas de notación y otros significados. Es aquí, donde es evidenciable el análogo al “desvanecimiento” del cuál habla el andamiaje, no la eliminación del sistema de soporte, sino como este es utilizable para entablar otras relaciones, guiadas también por la abstracción situada construida en el entorno.

2.3.5. Categorías de análisis: Redes y Abstracción Situada

Uno de los propósitos de este marco teórico es tener insumos que permitan analizar la interacción que tiene un estudiante con un entorno tecnológico al desarrollar una tarea, en pro de alcanzar los objetivos de esta; sin embargo, este no proporciona indicadores que permitan este tipo de análisis, salvo por las definiciones dadas. A partir de las ideas desarrolladas y la relación existente entre la red y la abstracción situada hemos propuesto un conjunto de indicadores que permitirán analizar la interacción de un estudiante con un entorno tecnológico mientras desarrolla una tarea.

Para esto construimos unos indicadores iniciales para la noción de Red y unos para la noción de abstracción situada, estos resultan ser la primera propuesta para analizar, sin embargo, posteriormente estos son unificados.

Debido a que de manera resumida, la red permite identificar las relaciones (conexiones) que el estudiante está construyendo entre su conocimiento inicial, el conocimiento que se va construyendo gracias a su interacción con el medio y el conocimiento formal, proponemos unos indicadores que relacionan estos elementos de manera jerárquica como muestra la siguiente tabla.

<table>
<tr><td rowspan="3">RED</td><td rowspan="3">Tipos de Conexiones en la red</td><td>Conexiones mediales</td><td>Son las establecidas por el sujeto entre su conocimiento inicial y el conocimiento que se construye a través del medio</td><td rowspan="3">Estos tres se construyen de manera jerárquica, es decir, para pasar a las conexiones formales es necesario tener unas conexiones mediales. Y las conexiones totales se dan si tanto las mediales como las formales se construyeron.</td></tr>
<tr><td>Conexiones Formales</td><td>Son las establecidas por el sujeto entre el conocimiento construido en el medio y el conocimiento formal</td></tr>
<tr><td>Conexiones Totales</td><td>Son las establecidas por el sujeto entre su conocimiento inicial y el conocimiento formal, gracias a su interacción con el medio.</td></tr>
</table>

Tabla 8: Indicadores de conexiones (red)

De manera similar, se construyen algunos indicadores iniciales para la idea de abstracción situada, teniendo en cuenta que estos no resultan ser jerárquicos, pues una acción en el medio no implica necesariamente la realización ni la relación de otra acción.

Abstracción Situada	**Tipos de relaciones establecidas en el entorno**	***Relación nula***	Se hace uso de las herramientas del software pero sin establecer relación entre los objetos representados en el medio
		Relación de dependencia	A través de la interacción con el medio se establecen relaciones entre los objetos representados allí pero estas son superficiales.
		Relación de interdependencia	A través de la interacción con el medio se establecen relaciones entre los objetos representados allí acudiendo a expresiones cercanas a una formal.
		Construcción	Reconoce en las herramientas del medio posibilidades que corporeizan relaciones matemáticas.

Tabla 9: Indicadores de relaciones (abstracciones)

Sin embargo, consideramos que estas categorías no pueden trabajarse de manera disyunta para el análisis que se realizará, pues al ser complementarias entre sí consideramos que las categorías deberían complementarse de igual manera. Lo que generó entonces una tabla de categorías de doble entrada, donde horizontalmente encontramos el tipo de conexiones en la red, y verticalmente los tipos de relaciones establecidas en el entorno.

Creación de significados (relación dialéctica acciones-formalización)	***Conexiones mediales***	***Conexiones Formales***	***Conexiones Totales***
Relación nula			
Relación de dependencia			
Relación de interdependencia			
Construcción			

Tabla 10: Tabla de categorías versión inicial

Para llenar estas casillas hemos considerado algunas acciones y relaciones que se puedan enmarcar en ambos aspectos, sin embargo, siguiendo la misma idea hemos ampliado tanto las conexiones como las relaciones llamándolas *formalización de ideas y acciones sobre el medio* respectivamente; también cambiamos algunos nombres que creemos que describen mejor cada uno de los elementos y agregamos una fila y una columna que describen la parte más simple de cada elemento. Por último, presentamos una descripción de las categorías para que su interpretación sea más consistente.

		Formalización de ideas				
		Sin conexiones (0)	Conexiones nulas (1)	Conexiones mediales (2)	Conexiones amplias (3)	Conexiones formales (4)
Acciones sobre el medio	(Z)					
	Nula (A)					
	Descubrimiento (B)					
	Propositiva (C)					
	Fundamentada (D)					
	Creación de significados (relación dialéctica entre acciones y formalización)					

Tabla 11: Tabla de categorías, descripciones.

Por último, para completar los espacios, hemos descrito las intersecciones buscando el cumplimiento total de estas, así relacionamos entonces las acciones que realiza un estudiante sobre el medio, con la formalización de ideas que surge de tales acciones.

Las letras asignadas a cada categoría permitirán más adelante, usarlas para referenciar el indicador generado por el cruce de acciones sobre el medio y la formalización de ideas, así, la siguiente tabla muestra el código asignado a cada indicador, según los elementos que se cruzan para generarla.

		Formalización de ideas				
		Sin conexiones (0)	Conexiones nulas (1)	Conexiones mediales (2)	Conexiones amplias (3)	Conexiones formales (4)
Acciones sobre el medio	(Z)	(Z0)	(Z1)	(Z2)	(Z3)	(Z4)
	Nula (A)	(A0)	(A1)	(A2)	(A3)	(A4)
	Descubrimiento (B)	(B0)	(B1)	(B2)	(B3)	(B4)
	Propositiva (C)	(C0)	(C1)	(C2)	(C3)	(C4)
	Fundamentada (D)	(D0)	(D1)	(D2)	(D3)	(D4)
	Creación de significados (relación dialéctica entre acciones y formalización)					

Tabla 12: Tabla de códigos de indicadores

De esta forma queda descrita la versión final de categorías e indicadores para la abstracción situada en la siguiente tabla:

		Formalización de ideas				
		Sin conexiones (0)	Conexiones nulas (1)	Conexiones mediales (2)	Conexiones amplias (3)	Conexiones formales (4)
Acci	(Z)	No hay interacción	No establece relaciones	Establece relaciones	Modifica relaciones	Formula relaciones

	con el recurso de GeoGebra	entre objetos matemáticos:	entre objetos matemáticos	matemáticas previas	matemáticas de manera formal.
Nula (A)	Hace uso de los objetos GeoGebra dispuestos en el recurso pero no establece relaciones entre estos.	No hay evidencia de relaciones entre objetos GGB u objetos matemáticos	Usa las herramientas de GGB pero no establece relaciones entre estas. Sin embargo, establece relaciones entre los objetos matemáticos.	Usa las herramientas que le ofrece GGB, sin embargo no establece relaciones entre las mismas. Aun así, logra establecer relaciones entre los objetos matemáticos y modificar algunas relaciones matemáticas previas.	Usa las herramientas que le ofrece GGB, sin embargo no establece relaciones entre las mismas. Aun así, formula relaciones matemáticas cercanas a las formales.
Descubrimiento (B)	A través de la interacción con el medio se establecen relaciones entre los objetos GGB.	Mediante la interacción con el medio el estudiante establece relaciones entre objetos GGB pero no entre objetos matemáticos corporeizados a través de estos.	Las relaciones establecidas por el estudiante entre objetos GGB lo lleva a establecer relaciones entre los objetos matemáticos corporeizados a través de estos.	Las ideas matemáticas previas del estudiante se ven modificadas por las relaciones establecidas entre objetos GGB.	El estudiante formula ideas matemáticas cercanas a las formales gracias a la interacción con las herramientas ofrecidas por el medio,
Propositiva (C)	Construye y manipula objetos GeoGebra, reconociendo relaciones entre estos y otros dispuestos ya en el recurso.	El estudiante usa las herramientas y construye objetos estableciendo relaciones entre ellos, Sin embargo, no establece relaciones entre los	Establece relaciones entre objetos matemáticos a través de la construcción de objetos GGB.	El estudiante modifica sus ideas matemáticas previas a partir de las construcciones que realiza y las herramientas que usa.	El estudiante expresa y usa ideas formales relacionadas con las construcciones e interacciones en el medio.

		objetos matemáticos corporeizados a través de estos.			
Fundamentada (D)	Dota de significado los objetos GeoGebra en términos de las posibilidades que estos ofrecen.	Usa las herramientas que le ofrece GGB y establece relaciones entre estas y otros objetos que ya se encuentran en el recurso. Aun así, no establece relaciones entre los objetos matemáticos corporeizados a través de estos.	Utiliza las herramientas de GGB, establece relaciones entre estas y algunos de los objetos que hacen parte del aplicativo GGB. Lo anterior le permite establecer relaciones entre los objetos matemáticos.	Utiliza las herramientas que le ofrece GGB, establece relaciones entre estas y otros objetos que hacen parte del recurso. Gracias a esto es capaz de modificar relaciones matemáticas previas.	Además de utilizar las herramientas que le ofrece GGB y establecer relaciones entre estas, reconoce sus potencialidades y establece relaciones matemáticas de manera formal.
Creación de significados (relación dialéctica entre acciones y formalización)					

Tabla 13: Versión final tabla de indicadores de abstracción situada

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA

Introducción

En este capítulo se da a conocer el proceso metodológico llevado a cabo para el desarrollo de la presente investigación, el cual se desarrolla en varias partes. En primer lugar, se presentan el enfoque adoptado y las estrategias investigativas a utilizar, dando a conocer las fases que se distinguen en cada una de estas. Posteriormente, se hace alusión al contexto experimental (población y escenario) y a la definición de los roles que tienen los participantes en el estudio. También se realiza una presentación del objeto matemático a trabajar y la descripción de las actividades que se diseñarán a partir de este. Adicionalmente se dan a conocer los instrumentos utilizados para la recolección y análisis de los datos.

Para lo mencionado, se tienen en cuenta los propósitos de la investigación, que como se mencionó en un capítulo preliminar, son dos. En primer lugar, realizar una clasificación de recursos elaborados en el software GeoGebra, con el fin de propender por el máximo aprovechamiento de estos recursos en el aula. Esto debido a que por la escasa clasificación de estos, en ocasiones se dejan de lado las potencialidades del software, o bien, se desbordan en su uso, es decir, que se utilizan más herramientas de las necesarias para solucionar una tarea, esto conduce a pensar en qué tipo de tareas pueden proponerse en este tipo de entorno, aprovechando en gran medida su ambiente rico en herramientas, considerando además las posibilidades que este tiene para favorecer el pensamiento variacional. En segundo lugar, se pretende indagar por la incidencia que tiene cada tipo de recurso emergente de la clasificación, en el desarrollo del pensamiento variacional. Pues a pesar de lo planteado por el MEN (2006) en la normativa nacional respecto a las acciones que se deben realizar para desarrollar este tipo de pensamiento, la experiencia en el aula y la literatura situada en Educación Matemática, muestran que los procesos de enseñanza se están centrando solo en los métodos algorítmicos y se está olvidando el estudio de los procesos de variación y acumulación.

3.1. Enfoque investigativo

El enfoque que se adopta en este trabajo es de tipo *fenomenológico*, puesto que las acciones para llevar a cabo los dos propósitos principales del mismo están orientadas a la descripción, interpretación y análisis de información. En el primer caso, de documentos en los que se reporte el uso de recursos de GeoGebra sobre contenidos relacionados con variación; y en el segundo caso, sobre la incidencia que tengan los tipos de recursos en el desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes que interactúen con ellos. En este orden de ideas, y teniendo en cuenta la relación que debe existir entre el enfoque y la aproximación que orientarán el trabajo, esta última será de tipo *interpretativo*.

3.2. Estrategia investigativa

Considerando los intereses principales de la investigación se utilizan dos estrategias investigativas acordes a las actividades que se espera realizar a partir de cada uno. En primer lugar, se hace uso de la *revisión documental*, puesto que como se mencionó con antelación, se examinarán documentos en los que se reporte el uso de recursos de GeoGebra. Esta estrategia resulta pertinente ya que su fin último es la producción de clasificaciones o tipificaciones, y esto es precisamente a lo que está orientado uno de los propósitos de la investigación. Ahora bien, para hacer frente al segundo propósito del estudio, se utiliza la estrategia metodológica *entrevista basada en tareas*, pues para identificar cuál es la incidencia que tienen los diferentes tipos de recursos en GeoGebra en la movilización de procesos relacionados con el pensamiento variacional, resulta necesario que uno o varios grupos de estudiantes interactúen con los recursos y que además sean interrogados por los investigadores respecto a esta actividad.

Enseguida se presenta la descripción general de cada una de las estrategias adoptadas para el desarrollo de la investigación.

Una *revisión documental* consiste en la indagación de material impreso con el fin de describir e interpretar el contenido de dicho material, partiendo de ciertas consideraciones específicas (Camargo, 2018). Como se señaló en el párrafo anterior, la meta principal de esta estrategia es producir clasificaciones o tipificaciones. Los participantes son exclusivamente los investigadores, quienes seleccionan un conjunto de documentos a partir de una inquietud investigativa y ciertos criterios relacionados con los intereses de la investigación, estos criterios pueden derivar en un conjunto independiente de documentos que serán revisados según sus características. Además, los investigadores pueden plantear un conjunto de categorías preliminares que controlarán lo que se va a buscar en los documentos a revisar.

Por otro lado, una *entrevista basada en tareas* busca profundizar en fenómenos relacionados con procesos de pensamiento propios de la actividad matemática, a partir de la resolución de tareas. Los participantes son: por un lado, los estudiantes, quienes resuelven determinadas tareas propuestas por los investigadores; estos a su vez son los encargados de formular preguntas a los estudiantes con el fin de que ellos den cuenta y razón de manera clara, concreta y precisa, de lo que están pensando y las estrategias que están usando para resolver las tareas propuestas. En la interacción que se genera no solo intervienen los entrevistados y los entrevistadores, sino que los recursos disponibles y la tarea misma toman un papel fundamental. Los investigadores plantean unas preguntas previstas con antelación, de tal suerte que se rete a los entrevistados a pensar en voz alta y sus ideas sean transmitidas de manera acertada y sus estrategias de trabajo sean reflejadas sin que esto involucre suspender las actividades que están desarrollando. Los investigadores deben estar preparados para hacer preguntas nuevas y manejar las situaciones de contingencia que puedan presentarse en el transcurso de la entrevista.

En cada una de las estrategias expuestas, se distinguen ciertas fases las cuales serán descritas a continuación. En una *revisión documental* inicialmente deben definirse los criterios a considerar para seleccionar el material impreso; posteriormente se realiza la selección de este, después se construyen categorías para revisar el material seleccionado, se procede a realizar la revisión teniendo en cuenta tales categorías, se analizan los datos y finalmente, a partir de este análisis, se da lugar a la fase de producción de resultados. En una *entrevista basada en tareas* se procede, en primer lugar, a fundamentar conceptualmente la entrevista; esto con el fin de tener un marco teórico que permita controlar la toma de decisiones acerca del contenido, la estructura y la complejidad de las tareas, así como para definir las preguntas que hará el investigador. Después, se diseña la entrevista; esto incluye la tarea, las preguntas del investigador y el tiempo que se invertirá en la misma. Seguido a esto, se prepara una versión preliminar de la tarea y de la intervención, para después realizar la aplicación de una prueba piloto a partir de la que se determinarán las modificaciones pertinentes. Después de esto se propone la resolución de la tarea a los estudiantes con las intervenciones del investigador, se analizan las respuestas obtenidas y por último se da lugar a la fase de producción de resultados.

3.3. Contexto experimental

Los documentos utilizados para llevar a cabo la primera estrategia investigativa son recuperados de diferentes bases de datos, a saber, Scopus, Science Direct, Springer, Redalyc, Doaj y Scielo, las cuales son seleccionadas debido al reconocimiento que tienen en el campo investigativo, en consecuencia, la información a la que se tiene acceso resulta ser válida y confiable. El proceso de revisión de los documentos y los resultados emergentes de allí se encuentran documentados en el capítulo 2 del presente trabajo.

La segunda estrategia investigativa se desarrolla en el club de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, espacio del cual uno de los asesores del presente trabajo es el responsable. El rol de los autores también es el de investigadores y los participantes del club son los entrevistados. Son estudiantes de colegios públicos cuyas edades oscilan entre los 12 y los 18 años y los niveles que cursan están entre grado 6° y grado 11°, y se encuentran participando allí por sus capacidades especiales en cuanto al trabajo con matemáticas.

El club es seleccionado debido a que permite el trabajo con estudiantes de diferentes edades en un mismo espacio y por la facilidad de acceso que tienen los investigadores allí, este club está separado en dos grupos según sus edades. Los estudiantes seleccionados para ser entrevistados son cinco, cuatro niños y una niña y sus edades están entre los 14 y los 16 años, fueron seleccionados debido al nivel académico que cursan (9° y 10°), por su antigüedad en el club y por las referencias de participación que se tiene de ellos.

3.4. Objeto Matemático

La razón de cambio resulta ser un concepto transversal en el currículo de matemáticas de la educación básica y media. Además, constituye una parte crucial en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, en especial cuando deben asociarlo con funciones y su derivada en niveles de escolaridad avanzada. Este concepto también establece vínculos entre dos o más disciplinas, pues permite modelar y solucionar problemas que tienen su origen en otras ciencias o bien, en situaciones inherentes a la vida práctica. Según Moreno, Moctezuma y Garnica (2015), ejemplos de esto pueden ser la cinética química, las inversiones financieras, la dinámica poblacional o el gasto energético, pues son situaciones que involucran relaciones funcionales y en las que se hace posible determinar razones de cambio entre magnitudes variables.

Las tareas propuestas en esta investigación versarán alrededor del concepto de razón de cambio, pues consideramos que el abordaje de este permite dar respuesta a los requerimientos planteados en la normativa nacional en lo referente a la formación matemática en educación básica y media. En particular, los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998), demandan que el profesor debe propiciar situaciones de aprendizaje que involucren el contexto del

estudiante, pues este tiene que ver con os ambientes que lo rodean y que le permiten dotar de sentido a las matemáticas que aprende.
A continuación, presentamos una reconstrucción histórica de la razón de cambio. Para la realización de esta nos basamos en el análisis histórico epistemológico que presentan Camargo y Guzmán (2005) sobre los conceptos de razón de cambio y pendiente. Las autoras hacen uso de las siguientes categorías, propuestas por Ruiz (1993) en su tesis doctoral:

- *Modificación de las concepciones asociadas a la evolución histórica de los conceptos de razón de cambio y pendiente*. En esta categoría se identifican:
  I. Situaciones problema tratadas en diversos periodos
  II. Invariantes de los que se ha tomado consciencia colectiva
  III. Representaciones simbólicas utilizadas
- *Evolución del estatus matemático.* En esta categoría se reconocen:
  I. *Nociones protomatemáticas*: estas se movilizan exclusivamente de manera implícita en diferentes usos y prácticas. Sus propiedades son utilizadas para resolver algunos problemas; sin embargo, estas nociones no son reconocidas como herramientas de estudio o como objetos de estudio.
  II. *Nociones paramatemáticas:* se consideran herramientas útiles, además, son conscientemente utilizadas, reconocidas y seleccionadas para la resolución de diferentes problemas; sin embargo, estas nociones no son tratadas como objetos de estudio.
  III. *Nociones matemáticas:* se encuentran bajo el control de una teoría y se les otorga el tratamiento de objetos de estudio.

El estudio de las categorías mencionadas *a priori* permite reconocer cuatro momentos clave de evolución de los conceptos de razón de cambio y pendiente. Estos son, la búsqueda de regularidades y medición, el establecimiento de razones y proporciones, el estudio de movimientos mediante gráficos y los procedimientos heurísticos para estudios variacionales. A continuación, presentamos para cada uno de estos momentos, una breve contextualización de la época en la que tienen lugar y una relación entre los diferentes aportes o problemas que originaron el estudio de la razón de cambio y la pendiente y sus principales exponentes. En adición a lo anterior, se alude a la categorización que realizaron en su trabajo Camargo y Guzmán (2005), teniendo en cuenta la propuesta de Ruiz (1993).

1. Búsqueda de regularidades y medición

La necesidad de comprender el mundo y los cambios que se presentan en él ha sido una prioridad para la humanidad desde el origen de esta. La concepción matemática de los babilonios y los egipcios era práctica y a partir de esta lograron establecer hace algunas relaciones entre los cambios que sufrían las diferentes magnitudes que estudiaban. Inicialmente hicieron esto de forma cualitativa, sin embargo, posteriormente también lograron hacerlo de forma cuantitativa. La preocupación por encontrar y mantener regularidades en las medidas y la aplicación del sentido práctico de la variación, se reflejan en obras como las pirámides egipcias o en las tablillas babilonias en las que se registraban valores cambiantes. Por ejemplo, en la construcción de las pirámides, el problema consistía en mantener una pendiente uniforme en cada cara y la misma en las cuatro caras de la pirámide.

Exponentes	Ubicación temporal	Problemas tratados / Aportes
Egipcios	Hace más de 3000 años	Búsqueda de regularidades en las medidas de obras arquitectónicas como las pirámides egipcias
Babilonios		Búsqueda de regularidades en los fenómenos naturales a partir de tablillas en las que se registraban valores cambiantes

Según Camargo y Guzmán (2005), en lo que compete al *estatus matemático* en esta época, la razón de cambio se entiende como una *noción protomatemática*, puesto que está presente de manera implícita en la búsqueda de regularidades de las medidas para los trabajos de construcción. Por otro lado, la pendiente se reconoce como una *noción paramatemática*, pues en la construcción de las pirámides se utilizaba una herramienta en forma de escuadra que permitía conservar constante la inclinación de las paredes de las pirámides. Como invariante se reconoce la relación entre la subida y el avance al medir la inclinación de una pared. Por último, como representaciones se reconocen las cuerdas con nudos amarradas en forma de triángulos rectángulos y los instrumentos que fueran de ayuda para establecer una relación entre el avance y la subida en la construcción de las pirámides.

2. Establecimiento de razones y proporciones

Los griegos, contrario a los egipcios y babilonios, comenzaron a realizar trabajo matemático por interés intelectual más que por resolver problemas de la vida práctica. El trabajo realizado por ellos produjo un gran avance en la geometría, pues convirtieron en objeto de estudio lo que anteriormente solo se había trabajado de manera empírica. Entre los principales exponentes que realizaron aportes al estudio teórico realizado por los griegos se encuentran: Tales de Mileto, Pitágoras y su escuela, Eudoxo, Euclides y Arquímedes.

Exponentes	Ubicación temporal	Problemas tratados / Aportes
Tales de Mileto	Año 585 a.C.	Los estudios realizados por Tales se centraron en las proporciones. Con dichos estudios nacen los conceptos de razón geométrica, comparación entre magnitudes geométricas y proporción, como herramientas pertinentes para analizar relaciones entre magnitudes de manera cuantitativa. Además, la teoría de la semejanza propuesta por Tales fue utilizada en la toma de medidas indirectas para calcular la altura de una de las pirámides egipcias comparando su sombra con la de una vara vertical.
Pitágoras	Año 540 a.C.	La escuela pitagórica basó su trabajo alrededor de la idea que sostiene que “todo es número”. Pitágoras centró el desarrollo de su teoría de proporciones en mostrar la armonía del cosmos al determinar razones numéricas entre cantidades discretas y la comparación entre estas para establecer proporciones.
Eudoxo	Año 408 a.C.	Eudoxo reformuló la teoría de las proporciones y además aclaró que para efectos de la comparación de magnitudes, estas deben ser del mismo tipo.
Euclides	Año 300 a.C.	Euclides hace dos tratamientos distintos para las proporciones, uno para números y otro para magnitudes.
Arquímedes	Año 287 a.C.	El trabajo de Arquímedes además de tener una intención intelectual tuvo una intención práctica. Utilizó la razón geométrica para obtener fórmulas para área y volúmenes y por el estudio de curvas generadas por movimientos. También hizo uso de las matemáticas para la confección de máquinas para el trabajo científico y la guerra. Adicionalmente, discute sobre la variabilidad de la dirección del movimiento en términos cuantitativos.

Ahora bien, respecto al *estatus matemático*, la razón de cambio se reconoce nuevamente como una *noción protomatemática*, pues está implícita en el concepto de razón. Por otro lado, se considera la pendiente como una *noción paramatemática*, puesto que se usa como herramienta en la medición directa o indirecta para determinar la razón trigonométrica entre los catetos de diferentes triángulos rectángulos semejantes. En cuanto a las situaciones problemáticas involucradas, se encuentran las mediciones directas e indirectas y la caracterización de movimientos usando la tangente a las curvas. Como invariantes se reconocen las razones geométricas entre magnitudes homogéneas. Por último, como representaciones se tiene que las razones numéricas eran expresadas mediante razones entre segmentos.

3. Estudio de movimientos mediante gráficos

Durante la Baja Edad Media, hacia la primera mitad del siglo XIV se originan las raíces de un cambio en la orientación del pensamiento matemático. Los matemáticos del colegio Merton[8], empezaron a establecer relaciones entre las matemáticas y la física, esto a su vez dio origen a la cinemática, que se constituyó en la base del cálculo.

Exponentes	Ubicación temporal	Problemas tratados / Aportes
Jordano de Namore	Años 120? - 1237	Se interesó principalmente en el estudio de relaciones entre magnitudes físicas. Fue el autor de la primera formulación correcta de la ley del plano inclinado. La inclinación del plano se expresa a través de la razón geométrica entre las medidas de segmentos respectivos. Esto caracteriza un movimiento de razón de cambio constante mediante las razones geométricas entre magnitudes
Nicolás de Oresme	Años 132? - 1382	Orientó su interés hacia la cuantificación de fenómenos de variación. Fue quien introdujo las representaciones geométricas para explicar relaciones entre magnitudes que varían. Representaba la medida de variables físicas mediante segmentos y la variación de una magnitud mediante figuras geométricas como triángulos rectángulos, trapecios o figuras con lados curvos. También caracterizó el movimiento en el que la velocidad cambia de manera constante respecto al tiempo, como un movimiento de razón constante. A través de sus dibujos explicó el Teorema de la velocidad media para cuantificar la velocidad en un movimiento uniformemente acelerado. Otro de sus aportes fue la caracterización del punto de máxima velocidad como aquel en el que la razón de diferencias entre las velocidades es muy cercano a cero.
Galileo Galilei	Años 1564 – 1642	Describió el mundo físico por medio de cantidades mediables (tiempo, distancia, masa y fuerza). Utilizó las representaciones geométricas de Oresme para estudiar velocidades e introdujo métodos cuantitativos específicos para determinar el teorema de la velocidad media. Además, lo explicó usando razones geométricas.

En este momento el *estatus matemático* de la razón de cambio y la pendiente fue de *nociones paramatemáticas*, pues estaban siendo utilizadas para dar explicaciones en torno a las leyes de la mecánica. Como invariante, se identifica el reconocimiento de la constancia de la razón

[8] El Colegio Merton es uno de los colleges que hacen parte de la Universidad de Oxford en el Reino Unido.

de cambio en movimientos uniformemente acelerados. Como representaciones se reconocen las utilizadas por Oresme, es decir los segmentos y las figuras geométricas.

4. Procedimientos heurísticos para estudios variacionales

En los siglos XVI y XVII se origina el desarrollo de la industria y la productividad, esto a su vez genera la necesidad de crear métodos matemáticos para resolver problemas como el movimiento de los cuerpos impulsados, los centros de gravedad, el calor, los ángulos de refracción, entre otros. Esto se debe a que los métodos numéricos y geométricos existentes hasta ese momento, no eran suficientes. A raíz de lo anterior surgió un campo investigativo en matemáticas en el que tuvieron origen las nociones de variable y función analítica, como herramientas para estudiar las variaciones entre magnitudes.

Exponentes	Ubicación temporal	Problemas tratados / Aportes
Descartes	Años 1618 – 1649	De manera casi simultánea con Fermat, desarrolló la idea de que la dependencia entre dos cantidades variables podía ser expresada a través de una ecuación. También utilizó la idea proveniente de los griegos, respecto a la utilidad de la tangente para la caracterización de curvas. También, desarrolló un método de construcción geométrica para caracterizar rectas tangentes a curvar y describir por medio de ellas los movimientos estudiados.
Fermat	Años 1623 – 1660	En su trabajo se encuentra planteada por primera vez la dependencia entre dos magnitudes, la razón entre la diferencia de los valores de la magnitud dependiente, en puntos próximos y la razón de cambio del incremento de la magnitud dependiente respecto al incremento de la magnitud independiente. Todo esto por medio de ecuaciones. Su interés principal fue crear un método que le permitiera calcular los puntos máximos y mínimos de una curva, es decir, los puntos en los que la razón de cambio entre las magnitudes es muy cercana a cero. Este se conoce como el método de adigualdad, el cual introduce una noción primitiva de lo que es un infinitesimal. A partir de este método Fermat también encuentra como trazar la tangente a una parábola, para caracterizarla.
Guillaume de l'Hopital	Año 1696	Realizó la publicación del que se considera el primer libro de texto de cálculo. Allí resalta la importancia de las gráficas para representar y caracterizar los cambios de un par de magnitudes dependientes.

Con el trabajo realizado por Descartes y Fermat, surgieron el *cálculo diferencial,* gracias al estudio de las razones de diferencias entre magnitudes y las razones de cambio infinitamente pequeñas y la *geometría analítica*, debido al estudio de las razones de cambio invariantes y la caracterización de curvas. Adicionalmente se llegó a los conceptos de razón de cambio y de pendiente para caracterizar las ecuaciones lineales.

En este momento histórico, la razón de cambio y la pendiente aún tenían el estatus de *nociones paramatemáticas*, debido a que se utilizaron como herramientas para resolver problemas de tipo matemático, como el cálculo de puntos críticos e identificación de rectas tangentes a curvas. Una situación problemática por destacar es que los matemáticos buscaron formas alternativas de trabajar en matemáticas. Como invariante se reconoce el trabajo con razones de cambio homogéneas entre las diferencias fundamentales de los valores de una función en puntos próximos y los valores de una magnitud independiente correspondientes. Por último, se identifican como representaciones la notación simbólica para expresar la razón de las diferencias mencionadas previamente y las gráficas de estas.

5. Trabajos posteriores a Descartes y Fermat

En seguida, relacionamos algunos de los trabajos que surgieron en años posteriores al cuarto momento histórico, y que también aportaron al nacimiento del cálculo diferencial y la geometría analítica.

Exponentes	Ubicación temporal	Problemas tratados / Aportes
Isaac Barrow	Años 1630 - 1677	Centró su trabajo en la caracterización de tangentes, pero introdujo una interpretación infinitesimal a este problema. Realizó algunas modificaciones al método de Fermat y llegó a conclusiones similares.
Roberval y Torricelli	Año 1640	Introdujeron interpretaciones cinemáticas de las curvas que estudiaban. Identificaban la gráfica como la representación de la relación de dependencia entre dos magnitudes y consideraban la recta tangente en un punto de la curva, como la forma de expresar la razón de cambio de la magnitud dependiente respecto de la independiente. Roverbal logró determinar tangentes de todas las curvas conocidas en la época y además introdujo la aceptación de las razones de cambio heterogéneas.
Leibniz	Año 1666	Trabajo la razón de diferencias entre valores infinitamente pequeños, o sea, el diferencial. A partir de esta razón de diferencias encontró una ecuación para determinar la ecuación de la recta tangente y encontrar razones de cambio instantáneas.

En este momento, el estatus de la razón de cambio y la pendiente ya era de *nociones matemáticas*, puesto que fueron reconocidas como objetos matemáticos centrales dentro del cálculo y la geometría analítica. Las situaciones problemáticas en las que se hizo uso de la razón de cambio fueron todas en las que se requería determinar una razón de cambio instantánea como la velocidad instantánea, la tasa de crecimiento instantánea, entre otras. Por otro lado, se utilizó la pendiente en el estudio de ecuaciones lineales. Como representaciones se reconocen las expresiones geométricas como el triángulo diferencial y el uso de variables dependientes escritas en términos de variables independientes.

Las etapas descritas previamente, se describen a partir del siguiente esquema.

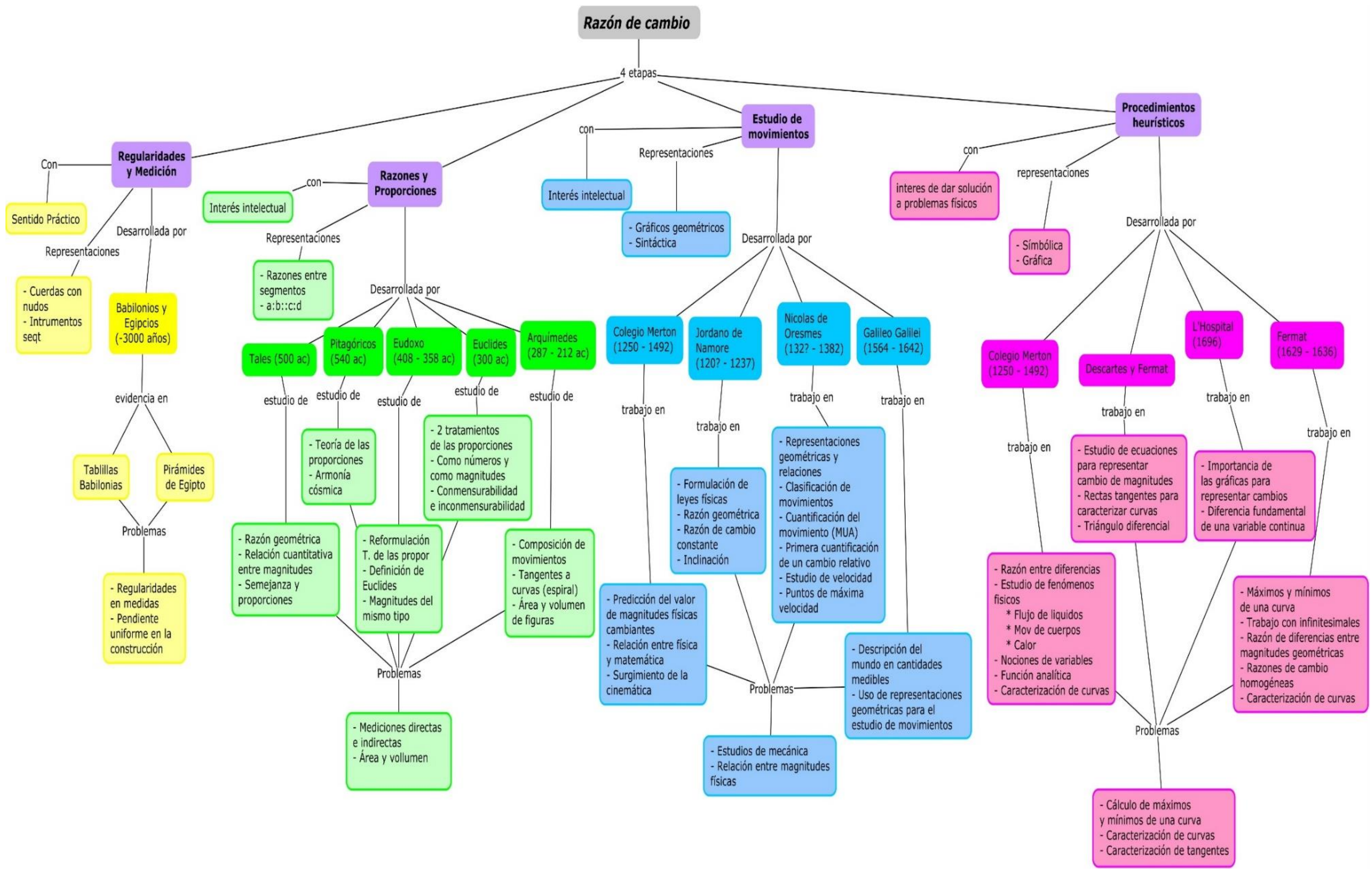


Figura 8: Mapa conceptual - Razón de cambio

3.5. Diseño de tareas:

Para abordar el objeto matemático mencionado previamente se diseñaron un conjunto de recursos GeoGebra, distribuidos entre las categorías emergentes de la revisión de material bibliográfico. Al ser cuatro sesiones de implementación en clase, se trabajó cada etapa descrita en la sección anterior en cada clase respectivamente, es decir: La etapa de búsqueda de regularidades y medición en la primera sesión; la etapa de establecimiento de razones y proporciones en la segunda; la etapa de estudio de movimientos gráficos en la tercera y la etapa de procedimientos heurísticos para estudios variacionales en la cuarta. Al realizar el diseño de los diferentes recursos, según la intencionalidad de los investigadores para cada sesión, los recursos fueron acomodándose a una respectiva categoría, de tal suerte que quedaron distribuidos de la siguiente manera en las cuatro sesiones:

- Sesión 1:
    - Recurso 1: *Exploración de situaciones y formulación de conjeturas.*
    - Recurso 2: *Verificación de propiedades*
    - Recurso 3: *Evaluación*
- Sesión 2:
    - Recurso 1: *Verificación de propiedades*
    - Recurso 2: *Exploración de situaciones*
- Sesión 3:
    - Recurso 1: *Verificación de propiedades*
    - Recurso 2: *Exploración de situaciones y formulación de conjeturas.*
    - Recurso 3: *Realización de procesos algorítmicos*
- Sesión 4:
    - Recurso 1: *Exploración de situaciones y formulación de conjeturas.*
    - Recurso 2: *Exploración de situaciones y formulación de conjeturas.*
    - Recurso 3: *Exploración de situaciones y formulación de conjeturas*.

En la planeación de los recursos no se encuentran incluidos recursos de tipo *Modelación* y tipo *Ilustración de propiedades o representaciones.* El primero no se incluye debido a que no se presenta a los estudiantes ninguna situación que puedan modelar y solucionar a partir de GeoGebra y el segundo debido a que este es usado solamente por el docente y el estudiante no entra en manipulación directa con este.

La preparación de los recursos de GeoGebra buscaba el alcance conceptual de las etapas descritas previamente, de tal suerte que al finalizar con su aplicación se llegara a una primera aproximación del análisis de funciones en relación con los elementos relativos al cambio. Y la programación de los recursos se encontraba desarrollada en pro de este alcance, a continuación se describe a grandes rasgos la organización de cada recurso y lo que buscaba cada uno. La descripción completa de las tareas y recursos se encontrará en la planeación general de las actividades.

- En la primera sesión, se busca describir la pendiente como una razón de cambio constante, los tres recursos están programados de tal forma que esto pueda ser interpretado por los estudiantes. En el primer recurso, se busca particularmente que al ubicar unos puntos en el plano cartesiano, las coordenadas de estos sean interpretadas a partir de las magnitudes involucradas en la situación (cantidad de harina y cantidad de azúcar) y luego, a partir del uso de la hoja de cálculo se encuentre el valor de la razón de cambio, estos puntos en el plano cartesiano estarán ubicados de tal suerte que representarán una recta. El segundo recurso, de manera similar, está programado de tal forma que los estudiantes aprovechen el dinamismo de GeoGebra y al mover dos puntos que definen una recta (que representan una carretera), puedan encontrar el porcentaje de inclinación de esta a partir de la situación descrita. El tercer recurso de esta sesión busca evaluar los elementos trabajados en los dos primeros a partir de 3 situaciones de cambio constante que los estudiantes deben interpretar.

- Recurso 1: https://www.geogebra.org/m/qcmerjjq
- Recurso 2: https://www.geogebra.org/m/ghgthvvw
- Recurso 3: https://www.geogebra.org/m/ajw8tw4w

• En la segunda sesión se busca que los estudiantes construyan la idea de función como la unión infinita de segmentos y tengan una primera aproximación a la noción de razón de cambio promedio. El primer recurso se programó de tal forma que los estudiantes puedan controlar por cuántos segmentos se encuentra formado un tramo de la función a partir del movimiento de un deslizador, este controla varios aspectos relacionados al cambio, a saber, el cambio en x y y, la pendiente de cada segmento y la cantidad de segmentos. El segundo recurso busca tener un acercamiento mayor a la noción de razón de cambio promedio a partir del control de una recta secante sobre una función, esta recta, de manera similar está controlada por un deslizador que varía el cambio promedio entre un punto y otro y el dinamismo de los puntos permite el análisis en diferentes partes de la función.

  - Recurso 1: https://www.geogebra.org/m/e24x4693
  - Recurso 2: https://www.geogebra.org/m/hfqzgfbt

• En la tercera sesión se busca que los estudiantes construyan una expresión que represente la razón de cambio promedio y usen esta para describir los cambios en una función. El primer recurso se diseñó en pro de que al ingresar ciertos valores se generen segmentos inclinados de cambio constante en x, y cambio en y determinado por el valor ingresado, estos segmento, al ser contiguos, formarán una aproximación a una curva o función. El segundo recurso, compuesto por dos situaciones busca que se construya una expresión matemática que permita relacionar dos puntos sobre una función a partir del cambio del uno al otro, los puntos sobre la función son móviles y en cada situación las coordenadas de estos están representados de diferente manera. El tercer recurso permite calcular la razón de cambio promedio entre dos puntos sobre una función, a diferencia del recurso anterior, los puntos no son móviles por si solos sobre la función, sino que es la coordenada en x la que permite el dinamismo de estos puntos para este caso.

  - Recurso 1: https://www.geogebra.org/m/y5ashwwu
  - Recurso 2: https://www.geogebra.org/m/usdfvvqm
  - Recurso 3: https://www.geogebra.org/m/m7ask7pb

- En la cuarta sesión se buscaba que a partir de los elementos desarrollados en los recursos pasados se lograran realizar descripciones con respecto al cambio y una primera aproximación a la curva "derivada". El primer recurso estaba programado pensando en dar una interpretación geométrica a los respectivos cambios en x como en y y a la relación de razón de cambio que se puede describir a partir de estos dos, estos objetos estaban controlados por un deslizador que cambiaba la cantidad de intervalos en la función y hacía la razón de cambio promedio más cercana entre dos puntos. El segundo recurso se diseñó para que los estudiantes al mover un punto sobre una función puedan visualizar cuál es el cambio que tiene la función en este, esto se realiza a partir del rastro que deja un segmento que representa la magnitud de ese cambio. Y el tercer recurso busca establecer la relación entre la curva de cambio y la función original, ya que su programación está desarrollada en pro de qué los estudiantes describan la forma de la función original a partir de los que puedan observar en la curva de cambio. El segundo y el tercer recurso están diseñados para que sea el movimiento de los puntos el que permita realizar la construcción de los respectivos rastros.
    - Recurso 1: https://www.geogebra.org/m/ttubtf9s
    - Recurso 2: https://www.geogebra.org/m/dhgbtmzm
    - Recurso 3: https://www.geogebra.org/m/ewbdpsac

3.6. Recolección y registro de la información

Para recolectar la información se hace uso del programa Camtasia. Este permite grabar la pantalla del ordenador, así como el audio y video de la actividad de los estudiantes al llevar a cabo el proceso de resolución de las tareas. Posterior a la grabación de las entrevistas, se procede a realizar la transcripción de los episodios y a seleccionar los fragmentos en los que los estudiantes identifican condiciones de variación y cambio. Además, también se recolecta el material manuscrito de los estudiantes, así como grabaciones de audio adicionales y los archivos GeoGebra sobre los cuáles los estudiantes realizaron su actividad.

3.7. Análisis

Para analizar la información recolectada a través de las entrevistas, los vídeos, las transcripciones, archivos y material manuscrito de los estudiantes se utilizarán las categorías propuestas por Carlson et al. (2003), las cuáles constan de cinco acciones mentales y cinco niveles del razonamiento covariacional y las categorías emergentes de la construcción del marco teórico de Abstracción Situada. Las categorías propuestas por Carlson et al. (2003) permiten analizar y ubicar aquellos comportamientos, resultados, fragmentos y demás, que describan las habilidades de razonamiento presentes en la representación, descripción e interpretación de situaciones que involucren variación y cambio. Las categorías de Abstracción Situada son emergentes del proceso de construcción del marco teórico, estas permiten analizar las acciones que realiza el estudiante directamente sobre el recurso y cómo estas acciones se relacionan con sus conocimientos previos y sirven de base para la transformación de estos, además de permitir el análisis de una "red" de conocimiento propia de cada sujeto.

CAPÍTULO 4: CONSTRUCCIÓN DE CATEGORÍAS DE RECURSOS

Como se mencionó en un capítulo preliminar, uno de los propósitos de esta investigación es realizar una clasificación de recursos elaborados en GeoGebra (GGB), con el fin de propender por el máximo aprovechamiento de estos en el aula. Considerando lo anterior, se hace uso de la estrategia investigativa *revisión documental*, puesto que, para lograr la consecución del propósito mencionado con antelación, se examinarán documentos en los que se reporte el uso de recursos GeoGebra. Esta estrategia resulta pertinente ya que su fin último de es la producción de clasificaciones o tipificaciones. Los documentos examinados fueron recuperados de bases de datos como Scopus, Science Direct, Springer, Redalyc, Doaj y Scielo. Estas fuentes fueron seleccionadas debido al reconocimiento que tienen en el campo investigativo; en consecuencia, la información a la que se tiene acceso resulta ser válida y confiable. En adición a lo anterior, se llevó a cabo la revisión de las memorias de algunos eventos involucrados directamente con el uso de GGB, tales como, el Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación, el Encuentro de Clubes GeoGebra y el Congreso Latinoamericano de GeoGebra.

En los párrafos que siguen se dan a conocer los criterios establecidos para la búsqueda y selección del material a analizar. Seguido a esto, se da cuenta y razón el proceso llevado a cabo para la construcción de las categorías producto de la revisión documental.

4.1. El proceso de construcción:

Inicialmente, se establecieron los criterios para la selección del material. En primer lugar, se tuvo en cuenta que en los documentos se presentara el trabajo con uno o más recursos elaborados en GeoGebra y que además los contenidos abordados a partir de estos fueran alusivos al Cálculo. En segundo lugar, se estableció que únicamente se seleccionarían documentos en los idiomas español, inglés y portugués, debido a la facilidad para la lectura de estos por parte de los autores. La búsqueda de los documentos se realizó en las bases de datos mencionadas en un apartado anterior. El mecanismo utilizado para buscar el material fue la introducción de palabras clave. Se utilizaron palabras como: "GeoGebra" y otras relacionadas con conceptos y procesos del Cálculo (variación, acumulación, aproximación, función, integral, derivada, …). En total se seleccionaron 105 documentos.

Una vez seleccionados los documentos, se procedió a determinar qué aspectos se observarían de los mismos. Se centró la atención en los siguientes elementos:

- Información general del documento: título, autores, país, año de publicación.
- Tema del cálculo abordado: funciones, límites, derivadas, integrales, entre otros.
- Descripción del proceso o procesos generales de la actividad matemática involucrados en el uso del recurso expuesto en el documento. Esto hace alusión a los procesos descritos en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación colombiano.
- Descripción del uso del GeoGebra. Esto se refiere a cómo se utilizó el software, de acuerdo con lo planteado en cada documento.

- Herramientas de GeoGebra utilizadas en el recurso. Por ejemplo, gráfica de funciones, traza, deslizadores, entre otras.
- Vistas de GeoGebra a las cuales tiene acceso el usuario del recurso (algebraica, geométrica, hoja de cálculo…).

Como antecedente a lo presentado en este apartado, Jiménez (2018) plantea en una categorización de recursos elaborados en GGB que elaboró a partir de su experiencia; esta fue dada a conocer mediante una conferencia. Debido a la relación entre lo expuesto en dicha conferencia y los propósitos de esta investigación, se consideró pertinente adicionar el siguiente elemento:

- En cuál de las categorías propuestas en la conferencia, podrían enmarcarse los recursos presentados en los diferentes documentos.

Posteriormente, se tomó la decisión de registrar y organizar los elementos mencionados con antelación en un formato de Excel como la que se muestra a continuación:

Nombre del documento	Autores	Año	País	Tema de cálculo involucrado	Descripción del proceso de la actividad matemática involucrado	¿Cómo se usa GeoGebra?
Comprensión conceptual de la integral definida con GeoGebra	Tatar & Zengin	2016	Turquía	Integral definida: Suma superior, suma inferior, sumas de Riemann	Razonamiento	Los aplicativos de Geogebra con los que trabajaron los futuros profesores fueron usados para que a través de la exploración (modificando los extremos del intervalo y la cantidad de particiones), fuera posible evidenciar el comportamiento de las sumas superiores e inferiores, y además observar la relación que existe entre estas y la suma de Riemann.

Figura 9: Primera parte – Tabla de registro de la información

¿Qué herramientas de GeoGebra se usan?									
Arrastre	Traza	Gráfica de funciones	Deslizadores	Comandos geométricos	Botones	Casillas de verificación	Secuencias	Listas	Otra
		x	x					x	

Figura 10: Segunda parte – Tabla de registro de la información.

En el formato se incluyeron las herramientas que a consideración de los autores, son utilizadas con mayor frecuencia en la elaboración de los recursos GGB.

¿A qué vistas de GeoGebra tiene acceso el usuario?					Categoría en la que se encuentra enmarcado de acuerdo con la propuesto en la conferencia del profesor William Jiménez			
Algebraica	Geométrica	3D	CAS	Hoja de cálculo	Conjetura	Acompañamiento	Aprendizaje autónomo	Calculadora
x	x					x		

Figura 11: Tercera parte – Tabla de registro de la información

Cabe aclarar que en las figuras 1, 2 y 3 se muestran partes diferentes del formato en el que se registró la información. No se presenta una sola imagen de esta por cuestiones de espacio.
Después de lo mencionado en párrafos anteriores, el trabajo realizado consistió en la selección aleatoria de 3 de los 105 documentos. Seguido a esto se acordó leer los documentos seleccionados aleatoriamente en su totalidad para luego, extraer la información necesaria para diligenciar el formato. Esto con el ánimo de determinar si los criterios de interpretación eran compartidos por los autores de este estudio. El ejercicio de revisión fue realizado por los autores y asesores de la investigación. Posteriormente, se dio lugar a una discusión conjunta en la que se compararon los registros elaborados en el formato y las interpretaciones dadas por cada miembro del equipo. A partir de lo anterior se decidió si la información recuperada era suficiente para cumplir el propósito de la revisión documental.
Al llevar a cabo la revisión del ejercicio, se acordó agregar a la tabla las herramientas*: barra de entrada* y *texto*. Además, se añadió una casilla denominada *"medida"*; esta hace referencia al uso de las herramientas: *área, perímetro* y *longitud de segmento*. En adición a lo anterior, se convino crear una columna al final de la tabla llamada "comentarios adicionales". Se concertó que allí se registrarían la finalidad con la que fue creado el recurso expuesto y una justificación respecto a la ubicación de este en las categorías propuestas en la conferencia de Jiménez (2018). También se concluyó que algunos de los recursos podrían enmarcarse en más de una de estas categorías, o bien, en ninguna.

Después de consolidar la información que sería abstraída a partir del ejercicio realizado con cada uno de los documentos elegidos al azar, se procedió a leer los documentos restantes. Para este fin, el material se organizó por año de publicación y se tomó la decisión de realizar la lectura de los documentos empezando por los más recientes. El documento más reciente fue publicado en el año en curso, y el más antiguo fue publicado en el año 2004.

Dado que el formato de registro de la información incluye un espacio en el que se alude a las herramientas utilizadas en los recursos, surge un interrogante por parte de los autores. Este en relación con las herramientas de GGB que no estaban incluidas en las versiones del software que fueron usadas para la construcción de los recursos expuestos en los documentos más antiguos. Se procedió a indagar al respecto y se evidenció que en las versiones del software anteriores al año 2009, no se contaba con ciertas herramientas o vistas incluidas en el formato de registro. Por tal razón, se decidió no tener en cuenta los documentos cuya publicación data de años anteriores al 2009. Este criterio excluyó 8 de los 105 documentos.

Durante el proceso de lectura, abstracción y registro de información, surgieron dos criterios de exclusión adicionales. Se prescindió de 3 documentos debido a que, aunque en el cuerpo de estos se encontraban palabras clave que coincidían con la búsqueda realizada, no se exponía el uso de un recurso GGB. Por otro lado, fueron eliminados otros 3 documentos, en este caso porque más que presentar el uso de un recurso, pretendían mostrar las bondades de GGB para la construcción de este.

Una vez se realizó la lectura de los documentos, se consideró pertinente dar inicio al análisis de la información registrada. Para este fin, la atención se centró principalmente, en la casilla de comentarios adicionales y en la referente al uso de GeoGebra. Al observar la información que se encuentra en esta casilla, fue posible dar cuenta y razón de la recurrencia de ciertas características entre los diferentes recursos expuestos en los documentos. La categorización se realizó en función de la finalidad con la que GGB se involucra en la actividad matemática. De lo anterior, se obtuvieron seis categorías, estas se describen a continuación:

- Categoría 1 – Modelación de situaciones problema: Se presenta al usuario un problema de modelación y este usa GGB para darle solución, es decir, que en este caso el recurso se utiliza para modelar una situación que sea objeto de estudio. Es posible que previo al uso de GGB se realice un trabajo de exploración en algún otro ambiente y GGB se utilice como herramienta de validación; se involucre o no algún ambiente adicional, la presencia de GGB en esta categoría demanda acciones en el usuario que modelen una situación problema. El trabajo expuesto por Vallo y Duris (2018) centra su atención en la espiral logarítmica. Inicialmente, muestran algunas características propias de dicha curva y seguido a esto dan a conocer cómo puede ser utilizada en la ingeniería de metales. Los autores presentan el diseño de un engranaje de la hoja de una sierra circular elaborado en GGB, a partir de la gráfica y los atributos de una espiral logarítmica. Además, resaltan la importancia que tiene desarrollar la imaginación en los estudiantes desde la enseñanza de las matemáticas, con el fin de promover habilidades que les serán de ayuda en futuras profesiones como ingeniería o arquitectura. Se considera que el trabajo mencionado puede situarse dentro de esta categoría, puesto que se está ilustrando la modelación en GGB de una herramienta utilizada en la ingeniería de metales, partiendo de la curva mencionada con antelación y sus propiedades.

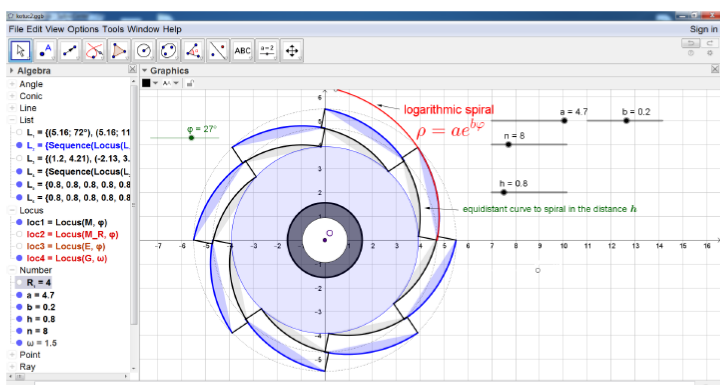


Figura 12. Recurso sobre el diseño de un engranaje de la hoja de una sierra circular

También, en el trabajo realizado por Wardhana, Suryoatmojo y Ashari (2016) se muestra un recurso que ejemplifica esta categoría. Los autores presentan el diseño de un modelo realizado para mejorar la distribución del flujo de calor del receptor de un motor. Los contenidos matemáticos involucrados en el diseño son principalmente las ecuaciones de una parábola y una elipse. En primer lugar, los autores muestran los cálculos realizados y los gráficos del modelo en el software SolTrace. En segundo lugar, elaboran un recurso GGB que contiene el diseño de dicho modelo y realizan simulaciones a partir de este con el fin de determinar su nivel de efectividad. Se afirma que este recurso está situado en esta categoría, puesto que el recurso en GGB realizado por los usuarios tiene como finalidad modelar una situación dada. En este caso el diseño de un modelo para mejorar el flujo del calor y la realización de simulaciones a partir de este, lo anterior muestra que GGB se usa como herramienta de modelación y validación. Adicionalmente, se reconoce el uso de otro ambiente tecnológico para el proceso de exploración del modelo, previo al uso de GGB.

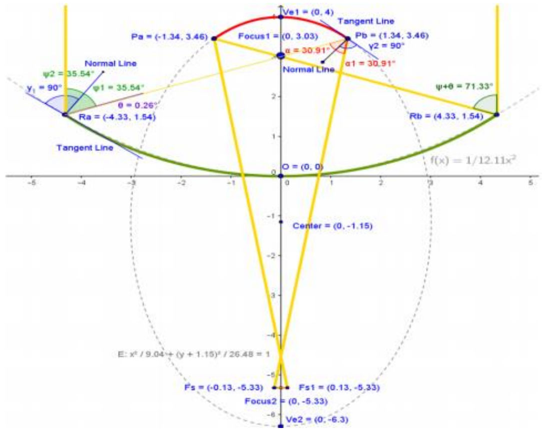


Figura 13. Recurso correspondiente al modelo de optimización del flujo de calor de un motor

- Categoría 2 – Exploración de situaciones y formulación de conjeturas: Se presenta al usuario un recurso GGB o bien, se pide elaborar una construcción, de modo que, a partir de la exploración que hace sobre esta, elabore una o varias conjeturas alrededor del objeto matemático involucrado o que dé cuenta y razón de algunas conclusiones sobre el comportamiento de este. En resumen, se usa el recurso GGB para representar una situación propuesta, con el fin de explorar en esta, <u>reconocer relaciones, propiedades y formular conjeturas</u>. Zampieri y Javaroni (2018) dan a conocer el trabajo con un recurso GGB que se sitúa en esta categoría, en este se presentan dos tareas diferentes. En la primera, se espera que el usuario identifique las propiedades de los parámetros a y b de una función y cómo estos influencian en el comportamiento de su representación gráfica, así como la relación de dependencia entre la variable independiente x y dependiente $y = f\ (x)$.

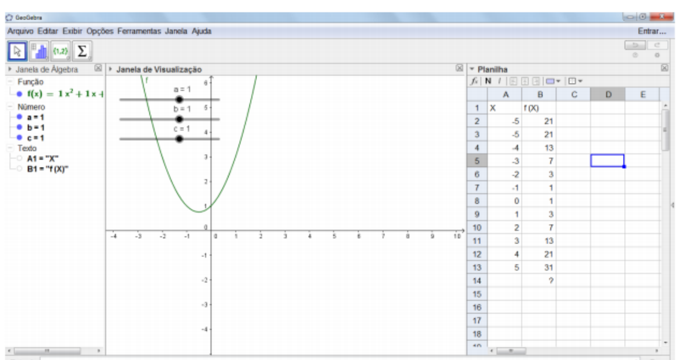


Figura 14. Recurso para el reconocimiento de propiedades de los parámetros a y b de una función

En la segunda tarea el propósito es que los usuarios comprendan y visualicen geométricamente la suma de fracciones propias. El propósito de usar GGB en las dos tareas yace en el reconocimiento de propiedades de un objeto matemático, en este caso la función y en el establecimiento de conclusiones respecto a cómo se lleva a cabo la suma de fracciones propias.

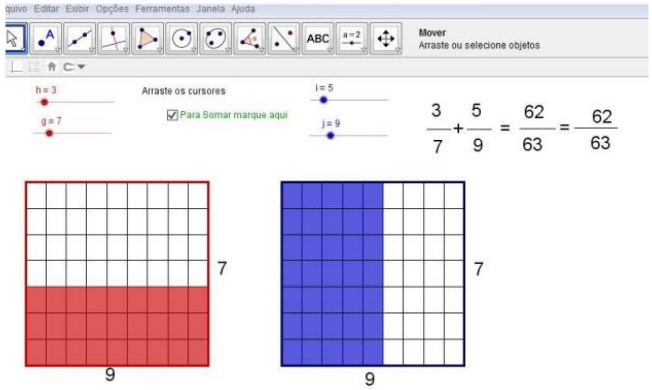


Figura 15. Recurso para realizar la suma gráfica de fracciones heterogéneas

Por otro lado, aludimos al trabajo realizado por Tatar y Zengin (2016) cuyo objetivo fue determinar el efecto de un método de instrucción asistido por computador que utiliza GGB. Los recursos allí expuestos se centraron en la comprensión conceptual de la integral definida. Los usuarios tuvieron la oportunidad de interactuar con recursos que les permitieron explorar lo que sucedía cuando modificaban los extremos de un intervalo y la cantidad de particiones de este. A partir de lo mencionado anteriormente, lograron evidenciar cuál era el comportamiento de las suma superior e inferior y concluir cuál es la relación existente entre estas y la suma de Riemman. De acuerdo con lo mencionado *a priori* estos recursos pertenecen a la categoría de Exploración y formulación de conjeturas.

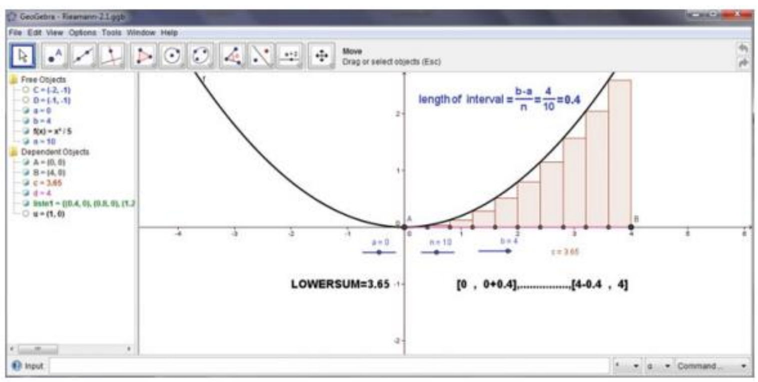


Figura 16. Recurso 1 – Suma inferior

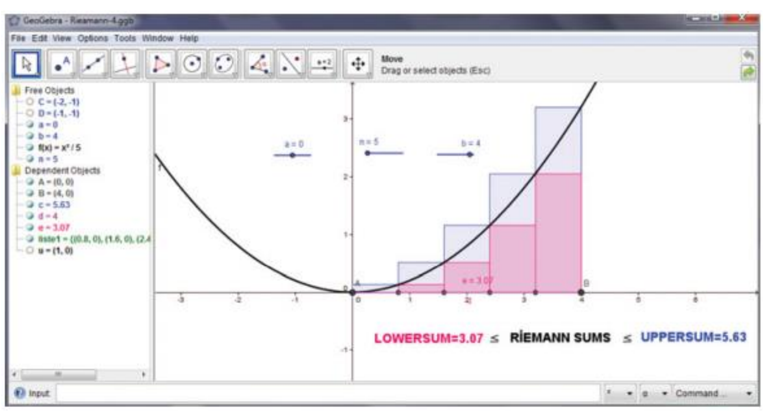


Figura 17. Recurso 2 – Suma superior, inferior y de Riemman

- Categoría 3 – Verificación de propiedades: Se presenta al usuario determinada situación o ciertas preguntas respecto a un objeto matemático. En este caso, a diferencia de la categoría anterior, se usa el recurso GGB para la verificación de una propiedad de algún objeto matemático. En el trabajo de Ovodenko & Kouropatov (2018) se proponen varios recursos que pueden ilustrar esta categoría. Por ejemplo, uno de estos tiene como finalidad estudiar los conceptos de concavidad utilizando tangentes y cuerdas. Los autores describen este recurso como un laboratorio digital que permite al usuario tener la representación de una función tanto algebraica como gráficamente, y estudiar los conceptos. de concavidad hacia arriba y hacia abajo usando tangentes sus gradientes y cuerdas. Posterior a esto, se propone a los usuarios determinar la veracidad de ciertas afirmaciones sobre la concavidad; estas pueden ser corroboradas o refutadas usando el recurso. En otro de los recursos GGB presentado en este trabajo, se presentan las gráficas de una función, su derivada y la recta tangente a esta; dichas gráficas se pueden mostrar u ocultar haciendo clic en casillas de verificación. El objetivo de contar con las tres gráficas es lograr que los usuarios establezcan relaciones entre estas, pero también que verifiquen o refuten afirmaciones sobre los puntos de inflexión de una función.

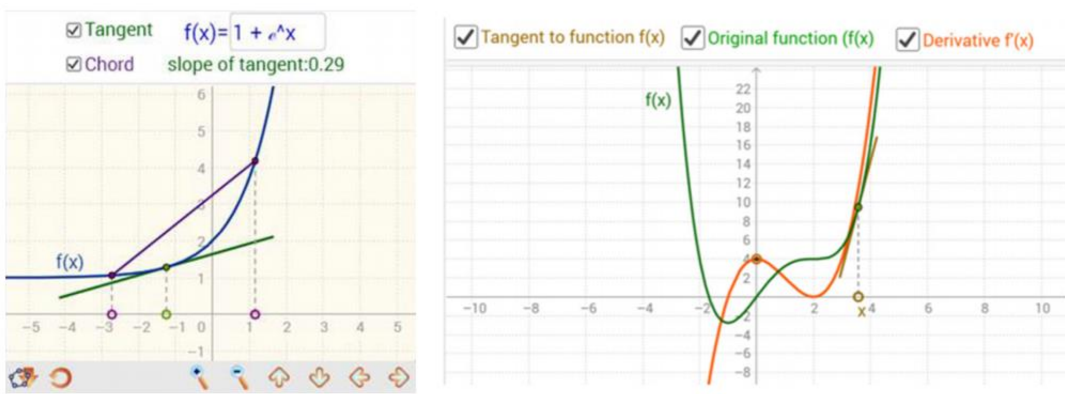


Figura 18. Recurso sobre relaciones entre una función, su derivada y la recta tangente

Otros de los recursos que ejemplifican esta categoría, son los presentados en el trabajo de Sengamaselvi, Venugopal & Pavithra (2017). El trabajo mencionado centra su atención en algunos elementos del cálculo vectorial y las integrales múltiples. De acuerdo con los autores, los recursos presentados tienen como objetivo hacer frente a las dificultades que pueden presentar los usuarios al resolver situaciones en las que deban hallar el área entre dos curvas o el volumen de un sólido, utilizando integrales múltiples. Inicialmente se plantea a los usuarios una situación en la que deben encontrar el área entre la parábola $y = 4x - x^2$ y la recta $y = x$. Para resolverla aplican los cálculos correspondientes y llevan a cabo la resolución de ecuaciones para hallar los extremos de la integral. Para verificar sus procedimientos, se procede a la construcción de un recurso GGB. En primer lugar se solicita ingresar las funciones en la barra de entrada, una vez realizada esta acción, sus representaciones aparecen en las vistas algebraica y gráfica del software.

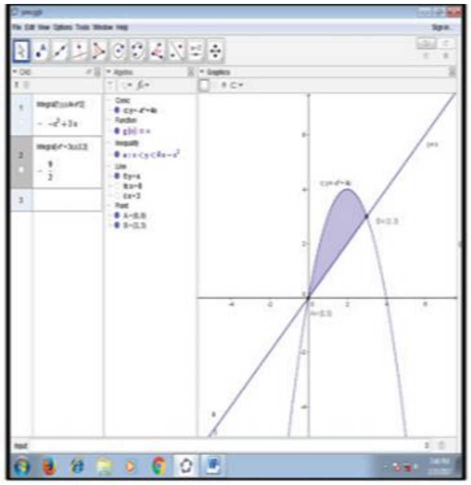


Figura 19. Recurso para hallar el área entre dos curvas

Seguido a esto, se solicita a los usuarios ingresar la expresión correspondiente al área entre dos curvas, que está dada de la forma $A = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} dy\, dx$, en la barra de entrada de la vista CAS. A partir de la acción anterior, los usuarios verifican los procedimientos realizados en un primer momento, además, según lo mencionado por los autores la posibilidad de contar con las representaciones gráfica y algebraica de manera simultánea permitió que los usuarios plantearan conclusiones acerca del orden de las funciones, los intervalos en los que se aplica la integral y la forma que tiene el área que se quiere determinar.
Otro de los recursos expuestos en este trabajo alude al uso de las integrales triples. En este caso se propone a los usuarios hallar el volumen de la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ intersecado por el plano $z = 0$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = 4 - z$. El proceso realizado es similar al mencionado en párrafos anteriores. Los usuarios resuelven la situación sin usar GGB y posteriormente construyen un recurso para verificar sus procedimientos.

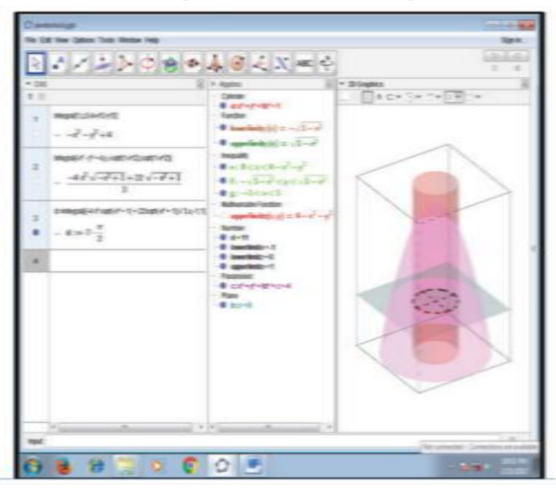


Figura 20. Recurso para hallar el volumen entre un sólido y un plano

Posterior a esto, se reconoce la importancia de la representación gráfica y a su vez dinámica de la situación que ofrece GGB, en tanto que permite visualizar diferentes características de forma en las figuras como caras o intersecciones y esto permite a los usuarios comprender de una forma más directa y real la situación. Además, al rotar la figura, gracias a la herramienta animación, GGB muestra características relevantes de esta que son útiles para la verificación del proceso realizado.

- Categoría 4 – Ilustración de propiedades o representaciones: El recurso GGB es presentado por el profesor al usuario para ilustrar las propiedades o representaciones de un objeto matemático. Cabe aclarar que en este caso el usuario no manipula el recurso. Akçakın, V (2017), presenta una experiencia de aula referente a la enseñanza de las funciones matemáticas mediante el enfoque de funciones geométricas. El investigador utiliza recursos GGB como una herramienta de representación visual; pues no había sala de cómputo en la institución educativa en la que se llevó a cabo la experiencia. En primer lugar, el profesor propone un ejercicio gráfico de identificación de funciones (de acuerdo con la correspondencia de elementos). En segundo lugar, plantea la graficación de distintas "funciones" y la aplicación de la prueba de la recta vertical para verificar si estas eran o no funciones. El aplicativo es manipulado exclusivamente por el profesor, los estudiantes solo observan. Por esta razón se considera que este aplicativo pertenece a esta categoría.

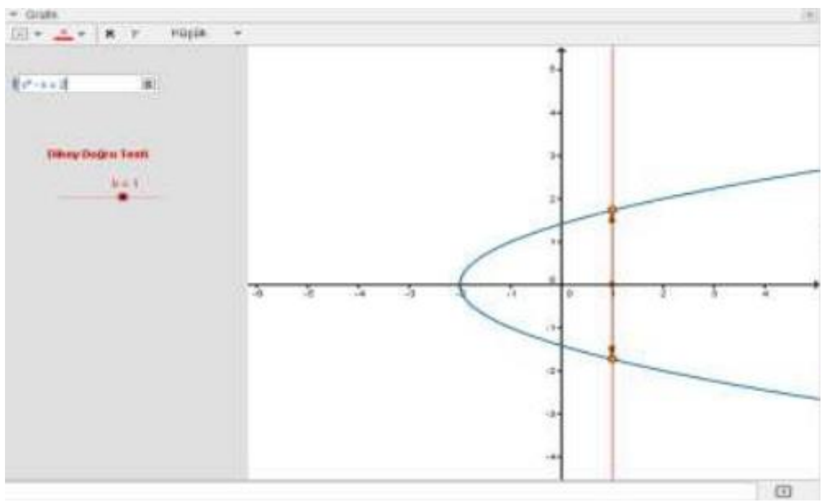


Figura 21. Recurso que ilustra gráficas de funciones y aplicación del criterio de la recta vertical

En el libro elaborado por Takaci (2015) se presentan una serie de recursos GGB, dirigidos a profesores y estudiantes del curso de cálculo de la Universidad de Novi Sad en Serbia. Algunos de los recursos que podrían ejemplificar esta categoría, aparecen en la sección dedicada a las curvas en coordenadas polares. Estos tienen como finalidad, ilustrar la gráfica de curvas como la Lemniscata de Bernoulli y la cardioide. Estos recursos cuentan con deslizadores para algunos de los parámetros de las curvas y permiten mostrar las modificaciones que sufren las gráficas al modificar dichos parámetros. Como la finalidad de estos recursos es netamente ilustrativa, pues en el libro no se proponen tareas a realizar a partir de la exploración con los mismos, es válido afirmar que hacen parte de esta categoría.

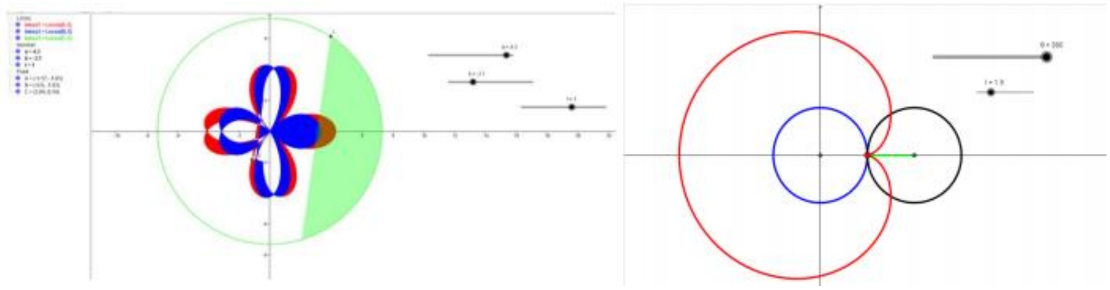


Figura 22. Recursos GGB que ilustran curvas en coordenadas polares

- Categoría 5 – Realización de procedimientos algorítmicos: El recurso GGB es utilizado exclusivamente para <u>calcular</u>. Botana y Recio (2016) parten de la idea de que generalmente los ambientes de geometría dinámica presentan dificultades para "calcular" la envolvente de una familia de curvas. Por esta razón presentan un ejemplo usando GGB y muestran las limitaciones que tiene esto en cuanto a efectividad en el cálculo y tiempo invertido. Dado a que en este caso el recurso únicamente se utiliza para la realización y verificación de cálculos, corresponde a esta categoría.

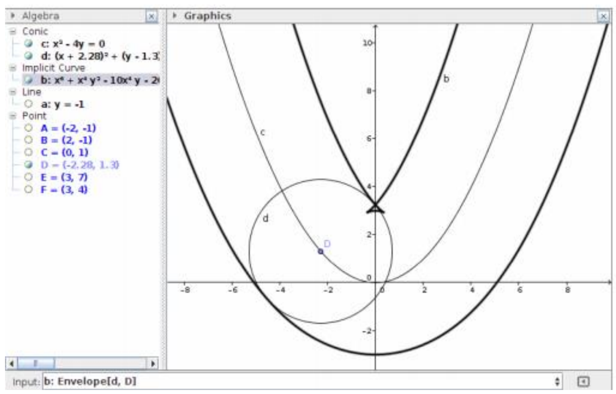


Figura 23. Recurso para calcular la envolvente de una familia de curvas

En el trabajo propuesto por Calligaris & Zotin (2016), se presentan varios recursos GGB, orientados al aprendizaje del concepto de integral definida, mediante el área bajo la curva y el área entre dos curvas. Uno de los recursos se usa exclusivamente para realizar el cálculo del área entre dos curvas dadas. Debido a que esta es la única finalidad con la que el recurso fue elaborado, es válido afirmar que está situado en esta categoría.

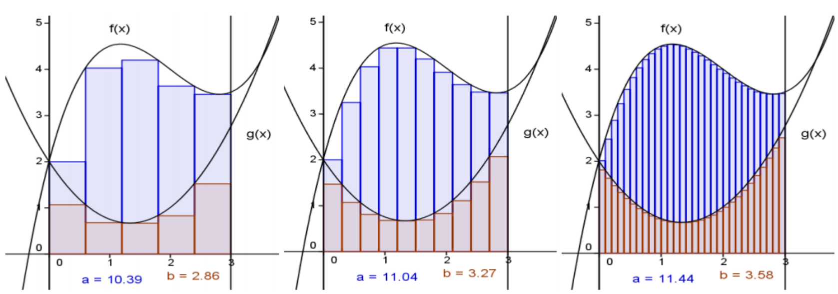


Figura 24. Recurso para calcular el área entre dos curvas

- Categoría 6 – Evaluación: El recurso GGB se usa como <u>herramienta de evaluación</u> para el usuario. Este se configura adicional a sus funciones estándar bajo una estructura que responde a las acciones del estudiante de acuerdo con el objetivo. El trabajo de Jardim (2015) es fruto de actividades de enseñanza e investigación desarrolladas en una universidad de Portugal sobre el uso de tecnología como recurso didáctico en Matemáticas. Los contenidos abordados fueron las funciones y los límites. Se utilizó un recurso GGB con el que el usuario pudiese interactuar y realizar tareas tipo "quiz". El usuario debe responder ciertas preguntas, haciendo uso de casillas de entrada o casillas de control. Posteriormente tiene la posibilidad de verificar si su respuesta es correcta o no. Si la respuesta es incorrecta, se muestra un texto que le indica el error que cometió y le solicita un nuevo intento. En caso de acierto, aparece un texto para felicitar al usuario y de inmediato aparece una nueva pregunta. Debido a la naturaleza del recurso que se presenta en este documento, se considera que puede situarse en esta categoría.

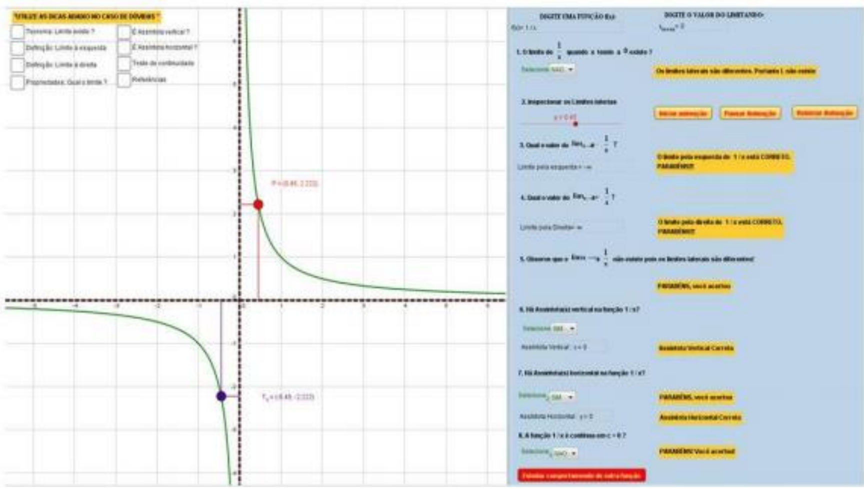


Figura 25. Recurso 1 para modelo de evaluación propuesto por Jardim

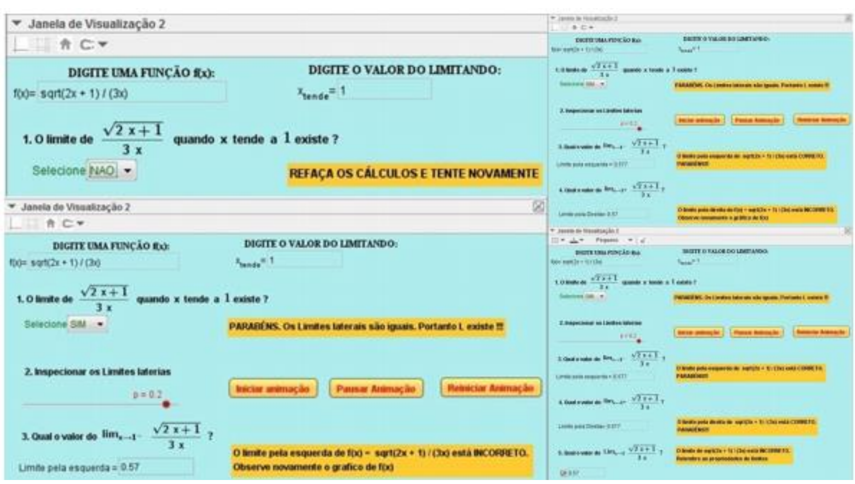


Figura 26. Recurso 2 para modelo de evaluación propuesto por Jardim

CAPÍTULO 5: ANÁLISIS

Con base en las categorías de análisis expuestas en el capítulo anterior, presentamos en este capítulo una descripción de la implementación de la secuencia de once tareas diseñada para efectos de esta investigación. Estas tareas se llevaron a cabo durante cuatro sesiones de clase que se describen en este capítulo de manera cronológica. Los episodios de las sesiones de clase en los que se centra nuestro análisis se enmarcan en los momentos en los que se evidencian comportamientos que ilustran alguna de las acciones mentales propuestas en la herramienta analítica del marco conceptual de la covariación. Así como también, en los momentos en los que es posible evidenciar indicadores relativos a la herramienta analítica construida a partir del marco teórico de abstracción situada.

Cada una de las tareas implementadas fue mediada por un recurso GeoGebra. Estos recursos se situaron dentro de las categorías planteadas en un capítulo preliminar que son producto de esta investigación. Teniendo en cuenta dicha categorización y su papel en la implementación de las tareas, presentamos un análisis en el que evaluamos la pertinencia del uso de los diferentes tipos de recurso, reconociendo sus potencialidades o limitaciones. Por un lado, en función de las ventajas o desventajas que se reconocen al haber mediado las tareas con tecnología digital y no con lápiz y papel. Por otro lado, identificando los aportes de los recursos al alcance de los objetivos planteados para cada tarea y para cada sesión en particular.

El análisis de cada sesión se presenta a través de cuatro momentos. En primer lugar, recordamos al lector el objetivo general de la sesión y realizamos una reconstrucción de los sucesos que tuvieron lugar en esta. En segundo lugar, hacemos alusión al análisis desde el marco conceptual de la covariación, para esto presentamos una matriz en la que se relacionan el número de tarea, el tipo de recurso GeoGebra utilizado para su mediación, los indicadores que se esperaba desarrollar a partir de la implementación de la tarea y el nivel de alcance de estos. Cabe resaltar que dichos indicadores y su nivel de alcance, están formulados en términos de las acciones mentales propuestas por Carlson et al. (2003). En tercer lugar, damos a conocer el análisis que involucra los tipos de recursos GeoGebra, mencionado en el párrafo anterior. En cuarto lugar, damos cuenta y razón del análisis que se fundamenta en el marco de abstracción situada, este, realizado a partir de las categorías construidas en el desarrollo de esta investigación.

5.1. Primera sesión de clase

Durante la primera sesión de clase se propusieron tres tareas diferentes. Inicialmente se establecieron hipótesis respecto a las acciones mentales de razonamiento covariacional que probablemente podrían ser evidenciadas por parte de los estudiantes; estas se resumieron en los indicadores propuestos en la planeación de la sesión.

5.1.1. Objetivo general

Realizar una introducción general a la pendiente, entendida como “avance versus subida”, o bien, como el cociente entre dos diferencias, el cambio en y y el cambio en x, es decir, $\Delta Y/_{\Delta X}$. Esto con el fin de trabajar la razón de cambio *constante.*

5.1.2. Tarea 1

Al iniciar la sesión, se leyó a los estudiantes el siguiente enunciado: *"Para preparar un postre, se debe agregar dos cucharadas de azúcar por cada tres cucharadas de harina"*. Luego, se presentó el recurso que mediaría la tarea y se propuso diligenciar la tabla que aparece en la hoja de cálculo, allí debían registrar la cantidad de cucharadas de azúcar que se necesitan en caso de usar 3, 6, 9, 12 y 15 cucharadas de harina.

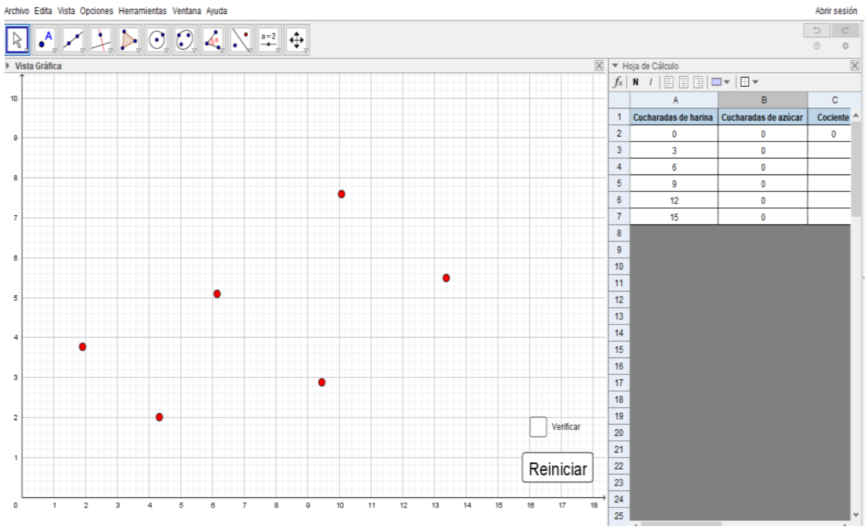


Figura 27. Primera sesión - Tarea 1

A partir de lo anterior se esperaba que los estudiantes evidenciaran el cambio presentado en cada una de las variables involucradas y también el cambio de una variable respecto a la otra. Posterior a esto se propuso que graficaran en el plano cartesiano las parejas ordenadas que representan la información registrada en la tabla, de modo que pudieran determinar que la gráfica resultante al unir dichos puntos es una recta y que esto sucede porque el cambio en la situación propuesta es constante. Adicionalmente, se pidió a los estudiantes, hacer uso de las fórmulas de la hoja de cálculo, para hallar el cociente entre algunos de los valores que toman las variables independiente y dependiente, con el fin de que evidenciaran que en la situación propuesta, el cambio es constante y que la pendiente de la recta que se forma al unir los puntos que graficaron es $^{2}/_{3}$.

5.1.2.1. Análisis desde el marco conceptual de la covariación

Número de tarea	Tipo de recurso	Indicadores que se espera desarrollar	Nivel de alcance de cada indicador
1	Exploración de situaciones y formulación de conjeturas	**AM1:** Los estudiantes coordinan el valor de una variable con los cambios de la otra. Esto se puede evidenciar cuando designan correctamente los ejes coordenados al mover los puntos en el plano cartesiano y ubicarlos de modo que estos representen los datos ingresados en la tabla: Cucharadas de harina en el eje x y cucharadas de azúcar en el eje y.	Durante la aplicación de la tarea, los estudiantes evidenciaron comportamientos asociados con AM1. Inicialmente, identificaron que las variables asociadas a la tarea propuesta en el recurso son las cucharadas de harina y las cucharadas de azúcar que se deben utilizar para realizar cierto postre. Después, designaron correctamente los ejes coordenados al indicar que las cucharadas de harina representan la variable independiente y por tanto están ubicadas en el eje x y que las cucharadas de azúcar representan la variable dependiente, razón por la que deben ubicarse en el eje y. En adición a lo anterior, los estudiantes ubican correctamente en el plano cartesiano, los puntos que representan los datos ingresados en la tabla de la hoja de cálculo del recurso de GeoGebra, que muestra cuántas cucharadas de azúcar se deben usar, de acuerdo con la cantidad de cucharadas de harina propuestas en el enunciado de la tarea.
		AM2: Los estudiantes verbalizan que a medida que aumenta la cantidad de cucharadas de harina para realizar el postre, también aumenta la cantidad de cucharadas de azúcar que se necesitan.	Este indicador también fue alcanzado por los estudiantes durante la aplicación de la tarea, pues dieron cuenta y razón de que a medida que aumenta la cantidad de cucharadas de harina para hacer el postre, también aumenta la cantidad de cucharadas de azúcar que se necesitan. Es decir, que coordinaron la dirección del cambio de una variable con respecto a la otra
		AM3: Los estudiantes coordinan la magnitud del cambio de las cucharadas de harina con la magnitud del cambio de las cucharadas de azúcar. Un indicador de esto es que reconozcan que las magnitudes covarían de manera constante.	Los estudiantes mostraron comportamientos asociados a esta acción mental, pues lograron coordinar la magnitud del cambio de las cucharadas de azúcar con la magnitud del cambio de las cucharadas de harina, verbalizaron que el cambio es constante en todos los casos y que este equivale a 2/3. Adicionalmente, los estudiantes verbalizan que, si los valores del cociente que realizaron para hallar la constante de cambio estuviesen invertidos, la recta que representa la relación entre el cambio en x y el cambio en y, experimentaría un cambio en cuanto a su inclinación.

Tabla 14: Carlson - T1S1.

5.1.2.2. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Carlson.

Para esta tarea, se utilizó un recurso que se sitúa dentro de la categoría *"Exploración de situaciones y formulación de conjeturas"*. Se considera que este tipo de recurso fue favorable para realizar la introducción a los contenidos que se abordaron durante toda la sesión. Esto debido a que permitió a los estudiantes interactuar con el software e ir aprendiendo de manera simultánea aspectos sobre el manejo de este. Afirmamos lo anterior, puesto que lo manifestado por ellos, su trabajo con tecnología digital en las clases de matemáticas había sido prácticamente nulo.

Si bien, la tarea propuesta para realizar con ayuda de este recurso GeoGebra también habría podido realizarse con lápiz y papel, consideramos que el uso del recurso fue pertinente en tanto que representó para los estudiantes las siguientes ventajas:

- ✓ Tuvieron la oportunidad de acceder a dos representaciones (gráfica y tabular) de una situación en una misma pantalla de manera simultánea, gracias al uso de la vista gráfica y la hoja de cálculo.
- ✓ Una vez ubicados los puntos en el plano, tuvieron la posibilidad de comprobar si esta acción se había realizado de manera adecuada haciendo clic en una casilla de verificación. Además, en caso de haber presentado algún error en el proceso, el recurso cuenta con un botón que les permitía empezar de cero de manera instantánea.
- ✓ Pudieron realizar los cálculos de los cocientes con ayuda de las fórmulas de la hoja de cálculo, aspecto que permitió optimizar tiempo, para centrar en la atención en el objeto matemático que sería estudiado en la sesión.

Hasta este momento de la clase, los estudiantes aún no se sentían cómodos trabajando con el recurso y algunos de ellos recurrieron al tipo de tecnología que a utilizan regularmente, el lápiz y el papel. Esto lo hacían para verificar los cálculos que debían realizar o para tomar apuntes de datos que consideraban importantes.

5.1.2.3. Análisis desde el marco de abstracción situada.

Previamente no se establecieron posibles hipótesis para el alcance de los indicadores asociados con Abstracción Situada, debido a que por la gran cantidad era difícil prever cuáles podrían aparecer, pues no se tenía alguna información respecto a qué tipo de acciones podrían realizar o que relaciones podrían establecer los estudiantes. Esto se cumple de igual manera para las tres sesiones posteriores.

Recurso	Ind	Descripción	Análisis de la interacción
1: Exploración de situaciones y formulación de conjeturas.	**B2**	Relación entre la herramienta punto, su ubicación y sus coordenadas con la cantidad de harina y azúcar.	Durante el desarrollo de esta tarea, los estudiantes hacen uso y relacionan las herramientas de GeoGebra (GGB) con los objetos matemáticos que se corporeizan a través de estas. Esto les permite realizar una construcción geométrica que representa la relación constante entre las magnitudes a trabajar (cantidad de harina y cantidad de azúcar), por ejemplo, usan la ubicación de puntos en el plano cartesiano en distintas coordenadas según la cantidad de harina y de azúcar a usar. De manera similar usan la herramienta "longitud" para tomar la medida de los segmentos que representan los cambios en la cantidad de harina y azúcar, esto para realizar un registro posterior en la hoja de cálculo y llevar a cabo el constructo matemático de razón constante.
		Relación entre la herramienta distancia y la longitud de los segmentos con la cantidad de harina y de azúcar.	
	D2	Se deduce un valor constante para la razón a/h a partir de los elementos brindados por GGB.	La relación existente entre los cambios en la cantidad de harina y la cantidad de azúcar se pueden representar a partir de la razón: cantidad de azúcar/cantidad de harina. Los estudiantes usan la vista de "hoja de cálculo" para registrar allí los valores obtenidos previamente con la herramienta "longitud", de igual forma hacen uso de las fórmulas de la hoja de cálculo, por ejemplo "A3/B3" para calcular las razones mencionadas. El valor arrojado por la hoja de cálculo les permite a los estudiantes deducir que a/h (razón) es un valor constante siempre y cuando los cambios de harina y azúcar también se mantengan constantes.
	Z4	Construcción y desarrollo de ideas matemáticas, sin	Los estudiantes tienen una discusión respecto a cuál razón es más correcta para expresar la relación entre la cantidad de harina y la cantidad de azúcar; los argumentos dados por los estudiantes están

		uso de GGB, discusión sobre si la razón es a/h o h/a. Ideas cercanas a las formales.	sustentados, pero en este momento no se encuentran apoyados por ningún tipo de interacción inmediata sobre GGB, sino apoyados en las ideas que han construido a partir de las acciones anteriores y su conocimiento previo. Reconocen finalmente que la razón correcta es a/h.
	B3	Modificación de ideas previas de los estudiantes a partir de las ideas construidas en GGB.	La creencia de que la razón que representa la situación entre la cantidad de azúcar y la cantidad de harina es h/a se ve modificada por el estudiante a partir de varios elementos, en primer lugar por las acciones que se realizaron previamente tales como calcular las razones usando la hoja de cálculo proporcionada por GGB, además de la discusión desarrollada entre los estudiantes.

Tabla 15: AS - T1S1.

5.1.2.4. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Abstracción situada.

La programación desarrollada por los investigadores, respecto al primer recurso buscaba que los estudiantes tuvieran que hacer uso del dinamismo de GeoGebra para lograr la ubicación correcta de los puntos y a partir de estas pudieran generar un conjunto de parejas ordenadas que representaran la relación entre la cantidad de azúcar y la cantidad de harina. Esto se logró y además se usaron estas coordenadas para generar el cálculo de la razón cantidad de azúcar/cantidad de harina, la cuál era un valor constante y precisamente era lo que buscaba concluirse. Las herramientas de GeoGebra que debían usarse según el diseño del recurso y de la tarea relacionaban de manera directa siempre las cantidades que se estaban trabajando. Estas se interpretaron como las coordenadas del punto y además como la longitud de los segmentos que representaban el triángulo de pendiente. La hoja de cálculo también jugó un papel importante, pues allí fue donde se registraron los valores de las cantidades y se calculó la razón. Los estudiantes lograron establecer las relaciones entre objetos matemáticos - objetos GeoGebra - objetos construidos a través de las interacciones. Finalmente se concluye la razón de cambio constante, tal como se tenía presupuestado. El tipo de recurso efectivamente les permitió a los estudiantes explorar la situación a partir de la manipulación de los objetos de GeoGebra y construir una conjetura respecto a la razón.

5.1.3. Tarea 2

Se presentó a los estudiantes una situación en la que se habla del porcentaje de inclinación de una calle y se les indicó que la calle con mayor porcentaje de inclinación (35%) se encuentra en Dunedin, Nueva Zelanda. Posterior a esto, se les preguntó por la cantidad de metros de subida y avance que debe recorrer un ciclista para atravesar dicha calle.

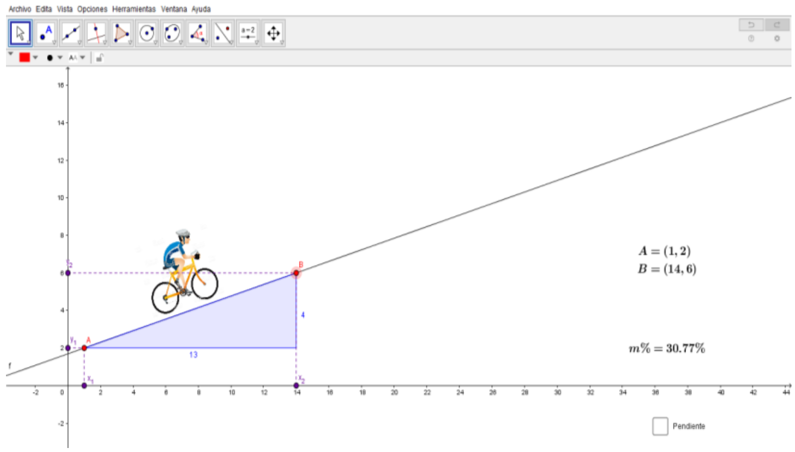


Figura 28. Primera sesión - Tarea 2

En el recurso, se representa la situación descrita, aparece un ciclista ubicado sobre una recta, que representa la calle o "carretera" como la llamaron los estudiantes. Dicha recta pasa por los puntos A y B, estos se pueden mover para cambiar la inclinación de la recta y en el plano se muestran las coordenadas de los puntos A y B así como el porcentaje de inclinación de la calle. También, cuenta con una casilla de control denominada *"Pendiente",* al activarla aparecen en el plano, las coordenadas de los puntos reemplazadas en la fórmula para hallar la pendiente de una recta.

El propósito de mediar la tarea con este recurso era que los estudiantes reconocieran que, para responder la pregunta mencionada, debían hallar el cociente entre el cambio en y y el cambio en x. Para esto debían hacer uso de las coordenadas que aparecen en el plano y posteriormente verificar sus cálculos activando la casilla *"Pendiente".*

Aunque los estudiantes reconocieron que debían hallar la pendiente y que las coordenadas de los puntos les serían útiles para esto, no acudieron a la definición de pendiente como el cociente entre el cambio en y y el cambio en x. En lugar de esto, trataron de recordar la fórmula de la pendiente, que se presume, habían memorizado en algún momento de su trayectoria escolar, sin tener éxito. Debido a esto, se indicó a los estudiantes que la casilla *"Pendiente"* podría ser de ayuda y a partir del movimiento de los puntos, lograron que el porcentaje de inclinación de la calle fuera de 35% y así mismo, determinar la pendiente de esa recta.

A partir del episodio relatado previamente, corroboramos el planteamiento de Gamboa (2007), referente a que el uso de tecnología digital puede favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esto siempre y cuando, dicho proceso sea bien dirigido por el profesor que acompaña la sesión de clase. En este orden de ideas, habría sido pertinente que los investigadores hubiésemos corroborado mediante preguntas, si para los estudiantes, en ese momento de la sesión, era claro que la pendiente de una recta estaba dada por el cociente entre el cambio en y y el cambio en x. Además, que entendían este cambio como la diferencia entre las coordenadas en x y y de una pareja ordenada de puntos. Todo esto antes de haberles indicado que movieran los puntos A y B o que manipularan de alguna manera el recurso.

5.1.3.1. Análisis desde el marco conceptual de la covariación

Número de tarea	Tipo de recurso	Indicadores que se espera desarrollar	Nivel de alcance de cada indicador
2	Verificación de propiedades	**AM1:** Los estudiantes son capaces de coordinar los cambios de una variable con los cambios de la otra. Esto se puede evidenciar cuando los estudiantes dan cuenta y razón de que para encontrar la cantidad de metros que debe avanzar y subir un ciclista para pasar por la calle más inclinada del mundo, deben hallar el cociente entre la distancia de subida y la distancia de avance, o bien, cuando son conscientes de que deben hacer uso de la fórmula de la pendiente de una recta.	Durante la aplicación de esta tarea, los estudiantes evidenciaron comportamientos asociados con AM1, puesto que indicaron que para hallar la cantidad de metros de subida y de avance para pasar por la calle más inclinada del mundo, es necesario hallar el cociente entre lo que ellos llaman "distancia vertical" (cambio en y) y "distancia horizontal" (cambio en x). Posteriormente uno de los estudiantes intenta hacer alusión a la aplicación de la fórmula para hallar la pendiente de una recta. Sin embargo, cuando enuncia la fórmula hace referencia a que se deben multiplicar las coordenadas en x, razón por la cual se infiere que tal vez recordó la fórmula por nemotecnia, pero realmente no la asociaba con los cambios en x. Este comportamiento se catalogó como pseudoanalítico.
		AM2: En esta actividad los estudiantes tendrán que manipular una recta en la que se representan sus cambios, tanto horizontales (ΔX), como verticales (ΔY). Y se espera que verbalicen el cómo interpretan la dirección de estos cambios en términos avance vs subida.	Los estudiantes mostraron comportamientos asociados a esta acción mental, cuando empezaron a dar cuenta y razón de la posición que tomaría la recta que representa la carretera que recorre el ciclista, dependiendo de su pendiente. Los estudiantes manifestaron que si no existen cambios verticales u horizontales (es decir, si no hay subida ni avance), la recta que representa la carretera es paralela al eje x. Adicional a esto, los estudiantes reconocen que en la "cumbre" de la montaña, el ciclista no estaría subiendo ni bajando. Por otro lado, señalan que cuando la pendiente es negativa, significa que el ciclista va "bajando", es decir, que implícitamente infieren que cuando cambia el signo de la pendiente de la recta que representa la carretera, cambia la inclinación de esta, es decir, que están coordinando el cambio de una variable, respecto al cambio que presenta la otra.
		AM3: Los estudiantes son capaces de relacionar los cambios horizontales con los cambios verticales, y estas relaciones están expresadas a partir de la cuantificación de dichos cambios.	Durante la aplicación de la tarea, los estudiantes mostraron comportamientos asociados a esta acción mental. En primer lugar, relacionaron los cambios en x y en y, además de cuantificar el cambio e indicar que, si el ciclista desea pasar por la calle más inclinada del mundo, debe subir 7 metros y avanzar 20. En segundo lugar, cuando se les preguntó cuál sería el porcentaje de inclinación de una calle cuyo avance es de 20 metros mientras su subida es de 10 metros, los estudiantes relacionaron las magnitudes, realizando el cociente entre la cantidad de metros de subida y la cantidad de metros de avance y multiplicaron este resultado por 100 para obtener el porcentaje solicitado. En tercer lugar, cuando se solicita a los estudiantes encontrar el menor porcentaje de inclinación posible, ellos a partir de la exploración con el recurso GGB, concluyen que el menor porcentaje de inclinación es 0%. Para justificar lo anterior establecen la relación entre subida y avance, concluyen que el menor porcentaje de inclinación no negativo es 0% puesto que el ciclista en ese punto ha avanzado 20 metros, pero no ha subido ninguno.

Tabla 16: Carlson – T2S1.

5.1.3.2. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Carlson.

El recurso utilizado para mediar esta tarea se sitúa dentro de la categoría *"Verificación de conjeturas*". A pesar de que su uso tomó otro rumbo diferente al planeado, por la razón mencionada en la descripción de lo ocurrido durante la implementación de la tarea, se considera que fue pertinente. Al iniciar la sesión los estudiantes no se mostraron muy cómodos con el uso de tecnología digital y manifestaron que no lo consideraban tan necesario en la clase de matemáticas. En un primer momento, intentaron buscar estrategias que les permitieran solucionar esta tarea sin hacer uso del recurso GGB. Sin embargo, una vez se decidieron por usar el recurso y lograron resolverla, señalaron este les fue de mucha utilidad

A nuestra consideración, el uso del recurso fue favorable, en tanto que, representó las siguientes ventajas para los estudiantes:

- ✓ Ilustra la situación propuesta en el enunciado del problema y esto permite a los estudiantes, interactuar de manera cercana con esta.
- ✓ A partir del movimiento de la recta, mediante los puntos A y B, los estudiantes pudieron dar cuenta y razón de que cuando la pendiente es positiva, el ciclista va subiendo, cuando es negativa va bajando y cuando no hay avance, sino solo subida, la recta que representa la calle es paralela al eje y.
- ✓ La aparición del porcentaje de inclinación de la calle, las coordenadas de los puntos A y B y de la fórmula de la pendiente en la vista gráfica del recurso, permitió a los estudiantes resolver la tarea, a partir de varias representaciones del mismo objeto matemático, la pendiente.

Por lo mencionado con antelación, consideramos que no se habría podido llevar a cabo la misma tarea utilizando tecnologías como el lápiz y papel, pues estas no habrían permitido el dinamismo que sí permitió el recurso. Esto a través del movimiento de puntos que a su vez movían la recta, además de la aparición de los valores de las coordenadas de los puntos, el porcentaje de inclinación y la pendiente, que cambiaban a la par con el movimiento de la recta.

5.1.3.3. Análisis desde el marco de abstracción situada.

Recurso	Ind	Descripción	Análisis de la interacción
2: Verificación de propiedades	**B2**	Relación entre el movimiento de los puntos que determinan la recta y el valor de la pendiente de esta.	La situación presentada en esta tarea parece ser familiar para los estudiantes y de inmediato deciden abordarla usando lápiz y papel, sin embargo, pronto se dan cuenta que de esta manera alcanzar el objetivo de la tarea puede traer dificultades y deciden usar GGB. A partir de esto, los estudiantes hacen uso del dinamismo de GGB para mover los puntos que determinan la recta y reconocen la relación entre el cambio en las coordenadas de estos y el cambio en el valor de la pendiente, esta es una acción similar a la presentada en B2 de la tarea 1.
	C2	Intención de modificar elementos del recurso GGB para encontrar el valor de la pendiente solicitado.	Al activar la casilla "pendiente" (programada por los investigadores), los estudiantes tienen una ayuda adicional para tratar de encontrar el valor de la pendiente que se solicita. GGB muestra el cálculo de esta según la posición que los estudiantes decidan darle a los puntos y enseguida deciden intentar modificar directamente los valores que se encuentran mostrados en este cálculo. Esta es una acción que **NO** puede realizarse pero que deja entrever que para los estudiantes es clara la relación: movimiento de los puntos - cálculo de la pendiente - valor real de la pendiente.
	C2	Interpretación del cambio del valor de la pendiente de la	Previamente los estudiantes han establecido la relación que existe ente la posición de los puntos que determinan la recta y el valor de su pendiente, a partir del dinamismo de GGB y el desplazamiento

		recta según la modificación de la posición de los puntos que la determinan.	continuo que realizan a los puntos, interpretan esta relación descrita. Reconocen que "bajar" el punto implica una disminución en el valor de la pendiente y que "subirlo" lo aumenta. De esta forma son capaces de saber con mayor exactitud cuáles deberían ser los movimientos y la ubicación que deben darle a los puntos para encontrar el valor de la pendiente adecuado.
	D2	Descripción del valor de la pendiente encontrada a partir de la ubicación correcta de los puntos.	Una vez que los estudiantes han interpretado el cambio en el valor de la pendiente en relación con la posición de los puntos, y de reconocer los movimientos que deben realizar para alcanzar el valor exacto de esta, usan estas nociones para llegar a la posición correcta y de esta manera describir cuál es el avance horizontal y el vertical. Describen que el ciclista debe avanzar 20 metros mientras sube 7. Los estudiantes han establecido la relación entre los objetos GGB y los objetos matemáticos que se corporeizan a través de estos y describen la relación matemática que representa la pendiente.
	D2	Descripción de valores de pendientes solicitados. 50% Descripción de valores de pendientes solicitados. 0%	Los estudiantes han establecido la relación entre los objetos GGB y los objetos matemáticos que se corporeizan a través de estos y describen la relación matemática que representa la pendiente. Usan esto para responder a las preguntas de los investigadores respecto a porcentajes diferentes que el trabajado inicialmente, en este caso 50% y 0%. Son capaces de describir cómo debe ser el avance y la subida en ambos casos y además justifican sus argumentos representando las relaciones en el recurso, moviendo los puntos de tal forma que se represente la pendiente solicitada.
	B3	Cambio de concepción respecto a la representación de pendientes negativas	Para todos los estudiantes es clara la noción de pendiente que han venido trabajando hasta ahora, como el avance versus la subida del ciclista, sin embargo, en el momento que se les pregunta por una inclinación o pendiente negativa, hay uno de ellos que presenta dudas al respecto. Su compañera, haciendo uso del recurso, mueve los puntos generando una pendiente negativa y le muestra que efectivamente esto es posible y su concepción se ve modificada por estas acciones, allí reconoce que en este caso la situación se interpreta como avance versus bajada y por eso es negativa. Cómo el recurso ayudo a modificar las ideas del estudiante, se asignó este indicador a la situación.
	Z2	Se relacionan objetos matemáticos tales como máximos, pendiente nula, cambio de crecimiento.	Los estudiantes e investigadores entablan una conversación en la cual se establecen relaciones, por parte de los estudiantes, entre diferentes objetos matemáticos, allí se habla del punto más alto de una curva como que el avance en y sería 0, también se habla de crecimiento y decrecimiento de una función y de cómo la razón permite identificar el cambio de crecimiento de una curva. Todo esto es mencionado sin la intervención inmediata en el recurso GGB. Sin embargo, puede considerarse que estas afirmaciones son producto de lo desarrollado en las tareas previas.

Tabla 17: AS - T2S1.

5.1.3.4. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Abstracción Situada.

El tipo de recurso usado en esta tarea corresponde a la verificación de propiedades, los estudiantes, a partir de lo desarrollado, llegan a conclusiones matemáticas verificando las ideas construidas en el recurso anterior. Esto permite el alcance de los elementos que se habían considerado previamente en la planeación general, tales como pendiente, crecimiento, decrecimiento, crecimiento nulo y avances horizontales y verticales, como una razón constante. El movimiento de los puntos (dinamismo) jugó un papel fundamental en estas conclusiones, pues fue el elemento central que permitió verificar las ideas y alcance de los objetivos. Los estudiantes lograron establecer las relaciones establecidas entre los avances horizontales y verticales gracias a esto, además, la programación permitió observar la relación entre el valor de la pendiente y los movimientos de los puntos, este también fue un elemento importante en la generación de las conclusiones mencionadas previamente. Adicionalmente, el recurso estaba programado de tal forma que los puntos solamente pudieran moverse en coordenadas enteras, lo que hizo más fácil el reconocimiento de los avances y el valor de la pendiente que se obtenía de estos. No es posible asegurar si al usar coordenadas reales o racionales se hubiera llegado a las mismas conclusiones de entender la pendiente como una razón constante.

5.1.4. Tarea 3

Se indicó a los estudiantes que con la tercera tarea realizaríamos una serie de pregunta sobre el objeto matemático trabajado a partir de las dos tareas anteriores. El recurso que medió esta tarea cuenta con dos vistas gráficas, en la primera se presentan tres situaciones diferentes, similares a la que se propuso en la tarea 1. Se explicó a los estudiantes que debían leer las situaciones atentamente y que debajo del planteamiento de la situación, aparecían dos gráficas de rectas diferentes y ellos debían elegir cuál de las dos representa la situación descrita en el enunciado.

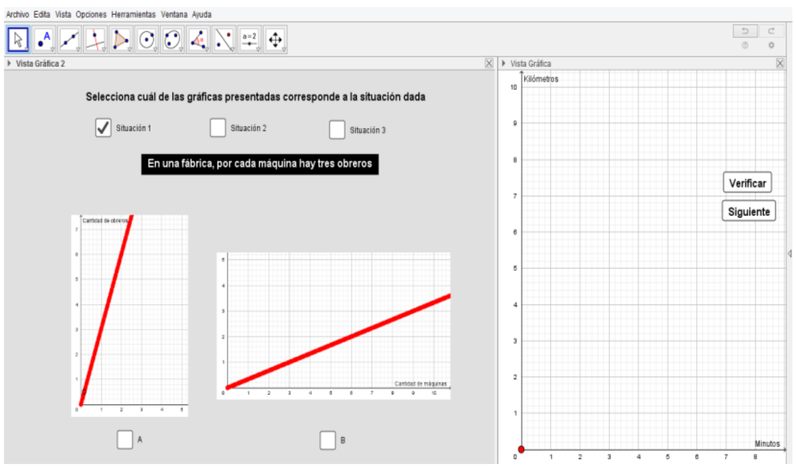


Figura 29. Primera sesión - Tarea 3

Cabe aclarar que, para acceder a cada situación y sus opciones de respuesta, los estudiantes debían seleccionar una casilla de control. De igual manera, para seleccionar la respuesta que consideraban correcta, debían seleccionar la casilla de control que se encuentra debajo de la gráfica correspondiente. En la segunda vista gráfica, aparece el primer cuadrante del plano cartesiano y dos botones. El primero de ellos permite verificar si la respuesta seleccionada es correcta, al hacer clic sobre este, se activa el rastro de un punto que se encuentra en el origen y que se mueve para formar la recta que representa la situación descrita. El segundo botón, permite limpiar el rastro, de modo que sea posible pasar a responder la siguiente pregunta y verificar su respuesta. Lo anterior, se indicó a los estudiantes antes de que ellos empezaran a interactuar con el recurso.

5.1.4.1. Análisis desde el marco conceptual de la covariación

Número de tarea	Tipo de recurso	Indicadores que se espera desarrollar	Nivel de alcance de cada indicador
3	Evaluación	**AM1:** Los estudiantes coordinan el valor de una variable con los cambios de la otra. Esto se puede evidenciar cuando al seleccionar la gráfica argumentan aludiendo correctamente a la magnitud representada en el eje x y a la magnitud representada en el eje y.	Durante la aplicación de esta tarea, los estudiantes mostraron un comportamiento asociado con AM1 cuando para seleccionar la gráfica adecuada para la situación propuesta en el enunciado, reconocieron en qué eje debía estar representada cada magnitud, teniendo en cuenta cuál de las variables, depende de la otra.
		AM2: Los estudiantes verbalizan que a medida que aumenta la magnitud x, también aumenta la magnitud y. O bien, que a medida que disminuye la magnitud x, también lo hace la magnitud y.	También se presentó un comportamiento asociado con AM2, cuando se pidió a los estudiantes justificar la respuesta seleccionada y ellos aludieron a la dirección del cambio de una variable respecto a la otra. Por ejemplo, en la primera situación propuesta señalaron que a medida que aumenta la cantidad de máquinas, también aumenta la cantidad de obreros.
		AM3: Los estudiantes coordinan la magnitud del cambio de la magnitud x con la magnitud y. Un indicador de esto es que reconozcan que las magnitudes covarían de manera constante. Además, que sepan dar cuenta y razón del valor de la pendiente para cada situación.	Al aplicar esta tarea, también se evidenciaron comportamientos asociados con AM3, pues en cada una de las situaciones propuestas, los estudiantes cuantificaron el cambio haciendo alusión a al valor de la pendiente correspondiente a la recta que representa cada situación. Incluso evidenciaron un error en la programación de la tercera situación, pues, aunque el recurso indicaba que la respuesta que dieron no era correcta, ellos estaban seguros de que sí lo era y se mantuvieron en su posición argumentando a partir de la gráfica, cuál era la pendiente de la recta que representa la situación mencionada.

Tabla 18: Carlson - T3S1

5.1.4.2. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Carlson.

Consideramos que el uso de este recurso fue pertinente en el cierre de la sesión, pues permitió que los estudiantes aplicaran algunos de los conocimientos adquiridos o reforzados durante la clase y que pudieran acceder a la realimentación de sus respuestas en tiempo real.

Esta tarea podría haberse llevado a cabo utilizando lápiz y papel. Sin embargo, haberla realizado representó las siguientes ventajas para los estudiantes:

- ✓ Tuvieron la oportunidad de recibir la realimentación de sus respuestas en tiempo real,
- ✓ Pudieron visualizar de forma dinámica cómo se forma la recta que representa la situación. Esto mediante el botón *"Verificar"*, pues este permite animar un punto, cuyo rastro dibuja la recta en mención.
- ✓ El uso de casillas de verificación y botones fue clave en la implementación de la tarea, pues permitió que los estudiantes cambiaran de pregunta rápidamente y que el plano quedara en blanco de inmediato, para hacer la verificación de la respuesta dada a la siguiente pregunta.

5.1.4.3. Análisis desde el marco de abstracción situada.

Recurso	Ind	Descripción	Análisis de la interacción
3: Evaluación	**B4**	Construcción de ideas cercanas a las formales respecto a	Las acciones realizadas sobre el recurso en esta tercera tarea resultan ser muy limitadas debido a la programación desarrollada en este, las interacciones de los estudiantes no son más que la activación de una casilla y la posterior verificación de que la opción escogida es la

		la noción de razón constante.	correcta. Aquí se ponen más en juego los conocimientos que han construido y desarrollado en las tareas previas que sus acciones sobre objetos de GGB particularmente. Incluso, se evidencia la rapidez con la que los estudiantes describen las relaciones que se les están proponiendo y no dudan en escoger la respuesta correcta. A esta situación se asigna este indicador debido a que el recurso presenta un error, mostrando como incorrecta la opción correcta, los estudiantes se percatan de esto y dan argumentos matemáticos cercanos a los formales respecto a los avances, reconociendo la variable dependiente e independiente.

Tabla 19: AS - T3S1

5.1.4.4. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Abstracción Situada.

La programación desarrollada en el tercer recurso limitaba las acciones de los estudiantes a presionar algunas casillas que controlaban la aparición de un rastro. El elemento fundamental aquí fue el conocimiento adquirido en las dos tareas previas, pues esto fue lo que les permitió interpretar las situaciones que se estaban presentando en este recurso. Este solo permitía observar si el estudiante escogía o no la opción correcta. Es importante mencionar que una de las situaciones se encontraba mal programada y los estudiantes se percataron de este error, argumentando a partir de las ideas construidas en los dos recursos anteriores el por qué no podía ser la opción que había aparecido como correcta.

5.2. Segunda sesión de clase

Durante la segunda sesión de clase se propusieron dos tareas diferentes. Inicialmente se establecieron hipótesis respecto a las acciones mentales de razonamiento covariacional que probablemente podrían ser evidenciadas por parte de los estudiantes; estas se resumieron en los indicadores propuestos en la planeación de la sesión.

5.2.1. Objetivo general

Trabajar el concepto de función entendida como la unión de segmentos, de modo que, al obtener la pendiente de cada uno de los segmentos, sea posible analizar la variación de la razón de cambio en una función y a partir de esta empezar a trabajar características de la función como crecimiento, decrecimiento, extremos (máximos y mínimos) y puntos de inflexión.

5.2.2. Tarea 1

Esta tarea consta de dos momentos específicos. En el primero, se espera que las estudiantes verifiquen que una curva está formada por una cantidad infinita de segmentos. En el segundo, se espera que a partir de la obtención de las pendientes de los segmentos que forman una curva, asocien el signo de la pendiente con la posición del segmento. Es decir, que den cuenta y razón de que cuando un segmento tiene pendiente positiva, está inclinado hacia la derecha y cuando tiene pendiente negativa, está inclinado a la izquierda.

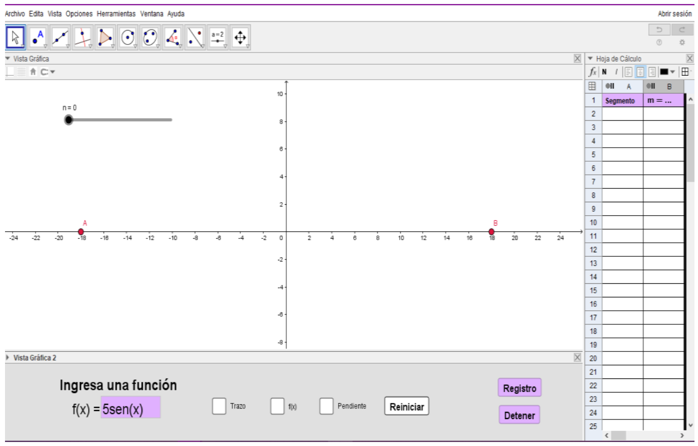


Figura 30. Segunda sesión - Tarea 1

Al iniciar la sesión, se solicita a las estudiantes abrir el recurso y se les entrega una guía en la que encuentran ciertas instrucciones para la manipulación del recurso y las preguntas que se espera que respondan a partir de su interacción con este. Cabe resaltar que, aunque se hizo entrega de dicho material, los investigadores orientan a las estudiantes durante la aplicación de la tarea y hacen las aclaraciones que tengan lugar.

Inicialmente, una de las estudiantes lee el enunciado, en este se solicita ingresar cierta función en una casilla de entrada que se encuentra en la parte inferior del recurso. La estudiante manifiesta que no entiende qué debe hacer, le pregunta a su compañera y ella señala que tampoco tiene claro qué deben hacer. Uno de los investigadores interviene para mostrarles cuál es la casilla de entrada a la que hace referencia la guía y les indica que deben borrar la función que se encuentra allí y seguido a esto, escribir la función que les indica la guía.

Una vez ingresada la función, las estudiantes empiezan a mover el deslizador *n* y evidencian que en la vista gráfica del recurso aparecen varios segmentos unidos entre sí. Teniendo en cuenta lo anterior responden las preguntas planteadas en la primera parte de la guía sobre la función ingresada; estas están orientadas a la verificación de la propiedad propuesta para trabajar en el primer momento. El procedimiento descrito anteriormente, se repite varias veces con distintas funciones. A partir del movimiento del deslizador, una de las estudiantes logra concluir que la cantidad de segmentos que van apareciendo, corresponden al valor de *n* y que a medida que el valor del deslizador *n* se va haciendo mayor, la gráfica que forman los segmentos va aproximándose a la gráfica de la función que se ingresó en la casilla de entrada.

En el segundo momento de la aplicación de la tarea, las estudiantes siguen la instrucción de activar la casilla *"Pendiente"*, mover el deslizador *n* de modo que su valor sea 25, activar la casilla *"Trazo"*, hacer clic sobre dos celdas de la hoja de cálculo del recurso y, por último, hacer clic sobre el botón *"Registro"*.

Dado que las estudiantes ubicaron el valor de *n* en 25, según la instrucción dada, en la vista gráfica aparece la unión de 25 segmentos cuya forma se asemeja a la de la función ingresada en la casilla de entrada. Al hacer clic en el botón *"Registro"* aparecen en la hoja de cálculo una columna en la que aparecen los números del 1 al 25 y otra columna, con el valor de la pendiente del segmento correspondiente. Cabe aclarar que previamente, se les indica a las estudiantes que, para esta parte de la tarea debían numerar los segmentos que aparecen en la vista gráfica de izquierda a derecha, es decir que los números del 1 al 25, corresponden a cada segmento que aparece. A partir de los datos que aparecen en la hoja de cálculo y de la representación que aparece en la vista gráfica, una de las estudiantes logra asociar el signo de la pendiente de un segmento con la posición de este, como se esperaba.

5.2.2.1. Análisis desde el marco conceptual de la covariación

Número de tarea	Tipo de recurso	Indicadores que se espera desarrollar[9]	Nivel de alcance de cada indicador
1	Verificación de propiedades	**AM2:** Los estudiantes reconocen que cuando el valor del deslizador n aumenta, también aumenta el número de segmentos que aparecen en pantalla y van formando la curva. Además, reconocen que entre mayor sea la cantidad de segmentos que aparecen, mayor es la aproximación de la unión de estos a la curva ingresada.	Durante la aplicación de la tarea, la estudiante que había asistido a la sesión de clase anterior, evidencia comportamientos asociados con AM2. Inicialmente, asocia el valor que toma el deslizador n con la cantidad de segmentos que van apareciendo en el plano. En un primer momento, contaba uno por uno los segmentos para verificar su hipótesis. Sin embargo, después de repetir una y otra vez esta acción, concluye que a medida que aumenta el valor de n, aumenta la cantidad de segmentos en el plano. En adición a lo anterior, la estudiante verbaliza que a medida que aumenta el número de segmentos que aparecen en pantalla, la gráfica formada por estos va aproximándose cada vez más a la gráfica de la curva ingresada en la casilla de entrada, esta conclusión se obtuvo después de ingresar distintas curvas al recurso.
		AM3: Los estudiantes asocian las pendientes positivas y negativas de los segmentos con la posición de estos, reconocen que los segmentos cuya pendiente es positiva, están inclinados hacia la derecha y los segmentos con pendiente negativa están inclinados hacia la izquierda.	Este indicador también fue alcanzado por la estudiante que había asistido a la sesión de la clase anterior, pues al preguntarle qué característica tienen los segmentos cuya pendiente es positiva, manifiesta que los segmentos con pendiente positiva están inclinados hacia la izquierda de la pantalla y que los segmentos con pendiente negativa están inclinados hacia la derecha. Es decir, que la estudiante asocia los signos de la pendiente de los segmentos con la posición en la que estos están graficados.
		AM4: Los estudiantes asocian el signo de las pendientes de los segmentos con los comportamientos de crecimiento y decrecimiento den diferentes intervalos de la función.	La estudiante que había asistido a la primera sesión también muestra comportamientos asociados a esta acción mental, pues, por ejemplo, al solicitarle una descripción de la gráfica de valor absoluto, la estudiante señala que esta consta de una línea que es decreciente y luego creciente. Seguido a esto alude a que en los casos en los que una curva crece, las pendientes de los segmentos que la forman son negativas y en los casos en los que una curva crece, las pendientes de los segmentos que la forman son positivas.

Tabla 20: Carlson - T1S2.

5.2.2.2. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Carlson.

Para esta tarea, se utilizó un recurso que se sitúa dentro de la categoría *"Verificación de propiedades".* Consideramos que la mediación de la tarea propuesta usando este tipo de recurso fue pertinente para trabajar las dos ideas que la fundamentan. Esto, porque como se mencionó anteriormente, la interacción con el recurso permitió que una de las estudiantes obtuviera conclusiones muy cercanas a las ideas que se plantearon para trabajar en la sesión.

[9] En este caso no se incluyó un indicador independiente para AM1, pues se esperaba que los estudiantes evidenciaran sin dificultad que a medida que aumentaba el valor que toma *n*, también aumentaba la cantidad de segmentos que aparecían en la vista gráfica. Al evidenciar esto, los estudiantes también estarían evidenciando que si cambia el valor de *n*, cambia la cantidad de segmentos, comportamiento asociado con AM1.

Ahora bien, se reconoce la potencialidad del recurso en tanto que representa las siguientes ventajas para las estudiantes:

- ✓ Permite aumentar o disminuir la cantidad de segmentos que forman la curva a partir del movimiento de un deslizador de manera rápida.
- ✓ Permite tener acceso a un registro en tiempo real de los valores de las pendientes de cada uno de los segmentos que aparecen en la vista gráfica.
- ✓ Posibilita acceder a dos representaciones de un mismo objeto matemático de manera simultánea, aspecto que se infiere, influyó en que la estudiante mencionada en párrafos anteriores hubiese logrado establecer la relación entre la posición de los segmentos y el signo de su pendiente.
- ✓ Los segmentos cambian de tamaño en tiempo real. En particular se resalta que a medida que aumenta el valor de n, el tamaño de los segmentos se hace cada vez más pequeño, haciendo posible el trabajo sobre la aproximación a la idea de que una curva está conformada por segmentos infinitamente pequeños.

Por lo señalado *a priori*, no habría sido posible realizar esta actividad con tecnologías como lápiz y papel. Por último, vale la pena mencionar que la estudiante que también había asistido a la primera sesión y que expresaba que no era de su agrado trabajar con tecnología digital, se mostró mucho más cómoda durante esta sesión. Incluso ya estaba familiarizada con los deslizadores, las casillas de verificación y su funcionamiento.

5.2.2.3. Análisis desde el marco de abstracción situada.

Recurso	Ind	Descripción	Análisis de la interacción
1: Verificación de propiedades	**A0**	Relación nula entre objetos GGB y objetos matemáticos, aún después de ingresar los datos.	Las estudiantes realizan algunas intervenciones en el recurso ingresando los datos y realizando las acciones solicitadas, sin embargo, no se muestra evidencia de qué estén estableciendo relaciones entre los datos ingresados y los objetos GGB.
	D0	Reconocimiento de la cantidad de segmentos a partir del valor que se le dé al deslizador.	Las estudiantes inicialmente ingresan una función (que parecen no conocerla, pues no hay ningún comentario sobre esta) y enseguida se les da algunas indicaciones de qué elementos del recurso deben utilizar. Las estudiantes deben mover un deslizador y activar una casilla que hace aparecer unos segmentos en pantalla conforme se mueve el deslizador. Las estudiantes logran reconocer esta relación entre la cantidad de segmentos y el valor del deslizador, esto lo hacen para dos valores distintos del deslizador, por esto se genera dos veces el código D0.
		Reconocimiento de la cantidad de segmentos a partir del valor que se le dé al deslizador.	
	B2	Descripción de una primera forma de la función a partir de los segmentos que se generan.	A pesar de no reconocer la representación algebraica de la función, las estudiantes empiezan a reconocer la representación geométrica de esta conforme van apareciendo más segmentos, también reconocen que a medida que aumenta el valor del deslizador va aumentando la cantidad de segmentos y que con estos empiezan a formar "ondas" por su sentido creciente y decreciente.
	D0	Descripción de la relación entre el valor del deslizador y la cantidad de segmentos.	Luego de cambiar la función ingresada, las estudiantes ponen el valor de 100 en el deslizador y sin necesidad de contarlos, asumen directamente que la cantidad de segmentos que aparecen en pantalla es igual al valor que tome el deslizador. Este indicador es asignado porque las estudiantes establecen la relación entre dos objetos de GGB (cantidad de segmentos y

			deslizador) pero aún no describen los posibles objetos corporeizados a través de estos.
	B2	Descripción de la forma obtenida por la función según la cantidad de segmentos que aparecen.	Las estudiantes describen a partir de la paridad del número del deslizador si la función termina en "punta" o en "segmento" (esto sucede particularmente con esta función debido a que es valor absoluto y está compuesta simétricamente por los segmentos). Sin embargo, esta descripción no pasa de la cantidad de segmentos y la forma de punta de la función. Finalmente, describen que a medida que el deslizador aumenta, también aumenta la cantidad de segmentos, y reconocen la cantidad ellos, solo con ver el valor del deslizador.
	C2	Reconocimiento de la función original como un comparativo para los segmentos.	Las estudiantes activan la casilla $f(x)$ y allí aparece la función original, es decir, la función sobre la cuál estaban apareciendo los segmentos. Ellas describen esta función como una forma de comparar los segmentos que estaban apareciendo, pues dicen que cuando aumentan la cantidad de segmentos, estos se van acercando a la función original. Esto es importante, pues se esperaba que las estudiantes en algún punto lograran describir una función como la unión de infinitos segmentos infinitamente pequeños y este resulta ser el primer paso para ello. Se asigna este indicador porque los estudiantes empiezan a describir relaciones entre los objetos matemáticos a partir de la construcción de GGB.
	C2	Descripción de los cambios de crecimiento de la gráfica de la función original.	Gracias a lo trabajado en la sesión pasada, una de las estudiantes es capaz de describir la gráfica de la función que aparece como una curva "creciente y luego decreciente", esto se debe a dos elementos particularmente. El primero a lo que observaron en el recurso con la aparición de los segmentos crecientes y decrecientes y también los elementos construidos en la sesión pasada. (Los comentarios sobre el conocimiento de la sesión pasada son particulares para la niña 1, quien fue la única participante en la sesión anterior). Se establecieron relaciones entre los objetos matemáticos gracias a la interacción con el recurso y los objetos de GGB que los corporeizan
	D0	Descripción de la relación entre el valor del deslizador y la cantidad de segmentos.	Se vuelve a realizar la descripción de la relación entre la cantidad de segmentos, el valor del deslizador y el crecimiento de estos.
	D2	Cálculo y descripción del valor de la pendiente de los segmentos	Los segmentos por sí solos no tenían mucho significado para los estudiantes, es por esto por lo que se realiza un registro en la hoja de cálculo de GGB, con el fin de relacionar directamente su posición y ubicación con su valor. Las estudiantes reconocen en primer lugar que cada segmento tiene un valor que determina su pendiente y que es el registrado en la hoja de cálculo. Enseguida describen que entre más inclinado se encuentre un segmento, menor será su pendiente, esto lo realizan gracias a la observación y al establecimiento de la relación 1 a 1 (segmento - valor). La hoja de cálculo juega un papel fundamental en la determinación de estos elementos, pues de no ser por los valores allí registrados, no se hubiera podido establecer la relación. Por último, además de su valor numérico, los estudiantes también describen el crecimiento y decrecimiento de la función original a partir del signo de los valores y la forma en que se encuentre ubicado un segmento. Describen que los segmentos de pendiente positiva se encuentran en la parte creciente de la función, y los segmentos de pendiente negativa se encuentran en la parte decreciente de la función. Las estudiantes lograron describir relaciones matemáticas gracias a la interacción con los objetos de GGB.

Tabla 21: AS - T1S2

5.2.2.4. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Abstracción Situada:

Este recurso estaba programado de tal forma que quien lo usara podría ingresar la función que quisiera y generar una aproximación a esta a partir de la unión de una cantidad controlable de segmentos cuya longitud disminuía conforme aumentaba la cantidad de ellos. Al observar esto y seguir las indicaciones dadas por los investigadores, se esperaba que las estudiantes lograran verificar que la unión de segmentos se iba aproximando a la función y que describieran que esta podría interpretarse como la unión de infinitos segmentos. Esta propiedad fue verificada por las estudiantes a partir del uso del dinamismo de los deslizadores y la relación que se estableció entre los diferentes objetos GGB y los objetos matemáticos que se corporeizan a través de estos, sin embargo, no se logró concluir por completo la interpretación de la función. Las herramientas de GGB que se usaron fueron adecuadas, pues la relación que se establecía entre estas era clara, por ejemplo, se interpretó la cantidad de segmentos a partir del valor del deslizador, y el registro de las pendientes en la hoja de cálculo les permitió describir la relación entre la variación de los valores de las pendientes con los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. El recurso era del tipo Verificación de propiedades, que en conjunto con las indicaciones dadas por los investigadores permitieron a las estudiantes llegar a las conclusiones descritas. Es posible que la relación entre las estudiantes no permitiera avanzar más y generar más y mejores conclusiones, pues era su primera vez trabajando juntas, además, 3 de las 4 niñas no participaron en la sesión 1 y por tanto no estaban tan familiarizadas con la forma de trabajar, ni con los recursos ni con las nociones matemáticas relacionadas al cambio.

5.2.3. Tarea 2

En la guía entregada a las estudiantes al inicio de la sesión, también se encontraban las preguntas orientadoras para llevar a cabo esta tarea. El recurso utilizado para mediarla muestra la representación gráfica de una función, esta puede ser modificada a partir de una casilla de entrada. Sobre la función se encuentran dos puntos A y B, y se muestra la recta que pasa por esos dos puntos; de estos solo es posible mover libremente el punto A. La recta que pasa por A y B representa una recta secante a la curva en mención. En la vista gráfica del recurso, también se evidencian las representaciones gráfica y numérica de la pendiente de la recta secante, además de un deslizador del cual depende la distancia que hay entre A y B. En adición a lo anterior, el recurso también cuenta con una casilla de control denominada *"Relación"*. Al hacer clic en esta, aparece el rastro de una gráfica que se va aproximando a la gráfica de la derivada de la función ingresada inicialmente a medida que el valor de n, es decir, la distancia entre A y B va haciéndose más pequeño. Al activar dicha casilla, también aparece el punto D sobre la gráfica de la derivada y aparecen las coordenadas de este. La aparición de este punto y sus coordenadas, tienen como finalidad que las estudiantes evidencien que la pendiente de la recta tangente es igual a cero en estos puntos en los que la función no presenta ningún cambio de crecimiento.

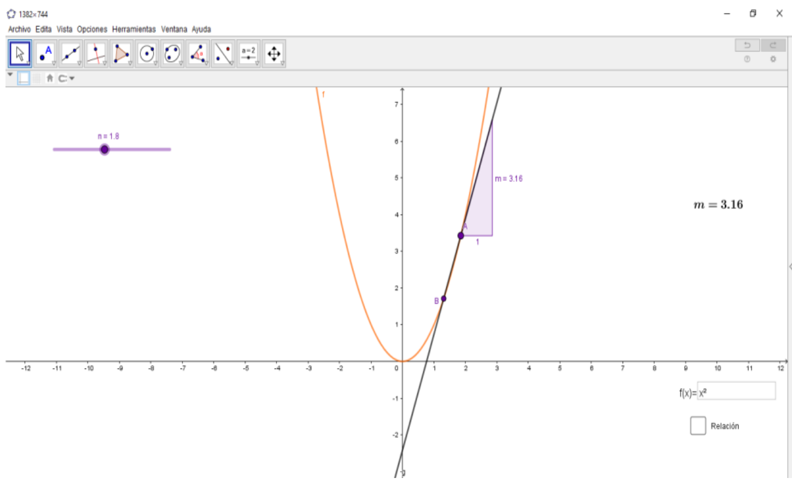


Figura 31. Segunda sesión - Tarea 2

En primer lugar, se preguntó a las estudiantes qué sucedía con los objetos presentados en la vista gráfica cuando se movía el deslizador *n.* Una de las estudiantes afirmó que al mover *n,* cambia la pendiente. Luego, otra de ellas señaló que a medida que el valor de *n* aumenta, empieza a disminuir el valor de *m;* esto sucedió en ese momento por la posición en la que se encontraba el punto A, pero no es algo que ocurra siempre; el valor de verdad de esa afirmación depende del lugar en el que se encuentre A. Otra de las apreciaciones de una de las estudiantes es que inicialmente, solo era visible un punto (A), pero que cuando se empezó a mover el deslizador, apareció otro punto (B). En adición a lo anterior, una de las estudiantes afirmó que el movimiento del punto B, dependía del deslizador *n.* Sin embargo, ninguna de las estudiantes aludió específicamente a que al mover el deslizador *n*, cambia la distancia entre A y B y que esta es proporcional al valor que tome *n.*

Seguido a esto, se preguntó a las estudiantes qué sucedía al mover el punto A, inicialmente las estudiantes indican que no sucede nada diferente a lo que sucedió cuando se empezó a mover el deslizador *n*. Luego, una de las estudiantes señala que al mover el deslizador *n*, se empieza a mover el punto B sobre la gráfica de la función y que al empezar a mover el punto A, este también se mueve sobre la gráfica de la función y hace que el punto B también se mueva.

Después de este episodio la estudiante lee la siguiente instrucción de la guía, esta dice que deben ingresar en la casilla de entrada la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2$. Una vez aparece la gráfica de la función en la pantalla, uno de los investigadores pregunta a las estudiantes si alguna vez habían visto una gráfica con esas características, ellas manifiestan que no. Las estudiantes continúan con la lectura y seguimiento de las orientaciones dadas en la guía, por lo que activan la casilla de control *"Relación"* y mueven el deslizador *n*. Una de las estudiantes señala que al mover el deslizador, la gráfica que apareció al activar la casilla de control mencionada, empieza a "unirse".

Uno de los investigadores le pide a la estudiante que está manipulando el recurso, que le muestre dónde está el punto D y que mueva el deslizador *n* hasta que este tome el valor más pequeño posible. Ella lo hace y seguido a esto, el investigador les solicita a las estudiantes, observar las coordenadas de dicho punto (estas aparecen en pantalla). Se esperaba que las estudiantes dieran cuenta y razón de que la coordenada en *y* del punto D, cuando *n* toma el valor más pequeño posible, corresponde al valor de la pendiente de la recta secante a la curva, pero

esto no sucede. Para intentar direccionar a las estudiantes a la relación que se esperaba que establecieran, uno de los investigadores les pregunta qué representa el valor que aparece junto al triángulo (este triángulo es la representación gráfica de la pendiente de la recta secante). Una de las estudiantes dice que representa la pendiente, se le pregunta la pendiente de qué y ella afirma que es "la pendiente de *m*".
A raíz de lo anterior, los investigadores aclaran a las estudiantes que *m* es una manera de referirse a la pendiente y que de acuerdo con el trabajo realizado durante la sesión 1 y la primera parte de la sesión 2, siempre hallamos la pendiente de una recta. Una vez aclarado esto, las estudiantes reconocen que el valor que está en la pantalla representa la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B (recta secante a la curva). Posteriormente uno de los investigadores pregunta a las estudiantes cuándo la pendiente de la recta que pasa por A y B tiene signo negativo. Una de las estudiantes responde que esto sucede cuando la curva ingresada inicialmente, es decreciente. Así mismo, concluye que la pendiente tiene signo positivo en los tramos en los que dicha curva es creciente. Otra de las estudiantes manifiesta no haber comprendido la idea anterior, la estudiante que la planteó se la explica mostrándole el cambio de signo de la pendiente a partir del movimiento del punto A por un tramo en el que la función pasa de ser creciente a ser decreciente. Luego de esto, se pregunta a las estudiantes qué sucede con la pendiente de la recta cuando la función ingresada no crece ni decrece. La estudiante que había participado de la primera sesión de clase, que fue quien siempre manipuló el recurso, ubica el punto A, en uno de los máximos de la función e intenta que la recta secante sea paralela al eje *x*. Uno de los investigadores pregunta a las estudiantes, por un punto en el que la pendiente de la recta secante debería ser cero, a lo que la estudiante que estaba manipulando el recurso, responde que esto debería suceder en el lugar en el que ella ubicó al punto A. Cuando se le solicita justificar su afirmación, la estudiante manifiesta dificultad para organizar sus ideas, pero indica que la pendiente en ese punto debería ser cero porque es donde se presenta un cambio de crecimiento.

5.2.3.1. Análisis desde el marco conceptual de la covariación

Número de tarea	Tipo de recurso	Indicadores que se espera desarrollar	Nivel de alcance de cada indicador
2	Exploración de situaciones y formulación de conjeturas	**AM1:** Los estudiantes reconocen que a medida que el deslizador n cambia de valor, también cambia la distancia entre los puntos A y B y cambia el valor de la pendiente de la recta que pasa por esos dos puntos. Además, reconocen que dicho valor también cambia cuando se mueve el punto A.	Cuando se pregunta a las estudiantes qué sucede al mover el deslizador *n*, la estudiante que había asistido a la primera sesión de clase, señala que cambia la pendiente de la recta, comportamiento que se podría asociar con AM1. Sin embargo, en un diálogo que se presenta más adelante entre los investigadores y las estudiantes se evidencia que la estudiante en mención no tiene claro que el valor de m corresponde al valor de la pendiente de la recta secante a la curva que pasa por los puntos A y B. Por lo anterior, este comportamiento se catalogó como pseudoanalítico. Por otro lado, otra de las estudiantes menciona que cuando se empieza a mover el deslizador n aparece otro punto diferente a A en el plano (el punto B), pero en ningún momento alude a que la distancia entre estos dos puntos cambia, cuando cambia el valor del deslizador. De acuerdo con lo mencionado anteriormente, se considera que el

			indicador propuesto para AM1 no fue alcanzado por las estudiantes.
		AM2: Los estudiantes reconocen que a medida que aumenta el valor que toma el deslizador n, también aumenta la distancia entre los puntos A y B.	Como se mencionó al realizar el análisis sobre el nivel de alcance del indicador establecido para AM1, las estudiantes no dan cuenta y razón de que al mover el deslizador n cambia la distancia que hay entre los puntos A y B. En este orden de ideas, tampoco aluden a que a medida que aumenta el valor de n, también aumenta la distancia entre dichos puntos. Por lo anterior, se puede afirmar que no se alcanza el indicador propuesto inicialmente para la sesión. Tampoco se evidenció algún otro comportamiento asociado con AM2.
		AM3: Los estudiantes asocian el cambio del valor de la pendiente de la recta que pasa por A y B, con la inclinación de esta (a la izquierda cuando la pendiente es negativa y a la derecha cuando la pendiente es positiva). Además, los estudiantes dan cuenta y razón de que a medida que el valor de n se hace más pequeño, la gráfica que aparece cuando se activa la casilla "Relación", se aproxima más a la gráfica de una función cuadrática o parábola.	Durante la aplicación de la tarea, las estudiantes no evidenciaron comportamientos asociados a esta acción mental. No hicieron alusión a la dirección de la inclinación de la recta secante a la curva que pasa por los puntos A y B cuando la pendiente es positiva o negativa. Tampoco dieron cuenta y razón de que a medida que el valor del deslizador n se hace más pequeño, la gráfica que aparece cuando se activa la casilla "Relación" se aproxima a la gráfica de una función cuadrática o parábola.
		AM4: Los estudiantes reconocen que la pendiente de la recta que pasa por A y B cambia de signo en los puntos máximos y mínimos de la función ingresada. Además, verbalizan que cuando alguno de los puntos (A o B) se encuentra ubicado en alguno de los extremos de la función y a su vez el valor de n se va haciendo más pequeño, la pendiente de la recta que pasa por los puntos mencionados tiende a cero.	Aunque las estudiantes no alcanzaron puntualmente los comportamientos asociados con AM4, descritos en el indicador establecido en la planeación, la estudiante que había asistido a la primera sesión evidenció algunos comportamientos que se considera, están asociados con esta acción mental. En primer lugar, la estudiante reconoce que en los intervalos en los que la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B es positiva, la función ingresada inicialmente es creciente y en los intervalos en los que la pendiente de dicha recta es negativa, la función es decreciente. En segundo lugar, la estudiante en mención reconoce que el punto máximo de la curva es el punto en el que esta cambia de crecimiento y da cuenta y razón de que la pendiente en este punto es igual a cero. Sin embargo, no verbaliza que esto ocurre precisamente porque en este punto no hay crecimiento ni decrecimiento.

Tabla 22: Carlson - T2S2

5.2.3.2. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Carlson.

Para la segunda tarea se utilizó un recurso que se sitúa en la categoría *"Exploración de situaciones y formulación de conjeturas"*. Cuando este se diseñó, se consideró que podría representar las siguientes ventajas para las estudiantes:

- ✓ El dinamismo que brindan el deslizador y el movimiento del punto A, permiten visualizar infinitas rectas secantes a la curva ingresada, acción que hace posible evaluar múltiples casos para obtener conclusiones acerca del objeto matemático en estudio.

- ✓ La casilla de entrada permite ingresar y analizar diferentes tipos de funciones, algo que resulta útil para para efectos de generalización del comportamiento de un objeto matemático.
- ✓ Al mostrar una representación gráfica de la pendiente de la recta secante (triángulo) y una representación de su valor numérico, los estudiantes pueden asociar la posición en la que aparece el triángulo, con el signo de la pendiente de la recta y a su vez, con la posición de esta (v.g. cuando la hipotenusa del triángulo rectángulo (contenida en la recta secante) está inclinada hacia la derecha, la pendiente de la recta es positiva).
- ✓ La posibilidad de variar la distancia entre los puntos A y B, hace posible que los estudiantes den cuenta y razón de que a medida que esta se hace cada vez más pequeña, y uno de los puntos se encuentra en uno de los extremos de la función, la pendiente de la recta secante tiende a cero.
- ✓ Otro aspecto que puede representar una ventaja para los estudiantes que utilicen el recurso, es que pueden evidenciar que a medida que el valor del deslizador *n* se hace más pequeño, la gráfica que aparece al activar la casilla *"Relación"* se va aproximando a la representación gráfica de la derivada de la función ingresada inicialmente.

Por lo mencionado previamente, consideramos que no se habría podido llevar a cabo la misma tarea utilizando tecnologías como el lápiz y papel, pues estas no habrían podido representar las mismas ventajas para los estudiantes.

Como se evidencia en el análisis realizado desde el marco conceptual de la covariación, el nivel de alcance de los indicadores propuestos para esta tarea no fue alto. Se presume que esto se debe a que no contamos con la asistencia del mismo grupo de estudiantes que participó de la primera sesión. Solo contamos con una de los cinco estudiantes que pertenecen a este grupo, esta estudiante fue quien manipuló el recurso durante toda la sesión, intentó que las demás estudiantes lo hicieran, pero ellas prefirieron solo observar. Cuando se realizaba alguna pregunta ella era quien intervenía con más frecuencia, las demás se limitaban a asentir o a indicar que estaban de acuerdo con ella.

Ahora bien, de las cinco ventajas que representa el recurso fueron aprovechadas tres en particular, la primera, la tercera y la cuarta. El dinamismo fue clave, pues fue a partir del movimiento del deslizador y del punto A, que se concluyó que la pendiente de la recta secante era positiva únicamente en los tramos en los que la función era creciente y negativa en los tramos en los que esta era decreciente. Esto no habría sido posible al realizar la actividad con lápiz y papel, pues únicamente podríamos haber representado una de las infinitas rectas secantes a la curva. La posibilidad de poder reducir la distancia entre los puntos A y B y de ubicar el punto A en uno de los extremos de la función, fue lo que permitió evidenciar que la pendiente es cero en estos puntos, porque es allí donde se presenta un cambio de crecimiento.

5.2.3.3. Análisis desde el marco de abstracción situada.

Recurso	Ind	Descripción	Análisis de la interacción
2: Exploración de situaciones y formulación de conjeturas	**B0**	Relación entre objetos GGB como puntos y movimiento de deslizadores.	En este recurso, nuevamente encontramos un deslizador que permite manipular algunos de los elementos de GGB, tales como puntos, medidas, entre otros. Además, se describe una relación de dependencia entre un punto y otro, sin embargo no es una dependencia matemática, sino una dependencia de "existencia", es decir, si el deslizador se mueve es posible que aparezca un

			punto. No hay ni se construyen relaciones matemáticas a partir de los elementos de GGB.
	D1	Descripción de las relaciones entre los objetos GGB que corporeizan un punto sobre la función y la pendiente.	Las estudiantes reconocen que el deslizador efectivamente controla la distancia que hay entre el punto B y el punto A, y describen que el punto B solo se mueve sobre la función si el punto A se mueve. Las estudiantes describen relaciones matemáticas como que A y B se encuentran sobre la función f, y describen las funciones que cumplen los elementos del recurso como el deslizador y los puntos. Sin embargo, no describen las relaciones matemáticas que pueden establecerse en los unos y los otros.
	D1	Descripción de la curva de cambio como dependencia del valor del deslizador.	Las estudiantes describen que a partir del cambio del valor del deslizador, la curva que aparece al dar clic en la casilla "relación" cambia su forma, aumentando sus intervalos o uniéndose los que ya están. Reconocen y describen que cuando el deslizador se hace más pequeño la curva se une formando un solo trazo. Aquí nuevamente se evidencia la descripción de relaciones entre objetos GGB (deslizador y curva) pero no entre los objetos matemáticos que se corporeizan a través de estos.
	C1	Descripción de los objetos de GGB trabajados en el recurso hasta el momento sin reconocer una relación matemática entre estos.	A pesar de que las estudiantes describen de manera individualizada las acciones que realiza cada objeto GGB como los puntos, el deslizador y la curva, no llegan a describir la relación matemática que existe entre estos, de hecho, es el investigador quien tiene que dar esta conclusión para poder avanzar hacia la siguiente parte de la tarea. Es por esta razón que a estas acciones de las estudiantes se asigna el indicador C1.
	B3	Relación entre objetos GGB y los objetos matemáticos corporeizados a través de estos, modificación de ideas respecto a la pendiente de la recta.	Antes de la intervención realizada por el investigador, las estudiantes no lograban describir las diferentes relaciones que se esperaban a partir de la pendiente de la recta, tales como crecimiento, decrecimiento, proximidad entre puntos, entre otros. Una vez realizada la intervención, las estudiantes describen el crecimiento y decrecimiento de la función y las relacionan con la pendiente de la recta, además se refieren a la ubicación de la recta (derecha o izquierda) para hablar del cambio en la función. Es importante mencionar que la intervención previa con el recurso no fue eficaz; fue la intervención de los investigadores la que permitió a las estudiantes reconocer estas relaciones entre los objetos, pero finalmente, modifican sus ideas y describen la relación.
	D3	Interpretación del crecimiento y decrecimiento de la función a partir de la recta.	A partir de la pendiente de la recta y la curva generada luego de dar clic en la casilla "relación", las estudiantes describen el crecimiento y decrecimiento de la función a partir del dinamismo de GGB, esto es moviendo la recta sobre la función, usando el punto A. También describen el cambio de crecimiento cuando la pendiente de la recta cambia de signo. En los puntos en los que existe un cambio de crecimiento las estudiantes describen esto como una pendiente nula, es decir de valor igual a cero. El recurso les permitió encontrar dos posiciones diferentes en las cuáles la pendiente podía dar cero, dando paso a que generaran un descripción de cuál de las dos era la acertada y por qué. Nuevamente el dinamismo y exactitud de GeoGebra tuvo un papel fundamental en el desarrollo de la actividad.

Tabla 23: AS - T2S2

5.2.3.4. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Abstracción Situada.

Este recurso estaba enmarcado en la categoría Exploración de situaciones y formulación de conjeturas, pues se esperaba que las estudiantes, a partir del uso de los elementos del recurso pudieran construir un primer acercamiento a la razón de cambio instantánea, debido a que al mover los puntos los podían hacer tan cercanos como quisieran, sin que fueran iguales. Para esto, contaban con un deslizador que controlaba la cercanía entre dos puntos móviles sobre la función que determinaban además una recta secante sobre esta, y su pendiente se encontraba representada como una curva adicional en el recurso. Las intervenciones y acciones de las estudiantes en este recurso no fueron eficaces, pues no lograron establecer las relaciones entre los objetos GGB y mucho menos entre los objetos matemáticos que deberían corporeizarse a través de estos. No es hasta la intervención de uno de los investigadores explicando esto, que las estudiantes reconocen algunas de las relaciones y logran describirlas. Esto se debe particularmente a que al parecer las instrucciones dadas no eran claras y la programación del recurso no permitía entablar a satisfacción las relaciones entre los diferentes objetos, también es posible que se deba a que 3 de las estudiantes no hicieron parte de la sesión 1 y por tanto no estaban familiarizadas con las nociones matemáticas del recurso. Al final las estudiantes logran concluir algunas de las situaciones esperadas, pero no es gracias al recurso, sino a la intervención del investigador, es decir, las estudiantes no lograron explorar la situación de manera adecuada para la formulación de alguna conjetura.

5.3. Tercera sesión de clase

Durante la tercera sesión de clase se propusieron tres tareas diferentes. Inicialmente se establecieron hipótesis respecto a las acciones mentales de razonamiento covariacional que probablemente podrían ser evidenciadas por parte de los estudiantes; estas se sintetizaron en los indicadores propuestos en la planeación de la sesión.

5.3.1. Objetivo general

Construir una expresión algebraica que represente la razón de cambio promedio entre dos puntos cualesquiera de una función, a partir de la identificación de segmentos o rectas secantes en ella.

5.3.2. Tarea 1

Esta tarea se diseñó con la finalidad de que los estudiantes que no pudieron participar de la segunda sesión tuvieran la posibilidad trabajar alrededor de las ideas estudiadas allí. Es decir, la idea de función vista como la unión de segmentos y la asociación del signo de la pendiente de tales segmentos, con la dirección de la inclinación de estos (a la derecha, pendiente positiva y a la izquierda, pendiente negativa). Este trabajo resultaba necesario antes de dar paso al trabajo alrededor del objetivo propuesto para esta sesión.

Esta tarea consta de dos momentos. Se espera que en el primero, los estudiantes construyan segmentos contiguos cuya pendiente sea igual a la indicada en el enunciado que se presenta en la vista gráfica 2 del recurso. En la vista gráfica 1, los estudiantes inicialmente visualizan el plano cartesiano y un punto sobre este. Para construir los segmentos mencionados, deben hacer clic sobre la herramienta *"Segmento – Pendiente"*, esta se encuentra al final de la barra de herramientas. Una vez hagan clic sobre esta, deben seleccionar el punto que se encuentra en la pantalla, después de esto aparece una ventana emergente en la que deben escribir la pendiente del segmento que desean construir. Luego, el segmento aparecerá en la vista gráfica 1. Para construir el resto de los segmentos deben repetir el mismo proceso. Al finalizar, tendrán en la vista gráfica, la representación de una “curva” construida a partir de la unión de segmentos. En el segundo momento de la implementación de la tarea, se espera que los estudiantes construyan otra curva, que tenga la forma que ellos deseen, a partir de la unión de varios segmentos.

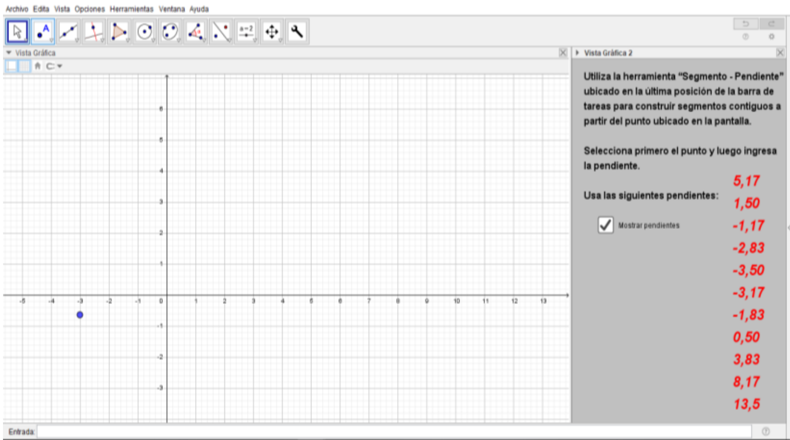


Figura 32. Tercera sesión - Tarea 1

Al iniciar la sesión, se solicita a los estudiantes abrir el recurso, ellos proceden a leer el enunciado, activan la casilla *“Mostrar Pendientes”*, todas las pendientes del listado tienen por lo menos una cifra decimal. En consecuencia, los cuatro estudiantes que no habían podido participar en la segunda sesión, piensan que este es un listado de parejas ordenadas que deben ubicar en el plano. La estudiante que participó de las dos sesiones anteriores les aclara que ese listado corresponde a los valores de las pendientes que deben tener los segmentos que van a construir.

Antes de empezar a resolver la tarea propuesta utilizando el recurso, los estudiantes intentan graficar en un cuaderno segmentos con pendiente positiva y negativa. Discuten sobre la inclinación que debería tener un segmento con pendiente 5 y luego, sobre la inclinación de segmentos cuyas pendientes sean respectivamente -1 y -2. Uno de los estudiantes, procede a realizar en su cuaderno un bosquejo de la gráfica de los segmentos con las pendientes que les solicita el enunciado de la tarea. Este estudiante grafica los segmentos como si fuesen rectas que se cortan y sus compañeros le aclaran que no se deben trazar las rectas, e intentan decirle que los segmentos deben estar unidos por sus extremos. En esta discusión los estudiantes empiezan a hacer alusión a la dirección de la inclinación que deberían tener los segmentos, teniendo en cuenta el signo de la pendiente; además aluden al comportamiento en términos de crecimiento y decrecimiento que creen que presentaría la curva. Uno de los investigadores les pregunta cuáles pendientes les permiten decir que la curva que van a graficar tiene un comportamiento creciente, a lo que los estudiantes responden que son las pendientes positivas. Asimismo, aluden a que las pendientes que permiten determinar el comportamiento decreciente son las que tienen signo negativo. En adición a lo anterior el investigador les pregunta en qué lugar del listado de pendientes se puede evidenciar un cambio de crecimiento. En respuesta a esto, los estudiantes aluden a dos ejemplos, en uno aparece primer una pendiente con signo positivo y seguido a esta una pendiente con signo negativo y en el otro ejemplo, aparece primero una pendiente con signo negativo y otra con signo positivo.

Después de esto, los estudiantes proceden a realizar la construcción solicitada haciendo uso del recurso GGB. Una vez terminan su construcción, se les pregunta si la curva realizada se

aproxima a la que ellos se imaginaron a partir de su discusión, a esto responden afirmativamente. Adicionalmente se pregunta a los estudiantes por qué consideran que tuvieron dificultades al realizar el bosquejo en el cuaderno. Ellos manifiestan que fallaron en cuanto a la inclinación de los segmentos. Sin embargo, el investigador resalta que en términos de crecimiento y decrecimiento el bosquejo se realizó correctamente.
Al realizar la construcción de los segmentos en el recurso, aparece también un segmento de color rojo, paralelo al eje *x,* de longitud uno, que comparte el extremo inferior de cada segmento que forma la curva, estos últimos aparecen de color azul. Se pregunta a los estudiantes qué tienen en común los segmentos de color rojo y qué tienen en común los segmentos de color azul. Ellos aluden a que los segmentos de color rojo "valen uno", luego señalan que estos representan el cambio en x y finalmente concluyen que este cambio es constante. Respecto a los segmentos de color azul, señalan que estos son los segmentos que se solicitó graficar en el enunciado de la tarea.
Los investigadores preguntan a los estudiantes de qué forma se había definido la pendiente en la primera sesión, al principio ellos aludieron a que se definió la pendiente como "una inclinación". Sin embargo, los investigadores orientaron la discusión, de modo que los estudiantes recordaran que la pendiente se definió como el cociente entre la altura en y y la distancia en x. A partir de esto se señaló la importancia que tiene que el cambio en x sea 1, pues el cociente de la altura en y y 1, sería igual a dicha altura. Seguido a esto se pregunta a los estudiantes, cuál es la diferencia entre los dos primeros segmentos graficados (de pendientes 5,17 y 1,50 respectivamente), a esto los estudiantes responden que se diferencian en la altura que recorren en y. Luego se pregunta cuál de las dos alturas es mayor, a lo que los estudiantes responden que la del primer segmento. Uno de los investigadores les pregunta qué implicaciones tiene esto en la representación de los segmentos que están en la vista gráfica. A esto los estudiantes responden que una de las pendientes está más inclinada que otra y que el triángulo rectángulo cuyos catetos son la distancia en x y la altura en y, es más grande cuando la altura en y es mayor.
Después, se pregunta a los estudiantes qué pasaría con la representación gráfica de la curva si el cambio en x se mantuviera constante pero los segmentos tuvieran un tamaño menor a uno. Los estudiantes manifiestan que en ese caso la curva sería más perfecta debido a que "entre más unidos estén los puntos, más se va definiendo la curva". Una de las estudiantes alude a que esto se debe a la razón de cambio promedio, en seguida uno de los investigadores les pregunta a los estudiantes en qué lugar de la representación gráfica de la curva, es mayor la razón de cambio promedio y en cuáles es menor. Los estudiantes hicieron alusión a los dos segmentos en los que la pendiente es mayor y a los dos segmentos en los que la pendiente es menor, de manera respectiva.
A continuación, se solicita a los estudiantes construir una función que presente varios cambios de crecimiento usando el recurso GGB. El primer segmento que graficaron tiene pendiente positiva. Seguido a esto, los estudiantes manifestaron su intención por graficar un segmento paralelo al eje x, inicialmente pensaron que no era posible, pero luego uno de ellos sugirió graficar un segmento de pendiente cero. Se preguntó al estudiante por qué consideraba que la pendiente debía ser cero, él respondió que cuando la pendiente es cero, el segmento no tiene inclinación. Hasta ese momento todos los segmentos graficados tenían pendientes positivas,

luego graficaron tres segmentos con pendiente cero. Dado que los estudiantes querían realizar una función que fuese simétrica, respecto a la recta paralela al eje y que pasa por el punto (4.5,0), a partir de ese punto empezaron a graficar segmentos cuyas pendientes tuvieran el mismo valor, pero signo opuesto a las graficadas inicialmente.

Cuando terminaron la construcción, se preguntó en qué lugar era creciente, a esto los estudiantes respondieron que esto sucede en el lado izquierdo, pues fue allí donde graficaron segmentos con pendiente positiva. Luego se preguntó por el lugar en que la función construida no crece, los estudiantes indicaron que esto sucedía en el tramo en el que las pendientes eran cero. Se preguntó qué representaba en ese caso el cero, ellos aludieron a el avance en y. Por último, se preguntó en qué pasa en el tramo en el que las pendientes son negativas, ellos respondieron que, en ese tramo la función "empieza a bajar". Por último, se pregunta a los estudiantes en qué lugar el cambio es mayor y en qué lugar el cambio es menor. En respuesta a esto los estudiantes señalan los segmentos en los que la pendiente es mayor y lo segmentos en los que la pendiente es menor, respectivamente.

5.3.2.1. Análisis desde el marco conceptual de la covariación

Número de tarea	Tipo de recurso	Indicadores que se espera desarrollar[10]	Nivel de alcance de cada indicador
1	Verificación de propiedades	**AM2:** Los estudiantes reconocen que existen cambios constantes sobre x y cambios sobre y y que estos se relacionan mediante un cociente para hallar la pendiente de los segmentos dados.	Cuando se pregunta a los estudiantes qué tienen en común los segmentos de color rojo, paralelos al eje x que comparten uno de los extremos de cada segmento azul que forma la gráfica de la curva, ellos inicialmente, afirman que los segmentos rojos "valen uno". A medida que avanza el diálogo con los investigadores respecto a dichos segmentos, los estudiantes reconocen que estos representan el cambio en x y que este cambio es constante. Por otro lado, uno de los estudiantes verbaliza que los cambios en y y los cambios en x, se relacionan para hallar la pendiente de una recta. Aunque en este momento del episodio, el estudiante no precisa que esta relación es el cociente entre dichos cambios, más adelante él y otros de los estudiantes hacen esta salvedad. Otro comportamiento asociado con esta acción mental se presentó cuando los estudiantes reconocieron que, aunque la distancia en x era la misma en todos los casos, la diferencia entre los segmentos azules es la altura o la distancia recorrida en el eje y. Además, los estudiantes reconocen que entre mayor es la distancia recorrida en el eje y, mayor es la pendiente de un segmento dado.
		AM3: Los estudiantes reconocen el cambio como la pendiente de los segmentos construidos. Además, identifican el comportamiento de los segmentos graficados como creciente o decreciente según la posición en la que se encuentran.	El primer comportamiento asociado con AM3 evidenciado durante la implementación de esta tarea, tuvo lugar cuando los estudiantes intentaron realizar un bosquejo de la gráfica solicitada en lápiz y papel. En este momento, uno de los estudiantes aclara que uno de los segmentos dibujados tiene pendiente -1 y le atribuye esto a su tamaño y posición (inclinado hacia la izquierda); en este caso, el estudiante cuantificó el

[10] En este caso no se incluyó un indicador independiente ara AM1, pues por el diseño de la actividad, al evidenciar los comportamientos asociados con AM2, los estudiantes implícitamente mostrarían también los comportamientos asociados con AM1. Sin embargo, los estudiantes evidenciaron un indicador de AM1 que no se contempló en la planeación, este referente a la verbalización de cuál de las variables que intervienen en la tarea depende de la otra.

			cambio. Ahora bien, cuando los estudiantes realizaron este bosquejo, se evidenció que este se elaboró correctamente en términos de crecimiento y decrecimiento, pues los estudiantes dibujaron las pendientes, teniendo en cuenta su signo. Otro de los comportamientos asociados a AM3, tuvo lugar, cuando se pregunta a los estudiantes por dos segmentos en particular y él reconoce que como una de las pendientes es mayor que la otra, habrá una de ellas que estará más inclinada que la otra. También, cuando se habla de los triángulos, cuyos catetos son el cambio en *x* y el cambio en *y* de los dos segmentos que estaban siendo analizados, los estudiantes reconocen que el triángulo correspondiente al primer segmento, que tiene la pendiente mayor entre esos dos, es más grande que el triángulo correspondiente al segmento de la pendiente menor. Adicionalmente, cuando los estudiantes empiezan a realizar la gráfica de una curva propuesta por ellos, manifestaron la intención de graficar segmentos paralelos al eje *x*. En este momento, uno de los estudiantes señala que no cree que esto sea posible, sin embargo, otro estudiante señala que la pendiente de ese segmento sería cero, pues en ese punto no hay cambio.
		AM4: Los estudiantes reconocen que la pendiente de los segmentos es positiva en los intervalos en los que la función es creciente y negativa en los intervalos en los que la función es decreciente.	Este indicador fue alcanzado por los estudiantes en tanto que, reconocieron que las pendientes positivas les permiten identificar en qué tramos la curva es creciente y las pendientes negativas les permiten identificar los tramos en los que la curva es decreciente. Ahora bien, cuando los estudiantes estaban construyendo la curva propuesta por ellos, querían que esta fuese simétrica, en un primer momento solo habían construido segmentos con pendiente positiva y seguido a esto, construyeron tres segmentos con pendiente cero. Cuando empezaron a graficar los segmentos que serían simétricos a los graficados inicialmente con pendiente positiva, los estudiantes indicaron que los nuevos segmentos deberían tener la misma pendiente que los primeros, pero con signo negativo, pues querían que la curva en este tramo fuese decreciente. Una vez terminaron de construir su curva, los estudiantes aludieron a los intervalos en los que esta crece y a los tramos en los que decrece.
		AM5: Los estudiantes reconocen que en el punto de inflexión se presenta el cambio de signo en las pendientes, es decir que esta pasa de ser creciente a decreciente o viceversa. Además, pueden realizar un esbozo de la gráfica a partir de las pendientes de los segmentos dados.	Los estudiantes realizaron un esbozo de la curva, dado el listado de pendientes, ellos reconocen que tuvieron dificultad en cuanto a dibujar las pendientes con la inclinación exacta. Sin embargo, en términos de crecimiento y decrecimiento el esbozo se realizó correctamente. Ahora bien, los estudiantes no hicieron alusión a que en los puntos de inflexión de la curva se presenta el cambio de signo en las pendientes o bien, el cambio de crecimiento. Otro comportamiento que evidenciaron los estudiantes relacionado con AM5, tuvo lugar cuando ellos verbalizaron que, si los avances en *x* se mantienen constantes y son cada vez más pequeños, la unión de segmentos que compone la curva va a tener una forma cada vez más definida.

Tabla 24: Carlson - T1S3

5.3.2.2. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Carlson.

Para esta tarea, se utilizó un recurso que se sitúa dentro de la categoría *"Verificación de propiedades".* Se reconoce la potencialidad del recurso en tanto que representa las siguientes ventajas para las estudiantes:

- ✓ Como el recurso cuenta con una herramienta que grafica un segmento dada su pendiente, los estudiantes pudieron realizar la gráfica de manera rápida y centrar su atención en analizar el comportamiento de la curva. Pudieron realizar la comparación entre el bosquejo que realizaron inicialmente, además de determinar en qué acertaron y en qué tuvieron dificultades. En este sentido se reconoce otra ventaja y es la exactitud que brinda el recurso en cuanto al trazo de las pendientes, pues, aunque esto se puede lograr usando lápiz y papel, los estudiantes no encontraron una estrategia para hacerlo en ese momento.
- ✓ La representación gráfica de los segmentos permite que los estudiantes establezcan relaciones entre la posición de estos y el signo de su pendiente. Además, permitió que los estudiantes identificaran los intervalos en los que la razón de cambio promedio es mayor y en los que es menor.

Como se mencionó en la reconstrucción de los sucesos que tuvieron lugar en la sesión de clase, los estudiantes inicialmente intentaron resolver la tarea propuesta usando lápiz y papel. Aunque en términos de crecimiento y decrecimiento, lograron graficar la función según las indicaciones dadas, reconocieron que tuvieron dificultades para graficar las pendientes con la inclinación exacta acorde a las pendientes. Además, al poder trabajar directamente con el recurso, pudieron resolver la tarea de forma más rápida que cuando usaron lápiz y papel. Al no tener que preocuparse por detalles como la exactitud en la inclinación o el trazo de segmentos con regla, los estudiantes pudieron centrar su atención en las ideas que se querían estudiar en la primera parte de la sesión. Por lo anterior, consideramos que el uso de este recurso fue pertinente durante la implementación.

5.3.2.3. Análisis desde el marco de abstracción situada.

Recurso	Ind	Descripción	Análisis de la interacción
1: Verificación de propiedades	**B2**	Uso de elementos adquiridos a partir de otros recursos (Sesión 1)	Los estudiantes no están haciendo uso directo del recurso de GGB pero una de los estudiantes trae a colación algunos elementos desarrollados en la sesión 1 con respecto al porcentaje de inclinación de la recta. Dejado entrever que este tuvo influencia en el desarrollo de sus ideas respecto a la variación.
	Z3	Uso de lápiz y papel para representar la inclinación de algunas rectas. No hay uso del recurso.	En esta tarea los estudiantes deben usar el recurso para tratar de representar algunos segmentos dada su inclinación. Sin embargo, deciden usar lápiz y papel para tratar de representar estos, las ideas que utilizan para la descripción le permiten a uno de ellos modificar sus ideas respecto a lo que está observando del trabajo de su compañero al dibujar las rectas con cierta inclinación. Pues no comprendía ni podía describir esta situación.
	C3	Correspondencia entre las ideas descritas a partir de lápiz y papel con las construcciones desarrolladas en GGB.	Luego de que los estudiantes han establecido algunas ideas a partir del uso de lápiz y papel, como la inclinación de las rectas según el valor de su pendiente, usan el recurso para construir los segmentos que solicitaba la tarea. La grafica que muestra el recurso es acorde con las ideas que los estudiantes habían

			plasmado previamente con lápiz y papel. El recurso les permite verificar que estas son correctas y por tanto han establecido relaciones entre los objetos de GGB que están usando y su interpretación matemática (segmentos y valor de su pendiente).
	D3	Descripción de los segmentos que representan el avance horizontal de la pendiente de los segmentos. Descripción de la relación entre los segmentos construidos a partir de la pendiente y los segmentos constantes en x.	Los segmentos que simbolizan el valor de la pendiente ingresada se encuentran acompañados siempre por un segmento de longitud 1, que representa un avance constante de manera horizontal, los estudiantes reconocen que este avance siempre es constante y además describen que estos siempre salen así por programación o arreglo de los investigadores en el recurso, sin importar el valor de la pendiente que se ingrese, de hecho, mencionan que allí puede ingresarse el valor que quieran. Esta descripción de avance constante es una conclusión matemática fuerte que servirá de base para los siguientes elementos a construir en las siguientes tareas, además, al hablar de que se puede ingresar el valor que quieran, de manera indirecta se están refiriendo a un cambio variable en y.
	D3	Interpretación de una curva como la aproximación de segmentos contiguos de longitud pequeña.	Una vez que los estudiantes reconocen la relación que existe entre los segmentos construidos en el recurso, describen que si la longitud del avance en x se mantuviera constante, pero menor, la curva que se forma entre ellos sería más perfecta. Esto resulta ser importante, pues es una primera aproximación indirecta a la noción de razón de cambio instantánea. La programación llevada a cabo por los investigadores para que los segmentos que aparecen representen esta relación constante en x, y la casilla de ingreso para el cambio en y son fundamentales para el alcance de estas conclusiones.
	C3	Interiorización y descripción de las ideas trabajadas previamente, interpretación de cambio variable en y.	Los estudiantes describen las ideas que han trabajado hasta el momento a partir de la comparación de varias pendientes, dando paso así a la palabra variable dentro de sus argumentos, se refieren a que el cambio en y es un valor que se describe el crecimiento de la curva. Estos argumentos se dan en un momento en el que no hay interacción directa con el recurso, pero son sustentados a partir de lo construido en él.
	C3	Interpretación de la pendiente como valor entero.	Las pendientes propuestas a los estudiantes en la primera parte de la tarea fueron todas con valores decimales, situación que produjo un sesgo, pues creían que la pendiente solo podría tomar valores decimales. Al ingresar un valor entero en la casilla pendiente, el recurso arrojó un segmento y así decidieron ingresar valores enteros para la figura que debían construir. Esta situación también les permitió reconocer que al ingresar el valor 0 como pendiente el avance en y era nulo y sólo aparecía el segmento de longitud 1 que representa el avance en x.
	D2	Interpretación y descripción de la pendiente nula.	Al ingresar el valor de cero en la casilla pendiente, los estudiantes son capaces de describir este valor y el segmento que aparece como una pendiente sin inclinación.

	D3	Construcción y descripción de una figura con cambios de crecimiento.	Los estudiantes ya relacionaron los objetos de GGB y los objetos matemáticos que se corporeizan a través de estos, esta relación está tan apropiada que los estudiantes construyen una gráfica que representa varios cambios de crecimiento, e incluso un crecimiento nulo. Para esto ingresan algunos valores enteros como 4, 1, 1, 2, 1, 1, 0, 0, 0, estos les permiten construir la parte creciente de la función y la parte de crecimiento nulo, luego ingresan los mismos valores de manera inversa para construir la parte decreciente, a lo que ellos llaman efecto "espejo". (-1, -1, -2, -1, -1, -4).
	C4	Descripción de elementos centrales de los cambios de una curva	El trabajo desarrollado en este recurso les permite a los estudiantes apropiarse de ciertos elementos relativos al cambio de una curva como crecimiento, decrecimiento, cambio nulo, cambio mayor y cambio menor, que son elementos más formalizados de las matemáticas, y que fueron adquiridos gracias a sus acciones e intervenciones en el recurso, estos los describen a partir de la interpretación de los segmentos en pantalla y la comparación entre estos. El ingreso de valores que generaban segmentos resultó ser la base para todo lo construido.

Tabla 25: AS - T1S3

5.3.2.2. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Abstracción Situada.

En este recurso se buscaba que los estudiantes a partir del ingreso en una casilla de diferentes valores para pendientes pudieran realizar la construcción de una aproximación a una curva con los segmentos que se generaban, verificando así que la unión de segmentos puede representar una función (elemento trabajado en la sesión pasada). Esta casilla de ingreso jugó un papel fundamental, pues sin importar el valor que ingresaran, el recurso arrojaría un segmento y así de manera consecutiva para los siguientes valores. Los estudiantes apropiaron muy bien este elemento de GGB y con la interpretación acertada del crecimiento y decrecimiento, podrían ingresar valores intencionalmente para representar los cambios de crecimiento que quisiera para una curva o aproximación a ella, como se observa en el "michellini" construido por los estudiantes. El ingreso de estos valores en conjunto con los segmentos que se construían en GGB permitió a los estudiantes además, desarrollar la idea de x como cambio constante y de y como cambio variable, y que este último era el representado por el valor que se ingresaba. Permitir a los estudiantes la libertad de construir una curva cualquiera dejó entrever que apropiaron muy bien lo que tiene que ver con cambios de crecimiento, así como la apropiación del recurso. Este permitió verificar las propiedades que se habían trabajado de manera previa en los recursos y construir una primera idea de razón de cambio promedio.

5.3.3. Tarea 2

Inicialmente, se solicitó a los estudiantes abrir el archivo que contiene el recurso GeoGebra dispuesto para mediar esta tarea. Este cuenta con dos vistas gráficas y en cada una de estas hay tres casillas de control nombradas como sigue: *"Situación"*, *"Triángulo – pendiente"* y *"Ayuda"*. Al activar la primera casilla en cualquiera de las dos vistas gráficas, aparece una curva, con dos puntos sobre ella y un segmento, cuyos extremos son los puntos mencionados; estos se pueden mover a lo largo de la curva. Al activar la segunda casilla, aparece el triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es el segmento que une los puntos que están sobre la curva. Al activar la tercera casilla, aparecen cuatro segmentos punteados, dos de ellos, perpendiculares a los ejes y pasan por uno de los extremos del segmento y los otros dos, también perpendiculares a los ejes, pero pasan por el otro extremo del segmento. En el caso de la vista gráfica de la derecha, aparecen además los puntos de intersección entre tales segmentos y los ejes. La finalidad de esta tarea es que a través de la exploración con el recurso GeoGebra, los estudiantes logren determinar una expresión algebraica, que permita hallar la pendiente de cualquier segmento que pase por dos puntos que están sobre la curva.

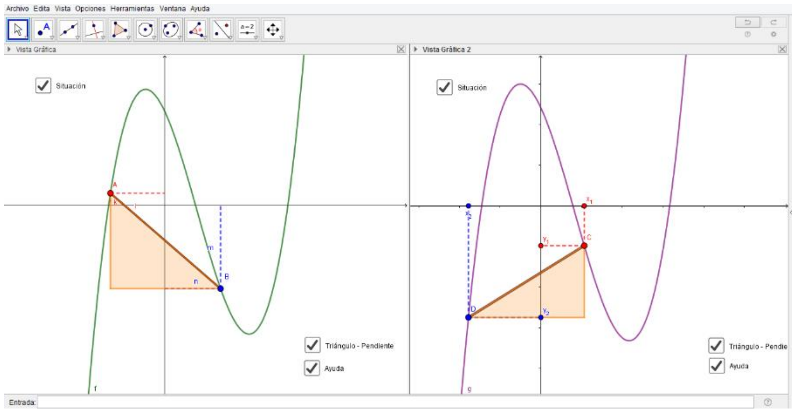


Figura 33. Tercera sesión - Tarea 2

Una vez los estudiantes tienen acceso al recurso, uno de los investigadores les explica de qué se trata la tarea que deben realizar. Se les indica a los estudiantes que para el desarrollo de esta van a poder trabajar a partir de dos situaciones y se les sugiere empezar por la que se propone en la vista gráfica de la izquierda. En ese momento ellos activan la casilla *"Situación"*, empiezan a mover los puntos sobre la curva y también activan las otras dos casillas de control. Uno de los investigadores les pregunta qué representan los elementos que aparecieron cuando activaron las casillas. Uno de los estudiantes alude a que los segmentos que aparecieron al activar la casilla "*Ayuda"* representan la relación de los puntos que están sobre la curva con los ejes. Sin embargo, no menciona puntualmente que dicha relación es la distancia más corta que hay entre los puntos y los ejes. Seguido a esto, se pregunta a los estudiantes de qué manera pueden obtener la pendiente de una recta, ellos indican que pueden obtenerla a partir del cociente entre y y x. Se pregunta entonces, en el caso de la situación propuesta, cuál segmento representaría a y y cuál segmento representaría a x. Cabe aclarar, que en este momento uno de los extremos del segmento se encontraba en el segundo cuadrante del plano cartesiano y el otro estaba en el tercer cuadrante. Uno de los estudiantes señala que y sería igual a sumar las longitudes de los segmentos k y m. Estos son los segmentos perpendiculares al eje x que pasan respectivamente por los puntos A y B, extremos del segmento. Seguido a esto los estudiantes concluyen que x, estaría representado por la resta entre las longitudes de los segmentos n y l, estos segmentos son perpendiculares al eje y y pasan respectivamente por los puntos B y A. En este punto de la sesión los estudiantes determinan una primera expresión para hallar la pendiente del segmento $\overline{AB}$ es $\frac{k+m}{n-l}$, donde *k, m, n* y *l* son las longitudes de los segmentos mencionados en la descripción. Después de esto, se solicita a los estudiantes mover el punto B de modo que quede ubicado en el segundo cuadrante del plano cartesiano, lugar donde también se encuentra el punto A. Se pregunta a los estudiantes si la expresión encontrada previamente, aún es válida para hallar la

pendiente de $\overline{AB}$, los estudiantes indican que no, pues en este caso *y* estaría representada por la resta entre las longitudes de los segmentos *k* y *m.* Además, señalan que *x* seguiría siendo igual a la resta entre las longitudes de los segmentos *n* y *l*. En este caso, la expresión encontrada por los estudiantes para hallar la pendiente de $\overline{AB}$ es $\frac{k-m}{n-l}$.
A continuación, se pide a los estudiantes, mover el punto A, de modo que este quede ubicado en el primer cuadrante del plano cartesiano, el punto B se mantiene en el segundo cuadrante. Cuando se pregunta por la expresión que permite determinar la pendiente de este segmento, los estudiantes responden inmediatamente que esta es $\frac{k+m}{n+l}$. Posteriormente los estudiantes empiezan a discutir respecto a otros de los posibles casos que podrían presentarse si se siguen cambiando de lugar los puntos. Por ejemplo, concluyen que cuando A está en el primer cuadrante y B está en el segundo cuadrante, la expresión para hallar la pendiente del segmento es $\frac{m-k}{n-l}$.
Como los estudiantes a este punto de la sesión ya habían logrado determinar la expresión para hallar la pendiente para diferentes casos, los investigadores les solicitan reunir esas expresiones en una sola. Se sugiere a los estudiantes que para esto tengan en cuenta en qué cuadrante del plano cartesiano están ubicados los puntos. Adicionalmente uno de los investigadores les solicita mover el punto B, de modo que quede ubicado en el tercer cuadrante del plano y les pregunta por el signo que tendría el valor de la medida *m* si se encuentra en esta ubicación. Cabe aclarar que *m* es el segmento perpendicular al eje *x* que pasa por B. Los estudiantes refieren que este tendría signo negativo. Además, señalan que *k* es positivo, dado que el segmento se encuentra en el primer cuadrante del plano. Luego de esto los estudiantes discuten respecto a cómo podrían determinar la fórmula solicitada por los investigadores, sin embargo, después de un tiempo reconocen que no pueden reducir todas las expresiones a una sola, debido a la dependencia que tienen las coordenadas de los puntos.
Se indica a los estudiantes que para continuar con el desarrollo de la tarea, deben empezar a explorar la situación que se encuentra en vista gráfica de la derecha. Ellos hacen clic en la casilla *"Situación 2",* en este caso los puntos que se encuentran sobre la curva se denotan C y D. Posteriormente activan las casillas *"Triángulo – pendiente" y la casilla "Ayuda"*. Cuando activan esta última casilla, evidencian que aparecen dos pares de segmentos perpendiculares a los ejes que pasan por C y por D, pero adicionalmente, aparecen los puntos de intersección entre estos segmentos y los ejes. El punto de intersección del segmento perpendicular al eje *x* que pasa por C, se denomina X_1 y el punto de intersección del segmento perpendicular al eje *y* que pasa por C, se denomina Y_1. Así mismo el punto de intersección del segmento perpendicular al eje *x* que pasa por D, se denomina X_2 y el punto de intersección del segmento perpendicular al eje *y* que pasa por D se denomina Y_2. Cuando los estudiantes visualizan los nombres de los puntos, recuerdan la fórmula de la pendiente que probablemente ya habían trabajado en su trayectoria escolar. Mencionan la fórmula ya conocida, pero invierten los términos al decir "*y uno menos y dos sobre x uno menos x dos"*. En ese momento, los estudiantes aluden a que al igual que en una de las expresiones encontradas previamente por ellos, se realiza una diferencia. El investigador les pregunta por qué en esta situación la expresión funciona y en la situación inicial no. Uno de los estudiantes señala que esto sucede porque en la primera situación estudiada existe una relación de dependencia que no existe en la segunda situación. El estudiante no profundiza en

dicha relación. Finalmente, los estudiantes observan con detenimiento la representación que está en la vista gráfica, en esta el punto C se encuentra en el primer cuadrante y el punto D está en el cuarto cuadrante. A partir de esto, determinan que la expresión para hallar la pendiente de $\overline{CD}$ es $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

5.3.3.1. Análisis desde el marco conceptual de la covariación

Número de tarea	Tipo de recurso	Indicadores que se espera desarrollar	Nivel de alcance de cada indicador
2	Exploración de situaciones y formulación de conjeturas	**AM1:** Los estudiantes reconocen que las distancias verticales que aparecen cuando se activa la casilla *"ayuda"*, corresponden a las distancias desde los puntos A y B (extremos del segmento dado) al eje y y que las distancias horizontales corresponden a las distancias entre dichos puntos y el eje x. También, dan cuenta y razón de que, para hallar la pendiente del segmento dado, deben realizar el cociente entre los cambios en y y los cambios en x.	Este indicador se evidenció durante la implementación de la tarea durante dos momentos. En el primero de estos, el indicador se evidenció parcialmente, pues uno de los estudiantes reconoció que los segmentos perpendiculares a los ejes que pasan por los extremos del segmento, es decir, los puntos A y B, representan una relación existente entre dichos puntos y los ejes. Sin embargo, los estudiantes no especifican que estos segmentos ilustran la distancia más corta que hay entre los extremos del segmento $\overline{AB}$ y los ejes. El segundo momento en el que se presentó evidencia de este indicador, fue cuando los estudiantes determinaron la primera expresión para hallar la pendiente del segmento $\overline{AB}$ a partir de las medidas de los segmentos perpendiculares mencionados previamente. Ellos indicaron puntualmente que para hallar la pendiente, debían realizar el cociente entre la altura en y y la distancia en *x*. Tomaron como referencia el triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es el segmento $\overline{AB}$ y dividieron la longitud del cateto perpendicular al eje *x* entre la longitud del cateto perpendicular al eje *y.*
		AM2: Los estudiantes reconocen que para hallar el cambio en y y el cambio en x deben establecer ciertas relaciones entre las distancias verticales y horizontales que aparecen al activar la casilla *"ayuda"* (sumarlas o restarlas según sea el caso). Además, identifican que dependiendo de la posición de los puntos A y B en el plano, las relaciones que deben establecer entre las distancias mencionadas van a variar.	Cuando los estudiantes proceden a encontrar la expresión que permite hallar la pendiente de $\overline{AB}$ en la primera parte de la actividad, uno de ellos, señala que para hallar el cambio en *y,* debe sumar las longitudes de los segmentos k y m y que, para hallar el cambio en *x*, debe restarle a la longitud de *n*, la longitud de *l.* Este es un comportamiento asociado al indicador establecido para AM2. Durante este momento de la implementación, los estudiantes también reconocieron que la primera expresión obtenida para determinar la pendiente de $\overline{AB}$, no era válida si los puntos A y B cambiaban de lugar en el plano. Además, los estudiantes muestran que son conscientes de que a medida que muevan los puntos A y B sobre los cuatro cuadrantes, van a tener que hallar más expresiones que determinen la pendiente del segmento.
		AM3: Los estudiantes determinan la expresión que representa la pendiente del segmento dado teniendo en cuenta la posición de los puntos A y B en el plano. Es decir, que encuentran la expresión de la pendiente para casos particulares.	Durante la aplicación de la tarea, se evidenció este indicador, en tanto que los estudiantes encontraron la expresión para hallar la pendiente del segmento $\overline{AB}$ en diferentes casos. Para esto tuvieron en cuenta la variación de la ubicación de los puntos A y B en los diferentes cuadrantes del plano cartesiano.

		AM4: Los estudiantes plantean la expresión general que permite hallar la pendiente de un de una recta o de un segmento contenido en ella, dados dos puntos que pertenecen a la recta.	Cuando los estudiantes observan lo que aparece en el recurso al activar la casilla *"Situación 2"*, se percatan de que los nombres de los puntos que representan la intersección de los ejes con los segmentos punteados se denotan como X_1, X_2, Y_1 y Y_2. En ese momento intentan mencionar la fórmula general para hallar la pendiente de una recta dados dos puntos, en la que el "punto inicial" tiene coordenadas (X_1, Y_1) y el "punto final" tiene coordenadas (X_2, Y_2). Sin embargo, los estudiantes invierten los términos e indican que a Y_1 se le debe restar Y_2 y se debe dividir este resultado entre la resta de X_1 y X_2. Seguido a esto uno de los estudiantes realiza una comparación entre una de las fórmulas obtenida a partir de la "Situación 1" y la fórmula general que ellos conocen, manifestando que en las dos se realiza una diferencia entre las distancias verticales y horizontales, pero también, reconociendo que en la expresión encontrada inicialmente, es necesario realizar ciertos cambios dependiendo de la ubicación en la que se encuentren los extremos del segmento, mientras que en la segunda fórmula encontrada no. El primer comportamiento referenciado anteriormente, puede asociarse con AM3. Sin embargo, se cataloga como *pseudoanalítico*, pues los estudiantes no exploraron con el recurso para dar cuenta y razón de la expresión general, sino que recurrieron a sus conocimientos previos. Se presume que en algún momento de su trayectoria académica aprendieron la expresión de memoria, esto porque la expresión que mencionaron no es del todo correcta, pues ellos aluden a que, se debe realizar la diferencia entre Y_1 y Y_2, y no entre Y_2 y Y_1 para hallar el cambio en *y.* A pesar de lo mencionado con antelación, cuando los estudiantes observan con atención la representación gráfica que tenían en el recurso, dan cuenta y razón de que la expresión para hallar la pendiente del segmento con extremos C y D sí es $\frac{Y_1-y_2}{X_1-x_2}$. Esto es correcto en tanto que el punto D se encontraba en el cuarto cuadrante y el punto C en el primero. Este es un indicador de AM4

Tabla 26: Carlson - T2S3

5.3.3.2. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Carlson.

Para la segunda tarea se utilizó un recurso que se sitúa en la categoría *"Exploración de situaciones y formulación de conjeturas"*. Las ventajas que representó para los estudiantes fueron las siguientes:

- ✓ El movimiento de los extremos del segmento sobre la curva les dio a los estudiantes la posibilidad de trabajar distintos casos y evidenciar que la expresión encontrada inicialmente, no les era útil en todos los casos. La exploración también les permitió dar cuenta y razón de que las expresiones obtenidas, dependían de la ubicación de los extremos del segmento en los diferentes segmentos del plano cartesiano.
- ✓ La representación gráfica del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el segmento dado para encontrar su pendiente, además de los segmentos perpendiculares a los ejes que pasan por los extremos del segmento, fueron claves para que los estudiantes tuviesen una referencia sobre cómo hallar el cambio en y y cómo hallar el cambio en x. A medida

que los estudiantes fueron encontrando más fórmulas, mostraron más agilidad y solo con mirar la representación, pudieron deducir las últimas expresiones.

- ✓ Tener la posibilidad de visualizar las representaciones en simultáneo de las dos situaciones propuestas, permitió a los estudiantes, determinar la diferencia entre los elementos que les brindaba cada una para resolver la tarea propuesta.

Es posible que esta misma tarea se hubiese podido realizar utilizando tecnologías como el lápiz y papel. Sin embargo, habría tomado mucho más tiempo llevarla a cabo, puesto que, para cada caso a evaluar en el caso de la primera parte de la tarea, habría tenido que realizarse una representación distinta. Dicha acción además de demandar más tiempo probablemente no habría permitido que los estudiantes se enfocaran por completo en encontrar la expresión solicitada. Esto porque podrían haber centrado su atención en detalles como la exactitud en el trazo de los ejes, del segmento, del triángulo rectángulo y de los segmentos punteados que representan la distancia mínima desde los extremos del segmento hasta los ejes.

5.3.3.3. Análisis desde el marco de abstracción situada

Recurso	Ind	Descripción	Análisis de la interacción
2: Exploración de situaciones y formulación de conjeturas	**D3**	Identificación de coordenadas para los puntos sobre la función - Modificación de ideas respecto a los puntos.	Cuando los estudiantes se encuentran con el recurso notan una función con dos puntos sobre esta con las etiquetas A y B, al solicitarles describir la pendiente del segmento determinado por estos dos puntos su respuesta es "A sobre la distancia de a mayúscula", no recuerdan que A y B son solo etiquetas para los puntos. Enseguida al activar la casilla "ayuda" modifican estas ideas reconociendo las verdaderas coordenadas de los puntos en términos de "m, n, l k". La modificación que aquí se presenta no es de ideas matemáticas, sino de ideas de las representaciones.
	B2	Relación entre los segmentos que determinan la pendiente del segmento y las coordenadas de los puntos que los determinan.	Los segmentos que aparecen en pantalla relacionan las coordenadas en x y y de los puntos a partir de las letras m, n, k y l. Los estudiantes describen la relación entre los puntos A y B con los ejes X y Y, y comienzan a determinar cuál es la distancia tanto en x como en y entre un punto y otro a partir de las nuevas letras, además los estudiantes reconocen que estas son representaciones de números.
	C3	Establecimiento de relaciones entre las posiciones de los segmentos y la interpretación matemática que dan - modificación de ideas.	Los estudiantes deben presentar una expresión que describa la pendiente del segmento AB a partir de los "números" $m, n, k\ y\ l$. Para esto se apoyan en la posición que tienen los segmentos que representan las respectivas letras y como de a parejas forman las distancias en x y y. Para esto entonces aparecen expresiones como "$k + m$" o "$n - l$" y demás, además modifican sus ideas respecto a las coordenadas de los puntos y las relacionan ahora con las expresiones matemáticas construidas. Los estudiantes siguen esta misma idea para determinar la expresión cuando se les pide mover alguno de los puntos a otra posición (B2).
	B2	Descripción de la relación entre la expresión matemática que encuentran y la posición del segmento.	
	B4	Construcción de una fórmula única para la relación descrita.	El grupo entra en una pequeña conversación en la cual tratan de dar solución a la situación de encontrar una única expresión que represente la pendiente del segmento sin importar la posición de los puntos. Para esto usan la comparación entre las diferentes expresiones que encontraron, concluyendo que con estos elementos es imposible unificarlas en una sola.

	B3	Conocimiento de la expresión que representa la situación 2 en el recurso.	Cuando los estudiantes ven la segunda situación, reconocen que de esta si pueden obtener una expresión general, que además ya conocen, lo que hizo que el trabajo en esta fuera más rápido. El recurso les permite confirmar que la expresión efectivamente es la correcta y relacionan esta con la anterior, explicando por qué en esta situación si fue posible y por qué en la anterior no. Un elemento importante es que la expresión a la que los estudiantes llegan es $y1 - y2/x1 - x2$, que funciona de igual manera que la expresión conocida usualmente que es $y2 - y1/x2 - x1$, esto puede deberse a la forma en que ubican los puntos sobre la función.

Tabla 27: AS - T2S3

5.3.3.4. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Abstracción Situada.

Este recurso tenía como objetivo la construcción de una expresión que representara la razón de cambio promedio entre dos puntos. La situación 1 les permitió a los estudiantes reforzar la idea de que la pendiente o razón de cambio promedio es la distancia recorrida en y sobre la distancia recorrida en x. Sin embargo, en la construcción de la expresión general no tuvo mucha relevancia, pues las ideas desarrolladas aquí fueron más aritméticas que relacionadas con las ideas de cambio. Esta primera situación no permitió un desarrollo de las ideas de los estudiantes sino el afianzamiento de las que ya tenían en relación con la noción de cambio. La situación 2 fue más familiar para los estudiantes, pues ellos ya conocían de antemano la fórmula de "pendiente" que se esperaba construir y conjeturar. Así que esta situación sirvió más como comprobante que como conjeturador. Sin embargo, es importante mencionar que el dinamismo de los puntos fue el elemento esencial en todas las conclusiones de los estudiantes y fue el elemento en el que se basó la construcción de este recurso.

5.3.4. Tarea 3

Inicialmente, se solicita a los estudiantes abrir el recurso GeoGebra que mediará esta tarea; al abrirlo, se tiene acceso a dos vistas gráficas. En la primera de estas se encuentra la gráfica de la curva analizada en la segunda tarea, nuevamente aparecen dos puntos sobre la curva que se denotan como A y B, que son extremos del segmento $\overline{AB}$. Adicionalmente aparecen dos pares de segmentos punteados que son perpendiculares a cada uno de los ejes y pasan por los extremos de $\overline{AB}$. También, se muestran los puntos de intersección entre los segmentos punteados y los ejes. Los puntos de intersección entre dichos segmentos con el eje *x*, se denotan X_1 y X_2 y los puntos de intersección de dichos segmentos con el eje *y*, se denotan Y_1 y Y_2. En este recurso, los puntos X_1 y X_2 se pueden mover libremente sobre el eje *x*.

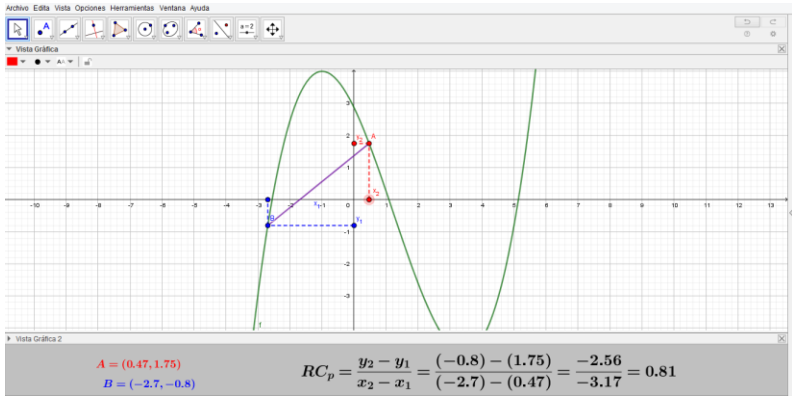


Figura 34. Tercera sesión - Tarea 3

En la segunda vista gráfica, aparecen las coordenadas de los puntos A y B y aparece el cálculo de la razón de cambio promedio de la siguiente manera: Aparece la fórmula en la que se relacionan mediante un cociente el cambio en y (diferencia entre Y_2 y Y_1) y el cambio en x (diferencia entre X_2 y X_1), seguido a esto aparece el reemplazo de las coordenadas de los puntos A y B en la fórmula y el resultado de dicho reemplazo.

Esta tarea tiene como finalidad que los estudiantes hagan un análisis de la curva dada en diferentes intervalos. Se espera que determinen en cuáles intervalos la razón de cambio promedio es positiva, en cuáles es negativa, en cuáles es mayor o menor. Además, se espera que los estudiantes describan qué sucede a medida que los puntos A y B se hacen cada vez más próximos.

Para iniciar con la implementación de la actividad, uno de los investigadores explica a los estudiantes que en la vista gráfica del recurso encontrarán la gráfica de la curva trabajada en la tarea anterior y que nuevamente hay dos puntos sobre la curva unidos por un segmento. Lo primero que se pregunta a los estudiantes es qué va a representar dicho segmento en términos de lo que se ha trabajado hasta el momento. Uno de los estudiantes dice que el segmentó representará "el RCP", al preguntarle qué es esto, responde que se trata de la razón de cambio proporcional. Uno de sus compañeros lo corrige diciendo que es la razón de cambio promedio de la curva. Ahora bien, se indica a los estudiantes que lo primero que deben hacer es observar cuáles de los puntos presentados en el recurso se pueden mover. Al explorar el recurso los estudiantes evidencian que los únicos puntos que se pueden mover son X_1 y X_2; cabe aclarar que se pueden mover únicamente sobre el eje *x.* Seguido a esto se pregunta a los estudiantes por qué creen que los puntos que se pueden mover son esos y no los puntos que están sobre el eje *y.* Los estudiantes manifiestan que esto sucede porque *x* es "el término independiente".

Luego, se solicita a los estudiantes visualizar la parte inferior del recurso (vista gráfica 2) y se les pregunta qué aparece allí, uno de los estudiantes indica que aparece la fórmula de la razón de cambio promedio (RCP). En seguida, se hacen ciertas preguntas a los estudiantes de modo que ellos verbalizan que esta fórmula fue la encontrada en la tarea previa para hallar la pendiente de un segmento y que, a partir de este momento de la sesión, la pendiente de dicho segmento se entenderá como la RCP. Los investigadores enfatizan en que la tarea inicialmente se trata de calcular la RCP de la curva en varios intervalos y también indican a los estudiantes que en la vista gráfica 2, pueden evidenciar las coordenadas de los puntos A y B.

Inicialmente, se pide calcular la RCP de la curva cuando x cambia de menos tres a menos dos y tomar nota del resultado obtenido, los estudiantes no presentan ninguna dificultad para realizar dicha tarea. Después, se pide hallar la RCP para los intervalos: $[-2,-1]$, $[-1,0]$ y $[0,1]$. Antes de que los estudiantes movieran los puntos para hallar la razón de cambio del último intervalo mencionado, se les pregunta si en ese momento podrían predecir cuál sería la razón de cambio allí. Uno de los estudiantes menciona que sería igual a la RCP encontrada para el intervalo $[-1,0]$, pero con signo positivo, es decir, 1,13, sin embargo, uno de sus compañeros le dice que no, porque esta actividad era igual a la realizada en la tarea 1. Se infiere que este último estudiante dijo esto, dado que observó que el segmento formado en el intervalo $[0,1]$, no iba a tener el mismo tamaño ni la misma inclinación que el segmento correspondiente al intervalo $[-1,0]$. El primer estudiante en mención, procedió a mover los puntos y evidenció que la RCP de la curva en este intervalo era igual a $-2,6$. Cuando se le preguntó por qué había pensado que las RCP de los dos intervalos señalados serían iguales, el estudiante manifestó que no había evidenciado que había un cambio en la curva.
Después de esto los estudiantes hallaron la RCP en el intervalo $[1,2]$, nuevamente se propuso predecir la RCP en el intervalo siguiente, que en este caso fue $[2,3]$. El primer estudiante mencionado en el párrafo anterior manifestó que la RCP en este intervalo sería la misma que en el anterior. Se infiere que esto sucedió, porque los cambios que presenta en estos dos intervalos son similares, sin embargo, al mover los puntos, el estudiante evidencia que no son iguales. Seguido a esto, los estudiantes calcularon la RCP de la curva en los intervalos $[3,4]$ y $[4,5]$. En este momento uno de los investigadores les preguntó a los estudiantes cómo serían todas las razones de cambio calculadas a partir de $x=5$, uno de los estudiantes manifiesta que todas tendrán signo positivo, puesto que la curva está creciendo.
Posteriormente, los investigadores preguntan en cuál de todos los intervalos trabajados, la razón de cambio es mayor. Los estudiantes inicialmente mencionan el intervalo $[4,5]$ allí la RCP fue 3,53, pero luego vuelven a revisar sus anotaciones y se dan cuenta que la razón de cambio mayor fue 5,4 y se presentó en el intervalo $[-3,-2]$. Luego, se pregunta en cuál de los intervalos trabajados fue menor la razón de cambio, los estudiantes manifiestan que esto sucedió en el intervalo $[3,4]$ pues allí la RCP fue 0,2. Seguido a esto, se pregunta a los estudiantes si consideran que los signos son un factor que determina si la RCP es mayor, ellos señalan que no. Uno de los investigadores les pregunta a los estudiantes cuál RCP es mayor entre $-5,4$ y 5,2, uno de ellos indica que la primera es mayor, otro de los estudiantes pregunta si en ese sentido, no importa “hacia donde vaya”, refiriéndose a la inclinación del segmento (izquierda, derecha). Los otros estudiantes le responden que tiene razón, que lo que se debe tener en cuenta es la distancia que hay entre los puntos A y B.
Luego, los investigadores preguntan que sucede con la curva en los intervalos en los que la razón de cambio es negativa y qué sucede en los que la razón de cambio es positiva. Los estudiantes indican que la curva crece y decrece. Uno de los investigadores aclara que cuando la RCP es positiva la curva crece y cuando es negativa decrece, al parecer los estudiantes querían decir esto, pero no tuvieron en cuenta el orden en el que se mencionaron los signos de la RCP. Después, se pregunta a los estudiantes qué sucede cuando los puntos X_1 y X_2 se aproximan, uno de los estudiantes manifiesta que cuando esto sucede, el segmento $\overline{AB}$ no se ve. En seguida, se pregunta qué sucede cuando los puntos X_1 y X_2 están muy lejos, los estudiantes los alejan y uno

de los investigadores interviene para preguntarles si consideran que en ese momento el segmento $\overline{AB}$ es una buena aproximación a la razón de cambio de la función. Uno de los estudiantes responde que no, puesto que el segmento es muy grande y eso hace que exista "una imperfección muy grande". El investigador pregunta cómo podría interpretarse lo que sucede cuando los puntos X_1 y X_2 están muy próximos, uno de los estudiantes responde que en ese momento el cambio promedio se hace muy pequeño. Otro de los estudiantes manifiesta que "cuando el cambio promedio se hace más pequeño, se asemeja más a la curva". El primer estudiante que intervino trató de manifestar una apreciación similar a la de su compañero. Se infiere que los estudiantes se referían a que a medida que la distancia entre los puntos X_1 y X_2 se hacía más pequeña, el valor obtenido resultaría ser más adecuado para describir el cambio de la curva en cierto punto. Sin embargo, los estudiantes no lo verbalizaron de esa manera.

5.3.4.1. Análisis desde el marco conceptual de la covariación

Número de tarea	Tipo de recurso	Indicadores que se espera desarrollar	Nivel de alcance de cada indicador
3	Realización de procedimientos algorítmicos	**AM1:** Los estudiantes reconocen que los únicos puntos que pueden mover en el recurso son X_1 y X_2, puesto que estos se mueven sobre el eje *x*, que representa a la variable independiente que interviene en la situación.	Este indicador pudo evidenciarse cuando se preguntó a los estudiantes cuáles son los puntos que se pueden mover en el recurso. Al empezar a explorar, evidenciaron que los únicos puntos que se pueden mover son X_1 y X_2, cuando se les pregunta por qué creen que esto sucede, ellos manifiestan que se debe a que la variable independiente que interviene en la situación es *x*.
		AM2: Los estudiantes, verbalizan que el segmento de color morado, cuyos extremos están en la curva, relaciona los cambios en *x* y los cambios en *y* de esta, por lo tanto, representa la razón de cambio promedio de la misma. Además, reconocen que el signo no es un factor que influye para determinar si la razón de cambio es mayor o menor.	Este indicador fue evidenciado cuando una vez los estudiantes calcularon todas las razones de cambio promedio de los intervalos dados, se les preguntó cuál era mayor y cuál era menor. En este momento los estudiantes reconocen que el signo no es un factor determinante para determinar si una RCP es mayor que otra, sino la distancia entre los puntos que están sobre la curva y son extremos del segmento. Con esto, los estudiantes reconocieron que a medida que la distancia entre los extremos del segmento es mayor, la RCP también será mayor. También, también se evidenció un comportamiento asociado con este indicador de AM2, cuando los estudiantes intentaron expresar que el segmento que representa la RCP relaciona los cambios en *y* con los cambios en *x*. Aunque los estudiantes no lo verbalizaron de manera puntual, tuvieron un acercamiento a esta idea.

		AM3: Los estudiantes determinan en cuáles intervalos de la curva la razón de cambio promedio es mayor y en cuales es menor. Para esto tienen en cuenta la representación gráfica de la curva y los datos obtenidos a partir del recurso.	Este indicador se evidenció en varios momentos de la implementación de la tarea, el primero de ellos fue cuando uno de los estudiantes pensó en un primer momento que la RCP en los intervalos son $[-1,0]$ y $[0,1]$ era la misma, pero luego se da cuenta que esto no es así, argumentando que al observar la curva se evidencia que el cambio no es el mismo en los dos intervalos. En el cálculo de las razones de cambio de otros dos intervalos, el estudiante tomó como referencia la gráfica y manifestó que el cambio sería el mismo en los dos, esto sucedió porque el "tamaño" del cambio era similar, sin embargo, al utilizar el recurso, el estudiante se dio cuenta de que las RCP no eran las mismas. También fue posible evidenciar este indicador cuando los estudiantes determinaron a partir de la exploración y cálculos realizados, en cuáles de los intervalos la RCP es mayor o menor.
		AM4 Los estudiantes reconocen que en los intervalos en los que la curva es creciente, la razón de cambio promedio es positiva y en los intervalos en los que la curva es decreciente, esta es negativa.	Este indicador se evidenció cuando los estudiantes dieron cuenta y razón de que cuando la RCP tiene signo positivo la curva crece y cuando tiene signo negativo, la curva decrece. No señalaron puntualmente los intervalos, pero se evidenció que tomaron esta referencia a partir de las tareas realizadas al inicio de la sesión.
		AM5: Los estudiantes verbalizan que entre más pequeños sean los intervalos entre las razones de cambio promedio, la unión de los segmentos que las representan se va a aproximar más a la forma de la curva original.	Al final de la intervención se pudo evidenciar un comportamiento que, si bien no evidencia en su totalidad el indicador establecido, se aproxima a lo esperado. Cuando se pregunta a los estudiantes qué sucede a medida que los puntos X_1 y X_2 se van aproximando, dos de ellos intervienen, el primero dice que cuando eso pasa, el cambio promedio es cada vez más pequeño y el otro estudiante manifiesta que "cuando el cambio promedio se hace más pequeño, se asemeja más a la curva". Se infiere que con esta apreciación, el estudiante quiso decir, que a medida que la medida entre los puntos A y B, o bien el tamaño del intervalo se hace menor, el valor obtenido resultaría más adecuado para describir el cambio de la curva en cierto instante.

Tabla 28: Carlson - T3S3

5.3.4.2. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Carlson.

Para la tercera tarea se utilizó un recurso que se sitúa en la categoría *"Realización de procedimientos algorítmicos"*. Se considera que este representó las siguientes ventajas para los estudiantes:

- ✓ El movimiento de los puntos X_1 y X_2 sobre el eje y les dio a los estudiantes la posibilidad de estudiar la razón de cambio promedio en diferentes intervalos de manera rápida. Esto dado que únicamente bastaba con mover dichos puntos para acceder a las representaciones gráfica y algebraica de la razón de cambio promedio. Otra ventaja que brinda el movimiento de los puntos X_1 y X_2, es que por el dinamismo que ofrece GeoGebra, estos podían alejarse o acercarse tanto como los estudiantes quisieran. Esto resultó bastante útil para que los estudiantes estuviesen cerca de concluir que a medida que los dos puntos se aproximaban, el valor obtenido para la RCP describía de manera más acertada el cambio de la curva en cierto instante.

- ✓ La posibilidad de contar con una representación gráfica (segmento $\overline{AB}$) y otra de tipo algebraico (fórmula y valor final) de la razón de cambio promedio, les permitió a los estudiantes analizar los cambios de la curva no solo desde la parte algorítmica, sino desde la parte gráfica. Además, se infiere que, debido a esto dieron cuenta y razón de que para determinar si una razón de cambio es mayor que otra, no se debe tener en cuenta el signo sino la distancia entre los puntos sobre la curva que definen el segmento que la representa. Es probable que si solo se hubiese trabajo con la representación algebraica, al preguntar a los estudiantes cuál RCP era mayor entre $-5{,}4$ y $5{,}2$, los estudiantes hubiesen elegido la segunda, atendiendo a la relación de orden en los números reales.
- ✓ La rapidez con la que se generaban los cálculos y representaciones gráficas de la RCP permitió a los estudiantes centrar su atención en el análisis propuesto por los investigadores mediante preguntas orientadoras.

Aunque esta tarea habría podido realizarse de manera similar utilizando tecnologías como el lápiz y el papel, su implementación habría tomado mucho más tiempo y la falta de dinamismo probablemente no habría permitido que los estudiantes hubiesen realizado un análisis tan completo de la situación. Este aspecto fue clave en la realización de la tarea, pues además de permitir que los estudiantes estudiaran diferentes intervalos a partir del movimiento de dos puntos, hizo posible que accedieran a dos representaciones de un objeto matemático de manera simultánea y establecieran relaciones entre estas.

5.3.4.3. Análisis desde el marco de abstracción situada.

Recurso	Ind	Descripción	Análisis de la interacción
3: Realización de procedimientos algorítmicos	**B2**	Relación entre los objetos GGB que representan la pendiente de un segmento y la fórmula que permite encontrarla.	Al trabajar en el tercer recurso, los estudiantes reconocen y describen de inmediato la relación que existe entre los objetos GGB y los objetos matemáticos que se corporeizan a través de estos. En este caso se refieren particularmente a que el segmento que aparece sobre la función representa la razón de cambio promedio de la función entre los dos puntos.
	D2	Descripción de x como variable independiente y relación con su punto móvil en el recurso.	Al tratar de interactuar con el recurso la primera intención de los estudiantes es mover los puntos A y B que se encuentran sobe la función, acción que no pueden realizar debido a la programación del recurso. Posteriormente descubren que solo los puntos sobre el eje x pueden moverse y estos controlan la posición de A y B sobre la función, relacionándolos así con la independencia de la variable x y la dependencia de la variable y.
	D3	Modificación de ideas respecto a la descripción de pendientes crecientes y decrecientes.	Los estudiantes usan el recurso efectivamente para calcular los valores de las razones de cambio promedio en los intervalos dados por los investigadores; cuando se les solicita tratar de predecir el valor de la siguiente pendiente, creen que esta se mantiene en magnitud pero cambia en signo, esta idea es modificada al realizar el cálculo de la razón y observar la pendiente del segmento.
	C4	Descripción de elementos centrales de los cambios de una curva	Al preguntar a los estudiantes como debería ser la razón de cambio promedio si se siguen moviendo los puntos, ellos afirman que siempre será positiva debido a que la gráfica va creciendo y al mover los puntos a la derecha,

			estos se mantienen. Argumentos similares dan al preguntarles por el intervalo en el que la razón de cambio promedio es mayor, menor o cero. También describen que independientemente del signo de la razón de cambio promedio, se puede determinar cuál representa un mayor cambio. Por último, describen el crecimiento y decrecimiento de la función a partir de los valores de la razón de cambio promedio.
	D4	Aproximación a la función a partir de la cercanía entre los puntos sobre esta.	Al acercar los puntos lo suficiente, los estudiantes reconocen que esto permite describir un cambio promedio que se asemeja mucho a la función, describen que se hace más pequeña la imperfección entre el segmento y la función.

Tabla 29: AS - T3S3

5.3.4.4. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Abstracción Situada.

En este recurso los estudiantes podían calcular el valor de la razón de cambio promedio para cualquier intervalo que desearan. En primer lugar identificaron que los puntos móviles en este recurso no eran los que estaban sobre la función sino los que representaban sus coordenadas en el eje x, asociando así esto con la independencia de la variable x. El cálculo de las razones les permitió a los estudiantes describir en qué intervalos los cambios eran mayores o menores, o en su defecto, nulos. También les permitió describir los cambios de crecimiento de la función y mencionar que si los cambios en x son muy pequeños, entonces la razón de cambio promedio será más aproximada al cambio real de la función. Si bien este recurso sirve básicamente como calculadora de razones de cambio promedio, es el cálculo de estas la que permite la generación de los argumentos de los estudiantes. Aquí hay dos elementos esenciales de GGB que permiten todo esto, que es la expresión que muestra el cálculo de la razón y por otro lado, el dinamismo de los puntos sobre el eje x.

5.4. Cuarta sesión de clase

Durante la cuarta sesión de clase se propusieron tres tareas diferentes. Inicialmente se establecieron hipótesis respecto a las acciones mentales de razonamiento covariacional que probablemente podrían ser evidenciadas por parte de los estudiantes; estas se sintetizaron en los indicadores propuestos en la planeación de la sesión.

5.4.1. Objetivo general

Usar la curva de cambio para describir la forma de una función y sus características, en relación con la razón de cambio instantánea representada por el triángulo diferencial.

5.4.2. Tarea 1

Al iniciar la sesión, se solicitó a los estudiantes ingresar al recurso que mediará esta tarea. Al abrirlo, se tiene acceso a dos vistas gráficas. En la vista gráfica que se encuentra en la parte inferior de la pantalla, se encuentra la casilla de entrada $f(x)$ y las casillas de control *“Elemento 1”*, *“Elemento 2”* y *“Triángulos Pendientes”*; al activar esta última aparece la casilla de control *“Pendientes – Segmentos”.* En la vista gráfica que aparece en la parte superior, aparece el

deslizador *n,* los puntos A y B que definen el intervalo [A, B] y se pueden mover sobre el eje *x* y la gráfica de la función que se ingrese en la casilla de entrada.
El deslizador *n* divide el intervalo [A, B] en *n* partes iguales. Al moverlo aparecen puntos en el eje *x* que evidencian la partición mencionada y aparecen las imágenes de dichos puntos. Al activar la casilla *Elemento 1* aparecen segmentos de color azul de la misma longitud, con un extremo en las imágenes de cada punto que está sobre el eje *x*. Estos segmentos son paralelos a dicho eje y representan los cambios en *x*. Al activar la casilla *Elemento 2* aparecen segmentos de color rojo, con un extremo en las imágenes de cada punto que está sobre el eje *x* y paralelos al eje *y*. Estos segmentos representan los cambios en *y*. Ahora bien, al activar la casilla *Triángulo - Pendientes*, aparecen en la pantalla, triángulos rectángulos cuyos catetos son los segmentos azules y rojos mencionados previamente. Por otro lado, al activar la casilla *Pendientes – Segmentos,* aparecen en pantalla segmentos de color verde perpendiculares al eje *x*, que pasan por los puntos que dividen el intervalo [A, B], cuya longitud es igual al cociente entre el cambio en *y* y el cambio en *x* en ese punto de la curva.

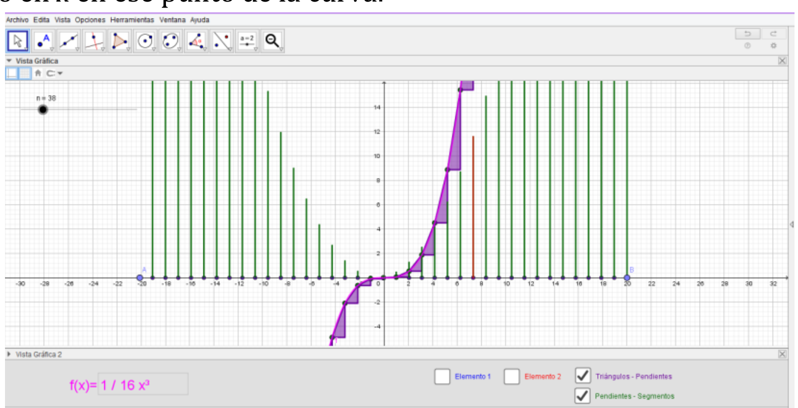


Figura 35. Cuarta sesión - Tarea 1

En primer lugar, se espera que los estudiantes identifiquen cada uno de los elementos que aparecen al activar las diferentes casillas de control y que determinen cómo se pueden interpretar estos con relación a la curva (v.g. los segmentos rojos representan los cambios en *y*). En segundo lugar, se espera que, a partir de los elementos mencionados, los estudiantes hagan un análisis de diferentes curvas y den cuenta y razón de que los segmentos verdes representan el crecimiento que va teniendo cada curva en los puntos que corresponden a las imágenes de la función.
Cuando los estudiantes abren el recurso, se les indica que deben ingresar en la casilla de entrada la función $3sen(x) + 2$. Seguido a esto, se solicita que muevan el deslizador *n* e indiquen qué aparece en la pantalla cuando ejecutan esta acción. Los estudiantes señalan que al mover el deslizador, aparecen puntos y que a medida que aumenta el valor de *n* aumenta también la cantidad de estos. Uno de los investigadores les pregunta si esos puntos están en cualquier parte de la pantalla o en lugares específicos, los estudiantes responden que los puntos están sobre el eje *x* y sobre la curva. Seguido a esto se les pregunta qué creen que representan los puntos que no están sobre el eje *x*; al hacer esta pregunta se esperaba que los estudiantes verbalizaran que tales puntos, representan las imágenes de los puntos que están sobre el eje *x*. Uno de los estudiantes responde que cada uno de los puntos que está sobre la curva, está "alineado" con uno de los puntos que están sobre el eje *x.* Después, se pregunta a los estudiantes,

qué sucede a medida que aumenta el valor de n. Uno de los estudiantes manifiesta que el eje x se va dividiendo en más partes y que aparecen más puntos sobre el eje x que marcan las particiones. En este momento se pregunta a los estudiantes nuevamente qué relación creen que existe entre los puntos que están en el eje x y los puntos que están sobre la curva. Ellos se muestran dubitativos, así que uno de los investigadores empieza a hacer preguntas que les permitan recordar qué es la imagen de una función, o bien, cómo se calcula. Se pregunta a los estudiantes qué procedimiento se debe realizar si dada la función $f(x) = 2x + 3$, se solicita hallar la imagen de 3. Uno de los estudiantes interviene para decir que en ese caso intervienen un termino independiente y uno dependiente, señala que el término independiente es x y que y el dependiente, por lo que, el valor de este último depende del valor que tome x. Se pregunta a los estudiantes qué procedimiento se podría realizar para hallar el valor de y, uno de ellos sugiere reemplazar x por 3 en la función y señala que el valor de y sería 9. Seguido a esto, se indica a los estudiantes volver a visualizar el recurso y se les pregunta a los estudiantes qué pasará si se halla la imagen de los puntos que están sobre el eje x, ellos indican que "quedaría una línea recta", pues el deslizador está ubicado en un valor muy pequeño. Uno de los investigadores les sugiere aumentar el valor de n a 50, los estudiantes lo hacen y uno de ellos afirman que los puntos forman la curva, sin embargo, aún no reconocen que esos puntos que forman la curva son las imágenes de los puntos que están sobre el eje x.

Debido a lo mencionado en el párrafo anterior los investigadores proceden a reorientar las preguntas, de modo que los estudiantes recuerden cómo graficar una función. Esto con el fin de que los estudiantes logren evidenciar que los puntos sobre la curva son las imágenes de los puntos que están sobre el eje x. Para esto, los investigadores solicitan a los estudiantes ingresar en la casilla de entrada del recurso la función $2x + 3$ y realizar el mismo proceso de exploración llevado a cabo con la función $3sen(x) + 2$. Para esto, se solicitó a los estudiantes mover el deslizador n de modo que tomara el valor 5. Seguido a esto se preguntó en cuántas partes quedó dividido el eje x, los estudiantes responden que en cinco partes. Se pregunta por la coordenada en x de uno de los puntos que está sobre la recta, los estudiantes indican que dicha coordenada es -4. A continuación, los investigadores solicitan a los estudiantes, hallar la imagen de -4 para la función graficada. Uno de los estudiantes señala que la imagen está representada en la gráfica, pues esta equivale a -5 y el punto que se está analizando tiene coordenadas $(-4, -5)$. Después de esto se solicita a los estudiantes mover el deslizador n ascendentemente y se les pregunta nuevamente, qué representan los puntos que están sobre la función. Uno de los estudiantes concluye que estos son las imágenes de os puntos que están en el eje x. Después de esto, se indica a los estudiantes que deben ingresar nuevamente la función $3sen(x) + 2$, mover el deslizador n de modo que su valor sea cero y activar la casilla *Elemento 1*. Seguido a esto se da la instrucción de mover el deslizador de manera ascendente y se pregunta qué sucede cuando hacen esto. Cuando los estudiantes observan los segmentos azules, indican que estos ilustran la distancia que hay entre cada punto que está sobre el eje x. En seguida, se pregunta por qué todos los segmentos tienen la misma medida, uno de los estudiantes indica que esto se debe a que el intervalo [A, B] se divide en partes iguales. Uno de los investigadores pregunta cómo es el cambio en x en esa función, los estudiantes indican que el cambio es fijo, puesto que las distancias entre los puntos que están sobre el eje x son iguales.

Luego, se solicita a los estudiantes activar la casilla *"Elemento 2",* una vez la activan, los estudiantes reconocen que los segmentos que aparecen representan el cambio en y. Además, indican que y sí varía y que esto sucede, porque es la variable dependiente, es decir que su valor depende del valor que tenga x. Después, se pregunta a los estudiantes qué relación tiene el tamaño de los segmentos que representan el cambio en y con la forma que tiene la curva. Los estudiantes se muestran dubitativos, así que los investigadores optan por preguntar a los estudiantes qué sucede con los segmentos a medida que se van acercando a la parte más alta de la curva. Uno de los estudiantes manifiesta que cuando esto sucede, "hay menos lejanía" entre la curva y los segmentos, luego todos los estudiantes concluyen que los segmentos se van haciendo cada vez más pequeños. En ese momento uno de los investigadores les pregunta cuál sería la pendiente de la recta tangente a la curva en uno de sus puntos más altos, los estudiantes señalan que la pendiente en ese punto es cero. Seguido a esto, se señala uno de los puntos que está sobre la curva en un intervalo en el que esta es creciente y se pregunta cómo es la pendiente en ese punto. Los estudiantes señalan que en ese intervalo la curva crece y en el siguiente decrece y concluyen que la pendiente del punto en cuestión es positiva y que en un punto que está en el intervalo en el que la función es decreciente, la pendiente es negativa. Luego, se pregunta cuál es la pendiente de la recta tangente en cualquiera de los puntos en los que la función pasa de ser creciente a decreciente o viceversa, uno de los estudiantes responde que la pendiente de la recta que pasa por cualquiera de esos puntos es cero. Otro de los estudiantes menciona que para él, un punto de inflexión es el "límite de cada curva" pues allí la pendiente es cero. Después los estudiantes concluyen que entre más cerca esté un segmento rojo a un punto de inflexión, su longitud va a tender a cero.

A continuación, se propone a los estudiantes activar la casilla *Triángulos – Pendiente* y se pregunta qué sucede con los triángulos que aparecieron en pantalla cuando va aumentando el valor de n. Los estudiantes señalan que los triángulos se van haciendo cada vez más pequeños, por lo tanto, la pendiente va tendiendo a cero. Después, los estudiantes también concluyen que a medida que n aumenta, la unión de los triángulos se va aproximando a la forma de la curva. Enseguida, se pregunta a los estudiantes qué representan los segmentos que aparecieron cuando previamente activaron las casillas *Elemento 1* y *Elemento 2*. Uno de los estudiantes indica que estos segmentos representan los catetos de los triángulos rectángulos que aparecieron al activar la casilla *Triángulos – pendiente* y otro de los estudiantes manifiesta que los segmentos rojos y azules representan el cambio en y y el cambio en x. En ese momento se solicita activar la casilla *Pendientes – segmentos* y se explica a los estudiantes que cada uno de los segmentos verdes que aparece al activar la casilla, tiene como longitud el resultado del cociente entre el cambio en y y el cambio en x en cada punto de la función. Se les pregunta qué medida tendrá uno de estos segmentos si se analiza un punto de la función en el que el cambio en y es 3 y el cambio en x es 2. Los estudiantes responden que la longitud del segmento será de $3/_2$ o bien, de 1,5. Después de esto se solicita a los estudiantes mover el deslizador, de modo que el valor de n sea muy grande, al observar lo que sucede, los estudiantes mencionan que los segmentos verdes forman "una sombra de la curva original".

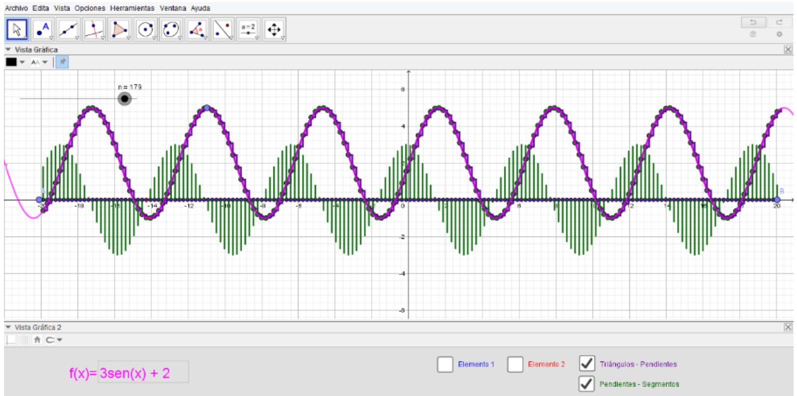


Figura 36. Cuarta sesión - Tarea 1 - II

Estos segmentos van simulando la forma de la derivada de la función ingresada, es decir 3cos (x). Cabe aclarar que en ningún momento de la implementación de la tarea se mencionó este término. Para finalizar la implementación de la tarea, se propuso a los estudiantes, analizar la función $-x^2 + 9x - 3$. Los estudiantes realizaron este análisis de manera más ágil y los resultados fueron similares a los obtenidos en el primer análisis.

5.4.2.1. Análisis desde el marco conceptual de la covariación

Número de tarea	Tipo de recurso	Indicadores que se espera desarrollar	Nivel de alcance de cada indicador
1	Exploración de propiedades y formulación de conjeturas	**AM1:** Los estudiantes reconocen que a cada punto que se encuentra sobre el eje *x*, le corresponde un punto del eje *y* y que este último cambia, cuando el punto que se encuentra en x cambia.	Este indicador se evidenció en la implementación de la tarea cuando los estudiantes reconocieron que a cada punto que está en el eje *x*, le corresponde un punto de la curva. También cuando los estudiantes estaban recordando la noción de imagen de una función y verbalizaron que la variable independiente en la situación es *x*, que la variable dependiente es *y* y que, por tal razón, el valor de *y* dependía del valor que tomara *x*.
		AM2: Los estudiantes verbalizan que los puntos que aparecen en el plano y se corresponden con los puntos que están sobre el eje *x*, forman la curva ingresada en la casilla de entrada. También, verbalizan que los segmentos que aparecen en el plano cuando se activa la casilla *Elemento 1*, corresponden al cambio en *x*. Por otro lado, reconocen que los segmentos que aparecen cuando se activa la casilla *Elemento 2*, corresponden al cambio en *y*, y que este, contrario al cambio en *x*, no es constante.	Este indicador se evidenció durante la implementación de la tarea, pues los estudiantes reconocieron que los puntos que aparecen en el plano, sobre la curva, van aumentando a medida que se mueve el deslizador *n* y la unión de estos, forma la gráfica de la función ingresada en el recurso. Seguido a esto, los estudiantes reconocieron que los segmentos azules que aparecen al activar la casilla *Elemento 1* corresponden a los cambios en *x* de la función y que los segmentos rojos que aparecen al activar la casilla *Elemento* 2 corresponden a los cambios en *y*.
		AM3: Los estudiantes reconocen que cada uno de los puntos que	Los estudiantes no evidenciaron de manera inmediata que los puntos que aparecían en el plano, sobre la curva, eran las imágenes correspondientes de los puntos que se

		aparecen en el plano corresponden a las imágenes de los puntos que se encuentran sobre el eje *x*. Por otro lado, son conscientes de que el cambio en x, representado por los segmentos que aparecen en pantalla cuando se activa la casilla *"Elemento 1"*, es constante. Además, reconocen que el cambio en *y*, es proporcional a cada uno de los segmentos que lo representa. Es decir, que entre más grande sea un segmento, mayor es el cambio.	encontraban en el eje *x*. Sin embargo, con la orientación brindada por parte de los investigadores, descubren que la imagen de $x = -4$, para la función $2x + 3$ es -5 y a partir de esto concluyen que los puntos que aparecen sobre la curva corresponden a las imágenes de los puntos que aparecen sobre el eje *x*. Este indicador también se evidenció en la implementación, cuando los estudiantes reconocieron que el cambio en *x* en la función es constante, pues la longitud de los segmentos que representan dicho cambio es la misma. Además, una vez visualizan los segmentos que representan el cambio en *y* manifiestan que, a diferencia del cambio en *x*, el cambio en *y* varía, pues las longitudes de los segmentos son distintas. En adición a lo anterior, los estudiantes aluden a que entre más cercanía exista entre un punto de la curva y alguno de los puntos de inflexión de esta, la longitud del segmento que representa el cambio en *y* se va haciendo más pequeño, al igual que la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.
		AM4: Los estudiantes reconocen que los triángulos que aparecen al activar la casilla "Triángulo-pendientes" representan la pendiente de una recta secante a la curva dada. Es decir que coordinan la razón de cambio promedio de la función, con los cambios en *x* y *y*.	Aunque no estaba contemplado en la planeación, los investigadores realizaron preguntas respecto a la pendiente de la recta tangente a la curva en ciertos puntos, en intervalos crecientes y decrecientes, cuyas respuestas involucraron comportamientos asociados con AM4. Esto se evidencia cuando los estudiantes dan cuenta y razón del signo que tendrá la pendiente de la recta tangente a la curva en intervalos crecientes, decrecientes y el valor que tomará esta en los puntos de inflexión. Además, los estudiantes reconocen que entre más grande es el valor que toma el deslizador *n*, los triángulos se van haciendo más pequeños y la pendiente de la recta tangente a los puntos sobre la curva va tendiendo a cero en los puntos de inflexión. Este último comportamiento también se puede interpretar como una aproximación a AM5, pues los estudiantes están determinando el cambio de la función en un instante determinado.

Tabla 30: Carlson - T1S4

5.4.2.2. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Carlson.

Para esta tarea, se utilizó un recurso que se sitúa dentro de la categoría *"Exploración de situaciones y formulación de conjeturas".* Se reconoce la potencialidad del recurso en tanto que representa las siguientes ventajas para los estudiantes:

- ✓ El dinamismo que brinda el deslizador en el recurso permitió ilustrar la situación de una forma que no habría sido posible utilizando lápiz y papel. Por ejemplo, al aumentar el valor del deslizador *n* los estudiantes pudieron determinar que los puntos que aparecían sobre la curva iban aumentando y efectivamente formaban la gráfica de la función ingresada en la bandeja de entrada.
- ✓ El dinamismo que brinda el deslizador también permitió que los estudiantes evidenciaran que a medida que el valor de *n* iba aumentando, los triángulos rectángulos que representan la pendiente en cada intervalo de la función, se van haciendo más pequeños y la unión de estos se va aproximando a la forma de la gráfica de la función.
- ✓ Los estudiantes pudieron observar los cambios en *x* y los cambios en *y* mediante una representación gráfica (segmentos). Por un lado, lograron determinar que los cambios

en x son constantes, dado que los segmentos que los representan tienen la misma longitud. En el caso de los cambios en y, tuvieron la oportunidad de evidenciar cómo varían a medida que el deslizador n aumenta su valor. A partir de lo anterior concluyeron que en la medida en que un punto estaba más cerca a los puntos de inflexión, el segmento que representa el cambio en y, se va haciendo más pequeño.

- ✓ Las casillas de control permiten que la vista gráfica no se sature con todos los elementos disponibles para realizar el análisis, pues permiten visualizarlos u omitirlos en el momento que el usuario lo desee.
- ✓ La casilla de entrada permite analizar cuántas funciones se requieran para así poder formular conjeturas respecto a los objetos matemáticos en estudio.

Como se mencionó en una de las ventajas que representó el recurso, esta tarea no habría podido realizarse de la misma manera con lápiz y papel, pues no habría sido posible mostrar a los estudiantes los cambios de la función de forma dinámica para que realizaran un análisis de estos. Además, el privilegiar la representación gráfica de la situación, resultó conveniente en tanto que no se indujo a los estudiantes a centrar su atención en procedimientos algorítmicos, como suele suceder en las escuelas cuando se estudia la razón de cambio. Por el contrario, el recurso GeoGebra se utilizó como un medio para que los estudiantes realizaran la interpretación del concepto y pudieran explicar el comportamiento de dos funciones a partir de los elementos propuestos en cada una de las casillas de control. Por lo anterior, consideramos que el uso del recurso fue pertinente y aportó en gran medida a la consecución del objetivo planteado para esta sesión.

5.4.2.3. Análisis desde el marco de abstracción situada.

Recurso	Indicador	Descripción	Análisis de la interacción
1: Exploración de situaciones y formulación de conjeturas	**C1**	Descripción de la relación entre el valor del deslizador y los puntos que aparecen sobre el eje x y sobre la función.	Al estar familiarizados con los recursos previos los estudiantes concluyen rápidamente que el valor del deslizador controla la cantidad de puntos en los que se divide el intervalo que se está trabajando y también la cantidad de puntos en los que se divide la función, describiendo además que unos se encuentran sobre los otros, es decir, alineados. También describen que existe un triángulo que relaciona dos puntos, sin embargo, aquí no hay descripción matemática de la relación que establecen los estudiantes entre los objetos GGB.
	Z2	Relación entre un valor y su imagen a partir de una función.	Para poder realizar una descripción de la relación matemática entre los puntos que aparecen sobre el eje x y los que aparecen sobre la función, uno de los investigadores trae a colación la noción de imagen, la cual los estudiantes recuerdan a partir de varios ejemplos. No hay intervención con el recurso.
	D2	Interpretación de los puntos sobre el eje x y los puntos sobre la función.	Los estudiantes describen que los puntos que aparecen sobre la función se corresponden de manera directa con los puntos sobre el eje x, además, describen que son todos estos puntos lo que finalmente componen toda la función.
	Z2	Relación entre los valores x y y para la graficación de una función.	Aunque los estudiantes ya describieron que los puntos sobre el eje x y sobre la función están relacionados, aún no los describen como una relación funcional. La investigadora usa la función y=2x+3 y los estudiantes describen como encontrar el valor de y a partir de los valores de x y cómo ubicarlo.

	C3	Descripción de la relación funcional entre los valores de x y y.	Los estudiantes ingresan la función y=2x+3 en la casilla y aparece la recta que la representa, relacionan de manera funcional los valores que se encuentran sobre el eje x y los que aparecen sobre la recta. Realizan una descripción de las coordenadas de un punto de estos a partir del valor en x. El cambio de función fue fundamental para que los estudiantes interpretaran esta relación.
	D4	Formalización de la idea de imagen y descripción de la relación entre las variables x y y.	Finalmente, los estudiantes son capaces de describir y formalizar las ideas construidas a partir de la verbalización de que los puntos sobre la función son la imagen de todos los puntos que se encuentran sobre el eje x, y que además son los valores dependientes del valor de x. Aquí no solo establecen las relaciones entre los objetos GGB y los objetos matemáticos que se corporeizan a través de estos, sino que los describen de manera formal.
	D2	Descripción del cambio fijo en x sin importar el valor del deslizador.	Los estudiantes describen que cuando el deslizador se mueve, el intervalo se divide en esa cantidad de partes iguales, y que esa división equitativa representa un cambio fijo para la variable x. La relación establecida aquí es entre el deslizador y el cambio en x.
	D3	Interpretación y relación de los cambios de crecimiento de una función a partir de los segmentos que aparecen en ella.	Los estudiantes describen los cambio de crecimiento de la función a partir de los valores positivos o negativos que debería tomar la pendiente de una recta tangente en esta, relacionando así esto con sus conocimientos adquiridos en las sesiones y recursos pasados. Los estudiantes hablan del punto de "inflexión" de la función como el punto en el que la pendiente se hace cero y se presenta un cambio de crecimiento. Describen este punto de inflexión como la parte donde el segmento se hace más próximo a la función, al aumentar el valor del deslizador.
	D4	Formalización de las ideas respecto a cambio de crecimiento de la función.	
	D2	Aproximación a la función a partir de los triángulos diferenciales.	Cuando los estudiantes activan la casilla "triángulo - pendiente" notan que estos representan la relación de x y y y describen que a medida que se hace más grande el valor del deslizador los triángulos se hacen más pequeños y "la pendiente" se va acercando a la curva, incluso, describen que estos triángulos son los que componen la función (Cuando el valor se hace aún más grande). Los estudiantes relacionan los objetos de GGB como el deslizador y los triángulos que aparecen y describen esto a partir de una relación matemática de aproximación. También describen los catetos del triángulo (que se habían activado previamente) como los cambios en x y y.
		Descripción de los catetos del triángulo como los cambios en x y y.	
	D1	Relación entre el deslizador y los segmentos que representan el cambio de la función (aproximación a la derivada).	En este recurso, el deslizador n controla básicamente todos los elementos que aparecen sobre, o de la función, aquí los estudiantes describen la relación que existe entre el valor del deslizador y estos segmentos que aparecen, sin embargo describen estos es como una "sombra" de la otra función, no hay una descripción matemática.
	D3	Relación entre objetos GGB y los objetos matemáticos. Descripción de nuevas ideas a partir de las previas.	Los estudiantes establecen de manera clara la relación entre los elementos de GGB y la incidencia que tienen unos sobre los otros, por ejemplo, al mover el deslizador saben que este divide al eje x en intervalos iguales, refiriéndose al cambio constante en x. También describen que entre más grande el valor del deslizador, los triángulos se aproximarán más a la función. Además de eso, se refieren puntualmente a la recta tangente a la curva como elemento para encontrar la razón de cambio.

Tabla 31: AS - T1S4

5.4.2.4. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Abstracción Situada.

Este recurso se encontraba enmarcado en la categoría de exploración de situaciones y formulación de conjeturas, y se programó de tal forma que al ingresar una función, de manera visual se observaran los cambios que presenta en cada punto sobre ella, estos cambios se hacían más cercanos a la curva de cambio conforme se hacía más grande el valor del deslizador. Los estudiantes logran relacionar todos los objetos GGB que se usaron en su programación y evidencian la dependencia que tienen todos del deslizador. Los segmentos que aparecieron en pantalla les permitieron relacionar de manera acertada algunos cambios que presenta la función pero no logran describirlos completamente de manera acertada, estos fueron relacionados gráficamente con los triángulos diferenciales, pero no se describe de manera formal o cercana la relación matemática. Si bien los estudiantes apropiaron algunos elementos relacionados con el cambio, no lograron un alcance total de lo presupuestado. El dinamismo del deslizador y todos los elementos que controlaba, eran el elemento central para el correcto desarrollo de la tarea. Los estudiantes finalmente logran la correcta exploración de una situación buscando una posible conjetura sobre los segmentos a los que en algún momento llamaron "sombra", pero no la alcanzan completamente.

5.4.3. Tarea 2

Inicialmente, se solicitó a los estudiantes abrir el archivo que contiene el recurso que mediará esta tarea, dicho recurso cuenta con dos vistas gráficas. En la vista gráfica que se encuentra en la parte inferior, aparecen los siguientes elementos: la casilla de entrada $f(x)$, la casilla de control *"Curva – pendiente"*, el botón "*Activa rastro"* y el botón *"Desactiva rastro".* En la vista gráfica que está en la parte superior del recurso, aparece la representación gráfica de la función que se ingresa en la casilla de entrada, también el punto A, que puede moverse sobre dicha gráfica y la recta tangente a la curva en ese punto. Además, aparece el valor y la representación gráfica de la pendiente de la recta en mención (triángulo rectángulo que se muestra al calcular la pendiente de una recta con la herramienta que ofrece GeoGebra para tal fin). Cuando la pendiente de la recta es positiva, el triángulo que se muestra es de color azul y cuando la pendiente es negativa, es de color rojo. En adición a lo anterior, aparece un segmento perpendicular al eje *x*, que está contenido en la recta perpendicular a dicho eje que pasa por el punto A; la longitud del segmento es igual al valor de la pendiente de la recta tangente. Cabe aclarar que cuando la pendiente de la recta es positiva, el segmento aparece de color rojo y en la parte superior del eje *x*, mientras que cuando la pendiente es negativa, el vector es de color azul y aparece en la parte inferior del eje *x*.

Al activar el botón *Activa rastro* y mover el punto A, el extremo del segmento que no está sobre el eje *x* empieza a generar el rastro de la gráfica correspondiente a la derivada de la función ingresada en la casilla de entrada. El rastro de dicha gráfica es de color azul en los intervalos crecientes de la función original y es rojo en los intervalos decrecientes. Al activar la casilla *Curva pendiente*, aparece la gráfica de la derivada de la función y al activar el botón *Desactiva rastro*, deja de generarse el rastro cuando se mueve el punto A sobre la curva.

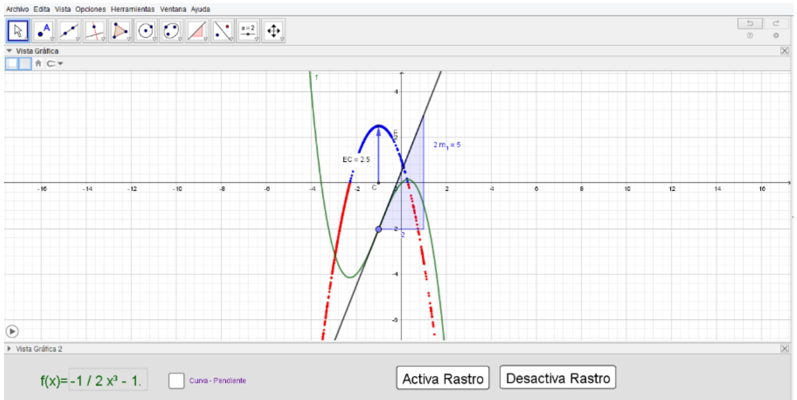


Figura 37. Cuarta sesión - Tarea 2

En primer lugar, se espera que los estudiantes evidencien que la longitud del segmento es igual al valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto A. En segundo lugar, se espera que los estudiantes asocien que el color del triángulo que representa la pendiente de la recta es azul en los intervalos en los que la curva es creciente y rojo en los intervalos en los que la curva es decreciente. En tercer lugar, se espera que los estudiantes asocien los cambios de color del rastro con los cambios de crecimiento de la función.

Una vez los estudiantes acceden al recurso, encuentran en la vista gráfica la función $f(x) = x$. Los investigadores les solicitan medir el segmento perpendicular al eje *x* que aparece en la vista gráfica. Uno de los investigadores les explica en qué parte de la barra de herramientas encuentran la herramienta para ejecutar dicha acción y les da indicaciones para usarla. Después se pide a los estudiantes mover el punto A sobre la gráfica de la función y sé pregunta qué sucede cuando mueven dicho punto, los estudiantes manifiestan que el segmento se mueve al mismo tiempo que el punto. Luego, los investigadores preguntan cuál es la pendiente de la recta, los estudiantes inicialmente tienen dificultad para determinarla, pero una vez los investigadores, mediante preguntas, les recuerdan ideas clave de sesiones pasadas, los estudiantes determinan que la pendiente de la recta es 1. Se sugiere a los estudiantes observar la medida del segmento perpendicular, con la finalidad de lograr que evidencien que esta es igual al valor de la pendiente.

En seguida, se solicita a los estudiantes ingresar en la casilla de entrada la función $f(x) = x^2 + x$. Una vez los estudiantes ingresan la función y aparece la gráfica de esta, los investigadores piden a los estudiantes mover el punto A. Al mover el punto en un intervalo en el que la función decrece, el triángulo que representa la pendiente de la recta tangente cambia de color de azul a rojo. Uno de los estudiantes pregunta a qué se debe este cambio de color dos de los estudiantes aluden a que el cambio de color se debe a que el punto A está ubicado en el segundo cuadrante del plano, pues allí las coordenadas en *x* son negativas. Cuando esto sucede uno de los investigadores interviene y pregunta a los estudiantes qué comportamiento tiene la curva en el intervalo en el que se encuentra ubicado el punto. Los estudiantes manifiestan que la curva decrece y que, por esa razón, el triángulo que representa la pendiente está “hacia abajo”. El estudiante que está manipulando el computador, mueve nuevamente el punto y lo lleva a un intervalo en el que la curva es creciente, los investigadores preguntan qué comportamiento tiene la curva en ese intervalo. Uno de los estudiantes manifiesta que, en este intervalo, la función crece y por eso el triángulo es de color azul. Seguido a esto, los investigadores solicitan llevar el punto A, hasta el punto mínimo de la función y preguntan a los estudiantes por qué en ese caso no se alcanza a visualizar el triángulo. Inicialmente los estudiantes señalan que esto sucede porque esa recta no tiene pendiente, sin embargo, después dan cuenta y razón de que la pendiente es cero. Uno de los estudiantes aclara que no es cero, sino cero coma uno, pues toma como referencia el valor que sale en la pantalla. Otro de los estudiantes le dice que así no sea cero, ese valor se aproxima mucho a cero, el primer estudiante acepta que su compañero tiene razón y que además en ese punto ya no se alcanza a visualizar el triángulo que representa la pendiente.

Después, se solicita a los estudiantes hacer clic en el botón *Activa rastro* y mover el punto A muy despacio, a medida que el estudiante que está manipulando el computador hace esto, va apareciendo el rastro de una recta en dos colores. Uno de los investigadores pregunta a los estudiantes por qué sucede esto, los estudiantes manifiestan que el rastro rojo aparece en "el lugar negativo de y" y el rastro rojo aparece en "el lugar positivo de y". Debido a esto, los investigadores preguntan qué comportamiento tiene la curva cuando el rastro es de color azul, los estudiantes indican que, en ese intervalo la curva crece. Posterior a esto se concluye que en el intervalo en que la curva crece la recta es azul y en el intervalo en que la curva decrece, la recta es roja. A continuación, se pregunta a los estudiantes, cuál es la pendiente de la recta formada por el rastro. En ese momento uno de los estudiantes, pregunta dónde está el triángulo que representa la pendiente de la recta formada por el rastro, uno de los investigadores le sugiere construir el triángulo. Sin embargo, el estudiante que está manipulando el recurso mueve el punto A, intentando que la recta tangente a la curva sea paralela a la recta formada por el rastro, en ese momento dos de los estudiantes afirman que la pendiente debe ser dos, pues es la pendiente de la recta tangente cuando está en esa posición. A pesar de esto, los estudiantes no se muestran totalmente convencidos e intentan emplear otras estrategias, uno de los estudiantes grafica dos puntos sobre la recta formada por el rastro, se infiere que tenía la idea de construir la recta que pasa por esos puntos. Aún así, el estudiante no termina de ejecutar su idea; sus compañeros en ese momento solicitan a los investigadores una pista. A raíz de lo anterior, se pide a los estudiantes activar la casilla *Curva – Pendiente*, al hacerlo ellos evidencian que aparece la gráfica de la recta que formada por el rastro. Luego utilizan la herramienta *Pendiente* de GeoGebra, para verificar la afirmación realizada previamente. En ese momento comprueban que la pendiente de la recta si es dos.

Luego, se indica a los estudiantes que se realizará la misma tarea con otras funciones. Los investigadores les solicitan desactivar la casilla *Curva – Pendiente* y hacer clic en el botón *Desactivar rastro.* Posteriormente se ingresan las funciones $2\cos(x) + 1$ y $\frac{x^3}{8} - 3x$ y al llevar a cabo la tarea, se obtienen resultados similares a los encontrados al analizar la primera función. Al finalizar la implementación, los investigadores inducen a los estudiantes mediante preguntas a evidenciar que la primera función analizada fue una curva de grado dos y el rastro resultante fue una recta mientras que, la tercera función analizada fue una curva de grado tres y el rastro resultante fue una curva de grado dos.

5.4.3.1. Análisis desde el marco conceptual de la covariación

Número de tarea	Tipo de recurso	Indicadores que se espera desarrollar	Nivel de alcance de cada indicador
2	Exploración de situaciones y formulación de conjeturas	**AM3:** Los estudiantes reconocen cuál es la pendiente de la recta que aparece en pantalla y además, descubren que la medida del segmento que se muestra en pantalla, equivale a la medida de la pendiente.	Cuando los estudiantes empezaron a hacer la exploración del recurso, analizaron en primer lugar la función $f(x) = x$. Aunque inicialmente no recordaron cómo hallar la pendiente de esta recta, cuando los investigadores les recordaron, mediante preguntas, algunas ideas clave de sesiones anteriores, los estudiantes lograron determinar de dos maneras distintas que la pendiente de la recta era 1. La primera estrategia, fue hacer uso de las coordenadas de dos puntos que pertenecen a la recta y la segunda estrategia, fue utilizar las medidas de los catetos del triángulo rectángulo que representa la pendiente y realizar el cociente entre estas. En adición a lo anterior, los estudiantes reconocieron que la medida del segmento perpendicular al eje x es igual al valor de la pendiente de la recta. En este momento, se evidenció el indicador establecido para AM3. Este indicador también se pudo evidenciar cuando los investigadores solicitaron a los estudiantes mover el punto A, de modo que quedara ubicado en el punto mínimo de la función $x^2 + 2$ pues, aunque en un primer momento los estudiantes indicaron que en ese caso la recta no tenía pendiente, *a posteriori,* evidenciaron que la pendiente en ese caso era cero. Otro comportamiento asociado con este indicador se presentó cuando se solicitó a los estudiantes hallar la pendiente de la recta formada por el rastro al mover el punto A sobre la función mencionada previamente. La estrategia utilizada en ese caso fue ubicar la recta tangente a la curva, de modo que fuese paralela a la recta formada por el rastro.
		AM4: Los estudiantes asocian el cambio de color del triángulo que aparece cuando mueven el punto que aparece sobre la curva, con los cambios de crecimiento y decrecimiento que experimentan las funciones ingresadas.	Al realizar el análisis de la función $x^2 + 2$, los estudiantes asociaron el cambio de color y la posición del triángulo que representa la pendiente de la recta tangente con el comportamiento de la función de la función en términos de crecimiento y decrecimiento. También, relacionaron este comportamiento de la función, con los colores de la recta generada por el rastro. Los comportamientos descritos anteriormente, también se pudieron evidenciar al realizar el análisis de las funciones $2\cos(x) + 1$ y $\frac{x^3}{8} - 3x$. Por lo anterior, es válido afirmar que durante la implementación de la tarea los estudiantes mostraron comportamientos asociados a este indicador.

Tabla 32: Carlson - T2S4

5.4.3.2. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Carlson.

Para la segunda tarea se utilizó un recurso que se sitúa en la categoría *"Exploración de situaciones y formulación de conjeturas"*. Las ventajas que representó para los estudiantes fueron las siguientes:

- ✓ El movimiento del punto A sobre la curva permitió evaluar la pendiente de la recta tangente en diferentes puntos de la curva; tener la posibilidad de trabajar con distintos casos, permitió a los estudiantes generalizar el comportamiento de los objetos matemáticas en estudio y así obtener conclusiones al respecto.

- ✓ El uso de la representación gráfica de la pendiente con colores permitió que los estudiantes establecieran una relación entre el signo de la pendiente y el comportamiento en términos de crecimiento y decrecimiento de la función. Esto también sucedió con los colores del rastro, pues los estudiantes los asociaron al comportamiento señalado previamente.
- ✓ Tener la posibilidad de visualizar el rastro del movimiento del punto, permitió tener un panorama general de los cambios de crecimiento de la función en determinados intervalos.
- ✓ El uso de la casilla de entrada hizo posible que se llevara a cabo el análisis con diferentes tipos de funciones y que los estudiantes pudieran determinar que, sin importar el tipo de función, la asociación entre los colores y el comportamiento en términos de crecimiento de la función siempre se presentaba.

Esta tarea no habría podido llevarse a cabo utilizando lápiz y papel, pues con este tipo de tecnologías no habría sido posible lograr el dinamismo que brindan el movimiento del punto sobre la curva, la aparición del rastro de la gráfica de la derivada de la función y la representación gráfica de la pendiente de la recta. Consideramos que el uso del recurso fue pertinente, en tanto que se lograron en buena medida los indicadores propuestos, esto se le atribuye a las ventajas mencionadas previamente.

5.4.3.3. Análisis desde el marco de abstracción situada

Recurso	Ind	Descripción	Análisis de la interacción
2: Exploración de situaciones y formulación de conjeturas	**A0**	Uso de la herramientas distancia para medir segmentos.	Al comenzar a usar el recurso, la primera acción de los estudiantes, guiados por la investigadora es medir el segmento que aparece en pantalla cuyo origen se encuentra sobre el eje x. No hay descripciones matemáticas ni relación entre objetos, sino solo uso de los elementos del recurso.
	B0	Descripción de las acciones que realizan los objetos GGB a partir de otros.	Los estudiantes describen una relación de movimiento entre el segmento y el punto que se encuentra sobre la función. Es importante mencionar que aún no se han desarrollado ideas matemáticas que puedan relacionarse con estos elementos de GGB.
	Z1	Relación nula entre objetos matemáticos trabajos (cambios en x y y)	A pesar de que en las sesiones pasadas, recursos pasados y demás se ha trabajado constantemente la idea de cambio en x y cambio en y, los estudiantes no logran establecer esa relación aquí. De hecho al tratar de describirla, la describen mal y es la investigadora quien debe intervenir para guiar a los estudiantes a una buena descripción. Se recuerdan elementos trabajados en la primera sesión.
	B2	Relación entre triángulo, pendiente y segmento.	Los estudiantes describen la relación que se establece entre el triángulo, la pendiente que representa y el valor de la longitud de este segmento. Interpretan el valor de los catetos de triángulo y a partir de estos encuentran el valor de la pendiente, afirman que este valor es igual a la longitud que midieron en el segmento.

	D2	Descripción de la relación del color de los triángulos de pendiente con los valores de crecimiento y decrecimiento de la función.	Al mover el punto sobre la función, este también mueve la recta tangente construida, la pendiente toma un color rojo cuando la recta es decreciente y azul cuando es creciente, a partir de esta relación de colores los estudiantes describen los cambios de crecimiento y decrecimiento de la función ingresada. También describen que cuando el triángulo desaparece es porque hay un cambio de crecimiento y la pendiente de la recta es nula.
	D2	Descripción de la relación del color de la curva de cambio con los valores de crecimiento y decrecimiento de la función.	Al activar la casilla rastro que los investigadores indican a los estudiantes, aparece una "curva" dividida en dos colores nuevamente, azul y rojo. Los estudiantes, de manera similar que con los triángulos describen la relación de crecimiento y decrecimiento de la función a partir de los colores de la curva (donde la curva es roja es porque la pendiente de la recta tangente es decreciente y por tanto la función y viceversa con el color azul)
	B3	Relación de la curva de cambio con el valor de la pendiente de la recta. Relación con elementos previos.	Los estudiantes describen la curva de cambio como una recta y para tratar de describir la pendiente de esta usan la de la recta tangente. El investigador da la indicación de dar clic a la casilla "curva - pendiente" y al aparecer esta, usan la herramienta pendiente para reconocer su valor.
	D2	Relación entre la pendiente de la recta tangente, su ubicación y el crecimiento y decrecimiento de la función.	Los estudiantes reconocen que al mover el punto sobre la función, la recta también se mueve y que su pendiente cambia según el lugar en el que esté ubicada sobre la esta, describen su pendiente como positiva, negativa, cero, positiva, negativa, cero... y relacionan estos valores con el crecimiento y decrecimiento de la función.
	D4	Descripción de la curva de cambio a partir de los cambios de crecimiento de la función.	A partir de lo trabajado, los estudiantes describen los tramos rojos y azules de la curva de cambio en relación con los cambios de crecimiento de la función y dan una interpretación general para cualquier función ingresada.
	C3	Descripción de la representación analítica de la curva de cambio.	Los estudiantes no solo describen una relación geométrica y de colores entre los elementos proporcionados por el recurso tales como la función, la pendiente y la curva de cambio, sino que además describen que si tuvieran que representarla sería solo quitarle un "grado" a la función, esto quiere decir que se tendría que restar una potencia a la función original y esto daría la curva de cambio.

Tabla 33: AS - T2S4

5.4.3.4. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Abstracción Situada.

En este recurso, inicialmente los estudiantes establecen prontamente relaciones entre los objetos GGB que se usan allí, e incluso desarrollan acciones que dan muestra y razón de ello, pero no describen las relaciones matemáticas que se pueden corporeizar a través de estos, es posteriormente y gracias a la investigadora que los estudiantes describen la relación entre los cambios en x y cambios en y. En este recurso había dos elementos centrales que permitirían la correcta descripción de la función a partir de la curva de cambio, en primer lugar el dinamismo de los puntos y el rastro que generaban estos al moverlos y en segundo lugar, el color dejado por el rastro, el cual se relaciona directamente con el valor de la pendiente en un punto sobre la función (rojo – negativo y azul – positivo). A partir del movimiento de los puntos sobre la función y el eje x, los estudiantes iban generando una curva seccionada en dos colores; colores que usaron para la descripción del comportamiento de la función. A partir de la exploración con los puntos los estudiantes conjeturaban aspectos sobre el comportamiento de la curva de cambio en relación con la función original y así alcanzar lo presupuestado en la planeación previa.

5.4.4. Tarea 3

Inicialmente, se solicita a los estudiantes abrir el recurso GeoGebra que mediará esta tarea, este cuenta con dos vistas gráficas. En la vista gráfica que se encuentra en la parte inferior, aparecen los siguientes elementos: la casilla de entrada $f(x)$, el botón "*Activa rastro*", el botón *"Desactiva rastro"* y la casilla de control *"Muestra función"*. En la vista gráfica que está en la parte superior del recurso, aparece el punto A, que puede moverse sobre el eje *x,* también se muestra un segmento perpendicular a dicho eje por el punto A.

Al activar el botón *Activa rastro* y mover el punto A sobre el eje *x*, el extremo del segmento que no está sobre el eje *x* empieza a generar el rastro de la gráfica correspondiente a la derivada de la función ingresada en la casilla de entrada. El rastro de dicha gráfica es de color azul en los intervalos crecientes de la función original y es rojo en los intervalos decrecientes. Al activar la casilla *Muestra función*, aparece la gráfica de la función ingresada en la casilla de entrada y al activar el botón *Desactiva rastro*, deja de generarse el rastro cuando se mueve el punto A sobre la curva.

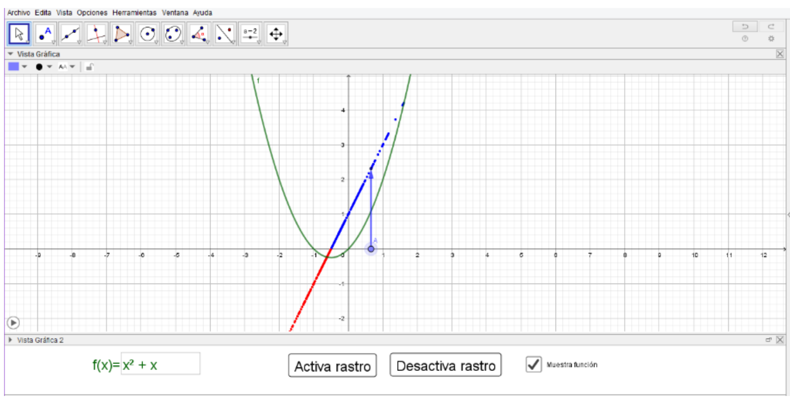


Figura 38. Cuarta sesión - Tarea 3

Al hacer clic en el botón *Activa rastro* y empezar a mover el punto A, se mueve también el segmento perpendicular a lo largo del eje *x* y se empieza a generar, a partir del rastro, la gráfica de la derivada de la función ingresada en la casilla de entrada. En primer lugar, se espera que, al ingresar funciones lineales, los estudiantes evidencien que la longitud del segmento perpendicular es constante, y que esto se debe precisamente a que los cambios en una función lineal son de este tipo. En segundo lugar, se espera que los estudiantes cuantifiquen el cambio presentado en las funciones lineales ingresadas en la casilla de entrada, o bien de las curvas de cambio de funciones de grado dos, indicando el valor de su pendiente. En tercer lugar, se espera que los estudiantes relacionen los colores del rastro de la curva de cambio (derivada) con los cambios de crecimiento de la función original. Además, que reconozcan que, en el caso de las funciones polinómicas, la curva de cambio tiene un grado menor que la función original y determinen su ecuación. En cuarto lugar, se espera que, a partir de la curva de cambio, los estudiantes hagan una estimación de la forma que tiene la curva original. Para verificar las conjeturas que hagan al respecto, podrán activar la casilla *Muestra función*.

Una vez los estudiantes ingresan al recurso, los investigadores les solicitan ingresar en la casilla de entrada la función $f(x) = x$ y seguido a esto, mover el punto A; en ese momento los estudiantes se dan cuenta de que el punto solo puede moverse sobre el eje *x*. Seguido a esto, los investigadores preguntan si el segmento cambia en algún momento cuando se mueve el punto, los estudiantes manifiestan que esto no sucede. Después, se les da la indicación de ingresar en la casilla de entrada la función $2x + 3$ y se pregunta si evidencian algún cambio en el segmento, los estudiantes manifiestan que no. Entonces, se solicita que activen la casilla *Muestra función* y se pregunta si creen que la gráfica que aparece allí es la gráfica de la función ingresada. Ellos indican que sí, argumentando que el punto de corte es 3 y la pendiente es dos. En un primer momento uno de los estudiantes dice que la pendiente es 3, sin embargo, se evidencia que intenta imaginar el triángulo rectángulo que representa la pendiente de la recta y concluye que efectivamente es dos. Seguido a esto se solicitó hacer clic en el botón *Activa rastro* y mover el punto A. Al ver que el rastro era de color azul, uno de los estudiantes exclamó "solo es positivo", cuando los investigadores le preguntaron por qué razón creía que esto era así, el estudiante manifestó que esto sucedía porque la función estaba creciendo. En ese momento se concluyó que la pendiente de la recta tenía signo positivo. Un estudiante cambia de signo el signo de la pendiente de la función ingresada de modo que esta sea $-2x + 3$ y luego empieza a mover el punto, en este caso, el rastro generado es de color rojo. Otro de los estudiantes señala que esto sucede porque la pendiente de la recta es negativa. En adición a lo anterior, otro de los estudiantes señala que la recta generada por el rastro corta al eje *y* en -2, dado que esta es la pendiente de la función original.

Aunque los estudiantes manifestaron que al ingresar las dos funciones lineales el segmento no varió su tamaño, no indicaron que esto se debía a que los cambios en estas funciones eran constantes. Por lo anterior, se permitió que los estudiantes analizaran otras funciones sin desactivar la casilla *Muestra función*. Se esperaba que, al repetir la tarea bajo estas condiciones, los estudiantes evidenciaran los cambios que presentaban las funciones originales y su relación con la gráfica formada por el rastro y así lograran estimar la forma que tendría la gráfica de la función original a partir de la gráfica de la curva de cambio.

Se solicitó a los estudiantes ingresar la función x^2 y se solicitó empezar a mover el punto A. Al observar lo que sucede uno de los estudiantes manifiesta que la gráfica de la curva de cambio tiene un grado menos que la función ingresada inicialmente. Además, los estudiantes reconocen que en el tramo en que la función es creciente el rastro es azul, pero en el tramo en el que es decreciente, el rastro es rojo. Luego, se pide a los estudiantes ingresar la función $-3x^2$ y se pregunta cuál creen que es la forma del rastro que se va a generar, ellos manifiestan que el rastro es una recta. Seguido a esto se pregunta cuál es la pendiente de dicha recta, ellos manifiestan que es cinco, para dar esta respuesta, trataron de hacer una estimación del triángulo que representa la pendiente de la recta. Sin embargo, para comprobar su respuesta, grafican dos puntos sobre la recta formada por el rastro, trazan la recta que pasa por esos dos puntos y calculan la pendiente de esta usando la herramienta que ofrece GeoGebra para este fin. El valor obtenido es 5,96, uno de los estudiantes verbaliza que este valor es muy cercano a 6, en este momento otro de los estudiantes mueve la vista gráfica y vuelve a generar el rastro de la curva de cambio con el movimiento del punto A. En ese momento uno de los estudiantes afirma que la pendiente sería seis puesto que "dos corta con el doce negativo", se infiere que en ese momento el estudiante trató de imaginar el triángulo que representa la pendiente y realizó el cociente entre el cambio en y y el cambio en x. Al escuchar esto, uno de sus compañeros le dice que el signo de la pendiente es negativo, es decir que la pendiente de la curva de cambio de la función $-3x^2$ es -6. En ese momento uno de los investigadores les pregunta cuál es el punto de corte de la curva de cambio, uno de los estudiantes indica que es cero. Después de esto los estudiantes concluyen que la ecuación de la curva de cambio de $-3x^2$ es $6x$. A continuación, uno de los investigadores toma nota de estos datos en el tablero, organiza una tabla con dos columnas, una de ellas denominada *función* y la otra denominada *Rastro*.

Después los investigadores solicitan a los estudiantes ingresar la función $-4x^2$, uno de los estudiantes se anticipa a conjeturar que la ecuación de la curva de cambio será $-8x$, los investigadores les sugieren hacer uso del recurso para comprobar. Una vez ingresan la función, el estudiante que está manipulando el computador, grafica dos puntos sobre la recta que forma el rastro y traza la recta que pasa por esos dos puntos. Seguido a esto uno de los investigadores pregunta cómo es la pendiente de esa recta, uno de los estudiantes responde que es negativa, puesto que la recta decrece. Los estudiantes utilizan la herramienta que ofrece GeoGebra para calcular la pendiente de una recta y el valor que obtienen es $-7{,}76$, al observar este valor, concluyen que la conjetura realizada por uno de sus compañeros es correcta. Uno de los investigadores agrega los datos obtenidos en esta ocasión a la tabla realizada previamente en el tablero.

A continuación, se solicita a los estudiantes ingresar la función $2x^3$, seguido a esto se pregunta qué tipo de curva aparece en el rastro cuando la función ingresada es una parábola, los estudiantes afirman que aparece una recta. Una vez ingresan la función de grado tres, conjeturan que el rastro formará una parábola, uno de los estudiantes manifiesta que la ecuación de la parábola será $4x^2$. Sin embargo, uno de los investigadores le sugirió recordar el procedimiento realizado para conocer la ecuación de la curva de cambio en los casos anteriores. Finalmente, los estudiantes concluyen que la ecuación de la curva de cambio para la función $2x^3$, resulta ser $6x^2$. Para comprobar su hipótesis, se sugiere a los estudiantes ingresar en la barra de entrada de GeoGebra la curva $6x^2$ con el fin de determinar si coincide con la curva generada por el rastro al hacerlo, los estudiantes dan cuenta de que así. Luego, uno de los investigadores les pregunta cuál sería la ecuación de la curva que forma el rastro si se ingresa la función $-5x^3$, los estudiantes manifiestan que esta sería $-15x^2$. Se pregunta también por la concavidad de la parábola resultante en el rastro, los estudiantes indican mediante un gesto que esta será cóncava hacia abajo. Después, se realiza la verificación de la ecuación de la curva de cambio para la función $-5x^3$.

Posteriormente, los investigadores solicitan a los estudiantes desactivar la casilla *Muestra función* y seguido a esto ingresar la función: $0.2x^3 + 0.9x^2 - 1.5x - 4$, uno de los estudiantes empieza a mover el punto A sobre el eje. Se pide a los estudiantes observar la curva formada por el rastro e indicar en qué partes la función original es creciente. Uno de los estudiantes señala las dos partes de la curva formada por el rastro que aparecen en color azul. Los investigadores sugieren a los estudiantes utilizar intervalos para hacer referencia al comportamiento de la función original. Inicialmente se les pregunta a los estudiantes cuál es el comportamiento de dicha función entre -6 y -4. Luego, se pregunta a los estudiantes en qué intervalo la función original es decreciente, los estudiantes manifiestan que esto sucede aproximadamente entre -4 y 1, después se les pregunta en qué intervalo la función original vuelve a ser creciente, a lo que los estudiantes responden que desde 1 en adelante. A continuación, se pide a los estudiantes activar la casilla *Muestra* función y comprobar si sus afirmaciones son correctas. El estudiante que está manipulando el computador en ese momento recorre la curva original con el cursor y los estudiantes evidencian que sus afirmaciones fueron correctas. Se repite la misma tarea con las funciones $-0.2x^4 - 0.5x^3 + 1.5x^2 \mp 2.2x$ y $2sen(x) + 3\cos(x)$. Los estudiantes no presentan dificultad para determinar a partir de la curva de cambio en qué tramos la función original es creciente o decreciente. Contrario a lo ocurrido en otras sesiones, durante esta los estudiantes no recurrieron al uso de lápiz y papel para realizar bosquejos de las gráficas o bien, para hacer anotaciones sobre algunos datos en particular.

Para realizar el cierre, los investigadores realizan un resumen de las ideas clave trabajadas durante la sesión. Allí se evidencian algunos comportamientos asociados con las acciones mentales planteadas en la herramienta analítica del marco conceptual de la covariación. Estos serán descritos en el análisis que se presenta en el siguiente apartado.

5.4.4.1. Análisis desde el marco conceptual de la covariación

Número de tarea	Tipo de recurso	Indicadores que se espera desarrollar	Nivel de alcance de cada indicador
3	Exploración de situaciones y formulación de conjeturas	**AM2:** Al ingresar funciones lineales al recurso y mover el punto A, los estudiantes verbalizan que el tamaño del segmento no presenta ningún cambio.	Cuando se propone a los estudiantes ingresar funciones lineales al recurso, ellos dan cuenta y razón de que el segmento no varía a medida que el punto A se mueve sobre el eje. Sin embargo, no aluden a que esto se debe a que en las funciones lineales los cambios son constantes. Por tal razón se considera que este indicador no se alcanzó en su totalidad. Cuando los investigadores realizan el resumen para dar cierre a la sesión, uno de los estudiantes alude a que los cambios en y dependen de los cambios en x. Es decir que, si x aumenta, y también lo hará. Esto indica que los estudiantes están coordinando la dirección del cambio.
		AM3: Los estudiantes determinan el valor de la pendiente de las funciones lineales ingresadas o bien, de las rectas generadas a partir del rastro que se obtiene al mover el punto A.	El primer comportamiento asociado con este indicador que evidenciaron los estudiantes se presentó cuando determinaron la pendiente de la función $2x + 3$. Los estudiantes también logran determinar la pendiente de las rectas generadas por el rastro al ingresar funciones de grado dos. Para esto intentan imaginar el triángulo que representa la pendiente de las rectas y obtienen una aproximación a este valor. Además, proceden a verificarlo aplicando una estrategia que consistió en graficar dos puntos sobre la recta generada por el rastro y trazar la recta que pasa por esos dos puntos para luego usar la herramienta que ofrece GeoGebra para este fin. Al realizar el resumen de la sesión, los investigadores proponen una situación a los estudiantes en la que les sugieren suponer que mientras uno de ellos viaja en un carro que avanza 20 Kilómetros (Km) en una hora y uno de los investigadores viaja en otro carro que avanza 40 Km en una hora. Se pregunta cuál de los carros va más rápido. Uno de los estudiantes responde que el carro que recorrió 40 Km. Al realizar la representación gráfica de la situación, uno de los investigadores pide al

			estudiante justificar su respuesta. Los estudiantes en general manifiestan que esto pasó debido a que de los dos este fue el carro que recorrió mayor distancia en una hora. Seguido a esto, uno de los investigadores hace referencia al recurso utilizado en la tarea 1, y pregunta a los estudiantes dados dos triángulos, formados en dos intervalos de una función, uno con mayor altura que el otro, cuál es el que evidencia un cambio mayor en la función. Los estudiantes indican que la razón de cambio es mayor en el punto en el que el triángulo tiene mayor altura. Los dos comportamientos mencionados previamente se consideran evidencia de AM3, puesto que los estudiantes están cuantificando el cambio.
		AM4: Los estudiantes relacionan los colores del rastro, con los cambios que presenta la función y a partir de esto determinan si esta crece o decrece en un intervalo. También, reconocen que en el caso de las funciones polinómicas, la función formada por el rastro tiene un grado menor que la función original y determinan su ecuación.	Fue posible evidenciar este indicador a lo largo de la implementación de la tarea, puesto que los estudiantes relacionaron los cambios de crecimiento de la función original con los cambios de color de la curva de cambio generada por el rastro. Esto sucedió con todas las funciones trabajadas durante la sesión. Adicionalmente, en la última parte de la implementación de la tarea, los estudiantes lograron identificar los intervalos en los que la función original era creciente y decreciente únicamente a partir de la visualización de la curva de cambio generada por el rastro. Otro comportamiento asociado con este indicador se presentó cuando los estudiantes lograron determinar que, en el caso de las funciones polinómicas, el rastro de la curva de cambio tiene un grado menos que la función original. Además, los estudiantes descubrieron cómo hallar la ecuación de la curva de cambio a partir de las regularidades observadas a medida que se llevaba a cabo el análisis de varias funciones.
		AM5: Los estudiantes identifican los puntos de inflexión de las funciones trabajadas como los puntos en los que cambia la concavidad. También, predicen la concavidad de la función original a partir del rastro, o bien la concavidad que va a presentar el rastro, cuando ingresan la función original.	Durante la implementación de la tarea, no se presentaron comportamientos que respondan a cabalidad al indicador planteado para esta acción mental. Sin embargo, durante la intervención, se presentaron dos comportamientos que se acercan a AM5. Estos se describen a continuación: Cuando se preguntó a los estudiantes por la concavidad de la parábola que generaría el rastro, una vez se ingresara la función $-5x^3$ y ellos indican que esta resultaría ser cóncava hacia abajo. Ahora bien, cuando se realizó el resumen de la sesión y se habló acerca de la tarea 1, los estudiantes aludieron a que cuando aumentaba el valor del deslizador *n*, los triángulos que representan la razón de cambio se hacían más pequeños y esto implicaba que el cambio en cierto punto de la función tendía a cero. Además, hicieron mención del término *razón de cambio instantánea.* Sin embargo, después se determinó que este comportamiento se puede clasificar como pseudoanalítico, pues al preguntar a los estudiantes qué operación relacionaban con una razón, ellos aludieron a otras operaciones básicas distintas a la división.

Tabla 34: Carlson - T3S4

5.4.4.2. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Carlson.

Para la tercera tarea se utilizó un recurso que se sitúa en la categoría *“Exploración de situaciones y formulación de conjeturas”*. Se considera que este representó las siguientes ventajas para los estudiantes:

- ✓ El uso de la casilla de entrada hizo posible que se llevara a cabo el análisis con diferentes tipos de funciones y que los estudiantes pudieran determinar que, sin importar el tipo de función, la asociación entre los colores del rastro y el comportamiento en términos de crecimiento de la función siempre se presentaba.
- ✓ Tener acceso a la representación gráfica de la función original y la curva de cambio generada por el rastro hizo posible que los estudiantes establecieran relaciones entre estas. Por ejemplo, hizo posible que los estudiantes concluyeran que, en el caso de las funciones polinómicas, la curva de cambio tiene un grado menor que la función original. Esto también hizo posible que los estudiantes evidenciaran la regularidad para hallar la ecuación de la curva de cambio.
- ✓ Tener la posibilidad de generar el rastro de la curva de cambio con diferentes colores, permitió que los estudiantes lograran determinar a partir de este en qué intervalos la función original sería creciente y en qué intervalos sería decreciente.

Esta tarea no habría podido llevarse a cabo utilizando lápiz y papel, pues con este tipo de tecnologías no habría sido posible lograr el dinamismo que brindan el movimiento del punto sobre eje *x*, la aparición del rastro de la gráfica de la derivada de la función y la representación gráfica de la función original. Consideramos que el uso del recurso fue pertinente, en tanto que se lograron en buena medida los indicadores propuestos además, los estudiantes tuvieron la oportunidad de verificar sus conjeturas haciendo uso del recurso.

5.4.4.3. Análisis desde el marco de abstracción situada.

Recurso	Ind	Descripción	Análisis de la interacción
3: Exploración de situaciones y formulación de conjeturas	**B2**	Relación entre la longitud constante del segmento y el cambio constante de la función ingresada.	Los estudiantes reconocen que al ingresar una función lineal y mover un punto sobre el eje x, el segmento que se encuentra acompañándolo no tiene ningún cambio, se mantiene constante. Este segmento representa el cambio que presenta la función en el valor de x sobre el cual se encuentre el punto, al tener una longitud constante para cualquier punto es porque su cambio en ese valor también lo es. Sucede algo similar si se ingresa una función lineal decreciente, pues el segmento aparece en la parte negativa del plano y de color rojo, pero se mantiene constante.
		Relación entre la longitud constante del segmento y el cambio constante de la función ingresada.	
	B4	Descripción de la relación entre el rastro de la curva de cambio y la función ingresada. Descripción del cambio.	Los estudiantes se refieren a que el rastro que se genera es una "dimensión" menos que la función ingresada, es decir, si se ingresa una función de grado dos, el rastro generará una función de grado 1, es decir una recta. Además también usan los colores rojo y azul para referirse al crecimiento y decrecimiento, respectivamente, de la función.
	C4	Descripción de la ecuación de la curva de cambio (recta).	Los estudiantes se muestran interesados por describir la ecuación de la recta que representa el cambio de una función de grado dos, para esto usan el corte con el eje y la pendiente de esta

		Descripción de la relación entre las expresiones analíticas de la función y la curva de cambio.	para construir su expresión y describen una regla para encontrar su forma analítica a partir de la función ingresada, usando la idea previa de la disminución de una dimensión. Esto lo realizan para la función -3x^2 cuya curva de cambio estaría representada por -6x. Al final los estudiantes usan esta regla para otras funciones de grado mayor. Esta regla descrita es la forma para encontrar la derivada de una función polinómica. Es importante resaltar que aquí es la representación gráfica de las funciones las que le permite a los estudiantes el establecimiento de las relación así como los conocimientos previos.
		Uso de la regla construida para otras funciones.	
	D4	Descripción de la función ingresada a la partir del análisis de la curva de cambio.	Al ingresar una nueva función en el recurso se les pide a los estudiantes que a partir del rastro generado por el segmento que pueden mover deben realizar una descripción de la función ingresada. Este rastro deja marcas de dos colores, una roja y una azul, los estudiantes describen que la función original debe ser creciente en el intervalo en el cual el segmento deja una marca azul y debe ser decreciente en los intervalos en los cuáles la marca es roja. Estos elementos son comprobados a partir de la aparición de la función original en el recurso.
	D4	Unificación de elementos trabajados en las sesiones previas con los elementos trabajados en la sesión actual.	Los estudiantes realizan algunas descripciones respecto a los cambios de las funciones, hablando de varios de los elementos usados en las sesiones previas tales como triángulos, colores, puntos, movimientos y demás. Describen las relaciones establecidas entre estos elementos de GGB y los objetos matemáticos.

Tabla 35: AS - T3S4

5.4.4.4. Sobre el papel del tipo de recurso GGB usado en la implementación: Abstracción Situada.

El recurso 3, tenía la particularidad de ser, por decirlo de algún modo "inverso" al anterior; en el anterior se buscaba una descripción de la curva de cambio a partir de la función original y en este se busca una descripción de la función original a partir de la curva de cambio. De manera similar, los estudiantes establecen las relaciones entre los objetos GGB que corporeizan la curva de cambio (segmento móvil en la pantalla y la función que ingresan). Cuando los estudiantes mueven el punto y ven el rastro dejado, nuevamente en dos colores, son capaces de describir la forma de la función original o una muy cercana esta, creciente cuando la curva de cambio es azul y decreciente cuando la curva de cambio es roja, además de esto, los estudiantes apropian la relación entre ambas curvas y llegan a conclusiones que no estaban presupuestadas, como la de la disminución de una "dimensión" en la curva de cambio, en relación con la función original. Por ejemplo, si la función original era de grado 2, su curva de cambio debía ser de grado 1. Para cerrar con la sesión, los estudiantes realizan una descripción de varios de los objetos matemáticos relacionados con el cambio de las funciones trabajados en las cuatro sesiones y mencionan las respectivas relaciones entre estos elementos y como se ven corporeizados a través de GGB. En esta sesión, al igual que la anterior, el dinamismo de los puntos y la construcción de la curva de cambio a dos colores fue fundamental en la exploración y conjeturación de la forma de la función.

CAPÍTULO 6: RESULTADOS GENERALES DEL ANÁLISIS

Presentamos en este capítulo, algunos resultados derivados del análisis expuesto en el capítulo anterior. En primer lugar, se presenta de manera sintética el nivel de alcance general de las acciones mentales del marco conceptual de la covariación, durante la implementación realizada. Además, se da a conocer el nivel de covariación en el que consideramos se sitúan los estudiantes que fungieron como población para esta investigación. En tercer lugar se presentan los resultados producto de la frecuencia de aparición de los indicadores del marco de abstracción situada en las cuatro sesiones.

6.1. Resultados desde el marco conceptual de la covariación

Inicialmente, presentaremos los resultados obtenidos a partir del análisis sesión a sesión. Para esto, construimos una tabla en la que se muestran los comportamientos asociados a cada una de las acciones mentales, evidenciados en cada sesión. Se realizó una comparación entre dichos comportamientos y los indicadores que se esperaba que alcanzaran los estudiantes en cada sesión. El nivel de alcance se evaluó teniendo en cuenta los indicadores que se plantean a continuación:

Indicador	Descripción
0	Los estudiantes no evidenciaron ningún comportamiento asociado con la acción mental en estudio.
1	Los estudiantes mostraron comportamientos que ilustran parcialmente la acción mental en estudio. Sin embargo, estos no fueron descritos en los indicadores planteados por los investigadores.
2	Los estudiantes evidenciaron algunos de los comportamientos, planteados en los indicadores propuestos por los investigadores, que ilustran la acción mental en estudio.
3	Los estudiantes evidenciaron todos los comportamientos, planteados en los indicadores propuestos por los investigadores, que ilustran la acción mental en estudio.

Tabla 36: Indicadores para evaluar el alcance de las acciones mentales

Esto quiere decir que si en la primera sesión, los estudiantes no evidenciaron ningún comportamiento asociado con AM1, se le asignará el indicador 0 al nivel de alcance de esta acción mental. Mientras que, si en la misma sesión, se evidenciaron todos los comportamientos planteados en los indicadores propuestos que ilustran AM3, se le asignará el indicador 3 al alcance de dicha acción mental. Cabe aclarar que en algunas sesiones no se plantearon indicadores asociados a ciertas acciones mentales, en estos casos no se asigna ninguno de los indicadores pues no aplican.

Ahora bien, una vez determinado el nivel de alcance de las acciones mentales en cada una de las sesiones, daremos a conocer el nivel de razonamiento covariacional en el cual se sitúan los estudiantes que fungieron como población en nuestra investigación. Seguido a esto, daremos a los resultados producto de la frecuencia de aparición de los indicadores relacionados con Abstracción Situada respecto a las cuatro sesiones.

6.1.1. Sesión 1

Para la implementación de las tareas propuestas en esta sesión, planteamos indicadores para AM1, AM2 y AM3. Consideramos que, dado el nivel de complejidad de las tareas, no se presentarían comportamientos asociados con AM4 y AM5, por tal razón, no se plantearon indicadores para estas acciones mentales. Los comportamientos evidenciados por los estudiantes durante la sesión se enumeran en la siguiente tabla:

Acción mental	Comportamientos asociados
AM1	▪ Identificaron las magnitudes que intervienen en cada una de las tareas propuestas y reconocieron cuál de ellas, dependía de la otra. Lo anterior lo evidenciaron mediante verbalizaciones al respecto y al designar correctamente los ejes coordenados para representar gráficamente las situaciones propuestas. Fueron conscientes de que, para dar solución a las tareas propuestas, debían relacionar los cambios en x y en y, mediante un cociente.
AM2	▪ Reconocieron que cuando una de las variables aumenta, la otra también lo hace. ▪ Coordinaron el cambio en términos de subida y avance, pues dieron cuenta y razón de la posición que toma una recta, dependiendo de su pendiente. ▪ Durante toda la sesión se evidenció la tendencia a asociar la pendiente con la inclinación de la recta que representa una situación. Por ejemplo, mencionaron que, si no hay avance la recta que representa la carretera en la situación dada en la tarea 2 es paralela al eje *x* o que cuando la pendiente es negativa, se puede entender que el ciclista va en descenso.
AM3	▪ Dieron cuenta y razón de que el cambio es constante. ▪ Dado el porcentaje de inclinación de una carretera, representada por una recta, determinaron la cantidad de metros de subida y avance necesarios para obtener dicho porcentaje. ▪ Dada una situación, seleccionaron la gráfica con la recta que la representa, teniendo en cuenta los cambios en las variables dependiente e independiente para hallar la pendiente de esta.

Tabla 37: Comportamientos asociados a las acciones mentales – Sesión 1.

Al contrastar los indicadores planteados para cada acción mental con los comportamientos evidenciados por los estudiantes, concluimos que el nivel de alcance del objetivo planteado para la sesión fue alto. Lo anterior, teniendo en cuenta que todas las acciones mentales se evaluaron con el indicador 3.

	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5
Sesión 1	3	3	3	N/A	N/A

Figura 39. Sesión 1 - Nivel de alcance de los indicadores propuestos

Esto quiere decir que los estudiantes evidenciaron todos los comportamientos planteados por los investigadores para cada una de las acciones mentales. Es válido afirmar que, durante la implementación de las tareas, los estudiantes lograron coordinar los valores de una variable con los cambios en otra (AM1). También, lograron coordinar la dirección del cambio de una variable con los cambios de la otra (AM2) y cuantificaron el cambio en mención (AM3).
Aunque en la implementación los estudiantes manifestaron que no era de su agrado utilizar tecnologías digitales en las clases de matemáticas y que no lo hacían con regularidad en sus colegios, no presentaron dificultades en el manejo de los recursos que mediaron las tareas.

6.2.1. Sesión 2

Para la implementación de las tareas propuestas en esta sesión, planteamos indicadores para AM1, AM2, AM3 y AM4. Consideramos que, dado el nivel de complejidad de las tareas, no se presentarían comportamientos asociados con AM5, por tal razón, no se plantearon indicadores para esta acción mental. Los comportamientos evidenciados por los estudiantes durante la sesión se enumeran en la siguiente tabla:

Acción mental	Comportamientos asociados
AM1	▪ No se alcanzó la hipótesis planteada a partir del indicador propuesto, pues el único comportamiento que se presentó durante la implementación de la tarea asociado con esta acción mental fue catalogado como pseudoanalítico.
AM2	▪ Una de las estudiantes concluyó que a medida que aumenta el valor del deslizador *n*, aumenta también la cantidad de segmentos que van apareciendo en pantalla. ▪ La estudiante mencionada previamente, también verbaliza que a medida que aumenta el número de segmentos, la gráfica formada por estos se va aproximando más a la gráfica de la función ingresada.
AM3	▪ Una de las estudiantes reconoce que cuando los segmentos están inclinados hacia la izquierda, su pendiente es positiva y cuando están inclinados hacia la derecha, su pendiente es negativa.
AM4	▪ Una de las estudiantes verbaliza que en los intervalos en los que una función es creciente, la pendiente de los segmentos que la forman es positiva y que en los intervalos en los que dicha función es decreciente, la pendiente de los segmentos que la forman es negativa ▪ Una de las estudiantes evidencia que la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B (recta secante a la curva), es positiva en los intervalos en los que la función es creciente y negativa en los intervalos en los que la función es decreciente ▪ Una de las estudiantes reconoce que en el punto máximo de la curva la pendiente es cero, pero no asocia este valor con la nulidad del cambio en ese punto.

Tabla 38: Comportamientos asociados a las acciones mentales – Sesión 2

De manera general, el nivel de alcance del objetivo propuesto para esta sesión fue bajo, se infiere que esto se debe a que en el momento de la aplicación de las tareas únicamente estuvo presente una de los cinco estudiantes que participaron en la primera sesión y fue ella quien mostró algunos de los comportamientos asociados a los indicadores planteados. La intervención del resto de las estudiantes que participaron en esta sesión fue mínima, por lo general, aprobaban las intervenciones de la estudiante que estuvo en la primera sesión o bien se mostraban dubitativas frente a las preguntas que se realizaban a lo largo de la sesión.

Sesión 2	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5
	1	2	2	3	N/A

Figura 40. Sesión 2 - Nivel de alcance de los indicadores propuestos

A partir de la información presentada en el gráfico, podemos concluir que las estudiantes no evidenciaron ninguno de los comportamientos asociados con AM1 que se plantearon en los indicadores, sin embargo, esta acción mental se evaluó con el indicador 1. Esto se debe a que cuando una de las estudiantes reconoció que cuando aumenta el valor del deslizador *n*, también aumenta el número de segmentos que aparece en la vista gráfica, también reconoció de manera implícita que cuando cambia el valor de *n* también cambia la cantidad de segmentos. Es decir, que está coordinando el valor de una variable, con los cambios en la otra, comportamiento que describe AM1. Respecto a AM2 y AM3, las estudiantes solo evidenciaron algunos de los comportamientos planteados en los indicadores. Sin embargo, mostraron todos los comportamientos planteados para AM3.

Los resultados del análisis de esta sesión nos muestran que la emergencia de comportamientos asociados a las distintas acciones mentales no se da siempre de forma jerárquica. Cuando nos remitimos a la literatura y estudiamos la herramienta analítica propuesta por Carlson et. al. (2003), asumimos que, si un estudiante evidencia comportamientos asociados con AM4, es porque su nivel de alcance de las acciones mentales previas es alto. Sin embargo, durante la implementación llevada a cabo en esta sesión pudimos dar cuenta y razón de que esto no siempre sucede. Pues, aunque el nivel de alcance de AM1, AM2 y AM3 no fue precisamente alto, las estudiantes evidenciaron todos los comportamientos que propusimos para ilustrar AM4.

6.3.1. Sesión 3

Para la implementación de las tareas propuestas en esta sesión, planteamos indicadores para AM1, AM2, AM3, AM4 y AM5. Los comportamientos evidenciados por los estudiantes durante la sesión se enumeran en la siguiente tabla:

Acción mental	Comportamientos asociados
AM1	▪ Señalaron que entre mayor es la distancia recorrida en el eje *y*, mayor será el valor de la pendiente de un segmento. En este caso, se infiere que reconocieron que, si cambia la distancia recorrida en el eje *y*, también va a cambiar el valor de la pendiente del segmento. ▪ Manifestaron que para hallar la expresión que representa la pendiente del segmento dado, debían relacionar los cambios en y y los cambios en x mediante un cociente ▪ Argumentaron que los únicos puntos del recurso que se pueden mover son X_1 y X_2, dado que *x* es la variable independiente que interviene en la situación.
AM2	▪ Determinaron que los segmentos de color rojo, paralelos al eje *x*, representaban el cambio en *x*. ▪ Reconocieron que entre mayor es la distancia recorrida en el eje *y*, mayor será el valor de la pendiente de un segmento. ▪ Dieron cuenta y razón, de que para hallar la expresión que representa la pendiente del segmento dado, debían establecer relaciones entre las distancias que aparecieron al activar la casilla *Ayuda*. ▪ Identificaron que la fórmula varía en función a la posición de los extremos del segmento en los diferentes cuadrantes del plano cartesiano. ▪ Evidenciaron que entre mayor es la distancia entre los extremos del segmento, mayor será la razón de cambio promedio en ese intervalo de la curva.
AM3	▪ Antes de empezar a elaborar el bosquejo de la gráfica solicitada en lápiz y papel, uno de los estudiantes dibuja un segmento y a partir de su posición (inclinado hacia la izquierda) y longitud, afirma que este tiene pendiente igual a -1. ▪ Al realizar el bosquejo, los estudiantes tuvieron en cuenta el signo que tenía la pendiente de cada segmento, lo que permitió que el bosquejo realizado fuera correcto en términos de crecimiento y decrecimiento de la curva. ▪ Reconocen que, si quieren graficar un segmento paralelo al eje *x*, su pendiente será cero, pues la curva no presenta cambios en ese intervalo. ▪ Plantean diferentes expresiones que representan la pendiente del segmento dado, teniendo en cuenta las implicaciones que tiene que los extremos del segmento estén ubicados en cierto lugar del plano ▪ A partir de la observación de la curva estimaron cómo iba a ser la razón de cambio en diferentes intervalos y determinaron en cuáles de estos sería mayor o menor.
AM4	▪ Reconocieron en qué tramos las curvas trabajadas crecen y decrecen, a partir del signo de la pendiente de los segmentos que la componen. ▪ Como querían construir una curva simétrica, tuvieron en cuenta que el tramo construido era creciente y sus pendientes eran positivas, de modo que, para construir el tramo simétrico, graficaron segmentos con las mismas pendientes del primer tramo, pero con signo negativo.

	▪ A partir de la exploración con el recurso, plantearon una fórmula general para hallar pendiente de cualquier segmento de recta. ▪ Verbalizaron que en los tramos en los que la razón de cambio promedio es positiva, la función es creciente, mientras que en los tramos en los que la función decrece, la razón de cambio promedio es negativa
AM5	▪ Realizaron un bosquejo adecuado para la curva solicitada, dado un listado de pendientes. ▪ Concluyeron que a medida que los intervalos entre las razones de cambio de una curva sean más pequeños, la unión de segmentos que la representan se va a aproximar cada vez más a la curva original.

Tabla 39: Comportamientos asociados a las acciones mentales – Sesión 3.

Al contrastar los indicadores propuestos para cada una de las tareas de esta sesión, con los comportamientos evidenciados por los estudiantes durante la implementación, podemos concluir el nivel de alcance de los indicadores propuestos fue alto.

Sesión 3	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5
	3	3	3	3	2

Figura 41. Sesión 3 - Nivel de alcance de los indicadores propuestos

Cabe resaltar que cuatro de los cincos estudiantes no pudieron participar de la segunda sesión, por tal razón, se diseñó una tarea que les permitiera trabajar las ideas clave propuestas en la sesión en la que se ausentaron. De acuerdo con los resultados obtenidos, es válido afirmar que se alcanzó el objetivo de dicha tarea, pues los estudiantes evidenciaron todos los comportamientos asociados con AM1, AM2, AM3 y AM4 durante la implementación de las tres tareas. Si bien, al inicio de la sesión fue importante que la estudiante que participó en la segunda sesión les brindara ciertas orientaciones a quienes no habían estado presentes, los estudiantes lograron evidenciar los comportamientos propuestos para ilustrar las diferentes acciones mentales sin dificultad. Respecto a AM5, que fue evaluada con el indicador 2, cabe aclarar que los estudiantes mostraron la mayoría de los comportamientos propuestos en los indicadores. Aunque no lograron alcanzarlos en su totalidad, se considera que el nivel de alcance del objetivo de la sesión fue alto, puesto que la mayoría de los estudiantes no había participado de la segunda sesión.
Otro aspecto que vale la pena resaltar es que, aunque los estudiantes durante esta sesión se mostraron más cómodos al trabajar con tecnología digital, aún seguían recurriendo al uso de lápiz y papel para llevar a cabo las tareas propuestas.

6.4.1. Sesión 4

Para la implementación de las tareas propuestas en esta sesión, planteamos indicadores para AM1, AM2, AM3, AM4 y AM5. Los comportamientos evidenciados por los estudiantes durante la sesión se enumeran en la siguiente tabla:

Acción mental	Comportamientos asociados
AM1	▪ Dieron cuenta y razón de que a cada uno de los puntos que se encontraba sobre el eje x, le correspondía un punto sobre la curva.

	▪ Cuando recordaron la noción de imagen de una función, indicaron que la variable independiente que interviene en la situación es *x* y la variable independiente es *y*. Señalaron que, en consecuencia, el valor que toma *y*, dependerá del valor que toma *x*.
AM2	▪ Reconocieron que a medida que aumentaba el valor del deslizador *n*, también aumentaba la cantidad de puntos sobre la curva y, por tanto, la cantidad de puntos sobre el eje *x*. ▪ Verbalizaron que los segmentos azules que aparecieron en el recurso representan los cambios en *x* de la función ingresada y los segmentos rojos representan los cambios en *y*.
AM3	▪ Concluyeron que los puntos que están sobre la curva son imágenes de los puntos que están sobre el eje *x*. Este resultado se obtuvo, a partir del reemplazo de ciertos valores de *x* en la función que estaba siendo analizada. ▪ Teniendo en cuenta la longitud de los segmentos azules y rojos, los estudiantes concluyeron que los cambios en *x* eran constantes, pues los segmentos azules tienen la misma longitud, mientras que los cambios en *y* varían, pues las longitudes de los segmentos son distintas. ▪ Evidenciaron que entre más cercano esté un punto de la curva a un punto de inflexión, la longitud del segmento que representa el cambio en *y*, va a ser menor, así como el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. ▪ Reconocieron que la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de inflexión de una curva es cero. ▪ A través de diferentes estrategias, hallaron el valor de la pendiente de las funciones lineales analizadas y de las curvas de cambio de funciones de grado dos, generadas a partir del rastro del punto A.
AM4	▪ Determinaron que la pendiente de la recta tangente a una curva es positiva en los intervalos en los que la función es creciente y es negativa en los tramos en los que la función decrece. ▪ Analizaron diferentes tipos de funciones y establecieron una relación entre los colores del rastro de la curva de cambio de una función y los intervalos en los que esta presenta cambios de crecimiento. ▪ Evidenciaron que, en el caso de las funciones polinómicas, la curva de cambio tiene un grado menos que la función original y descubrieron la regularidad para hallar la ecuación de la curva de cambio.
AM5	▪ Reconocieron que, al hallar la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto muy cercano a cualquier punto de inflexión, el valor de la pendiente de dicha recta tendería a cero. ▪ Cuando se preguntó por la forma que tendría la curva de cambio de una función de grado 3, con coeficiente negativo, los estudiantes indicaron que esta resultaría ser una parábola cóncava hacia abajo.

Tabla 40: Comportamientos asociados a las acciones mentales – Sesión 4.

Al contrastar los comportamientos evidenciados por los estudiantes con los indicadores propuestos para la sesión, podemos concluir que el nivel de alcance de los indicadores establecidos para la sesión cuatro fue alto.

Sesión 4	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5
	3	3	3	3	1

Figura 42. Sesión 4 - Nivel de alcance de los indicadores propuestos

Esta afirmación es válida en tanto que, a partir del gráfico podemos evidenciar que los estudiantes mostraron todos los comportamientos propuestos en los indicadores, asociados con cuatro de las cinco acciones mentales propuestas en el marco conceptual de la covariación. El indicador con el que se evaluó AM5 fue 1, en tanto que los estudiantes evidenciaron comportamientos que evidencian parcialmente la acción mental, pero que no fueron propuestos en los indicadores de alcance de esta. Ahora bien, el indicador de evaluación disminuyó respecto al alcance que se tuvo en la sesión 4. Esto se le atribuye a que el tiempo que pasó entre la implementación de las sesiones 3 y 4 fue mayor al que se estimó en la planeación. Esto debido a las dinámicas escolares de los estudiantes y a situaciones de orden público que impidieron que la sesión 4 se llevara a cabo en la fecha establecida. A raíz de esto, fue necesario retomar varias ideas trabajas en sesiones anteriores, pues estas fundamentarían el desarrollo de las tareas propuestas. Sin embargo, se considera que el objetivo planteado para la sesión se alcanzó en gran parte.

En adición a lo anterior, se evidenció que, durante esta sesión, los estudiantes se mostraron mucho más cómodos con el uso de tecnología digital, durante la primera sesión solo uno de los estudiantes manipuló el computador. Sin embargo, durante esta sesión todos los estudiantes lo hicieron y se evidenció que se sentían más confiados al hacerlo, pues ya conocían varias herramientas que resultaban útiles para comprobar sus conjeturas. Contrario a lo ocurrido en otras sesiones, en esta oportunidad, los estudiantes no recurrieron al uso de lápiz y papel para hacer anotaciones, operaciones o gráficas relacionadas con la resolución de las tareas propuestas.

6.5.1. Nivel de razonamiento covariacional alcanzado

De acuerdo con la herramienta analítica propuesta en el marco conceptual de la covariación, para situar a un estudiante en cierto nivel de razonamiento covariacional, primero es necesario identificar qué acciones mentales ilustran los comportamientos que él evidencia en la resolución de tareas. En el capítulo anterior, presentamos el análisis de cada una de las 11 tareas implementadas durante cuatro sesiones. Este se realizó a la luz de los indicadores formulados para cada tarea en particular, atendiendo a las cinco acciones mentales planteadas por Carlson et. al. (2003).

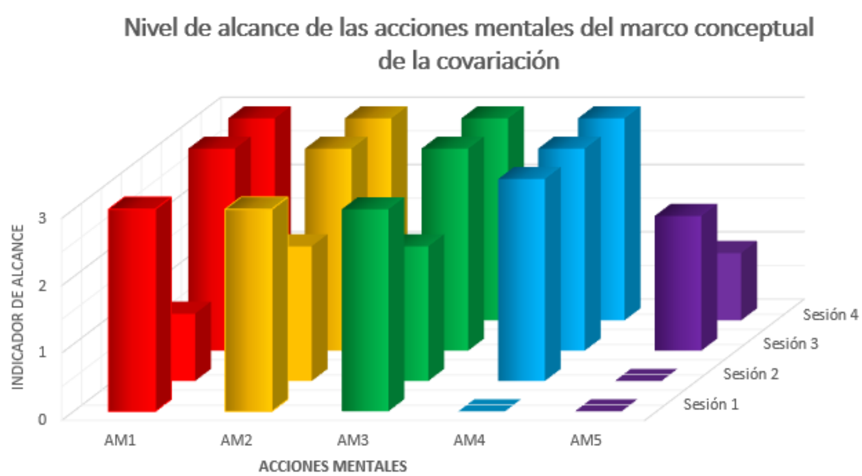


Figura 43. Nivel de alcance de las acciones mentales del marco conceptual de la covariación

A partir del gráfico anterior, presentamos el panorama general, del nivel de alcance de los indicadores propuestos para cada sesión respecto a cada una de las acciones mentales. Vale la pena recordar que, en la sesión 1 no se plantearon indicadores para AM4 y AM5 y en la sesión 2 no se plantearon indicadores para AM5.

Ahora bien, según Carlson y sus colaboradores, es válido afirmar que un estudiante ha alcanzado cierto nivel de razonamiento covariacional cuando exhibe comportamientos a las acciones mentales relacionadas con dicho nivel y a las acciones asociadas con todos los niveles previos. Al observar los resultados generales de la implementación, podemos dar cuenta y razón de que los estudiantes a lo largo de las sesiones mostraron diferentes comportamientos asociados con las cuatro primeras acciones mentales. Esto quiere decir que los estudiantes están situados en el nivel 4 de covariación. Dicha afirmación se fundamenta en que, a lo largo de las intervenciones, los estudiantes mostraron ser capaces de descomponer AM4, para razonar a través de niveles que implican las acciones mentales previas (AM1-AM3). Es decir que además de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable (AM4), los estudiantes también coordinaron la cantidad de cambio de una variable con los cambios de otra (AM3). Además, coordinaron la dirección del cambio (AM2) y el valor de una variable (AM1) con los cambios en otra. Los comportamientos mediante los que los estudiantes ilustraron las acciones mencionadas previamente se encuentran descritos en la tabla presentada en cada sesión.

6.2. Resultados desde el marco conceptual de abstracción situada.

Presentamos aquí una tabla que representa la frecuencia de aparición de cada uno de los indicadores construidos para Abstracción Situada en las cuatro sesiones, a partir de estos, se generan algunos resultados producto de esta. Recordando que este marco se refiere de manera directa a las acciones concretas que realizan los estudiantes en el recurso.

Indicador	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3	Sesión 4
Z0	0	0	0	0
Z1	0	0	0	1
Z2	1	0	0	2
Z3	0	0	1	0
Z4	1	0	0	0
A0	0	1	0	1
A1	0	0	0	0
A2	0	0	0	0
A3	0	0	0	0
A4	0	0	0	0
B0	0	1	0	1
B1	0	0	0	0
B2	3	2	4	3
B3	2	1	1	1
B4	1	0	1	1
C0	0	0	0	0
C1	0	2	0	1
C2	2	2	0	0
C3	0	0	4	2
C4	0	0	2	3
D0	0	4	0	0
D1	0	2	0	1
D2	4	3	2	7
D3	0	1	6	2
D4	0	0	2	5

Figura 44: Tabla de indicadores de abstracción situada - Frecuencia

En la tabla anterior se presenta con qué frecuencia aparecieron los indicadores en el análisis de abstracción situada, y a partir de estos se pueden concluir algunos elementos respecto a las acciones realizadas por los estudiantes.

- El indicador más frecuente en todas las sesiones fue el indicador "D2", por tanto, podemos decir que a lo largo de las cuatro sesiones, los estudiantes lograron en mayor manera, establecer relaciones entre los objetos matemáticos, pero esto gracias al uso de las herramientas de GGB y establecimiento de relaciones entre los objetos de GGB que corporeizaban los objetos matemáticos.

- Los indicadores asociados con el número 4 fueron más frecuentes en las dos últimas sesiones, estos, por el número indicado, estaban asociados a la construcción de ideas matemáticas formales o cercanas a las formales a partir de las acciones desarrolladas en GGB, es decir que con el paso de las sesiones, estas ideas se fueron volviendo más sólidas y fueron expresadas de manera formal o cercana, gracias a las acciones realizadas en los recursos.

- Los indicadores asociados con la letra A fueron los menos frecuentes o casi nulos en todas las sesiones, estos estaban descritos de tal forma que si se asignaba alguno de estos, era una referencia a la relación nula entre las acciones en GGB y algún objeto matemático, es decir que los recursos, en todas las sesiones, permitieron a los estudiantes en gran manera, establecer relaciones entre los objetos GGB y los matemáticos que se corporeizaban a través de estos, esto es apoyado por los indicadores asociados con la letra B, cuya aparición fue más frecuente en las cuatro sesiones y que estaban descritos a partir de las interacciones directas de los estudiantes con el recurso y el establecimiento de algún tipo de relación con el objeto matemático. Esta es una situación que era de esperarse, pues los recursos fueron diseñados de tal forma que los estudiantes pudieran relacionar sus acciones con el objeto.

- De manera similar, los indicadores asociados con la letra Z también fueron poco frecuentes, pero poco más que los asociados con la letra A. Esto se debe a que estaban descritos a partir de la construcción o descripción de relaciones matemáticas sin la intervención del recurso, lo que ocurrió en algunas de las sesiones, pero luego, nuevamente fue apoyado por las interacciones en el recurso, descritas con los indicadores asociados con la letra B.

- Los indicadores asociados con el número 0 también se esperaba que fueran poco frecuentes, debido a que estos estos estaban construidos en relación con una interacción limitada en GGB que simplemente dotara de significado a sus herramientas, pero sin ir más allá a una construcción matemática de estas, se observa que el indicador más frecuente de estos es D0, en la sesión número 2, es posible que esto pasara debido a que el grupo de estudiantes que se manejó estuvo descontextualizado de lo trabajado de manera previa en la sesión 1 y a pesar de dotar de significado las herramientas de GGB, no hubo una relación directa e instantánea con el objeto matemático a tratar.

- No es posible predecir la aparición de indicadores, pues esta depende directamente de lo que los estudiantes estén vivenciando en el preciso momento, así como pueden realizar alguna acción directa en el recurso, también pueden tratar de desarrollarla a lápiz y papel en otro momento, esta situación ocurrió en la sesión 1, y de igual manera pudo ocurrir en cualquiera de las otras. Los indicadores son producto directo de las intenciones momentáneas de los estudiantes.

CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES

Para finalizar el estudio que hemos expuesto a lo largo del documento, presentamos las conclusiones que se derivan de este. En primer lugar, haremos alusión al nivel de alcance de los objetivos propuestos en el primer capítulo. En segundo lugar, haremos referencia a las conclusiones generales provenientes de la investigación en general, además de mencionar las cuestiones abiertas a futuras investigaciones. En tercer lugar, señalamos los aportes que consideramos, obtuvimos a partir de la realización de este ejercicio investigativo.

7.1. Respecto al alcance de los objetivos propuestos

A continuación, presentamos las conclusiones respecto a los objetivos específicos planteados en el primer capítulo, esto con el fin de determinar *a posteriori* el nivel de alcance del objetivo general de la investigación.

El primer objetivo corresponde a la elaboración de una revisión documental que brindara elementos para clasificar los diferentes tipos de recurso que se pueden construir en GeoGebra. Consideramos que este se cumplió, en tanto que, planteamos criterios acordes a nuestros intereses para realizar la búsqueda y selección de los documentos que harían parte de la revisión, en bases de datos reconocidas en el campo investigativo. A partir de la lectura de los documentos recuperados, recopilamos, organizamos y analizamos información haciendo uso de los instrumentos que diseñamos para tal fin y esto nos permitió dar cuenta y razón de las características comunes entre ciertos grupos de recursos y así, dar paso a la clasificación de estos. En este sentido, también se evidencia el cumplimiento del segundo objetivo, referente a la formulación de una clasificación de los tipos de recursos elaborados en GeoGebra en función de su uso en la implementación de tareas en el aula. Esto debido a que, definimos seis categorías disyuntas que ilustran los tipos de recursos de GeoGebra que pueden construirse e implementarse. Las categorías son: modelación de situaciones problema, exploración de situaciones y formulación de conjeturas, verificación de propiedades, ilustración de propiedades o representaciones, realización de procedimientos algorítmicos y evaluación.

El tercer objetivo planteado, consistía en construir recursos GeoGebra situados en algunas de las categorías planteadas y realizar una serie de entrevistas basadas en tareas a partir de estos. Este objetivo también se cumplió a cabalidad, en tanto que propusimos 11 tareas, cada una de estas, mediadas por un recurso GeoGebra situado en algunas de las categorías propuestas. En este caso, privilegiamos las categorías 2, 3, 5 y 6, esto debido a los objetivos que establecimos para cada sesión y a los intereses respecto a los procesos que queríamos trabajar con los estudiantes. Estas once tareas fueron implementadas en cuatro sesiones, la implementación se dio a partir de las preguntas planteadas en la planeación general y en los casos en los que se presentaron contingencias, como investigadores reorientamos las situaciones, con el fin de conducir a los estudiantes a alcanzar los indicadores que evidenciarían el cumplimiento de las metas trazadas para las diferentes sesiones.

Consideramos que el cuarto objetivo, relacionado con el diseño de instrumentos de recolección y análisis de la información obtenida a partir de la implementación, a la luz de los marcos teóricos que fundamentan la investigación, también se cumplió. Esto debido a que, para llevar a cabo la recolección y análisis de la información obtenida a partir de la implementación, diseñamos un instrumento en el que recopilamos las transcripciones de las diferentes sesiones de clase. Además, en este mismo instrumento, señalamos a través de colores, las líneas en las que se evidenciaron comportamientos asociados a las diferentes acciones mentales del marco conceptual de la covariación; a cada acción mental se le asignó un color distinto. Ahora bien, para realizar el análisis desde el marco conceptual de Abstracción situada se construyó un conjunto de indicadores a partir de una tabla de doble entrada que relacionaba las acciones directas relacionadas en el recurso, con la evolución de la construcción del objeto matemático en una red de ideas propia de cada estudiante.

En cuanto al quinto objetivo, relacionado con determinar la incidencia que tuvieron los recursos GeoGebra diseñados en el desarrollo del pensamiento variacional, también se evidencia cumplimiento. Esto en tanto que, en el sexto capítulo, se presenta un análisis de cada una de las sesiones a partir de las herramientas analíticas de cada marco conceptual que fundamenta la investigación. En adición a lo anterior, se determinaron las ventajas que representó cada recurso para resolver las tareas planteadas y como estos fueron pertinentes en cuanto a las acciones que se podían realizar dentro de cada uno, así como los elementos de su programación que permitieron el correcto uso del mismo.

Para finalizar, consideramos que el objetivo general se cumplió a cabalidad. Esta afirmación se fundamenta en las razones expuestas en párrafos anteriores.

7.2. Generales de la investigación

Como conclusión general de la investigación, planteamos que, para lograr promover los procesos de cambio y variación, propios del pensamiento variacional, en una clase en la que se proponen tareas mediadas con recursos GGB, resultan relevantes los aspectos que siguen: (i) es importante que sin importar el tipo de recurso que se utilice, este propicie un ambiente de descubrimiento y experimentación; por ejemplo, en las intervenciones realizadas, se utilizó un recurso situado en la categoría de realización de procedimientos algorítmicos, pero no por esta razón, se dejó de lado el trabajo respecto a la interpretación y el análisis del objeto matemático en estudio; (ii) el profesor debe seleccionar cuidadosamente el tipo de recursos que va a utilizar a lo largo de una sesión, de modo que el uso de estos responda al objetivo que espera alcancen los estudiantes; (iii) el profesor debe reconocer que los resultados desde el punto de vista del desarrollo de procesos en el estudiante, no depende exclusivamente del tipo de recurso seleccionado, sino del cuidado con el que se diseñen las tareas y de la forma en que interactúe con los estudiantes, pues debe lograr que aprovechen al máximo las potencialidades que ofrece cierto tipo de recurso; (iv) el profesor debe cuestionar constantemente las afirmaciones, acciones o respuestas del estudiante, con el fin de lograr que las argumente, pues se puede caer en el error de validar comportamientos que Carlson y sus colaboradores denominan como *pseudoanalíticos.*

Respecto al marco conceptual de la covariación, concluimos que el nivel de alcance a las acciones mentales, no se presenta necesariamente de forma jerárquica, pues como se pudo evidenciar en la sesión 2, el nivel de alcance de AM1 fue bajo y en AM2 y AM3 fue medio. Sin embargo, las estudiantes lograron evidenciar todos los comportamientos propuestos en el indicador establecido para AM4. En adición a lo anterior, concluimos que los comportamientos asociados con las acciones mentales no se presentan en un orden exclusivo, es decir, que en cualquier momento de la sesión puede presentarse un comportamiento asociado con AM1, incluso al finalizar. Cabe resaltar, que cuando empezamos estudiar el funcionamiento de la herramienta analítica del marco conceptual de la covariación, nos cuestionamos si estos comportamientos se evidenciarían en un orden específico. Esto se debe a que la forma en la que se ilustraban algunos de los ejemplos presentados en la literatura, daban lugar a esta apreciación.

En algunas de las sesiones, percibimos que los estudiantes en su trayectoria escolar tenían la tendencia a memorizar fórmulas, esto se evidenció puntualmente en dos sesiones, en las que los estudiantes trataban de recitar la fórmula para hallar la pendiente de una recta dados dos puntos. Consideramos, que logramos hacer frente a esta dificultad, en tanto que, a lo largo de las sesiones, los estudiantes entendieron la pendiente como el cociente de los cambios en y y los cambios en x. Además, en la sesión 3, cuyo objetivo era hallar la fórmula para determinar la pendiente de un segmento dado, los estudiantes establecieron relaciones entre dichos cambios y lograron obtener la fórmula a partir del análisis de la representación gráfica presentada. En este sentido también reconocemos que el uso de diferentes sistemas de representación de un mismo objeto matemático favoreció que los estudiantes establecieran relaciones entre estos e interpretaran las situaciones propuestas de mejor manera. Adicionalmente, consideramos que el dinamismo promovido por los recursos GeoGebra a partir del movimiento de puntos, generación de rastro y uso de deslizadores, permitió desarrollar tareas que no habría sido posible ejecutar utilizado lápiz y papel. Teniendo en cuenta lo expuesto con antelación, concluimos que el uso de tecnologías digitales sí puede hacer frente a las dificultades reportadas por los autores mencionados en el capítulo 1.

Por último, consideramos que futuras investigaciones podría estudiarse la incidencia que tiene agrupar ciertos tipos de recurso para realizar una intervención sobre el mismo objeto matemático. Por ejemplo, podrían seleccionarse dos grupos (A y B) de estudiantes con características similares y diseñar una secuencia de tareas, alrededor de un mismo objeto matemático. En la intervención con el grupo A, utilizar recursos situados en las categorías 1, 3 y 5 y en la intervención con el grupo B utilizar recursos situados en las categorías 2, 4 y 6. Al llevar a cabo este trabajo en diferentes sesiones, con diferentes formas de agrupar los recursos, se podría determinar, qué potencialidades o limitaciones tienen lugar en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

7.3. Aportes generales al ejercicio investigativo

En los párrafos que siguen, mencionamos los aportes que consideramos nos brindó esta investigación en nuestra formación como profesores de matemáticas e investigadores.

El proceso que llevamos a cabo a lo largo de esta investigación nos permitió reflexionar sobre nuestras propias prácticas y a su vez, nos brindó herramientas que nos permitieron optimizarlas y enriquecerlas. Pues reconocimos la importancia que tiene conocer las potencialidades y limitaciones de una herramienta tecnológica, con el fin de discernir cuál es el momento adecuado de llevarla al aula. Así como el impacto que tiene la interacción del profesor con los estudiantes, para que los resultados sean exitosos.

La participación como ponentes en algunos eventos, nos permitió perfeccionar nuestras habilidades escriturales y comunicativas, en tanto que tuvimos la necesidad de formular documentos bajo los lineamientos propuestos por una comunidad académica. Además, tuvimos la posibilidad de dar a conocer algunos resultados parciales de nuestra investigación, que fueron enriquecidos por los aportes de algunos colegas con intereses comunes.

La construcción de un conjunto de indicadores que pueden describir las acciones realizadas en un recurso en función de la evolución del objeto matemático que se adquiere, es uno de los elementos sobresalientes de este estudio, debido a que al realizar una consulta bibliográfica del marco de abstracción situada, se evidenció la falta de un conjunto de indicadores que permitieran el uso de este marco de manera solida en pro de la realización de un análisis. Sin embargo, es importante resaltar que esta es una propuesta que hacemos y que puede ponerse a discusión y mejora constante, y proponemos como futuro estudio, un posible perfeccionamiento de estas.

REFERENCIAS

Armella, L. M., & Waldegg, G. (2001). Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas.

Araya, R. G. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*.

Boon, P. (2006). Designing didactical tools and micro-worlds for mathematics education. In *C. Hoyles, JB Lagrange, LH Son, & N. Sinclair, Proceedings of the 17th ICMI Study Conference*.

Camargo, L. y Guzman, A. (2005). Elementos para una didactica del pensamiento variacional. Paidos, Bogota D.C. Colombia.

Camargo, L. (2018.). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática* (documento sin publicar). Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista Ema*, *8*(2), 121-156.

Carlson, M., Oehrtman, M., & Engelke, N. (2010). The precalculus concept assessment: A tool for students' reasoning abilities and understandings. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 113-145.

Cuevas, C. A., Rodríguez, A., & González, O. (2014). Introducción al concepto de derivada de una función real con apoyo de las tecnologías digitales.

Díaz Barriga, F. (1999). Cognicion situada de estrategias para el aprendizaje significativo. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *5*(2), 1–13. https://doi.org/115207136

Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., … Meagher, M. (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (Vol. 13). https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0

Durmus, S., & Karakirik, E. (2006). Virtual Manipulatives in Mathematics Education: A Theoretical Framework. *Turkish Online Journal of Educational Technology-TOJET*, *5*(1), 117-123.

Fiallo, J., & Parada, S. (2018). Estudio dinámico del cambio y la variación. *Curso de Precálculo por GeoGebra. Colombia: Ediciones UIS*.

Fiallo, J., & Parada, S. E. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Revista científica*, *3*(20), 56-71.

Giordano, M., Moctezuma, O., & Garnica, I. (2015). Razón de cambio e identificación del movimiento.

Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. *Informática Educativa*, *10*(1), 93-111.

Gómez, P., & Carulla, C. (1998). De lo simbólico a lo gráfico. Efectos de la tecnología en la educación matemática.

González, J. L., Chávez, O. R., Ochoa, E. J. L., López, J. V. B., & Álvarez, M. C. S. (2016). Comprensión del concepto de la derivada como razón de cambio. *Cultura Científica y Tecnológica*, (51).

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 57-72.

Hershkowitz, R., Schwarz, B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context : Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 195–222. https://doi.org/10.2307/749673

Hoyles, C., & Lagrange, J. B. (2010). *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain*. New York, NY: Springer.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 275-304). Brill Sense.

Monaghan, J., Trouche, L., & Borwein, J. M. (2016). *Tools and Mathematics* (Vol. 110). https://doi.org/10.1007/978-3-319-02396-0

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Serie Lineamientos curriculares. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia [MEN]. (2004). Pensamiento variacional y tecnologías computacionales. Bogotá, Colombia: Enlace Editores Ltda.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas. En MEN, Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: MEN.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Noss, R., & Hoyles, C. (1987). Seeing What Matters: Developing an Understanding of the Concept of Parallelogram Through a Logo Microworld. *Archaeological News Letter*, (4), 57–60.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings : learning cultures and computers*. *Mathematics education library*. https://doi.org/10.1016/0304-3894(93)E0048-7

Parada, S. E., Conde, L. A., & Fiallo, J. (2016). Mediación digital e interdisciplinariedad: una aproximación al estudio de la variación. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(56), 1031-1051.

Pratt, D., & Ainley, J. (1997). The construction of meanings for geometric construction: Two contrasting cases. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1*(3), 293–322. https://doi.org/10.1007/BF00182619

Psycharis, G. (2006). Dynamic Manipulation Schemes of Geometrical Constructions: Instrumental Genesis As an Abstraction Process. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 385–392.

Rodríguez, C., Fiallo, J., & Parada, S. E. (2018). Habilidades Cognitivas en los niveles de Razonamiento Covariacional para el estudio de la derivada como razón de cambio. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *3*(1), 34-36.

Ruthven, K., Hennessy, S., & Deaney, R. (2005). Incorporating Internet resources into classroom practice: pedagogical perspectives and strategies of secondary-school subject teachers. *Computers & Education*, *44*(1), 1-34.

Saldanha, L. A., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In *North Carolina State University*.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *11*(2), 267-296.

Sinclair, N., & Yerushalmy, M. (2016). Digital Technology in Mathematics Teaching and Learning. *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, (1), 235–274. Retrieved from http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-6300-561-6_7

Trouche, L., & Drijvers, F. P. (2014). Webbing and orchestration, 1–18.

Villa Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas.

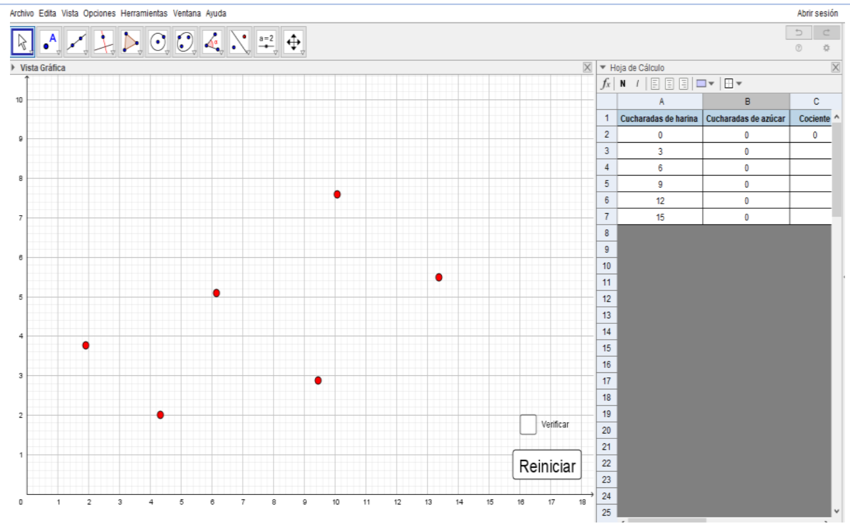
Wood, D., Bruner, J. S., & Ross, G. (1976). the Role of Tutoring in Problem Solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *17*(2), 89–100. https://doi.org/10.1111/j.1469-

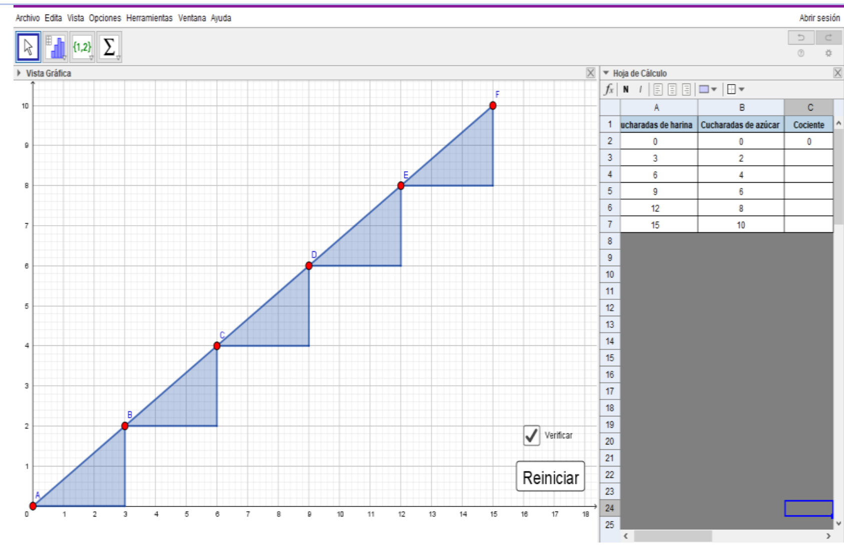
ANEXOS

Anexo 1: Planeación de tareas.

Análisis de las características de curvas a partir de la razón de cambio

Sesión	Fecha	Objetivo	Descripción	Niveles de covariación	Abstracción situada
1	23/09/19	***Pendiente – Razón de cambio constante*** Realizar una introducción general a la pendiente, entendida como avance vs subida, o bien, como el cambio entre dos diferencias $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$. Esto con el fin de trabajar la razón de cambio instantánea.	**<u>Recurso 1</u>** Se presenta a los estudiantes el siguiente enunciado: *Para preparar un postre se debe agregar dos cucharadas de azúcar por cada tres cucharadas de harina* Se solicita abrir el archivo de GeoGebra llamado "Tarea 1 – S1" que se encuentra en el escritorio del computador. En la imagen se muestra lo que encontrarán los estudiantes al abrirlo:	**<u>Recurso 1:</u>** Se considera que con este recurso los estudiantes podrán evidenciar comportamientos asociados con AM1, AM2 y AM3. Estos se describen a continuación: **AM1:** Los estudiantes coordinan el valor de una variable con los cambios de la otra. Esto se puede evidenciar cuando designan	**<u>Recursos 1, 2 y 3:</u>** Las acciones que los estudiantes realicen en el medio y las relaciones que sean capaces de establecer entre estas y sus conocimientos permitirán encasillarlos en alguno de los 16 niveles propuestos dentro del marco teórico de Abstracción Situada, sin embargo; es difícil

			 En primer lugar, se solicitará leer el enunciado presentado, observar la tabla que se encuentra en la hoja de cálculo de GeoGebra y completar la segunda columna de esta; teniendo en cuenta el enunciado mencionado previamente. Después, se indicará a los estudiantes que deberán representar los datos ingresados en la tabla, en el plano cartesiano y que para esto, deben mover los puntos rojos que se encuentran en pantalla y ubicarlos con las coordenadas que crean adecuadas. Enseguida, se pedirá dar clic en la casilla "verificar" y se preguntará si al activar la casilla aparecieron algunos puntos de color azul. Si **no** aparecen dichos puntos, se explicará a los estudiantes que ingresaron los valores correctos y se mostrará en pantalla lo siguiente:	correctamente los ejes coordenados al mover los puntos en el plano cartesiano y ubicarlos de modo que estos representen los datos ingresados en la tabla: Cucharadas de harina en el eje x y cucharadas de azúcar en el eje y. **AM2:** Los estudiantes verbalizan que a medida que aumenta la cantidad de cucharadas de harina para realizar el postre, también aumenta la cantidad de cucharadas de azúcar que se necesitan. ***AM3*:** Los estudiantes coordinan la magnitud del cambio de las cucharadas de harina con la magnitud del cambio de las cucharadas de azúcar. Un indicador de	definir a ciencia cierta si x acción llevará al estudiante a construir o transformar, o no cierta noción matemática hasta saber qué es lo que verbaliza mientras desarrolla tal acción. Es por esto por lo que aquí no aparece una descripción del nivel en cual puede encontrarse un estudiante, porque así como podría estar en el primer nivel también podría estar en el nivel 16.



Si los estudiantes ingresan en la tabla valores erróneos, aparecerán puntos azules y los triángulos de la imagen anterior, no se formarán de esa manera. Si esto sucede, el docente intervendrá y, retomando la información del enunciado, preguntará a los estudiantes:

¿Si no se usa ninguna cucharada de harina, se debe utilizar alguna cucharada de azúcar?
Según el enunciado, ¿cuántas cucharadas de azúcar se deben mezclar con 3 cucharadas de harina?

Para la siguiente fila, en la que se pregunta por la cantidad de cucharadas de azúcar que se deben mezclar con 6 cucharadas de harina, el docente preguntará, cuántos grupos de tres cucharadas de harina de pueden formar con 6 de estas y cuántas cucharadas de azúcar le corresponden a cada grupo de tres.

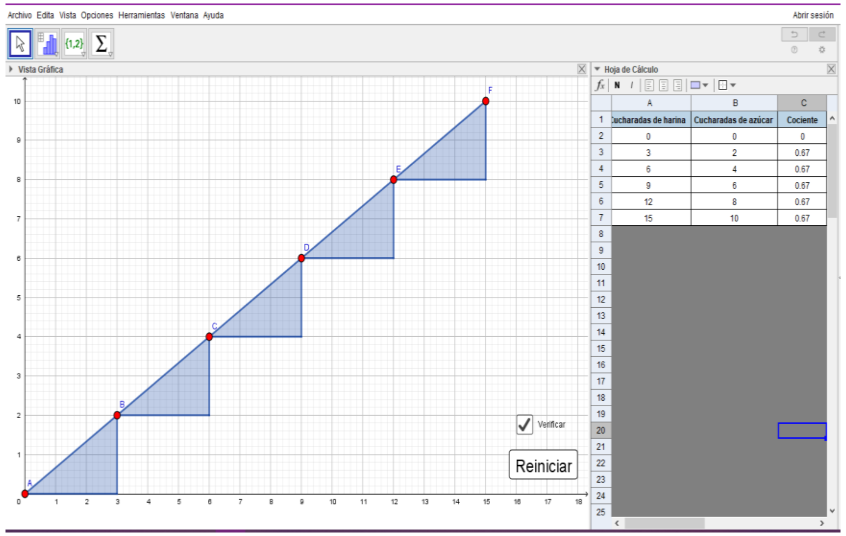
esto es que reconozcan que las magnitudes covarían de manera constante.

AM4:
Esta acción no es alcanzada por los estudiantes mediante esta actividad debido a que la razón entre los cambios es constante y por tanto una razón de cambio promedio no sería evidenciada.

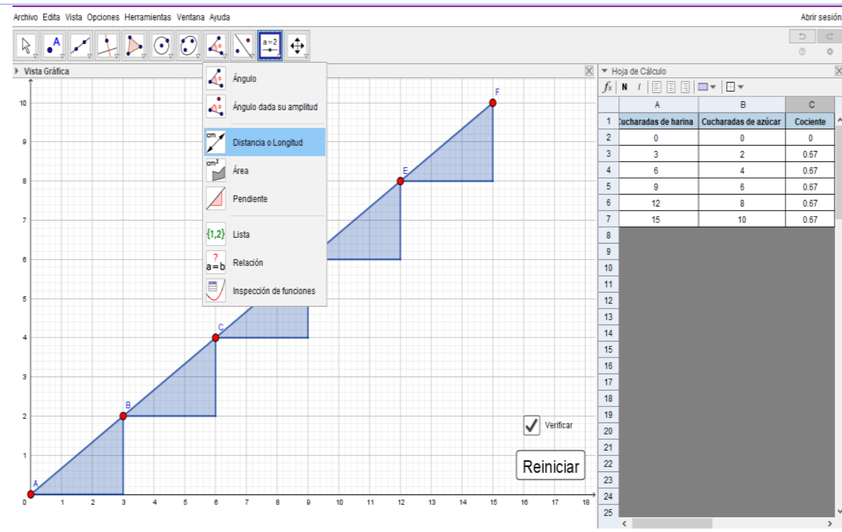
AM5:
De manera similar, esta acción no es alcanzada por los estudiantes, pues la razón de cambio trabajada en esta tarea no es la razón de cambio instantánea, sino una razón constante entre los cambios en las magnitudes.

			Se espera que con lo anterior, los estudiantes logren hacer el registro de los datos correctos en la tabla. Luego se preguntará a qué eje coordenado corresponde cada una de las magnitudes involucradas en la tarea. Se espera que los estudiantes observen los puntos que aparecieron en el plano cartesiano, den cuenta y razón de las coordenadas de estos y las relacionen con los datos de la tabla. De modo que concluyan que las cucharadas de harina están ubicadas en el eje x y las cucharadas de azúcar en el eje y. De no ser así, el docente solicitará a los estudiantes escribir las coordenadas de cada uno de los puntos azules que aparecen en pantalla y a su vez, compararlas con los valores de la tabla. Seguido a esto, se cuestionará a los estudiantes respecto a los cambios que sufre cada una de las magnitudes y cómo cambia una respecto a la otra: Entre más grande sea el postre, ¿se necesitarán más o menos cucharadas de harina? ¿y de azúcar? ¿Qué sucede con la cantidad de cucharadas de azúcar a medida que aumenta la cantidad de cucharadas de harina? Se espera que los estudiantes den cuenta y razón de que a medida que aumenta la cantidad de cucharadas de harina, también aumentan las cucharadas de azúcar. De no ser así, se solicitará observar fila a fila la tabla que se encuentra en la hoja de cálculo y la representación gráfica en el plano cartesiano. Después se pedirá a los estudiantes hallar el cociente entre la cantidad de cucharadas de azúcar y la cantidad de cucharadas de harina. Para esto, se indicará que deben dar clic en la		

celda C3 y escribir la fórmula $= B3/A3$; después deben hacer clic en la esquina inferior derecha de la celda C3 y arrastrar el cursor hasta la celda C7.



Seguido a esto se indicará que con ayuda de la herramienta *Distancia o longitud* deberán medir la base y la altura de los triángulos que aparecieron en pantalla.



Se aclarará que para tomar dicha medida deben dar clic sobre cada uno de los segmentos (base y altura).

Se preguntará qué significado tienen las medidas de la base y la altura de los triángulos, en términos de los cambios de las magnitudes que intervienen en la tarea propuesta. Se espera que los estudiantes relacionen la medida de la base (3 unidades) y la medida de la altura (2 unidades), con las magnitudes involucradas en el enunciado propuesto. Además, a partir de lo anterior, se espera concluir que la medida de la altura de los triángulos representa el cambio en *y*, es decir, el cambio que presenta la segunda magnitud (cucharadas de azúcar) y que la medida de la base de los triángulos representa el cambio en *x*, o sea, el cambio que experimenta la primera magnitud (cucharadas de harina). Se explicará que el cociente entre estos dos cambios es la pendiente de la recta que pasa por cada uno de los puntos cuyas coordenadas corresponden a las magnitudes dadas. Se pedirá realizar dicho cociente y se sugerirá apoyarse de la hoja de cálculo para llevar a cabo esta acción. Se espera que los estudiantes evidencien que la pendiente se corresponde con el cociente registrado en la tercera columna de la tabla con anterioridad. La aplicación de esta tarea tiene como finalidad introducir el concepto de pendiente.

El recurso utilizado se encuentra situado en la segunda categoría*: Exploración de situaciones y formulación de conjeturas*. Puesto que los estudiantes generan una construcción a partir de la exploración del recurso y además deben dar cuenta y razón de algunas conclusiones sobre el comportamiento del objeto matemático de estudio, que en este caso es la pendiente.

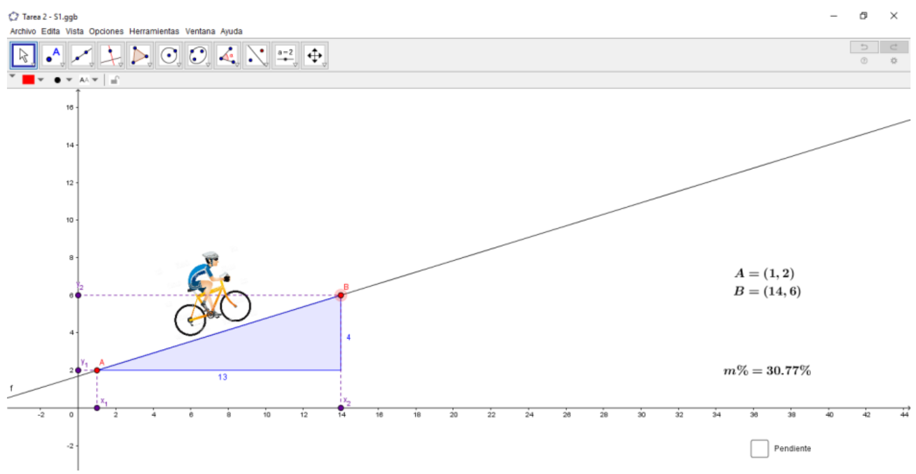
<u>Recurso 2</u>

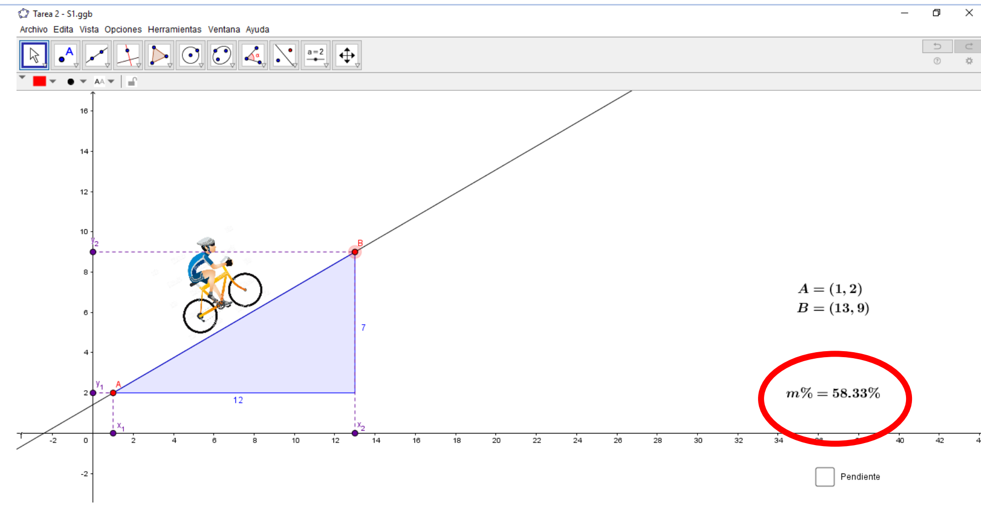
Se presenta una situación en la que el estudiante tendrá el siguiente enunciado:

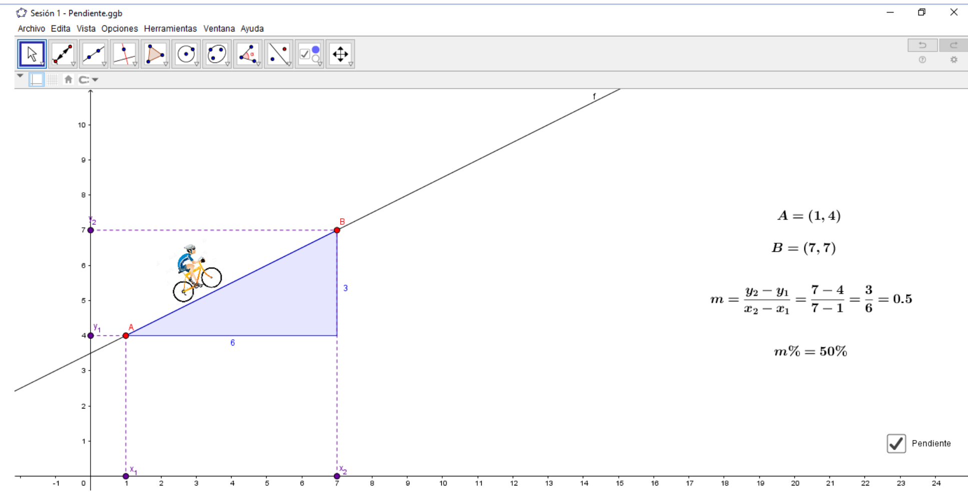
El porcentaje de inclinación de una calle está dada por la razón entre la cantidad de altura recorrida en ascenso o descenso y la distancia que nos desplazamos horizontalmente, esto multiplicado por 100.

Actualmente, la calle con mayor porcentaje de inclinación en el mundo se encuentra en la ciudad de Dunedin en Nueva Zelanda, cuya inclinación es del 35%.

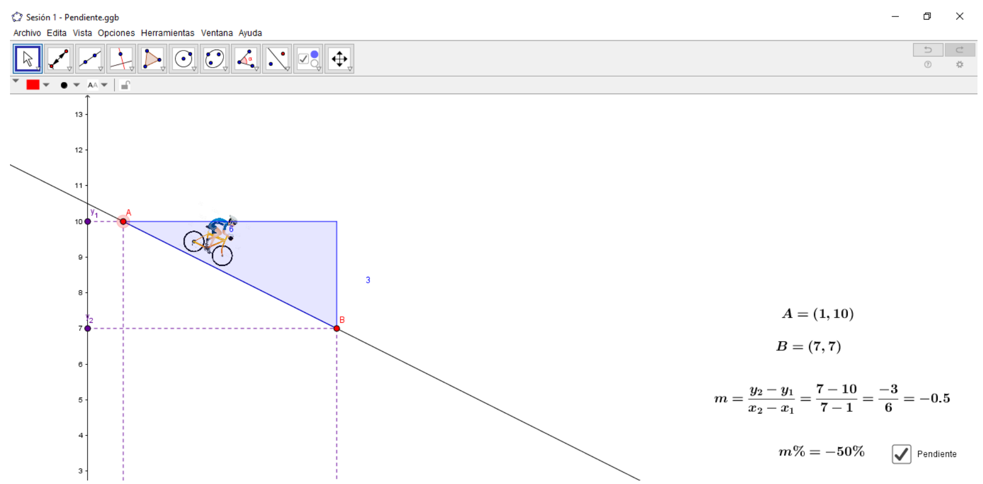
- *Si un ciclista quisiera subir o bajar por esta calle, ¿Cuál sería la cantidad de metros que avanzaría VS la cantidad de metros que sube o baja?*
- *En una calle cuyo avance es de 20 metros mientras su subida es de 10 metros, ¿Cuál es el porcentaje de inclinación? ¿Es mayor o menor que el porcentaje de inclinación que la calle de Dunedin?*
- *¿Cuál es el menor porcentaje de inclinación no negativo posible y cómo puede interpretarse?*

			- *¿Cómo puede interpretarse el porcentaje en términos de avance VS subida o avance VS bajada?* Se solicita abrir el archivo de GeoGebra llamado “Tarea 2 – S1” que se encuentra en el escritorio del computador. En la imagen se muestra lo que encontrarán los estudiantes al abrirlo:  En primer lugar, se pedirá a los estudiantes que exploren el recurso con el propósito de responder las preguntas solicitadas en primer momento. Para esto moverán los puntos A y B, los cuales solamente toman valores de coordenadas enteras, de tal suerte que la interpretación de la pendiente sea más acertada. En pantalla aparecen las coordenadas de los puntos A y B y el porcentaje de la pendiente, el cual cambia a medida que cambia la inclinación de la recta.	**<u>Recurso 2:</u>** ***<u>AM1:</u>*** Los estudiantes son capaces de coordinar los cambios de una variable con los cambios de la otra. Esto se puede evidenciar cuando los estudiantes dan cuenta y razón de que para encontrar la cantidad de metros que debe avanzar y subir un ciclista para pasar por la calle más inclinada del mundo, deben hallar el cociente entre la distancia de subida y la distancia de avance, o bien, cuando son conscientes de que deben hacer uso de la fórmula de la pendiente de una recta.	

			 Luego de esto, se pedirá a los estudiantes activar la casilla *Pendiente*, allí aparecerá la relación entre el avance y subida, representada mediante la fórmula de pendiente y que da el valor decimal de esta, el cuál es usado para encontrar el porcentaje. Se espera que con esto los estudiantes recuerden las propiedades de la pendiente y vean la diferencia de $x_2 - x_1$ y $y_2 - y_1$ como las distancias recorridas tanto horizontal como verticalmente y la pendiente como la razón entre estas.	***AM2:*** En esta actividad los estudiantes tendrán que manipular una recta en la que se representan sus cambios, tanto horizontales (ΔX), como verticales (ΔY). Y se espera que verbalicen el cómo interpretan la dirección de estos cambios en términos avance vs subida. ***AM3:*** Los estudiantes son capaces de relacionar los cambios horizontales con los cambios verticales, y estas relaciones están expresadas a partir de la cuantificación de dichos cambios. ***AM4:*** Esta acción no es alcanzada por los	



Las interpretaciones que den los estudiantes en estos casos dependen de las acciones que realicen en el recurso y de como interpreten las relaciones entre las diferencias y la razón de tales diferencias.



estudiantes mediante esta actividad debido a que la razón entre los cambios de avance y subida o bajada son constantes si la pendiente se mantiene y las distancias cambian.

AM5:

De manera similar, esta acción no es alcanzada por los estudiantes, pues al igual que en la tarea anterior, la razón de cambio trabajada no es una razón de cambio instantánea, sino una razón constante entre los avances.

Respecto a la primera y segunda pregunta, se espera que los estudiantes usen el recurso, buscando una inclinación que les dé como resultado el 35% o muy próxima, y así identifiquen la cantidad de distancia avanzada y la cantidad de distancia subida o bajada.

De no ser así, el docente intervendrá formulando preguntas que orienten a los estudiantes a buscar eso, por ejemplo:

- ¿En qué momento el porcentaje de la pendiente crece y en qué momento decrece?

Se espera que la respuesta sea que al "subir" el punto B o "bajar" el punto A, la pendiente crece, y viceversa. Esto les dará indicios de que al mover los puntos con ciertas direcciones podrán encontrar la pendiente que buscan.

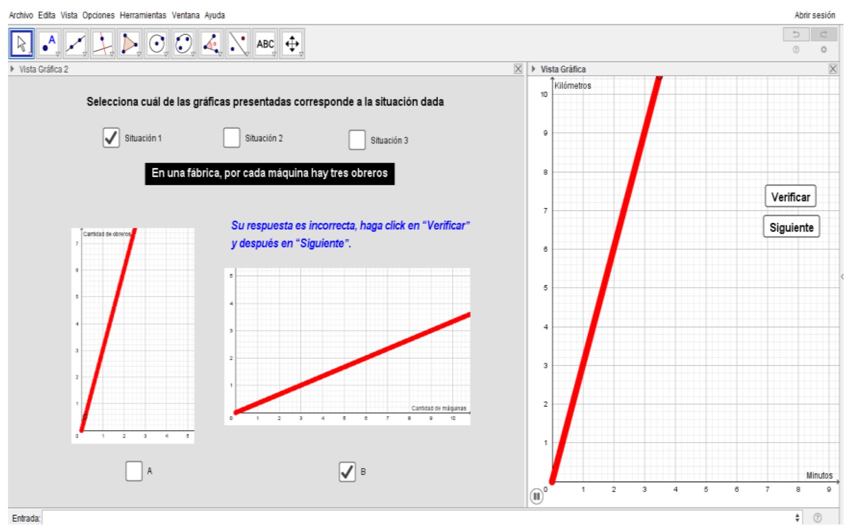
Respecto a la tercera pregunta, se espera que los estudiantes afirmen que la menor inclinación no negativa posible es del 0%, y que esta se da cuando solo se avanza horizontalmente y no hay avance vertical, es decir, no hay subida ni bajada. Se espera que esto se asocie con un "cambio nulo" de subida o bajada.

De no ser así, el docente intervendrá formulando preguntas que orienten al estudiante a buscar eso, por ejemplo:

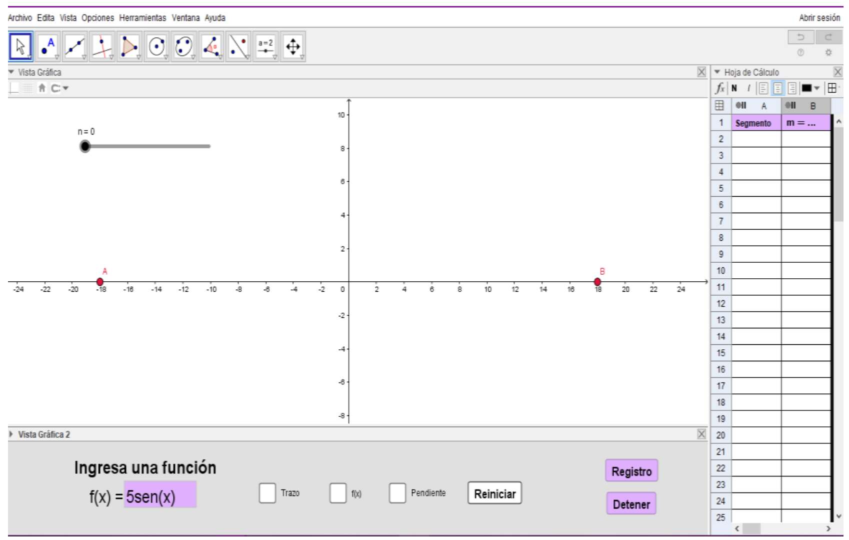
- ¿Cuál es el cambio que tiene la distancia horizontal y cuál es el cambio que tiene la distancia vertical?

Se espera que sea una respuesta de "no hay cambio porque no hay subida" o alguna respuesta similar, lo que nos conduce a lo buscado.

			La última pregunta está abierta a interpretaciones en las que varias pueden ser correctas, por ejemplo, se esperaría que se responda que: - El avance vertical es el $m\%$ del avance horizontal. - A mayor avance y menor subida, el porcentaje de la pendiente es menor. - A menor avance y mayor subida, el porcentaje de la pendiente es mayor. Entre otras que puedan surgir. Todas las preguntas del docente estarán orientadas a que estas interpretaciones sean las obtenidas al final. Este recurso está situado en la categoría *“Verificación de propiedades”*, pues a partir de las nociones construidas con el recurso anterior se pretende verificar la noción de pendiente, en este caso vista como porcentaje de inclinación de una carretera sobre la cual debería desplazarse un ciclista. El recurso permite al estudiante activar una casilla que muestra una fórmula que apoyará la verificación que está realizando y será de ayuda para las respuestas que vaya a dar a las preguntas **<u>Recurso 3</u>** Este recurso está situado en la categoría *“Evaluación”*, puesto que como lo indica su nombre, será utilizado como herramienta de evaluación de los estudiantes. Se presentan tres situaciones diferentes y se espera que, a partir del enunciado, los estudiantes identifiquen la gráfica que corresponde a la situación planteada. Para esto podrán elegir cuál de las dos gráficas tiene la pendiente correcta, por tal razón, cuentan con casillas de verificación. Una vez los estudiantes hagan su elección, el recurso les indicará si su respuesta es o no correcta y les dará la posibilidad de verificarla, mediante el rastro de un punto que trazará la gráfica que mejor representa la situación dada.	**<u>Recurso 3:</u>** Se considera que, con este recurso, los estudiantes podrán mostrar comportamientos asociados con AM1, AM2	

			Cabe aclarar que, en este caso, no bastará con que los estudiantes seleccionen la respuesta correcta, además, deberán sustentarla con argumentos a los entrevistadores. Cuando los estudiantes elijan una de las opciones para dar respuesta a la situación propuesta, los entrevistadores indagarán sobre el porqué de la elección. Allí se espera que los estudiantes en primer lugar hagan alusión a las magnitudes involucradas y su correspondencia con los ejes coordenados. Seguido a esto a los cambios que sufre la magnitud *x* respecto a los cambios que experimenta la magnitud *y*. En tercer lugar, se espera que aludan a la cuantificación del cambio, indicando cuál es la pendiente de la recta que representa la situación propuesta.  Cuando los estudiantes interactúen con el recurso, será posible identificar comportamientos asociados a AM1, AM2 y AM3 como mínimo y por lo tanto el logro esperado es el nivel 3 de covariación.	y AM3. Estos se describen a continuación: ***<u>AM1:</u>*** Los estudiantes coordinan el valor de una variable con los cambios de la otra. Esto se puede evidenciar cuando al seleccionar la gráfica argumentan aludiendo correctamente a la magnitud representada en el eje x y a la magnitud representada en el eje y. ***<u>AM2:</u>*** Los estudiantes verbalizan que a medida que aumenta la magnitud x, también aumenta la magnitud y. O bien, que a medida que disminuye la magnitud x, también lo hace la magnitud y. ***<u>AM3:</u>*** Los estudiantes coordinan la magnitud del cambio de	

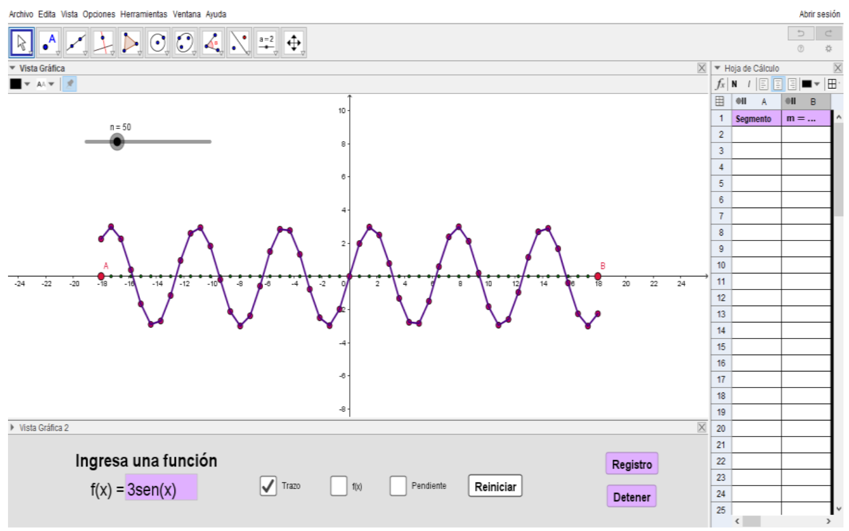
				la magnitud x con la magnitud y. Un indicador de esto es que reconozcan que las magnitudes covarían de manera constante. Además, que sepan dar cuenta y razón del valor de la pendiente para cada situación. ***AM4 – AM5:*** De manera similar que en las tareas anteriores, con esta tarea se busca que los estudiantes coordinen los cambios de magnitud x con los cambios de la magnitud y, estos cambios son constantes y por tanto la razón entre estos también lo es, por tanto no es alcanzable una razón de cambio promedio o instantánea, lo cual es necesario para alcanzar las acciones 4 y 5.	

2	30/09/19	***Función entendida como la unión de segmentos*** Trabajar el concepto de función entendida como la unión de segmentos, de modo que, al obtener la pendiente de cada uno de los segmentos, sea posible analizar la variación de la razón de cambio en una función y a partir de esta empezar a trabajar características de la función como crecimiento, decrecimiento, extremos (máximos y mínimos) y puntos de inflexión.	**<u>Recurso 1:</u>** Se pedirá a los estudiantes abrir el archivo Tarea 1 – S2 que se encuentra en el escritorio del computador. La interfaz que encontrarán inicialmente es la siguiente:  En primer lugar, se solicitará a los estudiantes que ingresen en la casilla de entrada la función $f(x) = 3sen(x)$. Seguido a esto, se pedirá que activen la casilla “Trazo” y que muevan el deslizador *n* para responder las siguientes preguntas: Teniendo en cuenta que los puntos que aparecen sobre la gráfica la dividen en cierta cantidad de partes, responde: **a.** ¿En cuántas partes queda dividida la gráfica cuando el deslizador toma el valor de 6? **b.** ¿En cuántas partes queda dividida la gráfica cuando el deslizador toma el valor de 10?	**<u>Recurso 1:</u>** Se considera que, con este recurso, los estudiantes podrán mostrar comportamientos asociados con AM2, AM3 y AM4. Estos se describen a continuación: ***<u>AM2:</u>*** Los estudiantes reconocen que cuando el valor del deslizador n aumenta, también aumenta el número de segmentos que aparecen en pantalla y van formando la curva. Además, reconocen que entre mayor sea la cantidad de segmentos que aparecen, mayor es la aproximación de la unión de estos a la curva ingresada. ***<u>AM3:</u>*** Los estudiantes asocian las pendientes positivas y negativas de los segmentos	

c. ¿En cuántas partes queda dividida la gráfica cuando el deslizador toma el valor de 13?

d. ¿En cuántas partes queda dividida la gráfica cuando el deslizador tome el valor de 60?

e. Mueve el deslizador y responde: ¿Qué sucede cuando *n* va aumentando su valor? Describe la gráfica que se forma ¿La reconoces?



Después de esto se solicitará activar la casilla “$f(x)$”.

Se pedirá a los estudiantes registrar sus respuestas en una hoja y después de esto se solicitará hacer un procedimiento similar al anterior, pero introduciendo otras funciones. Se solicitará hacer clic en el botón “reiniciar” y después, se pedirá ingresar en la casilla de entrada la función $f(x) = |x|$. Luego, con la casilla “Trazo” activa mover el deslizador para responder las siguientes preguntas:

con la posición de estos, reconocen que los segmentos cuya pendiente es positiva, están inclinados hacia la derecha y los segmentos con pendiente negativa están inclinados hacia la izquierda.

AM4:

Los estudiantes asocian el signo de las pendientes de los segmentos con los comportamientos de crecimiento y decrecimiento den diferentes intervalos de la función.

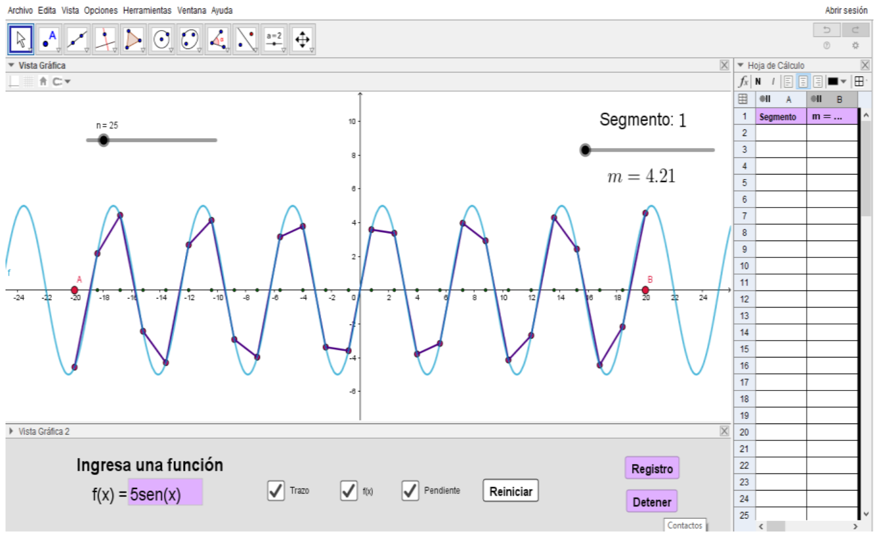
AM5:

La acción 5 no es alcanzable con esta tarea, pues la razón de cambio trabajada puede reconocerse como una

			a. ¿En cuántas partes queda dividida la gráfica cuando el deslizador toma el valor de 8? **b.** ¿En cuántas partes queda dividida la gráfica cuando el deslizador toma el valor de 14? **c.** ¿En cuántas partes queda dividida la gráfica cuando el deslizador toma el valor de 23? **d.** ¿En cuántas partes crees que quedará dividida la gráfica cuando el deslizador tome el valor de 100? **e.** ¿Qué sucede cuando el deslizador va aumentando su valor? Describe la gráfica que se forma ¿La reconoces? Después de esto se pedirá activar la casilla "$f(x)$". Posteriormente, se pedirá hacer clic en el botón reiniciar e ingresar en la casilla de entrada la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Después se solicitará responder las siguientes preguntas: **a.** ¿Qué sucede cuando el deslizador va aumentando su valor? Describe la gráfica que se forma ¿La reconoces? Explica. **b.** ¿Qué aparece en pantalla cuando activas la casilla $f(x)$? ¿Consideras que es correcta la respuesta que diste en el ítem **a**? Explica. **c.** ¿En cuántas partes queda dividida la gráfica de la función cuando el deslizador toma el valor de 108? Después de esto se pedirá activar la casilla "$f(x)$". Se espera que, a partir de lo anterior, los estudiantes evidencien que el deslizador *n* representa la cantidad de partes que componen la gráfica de la función que está siendo ingresada y que	razón de cambio promedio, para el alcance de esta acción es necesario reconocer los cambios instantáneos y la relación entre estos.	

a medida que n aumenta, la gráfica que aparece en pantalla es más aproximada a la gráfica de la función ingresada.

Los docentes explicarán a los estudiantes que una de las ideas sostenidas por quienes fueron precursores en el estudio del Cálculo, es que toda función es una figura poligonal formada por infinitos segmentos de tamaño infinitamente pequeño. Después solicitarán a los estudiantes hacer clic en el botón “Reiniciar” e ingresar la función: $5sen(x)$ en la casilla de entrada de la parte inferior del recurso. Además, se pedirá activar las casillas “$f(x)$” y “Pendiente”. También se pedirá llevar el deslizador n hasta el valor 25

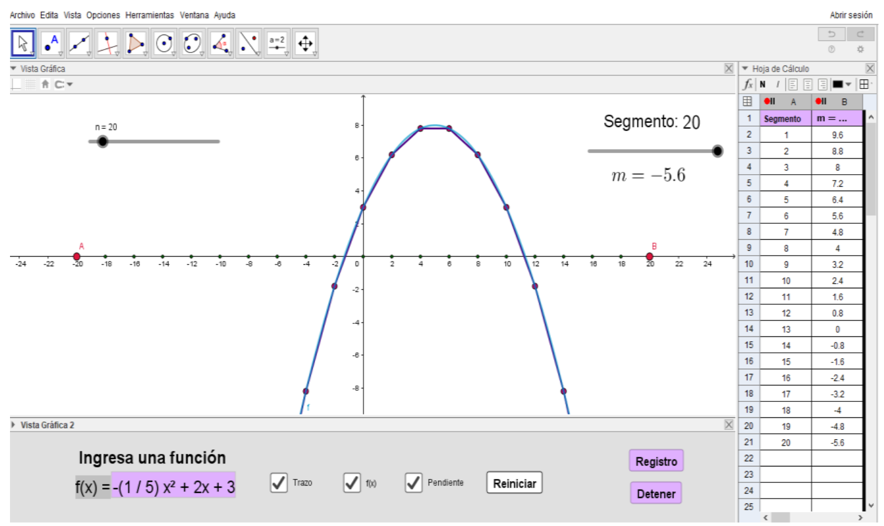


Luego se solicitará dar clic sobre las celdas A y B de la hoja de cálculo, y hacer clic sobre el botón “Registro”, una vez los estudiantes hagan esto se empezarán a registrar en la columna A, los números del 1 al 25; estos representan cada una de las partes en que está dividida la gráfica. En la columna B aparecerán las pendientes de cada una de estas partes.

			Se explicará a los estudiantes que deben empezar a contar las partes en que queda dividida la gráfica de izquierda a derecha y que los datos que aparecen en la columna B son las pendientes de cada una de ellas. Se pedirá observar estos datos con atención y compararlos con la representación gráfica de la función. Luego se preguntará: ¿Qué característica tienen los segmentos cuya pendiente es positiva? ¿Qué sucede con la gráfica de $f(x)$ en este caso? ¿Qué característica tienen los segmentos cuya pendiente es negativa? ¿Qué sucede con la gráfica de $f(x)$ en este caso? Se propondrá realizar el mismo ejercicio con otra función distinta. Para esto, se pedirá a los estudiantes: 1. Hacer clic sobre las celdas A y B con el fin de desactivar el registro en hoja de cálculo 2. Borrar todos los datos registrados en la hoja de cálculo 3. Hacer clic en el botón “Reiniciar”. 4. Ingresar la función $-\frac{1}{5}x^2 + 2x + 3$ 5. Colocar el deslizador n en 20 6. Hacer clic sobre las celdas A y B con el fin de activar el registro en hoja de cálculo 7. Hacer clic en el botón “Registro” Luego, se pedirá a los estudiantes comparar la gráfica con las pendientes obtenidas y se preguntará:		

¿Qué signo tienen las pendientes de los 12 primeros segmentos? ¿Qué sucede con la gráfica de $f(x)$ en este caso?

¿A cuánto equivale la pendiente del segmento número 13? ¿Por qué creen que toma ese valor?
¿Qué signo tienen las pendientes de los segmentos restantes? ¿Qué sucede con la gráfica de $f(x)$ en este caso?
¿Qué relación encuentran entre el ejercicio realizado con la función $5sen(x)$ y esta función?

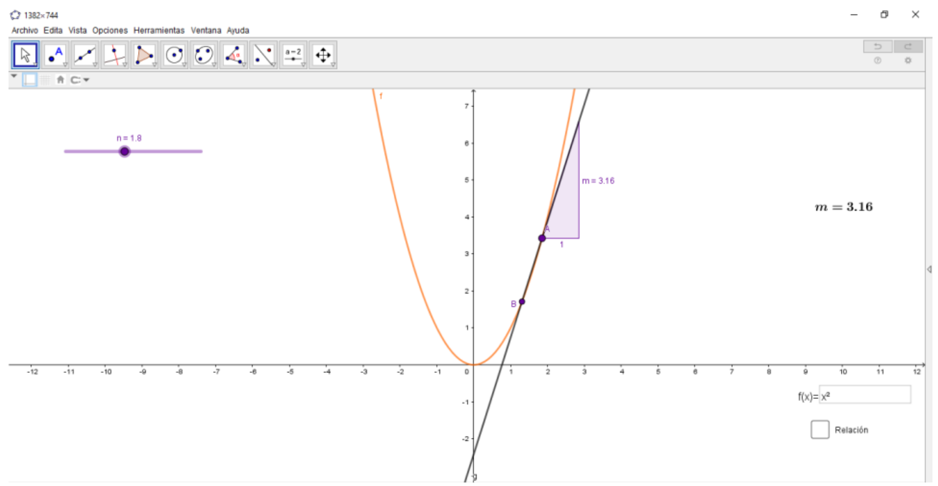


Se espera que, a partir de lo anterior, los estudiantes den cuenta y razón de que en los tramos en los que la función es creciente, la pendiente es positiva y en los tramos en los que la función es decreciente la pendiente es negativa.

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>

<u>Recurso 2:</u>

Se pedirá a los estudiantes abrir el archivo Tarea 2 – S2 que se encuentra en el escritorio del computador. La interfaz que encontrarán inicialmente es la siguiente:



Al estar la función compuesta por segmentos, pueden considerarse rectas secantes sobre las funciones y analizar el comportamiento de las funciones a partir de estas

Responda las siguientes preguntas:

- **¿Al mover el deslizador n qué sucede en la representación?**

Se espera que los estudiantes respondan que la distancia entre los puntos A y B cambia según aumente o disminuya el deslizador.
Puede ocurrir que respondan que la recta cambia de posición o dirección, para solventar esto, el profesor hará nuevamente la pregunta, centrándola en el comportamiento de los puntos. Buscando así, la respuesta esperada.

- **¿Al mover el punto A qué sucede en la representación?**

</td>
<td>

<u>Recurso 2:</u>

Se considera que, con este recurso, los estudiantes podrán mostrar comportamientos asociados con AM1, AM2, AM3 y algunos indicios de la AM4. Estos se describen a continuación:

<u>AM1:</u>

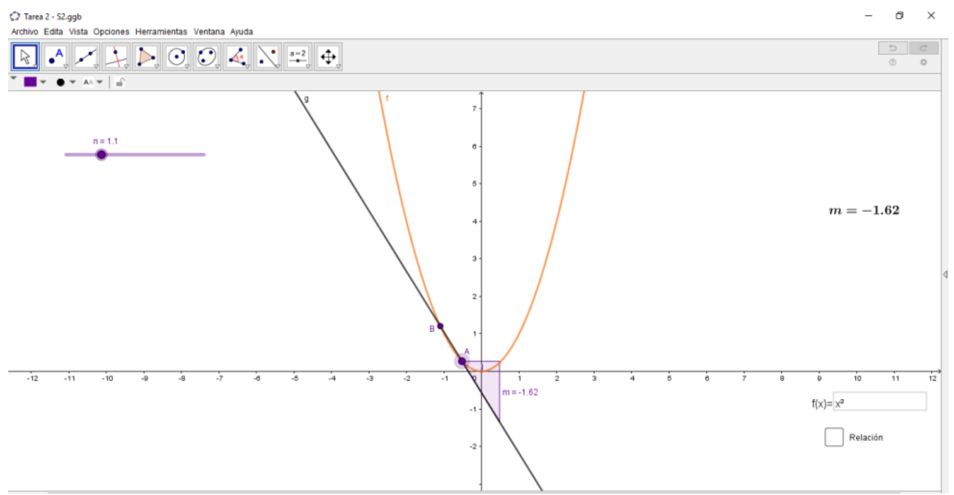
Los estudiantes reconocen que a medida que el deslizador n cambia de valor, también cambia la distancia entre los puntos A y B y cambia el valor de la pendiente de la recta que pasa por esos dos puntos. Además, reconocen que dicho valor también cambia cuando se mueve el punto A.

<u>AM2:</u>

Los estudiantes reconocen que a medida que aumenta el valor que toma el

</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Se espera que los estudiantes respondan que el punto se mueve sobre la recta y que con este se mueve también la recta.
Podría ocurrir que respondan que el triángulo presentado en la construcción cambia de tamaño, para solventar esto, se realizará nuevamente la pregunta, centrándola en el comportamiento de la recta.
También se espera que los estudiantes respondan que el texto presentado en pantalla cambia conforme se mueve el punto.



- **Ingresa en la casilla de texto la función $f(x) = 2x^3 + 5x^2$ y mueve el punto A ¿Qué sucede con el valor de m?**

Se espera que los estudiantes digan que el valor de m cambia, que se hace más grande o pequeño y que esto depende de la posición de la recta que contiene al punto A.

- **Activa la casilla relación, y ahora mueve el valor del deslizador n y analiza como cambia el valor de m al mover nuevamente el punto A. ¿Qué sucede con el rastro que apareció cuando el deslizador n se hace más pequeño?**

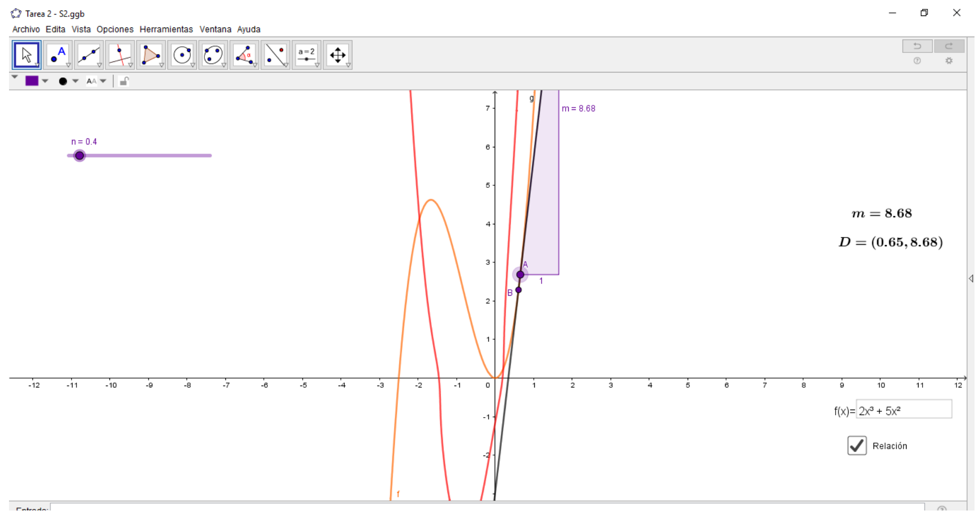
Aquí se espera que los estudiantes respondan que cuando el deslizador se hace más pequeño, el rastro se parece más a la función cuadrática, y cuando se hace más grande, deja de

deslizador n, también aumenta la distancia entre los puntos A y B.

<u>AM3:</u>
Los estudiantes asocian el cambio del valor de la pendiente de la recta que pasa por A y B, con la inclinación de esta (a la izquierda cuando la pendiente es negativa y a la derecha cuando la pendiente es positiva). Además, los estudiantes dan cuenta y razón de que a medida que el valor de n se hace más pequeño, la gráfica que aparece cuando se activa la casilla “Relación”, se aproxima más a la gráfica de una función cuadrática o parábola.

<u>AM4:</u>
Los estudiantes reconocen que la pendiente de la recta

parecerse. A partir de esto, se empezará a trabajar el crecimiento o decrecimiento de la función.



- **¿Cuándo m toma el valor más pequeño posible y cuáles son las coordenadas del punto D en ese momento?**

Aquí, se espera que los estudiantes relacionen el punto de inflexión de la función con el valor mínimo de la pendiente. De no ser así, el docente redirigirá la pregunta de tal forma que se centre en el movimiento del punto A en segmentos cercanos al punto de inflexión.

- **¿Cuándo la pendiente de la recta es positiva y cuando es negativa? ¿Cómo puede relacionarse este cambio con la forma de función inicial?**

Aquí se espera que los estudiantes respondan que cuando la función es creciente, la pendiente es de la recta es positiva y cuando es decreciente, la pendiente de la recta es negativa. Para esto el docente guiará las respuestas del estudiante para que se apoye del rastro obtenido a partir del punto D.

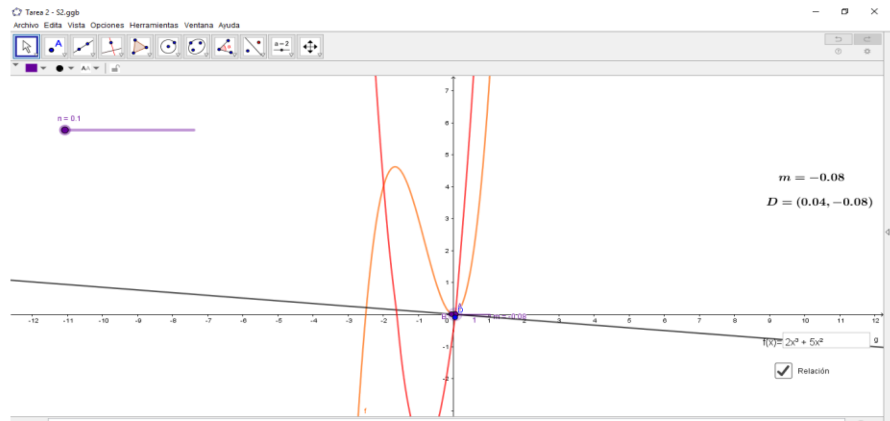
- **¿En qué momento la pendiente m cambia de signo?**

que pasa por A y B cambia de signo en los puntos máximos y mínimos de la función ingresada. Además, verbalizan que cuando alguno de los puntos (A o B) se encuentra ubicado en alguno de los extremos de la función y a su vez el valor de n se va haciendo más pequeño, la pendiente de la recta que pasa por los puntos mencionados tiende a cero.

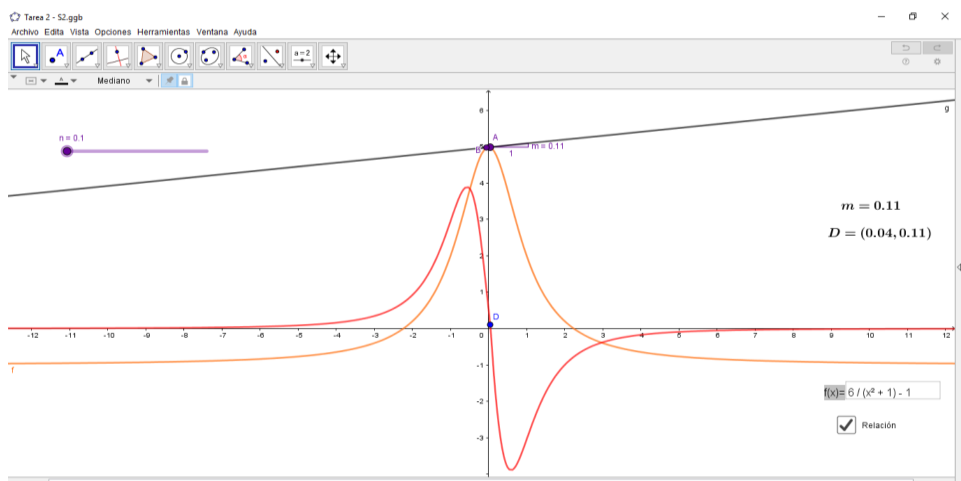
<u>AM5:</u>

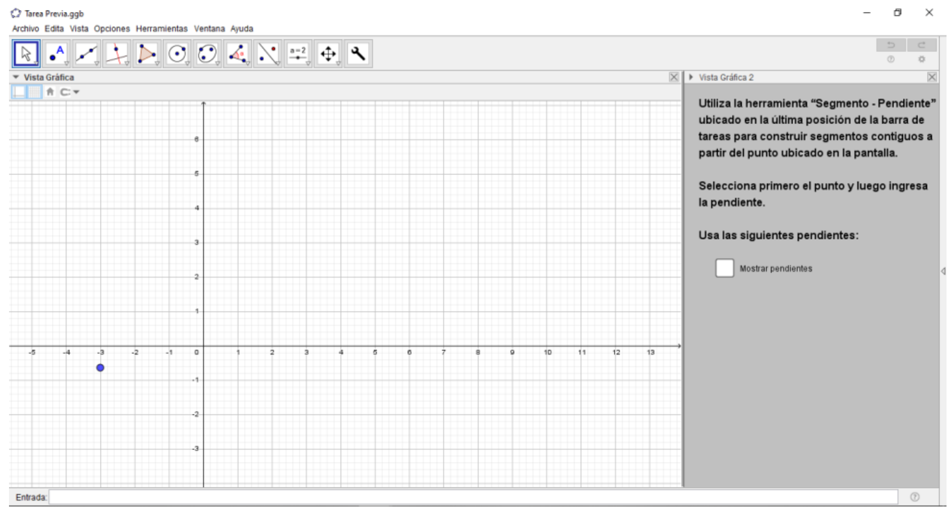
La acción 5 aún no es evidenciada por los estudiantes, pues razón entre los cambios trabajados sigue siendo promedio, vista a partir de la recta secante.

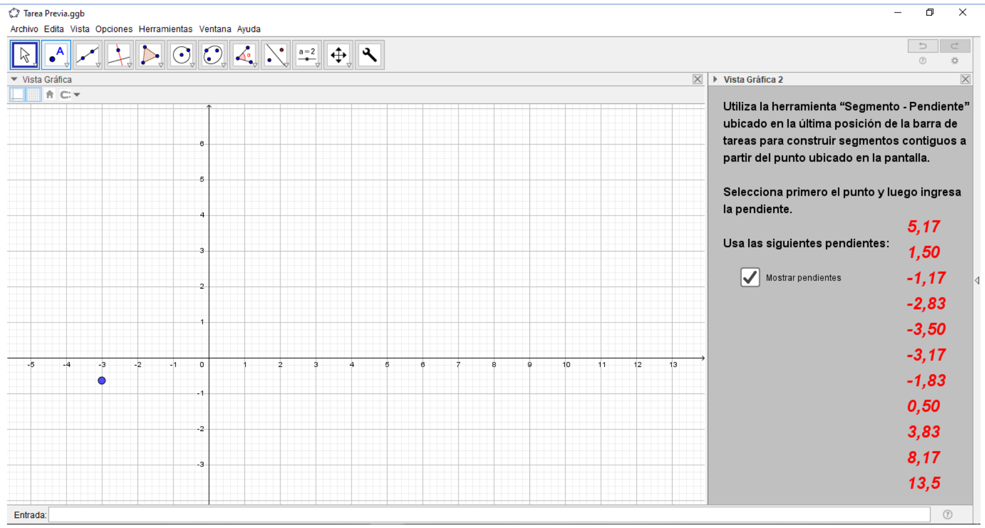
Aquí, se espera que los estudiantes respondan que en los puntos máximos o mínimos de la función la pendiente cambia de signo.



- **Grafique la función:** $\frac{6}{x^2+1} - 1$ **y realice el mismo análisis.**

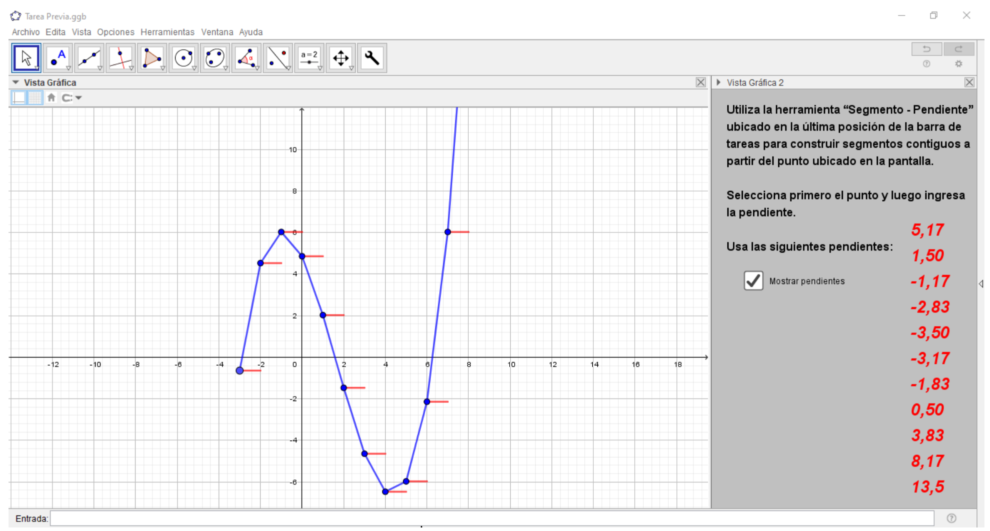


3	21/10/19	***Construcción de expresiones que representen los cambios*** Construir una expresión algebraica que represente la razón de cambio promedio entre dos puntos cualesquiera de una función, a partir de la identificación de segmentos o rectas secantes en ella,	**<u>Recurso 1 – Actividad Previa:</u>** Se pedirá a los estudiantes abrir el archivo de GGB llamado Tarea Previa, al hacerlo, la interfaz que encontrarán será la siguiente:  Los estudiantes leerán el enunciado que aparece en pantalla, y activarán la casilla "Mostrar pendientes". A lo cual, se encontrarán con la siguiente interfaz.	**<u>Recurso 1 – Actividad Previa:</u>** Se considera que, con este recurso, los estudiantes podrán mostrar comportamientos asociados con AM2, AM3, AM4 y algunos indicios de la AM5. Estos se describen a continuación: ***<u>AM2:</u>*** Los estudiantes reconocen que existen cambios constantes sobre x y cambios sobre y y que estos se relacionan mediante un cociente para hallar la pendiente de los segmentos dados. ***<u>AM3:</u>*** Los estudiantes reconocen el cambio como la pendiente de los segmentos construidos. Además, identifican el comportamiento de los	

			 Una vez han aparecido las pendientes, se preguntará a los estudiantes *cuál cree que será la forma de la construcción que realizarán* y que su respuesta sea sustentada a partir de lo que se ha trabajado. Se espera que la respuesta de los estudiantes sea que tendrán una aproximación de una curva que primero es creciente, luego decreciente y creciente nuevamente. Esto debido a los signos de las pendientes de los segmentos que construirán. También se preguntará *en qué parte creen que habrá un punto máximo o mínimo de la curva.* Y de igual manera, se espera que las respuestas estén guiadas por los cambios de signos de las pendientes en los segmentos construidos. Una vez los estudiantes han explicado sus respuestas, usarán GGB para verificar que esta es correcta. Utilizarán la herramienta *"Segmento – Pendiente"* desarrollada en el programa para	segmentos graficados como creciente o decreciente según la posición en la que se encuentran. ***<u>AM4:</u>*** Los estudiantes reconocen que la pendiente de los segmentos es positiva en los intervalos en los que la función es creciente y negativa en los intervalos en los que la función es decreciente. ***<u>AM5:</u>*** Los estudiantes reconocen que en el punto de inflexión se presenta el cambio de signo en las pendientes, es decir que esta pasa de ser creciente a decreciente o viceversa. Además, pueden realizar un esbozo de la gráfica a partir de las pendientes de los segmentos dados	

construir un segmento dada una pendiente. La longitud del segmento está determinada por el cambio en x, el cuál es constante.

Al ingresar los segmentos, el resultado que debería aparecer en pantalla es:

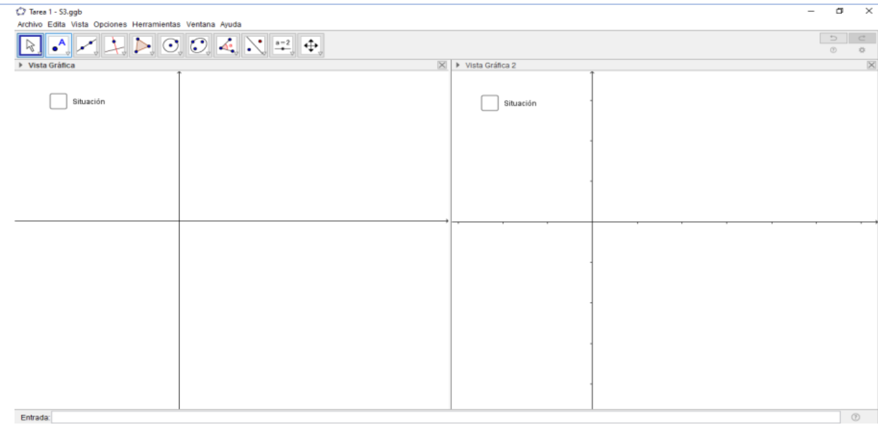
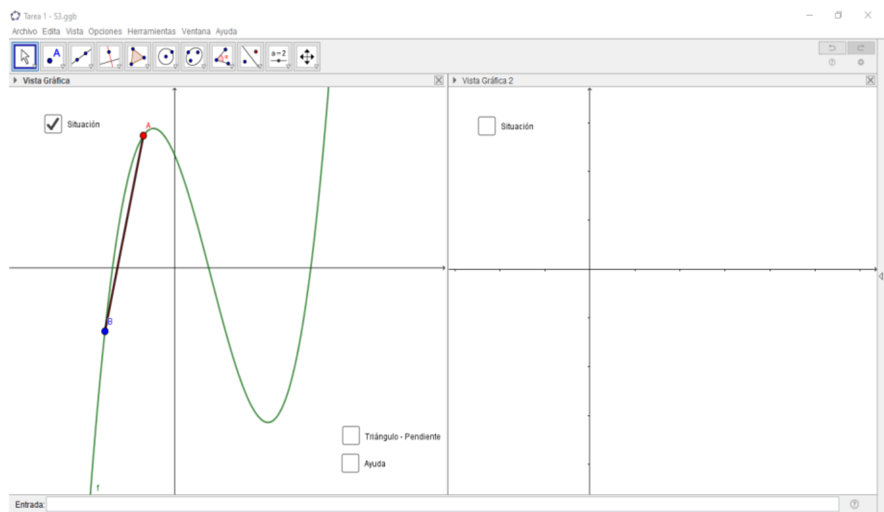


Una vez realizada esta tarea, se preguntará a los estudiantes: *¿Qué significado tienen los segmentos rojos y los segmentos azules?*

Se espera que los estudiantes respondan que los segmentos rojos corresponden a unos cambios constantes en x, y que los segmentos azules representan la cantidad de cambio dado en y en el intervalo determinado por el segmento rojo.

Si las respuestas obtenidas, no son las esperadas, los investigadores redireccionarán las preguntas, haciendo uso de lo trabajado en las sesiones pasadas. Teniendo en cuenta la pendiente, la razón de cambio promedio, los avances en x y los avances en y.

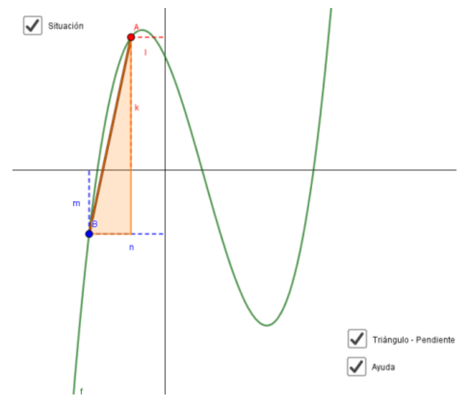
			Este recurso se encuentra enmarcado dentro de la categoría ***Verificación de propiedades*** pues se usará para que los estudiantes verifiquen las respuestas dadas para un conjunto de pendientes proporcionado. Por último, se pedirá a los estudiantes que usando la herramienta construida en GGB, realicen una aproximación a una curva que presente tres cambios de concavidad, que sea dos veces creciente y dos veces decreciente. ***<u>Recurso 2:</u>*** Se pedirá a los estudiantes abrir el recurso llamado Tarea 1 – S3. Y se indicará que la tarea es la siguiente **Tarea:** Definir las pendiente de los segmentos AB y CD, con la información proporcionada por el recurso. En primer lugar, la interfaz del recurso es la siguiente:	**<u>Recurso 2:</u>** Se considera que, con este recurso, los estudiantes podrán mostrar comportamientos asociados con AM1, AM2, AM3 y algunos indicios de la AM4. Estos se describen a continuación: ***<u>AM1:</u>*** Los estudiantes reconocen que las distancias verticales que aparecen cuando se activa la casilla *"ayuda"*, corresponden a las distancias desde los puntos A y B (extremos del segmento dado) al eje *y* y que las distancias	

			 Se pedirá a los estudiantes activar la casilla situación 1 y encontrarán la siguiente representación:  	horizontales corresponden a las distancias entre dichos puntos y el eje x. También, dan cuenta y razón de que, para hallar la pendiente del segmento dado, deben realizar el cociente entre los cambios en y y los cambios en x. ***<u>AM2:</u>*** Los estudiantes reconocen que para hallar el cambio en y y el cambio en x deben establecer ciertas relaciones entre las distancias verticales y horizontales que aparecen al activar la casilla *"ayuda"* (sumarlas o restarlas según sea el caso). Además, identifican que dependiendo de la posición de los puntos A y B en el plano, las relaciones que deben establecer entre las	

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>

El recurso en este caso puede enmarcarse en la categoría ***Exploración de situaciones y formulación de conjeturas.*** Pues los estudiantes podrán explorar allí el comportamiento de los diferentes puntos y formularán una expresión que represente la razón de cambio promedio entre dos puntos sobre la función.

Las casillas: ayuda y triángulo – pendiente, harán aparecer los segmentos y el triángulo que representa la pendiente. Y se espera que a partir de esta información se construya una expresión que represente la pendiente del segmento.



A partir de esta información, se preguntará a los estudiantes:

1. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos A y B a partir de lo conocido?
2. ¿Cómo se puede encontrar la pendiente del segmento AB?
3. ¿Al mover los puntos, la pendiente cambia?
4. ¿Al mover los puntos, la expresión que representa la pendiente cambia?

</td>
<td>

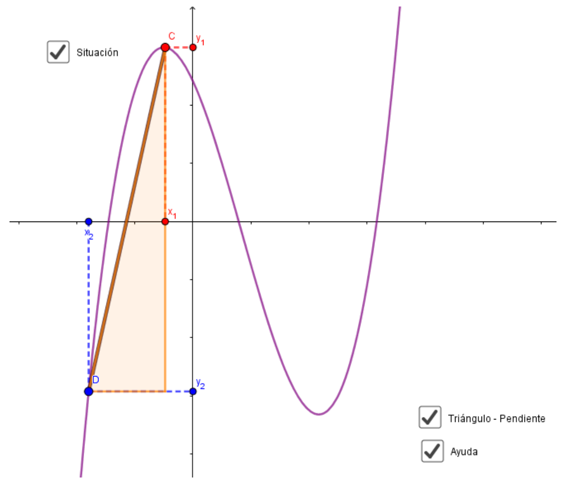
distancias mencionadas van a variar.

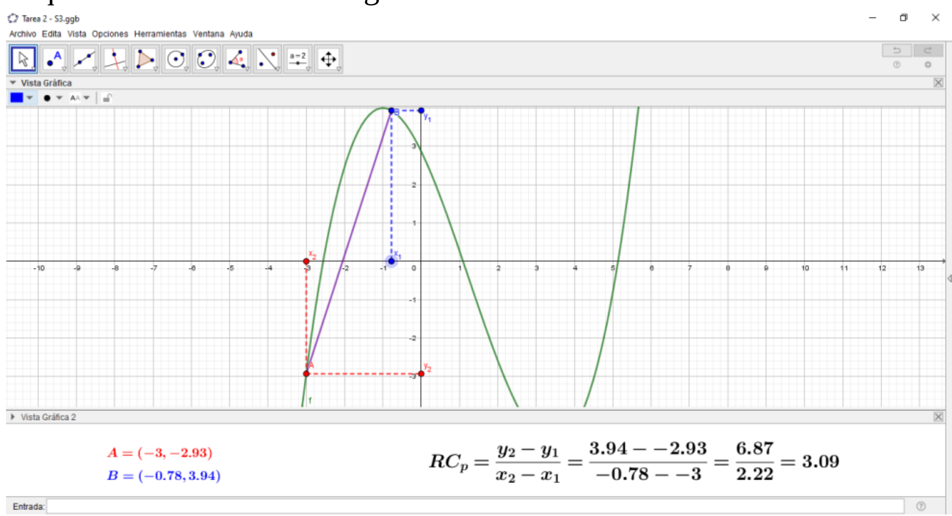
<u>AM3:</u>
Los estudiantes determinan la expresión que representa la pendiente del segmento dado teniendo en cuenta la posición de los puntos A y B en el plano. Es decir, que encuentran la expresión de la pendiente para casos particulares.

<u>AM4:</u>
Los estudiantes plantean la expresión general que permite hallar la pendiente de un de una recta o de un segmento contenido en ella, dados dos puntos que pertenecen a la recta.

AM5:
La acción 5 aún no es evidenciada por los

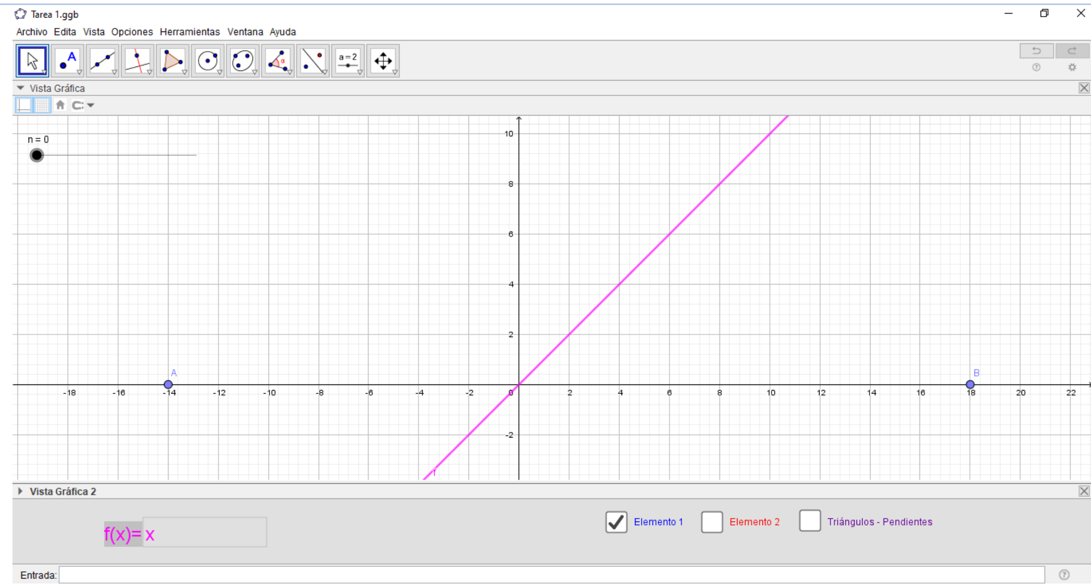
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

			Se realizará la misma tarea, para la situación 2: dónde los segmentos y coordenadas estarán definidos a partir de otros elementos.  Se espera concluir al final con la expresión de la pendiente: $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ Para la situación 1, se espera construir una expresión similar, pero esta estará determinada por los valores y ubicación de los segmentos. Esta expresión se usará posteriormente cambiando algunos términos para llegar a la noción de triángulo diferencial y razón de cambio instantánea.	estudiantes, pues la razón entre los cambios trabajados sigue siendo promedio, vista a partir del cambio de pendiente de segmentos. **Recurso 3:**	

			Recurso 3: Se pedirá a los estudiantes abrir el archivo: Tarea 2 – S3. La interfaz que encontrarán será la siguiente:  Este recurso se enmarca en la categoría ***Realización de procedimientos algorítmicos*** debido que será utilizada solamente para encontrar la razón de cambio promedio en unos intervalos indicados. A partir de estos cálculos, se espera que los estudiantes lleguen a conclusiones acerca de la forma de la curva, sus cambios, dónde es creciente, dónde es decreciente, dónde alberga un punto máximo o mínimo, etc.	Se considera que, con este recurso, los estudiantes podrán mostrar comportamientos asociados con las 5 acciones mentales. ***AM1:*** Los estudiantes reconocen que los únicos puntos que pueden mover en el recurso son X_1 y X_2, puesto que estos se mueven sobre el eje *x*, que representa a la variable independiente que interviene en la situación. ***AM2:*** Los estudiantes, verbalizan que el segmento de color morado, cuyos extremos están en la curva, relaciona los cambios en *x* y los cambios en *y* de esta, por lo tanto, representa la razón de cambio promedio de la	

			Se pedirá a los estudiantes calcular y registrar la razón de cambio promedio a medida que x cambia de: • -3 a -2 • -2 a -1 • -1 a 0 • 0 a 1 • 1 a 2 • 2 a 3 • 3 a 4 Posterior a estos cálculos, se les pedirá responder las preguntas: • ¿En qué intervalos la razón de cambio promedio es positiva y a qué se debe esto? • ¿En qué intervalos la razón de cambio promedio es negativa? ¿A qué se debe esto? • ¿En cuál intervalo la razón de cambio promedio es mayor? • ¿Qué sucede si los puntos A y B, se hacen muy próximos? ¿Qué puede deducirse de allí? Se espera que los estudiantes respondan que en los intervalos en los cuales la curva es creciente, la razón de cambio es positiva y viceversa. Y que si los puntos se hacen muy próximos, entonces la razón de cambio promedio es más cercana a la función. Si las respuestas obtenidas, no son las esperadas, los docentes redireccionarán las preguntas, haciendo uso de lo trabajado en las sesiones pasadas. Teniendo en cuenta la pendiente, la razón de cambio promedio, los avances en x y los avances en y. Para realizar la tarea, los estudiantes solo podrán mover los puntos que representan las coordenadas en x de los puntos A y B.	misma. Además, reconocen que el signo no es un factor que influye para determinar si la razón de cambio es mayor o menor. ***<u>AM3:</u>*** Los estudiantes determinan en cuáles intervalos de la curva la razón de cambio promedio es mayor y en cuales es menor. Para esto tienen en cuenta la representación gráfica de la curva y los datos obtenidos a partir del recurso. ***<u>AM4:</u>*** Los estudiantes reconocen que en los intervalos en los que la curva es creciente, la razón de cambio promedio es positiva y en los intervalos en los que la curva es decreciente, esta es negativa.	

				<u>AM5:</u> Los estudiantes verbalizan que entre más pequeños sean los intervalos entre las razones de cambio promedio, la unión de los segmentos que las representan se va a aproximar más a la forma de la curva original.	
4	28/10/19	***Triángulo diferencial***	***<u>Recurso 1:</u>*** Se pedirá a los estudiantes abrir el archivo llamado “Tarea 1” y la interfaz que encontrarán será la siguiente:	**<u>Recurso 1:</u>** Se considera que, con este recurso, los estudiantes	

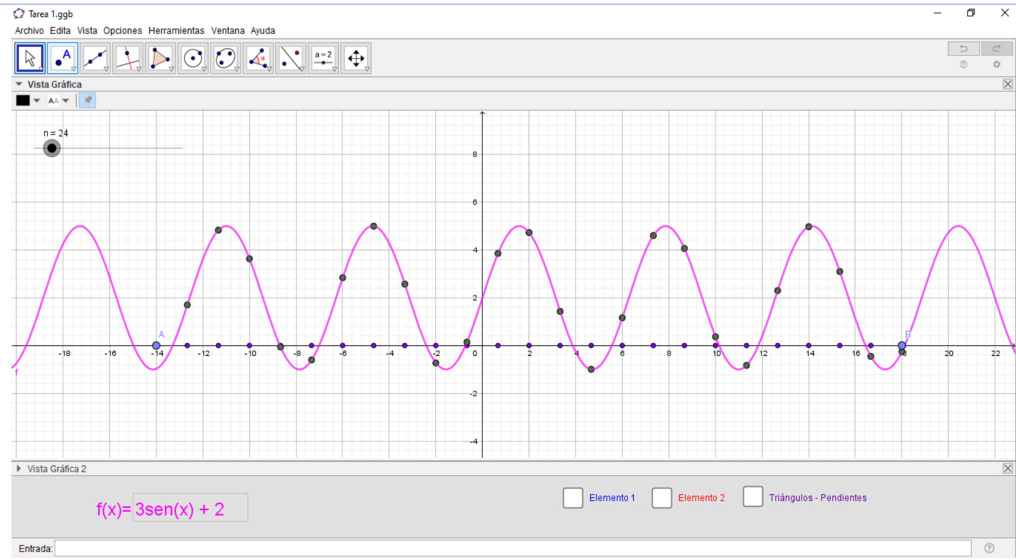
<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>Usar la curva de cambio para describir la forma de una función y sus características, en relación con la razón de cambio instantánea representada por el triángulo diferencial.</td>
<td>


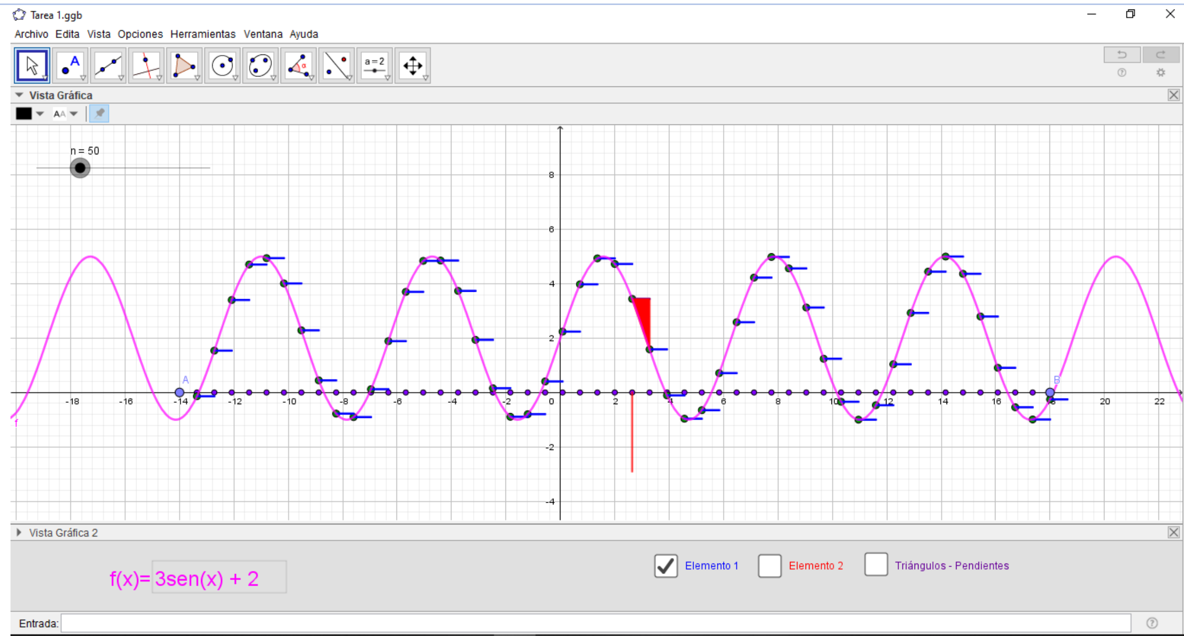
En primer lugar se pedirá a los estudiantes ingresar en la casilla de entrada la función $f(x) = 3sen(x) + 2$ y luego mover el deslizador n paulatinamente. Una vez realizado esto, se preguntará a los estudiantes cuál es el significado de los puntos que aparecen en pantalla, tanto los que se encuentran sobre el eje x como los que se encuentran sobre la función.

Se espera que los estudiantes respondan que los puntos que aparecen en el eje x dividen el intervalo [A,B] en partes iguales, y los que aparecen sobre la función son las imágenes respectivas de los anteriores.
</td>
<td>podrán mostrar comportamientos asociados con AM1, AM2, AM3 y algunos indicios de la AM4. Estos se describen a continuación:

<u>AM1:</u>
Los estudiantes reconocen que a cada punto que se encuentra sobre el eje x, le corresponde un punto del eje y y que este último cambia, cuando el punto que se encuentra en x cambia.

<u>AM2</u>:
Los estudiantes verbalizan que los puntos que aparecen en el plano y se corresponden con los puntos que están sobre el eje x, forman la curva ingresada en la casilla de entrada.
También, verbalizan que los segmentos que aparecen en el plano</td>
<td></td>
</tr>
</table>

			 Posteriormente se pedirá reiniciar el deslizador en $n = 0$ y activar la casilla *"Elemento 1",* esta casilla hará que sobre la función aparezcan segmentos cuya longitud es constante en todos los caso y representan los cambios en x. Se espera que los estudiantes describan estos segmentos como los cambios constantes que presenta la función en x y que se van haciendo más pequeños conforme se va haciendo más grande el valor del deslizador n. Si los estudiantes no logran llegar a esta conclusión, se realizarán intervenciones que traigan a colación los elementos trabajados en las sesiones anteriores, tales como avance constante, cercanía entre puntos.	cuando se activa la casilla *Elemento 1*, corresponden al cambio en x. Por otro lado, reconocen que los segmentos que aparecen cuando se activa la casilla *Elemento 2*, corresponden al cambio en y, y que este, contrario al cambio en x, no es constante. **AM3:** Los estudiantes reconocen que cada uno de los puntos que aparecen en el plano corresponden a las imágenes de los puntos que se encuentran sobre el eje x. Por otro lado, son conscientes de que el cambio en x, representado por los segmentos que aparecen en pantalla cuando se activa la casilla *"Elemento 1",* es constante. Además, reconocen que el cambio	



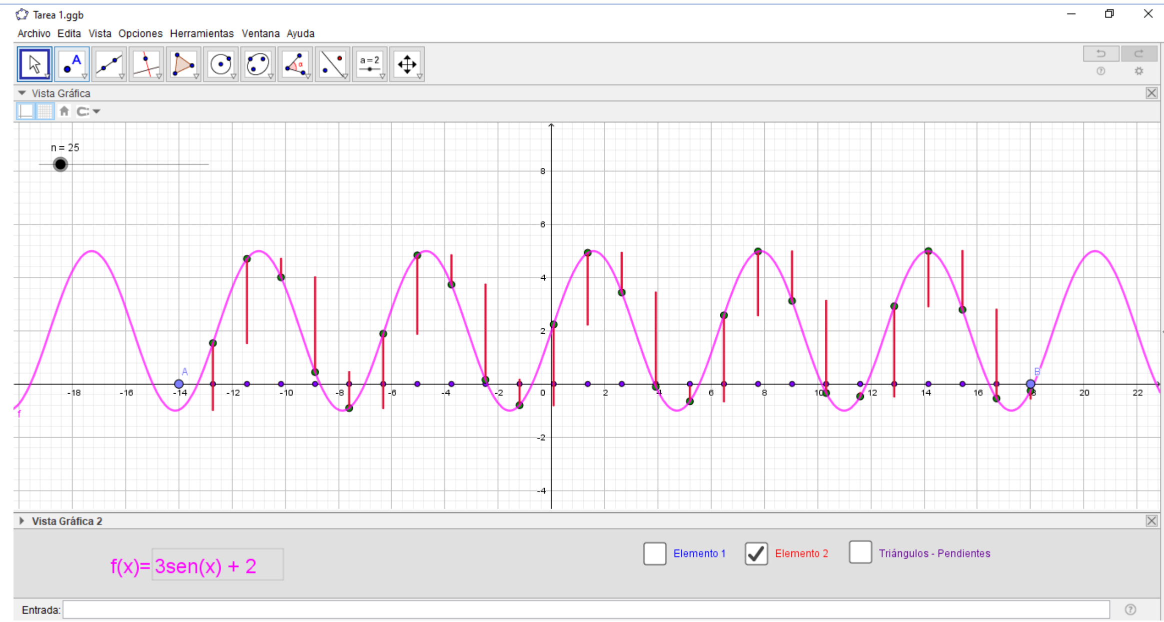
Enseguida, se realizará la misma tarea, pero activando la casilla *"Elemento 2"* que mostrará la variación que presenta la función en y en estos intervalos determinados por x y se mostrarán como segmentos rojos.

Los estudiantes de igual manera presentarán una interpretación de estos y de no ser así, se recurrirá a retomar los elementos de las sesiones pasadas.

Se espera que los estudiantes respondan que estos segmentos no son iguales debido a que hay intervalos en donde el cambio que se evidencia es mayor y por tanto el segmento debe tener mayor longitud.

en y, es proporcional a cada uno de los segmentos que lo representa. Es decir, que entre más grande sea un segmento, mayor es el cambio.

AM4:
Los estudiantes reconocen que los triángulos que aparecen al activar la casilla "Triángulo-pendientes" representan la pendiente de una recta secante a la curva dada. Es decir que coordinan la razón de cambio promedio de la función, con los cambios en x y y.

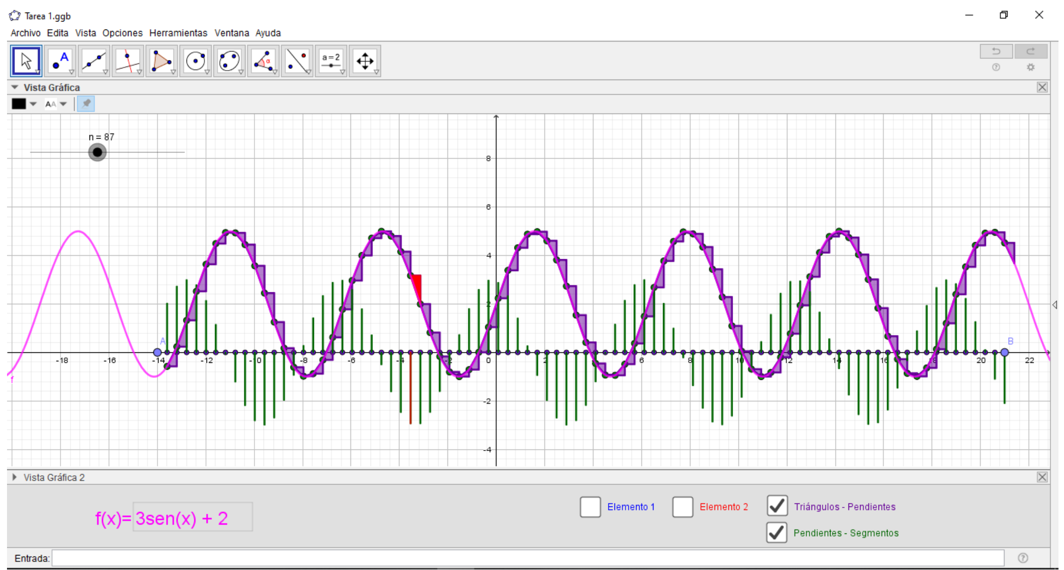


Luego de esto, los segmentos azules y rojos se unificarán en un solo elemento que será el triángulo de pendientes y que aparecerá al activar la casilla *"Triángulos - pendientes"*. Con este los estudiantes verán como al hacer más grande la cantidad de intervalos, estos triángulos se van acercando mucho más a la forma original de la función.

Se pedirá a los estudiantes establecer la relación que existen en el triángulo, la cual se espera que respondan que es la pendiente y que mencionen como se calcula ésta en cada triángulo.

Además de eso, se les pedirá activar la casilla *"Pendientes – Segmentos"* y se explicará que la longitud de estos segmentos corresponde al valor que se encuentra al calcular el cociente entre los segmentos. Para apoyar esta idea, en pantalla también aparecerá un triángulo en rojo con su respectivo segmento – pendiente, para ilustrar de mejor manera esta propiedad.

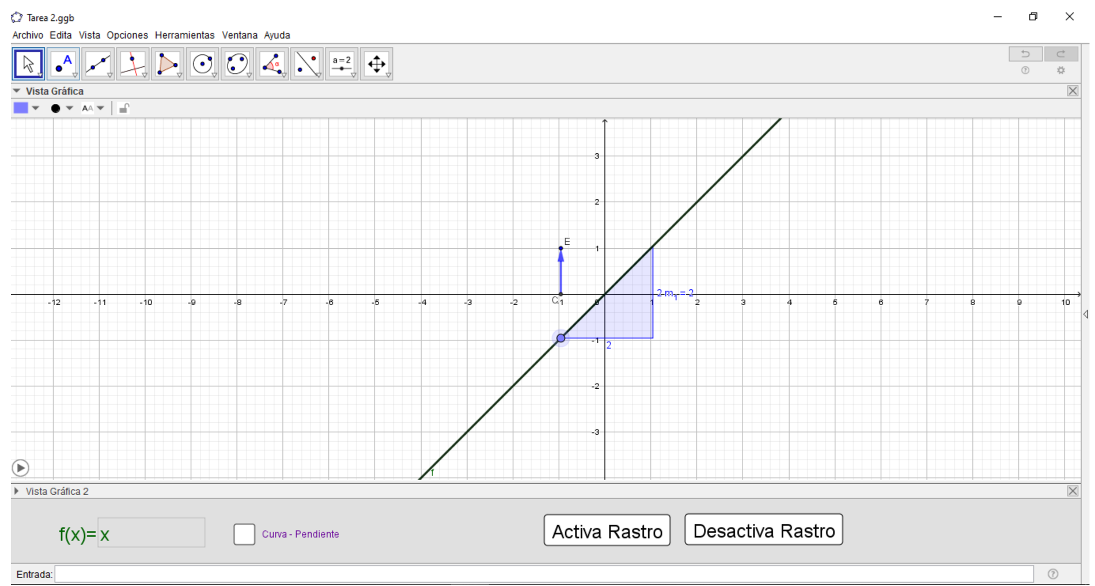
Luego se pedirá mover el deslizador de manera creciente, de tal suerte que los segmentos que van apareciendo formen la curva de pendientes (derivada).



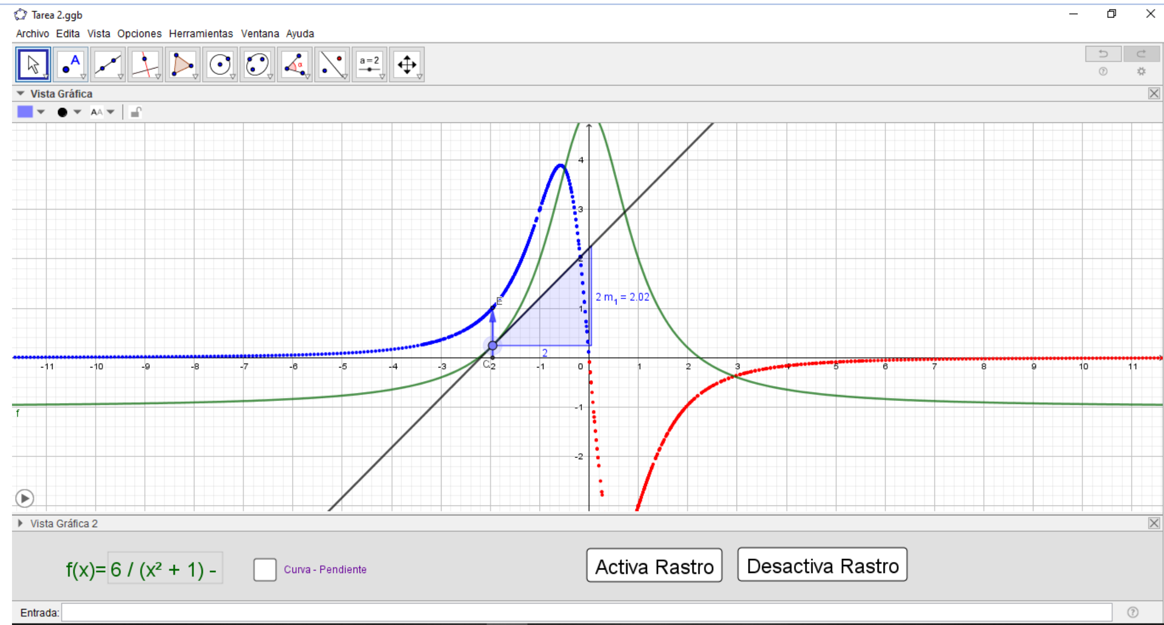
Por último, se pedirá que los estudiantes describan con sus palabras la relación que existe entre los segmentos que van apareciendo y los triángulos que estaban previamente, además.

Se espera que los estudiantes relacionen los diferentes segmentos con los crecimientos que va teniendo la función original en ese intervalo y se relacionen las curvas que se obtienen, tanto la curva original con su derivada. Es importante mencionar que la palabra “derivada” no se utilizará en ningún momento.

Esta tarea se repetirá con diferentes funciones que presentes diferentes cambios para ser analizadas.

			Este recurso se enmarca en la categoría: ***Exploración de propiedades y formulación de conjeturas.*** Debido a que se pretende que el estudiante realice una exploración sobre la función a partir de las herramientas proporcionadas por el recurso para obtener conjeturas acerca de su comportamiento y relación con otros elementos. ***<u>Recurso 2:</u>*** Se pedirá a los estudiantes abrir el archivo llamado *“Tarea 2”* y encontrarán la siguiente interfaz.  La primera acción que los estudiantes realizarán en el recurso será medir la longitud del segmento que se encuentra sobre el eje x y lo relacionarán con la pendiente de la recta que aparece en pantalla. Para esto, moverán el punto A sobre la recta que aparece.	**<u>Recurso 2:</u>** Se considera que, con este recurso, los estudiantes podrán mostrar comportamientos asociados con AM3 y AM4, estas se describen a continuación. ***<u>AM3:</u>*** Los estudiantes reconocen cuál es la pendiente de la recta que aparece en pantalla y además, descubren que la medida del segmento que se muestra en pantalla, equivale a la medida de la pendiente. ***<u>AM4:</u>*** Los estudiantes asocian el cambio de color del	

			Se espera que los estudiantes concluyan que el segmento tiene la longitud del valor de la pendiente de la recta y que estimen cuál es la forma de la nueva figura que aparece. Enseguida, los estudiantes tendrán que ingresar la función $f(x) = x^2 + x$ y mover el punto A sobre esta, allí, se notará que al moverlo, el triángulo de pendiente cambia de color de acuerdo con la ubicación en la que se encuentre la recta. Los estudiantes deberán explicar a qué se debe este cambio de color y en qué intervalos se mantiene de un color y en qué intervalos se mantiene de otro. Se espera que respondan que se mantiene de color azul cuando el punto A se encuentra sobre la parte creciente de la función y que se mantiene en rojo cuando el punto A se encuentra en la parte decreciente de la función. A continuación, se pedirá dar click al botón “activa rastro” y nuevamente mover el punto A, al hacer esto, el segmento CE se moverá sobre el eje x y el punto E dejará un rastro. Los estudiantes harán referencia a este rastro dejado, en relación con los cambios de la función, debido a que si es creciente los rastros dejados serán de color azul y si es decreciente, los rastros dejados serán de color rojo. Se espera que los estudiantes reconozcan los intervalos marcados con azul como los cambios crecientes que presenta la función. Y los intervalos marcados con rojo como los cambios decrecientes de la función. Esta misma tarea se realizará con varias funciones que representen varios cambios de crecimiento y sea más provechoso su análisis.	triángulo que aparece cuando mueven el punto que aparece sobre la curva, con los cambios de crecimiento y decrecimiento que experimentan las funciones ingresadas.	

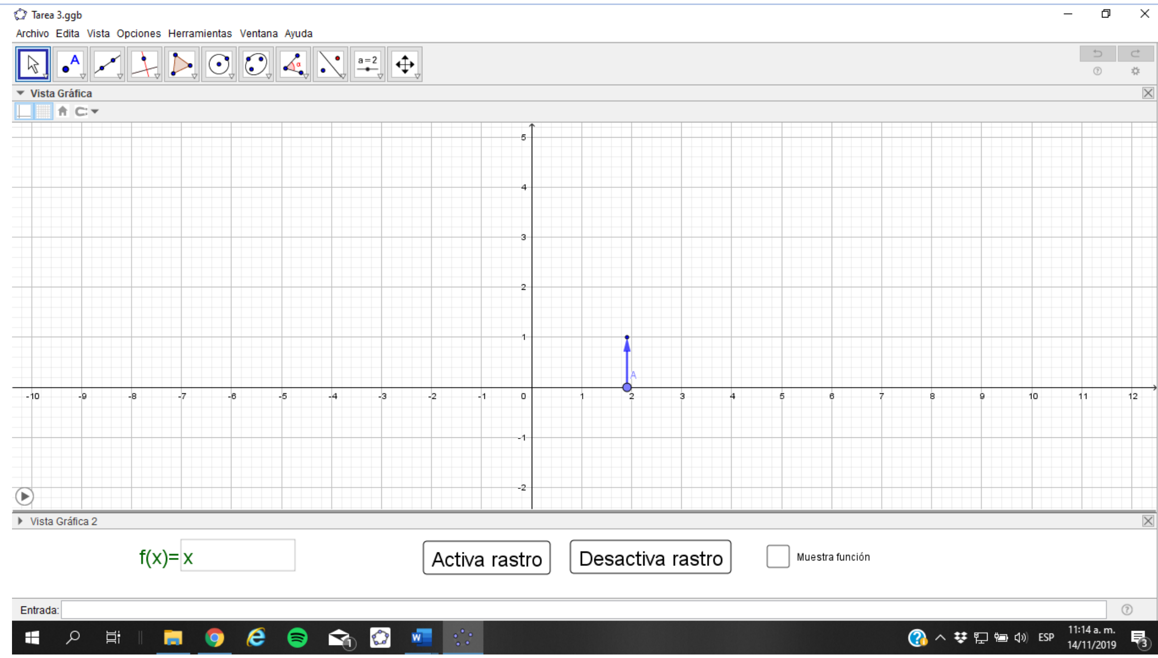
<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>


Para finalizar, podrán activar la casilla “curva – pendiente” para tener una mejor visualización de la relación obtenida.

<u>Recurso 3:</u>

Se pedirá a los estudiantes abrir el archivo titulado *“Tarea 3”* en la cual encontrarán la siguiente interfaz:
</td>
<td>
<u>Recurso 3:</u>

Se considera que, con este recurso, los estudiantes podrán mostrar comportamientos asociados con AM2, AM3, AM4 y AM5, estas se describen a continuación.
</td>
<td></td>
</tr>
</table>



Con este recurso se pretende que los estudiantes a partir de la curva de cambio de una función (derivada) traten de estimar la forma original de esta. En primer lugar, teniendo en cuenta el recurso trabajado anteriormente, se explicará el significado que tiene la longitud del segmento azul. Los estudiantes ingresarán en primer lugar la función $f(x) = x$ y moverán el punto A sobre el eje x, se les pedirá describir como es el cambio que presenta el segmento conforme se mueve el punto A y este resultado asociarlo con cuál debe ser la forma que presenta la función original. Los estudiantes activarán la casilla “Activa rastro”.

Se espera que los estudiantes respondan que el segmento no presenta ningún tipo de cambio y por tanto, la función original es una línea recta cuya pendiente es 1. Si el resultado dado

AM2:
Al ingresar funciones lineales al recurso y mover el punto A, los estudiantes verbalizan que el tamaño del segmento no presenta ningún cambio.

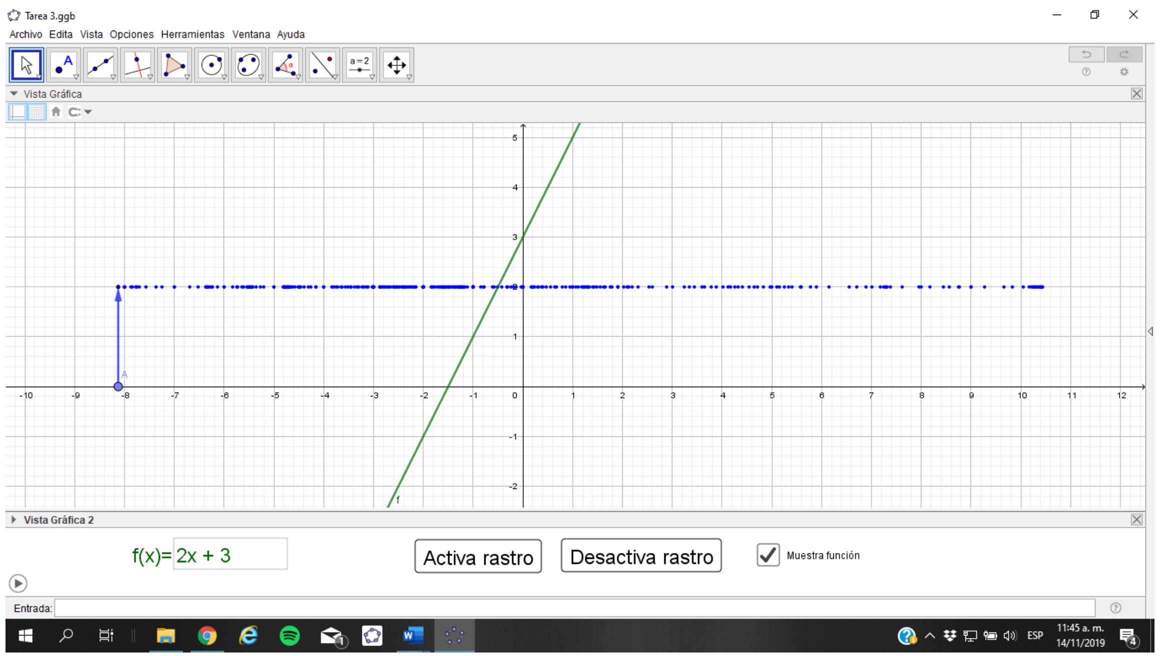
AM3:
Los estudiantes determinan el valor de la pendiente de las funciones lineales ingresadas o bien, de las rectas generadas a partir del rastro que se obtiene al mover el punto A.

AM4:
Los estudiantes relacionan los colores del rastro, con los cambios que presenta la función y a partir de esto determinan si esta crece o decrece en un intervalo. También, reconocen que en el caso de las funciones polinómicas, la función formada por el rastro tiene un grado menor que la

por los estudiantes no es el esperado, se recurrirá a preguntas que traigan a colación los resultados obtenidos en la tarea anterior, tales como su longitud y su significado.

La misma tarea se realizará con la función $f(x) = 2x + 3$ de la cual se espera obtener resultados similares a la tarea anterior.

Para verificar sus resultados activarán la casilla “Muestra función”

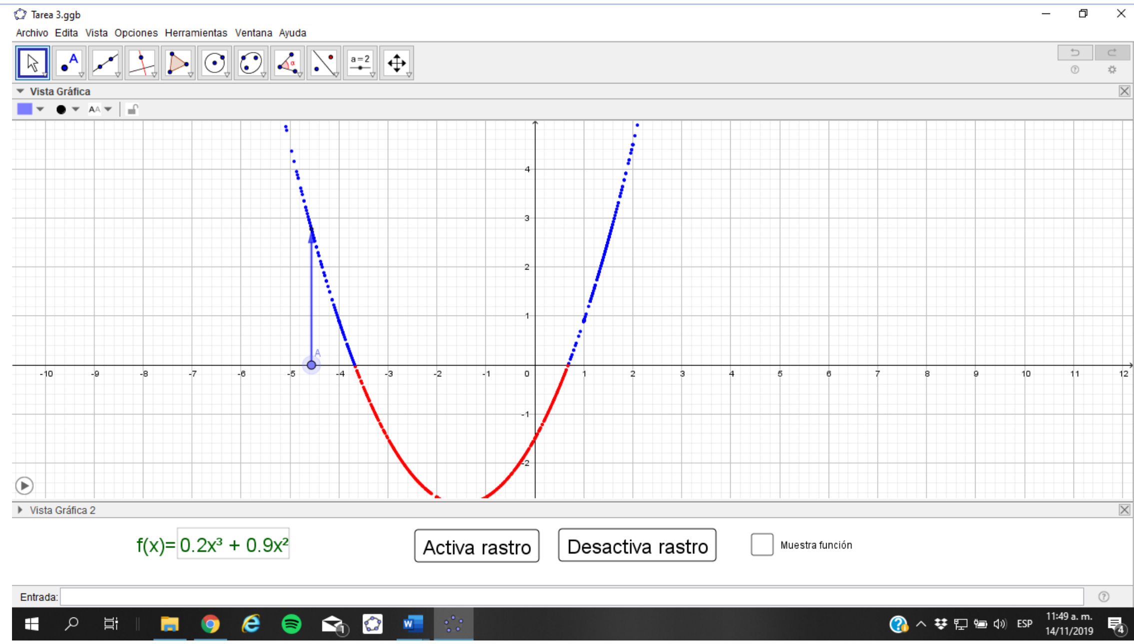


Ahora, los estudiantes ingresarán la función $f(x) = 0.2x^3 + 0.9x^2 - 1.5x - 4$, activarán el rastro y moverán el punto A sobre el eje x, con el resultado arrojado por GeoGebra, los estudiantes indicarán en qué intervalo la función original es creciente y en cuáles es decreciente, esto está determinado por el color del rastro que aparece. (Azul, creciente – Rojo, decreciente).

función original y determinan su ecuación.

AM5:

Los estudiantes identifican los puntos de inflexión de las funciones trabajadas como los puntos en los que cambia la concavidad. También, predicen la concavidad de la función original a partir del rastro, o bien la concavidad que va a presentar el rastro, cuando ingresan la función original.



A partir del rastro y las respuestas dadas por los estudiantes, tratarán de estimar la forma original de la función teniendo en cuenta sus intervalos de crecimiento y decrecimientos, puntos máximos y puntos de inflexión.

Se espera que los estudiantes reconozcan a partir de la gráfica, cada uno de estos elementos. De no ser así, se preguntará por ¿Cuál debería ser el valor que tome la pendiente para obtener un valor máximo en la función? o ¿Cuándo la función es creciente, cuál es el valor de la pendiente allí? ¿y cuándo es decreciente?

Estas preguntarás permitirán tener un acercamiento de las relaciones que los estudiantes establecen entre los cambios de la función (derivada) y la función.

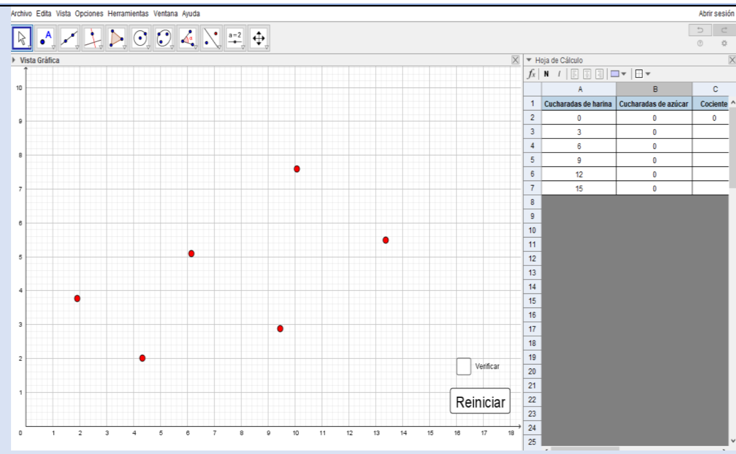
La misma actividad se realizará con las siguientes funciones:

			$f(x) = -0.2x^4 - 0.5x^3 + 1.5x^2 + 2.2x$ $f(x) = 2sen(x) + 3\ cos\ cos\ (x)$ $f(x) = \frac{6}{(x^2+1)} + 1$		

Anexo 2: Transcripción sesión 1.

SESIÓN 1			
Número de tarea	1	**Tipo de recurso**	Exploración de situaciones y formulación de conjeturas

Minuto	**Transcripción**	**Análisis desde Carlson**	**Análisis desde AS**
0:39 a 1:38	*Se lee a los estudiantes el enunciado de la tarea relacionada con el primer recurso GeoGebra:* Para preparar un postre se debe agregar dos cucharadas de azúcar por cada tres cucharadas de harina *Luego se les indica que el primer paso es llenar la tabla que aparece en la hoja de cálculo, teniendo en cuenta la información que brinda en el enunciado.* *La interfaz del recurso a la que accederán los estudiantes inicialmente se muestra a continuación:*	**Indicadores** Se considera que con este recurso los estudiantes podrán evidenciar comportamientos asociados con AM1, AM2 y AM3. Estos se describen a continuación: ***AM1*:** Los estudiantes coordinan el valor de una variable con los cambios de la otra. Esto se puede evidenciar cuando designan correctamente los ejes coordenados al mover los	**Indicadores** En la línea 10, la niña 1 uno hace uso de las herramientas de GeoGebra para ubicar puntos en el plano cartesiano, relacionando la ubicación de este punto con la idea mencionada por su compañero en la línea 9. Aquí evidenciamos que la estudiante establece una relación entre la herramienta punto y las coordenadas de este con la situación de cantidad de harina y cantidad



1	**Niño1:**	Dos, "enter" *[refiriéndose a que Niña1 debe oprimir esta tecla para pasar a la siguiente fila de la tabla]*.
2	**Niño3:**	Cuatro
3	**Niña1:**	Seis
4	**Niño4:**	Y diez
5	**Niño1:**	Ahora toca acomodar los punticos según…
6	**Invest1:**	Los puntos los pueden mover ahí solamente utilizando el mouse *[en la vista gráfica del recurso aparecen seis puntos que pueden moverse en toda la superficie con ayuda del mouse]*.
7	**Niño2:**	¿El eje x a qué se refiere?
8	**Niña1:**	El eje x vendría siendo la cantidad de…
9	**Niño3**	Pues el eje x es el independiente, entonces serían las cucharadas de harina y el eje y es el dependiente, entonces serían las cucharadas de azúcar.
10	**Niña1:**	Sí. Entonces por cada tres, hay dos (*ubica los puntos en el plano cartesiano con las coordenadas* (2,3))
11	**Niño2:**	O sea, sería aquí. (*Señala en la pantalla la ubicación de la coordenada* (3,2)).

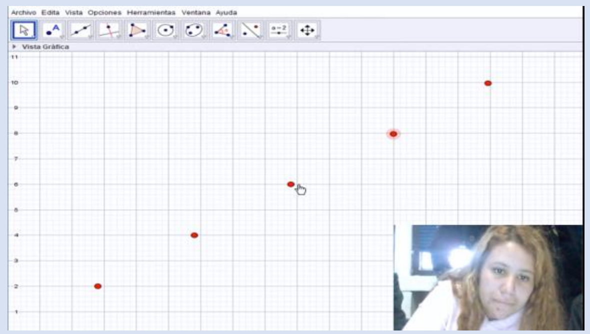
puntos en el plano cartesiano y ubicarlos de modo que estos representen los datos ingresados en la tabla: Cucharadas de harina en el eje *x* y cucharadas de azúcar en el eje *y*.

***AM2*:**
Los estudiantes verbalizan que a medida que aumenta la cantidad de cucharadas de harina para realizar el postre, también aumenta la cantidad de cucharadas de azúcar que se necesitan.

***AM3*:**
Los estudiantes coordinan la magnitud del cambio de las cucharadas de harina con la magnitud del cambio de las cucharadas de azúcar. Un indicador de esto es que reconozcan que las magnitudes covarían de manera constante.

Convenciones	
AM1	
AM2	

de azúcar. Tal acción puede describirse con el indicador (B2).

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>12</td><td>Niño3:</td><td>Este es el de harina ¿no? (Señalando el eje x), entonces ahí, (3,2).</td></tr>
<tr><td>13</td><td>Niña1:</td><td>Y… ¿se supone que era solamente una función lineal y ya? (mientras ubica el resto de las coordenadas).
</td></tr>
</table>
</td>
<td>AM3

En la línea 9 se evidencia que el estudiante coordina el valor de una variable con los cambios de la otra. Pues está designando de manera correcta los ejes coordenados al indicar que las cucharadas de harina van en el eje x y las cucharadas de azúcar en el eje y. Además, en las líneas 11 y 12 se evidencia AM1, pues los estudiantes ubican los puntos en el plano cartesiano de modo que estos representan correctamente los datos ingresados en la tabla:</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2:34 a 3:33

4:19 a 5:42</td>
<td>
<table>
<tr><td>14</td><td>Invest1:</td><td>Ahora, ¿si se dan cuenta que ahí, en la parte de abajo sale la casilla que dice “verificar”? Le van a dar clic ahí, para verificar si efectivamente los puntos los ubicaron de la manera correcta. Si aparecen unos puntos azules en algún lado es porque les quedó mal, si no ven ningunos puntos azules es porque está bien. (…)

Verifican y no sale ningún punto azul.</td></tr>
<tr><td>15</td><td>Invest2:</td><td>Ahora, ustedes están viendo esos triángulos de ahí ¿cierto? Entonces, aquí hay una herramienta que sirve para medir los lados de los segmentos. ¿Saben cuál es?,¿saben utilizarla?</td></tr>
</table>
</td>
<td>En la línea 22 se evidencia que los estudiantes reconocen y verbalizan que a medida que aumenta la cantidad de harina, también aumenta la cantidad de azúcar para realizar el postre mencionado en el enunciado. Este es un indicio de AM2.

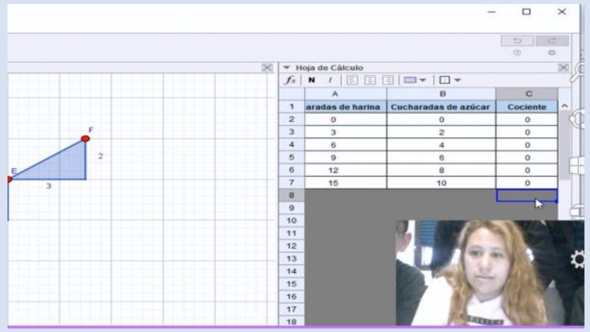
Por otro lado, en la línea 28, se evidencia que Niño2 coordina la magnitud del cambio de las cucharadas de harina con la</td>
<td>En la línea 20, se evidencia el uso de la herramienta que permite encontrar la longitud de segmentos. Los estudiantes relacionan los resultados de esta acción en la línea 22 con la noción de cantidad de azúcar y cantidad de harina. Esta acción está descrita por el indicador (B2).</td>
</tr>
</table>

		
16	**Niño1:**	Ehh sí, creo que es esta. (*Señala la parte de la pantalla en la que aparece la herramienta ángulo*)
17	**Invest2:**	Sí, dale ahí *(refiriéndose al ícono de la herramienta "Ángulo")*.
18	**Invest1:**	Hay una que dice "distancia – longitud".
19	**Invest2:**	Van a dar clic sobre cada uno de los segmentos que forman el triángulo. Los catetos de los triángulos no más, no la hipotenusa, porque fíjense que son triángulos rectángulos.
20	**Niña1:**	Listo (*hace clic sobre los catetos y encuentra las medidas)*.
21	**Invest2:**	Listo, van a observar esas medidas, ¿qué relación tienen con el enunciado inicial que les dimos?
22	**Niño2:**	Pues son… tres cucharadas de harina y dos cucharadas de azúcar ¿no? A medida que hay más harina hay más azúcar.

magnitud del cambio de las cucharadas de azúcar e indica que estas magnitudes covarían de manera constante. Posteriormente se realiza el procedimiento de verificación utilizando la hoja de cálculo de GeoGebra y se comprueba que efectivamente la magnitud de ese cambio es la constante dos tercios, o en su representación decimal, cero coma seis periódico (ver línea 42).

En las líneas 24, 26, 40 los estudiantes hacen uso de la hoja de cálculo de GeoGebra para calcular el valor de la pendiente. Tales cálculos les permiten concluir que el resultado es constante. Esto, en las líneas 28 y 42.

Estas acciones pueden describirse mediante el indicador (D2).

5:44 a 7:38		**23**	**Invest1:**	Listo, ahora en la casilla, aquí en C3, en C3 van a poner el cociente			
		24	**Niño1:**	C3, abajo (*señalando la celda para que Niña 1 coloque allí el cursor*) 			
		25	**Invest1:**	Van a poner el cociente ¿sí? El cociente va a ser B3 sobre A3.			
		26	**Niño2:**	Dos tercios. En todas.			
		27	**Invest2:**	¿En todas será dos tercios?			
		28	**Niño2:**	Sí. Si la relación es constante, es una constante, es dos tercios.			
		29	**Niño3:**	Sí, si se simplifica, todos son dos tercios.			
		30	**Niña1:**	Sí			
		31	**Invest1:**	¿Cuánto da dos tercios?			
		32	**Niño4:**	Cero comas tres, tres, tres…			
		33	**Invest2:**	¿Seguros?			
		34	**Niño4:**	Ah no, es cero comas seis, seis, seis			
		35	**Invest2:**	Compruébenlo. Ahí tienen la herramienta. Comprueben su hipótesis.			
		36	**Niño3:**	Cero comas seis, seis, seis			
		37	**Niña1:**	¿Cuál es el igual? *(mientras procede a escribir la fórmula en la hoja de cálculo para comprobar).*			

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>38</td><td>Invest1:</td><td>Escribe B3, dividido, o sea, slash, shift 7 (indica que este comando se debe usar para escribir el slash), A3 (En este momento no aparece el resultado en la tabla, puesto que la fórmula se había escrito en minúscula).</td></tr>
<tr><td>39</td><td>Invest1.</td><td>Ok, vuélvelo a hacer, pero ponlo con mayúscula (…)</td></tr>
<tr><td>40</td><td>Niña1:</td><td>Bueno (vuelve a escribir la fórmula, pero ahora con mayúsculas).</td></tr>
<tr><td>41</td><td>Invest1:</td><td>Listo, dale “enter” y pues, arrastra esa fórmula abajo. Es como un Excel común y corriente.</td></tr>
<tr><td>42</td><td>Niña1:</td><td>Ya (mientras u bica el cursor en la esquina inferior derecha de la celda C3 y lo arrastra hasta llegar a la celda C7).
Sí, es constante. [Al notar que el cociente en todos los casos es 0,67]</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>7:46 a 9:15</td>
<td>
<table>
<tr><td>43</td><td>Invest1:</td><td>Ahora, ya digamos que como para ir cerrando ¿qué significado tienen las medidas que tomaron, alrededor del problema? Y ¿qué significado podría tener el cociente que acaban de encontrar?
Los estudiantes se quedan en silencio, por esta razón se toma la decisión de desglosar la pregunta anterior por partes.</td></tr>
<tr><td>44</td><td>Invest2:</td><td>(…) primero hablemos de las medidas, las medidas qué son, qué representan.</td></tr>
<tr><td>45</td><td>Niño2:</td><td>Las cucharadas de harina sobre las cucharadas de azúcar.</td></tr>
<tr><td>46</td><td>Invest2:</td><td>¿Y qué más?, ¿qué más pueden decir de esas medidas?, (…) ¿qué pasa con esas cucharadas de harina y azúcar? (…)</td></tr>
<tr><td>47</td><td>Niño3</td><td>Pues hay una relación que es tres sobre dos…</td></tr>
</table>
</td>
<td>En la línea 45 se evidencia que Niño2 reconoce qué representan las medidas de los catetos de los triángulos. En la línea 47 Niño3 identifica que existe una relación entre esas magnitudes, pero no cuantifica el cambio correctamente. En la línea 48 Niño1 lo corrige, y aunque Niño3 parece aceptar la corrección, en la línea 53 vuelve a retomar su idea. Sin embargo, en las líneas 54 y 58, Niño1 explica por qué la cuantificación del cambio que</td>
<td>A pesar de no haber evidencia de uso del recurso GeoGebra, si hay una construcción de relaciones matemáticas en el diálogo de esta sección, particularmente en las líneas 45, 47 a 49, 52, 54 y 58.

En estas líneas los estudiantes describen las relaciones establecidas entre las dos magnitudes: cantidad de harina y cantidad de azúcar. Estas relaciones son descritas de</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>48</td><td>Niño1:</td><td>Dos sobre tres.</td></tr>
<tr><td>49</td><td>Niño3:</td><td>¡Ah sí!, dos sobre tres.</td></tr>
<tr><td>50</td><td>Invest1:</td><td>Y ¿por qué no podría ser tres sobre dos? ¿Por qué dos sobre tres y no tres sobre dos? (…)</td></tr>
<tr><td>51</td><td>Niña1:</td><td>De hecho, es tres sobre dos ¿no?</td></tr>
<tr><td>52</td><td>Niño1:</td><td>Dos sobre tres.</td></tr>
<tr><td>53</td><td>Niño3:</td><td>Sí porque son dos de azúcar por tres de harina (…) Según yo, sería al revés porque la harina está primero.</td></tr>
<tr><td>54</td><td>Niño1:</td><td>No porque entonces, tres sobre dos da más de uno.</td></tr>
<tr><td>55</td><td>Invest1:</td><td>¿Tú dijiste qué?, ¿tres sobre dos es qué?</td></tr>
<tr><td>56</td><td>Niño1:</td><td>Es más, de uno. Sería uno y medio.</td></tr>
<tr><td>57</td><td>Invest1:</td><td>Y ¿qué pasa con que sea así?</td></tr>
<tr><td>58</td><td>Niño1:</td><td>Que a la larga habría más azúcar que harina.</td></tr>
<tr><td>59</td><td>Niño3:</td><td>Sí. (…)</td></tr>
</table>
</td>
<td>hizo Niño3 es incorrecta. Esto es un indicio de AM1, pues muestra que Niño1 coordinó el valor de una magnitud con los cambios de la otra.</td>
<td>manera formal reconociendo la razón establecida entre ellos. Debido a la relación que establecen y que no es generada a partir de un recurso GGB, se asigna el indicador (Z4).</td>
</tr>
<tr>
<td>9:29 a 10:36</td>
<td>
<table>
<tr><td>60</td><td>Invest2:</td><td>Si se cambiaran las medidas de los catetos de los triángulos rectángulos que aparecen en pantalla ¿qué pasaría?</td></tr>
<tr><td>61</td><td>Niña1:</td><td>Cambia la función lineal principalmente, la línea.</td></tr>
<tr><td>62</td><td>Invest2:</td><td>Pero qué es lo que cambia ahí, qué pasaría si los triángulos no tuvieran estas medidas así, dos – tres (señalando los catetos en la pantalla), sino invertidas. ¿Qué pasaría con esa recta?</td></tr>
<tr><td>63</td><td>Niño4:</td><td>Pues sería más alta. (Hace gesto de inclinación con las manos). También cambiaría el cociente.</td></tr>
</table>
</td>
<td>En la línea 63 se evidencia que Niño4 reconoce que si las medidas de los catetos estuviesen invertidas, el cociente cambiaría, y la recta que se forma sería “más alta” y luego en la línea 70, Niño3 expresa que entiende la pendiente como la inclinación de la recta. En la línea 78, Niño2 expresa que la inclinación de la recta es la constante cero, coma sesenta y siete. Finalmente, Niño4 verbaliza que la inclinación de la recta, si las medidas de los catetos de los triángulos estuviesen invertidas, sería la constante uno coma</td>
<td>A pesar de que no se evidencian acciones directas sobre GGB en esta sección, los estudiantes se apoyan en lo construido previamente en el software para llegar a conclusiones de las preguntas dadas por los investigadores. En este orden, las ideas de los estudiantes se modifican a partir de lo elaborado en GGB, como se evidencia en las líneas 61, 63, 75 y 78. Esta situación se puede describir mediante el indicador (B3).</td>
</tr>
</table>

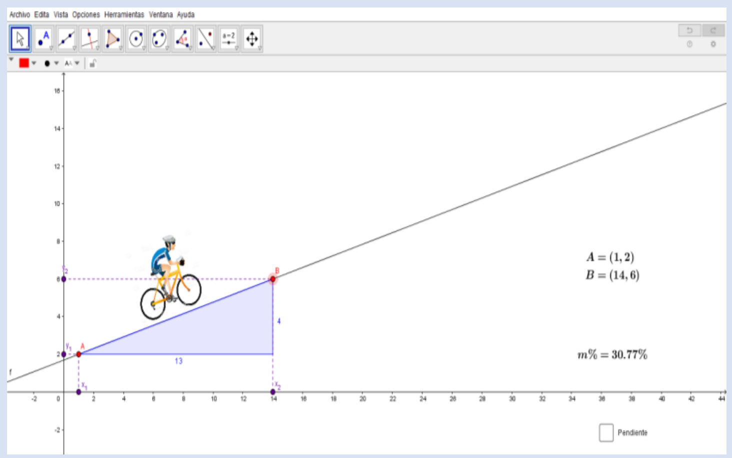
				cinco. Dado que los estudiantes están mostrando que reconocen que las magnitudes varían de manera constante, esto sería indicio de AM3.	
	64	**Niña1:**	E iría más creciente		
	65	**Invest1:**	Y ¿por qué sería más alta?,¿a qué te refieres con que sería más alta?		
	66	**Niño2:**	Que sería más pegada a *y*.		
	67	**Niño4:**	El número *y* sería más alto		
	68	**Niño3:**	Y la pendiente (*realiza gesto de inclinación con las manos).* 		
	69	**Invest1:**	¿y qué es la pendiente?		
	70	**Niño3:**	La pendiente es la inclinación de la recta.		
	71	**Niño4:**	Estaría más cerca hacia el eje *y*.		
	72	**Invest2:**	(…) ¿o sea que la pendiente de esa recta que se forma ahí cuál sería? (*refiriéndose a la recta que se formó a partir de los puntos rojos que ubicaron en el plano*). ¿Podrían decirnos la pendiente de esa recta?		
	73	**Niña1:**	La pendiente de esa recta es tres		
	74	**Invest2:**	¿Tres?, ¿segura?		
	75	**Niño4:**	No, es tres sobre dos. (…). Dos sobre tres.		

76	**Invest2:**	¿y dos sobre tres nos daba cuánto?
77	**Niño3:**	Cero coma sesenta y siete. (…)
78	**Niño2:**	La recta tiene una inclinación de cero coma sesenta y siete.
79	**Invest2:**	Y entonces si las medidas de los triángulos estuviesen invertidas, ¿la pendiente sería cuánto?
80	**Niño4:**	Tres…, uno punto cinco

Número de tarea:	2	**Tipo de aplicativo:**	Verificación de propiedades

10:45 a 18:39

Se indica a los estudiantes la ubicación del segundo recurso a utilizar y se solicita abrirlo. La interfaz de este se muestra a continuación:



81	**Invest1:**	Les voy a leer el enunciado: El porcentaje de inclinación de una calle esta dado por la razón entre la cantidad de altura recorrida en ascenso o descenso y la distancia que nos desplazamos horizontalmente; esto multiplicado por

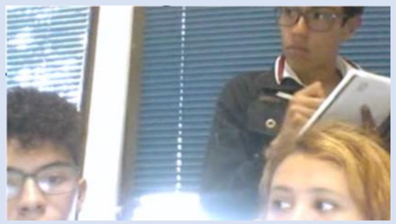
Indicadores

Se considera que con este recurso los estudiantes podrán evidenciar comportamientos asociados con AM2 y AM3. Estos se describen a continuación:

AM1:

Los estudiantes son capaces de coordinar los cambios de una variable con los cambios de la otra. Esto se puede evidenciar cuando los estudiantes dan cuenta y razón de que para encontrar la cantidad de metros que debe avanzar y subir un ciclista para pasar por la calle más inclinada del mundo, deben hallar el cociente entre la distancia de subida y la distancia de avance, o bien, cuando son conscientes de que deben hacer

En primer lugar, los estudiantes intentan resolver la situación planteada a través del uso de lápiz y papel, pero pronto (líneas 95 y 97) se dan cuenta que es necesario el uso

		100. Actualmente la calle con mayor porcentaje de inclinación en el mundo se encuentra en la ciudad de Dunedin en Nueva Zelanda, cuya inclinación es del 35%. Si un ciclista quisiera subir o bajar de esta calle, ¿cuál sería la cantidad de metros que avanzaría versus la cantidad de metros que suba o que baje?
82	**Niño1:**	¿Cómo era la fórmula?, ¿distancia vertical sobre distancia horizontal?
83	**Invest1:**	El porcentaje de inclinación de una calle esta dado por la razón entre la cantidad de altura recorrida en ascenso o descenso y la distancia que nos desplazamos horizontalmente; esto multiplicado por 100.
En este momento, Niña1 y Niño4 empiezan a tomar nota de los datos proporcionados. 		
84	**Niño1:**	Distancia vertical sobre distancia horizontal por 100 ¿no?
85	**Niño3:**	35% es la mayor inclinación de calle.
86	**Niño1:**	Sí 35%.
87	**Invest1:**	Y actualmente la calle con mayor porcentaje de inclinación en el mundo se encuentra en la ciudad de Dunedin en Nueva Zelanda, cuya inclinación es del 35%. La primera pregunta es, si un ciclista quisiera subir o bajar de esta calle ¿Cuál sería la cantidad de metros que avanzaría versus la cantidad de metros que sube o baja?
88	**Invest2:**	¿Si alcanzaste a copiarlo todo?
89	**Niña1:**	Sí, ya. ¿Es con 35 de inclinación?

uso de la fórmula de la pendiente de una recta.

AM2:
En esta actividad los estudiantes tendrán que manipular una recta en la que se representan sus cambios, tanto horizontales (ΔX), como verticales (ΔY). Y se espera que verbalicen el cómo interpretan la dirección de estos cambios en términos de avance vs subida.

AM3:
Los estudiantes son capaces de relacionar los cambios horizontales con los cambios verticales, y estas relaciones están expresadas a partir de la cuantificación de los cambios.

Convenciones	
AM1	
AM2	
AM3	

En la línea 84 Niño1 afirma que para hallar la cantidad de metros de subida y de avance para pasar por la calle más elevada del mundo, sería necesario hallar la que él llama “distancia vertical”, dividirla entre la “distancia

del software, a pesar de su negativa en usarlo.

Cuando el investigador les recuerda que los puntos A y B pueden moverse, los estudiantes hacen uso de esto para tratar de resolver la situación presentada.

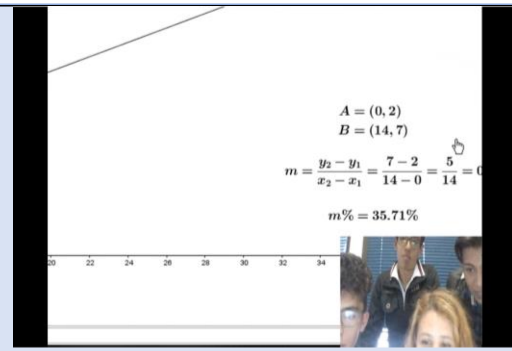
En las líneas 115 a 120 los estudiantes reconocen la relación que existe entre la posición de los puntos que mueven y el valor de la pendiente e interpretan el movimiento de los puntos como un cambio en la pendiente. Estas acciones se encuentran descritas por el indicador (B2).

En la línea 123, los estudiantes activan la casilla “Pendiente” la cual les permite observar el cálculo de la pendiente de la recta que pasa por A y B. En la línea 127, los estudiantes reconocen que si mueven los puntos, este valor también cambiará. En las líneas 133, 134 y 135, los estudiantes tienen la intención de modificar directamente los valores de la ecuación que apareció y así

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>90</td><td>Invest1:</td><td>Sí, con 35% de inclinación. Claramente con esto se pueden utilizar esto [haciendo referencia al recurso].</td></tr>
<tr><td>91</td><td>Niño2:</td><td>35… 0.40, (el estudiante se muestra dubitativo).</td></tr>
<tr><td>92</td><td>Niño3:</td><td>Dos números que divididos den 0.35</td></tr>
<tr><td>93</td><td>Niño4:</td><td>¿Divididos?</td></tr>
<tr><td>94</td><td>Niño1:</td><td>Sí, 0.35</td></tr>
<tr><td>95</td><td>Niña1:</td><td>Como que si nos toca con esto [Refiriéndose al uso del recurso GeoGebra].</td></tr>
<tr><td>96</td><td>Invest2:</td><td>Entonces, ¿lo van a usar?</td></tr>
<tr><td>97</td><td>Niño2:</td><td>Como que no queríamos, pero nos toca</td></tr>
<tr><td>98</td><td>Niño4:</td><td>Pues, tocaría usar la de medir ángulos ¿No? [Refiriéndose a la herramienta que ofrece GeoGebra para realizar esta acción]</td></tr>
<tr><td>99</td><td>Niño1:</td><td>Primero que todo 1 dividiendo 3 da 33, digo 0.3 entonces...</td></tr>
<tr><td>100</td><td>Niño2:</td><td>¿Será por ahí? ¿1 entre 3?</td></tr>
<tr><td>101</td><td>Niño3:</td><td>Entonces…pero… tiene que dar 0.35 entonces sería menos que eso.</td></tr>
<tr><td>102</td><td>Niña1:</td><td>Es más fácil que eso. Es multiplicar equis uno más equis dos y acá ye uno más ye dos… y multiplicarlo por 100.</td></tr>
<tr><td>103</td><td>Niño4:</td><td>Eso sería como lo primero. ¿Es como parecido a la fórmula de pendiente?</td></tr>
<tr><td>104</td><td>Niña1:</td><td>Si, lo de la pendiente más o menos como para sacar la primera parte.</td></tr>
<tr><td>105</td><td>Niño3:</td><td>¿Cuál es la pregunta?</td></tr>
<tr><td>106</td><td>Niño2:</td><td>Cantidad de metros que alcanzaría, o sea cantidad de metros que recorrió.</td></tr>
<tr><td>107</td><td>Niño3:</td><td>O sea, hacía arriba y hacia allá, en V (hace gesto de V con los dedos).</td></tr>
<tr><td>108</td><td>Niña1:</td><td>¿Cuántos metros eran?</td></tr>
<tr><td>109</td><td>Niño1:</td><td>No los dan.</td></tr>
<tr><td>110</td><td>Niño3:</td><td>Solamente dan el porcentaje de inclinación.</td></tr>
</table>
</td>
<td>horizontal” y luego multiplicar esto por 100. Esto es un indicio de AM1, pues es consciente de que debe establecer una relación entre el cambio en y y el cambio en x.
Ahora bien, en la línea 102, se evidencia que Niña1 intenta hacer alusión a la fórmula de la pendiente de una recta; esto se confirma en la línea 104. Sin embargo, cuando trata de enunciar la fórmula hace referencia a la multiplicación entre las coordenadas en x, lo que no hace referencia precisamente al cambio en x. Esto se podría clasificar como un comportamiento pseudoanalítico relacionado con AM1.</td>
<td>encontrar la posición correcta de los puntos (Acción que no puede realizarse, pero si permite notar la relación entre objetos GGB y matemáticos).

Estas acciones se pueden describir mediante el indicador (C2).</td>
</tr>
</table>

111	**Niño2:**	¿ 54? , ¿ 34?
112	**Niño1:**	35
113	**Invest1:**	Los puntos *A* y *B* en la gráfica se pueden mover hacia la izquierda y obviamente cuando muevan los puntos van a notar qué sucede.
114	**Niña1:**	¿Hay que llegar a cuánto? *(Mientras mueve los puntos en el A y B).*
115	**Niño2:**	Bájele más a esta hasta que llegue.
116	**Niño3 y Niña1:**	A 35.
117	**Niño4:**	Es como cuatro y medio ¿no?
118	**Todos:**	Ahí.
119	**Niño1:**	Mas o menos
120	**Niño3:**	Un poquito más abajo
121	**Invest1:**	Algo que les puede ayudar es activar la casilla que dice "Pendiente" *[Haciendo referencia a una de las casillas de verificación que aparece en la parte inferior del recurso].*
122	**Niño2:**	Busque ahí entre esas la que diga pendiente. *[Dirigiéndose a Niña1, pues es quien está manipulando el cursor].*
123	**Niña1:**	Ya. *Activa la casilla "Pendiente" y aparece en la vista gráfica del recurso el cálculo de la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B:*

		
124	**Niño3**	Ah sí.
125	**Invest2:**	¿Era algo parecido a lo que tú estabas diciendo? *[Dirigiéndose a Niña1].*
126	**Niña1:**	Sí, es esto lo que yo les dije.
127	**Niño4:**	Ahí está *(señala los puntos A y B que aparecen en la vista gráfica y los compara con la información que se obtuvo al activar la casilla "Pendiente").*
128	**Niño1:**	14… *(leyendo la información que apareció en la vista gráfica).*
129	**Niño2:**	¿Cuánto era el porcentaje que debe dar?
130	**Niño1:**	35
131	**Niño2:**	¿Exacto?
132	**Niño3:**	Exacto
133	**Niña4:**	¿Eso no se puede editar desde allá?, ¿los números? *(Haciendo referencia a la información que apareció cuando se activó la casilla "Pendiente", pues allí estaba incluido el porcentaje de inclinación, pero este aún no era igual a 35% exacto)*
134	**Niño3:**	Pues ponga ahí 35 a ver.
135	**Niña1:**	No, pero ¿si puede editar los números? *[Dirigiéndose a Invest2]*
136	**Invest2:**	Miren lo que pasa, muevan el punto y miren lo que pasa. *[Esto con el fin de que los estudiantes noten que al mover*

			alguno de los puntos se modifica simultáneamente la información que apareció en la vista gráfica al activar la casilla "Pendiente"]		
	137	**Niño2:**	Si baja. *[Refiriéndose a que el porcentaje de inclinación bajó cuando intentó mover uno de los puntos]*.		De las líneas 135 a 153 se evidencia el uso que los estudiantes dan al dinamismo de GeoGebra moviendo los puntos tratando de encontrar la posición exacta que describe el porcentaje solicitado, conforme esto sucede es observable como sus ideas se ven modificadas por estas acciones, como muestra la línea 153, relacionan los movimientos de los puntos con la variación de la recta. Estas acciones pueden asociarse con el indicador (C2).
	138	**Niño1:**	Pues ponle ahí…		
	139	**Niño3:**	Es como un cuatro y medio o algo así. *[Refiriéndose a que la coordenada en x del punto A podría ser cuatro y medio, para que el porcentaje de inclinación fuera de 35% exacto]*.	En la línea 153 Niño4 expresa algo que se podría asociar con la AM2, pues está coordinando la dirección del cambio en *x* con la dirección del cambio en *y*.	
	140	**Niña1:**	Mmm… *(mueve los puntos para intentar aproximar el porcentaje de inclinación a lo solicitado por los investigadores)*.		
	141	**Niño1:**	0.38, ay, ya no sé. *[Refiriéndose al porcentaje de inclinación que apareció en el momento en que Niña1 movió los puntos]*.		
	142	**Niño2:**	Bájalo un poquitico, …, ahí.		
	143	**Niño3:**	¿Eso en que punto va?	Una vez los estudiantes logran que el ciclista obtenga la inclinación del 35%, verbalizan que la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B es siete veinteavos y que por esta razón el ciclista debe avanzar 20 metros y subir 7 si desea pasar por la calle más inclinada del mundo. Estos comportamientos están asociados a la AM3, puesto que los estudiantes están relacionando los cambios horizontales y verticales y además, los están cuantificando.	
	144	**Niño1:**	0.37. *[Refiriéndose al porcentaje de inclinación que apareció en el momento en que Niña1 movió los puntos de nuevo]*.		
	145	**Niño2:**	0.38 otra vez. *[Refiriéndose al porcentaje de inclinación que apareció en el momento en que Niña1 volvió a mover los puntos]*.		
	146	**Niño3:**	Es como cuatro y medio		
	147	**Niño1:**	¿Se puede agrandar?		
	148	**Niño2:**	Expándelo a ver si se mueve mejor.		Cuando los estudiantes logran alcanzar el porcentaje solicitado, han tenido que buscar la exactitud que ofrecen los cálculos de GGB, en la línea 157 estuvieron muy cerca de alcanzarlo, y gracias a las acciones que han realizado
	149	**Niño3:**	Un poquito hacia allá *[refiriéndose al lado izquierdo de la pantalla]*.		
	150	**Niño4:**	Ah y si lo ponemos más lejano y un poquito más alto ¿qué haría?		
	151	**Niño3:**	¿O más cercano?		
	152	**Invest1:**	¿A qué te refieres con un poquito más lejano y un poquito más alto?		

	153	**Niño4:**	Un poquito más hacia la derecha y un poquito más hacia arriba.		constantemente de mover los puntos, en la línea 163 niño 3 indica la última acción para alcanzar el objetivo. Estas acciones les permitieron establecer relaciones entre el valor pendiente y el movimiento acertado de los puntos. Esta acción se puede describir mediante el indicador (D2).
	154	**Invest2:**	Inténtenlo.		
	155	**Niño2:**	Más a la derecha.		
	156	**Niño1:**	Parece que sí		
	157	**Niño2:**	¡Uy, casi! 0.357.		
	158	**Niño3:**	No, se pasó. No, pero haga zoom.		
	159	**Niño1:**	Entonces tocaría correrlo más.		
	160	**Niño4:**	Estaba en 14 más o menos y pasó a 17, inténtenlo pasar de 15 *[refiriéndose a la coordenada en x del punto B]*.		
	161	**Niño1:**	Súbalo otro poquito *[dirigiéndose a Niña1]*.		
	162	**Niño2:**	No, no déjelo así *[dirigiéndose a Niña1]*.		
	163	**Niño3:**	Súbalo, más hacia la derecha. *[dirigiéndose a Niña1]*.		
	164	**Niño4:**	Por fin, siete veinteavos *[refiriéndose a la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B que aparece en la vista gráfica]*.		
	165	**Invest1:**	Ok, la pregunta era: si un ciclista quisiera subir o bajar de esta calle, ¿cuál sería la cantidad de metros que avanzaría versus la cantidad de metros que suba o que baje? Entonces, ahí ¿cuál sería la respuesta?		
	166	**Niño2:**	Avanza 20 metros y sube 7.		
	167	**Invest1:**	Avanza 20 metros y sube 7 ¿Todos están de acuerdo?		
	168	**Todos:**	Sí.		
18:40 a 19:14	**169**	**Invest1:**	Ok, listo, bien, todos hasta ahí. Segunda pregunta: en una calle cuyo avance es de 20 metros mientras su subida es de 10 metros, ¿cuál es su porcentaje de inclinación?, ¿es mayor o menor que el porcentaje de esa carretera?	En el fragmento comprendido por las líneas 170 a 176 se evidencia nuevamente un comportamiento asociado a la AM3, pues nuevamente los estudiantes están relacionando los cambios verticales con los cambios horizontales y cuantificando el cambio para hallar el porcentaje de	En el fragmento comprendido entre las líneas 170 y 176 los estudiantes usan nuevamente el movimiento de los puntos para confirmar su afirmación, la cual resulta ser cierta. De igual manera esta acción se encuentra descrita por (D2).
	170	**Niño2:**	Es mayor, es 50% ¿no? Si es 50% y es mayor, según yo, no sé si este mal.		
	171	**Niña1:**	Esperen, ya *(mueve los puntos A y B del recurso)*		
	172	**Niño1:**	Sí, 0.5 es mayor		
	173	**Invest1:**	O sea que ¿qué porcentaje es?		

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>174</td><td>Todos:</td><td>50%</td></tr>
<tr><td>175</td><td>Invest1:</td><td>Y es… mayor, dicen ustedes.</td></tr>
<tr><td>176</td><td>Todos:</td><td>Sí</td></tr>
</table>
</td>
<td>inclinación solicitado por el investigador.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>19:15 a 27:21</td>
<td>
<table>
<tr><td>177</td><td>Invest1:</td><td>Ok, tercera, ¿cuál es el menor porcentaje de inclinación no negativo posible y como puede interpretarse?</td></tr>
<tr><td>178</td><td>Niño1:</td><td>¿Como fraccionarios?</td></tr>
<tr><td>179</td><td>Niño2:</td><td>¿El menor?</td></tr>
<tr><td>180</td><td>Invest1:</td><td>¿Cuál es el menor porcentaje de inclinación no negativo posible y como puede interpretarse?</td></tr>
<tr><td>181</td><td>Niño1:</td><td>Sería… Ah no</td></tr>
<tr><td>182</td><td>Niño3:</td><td>Uno sobre que numero</td></tr>
<tr><td>183</td><td>Niña1:</td><td>Mmm…</td></tr>
<tr><td>184</td><td>Niño3:</td><td>De hecho, sería… uno sobre infinito.</td></tr>
<tr><td>185</td><td>Niña1:</td><td>No hay inclinación y tampoco es negativo (mueve los puntos de modo que el ciclista queda en una vía paralela al eje x).</td></tr>
<tr><td>186</td><td>Niño2:</td><td>No hay inclinación y no es negativa.</td></tr>
<tr><td>187</td><td>Niño3:</td><td>Pero cero es mayor que menos uno entonces…</td></tr>
<tr><td>188</td><td>Niña1:</td><td>¿Entonces sería 0?</td></tr>
<tr><td>189</td><td>Invest1:</td><td>¿Cuál es entonces la menor inclinación posible?</td></tr>
<tr><td>190</td><td>Todos:</td><td>0%</td></tr>
<tr><td>191</td><td>Invest1:</td><td>Bien ¿Y cómo podría interpretarse esto en términos de lo que hemos trabajado hasta el momento?</td></tr>
<tr><td>192</td><td>Niño2:</td><td>Eso sería sigma.</td></tr>
<tr><td>193</td><td>Niño1:</td><td>No, usted ya está metiendo otras cosas.</td></tr>
<tr><td>194</td><td>Invest1</td><td>¿Cómo lo podrían interpretar?</td></tr>
<tr><td>195</td><td>Niño1</td><td>¿Con números?</td></tr>
<tr><td>196</td><td>Invest1:</td><td>Mmm sí.</td></tr>
<tr><td>197</td><td>Niño2:</td><td>Pues, cero sobre algo.</td></tr>
</table>
</td>
<td>En las líneas 185 y 186 se muestra que tanto Niña1 como Niña2 reconocen que al mover los puntos A y B lograron obtener la menor inclinación no negativa posible y que en realidad en este punto, no existe inclinación. En la línea 90, todos los estudiantes cuantifican esta inclinación y posteriormente en la línea 200, Niño2 relaciona los cambios verticales con los horizontales y los cuantifica. Dado que se evidencia cuantificación del cambio, esto se considera indicio de AM3.</td>
<td>Las diferentes acciones que los estudiantes han realizado sobre el software, les permite intuir cuál debería ser la respuesta antes de realizar nuevamente una acción. En este orden, GGB les ha permitido establecer relaciones entre los objetos GGB y los objetos matemáticos que se corporeizan a través de estos, como se evidencia en 185, 186 y 187. Nuevamente, esta acción se encuentra descrita por el indicador (D2).</td>
</tr>
</table>

198	**Invest1:**	Sí, estamos de acuerdo… Pero digamos en términos de avances.	
199	**Invest2:**	Tengan en cuenta lo que hicieron en el punto anterior	
200	**Niño2:**	Ah, ahí solo avanza 20 metros, pero no sube ninguno.	
201	**Invest2:**	Y eso, ¿qué les indica? Cuando respondieron la pregunta anterior ustedes estaban sacando conclusiones sobre algo, sobre algo que formaban esos puntos. ¿Acá se forma ese algo?	
202	**Niño2:**	Ah la recta con una pendiente.	
203	**Invest2:**	¿Y en este caso que pasaría con esos datos?	
204	**Niña1:**	Eh sería cero equis más ye, que vendría siendo el número que sería en ese caso… en ese caso sería… el punto de corte con el eje y vendría siendo más dos.	
205	**Niño1:**	No, equis por dos.	Por otro lado, en las líneas 206 y 208, Niña1 y Niño3 interpretan la dirección del cambio en términos de la forma en que quedará la recta si su pendiente es cero. Esto es indicio de AM2.
206	**Niña1:**	No porque si yo hago eso, si yo le estoy diciendo equis por dos no le estoy indicando que no suba la línea o sea que no quede recta.	
207	**Invest2:**	¿Recta cómo?, ¿que quede para arriba?	
208	**Niño3:**	Es decir que quede paralela al eje *x*	
209	**Niño2:**	Paralela no, horizontal	
210	**Invest2:**	Paralela, recuerden, dos líneas que no se cortan son paralelas.	
211	**Invest1:**	Bien vamos bien hasta ahí ¿Tienen alguna duda al respecto?	
212	**Niña1:**	No, estamos viendo esto ahorita en noveno.	
213	**Invest1:**	Tengo una pregunta y es la siguiente, ¿cómo puede interpretarse una pendiente negativa en términos de lo que estamos hablando? En términos de la carretera, del ciclista…	
214	**Niña1:**	Una pendiente negativa sería bajando	Nuevamente, se obtienen evidencias de comportamientos asociados a AM2 en las líneas 214, 217 y 218 cuando Niña1, Niño2 y Niño4 verbalizan cómo
215	**Invest2:**	¿Cómo?	
216	**Invest1:**	¿Y eso que representa?	
217	**Niño2:**	Pues indica que está bajando ¿no?	

218	**Niño4:**	O sea, significa que sigue así *(hace un gesto con su mano intentando representar una recta que decrece)* pero ahora baja. 
219	**Niña1:**	Si, para que sea bajando el número que acompaña a *x* tiene que ser negativo.
220	**Niño2:**	Entonces ¿se puede sacar el porcentaje negativo de inclinación?
221	**Niña1:**	Sí, mire (mueve uno de los puntos de modo que la pendiente de la recta sobre la que está el ciclista tiene una pendiente negativa)
222	**Niño3:**	¡Ay sí!
223	**Niña1:**	Si, significa que el número que acompaña a *x* que es el número de distancia recorrida, es negativo.
224	**Niño1:**	Sí.
225	**Invest1:**	Bien, otra pregunta, supongamos que estamos en una carretera nuevamente, ¿en qué momento deja de ser en subida para convertirse en bajada?, en términos de lo que estamos trabajando acá.
226	**Niño2:**	Cuando llega a la cumbre y no hay digamos una montaña, que empieza a subir o que empieza a bajar. *(Intenta dibujar una montaña moviendo su mano).*
227	**Invest1:**	Y en términos de lo que estamos trabajando, ¿qué sería la cumbre?, ¿cómo se vería la cumbre?
228	**Niño1:**	El punto más alto de alcanzar en ye.
229	**Niño4:**	Si uno va en la carretera y uno va subiendo ¿cómo hace uno para identificarlo?

interpretan la dirección de los cambios en *x* y en *y* cuando la pendiente de la recta que forma la carretera es negativa.

Por otro lado, en las líneas 219 y 223, Niña1 hace alusión a una cuantificación del cambio generalizada, pues expresa que para que la recta que forma la carretera sea decreciente, la pendiente debe ser negativa.

En la línea 226 se puede evidenciar que Niño2 establece una relación entre la dirección del cambio y el momento en el en el que la trayectoria del ciclista deja de ser en subida y comienza a ser en bajada. Esto es un indicio de un comportamiento asociado con la AM2.

Cuando el investigador pregunta sobre una pendiente negativa, es la niña 1 quien tiene la idea inicial y el niño 2 apoya esto, enseguida, el niño 2 pregunta si es posible un porcentaje de inclinación negativo y la acción que realiza la niña 1 en el software modifica las ideas previas del niño 2 y el niño 3. Esto se evidencia en las líneas de la 219 a la 224. Estas acciones se pueden describir mediante el indicador (B3).

230	**Invest1:**	Si, exacto, cuál es el punto de cambio por decirlo de alguna manera.
231	**Niño2:**	¿Pues en ese punto sería como cero?
232	**Invest1:**	¿Qué sería cero?
233	**Niño1:**	Pues sería el punto más alto en ye.
234	**Invest1:**	Pero en términos de lo que estamos trabajando.
235	**Invest2:**	Tienes la idea.
236	**Invest1:**	Tiene que ver con la pregunta que hicimos anterior a la de la pendiente negativa.
237	**Niño3:**	Entonces, cuando…
238	**Niño2:**	¿Dónde inició la subida? O sea, teniendo eso como referencia.
239	**Niño3:**	Podría ser como el lugar más alto.
240	**Niño2:**	El lugar más alto sería cero ¿no?
241	**Niño3:**	Sí, porque ya serían negativos.
242	**Niño4:**	Digamos que la montaña es así como una punta entonces técnicamente pasaría la inclinación, digamos que es 35% como en el ejemplo ¿sí? Digamos que es positiva cuando se va subiendo y se vuelve negativa cuando usted empieza a bajar.
243	**Invest1:**	Sí, bien.
244	**Niño3:**	¿Cuál es la pregunta?
245	**Invest1:**	¿En qué momento la pendiente deja de ser positiva?
246	**Niño2:**	¿Cuándo pasa a ser negativa?
247	**Invest1:**	¿Y eso cuando pasa?
248	**Niño2:**	Cuando los números se vuelven negativos
249	**Niño4:**	Según esto es cuando ye está en dos que es con lo que vimos acá que ye es como el punto de referencia y pues

Ahora bien, en las líneas 231 y 240 y 256, Niño2 establece una relación entre los cambios de las variables avance y subida y cuantifica el cambio que surge a partir de esto. Lo anterior es un comportamiento asociado a AM3.

A partir de la línea 226 se desarrolla un diálogo entre los estudiantes e investigadores en el cual se evidencia la relación establecida entre objetos matemáticos, por ejemplo el cambio con el punto más alto en y [línea 233], o reconocer la pendiente como cero en el punto máximo [línea 240, 256 y 259].

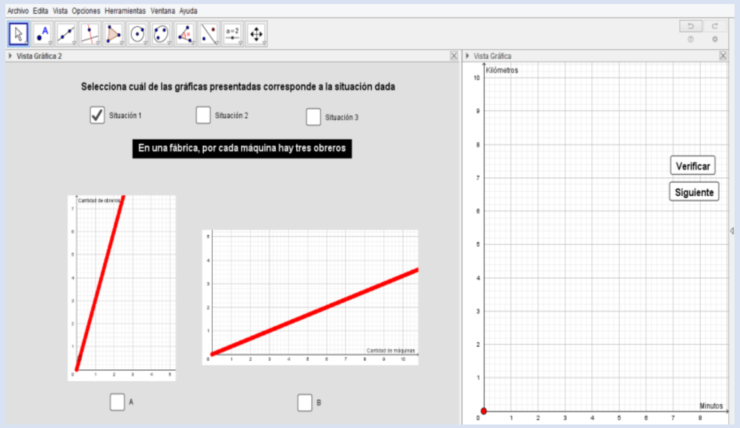
También los estudiantes describen la relación matemática que hay entre la pendiente y una curva, describiendo el cambio de signo en la pendiente, como la forma en que crece o decrece una función. [línea 246 y 248].

A estas acciones y descripciones es posible asignarles el indicador (Z2), por las relaciones establecidas.

		cuando…, *(hace gesto con la mano intentando dibujar una montaña y haciendo énfasis en su punto más alto).* 
250	**Niño3:**	Sí cuando eso pasa.
251	**Invest1:**	¿Cuándo qué?
252	**Niña1:**	Cuando ye se vuelve negativo
253	**Niño1:**	Podría ser más menos porque depende de si está subiendo o bajando.
254	**Niña1:**	Es que no sé cómo expresarlo, pero ya tuve la idea.
255	**Invest1:**	¿En qué momento la pendiente deja de ser positiva? Tú dijiste que cuando qué…
256	**Niño2:**	Cuando llega a cero.
257	**Invest1:**	Y según el ejemplo que hicimos ahorita, ¿cuándo llega a cero?
258	**Niño4:**	Cuando está ahí ye en dos. *(Señala la pantalla del computador).*
259	**Niño3:**	Cuando es paralela.
260	**Invest1:**	¿Cuándo es qué?
261	**Niño1:**	Cuando es paralela a *x*.
262	**Invest1:**	Bien, ahí está bien ¿Estamos? Como les dije es una subida bajada. ¿Está claro ahí?
263	**Todos:**	Sí.

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th>Número de tarea:</th><th>3</th><th>Tipo de aplicativo:</th><th>Evaluación</th></tr>
<tr>
<td>27:44 a 31:28</td>
<td>

Se explica a los estudiantes que con el último recurso se realizará una evaluación de los contenidos trabajados durante la sesión. Se les indica la ubicación del tercer recurso y se solicita que lo abran. La interfaz se muestra a continuación:



<table>
<tr><td>264</td><td>Invest2:</td><td>Listo, aquí les vamos a presentar tres situaciones diferentes. Entonces para empezar, dale clic en la primera, por favor.</td></tr>
<tr><td>265</td><td>Niña1:</td><td>Hace clic en la casilla de verificación “Situación 1”.</td></tr>
<tr><td>266</td><td>Invest2:</td><td>Van a leer el enunciado y van a seleccionar la gráfica que ustedes consideran que les está representando esa situación.</td></tr>
<tr><td>269</td><td>Niño2:</td><td>Es la A porque la independiente es la máquina y hay tres obreros por cada máquina.</td></tr>
</table>

</td>
<td>

Indicadores

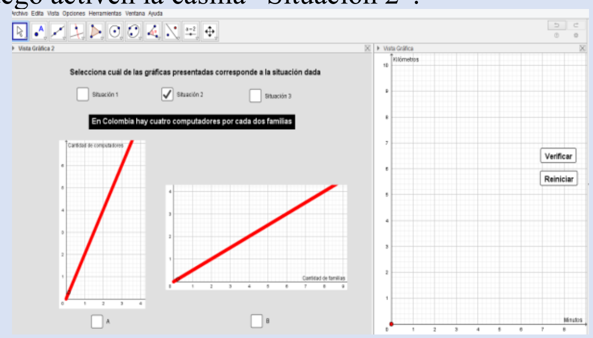
Se considera que con este recurso los estudiantes podrán evidenciar comportamientos asociados con AM1, AM2 y AM3. Estos se describen a continuación:

***AM1*:**
Los estudiantes coordinan el valor de una variable con los cambios de la otra. Esto se puede evidenciar cuando al seleccionar la gráfica argumentan aludiendo correctamente a la magnitud representada en el eje x y a la magnitud representada en el eje y.

***AM2*:**
Los estudiantes verbalizan que a medida que aumenta la magnitud x, también aumenta la magnitud y. O bien, que a medida que disminuye la magnitud x, también lo hace la magnitud y.

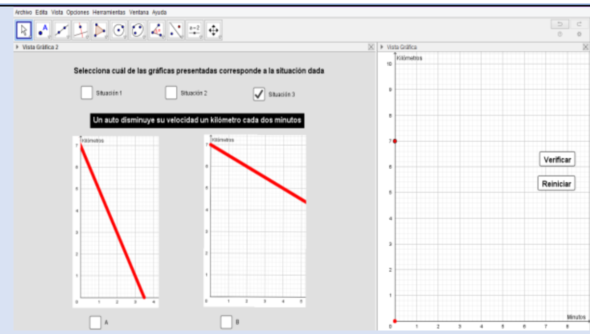
***AM3*:**
Los estudiantes coordinan la magnitud del cambio de la

</td>
<td>En esta situación, es observable que los objetos matemáticos adquiridos por los estudiantes conforme pasaron las actividades les permitieron llegar a conclusiones rápidas de lo solicitado en la actividad. Las imágenes proporcionadas por el recurso solo sirven de apoyo visual, pues no hay una acción directa sobre el medio que permita establecer relaciones entre objetos matemáticos y objetos GeoGebra, salvo por la activación de la casilla de verificación al final, cuyo resultado es igual a una de las imágenes. Sin embargo, las ideas de los estudiantes son construidas a partir de los desarrollado en el recurso 1 y el recurso 2. Por esto, el indicador</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>270</td><td>Niño3:</td><td>Es la A, entre más máquinas, más personas, obreros.</td></tr>
<tr><td>271</td><td>Invest2:</td><td>¿O sea la pendiente de esa recta es?</td></tr>
<tr><td>272</td><td>Niño2:</td><td>Es tres.</td></tr>
<tr><td>273</td><td>Invest2:</td><td>Bien, perfecto. Si quieren verificar, hacen clic ahí en “verificar” [refiriéndose a un botón que hace parte del recurso] y eso les muestra la simulación a ver si es exactamente que escogieron.</td></tr>
<tr><td>274</td><td>Niño1:</td><td>Sí, si es. (Observando la simulación luego de que Niña 1 hiciera clic en el botón “verificar”).</td></tr>
<tr><td>275</td><td>Invest2:</td><td>Ahora por favor, den clic en “siguiente” y dale en “reiniciar” [refiriéndose a otro botón que hace parte del recurso y borra el rastro obtenido para la situación 1]. Luego activen la casilla “Situación 2”.

</td></tr>
<tr><td>276</td><td>Niño2:</td><td>Sería un medio. Es esa la A.</td></tr>
<tr><td>277</td><td>Niño1, Niño3 y Niño4:</td><td>Sí (mientras Niña1 da clic en el botón “Verificar” para ver la simulación).</td></tr>
<tr><td>278</td><td>Invest2:</td><td>Ahora clic en “reiniciar” y luego activan “Situación 3”.</td></tr>
</table>
</td>
<td>magnitud x con la magnitud y. Un indicador de esto es que reconozcan que las magnitudes covarían de manera constante. Además, que sepan dar cuenta y razón del valor de la pendiente para cada situación.

<table>
<tr><th colspan="2">Convenciones</th></tr>
<tr><td>AM1</td><td></td></tr>
<tr><td>AM2</td><td></td></tr>
<tr><td>AM3</td><td></td></tr>
</table>

En la línea 269 Niño2 coordinó los cambios de una variable con la otra, puesto que mostró tener claridad al expresar qué variable dependía de la otra. Este es un comportamiento que se puede asociar con AM1.
Seguido a esto, en la línea 270, Niño 3 verbalizó, que a medida que aumentaba el número de máquinas, también aumentaría el número de obreros, comportamiento asociado con AM2. Después, en la línea 272 Niño 3 menciona el valor de la pendiente de la recta generada por la situación propuesta, lo cual es un comportamiento asociado a AM3.</td>
<td>más acorde a la situación es (B4).</td>
</tr>
</table>

		
279	**Niño2:**	Emm cada dos minutos, un medio.
280	**Niño3:**	Es esta la B
281	**Niño4:**	¿No es correcta?
282	**Niño2:**	No, sí es esa
283	**Invest2:**	¿Por eligieron esa opción?
284	**Niño2:**	Un auto disminuye su velocidad un kilómetro cada dos minutos.
285	**Niño3:**	Y pues se sabe que…
286	**Niño2:**	Es una trampa
287	**Niño1:**	Ahh, no, estamos bien.
288	**Invest2:**	Listo, yo quiero saber por qué.
289	**Niño3:**	Pero si es esa, bajo un kilómetro y acá bajo dos minutos. (Señala la cuadrícula de la gráfica)
290	**Niño2:**	Si, y la independiente siempre va a ser ye.
291	**Invest2:**	Exacto, es correcto.

En la línea 276 Niño2 de inmediato da cuenta y razón de la pendiente de la recta que se genera a partir de la situación dada. Este comportamiento pertenece a AM3.

En la línea 279, Niño2 menciona la pendiente de la recta que se genera a partir de la situación dada. Debido a un error en la programación, el recurso indica que la respuesta no es correcta, sin embargo, en la línea 282 Niño2 vuelve a afirmar que la respuesta que seleccionaron sí es correcta. Este es un comportamiento asociado con AM3.

Cuando se pide justificar la respuesta, Niño3, hace alusión a la dirección del cambio de ambas variables, lo cual muestra un comportamiento asociado con AM2. Además, Niño2 muestra que reconoce cuál es la variable independiente en ese caso; esto muestra un comportamiento asociado a AM1.

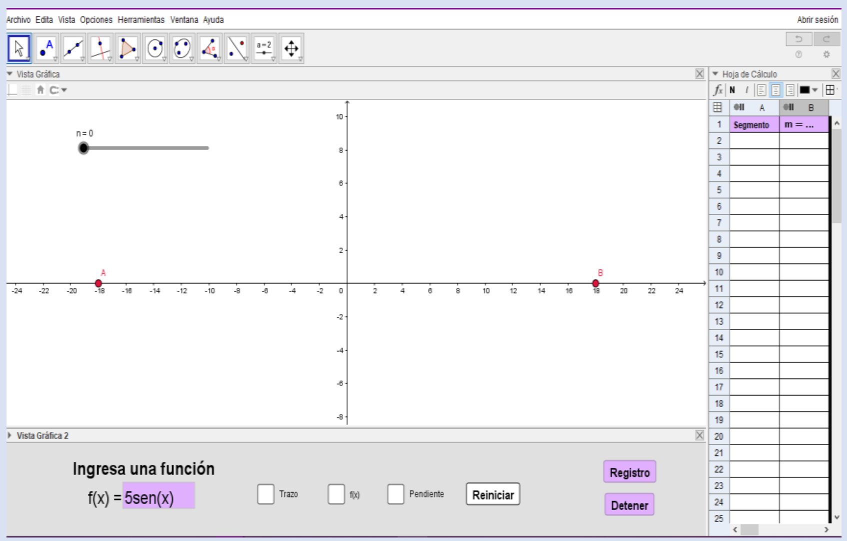
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>292</td><td>Niña1:</td><td>El computador se equivocó.</td></tr>
<tr><td colspan="3">En este momento los investigadores evidencian que hubo un error en la programación del recurso, pues este mostraba como incorrecta, la respuesta correcta a la situación propuesta. A pesar de esto, los estudiantes dieron cuenta y razón de por qué su respuesta era acertada.</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>32:06 a 41:09</td>
<td>
<table>
<tr><td colspan="3">Luego, los investigadores preguntan a los estudiantes cómo fue su experiencia durante la sesión, en particular se pide su opinión respecto a la pertinencia del uso de la herramienta tecnológica. Adicionalmente, se pregunta por los aprendizajes que consideran, reforzaron o adquirieron al realizar las tareas propuestas.</td></tr>
<tr><td>293</td><td>Niña 1:</td><td>Ok, a mí personalmente me gusta más hacerlo en lápiz y papel que en computador, la tecnología me… ya había usado GeoGebra y no tenía buena experiencia con GeoGebra.</td></tr>
<tr><td>294</td><td>Invest2:</td><td>¿Pero por qué? Cuéntanos esa experiencia, porque todo esto lo vamos a trabajar desde el computador entonces queremos saber si lo han trabajado cuales son las dificultades que han tenido.</td></tr>
<tr><td>295</td><td>Invest2:</td><td>O sea, lo que hace que no te guste trabajar con el ósea que tu digas yo me quedo con el lápiz y papel porque con GeoGebra siempre pasa esto</td></tr>
<tr><td>296</td><td>Niña 1:</td><td>No de por sí, yo nunca utilizo calculadora, he calculado 27 factorial sin calculadora porque en general la tecnología casi no me gusta</td></tr>
<tr><td>297</td><td>Invest2:</td><td>Y con GeoGebra que te ha pasado, algo que te acuerdes que tu digas, uy que fastidio eso</td></tr>
<tr><td>298</td><td>Niña 1:</td><td>Cuando trataba de… cuando estábamos haciendo lo de la presentación, para… lo que estábamos haciendo el semestre pasado</td></tr>
<tr><td>299</td><td>Niño 2:</td><td>Geometría ¿abstracta?</td></tr>
<tr><td>300</td><td>Niña 1:</td><td>Me complico mucho, demasiado con eso entonces prefiero lápiz y papel</td></tr>
</table>
</td>
<td>En el resto de la transcripción no hay análisis desde este marco, pues allí se habla respecto a la experiencia de los estudiantes con la herramienta tecnológica y sobre su percepción del trabajo grupal realizado durante la sesión</td>
<td></td>
</tr>
</table>

301	**Invest2:**	Ok.
302	**Niño 3:**	Pues yo creo que ella está como acostumbrada a lápiz y papel, uno está como más acostumbrado a la tecnología, por ejemplo, en este ejercicio yo creo que, si nos sirvió mucho GeoGebra, porque al principio intentamos hacerlo como con lápiz y papel, ya cuando vimos, pudimos utilizar el computador, se nos facilitó mucho más que con lápiz y papel.
303	**Invest2:**	Gracias
304	**Niño 4:**	A mí en lo personal me gusta hacerlo todo mentalmente, pues para confirmar, prefiero si a veces el computador, pues más que todo porque empecé a trabajar con un programa que se llama raptor que es de programación, entonces pues ahí confirmar los datos y todo, entonces pues más bien con la mente ejército y ya después verifico.
305	**Invest2:**	Si también
306	**Niño 3:**	Pues, yo también opino que es mejor el lápiz y papel en algunos casos, porque hay cosas complicadas de hacer y pues si en el computador se puede, pero pienso que con lápiz y papel uno tiene la oportunidad de aprender más en esos casos uno ejercita su mente
307	**Niño 2:**	También opino que el lápiz y papel es mejor ya que no es tan común para nosotros usar tanto GeoGebra, pero hay muchos colegios que lo hacen, algo positivo de GeoGebra es que los puntos están ahí, en lápiz y papel hay que borrar, y a mí que me gusta hacer todo con esfero, corrector y eso.
308	**Invest1:**	Pero GeoGebra hoy fue una buena salida, es decir una pregunta puntual ¿Hubieran podido hacer estos problemas sin GeoGebra?
309	**Niño 2:**	Si, pero nos hubiera costado más.

310	**Niña 1:**	No, yo por lo personal no creo.
311	**Niño 4:**	por ejemplo, el de la bicicleta (La segunda tarea) si necesitábamos a geometría, hubiera sido más difícil.
312	**Niño 3:**	Si, el primero y el tercero si se puede hacer mucho más fácil con lápiz y papel, pero con el segundo no, ese si se nos complicó.
313	**Invest2:**	Ok, ¿en cuanto a aprendizajes que nos dio? Aprendizajes matemáticos
314	**Niño 4:**	Pues, desde el año pasado no recordaba eso y me sirvió para recordarlo porque hace rato no lo hacía.
315		
316	**Niño 3:**	De aprendizaje, aprendí, o bueno, no la tengo muy clara, aún, sé que la puedo aprender mejor, la del segundo punto la de distancia vertical/ distancia horizontal x 100.
317	**Niño 2:**	Aprendí a usar más GeoGebra porque solo la usaba para hacer figuras geométricas, y pues recordar lo del año pasado, y que siempre hay una constante en la formula.
318	**Niña 1:**	Aprendía a usar GeoGebra, y pues en lo personal a trabajar en equipo, a ser menos individualista.
319	**Invest2:**	¿Cómo se sintieron? Trabajo en equipo ya que lo mencionan ¿Cómo se sintieron trabajando en equipo y que cada uno tenga su papel? ¿Te sigues quedando con tu posición de prefiero trabajar individualmente? (dirigiéndose a niña 1)
320	**Niña 1:**	No, pues si me sirve trabajar en equipo, usualmente he tenido malas experiencias en trabajo en equipo, suelo ser yo quien termina haciendo todo, suelo ser muy individualista con mis cosas
321	**Niño 3:**	Yo creo que el trabajo en equipo es bueno cuando todos quieren participar, si todos participan, pues cada uno da su opinión y con eso debatimos para llegar a la respuesta
322	**Niño 4:**	Eso significa una Antítesis para llegar a la síntesis

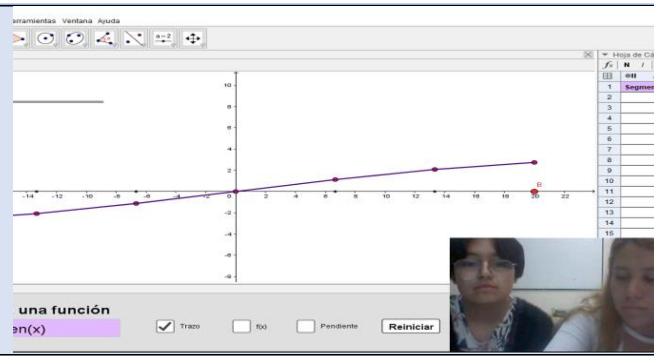
	323	**Invest1:**	Por ejemplo, hay escasez de personas que sean afines a tus gustos académicos		
	324	**Niña 1:**	Si, conozco un montón de personas que no son afines con mi forma de trabajar		
	325	**Niño 4:**	Bien, si quería hablar de que yo antes era como ella, de que no me gustaba trabajar con nadie porque sentía que las personas me frenaban.		
	326	**Niño 3:**	Cuando uno trabaja y todos opinan bien, como hoy, pero generalmente uno opina y los demás hacen		
	327	**Profe:**	Pero yo no creo que ese sea su caso porque ustedes dos no es que trabajen como equipo, ósea si construyen cuando trabajan en grupos, pero generalmente hacen críticas de lo que construye el otro y no digo críticas en el mal sentido, son muy críticos en lo que dice el otro y eso si les permite de una manera pulir una idea como más seria		
	328	**Invest1:**	Hoy se notó de hecho, tu dijiste la pendiente, no la pendiente sino la relación es 3/2 y tu dijiste no es 2/3 porque … y te convenció finalmente.		
	329	**Profe:**	Entonces a larga no es que uno necesite una persona que trabaje haciendo lo que uno dice sino más bien una persona que le diga usted está haciendo mal yo le propongo esto… y que lo convenza a uno.		
	330	**Invest2:**	De hecho, miren que la conclusión más importante de la primera actividad salió de ahí, que cuando empezaron a discutir de la inclinación de la recta y si daba lo mismo o no daba lo mismo y salió de ahí.		

Anexo 3: Transcripción sesión 2

<table>
<tr><th colspan="4">SESIÓN 2</th></tr>
<tr><th>Número de tarea</th><th>1</th><th>Tipo de aplicativo</th><th>Verificación de propiedades</th></tr>
<tr><th>Minuto</th><th>Transcripción</th><th>Análisis desde Carlson</th><th>Análisis desde AS</th></tr>
<tr>
<td>0:00 a 2:02</td>
<td>
Se entrega a las dos estudiantes la tarea a desarrollar, la interfaz del recurso que van a trabajar las estudiantes es:


No hay un enunciado de trabajo directamente, pues la tarea consiste en un taller que se desarrolla pregunta tras pregunta, conforme se avance, estas serán evidenciables en el desarrollo del diálogo.
<table>
<tr><td>1</td><td>Niña 1:</td><td>No, no entendí (Se ríe)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Inves 1:</td><td>¿No? ¿Tú tampoco? [Le habla a la niña 2]</td></tr>
</table>
</td>
<td>
<table>
<tr><th colspan="2">Convenciones</th></tr>
<tr><td>AM1</td><td></td></tr>
<tr><td>AM2</td><td></td></tr>
<tr><td>AM3</td><td></td></tr>
<tr><td>AM4</td><td></td></tr>
<tr><td>AM5</td><td></td></tr>
</table>
Se considera que con este recurso los estudiantes podrán evidenciar comportamientos asociados con AM2, AM3 y AM4. Estos se describen a continuación:
AM2:
Los estudiantes reconocen que cuando el valor del deslizador n aumenta, también aumenta el número de segmentos que aparecen en pantalla y van formando la curva. Además, reconocen que entre mayor sea la cantidad de segmentos que aparecen, mayor es la aproximación de la unión de estos a la curva ingresada.
AM3:
</td>
<td>
Indicadores
En las primeras líneas se realiza una explicación a las estudiantes de cómo deben usar el recurso y para qué sirven los elementos que se presentan allí. [Línea 1 a 15]
A pesar de que las estudiantes realizan el ingreso de los datos solicitados y hacen lo pedido por los investigadores, no hay una evidencia de relación entre los objetos que van apareciendo, con algún objeto matemático claro. Incluso, tampoco se resalta evidencia de relación entre los mismos objetos GeoGebra (GGB). A estas acciones se les asigna el indicador (A0)
Más adelante en la línea 17 se evidencia la primera relación entre objetos GGB y objetos matemáticas.
</td>
</tr>
</table>

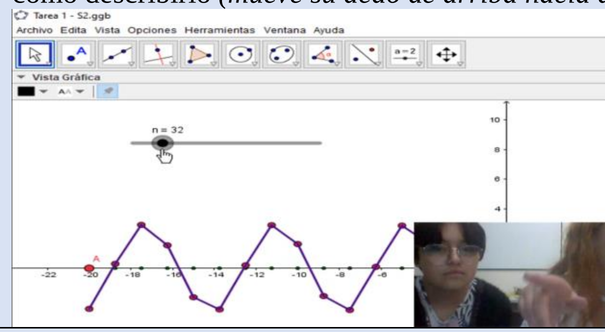
02:12 a 11:58	**3**	**Inves 2:**	Si quieren léanlo en voz alta y lo miramos… léanlo en voz alta, alguna de las dos	Los estudiantes asocian las pendientes positivas y negativas de los segmentos con la posición de estos, reconocen que los segmentos cuya pendiente es positiva, están inclinados hacia la derecha y los segmentos con pendiente negativa están inclinados hacia la izquierda. ***AM4:*** Los estudiantes asocian el signo de las pendientes de los segmentos con los comportamientos de crecimiento y decrecimiento den diferentes intervalos de la función.	
	4	**Niña 1:**	*(Lee el enunciado)* Ingrese en la casilla de entrada la función efe igual 3 sen equis $[f(x) = 3sen(x)]$		
	5	**Inves 2:**	Listo, hasta ahí, primera parte del enunciado, entonces ¿Cuál es la casilla de entrada? Es esta que se ve aquí en morado *(señala en la pantalla la casilla de entrada)* ahí ya hay una función ingresada pero entonces pueden dar clic encima, borrar e ingresan esa función que está acá, la escriben así como está ahí		
	6	**Inves 1:**	Esa es la primera tarea que tienen que hacer		
	7	**Inves 2:**	Esa es la primera parte		
	8	**Inves 1:**	Entonces lo pones ahí donde lo necesites		
	9	**Inves 2:**	Ahí la borras y ya puedes ingresar la que te están pidiendo ahí		
	10	**Niña 1:**	*(Ingresa en la casilla entrada la función $f = 3sen(x)$ y da click)*		
	11	**Inves 2:**	Listo, ya hicimos hasta acá, luego dice “seguido a esto, activar la casilla trazo” (*leyendo la siguiente parte del enunciado)*… la casilla trazo es la que está acá *(la señala en pantalla)* … y mover el deslizador ene para responder las siguientes preguntas, este es el deslizador ene *(lo señala en pantalla)*, entonces acá les van a dar unas indicaciones, entonces ¿Qué les dice la primera pregunta?		
	12	**Niña 1:**	¿En cuántas partes queda dividida la gráfica cuando el deslizador toma el valor de seis? (*Leyendo el enunciado)*		
	13	**Inves 2:**	Entonces ahí tienen que mover el deslizador ene hasta que diga ene igual a seis *[$n = 6$]*		
	14	**Niña 1:**	*(Mueve es deslizador buscando el valor de seis)*		
	15	**Inves 2:**	Y si ven, ahí les va mostrando una gráfica, va a apareciendo una gráfica.		
	16	**Inves 2:**	Entonces, ¿qué vamos a tomar como división? Cada que hay un punto ¿sí? Entonces aquí esto sería una primera división *(señala el primer segmento que aparece)*		

		
17	**Niña 1:**	Entonces, ¿En cuántas partes queda dividida la gráfica cuando el deslizador toma el valor de seis? *(Leyendo el enunciado nuevamente)* … quedaría en… seis. *(Escribe estos resultados en una hoja.)*
18	**Niña 1:**	¿Y que vendría jugando el valor de ene en este papel?
19	**Inves 1:**	Eso es lo que vamos a descubrir ahorita… listo, entonces, sigan… el siguiente es…
20	**Niña 1:**	Diez…en diez *(Mueve el deslizador y lo ubica en $n = 10$ y escribe en su hoja el resultado)*
21	**Inves 1:**	La siguiente es en
22	**Niña 1:**	Trece *(Ubica el deslizador en $n = 13$)*
23	**Niña 2:**	*(Anota en su hoja el resultado)*
24	**Niña 1:**	*(Mueve el deslizador hasta su valor máximo que es 200 y luego en 60 que es el siguiente valor pedido)* entonces vengo suponiendo que… se divide en 60 segmentos, no los voy a contar esta vez *(Se ríe)*
25	**Inves 2:**	¡Ajá! Listo
26	**Inves 1:**	O sea, ¿Lo supones?
27	**Niña 1:**	Sí
28	**Niña 1:**	¿Qué sucede cuando ene va aumentado su valor? *(Leyendo el siguiente enunciado)* … va aumentando la cantidad de segmentos
29	**Inves 2:**	Ajá

En las líneas 17 a 28 se evidencia que Niña1 asocia el valor que toma el deslizador *n* con la cantidad de segmentos que van apareciendo en el plano. Inicialmente, ella procedía a contar los segmentos que iban apareciendo, con el fin de verificar su hipótesis. Sin embargo, después de repetir esta acción varias veces, ella parece concluir que a medida que aumenta el valor de *n*, aumenta la cantidad de segmentos en el plano (línea 28). Este es un indicador de AM2.

En la línea 17, Niña uno reconoce la primera relación entre el valor del deslizador y la cantidad de segmentos que aparece en pantalla.
Aquí es importante resaltar que la cantidad de segmentos aún no puede reconocerse como un objeto matemático puntual, sino como el resultado geométrico del valor del deslizador. A esta situación, se asigna el indicador (D0).

De manera similar ocurre en las líneas 22 y 24 con la cantidad de segmentos y el valor del deslizador. Indicador (D0).

30	**Niña 1:**	¿Sí?		
31	**Inves 1:**	¿Qué más dice ahí?		
32	**Niña 1:**	Describe la gráfica que se forma… *(Leyendo el enunciado, enseguida mueve el deslizador)*		
33	**Inves 1:**	¿Y cuál es la gráfica que se forma?		
34	**Niña 1:**	La gráfica que se forma vendría siendo… es que no sabría como describirlo *(mueve su dedo de arriba hacia abajo)* 		En la línea 34 se evidencia la primera relación entre objeto matemático (gráfica de $3sen(x)$) y los segmentos que aparecen en pantalla. Hay una primera descripción de esta a partir de la forma que van tomando los segmentos y es descrita por la niña a partir del movimiento con su mano. También sucede en la línea 38. A esto es posible asignarle el indicador (B2), pues es a partir de los elementos de GGB, que se llega a esta descripción.
35	**Inves 1:**	¿Qué significa eso que estás haciendo con el dedo?		
36	**Niña 1:**	Que es así… *(mueve el dedo nuevamente como en 34 y se ríe)*		
37	**Inves 1:**	¿Tú que dices? *[Preguntando a niña 2]*		
38	**Niña 2:**	¿Como ondas?		
39	**Niña 1:**	¡Eso, ondas!		
40	**Inves 2:**	¿A qué se te parecen esas ondas que aparecen ahí? De pronto de lo que hayas visto antes		
41	**Niña 2:**	Cuando tiro una piedra a un lago y rebota…		
42	**Inves 1:**	Sí, bien.		
43	**Inves 2:**	Listo, ¿ahí qué sigue?		
44	**Niña 1:**	Hacer clic en el botón reiniciar y después ingresa en la casilla de entrada la función *f(x)=x*, luego, en la casilla trazo activa mover el deslizador para responder las siguientes preguntas *(Leyendo el enunciado, enseguida da clic en el botón reiniciar)*		Las indicaciones de cómo usar GGB continúan en las líneas 49, 52 y 54.
45	**Inves 1:**	¿Qué debes ingresar ahora?		

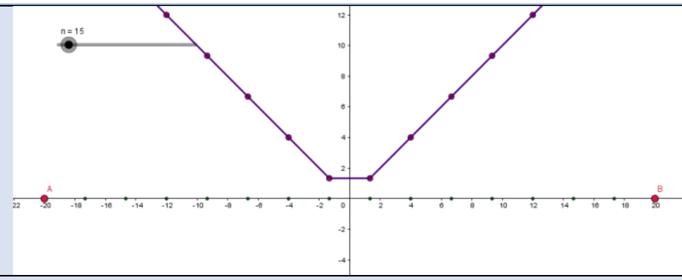
46	**Niña 1:**	*f* de equis igual equis [$f(x) = \lvert x \rvert$]
47	**Niña 2:**	Pero valor absoluto
48	**Inves 2:**	Valor absoluto, muy bien
49	**Inves 1:**	Aquí hay una opción para poner las barritas pero también GeoGebra admite escribir la palabra ABS y equis y la toma como valor absoluto de equis ¿Si me hago entender? … entonces escribe ABS y entre paréntesis la equis
50	**Niña 1:**	*(Ingresa la función $abs(x)$ en la casilla de entrada)* y luego le damos a trazo… listo, la primera pregunta ¿En cuántas partes queda dividida la gráfica cuando se desliza hasta el valor de ocho? *(leyendo el enunciado, enseguida mueve el deslizador hasta $n = 8$)* ¿No se puede subir más? *[refiriéndose al plano]*
51	**Inves 1:**	¿Qué quieres hacer?
52	**Inves 2:**	Subir, ella quiere como subir el plano
53	**Niña 1:**	Es que la vez pasada el gráfico se nos movía, entonces no podíamos
54	**Inves 2:**	Sí
55	**Niña 1:**	Listo, entonces, un dos tres cuatro… ocho *(contando los segmentos que aparecieron en pantalla)*
56	**Niña 2:**	Luego dice que en catorce
57	**Niña 1:**	*(Ubica el deslizador en 14)*
58	**Inves 1:**	¿Qué sucede por ejemplo en la parte de abajo de la función?
59	**Niña 1:**	Cuando son impares se coloca así… se vuelve plano en vez de punto *[se refiere al segmento horizontal que aparece]*

En este caso Niña1, nuevamente decide contar los segmentos que aparecen a medida que mueve el deslizador *n*. Cuando se le pregunta por cuántos segmentos aparecerán si *n* es igual a 100, ella asume que son 100 y como la gráfica de la función valor absoluto es simétrica respecto al eje *x*, ella indica que 50 estarán en la primera mitad de la gráfica y otros 50 en la otra mitad.

En las líneas 55, y 57, nuevamente se describe la relación entre el deslizador y la cantidad de segmentos que aparecen. Al igual que en la línea 63. Niña 1 ya reconoció por completo la relación entre deslizador y cantidad de segmentos y sin necesidad de contar asume que la cantidad serán 100. Pero aún no habla sobre la gráfica que la unión de estos segmentos forma. Nuevamente, asignamos el indicador (D0).

En la línea 59, niña 1 describe otra relación gráfica que reconoce según el valor del deslizador, aquí establece una interpretación entre la paridad del número y la forma que muestra GGB.

<table>
<tr>
<td>11:58 a 14:45

14:47 a 30:15</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>60</td><td>Inves 1:</td><td>¿Por qué?</td></tr>
<tr><td>61</td><td>Niña 1:</td><td>Porque son impares…</td></tr>
<tr><td>62</td><td>Inves 1:</td><td>Ok</td></tr>
<tr><td>63</td><td>Niña 1:</td><td>El siguiente es… ah ya, cien (mientras la niña 2 anota en su cuaderno los resultados, niña 1 mueve el deslizador hasta 100) … vengo suponiendo que son cien, no las voy a contar, yo ya sé que son cincuenta y cincuenta, y como te dije acá termina en punto pues porque es par, viene siendo cincuenta y cincuenta</td></tr>
<tr><td>64</td><td>Inves 1:</td><td>Estamos de acuerdo… ¿Tú estás de acuerdo?</td></tr>
<tr><td>65</td><td>Niña 2:</td><td>(Asiente con la cabeza)</td></tr>
<tr><td>66</td><td>Inves 1:</td><td>Bien, ¿qué dice después?</td></tr>
<tr><td>67</td><td>Niña 1:</td><td>¿Qué sucede cuando el deslizador va aumentando su valor? (Leyendo el enunciado) … va aumentando otra vez sus segmentos… y cuando son pares… bueno, eso ya lo expliqué</td></tr>
<tr><td>68</td><td>Inves 2:</td><td>Listo, ¿qué sigue?</td></tr>
<tr><td>69</td><td>Niña 1:</td><td>Dice… después de esto activar la casilla efe equis, hacer click en el botón reiniciar e ingresar en la casilla de entrada la función efe equis igual equis al cuadrado menos dos equis menos tres</td></tr>
</table>
Aquí, por unos instantes se presenta una pausa en la actividad, debido a que las estudiantes no saben cómo representar el símbolo “al cuadrado” en GeoGebra y los investigadores no recuerdan cómo hacerlo. Además, hay un error en la redacción de la tarea, lo
</td>
<td>Concluye de nuevo que cuando aumenta el valor de n, aumenta la cantidad de segmentos que aparecen en el plano (líneas 55, 63, 67, 71, 94 y 104). Este es un indicador de AM2.</td>
<td>Situación parecida sucede en las líneas 63 y 67 a partir de las descripciones que realiza.

Se asigna el indicador (B2) a esta descripción.</td>
</tr>
</table>

que implica una confusión en el desarrollo de esta. Las estudiantes deben responde a la pregunta ¿Qué sucede con los segmentos cuando aumenta el valor del deslizador?

70	**Inves 1:**	Activa la casilla de trazo
71	**Niña 1:**	Ahhh, ok *[hay un silencio largo en el que mueve el deslizador haciendo que tome diferentes valores]* (…) vuelve a aumentar sus segmentos y cuando está en impar queda en punta y en par queda plana
72	**Inves 2:**	Si, de acuerdo
73	**Niña 1:**	¿Qué aparece en la pantalla cuando activas la casilla efe de equis? *(Leyendo el siguiente enunciado)* … ahh, aparece azul.
74	**Inves 1:**	¿Qué aparece azul?
75	**Inves 2:**	¿Y eso azul que es? Digamos, sigue moviendo el deslizador, pero ahora disminúyele el valor al deslizador…
76	**Niña 1:**	¿Cómo así?
77	**Inves 1:**	Ehh, ¿ahí está en cuánto? ¿en ene igual cincuenta y ocho? Llévalo hacia atrás *(Niña 1 mueve el deslizador a un valor menor que 58)* y ahora sube la gráfica
78	**Niña 1:**	¡Ahh, ok!
79	**Inves 2:**	Y ahora empieza a mover el deslizador otra vez
80	**Niña 1:**	Ah, ok, la efe de equis es para comparar
81	**Inves 1:**	¿Qué estás comparando?
82	**Niña 1:**	Estoy comparando la primera gráfica que hice que fue ene igual a 58 con las gráficas que puedo hacer acá
83	**Inves 2:**	¿Y a medida que se aumentan los segmentos que pasa? ¿A qué se acercan esos segmentos? ¿A qué se van pareciendo? ¿Se van alejando o se van pareciendo a lo azul?
84	**Niña 1:**	¿Cuándo se aumentan?
85	**Inves 2:**	Sí.

Adicionalmente, en las línea 86 y 98, Niña1 verbaliza que a medida que aumenta el número de segmentos en el plano, la unión de estos se acerca a la gráfica de la función ingresada. Este es un indicador de AM2.

Cuando se pregunta a Niña1 por una descripción de la gráfica de

Después de ingresar la función y activar lo indicado por el enunciado, en las líneas 73 y 80, Niña 1 reconoce la gráfica azul [Función original] como un elemento para comparar.

Enseguida en la línea 86 Niña 1 reconoce la relación que existe entre los segmentos que aparecen en pantalla y la curva original, al decir que los segmentos se "acercan" a la función azul conforme se aumenta el valor del deslizador.

Debido a que la relación entre los objetos matemáticos y los objetos GGB se establece gracias a las construcciones realizadas en este, asignamos el indicador (C2).

En la línea 89 y la línea 98 Niña uno describe la gráfica como una línea decreciente y luego creciente, esto a partir de lo observado en el recurso y también de sus conocimientos

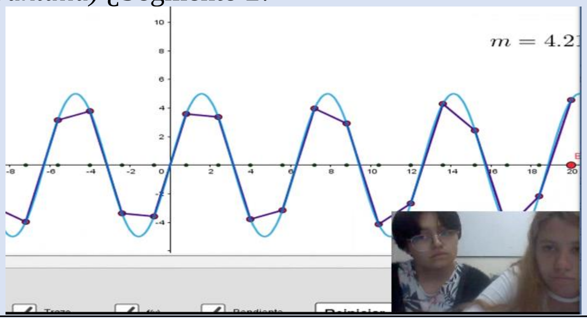
86	**Niña 1:**	Se van acercando a lo azul *[se refiere a la función que aparece luego de dar clic en la casilla $f(x)$]*
87	**Inves 2:**	O sea, se van pareciendo a lo azul ¿Y eso lo reconocen, lo habían visto antes?
88	**Niñas:**	No
89	**Inves 1:**	¿Cómo pueden describir la figura azul que salió en la pantalla? Con sus palabras ¿Qué es¨?
90	**Niña 1:**	Es una línea decreciente y luego creciente.
91	**Inves 1:**	Una línea decreciente y luego creciente, bien, me parece una buena descripción… ¿Tú? *[le pregunta a Niña 2]*
92	**Niña 2:**	No sé
93	**Inves 1:**	¿Qué sucede cuando el deslizador va aumentando su valor?
94	**Niña 1:**	Va aumentando los segmentos
96	**Inves 1:**	Y luego dice describe la gráfica que se forma ¿Qué gráfica se va formando a medida que aumentan los valores?
97	**Inves 2:**	Lo que decías ahorita, a que va tendiendo esta gráfica morada *[la unión de segmentos]* cuando van aumentando el valor de este ene *[deslizador]*
98	**Niña 1:**	Que va… ahh, que, que se va acercando a la azul.
99	**Inves 1:**	¿Consideras que es correcta la respuesta que diste?
100	**Niña 1:**	Sí.
101	**Inves 1:**	¿Tú estás de acuerdo?
102	**Niña 2:**	Sí.
103	**Inves 1:**	¿En cuántas partes queda divida la gráfica de la función cuando el deslizador toma el valor de ciento ocho?
104	**Niña 1:**	Vengo suponiendo que son ciento ocho porque no los quiero contar *(Se ríe)* … solo con la diferencia de que ya no se parte en cero sino se empieza a partir en uno
105	**Inves 2:**	¿A qué te refieres con eso?
106	**Niña 1:**	La gráfica anterior se empezó a partir en cero, cincuenta para aquí, cincuenta para allá *(Mueve la mano hacia los lados)* aquí la única diferencia es que aquí ya no se parte en cero sino en…

la función valor absoluto, ella señala a que esta gráfica consta de "una línea creciente y luego decreciente", este es un acercamiento a un comportamiento propio de AM4.

previos, pues fue un elemento trabajado en la sesión pasada.

A esta descripción es posible asignarle el indicador (C2).

En las líneas 104 y 106, nuevamente se describe la relación entre el deslizador y la cantidad de segmentos que aparecen. Al igual que en la línea 63 Niña 1 ya reconoció por completo la relación entre deslizador y cantidad de segmentos y sin necesidad de contar asume que la cantidad serán 8. Nuevamente, asignamos el indicador (D0).

107	**Inves 1:**	Listo, sigan.
108	**Niña 1:**	Hacer click en el botón reiniciar e ingresar la función cinco sen equis y activar la casilla f de equis y pendiente luego llevar el deslizador ene hasta el valor veinticinco *(leyendo el enunciado)*
109	**Inves 1:**	Activa la casilla trazo
110	**Niña 1:**	Da click sobre la celda A y B y hacer click sobre el botón registo *(leyendo el enunciado)*
111	**Inves 2:**	*(Da indicaciones de dónde debe dar click para el registro de los datos)*
112	**Niña 1:**	¿Qué característica tienen los segmentos cuya pendiente es positiva?
113	**Inves 2:**	Entonces ¿cómo vamos a enumerar los segmentos? De aquí para acá, este va a ser el primero, segundo, tercero y así… entonces aquí les van a decir que segmento 1 la pendiente sería cuatro punto veinte *(enumera los segmentos de izquierda a derecha según aparecen en pantalla)* ¿Segmento 2? 
114	**Niña 1:**	Uno punto cuarenta y dos
115	**Inves 2:**	¿Y el tres?
116	**Niña 1:**	Menos cuatro punto veintinueve… menos uno punto dieciséis…cuatro punto treinta y dos
117	**Inves 2:**	¿Y ahora que les preguntan ahí?

A partir de la línea 107 hay algunas indicaciones nuevamente de cómo hacer uso del software según lo indicado por los enunciados.

En este caso, un registro en la hoja de cálculo del software.

A partir de estos registros y los segmentos que se dibujan en pantalla, las estudiantes establecen una relación para los valores de la pendiente de cada segmento. Esto se evidencia en las líneas 114 y 116. Esto es producto de las construcciones realizadas en GGB y las relaciones que se establecen entre estos, por este motivo asignamos el indicador (D2).

	118	**Niña 1:**	¿Qué característica tienen los segmentos cuya pendiente es positiva? ¿Qué sucede cuando la gráfica de efe equis en este caso? *(leyendo el enunciado)*		
	119	**Inves 2:**	Entonces la gráfica de efe de equis es la azul, entonces la primera pregunta que les dicen ahí ¿Qué pasa con los segmentos que tienen pendiente positiva? ¿Cómo son?		En las líneas 120, 127 y 133, Niña 1 establece una relación entre el valor de la pendiente de los segmentos y su posición en pantalla, al decir que los positivos están ladeados hacia la derecha y los negativos hacia la izquierda. Esta es una relación producto de los valores generados en la hoja de cálculo y la posición de los segmentos y los objetos matemáticos que se corporeizan a través de estos. Asignamos el indicador (D2) a esta descripción.
	120	**Niña 1:**	Que… la pendiente va… no sé cómo decirlo bien… que las positivas están ladeadas hacia la derecha y las negativas hacia la izquierda	Cuando se pregunta a las estudiantes qué característica tienen los segmentos cuya pendiente es positiva, Niña1 manifiesta que los segmentos con pendiente positiva están inclinados hacia la izquierda y los de pendiente negativa, están inclinados hacia la derecha. Es decir que asocia los signos de la pendiente de los segmentos con la posición de estos (línea 120). Este es un indicador de AM3.	
	121	**Inves 2:**	¿Y qué más? Ahora, en términos de lo que ustedes decían ahorita…		
	122	**Niña 1:**	Ahhh, que yo dije que eran… que cuando tenía… cuando eran impares tendían a ser de punta y cuando eran pares tendían a ser planas		
	123	**Inves 1:**	Ok, te voy a cambiar la pregunta… ¿Cómo pueden describir la gráfica azul?		
	124	**Niña 1:**	Sigo diciendo que son ondas		
	125	**Inves 2:**	Digamos, este pedazo como podrías describirla *(Señala un intervalo creciente de la función)*		
	126	**Niña 2:**	Curvo…		
	127	**Inves 2:**	¿Y qué diferencia hay entre este pedazo y este pedazo? *(Señala dos intervalos, el primero creciente y el segundo decreciente)*		
	128	**Inves 1:**	¿Cómo es uno y cómo es el otro?		
	129	**Niña 1:**	Uno va hacia la derecha y el otro hacia la izquierda		
	130	**Inves 1:**	Trata de usar otras palabras para describir eso… lo hemos trabajado en la sesión pasada y hace un momento lo dijiste… no sé si tú te acuerdas también		
	131	**Niña 1:**	La sesión pasada trabajamos crecientes y decrecientes…		
	132	**Inves 2:**	Ahora, eso de crecientes y decrecientes ¿cómo lo podrías relacionar con la pregunta que te están haciendo ahí? *[Línea 118]* (…) Tú ya dijiste que hay unos que están ladeados hacia la derecha que son los que tienen pendiente positiva…	Posteriormente, Niña1 recuerda que en la sesión anterior se trabajó la noción de crecimiento y decrecimiento de una curva	

133	**Niña 1:**	Ah ok, van creciendo hacia la derecha y los negativos van creciendo hacia la izquierda… relativamente, no
134	**Inves 2:**	Mírenlos de nuevo, ¿será que los dos van creciendo?
135	**Niña 1:**	Crecer o decrecer es relativo…
136	**Inves 2:**	Bueno, pero según lo que habíamos dicho la vez pasada, crecer ¿cómo era? ¿cómo es una función creciente?
137	**Niña 1:**	Ah ok, las positivas van creciendo y las negativas van decreciendo
138	**Inves 1:**	¿Si se dan cuenta que cada uno de los segmentos están en una parte de la gráfica azul? ¿En dónde están ubicados los segmentos que tienen pendiente positiva?
139	**Niña 1:**	En la parte creciente
140	**Inves 1:**	¿En la parte creciente de quién?
141	**Niña 1:**	De la azul
142	**Inves 1:**	¿Tú estás de acuerdo?
143	**Niña 2:**	Sí.
144	**Inves 1:**	¿Y dónde están ubicados los que tienen pendiente negativa?
145	**Niña1:**	En la parte decreciente de la onda.
146	**Inves 1:**	Sigan respondiendo las preguntas
147	**Niña 1:**	Hacer click en las celdas A y B con el fin de desactivar el registro de hoja de cálculo *(Leyendo el enunciado)*
148	**Inves 2:**	*(Da las indicaciones para desactivar el registro y borrar los datos)*

(línea 131). Seguido a esto da cuenta y razón de que en los casos en que la curva decrece las pendientes de los segmentos son negativas y en los que crece, las pendientes son positivas (líneas 137 a 145). Este es un indicador de AM4.

Se establece una relación de crecimiento y decrecimiento a partir de los signos de los valores de las pendientes [Línea 137], además de su ubicación sobre la gráfica original (la función) [Línea 139 y 141]. Esto es importante porque las estudiantes ya están estableciendo una relación entre el crecimiento de la función, con las pendientes de los segmentos que aparecen sobre esta. Gracias a las construcciones y los elementos de GGB que corporeizaron estos elementos matemáticos, se llegó a las conclusiones mencionadas.

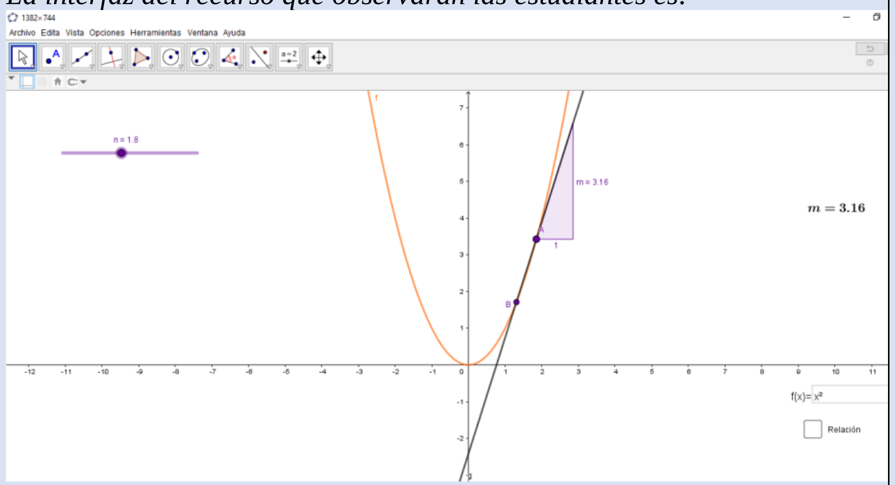
A esta situación asignamos el indicador (D2) primera relación

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>entre objetos GGB y objetos matemáticas.</td></tr>
<tr><td>Número de tarea:</td><td>2</td><td>Tipo de aplicativo:</td><td>Exploración de situaciones y formulación de conjeturas</td></tr>
<tr><td>34:45 a</td><td>

Una vez completo el grupo de cuatro estudiantes, se da paso al segundo recurso en el cuál Niña 1 comienza con la lectura de la tarea.

En este momento de la actividad, se unen dos estudiantes más al desarrollo de la tarea.

La interfaz del recurso que observarán las estudiantes es:



De manera similar, no hay un enunciado puntual de la tarea, sino preguntas que se irán dando a las estudiantes conforme avancen.

154	**Niña 1:**	Responde la siguiente pregunta: ¿Al mover el deslizador ene que sucede con la representación?

</td><td>

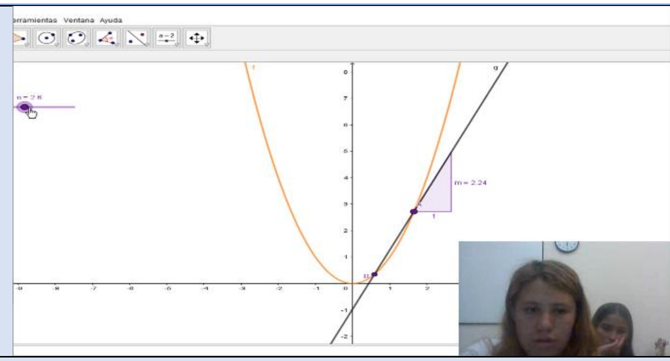
Indicadores

Se considera que con este recurso los estudiantes podrán evidenciar comportamientos asociados con AM1, AM2, AM3 y AM4. Estos se describen a continuación:

AM1:
Los estudiantes reconocen que a medida que el deslizador *n* cambia de valor, también cambia la distancia entre los puntos A y B y cambia el valor de la pendiente de la recta que pasa por esos dos puntos. Además, reconocen que dicho valor también cambia cuando se mueve el punto A.

AM2:
Los estudiantes reconocen que a medida que aumenta el valor que toma el deslizador *n*, también aumenta la distancia entre los puntos A y B.

</td><td></td></tr>
</table>



155	**Inves 1:**	¿Qué sucede cuando se mueve el deslizador ene?
156	**Niña 3:**	Cambia la… ¿Eso es una pendiente?
157	**Inves 1:**	Si, es una pendiente
158	**Niña 1:**	Cambia la pendiente.
159	**Inves 1:**	¿Qué más sucede?
160	**Niña 1:**	¿Cambia el porcentaje de la pendiente?
161	**Inves 1:**	Muévelo más, devuélvelo…
162	**Inves 2:**	¿Qué pasa a medida que vas moviendo eso?
163	**Niña 1:**	Si lo muevo… cuando empieza a crecer empieza a disminuir eme
164	**Inves 1:**	¿A qué se debe eso? A parte del numerito que cambia allá, ¿Qué más cambia cuando mueves el valor de ene?
165	**Niña 4:**	Los puntos también… ¿no?
166	**Inves 1:**	¿Cuál punto?
167	**Niña 4:**	O sea, cuando está quieto, solo hay un punto… pero cuando ella lo va moviendo se va agregando otro punto
168	**Inves 1:**	Ok, bien… listo, continúen
169	**Niña 1:**	¿Al mover el punto A qué sucede en la representación? *(leyendo el enunciado)*
170	**Inves 2:**	¿Cuál es el punto A? señálalo ahí por favor *(Niña uno señala en pantalla el punto A)*
171	**Inves 1:**	¿Qué sucede cuándo se mueve el punto A?
172	**Niña 1:**	No tiene diferencia

AM3:
Los estudiantes asocian el cambio del valor de la pendiente de la recta que pasa por A y B, con la inclinación de esta (a la izquierda cuando la pendiente es negativa y a la derecha cuando la pendiente es positiva). Además, los estudiantes dan cuenta y razón de que a medida que el valor de *n* se hace más pequeño, la gráfica que aparece cuando se activa la casilla *"Relación"*, se aproxima más a la gráfica de una función cuadrática o parábola.

AM4:
Los estudiantes reconocen que la pendiente de la recta que pasa por A y B cambia de signo en los puntos máximos y mínimos de la función ingresada. Además, verbalizan que cuando alguno de los puntos (A o B) se encuentra ubicado en alguno de los extremos de la función y a su vez el valor de *n* se va haciendo más pequeño, la pendiente de la recta que pasa por los puntos mencionados tiende a cero.

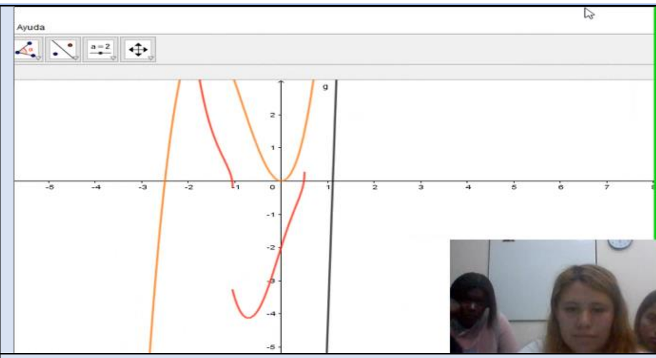
Cuando se pregunta a las estudiantes qué sucede al mover

Las estudiantes describen la relación existente entre el valor que toma el deslizador y los puntos que aparecen en pantalla, niña 4 en las líneas 165 y 167 reconoce que a medida que se va moviendo el deslizador aparece un nuevo punto sobre la gráfica. Aquí se establece una relación entre elementos de GGB pero no entre elementos matemáticos. A esta situación, asignamos el indicador (B0).

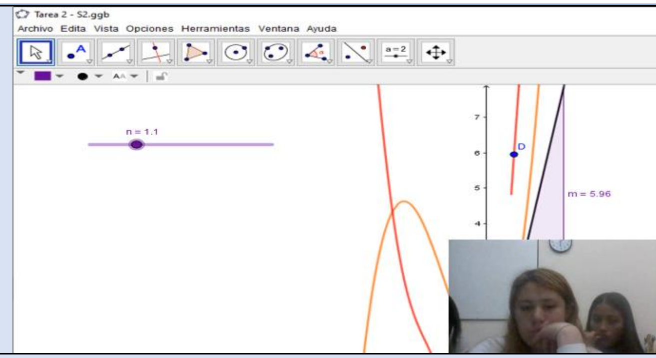
Las estudiantes también describen la relación que existe entre el punto B y el deslizador n, así como la dependencia que tiene B del punto A, en la línea 174 se describe que el deslizador ene mueve al punto B y más adelante en 177 se describe que si se mueve A, B también debe hacerlo. Sin embargo, no hay una descripción que relacione objetos matemáticos con los objeto GGB. Solo se relacionan estos últimos
Por tal motivo, asignamos el indicador (D1).

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>173</td><td>Inves 1:</td><td>¿Cuál es la diferencia entre mover el punto A y mover el deslizador ene?</td></tr>
<tr><td>174</td><td>Niña 1:</td><td>El deslizador ene está moviendo el punto B… y el punto B empieza a moverse entorno a la gráfica efe</td></tr>
<tr><td>175</td><td>Inves 1:</td><td>¿Ustedes están de acuerdo?</td></tr>
<tr><td>176</td><td>Niñas 2, 3 y 4:</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>177</td><td>Niña 1:</td><td>En cambio si movemos este [Punto A] el punto A es el que se empieza a mover y si el punto A se mueve entorno a la gráfica efe el punto B por ende se tiene que mover</td></tr>
<tr><td>178</td><td>Inves 1:</td><td>Bien, de acuerdo…</td></tr>
<tr><td>179</td><td>Niña 1:</td><td>Ingresa en la casilla de texto la función efe equis igual dos equis al cubo más cinco equis al cuadrado (Leyendo el enunciado, luego, ingresa la función solicitada)</td></tr>
<tr><td>180</td><td>Inves 1:</td><td>Ahí está… ¿Habían visto alguna vez una gráfica así?</td></tr>
<tr><td>181</td><td>Niñas:</td><td>No</td></tr>
<tr><td>182</td><td>Niña 1:</td><td>Dice… activar la casilla relación (Activa la casilla) y ahora mueve el valor del deslizador ene y analiza cómo cambia el valor de eme… al mover nuevamente el punto A ¿qué sucede con el rastro que apareció cuando el deslizador ene se hace más pequeño?</td></tr>
<tr><td>183</td><td>Inves 1:</td><td>Primero busca el punto A porque se perdió ahí en el campo, creo que está más arriba… muévelo para abajo para que lo puedas trabajar</td></tr>
<tr><td>184</td><td>Niña 1:</td><td>Mover el deslizador ene… y analizar cómo cambia el valor de eme… al mover nuevamente el punto A.</td></tr>
<tr><td>185</td><td>Inves 1:</td><td>¿Qué pasa cuando mueves el valor de ene?</td></tr>
<tr><td>186</td><td>Niña 1:</td><td>Ahh, ok, se mueve la gráfica del rojo [esta gráfica es el rastro del valor de la pendiente construida sobre la recta]</td></tr>
</table>
</td>
<td>el deslizador n, Niña1 señala que cambia la pendiente de la recta (líneas 158 y 163). Este es un indicador de AM1.
Niña4 manifiesta en la línea 167 a que cuando se empieza a mover n, aparece otro punto diferente a A en el plano (el punto B), pero en ningún momento hace alusión a que la distancia entre estos dos puntos va a aumentando, conforme aumenta el valor de n.</td>
<td>En la línea 182, Niña 1 activa la casilla relación, la cual hace que aparezca una curva roja en pantalla. Más adelante en la línea 186, reconoce que esta curva cambia de acuerdo con el valor que tome el deslizador ene. En la línea 188 Niña 3 menciona que la gráfica se “aumenta” refiriéndose a que aparecen más intervalos de esta, y niña 1 dice que la gráfica se une cuando el deslizador ene se hace más pequeño [Línea 190].

Aquí nuevamente, se establece una relación entre objetos GGB pero no entre los elementos matemáticos corporeizados a través de estos. Asignamos una vez más, el indicador (D1).</td>
</tr>
</table>

		
187	**Inves 1:**	Mueve el punto A hasta abajo para que tengas una mejor visualización de lo que sucede *(Niña 1 mueve el punto A)*… ¿Qué pasa cuando mueven el deslizador ene?
188	**Niña 3:**	La línea de la gráfica se… aumenta… o sea, se ve más grande
189	**Inves 1:**	Sigue moviéndolo… *(el deslizador)* y mueve el punto A un poco más para abajo
190	**Niña 1:**	Ahh ok, lo que pasa es que se está uniendo la gráfica roja…
191	**Inves 1:**	¿Por qué creen que pasa eso?
192	**Niña 2:**	¿Me toca volver a mover el punto A?
193	**Inves 1:**	Sí.
194	**Niña 1:**	Pero como ya sabemos el punto A se mueve…
195	**Inves 1:**	¿Cuáles son las coordenadas del punto D? En relación con lo que estás haciendo ¿Dónde se encuentra el punto D?
196	**Niña 1:**	El punto D es este… *(lleva el mouse hasta el punto D, que se encuentra sobre el rastro rojo)*

A partir de la línea 195 y hasta la línea 241 se entabla un diálogo entre las estudiantes y los investigadores en pro de tratar de resolver la siguiente parte de la tarea, que consiste en relacionar la pendiente de la recta con las coordenadas del

		
197	**Inves 1:**	¿Cuáles son las coordenadas de ese punto?
198	**Niña 1:**	Cero punto cincuenta y seis coma cinco punto noventa y seis
199	**Inves 1:**	Sí. ¿Y quién es cinco punto noventa y seis? O bueno… en este caso ahora quién es cuatro punto ochenta y tres *[esto, después de mover nuevamente el punto A]*
200	**Niña 1:**	Cuatro punto ochenta y tres vendría siendo… B
201	**Inves 1:**	¿Quién es B?
202	**Niña 1:**	B viene siendo seis punto cincuenta y siete *[luego de mover nuevamente el punto A]*
203	**Inves 1:**	¿Seguras?
204	**Niña 1:**	Sí… digamos la coordenada de D cuando disminuye ene, la gráfica se empieza a unir
205	**Inves 1:**	¿Cuál gráfica?
206	**Niña 1:**	La roja
207	**Inves 1:**	¿Y qué representa la gráfica roja?
208	**Niña 1:**	La gráfica roja era la relación…
209	**Inves 1:**	¿Cuál relación?
210	**Niña 1:**	La relación dos equis a la tres…
211	**Inves 1:**	Mmm, no.
212	**Niña 1:**	No me acuerdo qué puede ser…

punto D. Al tratar de establecer esta relación se presentan dificultades, incluso, no se logra establecer esta relación, es hasta la línea 241 que el investigador 1 decide dar la conclusión. A pesar de usar los elementos de GGB y entablar relaciones entre algunos [línea 204, 228] no se establece ningún tipo de relación matemática entre estos.

Las respuestas de las estudiantes no son acordes con lo que está pidiendo el desarrollo de la tarea, por tanto no se genera una relación entre los objetos GGB y los matemáticos.

A esta situación descrita, asignamos el indicador (C1).

213	**Inves 1:**	Eso es lo que necesitamos que describan… ¿no? (…) ¿Cuándo ene toma el valor más pequeño posible cuáles son las coordenadas del punto D?
214	**Niña 1:**	Cero punto cincuenta y cinco coma siete punto veintiocho
215	**Inves 1:**	¿Quién es siete punto veintiocho?
216	**Niña 1:**	B.
217	**Inves 1:**	¿Segura?
218	**Niña 1:**	Sí.
219	**Inves 1:**	¿Quién es siete punto veintiocho?
220	**Inves 2:**	Tú le estabas diciendo ahorita a ella *[niña 4]*… ella preguntó qué era eso, el triángulo
221	**Niña 1:**	La pendiente
222	**Inves 1:**	¿De quién?
223	**Niña 1:**	De eme
224	**Inves 2:**	Recuerden que esa eme nos representa la pendiente, eme es como un nombre que se le da a la pendiente, pero entonces sería la pendiente de qué, ¿normalmente uno mira la pendiente de qué?
225	**Inves 1:**	Cuando uno habla de pendiente, ¿normalmente a qué se refiere? ¿Pendiente de qué?
226	**Niña 3:**	¿De una gráfica?
227	**Inves 1:**	¿Qué grafica particularmente?
228	**Niña 1:**	Se supone que sería de esta gráfica *(señala con el mouse el rastro rojo)*
229	**Inves 1:**	Dale clic donde dice relación, oculta ese rastro… quedémonos solo con eso, listo. *(oculta la curva roja)*… ¿Esa es la pendiente de qué?
230	**Niña 1:**	De eso *(señala la curva naranja, la función)*
231	**Inves 1:**	Mueve otra vez el deslizador ene… hazlo un poquito más grande… ¿Eme es que?
232	**Niña 1:**	Cero punto ochenta y ocho
231	**Inves 1:**	Si ¿Y es qué? En este caso

Aunque en la línea 158 Niña1 expresa que al mover el deslizador *n* cambia “la pendiente”, en la conversación que se lleva a cabo en las líneas 213 a 242, se evidencia que ella no tenía claro que el valor de *m* correspondía a la pendiente de la recta secante a la curva, que pasaba por los puntos A y B. Razón por la que el comportamiento analizado previamente (líneas 158 y 163) se

Después de la intervención de Inves 1, las estudiantes ya establecen una relación entre el valor de la pendiente de esa recta y su ubicación sobre la curva original [función naranja], en las líneas 246, 248 250, 251 y 253 se evidencia esto. Aquí es importante reconocer que los conocimientos previos de los estudiantes son modificados, pues no fueron capaces de llegar a estas conclusiones de manera previa hasta este momento. La

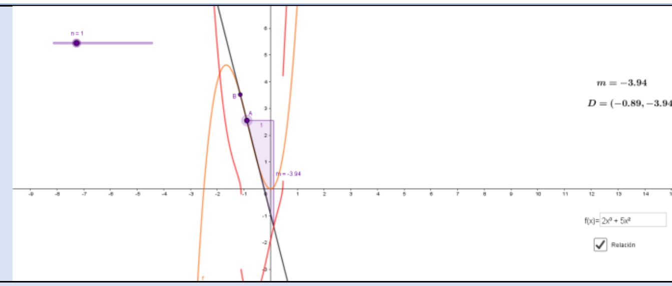
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>232</td><td>Niña 4:</td><td>¿Es un valor?</td></tr>
<tr><td>233</td><td>Inves 2:</td><td>Si, ¿el valor de qué?</td></tr>
<tr><td>234</td><td>Niña 3:</td><td>De la pendiente</td></tr>
<tr><td>235</td><td>Inves 1:</td><td>¿De la pendiente de quién?</td></tr>
<tr><td>236</td><td>Niña 3:</td><td>¿De eme?</td></tr>
<tr><td>237</td><td>Inves 1:</td><td>No. Eme es la forma de representar la pendiente.</td></tr>
<tr><td>238</td><td>Niña 1:</td><td>Vendría siendo el valor de equis…o de ye</td></tr>
<tr><td>239</td><td>Inves 1:</td><td>¿Yo a qué le puedo encontrar la pendiente?</td></tr>
<tr><td>240</td><td>Inves 2:</td><td>En la actividad de ahorita, ¿se acuerdan qué estábamos mirando unos segmentos? Unos tenían una pendiente positiva y otros una pendiente negativa ¿Cómo podrían relacionar eso con lo que están haciendo ahora?</td></tr>
<tr><td>241</td><td>Inves 1:</td><td>La pendiente se la podemos encontrar a una recta, ¿sí? Que es lo que hemos estado trabajando la sesión pasada y hace un rato… es decir que ese valor que está ahí ¿es la pendiente de qué?</td></tr>
<tr><td>242</td><td>Niña 3:</td><td>De una recta</td></tr>
<tr><td>243</td><td>Inves 1:</td><td>¿De cuál recta?</td></tr>
<tr><td>244</td><td>Niña 1:</td><td>De esta (señala la recta en pantalla)</td></tr>
<tr><td>245</td><td>Inves 1:</td><td>Exacto, que es la recta determinada por los puntos A y B… ¿Cuándo esa pendiente es positiva?</td></tr>
<tr><td>246</td><td>Niña 4:</td><td>Cuando está a la derecha de la gráfica</td></tr>
<tr><td>247</td><td>Inves 2:</td><td>¿A qué te refieres?</td></tr>
<tr><td>248</td><td>Niña 4:</td><td>Cuando decrece la gráfica</td></tr>
<tr><td>249</td><td>Inves 2:</td><td>¿Cuál gráfica?</td></tr>
<tr><td>250</td><td>Niña 4:</td><td>Digamos… esa línea amarilla (se refiere a la curva naranja, la función) cuando está hacia arriba va decreciendo… en la mayoría donde se representa decrece</td></tr>
<tr><td>251</td><td>Niña 3:</td><td>Creciente… decreciente</td></tr>
<tr><td>252</td><td>Inves 1:</td><td>¿Te refieres a lo mismo? [pregunta a la niña 4]</td></tr>
<tr><td>253</td><td>Niña 4:</td><td>Si, si</td></tr>
<tr><td>254</td><td>Inves 1:</td><td>Ok, es que dijiste decreciente… entonces ¿cuándo la pendiente de la recta es positiva?</td></tr>
</table>
</td>
<td>podría clasificar como pseudonalítico.

Ahora bien, en las líneas 255, 257, 275, 272 y 276, se evidencia que Niña1 reconoce que en los intervalos en los que la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B es positiva, la función es creciente y en los intervalos en los que la pendiente de la recta es negativa, la función es decreciente. Aunque este indicador no se contempló inicialmente, refleja un comportamiento propio de AM4.</td>
<td>interacción con el software previamente no fue muy eficaz, pero después de la intervención de Inves 1 [Línea 241] tal intervención permitió llegar a conclusiones más fuertes, e incluso relaciones con objetos matemáticos, al hablar de crecimiento y decrecimiento. Asignamos el indicador (B3) a esta situación.

En las líneas 265 y 272 hay una descripción de la relación de la pendiente de la recta con los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función naranja, esta relación se establece a partir del</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>255</td><td>Niña 4:</td><td>Cuando es creciente la función</td></tr>
<tr><td>256</td><td>Inves 1:</td><td>¿Cuándo la pendiente de esa recta es negativa?</td></tr>
<tr><td>257</td><td>Niña 4:</td><td>Cuando va decreciendo</td></tr>
<tr><td>258</td><td>Inves 1:</td><td>¿Y esa recta cuando decrece?</td></tr>
<tr><td>259</td><td>Niña 4:</td><td>¿La que ella está moviendo? [se refiere a niña 1]</td></tr>
<tr><td>260</td><td>Inves 1:</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td>261</td><td>Niña 4:</td><td>Ahí [se refiere a la ubicación de la recta en una parte decreciente de la función]</td></tr>
<tr><td>262</td><td>Inves 1:</td><td>Haz ene muy pequeño, que tome el valor más pequeño posible (Niña 1 mueve el deslizador hasta n=0.1)… ahora mueve el punto A… ¿cuándo sería decreciente?</td></tr>
<tr><td>263</td><td>Niña 1:</td><td>Ahí [se refiere a la ubicación de la recta en una parte decreciente de la función]</td></tr>
<tr><td>264</td><td>Inves 1:</td><td>¿Qué tiene de particular para que sea creciente o decreciente?</td></tr>
<tr><td>265</td><td>Niña 1:</td><td>Que la parte de la gráfica naranja está decreciendo…ya que se hace una onda, en la parte superior… cuando el punto A se coloca en la parte de la gráfica donde está decreciendo</td></tr>
<tr><td>266</td><td>Inves 1:</td><td>¿Están de acuerdo?</td></tr>
<tr><td>267</td><td>Niña 3:</td><td>No (se ríe)</td></tr>
<tr><td>268</td><td>Inves 1:</td><td>Trata de convencerla a ella</td></tr>
<tr><td>269</td><td>Niña 1:</td><td>Dame tu argumento por el cual no estás convencida [le habla a niña 3]</td></tr>
<tr><td>270</td><td>Inves 1:</td><td>¿O no entendiste lo que ella dijo?</td></tr>
<tr><td>271</td><td>Niña 3 :</td><td>No, no comprendí</td></tr>
<tr><td>272</td><td>Niña 1:</td><td>La gráfica naranja en esta parte se empieza a volver una onda, entonces cuando la onda comienza a decrecer, si uno coloca el punto A en la parte de la gráfica que está decreciendo, se vuelve negativo [se refiere a la pendiente]</td></tr>
</table>
</td>
<td>Por otro lado, en la conversación de las líneas 277 a 307, se puede evidenciar que Niña1 reconoce que el punto máximo de la curva, es el punto en el que esta pasa de ser creciente a ser decreciente. Además, da cuenta y razón de que la pendiente en este punto es igual a cero. Sin embargo, no verbaliza que esto ocurre, precisamente porque en este punto no hay crecimiento ni decrecimiento. Lo anterior es un indicador de AM4.</td>
<td>movimiento y dinamismo de los puntos, así como de la relación con los conocimientos previos y la modificación de estos. Asignamos el indicador (D3).

El dinamismo de los elementos de GGB, en este caso del punto A, con el cual se puede mover la recta sobre la función, permite que las estudiantes describan la imposibilidad de representar un cambio nulo en la curva. El cual se da cuando la pendiente de la</td>
</tr>
</table>

		
273	**Inves 1:**	¿Sí? ¿Estás de acuerdo?
274	**Niña 3:**	Sí, ahora sí
275	**Inves 1:**	¿O sea que dónde es creciente?
276	**Niña 1:**	Aquí y aquí *(señala los dos intervalos de la gráfica donde es creciente)*
277	**Inves 1:**	¿Y dónde no crece ni decrece?
278	**Niña 1:**	Aquí… *(intenta poner el punto A en uno de los puntos máximos de la función)*
279	**Inves 1:**	¿Por qué creen que no se puede acomodar para que quede como que no crece ni decrece?
280	**Niña 1:**	Porque esa línea nunca va a estar como… digamos, al mismo lado, sino que siempre tiene que crecer o decrecer
281	**Inves 1:**	¿Siempre siempre? O sea, ¿no hay un punto donde sea…?
282	**Niña 1:**	No, sí, lo que pasa es que lo estoy moviendo mucho… pero ya casi lo logro *(intenta poner la recta de manera horizontal en un punto máximo de la función)*
283	**Inves 2:**	¿Qué estás tratando de hacer ahí?
284	**Niña 1:**	Que quede como un punto medio, que no crezca ni decrezca… ya casi, casi
285	**Inves 2:**	¿Y en qué posición debería quedar esa recta para que suceda eso?
286	**Inves 1:**	¿Tú crees que ahí pasa o estás cerca a que pase?
287	**Inves 2:**	¿Y en qué posición debería estar esa recta para qué pase eso?

curva es cero. Esto se presenta en las líneas 284, 289, 293, 297.

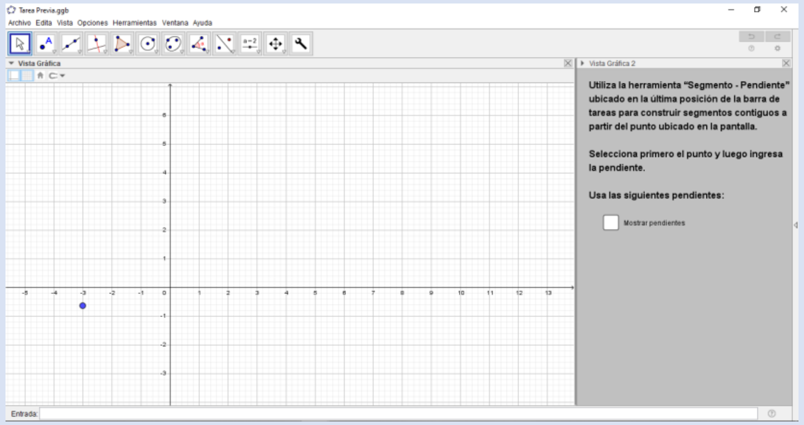
En la línea 300 Niña 1 hace uso de GGB para tratar de verificar lo mencionado previamente, y lo logra, sin embargo, no lo logra en un punto en el cuál la pendiente debería ser cero [Punto máximo o mínimo], esto lo logra debido a la programación que tiene el recurso para este caso. Aquí GGB les permite identificar que efectivamente en ese punto, la pendiente no debería ser cero. Sino en el punto máximo [304 y 306].

Nuevamente, a estas descripciones podemos asignarle el indicador (D3).

288	**Inves 1:**	¿O ustedes cómo creen que debería estar la posición para que no crezca ni decrezca?
289	**Niña 4:**	Debería estar en cero
290	**Inves 1:**	¿En cero quién?
291	**Niña 2:**	La pendiente
292	**Inves 1:**	¿Cuándo la pendiente se acerca a cero que pasa?
293	**Niña 1:**	Es un punto que no crece ni decrece
294	**Inves 1:**	¿Y por qué?
295	**Niña 1:**	Porque está en cero la pendiente
296	**Inves 1:**	¿Y eso que significa?
297	**Niña 4:**	¿Qué no tiene ningún valor?... o sea es que no es un valor que no es ni tan alto ni tan bajo
298	**Niña 1:**	Ni es negativo, ni es positivo.
299	**Inves 1:**	¿Por qué ese valor de eme no alcanza a llegar a cero?
300	**Niña 1:**	*[Intenta llegar a que la pendiente de la recta sobre la función sea cero mientras mueve el punto A, al final lo logra]* ¡lo logré!
301	**Inves 1:**	Bien estamos de acuerdo en que esa pendiente es cero, ¿sí? Porque claramente el programa lo arroja ¿sí? La pregunta es ¿Ese es un punto de la gráfica naranja donde la pendiente debería ser cero?
302	**Niña 1:**	No
303	**Inves 1:**	¿Dónde debería ser un punto donde la pendiente debería ser cero?
304	**Niña 1:**	Donde yo ahorita lo tenía *[se refiere al punto máximo de la función]*
305	**Inves 1:**	¿Y por qué aquí no pero arriba sí? ¿Y por qué acá nos da cero si no debería ser un punto donde es cero?
306	**Niña 3:**	Porque cero debería dar sobre la recta…
307	**Niña 1:**	Porque es el punto más… porque es el punto donde… tengo la idea pero no sé cómo organizarla… porque es donde hay un cambio de crecimiento…

	308 | **Inves 1:** | Vamos a dejar hasta ahí, porque esa respuesta, también es ejercicio para otra actividad.		

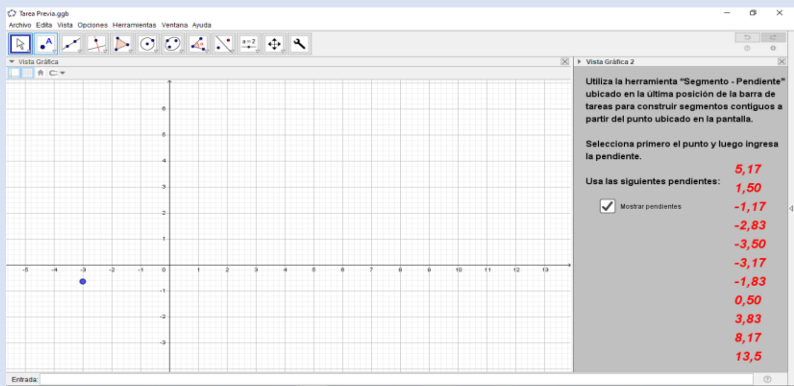
Anexo 4: Transcripción sesión 3.

SESIÓN 3			
Número de tarea	1	**Tipo de aplicativo**	Verificación de propiedades
Minuto	**Transcripción**	**Análisis desde Carlson**	**Análisis desde AS**
4:20 a 5:29	*En primer lugar, los estudiantes leen el enunciado correspondiente a la actividad número 1 de la sesión, el cual aparece en pantalla y la interfaz que observan los estudiantes es:* 	**Convenciones** **AM1** **AM2** **AM3** **AM4** **AM5** Se considera que con este recurso los estudiantes podrán evidenciar comportamientos asociados con AM2, AM3, AM4 y AM5. Estos se describen a continuación: ***AM2:*** Los estudiantes reconocen que existen cambios constantes sobre *x* y cambios sobre *y* y que estos se relacionan mediante un	**Indicadores** En las primeras intervenciones realizadas por los estudiantes, no es posible establecer ningún tipo de relación entre objetos GeoGebra (GGB) y objetos matemáticos, esto debido al desarrollo en lápiz y papel que deciden realizar antes de hacer uso de GGB. Sin embargo, en las líneas 3 y 10, Niña 1 hace referencia de manera indirecta al recurso utilizado en la sesión número

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>

Los estudiantes deben hacer uso de una herramienta construida por los investigadores que les permite construir segmentos contiguos dado un punto y su pendiente, para que así se realice una aproximación de la forma de una función.

Los niños presentan una confusión al pensar que los valores que aparecen en la pantalla de GGB (valores de las pendientes de los segmentos) son coordenadas del plano, debido a que son decimales separados por una coma (por ejemplo, 5,17). Intentan representar la situación en papel y lápiz antes de pasar a GGB.



Para lo cual, Niña 1 intercede y les ayuda a aclarar la situación. Esto debido a que de los cuatro estudiantes presentes, ella fue la única que estuvo presente en la sesión anterior.

<table>
<tr><td>1</td><td>Inves 1:</td><td>(…) ayúdales tú…pero ayúdales, o sea, no lo hagas, sino guíalos, porque ellos tienen una confusión y es que ellos piensan que esos números que están ahí son ubicaciones en el plano, pero estamos de acuerdo en que son ¿qué? ...</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Niño 1:</td><td>Pendientes…</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Niña 1:</td><td>¡Es el valor de las pendientes! ¿Se acuerdan cuando estábamos viendo m? que decía que eme era… el</td></tr>
</table>

</td>
<td></td>
<td>

cociente para hallar la pendiente de los segmentos dados.

AM3:
Los estudiantes reconocen el cambio como la pendiente de los segmentos construidos. Además, identifican el comportamiento de los segmentos graficados como creciente o decreciente según la posición en la que se encuentran.

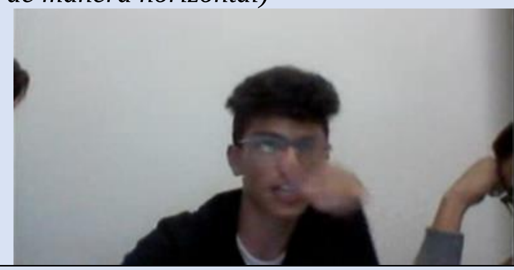
AM4:
Los estudiantes reconocen que la pendiente de los segmentos es positiva en los intervalos en los que la función es creciente y negativa en los intervalos en los que la función es decreciente.

AM5:
Los estudiantes reconocen que en el punto de inflexión se presenta el cambio de signo en las pendientes, es decir que esta pasa de ser creciente a decreciente o viceversa. Además, pueden realizar un esbozo de la gráfica a partir de las pendientes de los segmentos dados.

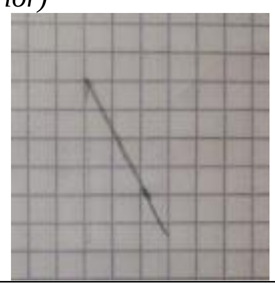
</td>
<td>

uno, correspondiente al porcentaje de inclinación de una recta. De esto es posible deducir que las ideas trabajadas a partir de dicho recurso influyeron en el desarrollo de las nociones de variación de ella, así, a esta situación es posible asignarle el indicador (B2).

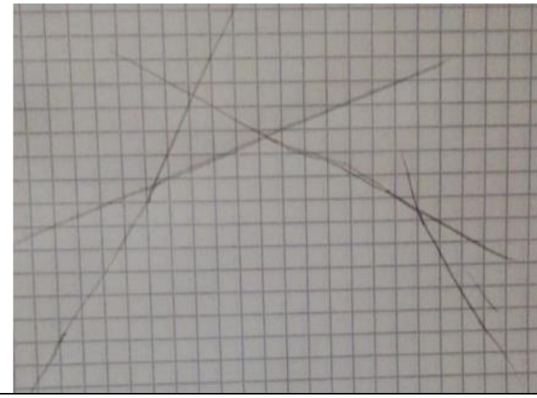
</td>
</tr>
</table>

		porcentaje de *m [La estudiante se refiere a los recursos usados en la sesión 1]*
4	**Niño 2:**	Es el valor de las pendientes… ahh…
5	**Niño 1:**	Entonces…
6	**Inves 1:**	No tiene que ser exacto. ¿No? Porque claramente ahí es más difícil hacerlo, para eso vamos a utilizar ahorita GeoGebra (…) necesitamos una aproximación… solamente
7	**Niño 2:**	Pero entonces sería como… 5 ¿así? (*mueve la mano de manera horizontal)* 
8	**Niño 3:**	Pero es que toca ver la inclinación…pues…
9	**Niño 2:**	Si usted lo voltea así sería… ups...
10	**Niña 1:**	Pero no estamos viendo que… eme era 35 por ciento y era la inclinación del… *[La estudiante se refiere nuevamente a uno de los recursos usados en la sesión 1] (mueve la mano como representando una recta)*

5:52 a 7:02			

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>11</td><td>Niño 3:</td><td>(…) pues digamos que esto es uno… (dibuja un segmento inclinado de manera negativa)
</td></tr>
<tr><td>12</td><td>Niño 2:</td><td>Menos uno</td></tr>
<tr><td>13</td><td>Niño 3:</td><td>No…pero yo me refiero al cuadrito (señala un cuadrícula del cuaderno en el que están trabajando)</td></tr>
<tr><td>14</td><td>Niño 2:</td><td>Ahhh…</td></tr>
<tr><td>15</td><td>Niño 3:</td><td>¿Pues entonces la inclinación de cinco cómo sería?</td></tr>
<tr><td>16</td><td>Niña 1:</td><td>Ahí iba bien…</td></tr>
<tr><td>17</td><td>Niño 3:</td><td>(…) y ahora menos dos…</td></tr>
<tr><td>18</td><td>Niño 2:</td><td>Menos dos sería así (señalando el segmento que había dibujado con menos uno) pero un poquito más allá [refiriéndose a darle un poco más de inclinación negativa]</td></tr>
<tr><td>19</td><td>Niño 3:</td><td>Menos 3… (dibuja un segmento más inclinado que el anterior)
</td></tr>
<tr><td>20</td><td>Niño 2:</td><td>Mmm…un poco más hacia abajo… mucho</td></tr>
</table>
</td>
<td>En la línea 12 Niño2 aclara que la pendiente del segmento dibujado por Niño3 es menos uno, debido a su posición. Este es un indicador de AM3.</td>
<td>En esta sección del desarrollo de la primera tarea, tampoco se evidencia el uso del recurso, los estudiantes siguen empeñados en tratar de realizarla a lápiz y papel.

Aquí, no se establece ninguna conexión entre lo verbalizado por los estudiantes y el uso de algún recurso previo. Sin embargo, se evidencia en el dialogo establecido por los niños entre las líneas 20 y 28, que Niño 1 trata de explicar a sus compañeros el por qué dibuja las rectas de la manera que lo está haciendo, logrando en la línea 29 que Niño 2 comprenda. Debido a que no hay intervención con un recurso, pero si hay una modificación de relaciones matemáticas previas, es posible asignar el indicador (Z3) a esta situación.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>07:25 a 07:55</td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>21</td><td>Niño 1:</td><td>No, no, porque son pendientes…según yo… sería como algo así… (dibuja un bosquejo de varias rectas según las pendientes como cree que se está construyendo la gráfica) más o menos.
</td></tr>
<tr><td>22</td><td>Niña 1:</td><td>No, no te entendimos…</td></tr>
<tr><td>23</td><td>Niño 1:</td><td>Pues mire… vea les explico… según yo, como es trazado en rectas digamos que esto es como el cinco por ciento (señala la primera recta de izquierda a derecha) … el uno (señala la segunda recta), el menos uno</td></tr>
<tr><td>24</td><td>Niño 3:</td><td>Si, sí, pero no son trazadas completamente.</td></tr>
<tr><td>25</td><td>Niño 2:</td><td>Si es así, pero uniéndolas, porque toca formar es una…</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>26</td><td>Niño 3:</td><td>(Mueve la mano haciendo un movimiento ascendente, luego descendente)
</td></tr>
<tr><td>27</td><td>Niño 2:</td><td>Pero es que todas van como así… (mueve la mano de manera horizontal)</td></tr>
<tr><td>28</td><td>Niño 3:</td><td>No, sería creciente, decreciente, creciente (realizando el mismo movimiento de 26)</td></tr>
<tr><td>29</td><td>Niño 2:</td><td>Ahhh…</td></tr>
<tr><td>30</td><td>Inves 1:</td><td>¿Cuáles de esas pendientes me permiten decir que es creciente?</td></tr>
<tr><td>31</td><td>Niño 2:</td><td>Las que están positivas…</td></tr>
<tr><td>32</td><td>Inves 1:</td><td>Y por tanto… ¿cuáles serían las que me permiten decir que es decreciente?</td></tr>
<tr><td>33</td><td>Niño 2:</td><td>Las que están negativas.</td></tr>
<tr><td>34</td><td>Inves 1:</td><td>¿Y dónde puedo decir que hay un cambio de crecimiento?</td></tr>
<tr><td>35</td><td>Niño 3:</td><td>Acá entre uno coma cincuenta y menos uno coma diecisiete… y acá entre menos uno coma ochenta y tres y cero coma cinco</td></tr>
</table>
</td>
<td>Las líneas 31 y 33 son evidencia de AM4, pues Niño2 manifiesta que las pendientes que permiten determinar si la curva es creciente, tienen signo positivo y las que permiten determinar si es decreciente, son negativas.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Los estudiantes hacen uso de la herramienta diseñada por los investigadores que permite construir segmentos contiguos dada</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

14:15 a 15:02				*su pendiente. Durante la construcción no se presenta mucho diálogo y es el niño 3 quien la realiza.* 			Después de realizada la construcción en GGB mediante el uso de la herramienta diseñada por los investigadores, en la línea 37 se evidencia que las ideas previas de los estudiantes, desarrolladas a lápiz y papel son correspondientes con lo desarrollado usando el recurso. En esta situación, es posible asignar el indicador (C3), debido a que los objetos matemáticos que usaron en su construcción a lápiz y papel ahora los relacionan a partir de lo brindado por el recurso.
		36	**Inves 1:**	Bien… entonces la primera pregunta es: ¿Si es más o menos una aproximación a lo que ustedes creían que era?			
		37	**Niño 2:**	¡Sí!			
		38	**Inves 1:**	¿Por qué creen que allá tuvieron fallos en esa? *[Refiriéndose a la gráfica realizada en lápiz y papel de la línea 21]*			
		39	**Niña 1:**	Porque estaba…ehh…no estaba tan inclinado			
		40	**Inves 1:**	Pero igual, digamos… si se dan cuenta, en términos de la cuestión de lo que es crecimiento y decrecimiento, está bien… ¿sí?... ustedes hicieron unos segmentos que son crecientes hasta cierto punto y luego dibujaron otros que son decrecientes… y en términos de crecimiento y decrecimiento está bien. Lo que no está tan bien es digamos en términos de inclinación, como ustedes lo llaman, ¿sí?		En la línea 40 uno de los investigadores reconoce que el dibujo realizado por los estudiantes (línea 21) es correcto en términos de crecimiento y decrecimiento, pues los estudiantes dibujaron las rectas en la posición correcta, de acuerdo con el signo de la pendiente dada para los segmentos.	
15:57 a 18:05		**41**	**Inves 1:**	Las siguientes preguntas están relacionadas con los segmentos que están propuestos ahí en la pantalla. ¿Cómo podrían describir los			

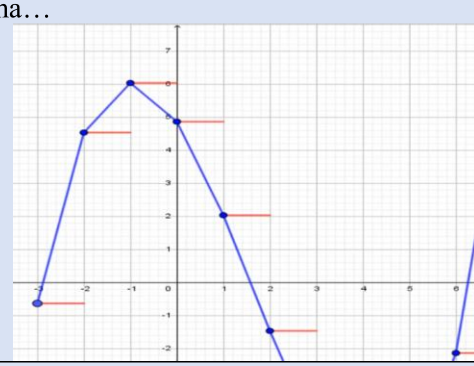
				segmentos rojos y los segmentos azules? Es decir, ¿Qué tienen en común unos y qué tienen en común los otros?		Niño 2 cuantifica el cambio en *x*, en la línea 42, pues da cuenta y razón de que todos los segmentos rojos valen uno. Adicionalmente, Niño1 agrega que la longitud de las pendientes ingresadas está representada por los segmentos azules. Además, reconoce que el recurso GGB fue programado con esta intención. Los comportamientos mencionados con antelación son indicadores de AM3. Adicionalmente Niño1 reconoce que este cambio es constante, indicador de AM2 (línea 48).	En las líneas 44, 46 y 48, Niño 1 y Niño 3 describen la relación existente para los segmentos rojos (los correspondientes a x), y además manifiestan que estos segmentos están diseñados así de manera intencional por los investigadores para que la relación sea constante (línea 48). Debido a que utilizan las herramientas de GGB y las relacionan y esto los lleva a una relación matemática, asignamos el indicador (D3) a esta situación.
		42	**Niño 2:**	Todos los segmentos rojos valen uno…			
		43	**Inves 1:**	¿Y eso tiene alguna importancia? ¿Alguna relevancia?			
		44	**Niño 1:**	Yo veo es otra cosa ahí… o sea, lo que se llevan en *x* es lo que apunta el rojo, y pues el azul es normal… pues lo que queríamos marcar…y pues entonces eso se podría decir que ustedes lo arreglaron para que…			
		45	**Inves 1:**	¿Nosotros arreglamos qué?			
		46	**Niño 1:**	Ehh…la recta para que pues… se lleve de a uno… porque pues esa es la relación que tienen todos, que se llevan de a uno			
		47	**Inves 1:**	¿Y por qué es relevante que todos sean de a uno?			
		48	**Niño 4:**	Para que sea constante			
		49	**Niño 3:**	No, para que se vea como más la curvita *(Hace un movimiento con su mano describiendo una curva)* … porque si estaría más alejado…sería más así *(Mueve su mano describiendo una figura más recta)* 			
		50	**Inves 1:**	Es decir, ¿Podríamos hacer lo mismo en el que todos los segmentos rojos no sean iguales? … Que unos sean más largos y otros más cortos…			

<table>
<tr>
<td>18:19 a 23:02</td>
<td>
<table>
<tr><td>51</td><td>Niño 2:</td><td>Si la línea roja no tiene el mismo valor para cada una … sería algo así, ¿no? (Señala la curva realizada previamente en lápiz y papel)</td></tr>
<tr><td>52</td><td>Niño 4:</td><td>Pues no sería una curva… por así decirlo, limpia, sino que sería algo así (Señala nuevamente la curva realizada en lápiz y papel)</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>53</td><td>Inves 1:</td><td>Remontémonos a lo que vimos hace algunas sesiones… ¿Cómo entendemos la pendiente?</td></tr>
<tr><td>54</td><td>Niño 2:</td><td>¿Creciente, decreciente y creciente?</td></tr>
<tr><td>55</td><td>Inves 1:</td><td>Si, eso es cierto… pero, a lo que voy es a ¿cómo la definimos nosotros la pendiente, inicialmente?</td></tr>
<tr><td>56</td><td>Niño 4:</td><td>Una inclinación…</td></tr>
<tr><td>57</td><td>Niño 2:</td><td>Una línea respecto al eje y.</td></tr>
<tr><td>58</td><td>Inves 1:</td><td>Habíamos hablado de una relación entre dos cosas…la pendiente… ¿se acuerdan? Que de hecho por ahí en el tablero está la pista [Previamente, los investigadores había hablado de razón de cambio promedio cuya explicación se encontraba en el tablero].</td></tr>
<tr><td>59</td><td>Niño 1:</td><td>¿De cambio promedio?</td></tr>
<tr><td>60</td><td>Inves 1:</td><td>Sí…pero ¿Cómo reconocemos la pendiente?</td></tr>
<tr><td>61</td><td>Niño 4:</td><td>¿La relación entre la distancia en x y la altura en y?</td></tr>
<tr><td>62</td><td>Inves 1:</td><td>¡La relación entre la distancia en x y la altura en y! ¡Sí!, esa es la cuestión acá.

Ahora, nuevamente, volvamos a lo que estábamos pensando acá… ¿Existe algún motivo por el cuál nosotros particularmente hayamos dejado que todos los segmentos rojos sean iguales?</td></tr>
</table>
</td>
<td>En la línea 61 Niño4 reconoce la pendiente como la relación que existe entre la distancia en x y la altura en y. Este es un comportamiento asociado con AM2.</td>
<td>A partir de la línea 53, Invest 1 intenta retomar la idea de la construcción de los segmentos rojos constantes para que los estudiantes establezcan relaciones entre los segmentos azules.

Esto se logra efectivamente en la línea 69, donde Niño 1 reconoce que si el segmento</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>63</td><td>Niña 1:</td><td>Para marcar las relaciones entre esos segmentos…</td></tr>
<tr><td>64</td><td>Inves 1:</td><td>¿Entre cuáles segmentos?</td></tr>
<tr><td>65</td><td>Niña 1:</td><td>Esos segmenticos… (señala en la pantalla los segmentos azules).</td></tr>
<tr><td>67</td><td>Niño 4:</td><td>Para que todas las pendientes sean uno en x…</td></tr>
<tr><td>68</td><td>Inves 1:</td><td>Que todas las pendientes sean uno en x, sí… ¿Y qué pasa entonces en y? … si todas son uno en x, ¿Qué pasa entonces en y?</td></tr>
<tr><td>69</td><td>Niño 1:</td><td>Pues … lo que uno quiera, ¿No?</td></tr>
<tr><td>70</td><td>Inves 2:</td><td>¿Ustedes se acuerdan de lo que hicimos en el primer ejercicio? El primero que hicimos, ¿El de las cucharadas de azúcar y las cucharadas de harina?</td></tr>
<tr><td>71</td><td>Niños:</td><td>Si</td></tr>
<tr><td>72</td><td>Inves 2:</td><td>¿Se acuerdan qué hicimos para calcular la pendiente? ¿Pusimos qué sobre qué? ¿Se acuerdan que había que calcular el cociente?</td></tr>
<tr><td>73</td><td>Niños:</td><td>Ahh, sí</td></tr>
<tr><td>74</td><td>Inves 2:</td><td>¿Qué dividimos ahí? ¿Qué hicimos ahí?</td></tr>
<tr><td>75</td><td>Niño 4:</td><td>Dividimos las de azúcar sobre las de harina… ¿no fue?</td></tr>
<tr><td>76</td><td>Inves 2:</td><td>¿Quién era el dependiente y el independiente ahí? ¿Se acuerdan?</td></tr>
<tr><td>77</td><td>Niño 1:</td><td>El independiente es x…</td></tr>
<tr><td>78</td><td>Niño 4:</td><td>Ahh... ¿Aquí es para que el independiente siempre sea uno?</td></tr>
<tr><td>79</td><td>Inves 2:</td><td>¿Y cuál sería la división ahí? Por ejemplo, para hallar esas pendientes ¿Cuál sería el cociente que calcularían ahí?</td></tr>
<tr><td>80</td><td>Niño 4:</td><td>La altura… al ser dividido en uno da el mismo número, ¿no?</td></tr>
<tr><td>81</td><td>Inves 2:</td><td>Sí</td></tr>
</table>
</td>
<td>Niño1 coordinó el valor de una variable con los cambios de la otra, al expresar que la variable independiente en el caso que se estaba mencionando era x. Este es un indicador de AM1.</td>
<td>rojo es constante, el valor de y es “lo que uno quiera” y representa la pendiente del segmento. Aunque no lo mencionen los estudiantes en su diálogo esto se puede evidenciar en la casilla en la cual ingresan los valores de la pendiente, pues allí pueden ingresar el valor “que quieran”. A partir de todo lo descrito, a estas acciones y diálogos asignamos el indicador (D3).</td>
</tr>
</table>

82	**Inves 1:**	Pero vean entonces lo importante y es que… todos los segmentos en *x* son iguales, ¿cierto? Ahora la pregunta es… ¿Las distancias en *y* son iguales?
83	**Niños:**	No
84	**Inves 1:**	¿Y eso que representa aquí?
85	**Niño 1:**	La relación que tienen respecto a *x*, ¿no?
86	**Inves 1:**	Hagámoslo aquí con un ejemplo… ¿cuál es la diferencia que hay por ejemplo entre este segmento y este segmento de acá? *[Se refiere a los dos primeros segmentos de la representación en GGB]* teniendo en cuenta que la distancia en *x* es la misma… 
87	**Niño 4 y Niño 1:**	La altura que recorren, la del eje *y*…
88	**Inves 1:**	¿Cuál de las dos mayor?
89	**Niño 2:**	En el de abajo *[Se refiere al primer segmento de izquierda a derecha]*
90	**Inves 1:**	¿Y eso que implica en la representación que está ahí? ¿O qué implica en las pendientes?
91	**Niño 2:**	Que está como más inclinada…
92	**Niño 3:**	Que el triángulo es más grande…

Los estudiantes reconocen que aunque la distancia en *x* es la misma, la diferencia entre los dos segmentos señalados por el investigador, es la altura, es decir, la distancia recorrida en el eje *y*. Este es un indicador de AM2, que se puede evidenciar en la línea 87.

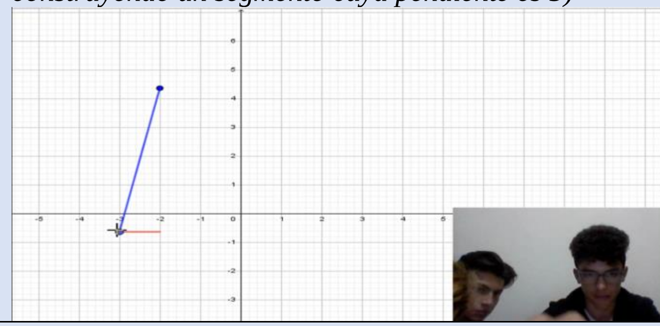
Ahora bien, en las líneas 91 y 92, los niños hacen alusión a otros elementos estudiados en sesiones anteriores. Niño 2 alude a la pendiente como inclinación, es decir que reconoce que, dado que una es mayor que otra, hay una que presenta mayor inclinación. En cuanto a Niño3, se evidencia

Los investigadores continúan teniendo un diálogo con los estudiantes en pro de establecer de manera concreta las relaciones entre los segmentos asignados para x y y en el recurso. En el diálogo establecido entre las líneas 86 y 103, se centra la atención en el tamaño que tienen estos segmentos en la construcción del recurso, los estudiantes son capaces de llegar a la conclusión de que la curva sería más "perfecta" o en otras palabras, más próxima a la curva original si los segmentos asignados a x tuvieran una longitud menor. Toda esta intervención se encuentra mediada directamente por las acciones

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>93</td><td>Inves 1:</td><td>(…) Una pregunta, ¿Qué pasa si hacemos que esos segmentos en x se sigan manteniendo iguales, pero los hacemos más pequeños?... pero que sigan siendo todos iguales… pero les disminuimos la distancia</td></tr>
<tr><td>94</td><td>Niño 4:</td><td>Sería más perfecta la curva…</td></tr>
<tr><td>95</td><td>Inves 1:</td><td>¿Sería más qué?</td></tr>
<tr><td>96</td><td>Niño 4:</td><td>Perfecta la curva…</td></tr>
<tr><td>97</td><td>Inves 1:</td><td>Más perfecta la curva… ¿Y eso a que se debe?</td></tr>
<tr><td>98</td><td>Niño 2:</td><td>A que entre más… la tangente… entre más unidos los puntos más se va definiendo la curva…</td></tr>
<tr><td>99</td><td>Niña 1:</td><td>¿Razón de cambio promedio?</td></tr>
<tr><td>100</td><td>Inves 1:</td><td>¿La qué?</td></tr>
<tr><td>101</td><td>Niña 1:</td><td>La razón de cambio promedio.</td></tr>
<tr><td>102</td><td>Inves 1:</td><td>La razón de cambio promedio… ok, ya utilizaste un término que es bien importante ahí… ¿Dónde la razón de cambio promedio es mayor? (…) ¿Dónde creen que la razón de cambio promedio sería mayor en esa representación que está ahí?</td></tr>
<tr><td>103</td><td>Niño 2:</td><td>Aquí… (Señala el segmento azul de mayor longitud)</td></tr>
</table>
</td>
<td>que alude al triángulo rectángulo cuyos catetos son el cambio en x y el cambio en y. Él reconoce que en el caso del segmento que tiene mayor pendiente, dicho triángulo será más grande. Los anteriores son comportamientos asociados con AM3.

Por otro lado, en la conversación que se lleva a cabo entre las líneas 93 a 98, se puede evidenciar que los estudiantes reconocen que si los avances en x se mantienen constantes y son cada vez más pequeños, entonces la curva va a tener una forma más definida. Este comportamiento está asociado a AM5. Además, en líneas 99 a 103, los reconocen que esto se debe a la razón de cambio, y Niño2 señala el intervalo de la curva en el que la razón de cambio promedio es mayor. Este último comportamiento está asociado con AM4.</td>
<td>realizadas previamente en el recurso y los elementos que los objetos GGB han brindado en relación con los objetos matemáticos. De esta forma, se asigna el indicador (D3) a la situación.</td>
</tr>
<tr>
<td>23:40 a 25:10</td>
<td>
<table>
<tr><td>104</td><td>Inves 1:</td><td>¿En cuáles dos la razón de cambio promedio es más pequeña?</td></tr>
<tr><td>105</td><td>Niño 4:</td><td>En la de uno cincuenta y uno diecisiete</td></tr>
</table>
</td>
<td>En las líneas 105 y 107, también se evidencian comportamientos asociados con AM4, pues los</td>
<td>En esta sección del desarrollo de la tarea se evidencia la verbalización de algunas</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>106</td><td>Inves 1:</td><td>¿Y en cuál es más grande?</td></tr>
<tr><td>107</td><td>Niños 2 y 3:</td><td>En la de ocho diecisiete y trece cinco</td></tr>
<tr><td>106</td><td>Inves 1:</td><td>¿Y por qué sucede esto? … teniendo en cuenta todo lo que está ahí…</td></tr>
<tr><td>107</td><td>Niño 2:</td><td>Porque es la pendiente…la diferencia entre el valor de cada pendiente…</td></tr>
<tr><td>108</td><td>Inves 1:</td><td>Volvamos a la última parte de cómo definimos la pendiente, ¿sí? Cómo el cociente entre quién y quién</td></tr>
<tr><td>109</td><td>Niño 3:</td><td>Entre dependiente e independiente…</td></tr>
<tr><td>110</td><td>Inves 1:</td><td>Entre el término dependiente y el independiente, ¿Cierto? ¿Quién es el independiente?</td></tr>
<tr><td>111</td><td>Niño 2:</td><td>x</td></tr>
<tr><td>112</td><td>Inves 1:</td><td>¿Y x como es acá?</td></tr>
<tr><td>113</td><td>Niños:</td><td>Uno</td></tr>
<tr><td>114</td><td>Inves 1:</td><td>¿Cómo es y que sería el dependiente?</td></tr>
<tr><td>115</td><td>Niño 1:</td><td>Según la pendiente que esté…</td></tr>
<tr><td>116</td><td>Inves 1:</td><td>¿Ese es constante? ¿Es igual?</td></tr>
<tr><td>117</td><td>Niño 4:</td><td>Es variable</td></tr>
<tr><td>118</td><td>Inves 1:</td><td>Es variable…esa era la palabra. Entonces, hay algunos puntos donde esa variable es más…</td></tr>
<tr><td>119</td><td>Niños:</td><td>Más grande…</td></tr>
<tr><td>120</td><td>Inves 1:</td><td>Exacto, que es donde la razón de cambio promedio es…</td></tr>
<tr><td>121</td><td>Niños:</td><td>Mayor…</td></tr>
</table>
</td>
<td>estudiantes reconocen en qué intervalos de la curva la razón de cambio promedio es mayor y menor (para esto hacen alusión a las pendientes de los segmentos que forman la curva en dichos intervalos.
En la conversación que se muestra entre las líneas 108 y 121, se evidencian comportamientos asociados con AM2, puesto que en las líneas 109 y 111, los estudiantes hacen referencia a que la pendiente se define como el cociente entre el término dependiente y el término independiente pues los estudiantes están reconociendo que en la situación propuesta intervienen dos variables y que los cambios entre ellas se relacionan mediante un cociente. Además, en las líneas 115 y 117, los estudiantes reconocen que y cambia, según la pendiente que introduzcan en el recurso.</td>
<td>conclusiones matemáticas a partir de lo realizado previamente en el recurso, esto es, la comparación de pendientes, llegando a términos más formales como “variable” [línea 117]. Sin embargo, esta afirmación no se encuentra sustentada a partir de alguna acción directa en el recurso, sino de la transformación y construcción paulatina de las ideas a partir de las acciones realizadas previamente en el recurso, por esto asignamos el recurso, por esto asignamos el indicador (C3) a la situación.</td>
</tr>
</table>

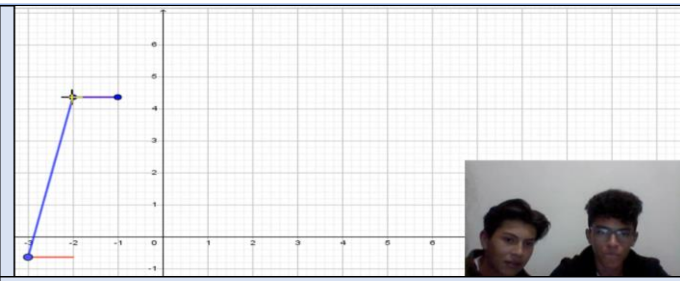
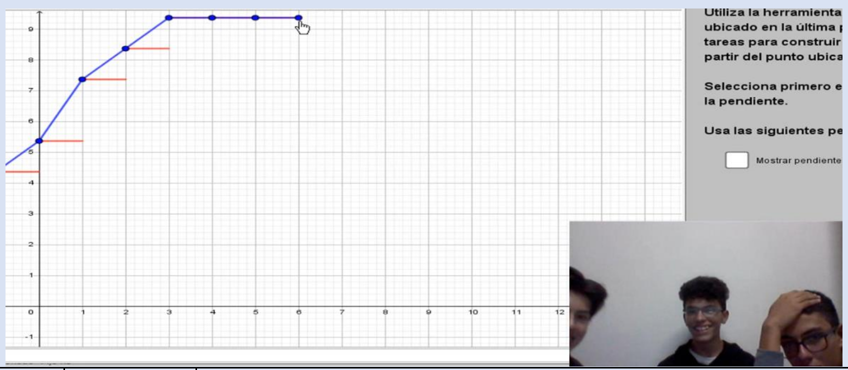
<table>
<tr>
<td>29:15 a 30:56</td>
<td>
<table>
<tr><td colspan="3">Los estudiantes deben realizar la construcción de una función que presente varios cambios de crecimiento, usando la herramienta programada por los investigadores en GeoGebra.</td></tr>
<tr><td>122</td><td>Niño 2:</td><td>(Usa la herramienta e ingresa la pendiente “5”, construyendo un segmento cuya pendiente es 5)
</td></tr>
<tr><td>123</td><td>Niño 1:</td><td>El entero también hace lo mismo</td></tr>
<tr><td>124</td><td>Niño 3:</td><td>¿Qué?</td></tr>
<tr><td>125</td><td>Niño 1:</td><td>Que el entero también hace lo mismo</td></tr>
<tr><td>126</td><td>Niño 4:</td><td>¿Cómo así?</td></tr>
<tr><td>127</td><td>Niño 2:</td><td>¿Y si usted quiere mandarla para allá? (señala la parte derecha de la pantalla)</td></tr>
<tr><td>128</td><td>Niño 2:</td><td>(…) ¿Cómo haríamos para controlar la del eje x?</td></tr>
<tr><td>129</td><td>Niño 4:</td><td>No creo que se pueda porque ellos lo programaron así…</td></tr>
<tr><td>130</td><td>Niño 2:</td><td>Esperen, creo que si se puede…hagamos puros ceros (ingresa en la casilla de pendiente el valor cero, y aparece un segmento paralelo al eje x de longitud uno) …</td></tr>
</table>
</td>
<td>Cuando los estudiantes empiezan a realizar la construcción propuesta, manifiestan la intención de graficar segmentos que sean paralelos al eje x. Aunque Niño4 expresa que no cree que esto sea posible, pues los investigadores programaron el recurso, de modo que el cambio en x sea constante, Niño2 asocia la posición del segmento que quieren graficar con el hecho</td>
<td>Los estudiantes reconocen que al ingresar valores enteros en la casilla de “pendiente”, también aparecen segmentos en el recurso. Esto puede evidenciarse en las líneas 123 y 125. Es decir, los estudiantes concluyen que la pendiente puede tomar cualquier valor, bien sea entero o decimal, e incluso cero [línea 130] y este arrojará como producto un segmento, esto gracias a la acción de ingresar un valor entero o cero al recurso y la programación realizada en este. Por lo mencionado, se asigna el indicador (C3) debido a la relación matemática establecida a partir de la construcción y la modificación de sus ideas.

Los elementos matemáticos trabajados previamente en los recursos y la acción de ingresar el valor cero en el recurso, da la capacidad a los estudiantes de describir el</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

32:00 a 34:30

34:40 a 36:32

</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>131</td><td>Niño 3:</td><td>Pues va derecho…</td></tr>
<tr><td>132</td><td>Niña 1:</td><td>Para que la línea quede recta solo tiene que hacer cero y ya…</td></tr>
<tr><td>133</td><td>Inves 1:</td><td>¿Por qué tienes que hacer que sea cero y ya?</td></tr>
<tr><td>134</td><td>Niño 3:</td><td>Porque no tendría inclinación...</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td colspan="3">Los estudiantes usan la herramienta programada para realizar los respectivos segmentos que les permitan construir la gráfica solicitada, durante esto, no mencionan nada al respecto y las pendientes usadas respectivamente son: 4, 1, 1, 2, 1, 1, 0, 0, 0

</td></tr>
<tr><td>135</td><td>Niño 1:</td><td>Ahora sí, menos uno, ¿no?</td></tr>
<tr><td>136</td><td>Inves 1:</td><td>¿Por qué menos uno?</td></tr>
</table>
</td>
<td>

de que, si el cambio en *x* es constante, es porque al cuantificarlo es igual cero, es decir, no hay cambio. Niño 3 y Niña 1 parecen estar de acuerdo con este razonamiento (líneas 131, 132 y 134). En particular en la línea 134 Niño3 expresa que un segmento cuya pendiente es cero, no tiene inclinación. Lo mencionado en este párrafo es un indicador de AM3.

Hasta este momento los segmentos construidos por los estudiantes eran crecientes o constantes. Sin embargo, la intención de ellos era realizar una construcción simétrica, tomando como eje de simetría la recta paralela al eje *y* que pasa por el punto de coordenadas (4.5,0),

</td>
<td>

comportamiento de un segmento que no tendría inclinación [líneas 132 y 134]. Indicador (D2).

Los estudiantes se apropian del recurso por completo, de tal forma que desarrollan la siguiente parte de la tarea sin mencionar nada sobre las acciones que están realizando. Es evidenciable que este trabajo se debe a la relación establecida por los estudiantes entre los objetos y herramientas de GeoGebra y los objetos matemáticos que se corporeizan a través de estos. En este caso particular, el valor de pendiente ingresada a través de la casilla “Pendiente” y el segmento dibujado gracias a esto. [Minuto 32:00 a 34:30]

</td>
</tr>
</table>

137	**Niño 3:**	Para que siga derecho, de pa’ abajo (…) para que sea decreciente…
138	**Niño 1:**	Este creo que es dos *(señala el segmento creciente construido previamente de pendiente 2)*
139	**Niño 2:**	Ese es menos dos *[se refiere a la pendiente del segmento que va a construir]*
140	**Inves 1:**	¿Y ahora por qué menos dos?
141	**Niño 2:**	Porque lo estamos haciendo como si fuera un espejo…
142	**Inves 1:**	¿Lo están haciendo como si fuera qué?
143	**Niño 2:**	Un espejo…
144	**Inves 1:**	¿Y eso que tiene que ver?
145	**Niño 4:**	Que deben ser opuestos
146	**Inves 1:**	Sí.
147	**Niño 2:**	*(Introduce en la casilla de pendientes todos los valores inversos a las pendientes ingresadas previamente)*
148	**Niño 1:**	¡Listo! Ya quedó el michelini *[fue el nombre que le dieron a la figura realizada por el parecido con el icono de Michellin]* 
149	**Inves 1:**	Muy bien, ahí está su michelini… ¿En dónde es creciente siempre?
150	**Niño 2:**	Del lado izquierdo… del lado que pusimos positivos
151	**Inves 1:**	¿Dónde no crece?

cabe aclarar que lo mencionado respecto al eje de simetría, nunca fue verbalizado por los estudiantes, pero se escribe de esta manera para contextualizar al lector. Ahora bien, una vez los estudiantes van a empezar a graficar los simétricos de los segmentos crecientes dibujados *a priori*, verbalizan que las pendientes de estos nuevos segmentos deben ser iguales a las de los segmentos que ya graficaron, pero con el signo opuesto, es decir negativas. Esto porque están haciendo su construcción como si fuese un espejo. Estos son comportamientos asociados con AM4.

Seguido a esto, se evidenció que los estudiantes reconocen que la pendiente de los segmentos construidos determina en qué intervalos la curva es creciente, decreciente o no presenta cambios de crecimiento (líneas 140 a 158). Además, los estudiantes reconocen en cuáles intervalos es mayor la razón de cambio es mayor y en cuáles es

Esto es observable también en la conversación sostenida entre las líneas 135 y 148 por los estudiantes e Inves 1, en la cual se refieren a la siguiente parte de la construcción como un “espejo”, ingresando los valores inversos a los construidos previamente. La representación gráfica y la construcción llevada a cabo a partir de la programación del recurso permite a los estudiantes relacionar nuevamente los objetos GGB con objetos matemáticos, construyendo así la gráfica pedida. Asignamos el indicador (D3) a esta descripción.

En la conversación sostenida entre las líneas 149 y 167, se tocan elementos como crecimiento, decrecimiento, cambio nulo, cambio mayor y cambio menor, que son elementos más formalizados de las matemáticas. Los estudiantes sustentan sus conclusiones apoyándose en

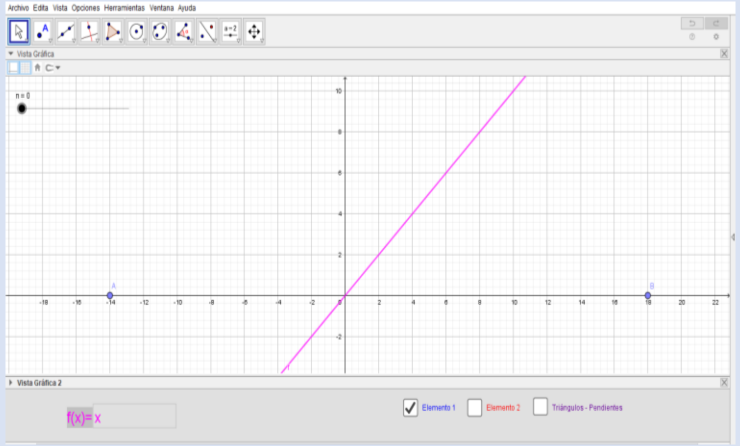
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>152</td><td>Niño 4:</td><td>Donde pusimos cero</td></tr>
<tr><td>153</td><td>Inves 1:</td><td>Pero… ¿Ahí qué es cero?</td></tr>
<tr><td>154</td><td>Niño 4:</td><td>El avance en y</td></tr>
<tr><td>155</td><td>Inves 1:</td><td>El avance en y, muy bien</td></tr>
<tr><td>156</td><td>Niño 1:</td><td>Paralelo a x</td></tr>
<tr><td>157</td><td>Inves 1:</td><td>Y por tanto la pendiente… ¿Y dónde es negativo?</td></tr>
<tr><td>158</td><td>Niño 1:</td><td>Donde empieza a bajar</td></tr>
<tr><td>159</td><td>Inves 1:</td><td>¿Y dónde es mayor el cambio?</td></tr>
<tr><td>160</td><td>Niño 1:</td><td>A lo último … [se refiere al último segmento dibujado, cuya pendiente es -4]</td></tr>
<tr><td>161</td><td>Niño 2:</td><td>Igual que a la primera de cuatro…aquí la otra es menos cuatro [se refiere al primer segmento y al último, cuyas pendientes son 4 y -4]</td></tr>
<tr><td>162</td><td>Inves 1:</td><td>¿Y dónde es menor el cambio?</td></tr>
<tr><td>163</td><td>Niño 1:</td><td>En uno</td></tr>
<tr><td>164</td><td>Niño 4:</td><td>No, en cero</td></tr>
<tr><td>165</td><td>Niño 1:</td><td>Ahh… pues ese técnicamente no es un cambio porque está en cero</td></tr>
<tr><td>166</td><td>Niño 2:</td><td>Bueno, entonces sería en uno o menos uno</td></tr>
<tr><td>167</td><td>Niño 3:</td><td>Cero a uno y uno a dos</td></tr>
</table>
</td>
<td>menor (líneas 159 a 167). Los anteriores son comportamientos asociados con AM4.</td>
<td>lo que han construido usando las herramientas de GGB y lo que les proporciona el mismo recurso en cuanto a representaciones gráficas, señalan allí la pantalla, reconocen el segmento horizontal cómo un cambio nulo y relacionan las construcciones con objetos matemáticos. A esta situación asignamos el indicador (C4).</td>
</tr>
</table>

Anexo 5: Transcripción sesión 4.

<table>
<tr><th colspan="4">SESIÓN 4</th></tr>
<tr><th>Número de tarea</th><th>1</th><th>Tipo de aplicativo</th><th>Exploración de situaciones y formulación de conjeturas</th></tr>
<tr><th>Minuto</th><th>Transcripción</th><th>Análisis desde Carlson</th><th>Análisis desde AS</th></tr>
<tr>
<td>0:00 a 9:05</td>
<td>

Se muestra a los estudiantes el recurso GeoGebra que van a utilizar en esta sesión y se les aclara que durante esta recibirán instrucciones para su interacción con este.

La interfaz del recurso a la que accederán los estudiantes inicialmente se muestra a continuación:



<table>
<tr><td>1</td><td>Invest1:</td><td>Entonces, van a ingresar la función $3sen(x) + 2$ (En este momento se recuerda a los estudiantes que la x va entre paréntesis).</td></tr>
</table>

</td>
<td>

<table>
<tr><th colspan="2">Convenciones</th></tr>
<tr><td>AM1</td><td></td></tr>
<tr><td>AM2</td><td></td></tr>
<tr><td>AM3</td><td></td></tr>
<tr><td>AM4</td><td></td></tr>
</table>

Indicadores

Se considera que con este recurso los estudiantes podrán evidenciar comportamientos asociados con AM1, AM2, AM3 y AM4. Estos se describen a continuación:

AM1:
Los estudiantes reconocen que a cada punto que se encuentra sobre el eje *x*, le corresponde un punto del eje *y* y que este último cambia, cuando el punto que se encuentra en *x* cambia.

AM2:
Los estudiantes verbalizan que los puntos que aparecen en el plano y se corresponden con los

</td>
<td>De manera casi inmediata en las líneas 3 y 4 los estudiantes</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Invest1:</td><td>Ahora, si ven que ahí hay un deslizador que se llama n, arriba. Van a empezar a moverlo y van a mirar qué pasa. ¿Qué aparece ahí?</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Niño1:</td><td>Hay cada vez más puntos ¿no?</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Niño2:</td><td>Y aparece un triángulo que muestra la relación de dos puntos ¿no?</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Invest1:</td><td>Listo, ponlo en diferentes valores [refiriéndose al deslizador]. Por ejemplo, ponlo en 7, ¿qué pasa? (…) ¿Ven puntos sobre cualquier parte del plano o ven puntos en lugares específicos?</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Niño1:</td><td>En la curva, en la función.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Niña1:</td><td>Y sobre la recta</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Invest1:</td><td>¿Sobre la recta?, ¿cómo se llama esa recta?</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Niña1 y Niño3:</td><td>El eje x</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Invest1:</td><td>Listo, ahora ¿qué creen que representan los puntos que no están sobre el eje x?, ¿será que existe alguna relación entre esos puntos y los que están sobre el eje x?</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Niño 3:</td><td>Mmm, muestran la relación del punto de arriba (dubitativo)</td></tr>
<tr><td>12</td><td>Invest1:</td><td>¿A qué te refieres cuando dices “la relación”?</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
<td>puntos que están sobre el eje x, forman la curva ingresada en la casilla de entrada.
También, verbalizan que los segmentos que aparecen en el plano cuando se activa la casilla “Elemento 1”, corresponden al cambio en x. Por otro lado, reconocen que los segmentos que aparecen cuando se activa la casilla “Elemento 2”, corresponden al cambio en y, y que este, contrario al cambio en x, no es constante.

AM3:
Los estudiantes reconocen que cada uno de los puntos que aparecen en el plano corresponden a las imágenes de los puntos que se encuentran sobre el eje x.
Por otro lado, son conscientes de que el cambio en x, representado por los segmentos que aparecen en pantalla cuando se activa la casilla “Elemento 1”, es constante. Además, reconocen que el cambio en y, es proporcional a cada uno de los segmentos que lo representa. Es decir, que entre más grande sea un segmento, mayor es el cambio.</td>
<td>reconocen la relación que existe entre el valor del deslizador y la cantidad de puntos que aparecen a partir de este. Además, identifican el triángulo que relaciona dos puntos. Enseguida, reconocen que estos puntos no aparecen en lugares aislados del plano, sino aparecen sobre la función y sobre el eje x.

De manera intuitiva, en las líneas 11 y 13 Niño 3 establece la relación que existe entre los puntos mencionados previamente, al decir que unos están “justo abajo” o “justo arriba”. Incluso menciona que unos se encuentran sobre la gráfica y los otros sobre el eje, pero que se encuentran alineados. A pesar de no referirse directamente a algún objeto matemático, de allí puede interpretarse que sabe que estos estás relacionados [línea 15]. Estas acciones se encuentran asociadas con el indicador (C1).</td>
</tr>
</table>

13	**Niño 3:**	Es que me parece que están justo abajo o en este caso están justo arriba *[señala puntos que se encuentran sobre la curva y en los cuadrantes I y II del plano cartesiano]* del punto en x. O sea, un punto está en la curva y hay un punto que está alineado a ese pero en el eje x.	***AM4:*** Los estudiantes reconocen que los triángulos que aparecen al activar la casilla "Triángulo-pendientes" representan la pendiente de una recta secante a la curva dada. Es decir que coordinan la razón de cambio promedio de la función, con los cambios en x y y.	
14	**Invest1:**	¿Si ven que esos puntos están dividiendo el eje x? *[señala puntos que están sobre el eje x]* O sea que entre más grande sea el valor n ¿qué pasa hay más o hay menos puntos?		
15	**Niña 1:**	Sí, y el eje se va fragmentando más y los punticos del eje x marcan las diferentes partes en que se está dividiendo también la curva		
16	**Invest1:**	Listo o sea que esos puntos sobre la curva están relacionados con los que están en el eje x, ¿cuál será esa relación?	En las líneas 11 y 13 Niño3 está evidenciando un comportamiento asociado con AM1, pues reconoce que a cada punto que está sobre el eje x, le corresponde un punto sobre la curva.	
		Debido a que en este momento los estudiantes se mostraron dubitativos frente a la pregunta que se les estaba realizando, la investigadora procede a realizar algunas preguntas que les permitan a los estudiantes recordar la noción de imagen de una función. Esto se evidencia en las líneas 17 a 27.		
17	**Invest1:**	Ejemplo, tenemos la función $2x + 3$ y yo les digo que quiero que hallen la imagen para $x = 3$, ustedes qué harían		
18	**Niño 1:**	En el eje x se coloca el valor de 3		En las líneas 17 a 27 se desarrolla un diálogo en pro de recordar la noción de imagen de una función, no hay uso del recurso GGB pero si una reactivación de conocimientos previos mediante la relación
19	**Invest1:**	¿Sí?, ¿seguros?, ¿eso es todo?		
20	**Niño 2:**	Bueno y también depende de la relación que tenga con y		
21	**Invest1:**	¿Cómo así "la relación"?		
22	**Niño 2:**	Bueno, pues hay un valor dependiente y uno independiente, x es el independiente y y va a ser el		

		dependiente. Entonces depende del valor que sea *x*, va a ser *y*.
23	**Invest1:**	¿Cómo hacen para encontrar el valor de *y*? Si yo les digo que la función es $2x + 3$ y deben encontrar el valor de *y*.
24	**Niño 3:**	Se reemplaza *x* por tres
25	**Niña 1:**	Se multiplica el número que va con *x* y se le suma el número que diga la función
26	**Niño 2:**	En ese caso *y* sería nueve
27	**Niño 1:**	Seria dos por tres más tres.
28	**Invest1:**	Listo, entonces acá, [*refiriéndose al recurso GeoGebra]*, ¿será que esos puntos tienen que ver con la función, los que están sobre la curva?, ¿qué pasará si yo encuentro la imagen de cada uno de los puntos que están en el eje *x*.
29	**Niño 1:**	Parece una línea recta.
30	**Invest1:**	¿y si aumenta el valor que toma el deslizador?, ¿qué va a pasar si *n* es igual a 50?
31	**Niña 1:**	Van a aparecer muchos más punticos
32	**Invest1:**	¿Y si *n* fuera mucho más grande? *[En este momento los estudiantes hacen que el deslizador tome su valor máximo, es decir 200]*
33	**Niño 2:**	Ahhh, los puntos forman la curva.
34	**Invest1:**	Pero teniendo en cuenta lo que discutimos ahorita, ¿cuál sería la relación entre los puntos que están en el eje *x* y esos puntos que forman la curva? ¿Esos puntos son qué?
35	**Niño 3:**	¿Segmentos?, no sé, estoy adivinando.

En la línea 33, Niño2 verbaliza que los puntos que aparecen en el plano y se corresponden con los puntos que están en el eje *x*, forman la curva. Este es un comportamiento asociado a AM2.

entre objetos matemáticos punto y su imagen, indicador (Z2).

En las líneas 31 y 33, a partir del uso del deslizador en el recurso, los estudiantes son capaces de describir que los puntos que estaban mencionando antes se corresponden con puntos de la función, esto es gracias a que ponen el deslizador en el valor de 200. Asociamos el indicador (D2) a este comportamiento.

En ese momento los estudiantes se muestran confundidos, por esta razón, los investigadores proceden a reorientar las preguntas para recordarles cómo graficar una función. Esto en aras de direccionar a los estudiantes a encontrar la relación entre los puntos que se encuentran sobre el eje y los puntos que se encuentran sobre la curva.

36	**Invest1:**	¿Cómo hacen ustedes para graficar una función? Si yo les pido graficar la función $2x + 3$, ¿qué hacen?
37	**Niño 1:**	Pues entonces se hace…, se hace el plano cartesiano, porque solo se utilizan *y* y *x*
38	**Invest1:**	Sí, y luego, ¿qué hacen?
39	**Niño 1:**	Se ubica el punto
40	**Invest1:**	¿Cuál punto?
41	**Niño 1:**	El punto previamente sacado
42	**Niña 1:**	El punto por el que cambiamos *x*
43	**Invest1:**	¿O sea que tendríamos que cambiar *x* por varios puntos? ¿O como lo harían?
44	**Niño 2:**	Por varios valores
45	**Niño 1:**	Pues depende, depende porque digamos si *x* es un punto, digo, es un número fijo, entonces solo es un punto, pero si *x* puede variar, se vuelve una recta, es diferente porque también están los números que están después de la coma. Entonces eso cambia todo. *[El estudiante que habló y sus compañeros aún evidencian confusión en su rostro.]*

Los investigadores proponen a los estudiantes, cambiar la función que ingresaron en el recurso GeoGebra, por la función $2x + 3$ y realizar el mismo proceso de exploración que se llevó a cabo con la función dada al inicio de la intervención.

46	**Invest1:**	Pongan *n* igual a cinco *[Indicando a los estudiantes que deben poner el deslizador en el valor 5].*

De las líneas 36 a 45, hay un diálogo en el que se discute sobre la forma de graficar una función, no hay interacción con el recurso, pero las ideas matemáticas son claras [línea 45]. Asignamos el indicador (Z2).

		¿Qué aparece ahí?, ¿en cuántas partes está dividido el eje *x*? 
47	**Niña 1:**	En cinco
48	**Invest1:**	Y ese punto que está ahí, el de abajo, que está sobre la recta, ¿qué coordenada tiene en *x*?
49	**Niño 1:**	Es menos cuatro
50	**Invest1:**	Listo y qué pasa si yo hallo la imagen de menos cuatro para esa función. *[Refiriéndose a la función graficada en el recurso* $2x + 3$]
51	**Niño 3:**	Ah sí, ahí está
52	**Invest1:**	¿Qué cosa?
53	**Niño 1:**	Eh, bueno, pues usando la función, si sabemos que *x* en ese punto es menos cuatro, dos por cuatro pues es ocho y como es negativo, es menos ocho, más tres pues menos cinco.
54	**Niña 1:**	Y está en menos cinco, la imagen es menos cinco.
55	**Invest1:**	O sea que ¿cuáles son las coordenadas de ese punto?
56	**Niño 2:**	Menos cuatro, menos cinco
Los investigadores sugieren a los estudiantes mover el deslizador con el fin de que el valor de n sea mayor y aparezcan más puntos sobre el eje x y sobre la función.		

Los estudiantes no evidenciaron de manera inmediata que los puntos que aparecían en el plano, sobre la curva, eran las imágenes correspondientes de los puntos que se encontraban en el eje x. Sin embargo, con la orientación brindada por parte de los investigadores, se evidencia en las líneas 51 que Niño3, Niño1 y Niña1 descubren que la imagen de $x = -4$, es -5. Asimismo, en las líneas 58, 60, 62 y 64 se evidencia que los estudiantes reconocen que los puntos que aparecen sobre la curva, corresponden a las imágenes de

Gracias a la indicación dada por los investigadores de ingresar la función $2x + 3$ y poner el deslizador en $n = 5$, los estudiantes pudieron observar la relación entre los puntos que aparecen sobre el eje x y sobre la función. [Líneas 51 y 53], incluso, mencionan las coordenadas de ese punto.

Esta conclusión es producto de los elementos ingresados en el recurso y la relación establecida por los puntos allí. Tal como lo habían mencionado previamente, pero ahora también describen de manera formal esta relación. Situación relacionada con el indicador (C3).

A partir de la relación descrita previamente y el aumento en el valor del deslizador, los estudiantes describen de manera formal la relación existente entre los puntos que aparecen sobre el eje x y los que aparecen en la función, llamándolos “el valor dependiente, la imagen” [Líneas 60 y 64]. Es uno de las primeras

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>57</td><td>Invest1:</td><td>Teniendo en cuenta lo que acabamos de hacer [refiriéndose al cálculo de la imagen de menos cuatro], podríamos decir que esos puntos que están sobre la función son qué</td></tr>
<tr><td>58</td><td>Niño 1:</td><td>Pues, según yo, tienen relación con los puntos de x [refiriéndose a los puntos que están en el eje x].</td></tr>
<tr><td>59</td><td>Invest1:</td><td>Y, ¿cuál es esa relación? Ahorita ustedes hicieron el ejercicio y dijeron, si x es igual a menos cuatro, entonces y es igual a menos cinco. ¿Ese menos cinco qué vendría siendo?</td></tr>
<tr><td>60</td><td>Niño 2:</td><td>El valor dependiente, la imagen</td></tr>
<tr><td>61</td><td>Invest1:</td><td>¿La imagen de qué?</td></tr>
<tr><td>62</td><td>Niño 2:</td><td>Del menos cuatro</td></tr>
<tr><td>63</td><td>Invest1:</td><td>O sea que todos esos puntos que salen ahí sobre la recta [Refiriéndose a la función $2x + 3$] son…</td></tr>
<tr><td>64</td><td>Niño1:</td><td>Las imágenes de los puntos de x. [Señala los puntos que están en el eje x].</td></tr>
</table>
</td>
<td>los puntos que aparecen sobre el eje x. Lo descrito anteriormente es un indicador de AM3.</td>
<td>descripciones de manera formal de esta sesión, asignamos el indicador (D4).</td>
</tr>
<tr>
<td>9:06 a 14:19</td>
<td>
<table>
<tr><td>65</td><td>Invest1:</td><td>Ahora sí vuelvan a colocar la función $3sen(x) + 2$ [Indicando a los estudiantes que ingresaran esta función en la casilla de entrada del recurso Geogebra].</td></tr>
<tr><td colspan="3">Seguido a esto, se indica a los estudiantes que el deslizador n debe estar en el valor cero y que deben activar la casilla “Elemento 1” que se encuentra en la parte inferior del recurso GeoGebra.</td></tr>
<tr><td>66</td><td>Invest1:</td><td>Ahora, van a mover el deslizador y van a mirar qué pasa. ¿Qué aparece ahí, a medida que ustedes mueven eso?</td></tr>
<tr><td>67</td><td>Niño 3:</td><td>La distancia entre cada punto</td></tr>
<tr><td>68</td><td>Niño 2:</td><td>La distancia de cada punto</td></tr>
</table>
</td>
<td>En las líneas 67, 68 70 y 72los estudiantes Niño2, Niño3 y Niña1 evidencian que reconocen</td>
<td>Se evidencia que el uso del deslizador les permite a los estudiantes establecer la relación</td>
</tr>
</table>

69	**Invest1:**	¿La distancia de cada punto? Y, ¿esa distancia con qué coincide?
70	**Niña 1:**	Con la distancia entre los puntos que están en el eje *x*
71	**Invest1:**	Listo, ahora, ¿por qué todos esos segmentos miden lo mismo?
72	**Niña 1:**	Porque se divide en partes iguales *(señala el eje x con el dedo).*
73	**Invest1:**	Listo y si hablamos de cambio en esa función, ¿cómo sería el cambio en *x*?
74	**Niño 2:**	Es fijo
75	**Invest1:**	¿Es fijo?, ¿por qué?
76	**Niño 3:**	Por las distancias iguales
77	**Invest1:**	Listo, ahora van a activar la casilla “Elemento 2”
78	**Niña 1:**	¿Desactivamos “Elemento 1”?
79	**Invest1:**	No, déjenla ahí
80	**Niño 1:**	Ahora es con *y*. *[Al observar que ahora aparecen segmentos verticales en el recurso].*
81	**Invest1:**	Listo, ahora con *y*, ¿y qué pasa con *y*?
82	**Niña 1:**	*y* si varía
83	**Invest1:**	Y, ¿por qué creen que varía? ¿por qué en unos lugares los segmentos son más grandes y en otros son más pequeños?
84	**Niño 1:**	Pues porque *y* es el dependiente, entonces, eh, la secuencia depende de cuánto sea *x* y pues eso cambia.
85	**Invest1:**	¿Qué relación tienen esos segmentos? Si ven que por ejemplo, el primero es más grande, el otro es más pequeño, el otro otra vez es más grande. ¿Qué relación tienen con la curva?, más bien, con la forma que tiene la curva.
86	**Niño 2:**	¿Cómo que la duplica?
87	**Invest1:**	¿Qué duplica?

que los segmentos que aparecen al activar la casilla “Elemento 1”, corresponden a la distancia que hay entre los puntos que se encuentran en el eje *x*, lo que corresponde a un indicador de AM2. Ahora bien, en las líneas 74 y 76 Niño2 y Niño3 concluyen que el cambio en *x* de esa función sería constante, pues las distancias entre los puntos que están en el eje *x* son las mismas, este es un comportamiento asociado con AM3.

Por otro lado, en las líneas 80, 82 y 84, se evidencia que Niño1 y Niña1 reconocen que los segmentos que aparecen al activar la casilla “Elemento 2”, corresponden al cambio en *y*, comportamiento que se asocia con AM2. Sin embargo, los estudiantes no verbalizaron que a medida que el tamaño de los segmentos guardaba relación con la cantidad de cambio en *y*.

de distancias iguales en el eje *x* a medida que lo mueven [líneas 67, 68 70, 72, 74 y 76]. Existe aquí una relación entre el objeto matemático (variación constante) y el objeto de GGB que lo representa (Deslizador). Asignamos así, el indicador (D2).

El recurso les permite a los estudiantes observar los segmentos que representan el cambio en *y*, y a partir de su tamaño y ubicación, los estudiantes reconocen que están relacionados con el valor de *x* [Línea 84].

88	**Niño 2:**	O sea, si siguiéramos, por así decirlo los, …, no, no sé.
89	**Invest1:**	Si quieren pongan el valor de *n* más grande para que puedan ver todavía más segmentos y puedan sacar una conclusión. Ahora, ¿qué pasa con los segmentos cuando se van acercando a la parte de arriba, como a la parte más alta de esa curva?
90	**Niño 1:**	Pues cada vez tiene menos lejanía a ella.
91	**Invest1:**	¿Menos lejanía? O sea, que el tamaño del segmento va siendo ¿cada vez más qué?
92	**Niño 1, Niño 2 y Niño 3:**	Pequeño
93	**Invest1:**	Más pequeño, ¿cierto? ¿Ustedes se acuerdan cómo hallar la pendiente de la recta tangente a una curva? ¿Cuál va a ser la pendiente de esa recta en este punto? *[Refiriéndose a uno de los puntos más altos de la curva]*
94	**Niño 1:**	Ah, era cero ¿no?
95	**Invest1:**	Es cero ¿cierto?
96	**Niño 2:**	Sí
97	**Niño 3:**	Ahhh, sí.
98	**Invest1:**	Listo, y si yo quiero saber cómo sería la pendiente de la tangente a esa curva en este punto de acá. *(Señala punto de la curva que se encuentra en un intervalo creciente de esta)*
99	**Niño 1:**	Mmm *[Dubitativo]*.
100	**Invest1:**	Observen aquí, ¿qué pasa con la curva en esta parte?, ¿crece, decrece...? *(señalando en la pantalla un intervalo en el que la curva crece)*
101	**Niño 1:**	Ahí crece, y luego decrece *(señala intervalo siguiente en el que la curva decrece).*

Aunque no estaba contemplado en la planeación, los investigadores realizaron preguntas respecto a la pendiente en intervalos crecientes y decrecientes en la curva, cuyas respuestas involucraron comportamientos asociados con AM4. Esto se evidencia en las líneas 90 a 111. Allí se ilustra cómo los estudiantes dan cuenta y razón del valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en intervalos crecientes, decrecientes y puntos de inflexión.

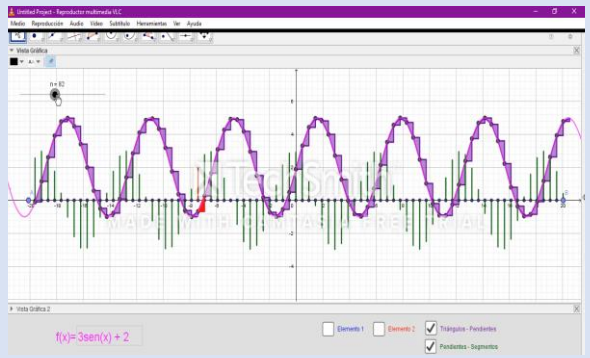
Cuando los estudiantes usan el deslizador y lo hacen más grande describen que los segmentos que aparecían sobre la función ahora se hacen más pequeños. [Líneas 90 y 92]. También se ponen en juego los conocimientos previos de los estudiantes en las líneas 94, 96, 97, 101, 103, 105, 107, mientras hablan de crecimiento, decrecimiento y la relación con la pendiente, a partir de la gráfica de la función. Estos se modifican al final, en la línea 109 y 111, dónde se pasa a hablar de punto de inflexión, es posible asignar aquí dos indicadores, uno que se refiere a la modificación de conocimiento previos partir del uso de GGB

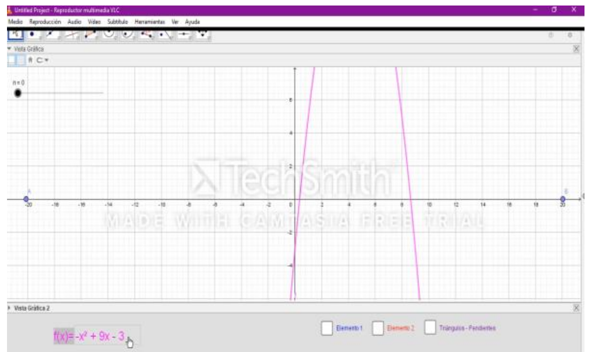
<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>102</td><td>Invest1:</td><td>Y en ese caso ¿cómo son las pendientes? Cuando una curva crece</td></tr>
<tr><td>103</td><td>Niño 1:</td><td>Era positiva</td></tr>
<tr><td>104</td><td>Invest1:</td><td>¿Y cuando la curva decrece?</td></tr>
<tr><td>105</td><td>Niño 1:</td><td>Negativa</td></tr>
<tr><td>106</td><td>Invest1:</td><td>¿Y en estos puntos en los que la curva pasa de ser creciente a decreciente o al revés?</td></tr>
<tr><td>107</td><td>Niño 1:</td><td>Ahí es cero</td></tr>
<tr><td>108</td><td>Invest1:</td><td>Listo, ahora quiero saber, ¿qué relación encuentran entre eso que acaba de decir Niño 1 y los segmentos que ven en la pantalla?</td></tr>
<tr><td>109</td><td>Niño 3:</td><td>Que el punto de inflexión es como el límite de cada curva, porque ahí es cero. [Refiriéndose a la pendiente].</td></tr>
<tr><td>110</td><td>Invest1:</td><td>O sea que entre más cerca esté un segmento a un punto de inflexión, su longitud va a tender a qué</td></tr>
<tr><td>111</td><td>Niño 2:</td><td>A disminuir, a cero.</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
<td>que sería (D3) y uno relativo a la formalización de ideas (D4).</td>
</tr>
<tr>
<td>14:20 a 17:50</td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>112</td><td>Invest1:</td><td>Listo, ahora, van a activar la otra casilla que sale ahí. [Refiriéndose a la casilla “Triángulos - pendiente” del recurso GeoGebra].</td></tr>
<tr><td>113</td><td>Niño 3:</td><td>Ah, la relación de x y y</td></tr>
<tr><td>114</td><td>Invest1:</td><td>Entre más grande es el valor de n ¿qué pasa?</td></tr>
<tr><td>115</td><td>Niño 1:</td><td>Los triangulitos se hacen más pequeños</td></tr>
<tr><td>116</td><td>Niña 1:</td><td>La pendiente se va asemejando a cero</td></tr>
<tr><td>117</td><td>Niño 2:</td><td>Ajá, se va acercando a cero, en la curva</td></tr>
<tr><td>118</td><td>Invest1:</td><td>¿En toda la curva? Porque acuérdense que la pendiente es de la recta tangente a esa curva ¿no?</td></tr>
<tr><td>119</td><td>Niño 2:</td><td>Pues, en sus límites ¿no? O sea… (muestra los puntos más altos y más bajos de la curva)</td></tr>
</table>
</td>
<td>Nuevamente en las líneas 115 a 117, 119, 128 y 129, los estudiantes están evidenciando un comportamiento asociado con AM4, puesto que reconocen que entre más grande es el valor que toma el deslizador n, los triángulos se van haciendo más pequeños y la pendiente de la recta tangente a los puntos sobre la curva va tendiendo a cero en</td>
<td>En la línea 112 Inves 1 pide activar la casilla triángulos y enseguida, en la línea 115, Niño 1 reconoce a partir de los triángulos que aparecen, que a medida que el valor de n aumenta estos triángulos se hacen más pequeños y la pendiente se va acercando a la curva [117], y en la línea 126 Niño 3 describe que los triángulos van formando la</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>120</td><td>Invest1:</td><td>¿Qué van formando esos triángulos pequeños?</td></tr>
<tr><td>121</td><td>Niño 2:</td><td>Mmm…</td></tr>
<tr><td>122</td><td>Invest1:</td><td>Pon un n muy pequeño</td></tr>
<tr><td>123</td><td>Niño 3:</td><td>¿Ahí? (Mueve el deslizador hasta $n = 31$)</td></tr>
<tr><td>124</td><td>Invest1:</td><td>Listo, ahí esos triángulos, todo ese grupo de triángulos, ¿qué está formando?</td></tr>
<tr><td>125</td><td>Niño 1:</td><td>Pueees…</td></tr>
<tr><td>126</td><td>Niño 3:</td><td>La forma de la curva</td></tr>
<tr><td>127</td><td>Invest1:</td><td>O sea que entre más grande sea n, ¿esos triángulos se van a aproximar más a qué?</td></tr>
<tr><td>128</td><td>Niño 3:</td><td>A cero</td></tr>
<tr><td>129</td><td>Niño 1:</td><td>Y a la forma de la curva</td></tr>
<tr><td>130</td><td>Invest1:</td><td>Listo, ahora, cuando activaron las casillas de “Elemento 1” y “Elemento 2”, ¿esos segmentos representaban qué?</td></tr>
<tr><td>131</td><td>Niño 1:</td><td>Mmm, ¿este cateto?… (señala el cateto, de uno de los triángulos rectángulos del recurso, que es perpendicular al eje y)</td></tr>
<tr><td>132</td><td>Invest1:</td><td>Listo, sí, ese, ¿qué representa?</td></tr>
<tr><td>133</td><td>Niño 2:</td><td>y</td></tr>
<tr><td>134</td><td>Niño 1:</td><td>El cambio en y</td></tr>
<tr><td>135</td><td>Invest1:</td><td>Y, ¿el otro cateto?</td></tr>
<tr><td>136</td><td>Niño 1:</td><td>Es el cambio en x</td></tr>
<tr><td>137</td><td>Invest1:</td><td>Bien, ahora van a activar la casilla de abajo, la de la letra verde (señala con el dedo la casilla “Pendientes – segmentos”).</td></tr>
<tr><td>138</td><td>Niña 1:</td><td>¿Esta?</td></tr>
<tr><td>139</td><td>Invest1:</td><td>Sí. Listo, esos segmentos que están ahí, esos verdes que ustedes ven son iguales al cociente entre el cambio en y y el cambio en x, ¿sí? Ejemplo, si en uno de esos triángulos el cambio en y es de tres y en x el cambio es de 2. ¿Cuánto medirá el segmento verde?</td></tr>
</table>
</td>
<td>los puntos de inflexión (línea 119).

En las líneas 113, 134 y 136 Niño1 y Niño 2 evidencian un comportamiento asociado a AM2, pues reconocen que los catetos de los triángulos rectángulos que aparecieron al activar la casilla “Triángulos-pendiente”, corresponden a los cambios en x y y.</td>
<td>curva. Aquí se establece inicialmente una relación entre los objetos GGB: deslizador y cantidad y tamaño de triángulos, y enseguida la aproximación de la función a partir de los segmentos de los triángulos [129]. Asignamos el indicador (D2) a esta situación.

Los estudiantes reconocen la relación de objetos matemáticos con su corporeización matemática al describir que los segmentos que aparecieron luego de activar las casillas “elemento 1” y “elemento 2” representan los cambios en x y los cambios en y. Asignamos el indicador (D2).</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>140</td><td>Niño 3:</td><td>Tres medios</td></tr>
<tr><td>141</td><td>Niño 1:</td><td>O uno punto cinco</td></tr>
<tr><td>142</td><td>Invest1:</td><td>Listo, esa sería la medida del segmento verde en ese caso que les mencioné. Ahora, van a aumentar todavía más el valor de n.</td></tr>
<tr><td>143</td><td>Niño 2:</td><td>¿Forman la curva abajo? [Haciendo referencia a los segmentos verdes que van apareciendo].

</td></tr>
<tr><td>144</td><td>Invest1:</td><td>¿Pero es la misma curva?</td></tr>
<tr><td>145</td><td>Niño 3:</td><td>No, es más pequeña</td></tr>
<tr><td>146</td><td>Invest1:</td><td>Y, ¿coincide, con esto? (señala la curva).</td></tr>
<tr><td>147</td><td>Niño 1:</td><td>Parece una sombra.</td></tr>
<tr><td>149</td><td>Invest1:</td><td>Listo ¿hasta ahí vamos bien?</td></tr>
<tr><td>150</td><td>Niños:</td><td>Sí</td></tr>
</table>
</td>
<td>Adicionalmente, se evidencia en las líneas 143,145 y 147 que Niño2, Niño1 y Niño3 han observado que los segmentos verdes, cuya longitud corresponde al cociente entre el cambio en y y el cambio en x, forman una especie de “sombra” de la curva original y de tamaño más pequeño.</td>
<td>El deslizador n particularmente describe el comportamiento de varios elementos que aparecen en el recurso, en la línea 143 establecen la relación entre el deslizador ene y los segmentos verdes que aparecen ahora, y los comienzan a relacionar con el comportamiento de la función original. Es posible asignar el indicador (D1) por las relaciones que establece a partir de las herramientas dadas por el recurso GGB.</td>
</tr>
<tr>
<td>17:51 a 22:20</td>
<td>
<table>
<tr><td>151</td><td>Invest1:</td><td>Ahora, van a ingresar otra función y vamos a repetir los mismos pasos. Pero antes, desactivemos las casillas que están seleccionadas.</td></tr>
<tr><td>152</td><td>Invest2:</td><td>Van a ingresar la función $-x^2 + 9x - 3$</td></tr>
<tr><td>153</td><td>Niño 3:</td><td>Una parábola</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

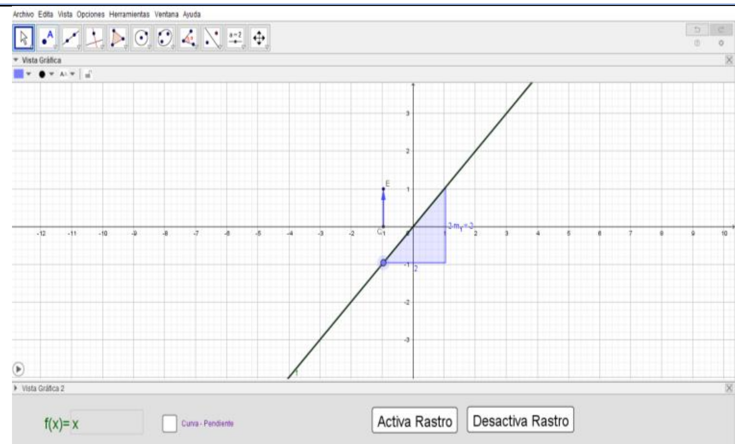
154	**Invest2:**	Si quieres aléjala un poco, para que se vea toda. *[Sugiriendo a los estudiantes disminuir el zoom, de modo que se pudiera apreciar la parábola desde su vértice].* 
155	**Invest1:**	¿Te acuerdas cómo se aleja? Dale allá en ese botón de las 4 flechas, arriba, *(señala ícono de “Desplaza vista gráfica” de GeoGebra)*, y dale donde dice “Alejar”.
156	**Invest1:**	¿Se acuerdan de qué fue lo primero que hicimos con la otra? *[Refiriéndose a la función* $3sen(x) + 2$*]*
157	**Niño 3:**	Empezar a dividir el eje x
158	**Invest1:**	¿Cómo hacían para eso?, ¿qué debían activar?
159	**Niño 3:**	Con n
160	**Niño 1:**	Y “Elemento 1”
161	**Niño 2:**	Ah, siempre es igual. *[Al empezar a mover el deslizador y notar que aparecen puntos sobre la curva y sobre el eje x. Además de segmentos que representan el cambio en x].*
162	**Invest1:**	Ahora activen por favor “Elemento 2”
163	**Niño 3:**	Ahí aparece la otra distancia, la del cambio en y

En las líneas 161 y 163 se evidencia que Niño2 y Niño3 reconocen nuevamente que los segmentos que aparecen al activar las casillas “Elemento 1” y “Elemento 2”, representan los cambios de x y y respectivamente. Indicador de AM2.

En las líneas 159 y 160 se evidencia que para los estudiantes es muy clara la relación establecida entre los elementos de GGB y la incidencia que tienen uno sobre los otros, al mover el deslizador n saben que este dividirá al eje x en las unidades indicadas. También describen en la línea

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>164</td><td>Invest1:</td><td>Ahora activen la casilla de los triángulos. [Refiriéndose a la tercera casilla que aparece en el recurso].</td></tr>
<tr><td>165</td><td>Niño 2:</td><td>Es igual que en el otro.</td></tr>
<tr><td>166</td><td>Invest1:</td><td>¿Qué pasara a medida que n se haga más grande?, ¿a qué se van a aproximar los triángulos?</td></tr>
<tr><td>167</td><td>Niña 1:</td><td>A la parábola</td></tr>
<tr><td>168</td><td>Invest1:</td><td>¿El tamaño de los segmentos del cambio en x varía?</td></tr>
<tr><td>169</td><td>Niño 1:</td><td>Es fijo, pero en y si cambia.</td></tr>
<tr><td>170</td><td>Invest1:</td><td>Y, ¿cómo es el cambio?</td></tr>
<tr><td>171</td><td>Niño 3:</td><td>Pues a medida que se acerca a la inflexión, a ese punto, el segmento se va acercando a cero.</td></tr>
<tr><td>172</td><td>Niña 1:</td><td>Y la pendiente</td></tr>
<tr><td>173</td><td>Invest1:</td><td>¿La pendiente de qué?</td></tr>
<tr><td>174</td><td>Niño 2:</td><td>De la tangente a la curva.</td></tr>
</table>
</td>
<td>En la línea 169 se evidencia que Niño1 reconoce que el cambio en x es constante, contrario a lo que ocurre con el cambio en y. Este es un indicador de AM3.
Además, en las líneas 171 a 174 los estudiantes aluden a que entre más cercanía exista con el punto de inflexión de la curva, menor es el tamaño del segmento y este se va acercando a cero, al igual que la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.</td>
<td>167 que entre más grande el valor de n los triángulos se aproximarán más a la parábola. Y en 169 describen el cambio constante en x generado por la división realizada por n. En las líneas 171 y 174 es posible evidenciar una evolución de las ideas previas de los estudiantes, pues están alcanzando nuevas conclusiones a partir de lo desarrollado. Esta descripción es coherente con el indicador (D3).</td>
</tr>
<tr>
<td>Número de tarea</td>
<td>2</td>
<td>Tipo de aplicativo</td>
<td>Exploración de situaciones y formulación de conjeturas</td>
</tr>
<tr>
<td>24:21 a 40:11</td>
<td>Se indica a los estudiantes la ubicación del segundo recurso que van a utilizar en esta sesión y se les solicita abrirlo. La interfaz es la siguiente:</td>
<td>Indicadores
Se considera que con este recurso los estudiantes podrán evidenciar comportamientos asociados con AM3 y AM4. Estos se describen a continuación:

AM3:
Los estudiantes reconocen cuál es la pendiente de la recta que</td>
<td></td>
</tr>
</table>



175	**Invest1:**	¿Si ven ese segmento azul que está ahí?, en la parte de arriba del eje *x*. Lo van a medir. ¿Recuerdan con qué herramienta se medía?
176	**Niño 3:**	Mmm…
177	**Niño 2:**	¿Segmento, medir?
178	**Invest1:**	Van a ir a la octava casilla *(señala la barra de herramientas de GeoGebra)*, donde está dibujado un ángulo. Ahí, buscan la opción “Distancia o Longitud”.
179	**Niña 1:**	Ah, ya y luego aquí. *(Selecciona el segmento azul, pero no aparece la medida)*. Ah no, no funciona.
180	**Invest1:**	Espera. Si ¿ven que el segmento tiene un punto en cada extremo?
181	**Niño 3:**	Aja
182	**Invest1:**	Entonces, vas a dar clic ahí en “distancia” *[haciendo referencia a la opción Distancia o Longitud”]* y luego, le vas a dar clic en el punto de arriba y en el punto de abajo *[refiriéndose a los extremos del segmento]*. Ahí te va a salir la medida.
183	**Niña 1:**	Ya, ahora sí.

aparece en pantalla y además, descubren que la medida del segmento que se muestra en pantalla, equivale a la medida de la pendiente.

AM4:
Los estudiantes asocian el cambio de color del triángulo que aparece cuando mueven el punto que aparece sobre la curva, con los cambios de crecimiento y decrecimiento que experimentan las funciones ingresadas.

De las líneas 175 a la 186 hay un diálogo respecto a cómo usar la herramienta de “distancia”, los estudiantes la acogen y aplican, debido a que es una interacción solo con objetos y elementos de GGB asignamos el indicador (A0).

184	**Invest1:**	Listo, ya midieron el segmento. Ahora, si ven que hay un punto sobre esa recta que está ahí.
185	**Niño 2:**	Sí
186	**Invest1:**	Van a empezar a mover ese punto, para donde quieran y van a mirar qué pasa.
En ese momento, Niña 1 intenta mover el punto, pero nota que este no se mueve, luego da un vistazo a la barra de herramientas y de manera intuitiva, da clic en la primera casilla de dicha barra y procede a mover el punto.		
187	**Invest1:**	Listo y ahí ¿qué pasa?
188	**Niño 1:**	Se mueve al mismo tiempo que el punto.
189	**Invest1:**	¿Qué se mueve?
190	**Niño 1:**	El segmento azul
191	**Niño 2:**	¿El punto solo se deja mover sobre la línea? *(señala la recta que se encuentra graficada en el recurso).*
192	**Niña 1:**	Sí y al moverlo no cambia ni los números ni nada. *[Hace referencia a "los números", puesto que en el recurso también aparece la medida de los catetos del triángulo rectángulo que representa la pendiente de la recta graficada].*
193	**Invest1:**	Y, ¿cuál es la pendiente de esa recta que está ahí?
194	**Niño 3:**	Equis, es equis
195	**Invest1:**	¿La pendiente es *x*?
196	**Niño 2:**	No
197	**Niño 1:**	La pendiente es cero ¿no?
198	**Invest1:**	¿Cero?
199	**Niña 1:**	*Hace gesto de negación*
200	**Invest1:**	¿Cuál es la pendiente de esa recta negra que está ahí?, ¿se acuerdan de lo que hacíamos para hallar la pendiente?
201	**Niño 1:**	La pendiente era…
202	**Niño 3:**	Equis dos menos equis uno.
203	**Niño 1:**	Eh sí, sobre ye dos menos ye uno.

En las líneas 193 a 203, se evidencia que los estudiantes tienen dificultades para determinar la pendiente de la recta que graficaron en GeoGebra. Pues particularmente, en la línea 194 Niño3 señala que la pendiente es equis y en la línea 197 Niño1 afirma que es cero. Además, en las líneas 202 a 208 se evidencia que los estudiantes no hacen uso de la gráfica de la función en GeoGebra, ni de la cuadrícula que les ofrece el plano para hallar la pendiente, sino que recurren a tratar de recordar la fórmula.

En las líneas 188, 190 y 192 los estudiantes reconocen una relación de dependencia en los movimientos de los puntos y el segmento. Esta relación es solo entre objetos GGB. Por eso, asignamos indicador (B1).

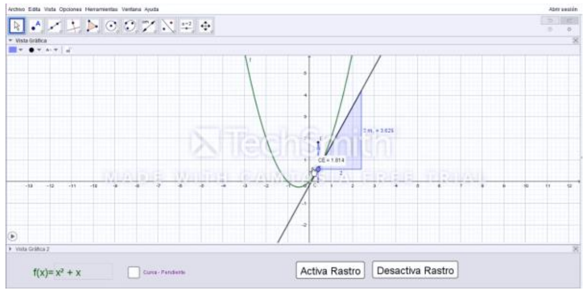
Se genera una conversación entre estudiantes e investigador en la que tratan de recordar cómo calcular la pendiente de una recta, se evidencia en las líneas 202 a 208 el nulo uso de GGB para poder calcular la pendiente, además es evidente la dificultad para encontrar la pendiente, pues no se establecen las relaciones entre los objetos matemáticos.
A esta situación, se le asigna el indicador (Z1).

204	**Invest1:**	¿Sí?, ¿seguros?, ¿cuál era el cociente que hallábamos?, ¿el cambio de *x* sobre el cambio de *y*?
205	**Niño 1:**	Sé que *x* iba arriba
206	**Invest1:**	¿Se acuerdan de la primera clase? Que trabajamos un problema que relacionaba las cucharadas de harina con las cucharadas de azúcar para hacer un postre…
207	**Niño 3:**	Ah no, *y* va arriba
208	**Niño 1:**	Ahhh sí, ahí iba arriba la dependiente
209	**Invest1:**	Listo, acuérdense que yo hablo de cambio en y, precisamente porque estoy diciendo, ye dos menos ye uno. Entonces, observando esa recta que tienen ahí, me podrían decir ¿cuál es la pendiente?
210	**Niño 2:**	Ah, pues, uno.
211	**Invest1:**	¿Por qué es uno?
212	**Niño 1:**	Pues porque, es más fácil mirar uno de los puntos de la recta, y pues, cuando *x* es uno, *y* también es uno, entonces pues uno, porque uno sobre uno da uno.
213	**Invest1:**	Listo, ¿el triángulo también les podría dar esa información?
214	**Niño 3:**	Eh, los dos catetos miden uno
215	**Niño 2:**	No, dos
216	**Niño 1:**	Sí, ahí dice que miden dos. *(Señala la pantalla).*
217	**Niño 3:**	Ah, pues dos sobre dos, uno.
218	**Invest1:**	Listo, o sea que a partir del triángulo pueden sacar eso. *[Refiriéndose a la pendiente de la recta]*. Ahora, ¿cuánto mide el segmento que tienen ahí? *[Haciendo referencia al segmento azul]*.
219	**Niños:**	Uno
220	**Invest1:**	Y, ¿la pendiente de la recta cuánto es?
221	**Niños:**	Uno
222	**Invest1:**	O sea que el segmento tiene la misma medida que qué

Ahora bien, en las líneas 210 a 212 se observa que los estudiantes observan la recta, y a partir de dos de sus puntos, calculan la pendiente. Ahora bien, en las líneas 213 a 223, se evidencia que los estudiantes se dan cuenta de que, a partir del triángulo, también pueden obtener la información para hallar la pendiente de la recta. Además, verbalizan que el segmento que aparece en el plano tiene la misma medida de dicha pendiente. Lo descrito con antelación es un indicador de AM3.

Los estudiantes reconocen una relación entre el triángulo que representa la pendiente y el valor de la pendiente de la recta, logran esto a partir de los recursos que GGB les brinda [Líneas 212 a 217]. Además, logran establecer la relación entre la medida del segmento luego de haberlo medido con el valor de la pendiente. Situación que les permitirá más adelante llegar a conclusiones matemáticas sobre la razón de cambio. Asignamos el indicador (B2).

		223	**Niño 1:**	Que la pendiente de la recta			
		224	**Invest1:**	Listo, ahora van a ingresar ahí en la barra de entrada la función $x^2 + x$. Si quieres con las flechas del teclado subes la pantalla, *(esto se hizo con el fin de que los estudiantes pudieran visibilizar mejor la gráfica de la función).*  Entonces, van a mover el punto sobre la curva ¿listo?, el punto que está ahí. Van a mirar que pasa, ahí va saliendo la medida del segmento			
		225	**Niño 1:**	¿Por qué se vuelve rojo? *[El estudiante dice esto porque Niña1 movió el punto sobre la parte de la curva que se encuentra en el cuadrante II del plano cartesiano y en ese momento el triángulo cambió de color azul a color rojo]* 		En las líneas 230, 231 y 233, se evidencia que Niño2 y Niño3	La programación realizada al recurso GGB les permite a los estudiantes llegar a conclusiones de relación entre el valor de la pendiente de la recta (positivo o negativo) y el sentido de crecimiento o decrecimiento de la función [Líneas 225, 230, 231

226	**Niña 1:**	Porque ahí es negativo
227	**Invest1:**	¿Sí?, ¿qué es negativo?
228	**Niño 1:**	Pues, ese es el lugar de *x* negativo
229	**Invest1:**	¿Sí?, ¿por eso? y ¿qué pasa con la curva en esa parte?
230	**Niño 2:**	Eh, decrece
231	**Niño 3:**	Y por eso está hacia abajo. *[Refiriéndose a la posición del triángulo rectángulo rojo].*
232	**Invest1:**	Y en el otro lado ¿qué pasa? 
233	**Niño 2:**	Crece, por eso está azul. *[Refiriéndose al triángulo].*
234	**Invest1:**	Ahora empieza a mover el punto por ahí *(señala el vértice de la parábola graficada)*. Eso ahí, ¿por qué no hay triángulo ahí?

asociaron el cambio de color y la posición del triángulo con el comportamiento de la función en los tramos en los que Niña1 movió la recta tangente. Esto es un indicador de AM4.

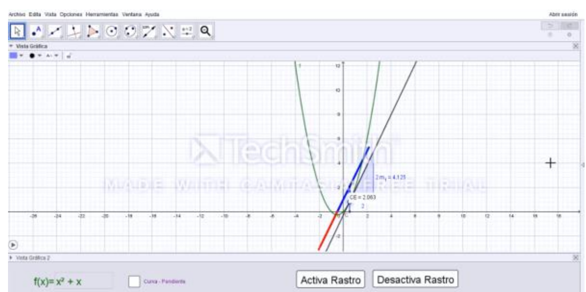
Aunque en las líneas 235 y 236 Niña1 y Niño2 dicen que la recta tangente al vértice de la parábola

y 233]. También se evidencia esto en el reconocimiento de pendiente nula, como la desaparición del triángulo [Líneas 238, 240 y 241]. Esto es gracias al dinamismo de GGB al mover los puntos y a la programación, la relación matemática se establece y el indicador que permite describir esto es (D2).

			graficada no tiene pendiente, Niño1 determina que la pendiente en este punto es cero, esto es un comportamiento asociado a AM3. Cabe resaltar que en ese momento Niña1 alude a que la medida del segmento, que resulta ser igual a la pendiente de la recta tangente en un punto de la curva, es cero, coma cero uno y no cero. Sin embargo, Niño2 afirma que este valor se aproxima mucho a cero, y Niña1 muestra estar de acuerdo con él, puesto que ya no se forma un triángulo.	
235	**Niña 1:**	Porque no hay pendiente de esa recta. *[Refiriéndose a la recta tangente a la parábola que se graficó].*		
236	**Niño 2:**	Ah sí, ahí no hay		
237	**Invest1:**	¿No hay pendiente? O ¿la pendiente es igual a qué?		
238	**Niño 1:**	La pendiente es igual a cero.		
239	**Niña 1:**	Pero ahí no está en cero, ahí dice cero coma cero uno *(refiriéndose a la medida del segmento que sale en pantalla)*.		
240	**Niño 2:**	Pero igual, se aproxima mucho.		
241	**Niña 1:**	Bueno sí es casi cero, ya no se ve triángulo.		
242	**Invest1:**	Ahora, van a dar clic en el botón que dice "Activa Rastro" Y van a mover el punto muy despacio. Ahí va apareciendo una recta ¿cierto? 	Ahora bien, en las líneas 245, 246, 252, 254 y 256 se evidencia que los estudiantes están estableciendo una relación entre los colores de la recta que se forma con el rastro y el comportamiento en términos de crecimiento o decrecimiento de la función ingresada. Ese comportamiento está asociado con AM4.	El rastro que aparece luego de activar la casilla pedida por Inves 1 en la línea 242, permite una visualización de la relación descrita previamente por los estudiantes entre el sentido de crecimiento y decrecimiento de la función y la pendiente de la recta tangente a esta. La recta que apareció como rastro tiene dos colores que representan la pendiente negativa y positiva de la tangente; en las líneas 246,
243	**Niño 1:**	Sí		
244	**Invest1:**	Y ¿por qué aparece con dos colores?		

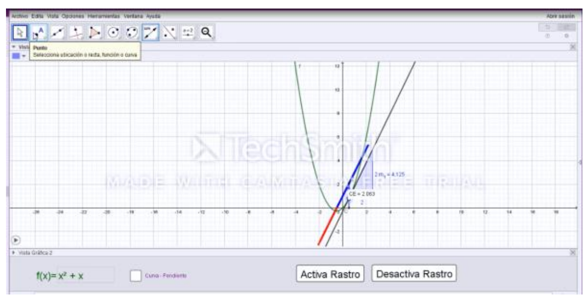
245	**Niño 2:**	Negativo y positivo
246	**Niño 3:**	Sí, negativo y positivo
247	**Invest1:**	¿Negativo y positivo?
248	**Niño 1:**	Bueno, pues, el lugar positivo de y y el lugar negativo de y.
249	**Invest1:**	Bueno y ¿cuándo se pone azul esa recta, cuando el punto se mueve sobre qué parte de la curva?
250	**Niño 2:**	Cuando está en la derecha
251	**Invest1:**	Y en la derecha ¿esa curva es qué?, ¿qué comportamiento tiene?
252	**Niño 1:**	Que crece
253	**Invest1:**	O sea que cuando crece, esa recta sale de color…
254	**Niño 1 y niño 3:**	Azul
255	**Invest1:**	Y cuando decrece…
256	**Niño 1:**	Roja
257	**Invest1:**	Ahora, ustedes me podrían decir qué pendiente tiene esa recta que se está formando ahí.
258	**Niño 2:**	Mmm, ¿qué pendiente?
259	**Niño 1:**	¿Ahí dónde está el triángulo?
260	**Invest1:**	¿No podrían ustedes armar el triángulo ahí?

En ese momento Niña 1, trata de hacer que la recta dada inicialmente (recta tangente a la curva) sea paralela a la recta de dos colores que formó el rastro. Lo anterior, mediante el movimiento del punto dado.



Cuando se pregunta por el valor de la pendiente de la recta formada por el rastro, Niño3 y Niño 1, señalan que la pendiente

252, 254 y 256 dan evidencia de cómo los estudiantes describen esta relación. Asignamos el indicador (D2).

261	**Niña 1:**	Si no estoy mal, creo que ya casi la tengo.
262	**Invest1:**	Y no podrían construir el triángulo ayudándose de la cuadrícula, por ejemplo.
263	**Niño 2:**	Ah pues sí, digamos… *(El estudiante va a la barra de herramientas y busca la herramienta “Pendiente” que ofrece GeoGebra, sin embargo, evidencia que esta no funciona sobre la recta generada a partir del rastro)*
264	**Niño 3:**	Dos porque ahí casi que están paralelas *[Refiriéndose a que la pendiente es dos, pues Niña1 intentó hacer que la recta tangente a la curva fuera paralela a la recta generada a partir del rastro].*
265	**Niño 1:**	Sí eso es dos
266	**Niña 1:**	¿Comprobamos? Pues comprobemos a ver si sí o no. *Niña 1, selecciona la herramienta “Punto” de GeoGebra y grafica dos puntos sobre la recta generada a partir del rastro. Pero no continúa con su idea. Los estudiantes piden una “pista”.* 

es dos (líneas 264 y 265). Para esto, utilizan como guía la recta tangente que Niña1 ubicó convenientemente, de modo que fuera paralela a la recta formada con el rastro.

Los estudiantes tienen una idea inicial de la posible pendiente que puede tener la recta producida a través del rastro. Intentan confirmar esta a partir del dinamismo de GGB como muestra la línea 260. Posteriormente, confirman esta hipótesis a partir de la activación de otra herramienta de GeoGebra. En las líneas 273, 275 y 276, se evidencia que confirman estas ideas a partir de las herramientas. El indicador asignado es (B3).

		
267	**Invest1:**	Activen la casilla “Curva – Pendiente”. ¿Qué aparece ahí? 
268	**Niño 2:**	Una recta morada.
269	**Niño 1:**	Ah, es igual *(señala en la pantalla que la recta morada es la misma recta formada por el rastro).*
270	**Invest1:**	Listo, ahora sí, ¿cuál es la pendiente de esa recta?
271	**Niña 1:**	Ah, es la misma que la del rastro.
272	**Invest1:**	Ahora sí comprueba con la herramienta si quieres. *[Refiriéndose a la herramienta “Pendiente” de GeoGebra que uno de los estudiantes intentó usar previamente].*
273	**Niña 1:**	*Selecciona la herramienta pendiente y luego da clic sobre la recta morada*

Los estudiantes muestran la necesidad de comprobar si efectivamente la pendiente de la recta formada por el rastro es dos. Al activar la casilla “Curva-Pendiente”, aparece la recta que pasa por los dos puntos que había graficado Niña1 y que se corresponde con la recta formada por el rastro, en este momento los estudiantes recurren a la herramienta “Pendiente” de GeoGebra para comprobar su hipótesis (líneas 273, 275 y 276).

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>274</td><td>Invest1:</td><td>Listo, ¿qué pendiente tiene?</td></tr>
<tr><td>275</td><td>Niño 2:</td><td>Dos</td></tr>
<tr><td>276</td><td>Niña 1:</td><td>Sí era dos</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>40:12 a 44:30</td>
<td>
<table>
<tr><td>277</td><td>Invest1:</td><td>Vamos a hacer lo mismo con otras funciones ¿listo? Entonces, desactiven por favor la casilla.</td></tr>
<tr><td>278</td><td>Niño 2:</td><td>Y desactivar rastro.</td></tr>
<tr><td>279</td><td>Invest1:</td><td>También deben borrar los puntos. [Haciendo referencia a los puntos que había graficado Niña1].</td></tr>
<tr><td>280</td><td>Niña 1:</td><td>¿Cómo era que se quitaban?</td></tr>
<tr><td>281</td><td>Niño 1:</td><td>Se cliquean y borrar.</td></tr>
<tr><td>282</td><td>Invest1:</td><td>Eso, das clic derecho y sobre la pendiente de la recta también (para borrar la pendiente).

Van a ingresar ahora la función $2\cos(x)+1$</td></tr>
<tr><td>283</td><td>Niña 1:</td><td>Empieza a mover el punto sobre la curva

</td></tr>
<tr><td>284</td><td>Invest1:</td><td>¿Qué va pasando con el triángulo?</td></tr>
<tr><td>285</td><td>Niño 2:</td><td>Negativo, positivo, negativo, positivo (mientras Niña 1 mueve el punto sobre la curva).</td></tr>
<tr><td>286</td><td>Invest1:</td><td>Y ese "negativo, positivo" ¿qué indica?</td></tr>
<tr><td>287</td><td>Niño 2:</td><td>Que la función decrece y crece</td></tr>
</table>
</td>
<td>En las líneas 285 y 287 se evidencia que nuevamente Niño2 está estableciendo una relación entre el cambio de colores del triángulo que aparece al mover el punto sobre la curva y el comportamiento de la función. El</td>
<td>Al mover el punto sobre la función, con este también se mueve la recta, los estudiantes reconocen el cambio que presenta su pendiente al ser positiva, negativa, positiva… [Línea 285] y relacionan esto</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>288</td><td>Invest1:</td><td>Listo, ahora van a oprimir “Activa Rastro” y empiezan a mover el punto.</td></tr>
<tr><td>289</td><td>Niño 1:</td><td>La sombra. [Haciendo referencia a la curva que estaba siendo dibujada por el rastro].

</td></tr>
<tr><td>290</td><td>Niña 1:</td><td>Empieza a mover el punto de manera más lenta pues se da cuenta que de esta forma, la curva formada por el rastro queda más definida.</td></tr>
<tr><td>291</td><td>Invest1:</td><td>¿Aquí pasa lo mismo con los colores o no? [La curva es de colores azul y rojo al igual que la recta que aparecía en el caso de la función cuadrática trabajado anteriormente].</td></tr>
<tr><td>292</td><td>Niño 2:</td><td>Pues, ahora la curva pasa por cero. [El estudiante hace esta observación dado que la recta generada por el rastro en el caso anterior no pasaba por el origen].</td></tr>
<tr><td>293</td><td>Invest1:</td><td>Sí, pero qué más pasa. Espera, detente ahí un momento [indica a Niña1 que detenga el punto en el inicio de un intervalo en el que la función es decreciente]. Ahí ¿de qué color se está dibujando la otra curva? [Refiriéndose a la curva del rastro].</td></tr>
<tr><td>294</td><td>Niño 1 y Niño 3:</td><td>Rojo</td></tr>
<tr><td>295</td><td>Invest1:</td><td>¿Por qué rojo?</td></tr>
</table>
</td>
<td>resto de los estudiantes también establecen la relación mencionada (líneas 294 a 304 y líneas 314 y 316). Lo mencionado anteriormente es un indicador de AM4.</td>
<td>con el crecimiento y decrecimiento de la función. Indicador (D2).

Nuevamente, el rastro que se genera se encuentra dividido en 2 colores, azul y rojo, donde azul representa el crecimiento y el rojo representa el decrecimiento de la función. Esta relación los estudiantes la vuelven a describir en las líneas 294, 296, 299, 301 303 y 304. Esto es gracias a las herramientas y objetos de GGB y a la programación desarrollada, por esto, asignamos el indicador (D4).</td>
</tr>
</table>

	296	**Niño 3:**	Porque está decreciendo.		Esto mismo sucede al ingresar otro tipo de función, tal como se muestra en las líneas 314 y 316.
	297	**Niño 1:**	Porque es negativa		
	298	**Invest1:**	Porque está decreciendo quién.		
	299	**Niña 1:**	La curva		
	300	**Invest1:**	Listo, ahora muévelo por favor, hacia el siguiente tramo a tu derecha. *[Indicando a Niña 1 que mueva el punto hacia un intervalo en el que la función es creciente]*. Ahí ¿de qué color tendría que salir el rastro?		
	301	**Niña 3:**	Azul		
	302	**Invest1:**	¿Azul?, ¿por qué?		
	303	**Niño 2:**	Porque crece.		
	304	**Niña 1:**	Porque la curva crece.		
	305	**Invest1:**	Listo, ahora van a activar "Curva Pendiente", van a activar esa casilla. ¿Qué sale?		
	306	**Niño 2:**	Se volvió morado.		
	307	**Invest1:**	Se volvió morado, pero ¿es la misma curva?		
	308	**Niño 3:**	Sí		
44:39 a 47:19	**309**	**Invest2:**	Ahora ingresen la función $\frac{x^3}{8} - 3x$		
	310	**Niña 1:**	*Mueve el punto sobre un intervalo decreciente de la curva* 		

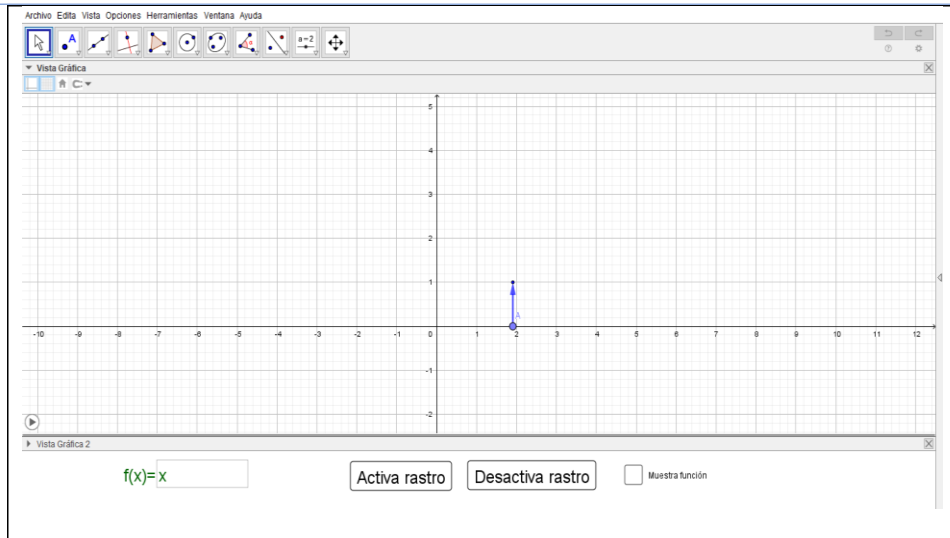
311	**Invest1:**	Ahí, ¿en dónde estamos? *[Aludiendo al lugar de la curva en el que Niña 1 está moviendo el punto]*.
312	**Niño 1:**	En un lugar negativo, porque la curva está decreciendo.
313	**Invest1:**	Ahora mueve el punto hacia el lado derecho de la curva *[indicando a Niña 1 que mueva el punto hacia un intervalo en el que la curva es creciente]*. Ahí debería salir ¿de qué color? *[refiriéndose a la curva que se está formando con el rastro del punto]*. 
314	**Niño 1:**	Azul.
315	**Invest1:**	Porque la curva está…
316	**Niño 3:**	Creciendo
317	**Invest1:**	Y ahí ¿qué salió?, ¿qué se formó?
318	**Niño 2:**	La sombra.
319	**Invest1:**	¿La sombra?, ¿qué forma tiene esa curva que se está formando ahí?
320	**Niño 2:**	Parece una función cuadrática.
321	**Niño 3:**	Una parábola.

Además de lo mencionado previamente, hay una conclusión importante a la cuál llegan los estudiantes, de la relación entre la función original y la curva que aparece a partir del rastro, los estudiantes describen a la curva como rastro

		
322	**Invest1:**	Fíjense en lo que pasó. Cuando teníamos que la curva era una parábola, ¿se acuerdan? Al principio, que la función que ingresamos era una parábola.
323	**Niño 1:**	Sí
324	**Invest1:**	¿Qué formaba el rastro?
325	**Niño 2:**	Una recta ¿no?
326	**Invest1:**	Sí, una recta. O sea que cuando la función inicial era una cuadrática, nos salió una recta. Ahora, en este caso que tenemos una función cúbica, ¿nos está saliendo qué en el rastro?
327	**Niño 1:**	Cuadrática
328	**Niño 2:**	Ah, como que se le quita un grado a la potencia de la función.
329	**Invest1:**	¿Sí?, ¿Todos vieron eso?
330	**Niña 1 y Niño 3:**	Sí

como que se le quita un grado a la potencia de la función, líneas 321, 325, 327 y 328 (C3).

Número de tarea	3	**Tipo de aplicativo**	Exploración de situaciones y formulación de conjeturas
49:18 a 53:30	*Se indica a los estudiantes la ubicación del tercer recurso GeoGebra que se va a trabajar y se solicita abrirlo. La interfaz es la siguiente:*	**Indicadores** Se considera que con este recurso los estudiantes podrán evidenciar	



331	**Invest1:**	Van a ingresar la función x. Ahora, si ven que ahí hay un punto que se llama A.
332	**Niña 1:**	Sí ya lo vi, ¿hay que moverlo?
333	**Invest1:**	Sí, van a moverlo para todas partes.
334	**Niña 1:**	Mmm ya, para arriba no se mueve… *(Mientras mueve el punto).*
335	**Niño 1:**	No, solo se mueve en el eje x, para ambos lados
336	**Invest1:**	¿El segmento cambia en algún momento cuando se mueve ese punto?
337	**Niña 1:**	No, nada.
338	**Invest1:**	Listo, entonces, ahora van a colocar la función $2x + 3$. *(Señala la casilla de entrada en la pantalla donde los estudiantes deben escribir la función).* Listo, ¿pasa algo?
339	**Niño 2:**	No *[mientras mueve el punto por el eje x].*
340	**Niña 1:**	Tampoco.
341	**Invest1:**	Ahora van a activar la casilla. *[Refiriéndose a la casilla "Muestra función"].* Listo, ¿esa es la función $2x + 3$?

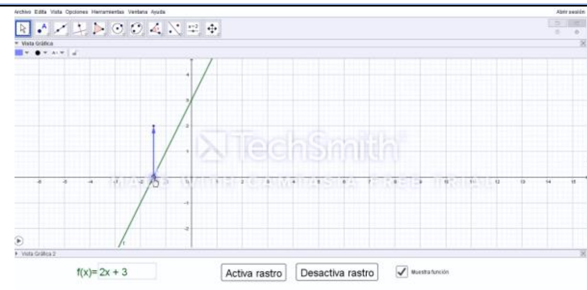
comportamientos asociados con AM2, AM3, AM4 y ¿AM5? Estos se describen a continuación:

AM2:
Al ingresar funciones lineales al recurso y mover el punto A, los estudiantes verbalizan que el tamaño del segmento no presenta ningún cambio.

AM3:
Los estudiantes determinan el valor de la pendiente de las funciones lineales ingresadas o bien, de las rectas generadas a partir del rastro que se obtiene al mover el punto A.

AM4:
Los estudiantes relacionan los colores del rastro, con los cambios que presenta la función y a partir de esto determinan si esta crece o decrece en un intervalo. También, reconocen que en el caso de las funciones polinómicas, la función formada por el rastro tiene un grado menor que la función original y determinan su ecuación.

AM5:



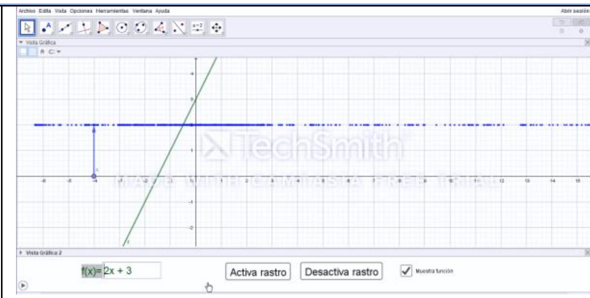
342	**Niño 3:**	Sí.
343	**Invest1:**	¿Cómo saben?
344	**Niño 1:**	Eh, pues, el punto de corte es tres *(señala en la pantalla el punto de corte de la recta en el eje y).*
345	**Invest1:**	Y la pendiente de esa recta ¿cuál sería?
346	**Niño 1:**	Era *y* sobre *x* ¿cierto? *(Mira a sus compañeros).* Entonces, cuando *y* es tres, *x* es cero, entonces…
347	**Niña 1:**	La pendiente es dos
348	**Niño 1:**	Es tres.
349	**Niño 3:**	¿Tres?
350	**Niño 1:**	Según yo… Ah no, mentiras, no es tres dividido cero, es tres dividido uno punto cinco. *(Dibuja con su dedo en la pantalla un triángulo cuyos vértices son los puntos de coordenadas* (0,3), (0,0) *y* (1.5,0)*).*
351	**Niña 1:**	Por eso, la pendiente es dos y el punto de corte es tres.
352	**Invest1:**	Listo, ahora van a dar clic en el botón “Activa rastro” y van a volver a mover el punto. *[Refiriéndose al punto A].*

Los estudiantes identifican los puntos de inflexión de las funciones trabajadas como los puntos en los que cambia la concavidad. También, predicen la concavidad de la función original a partir del rastro, o bien la concavidad que va a presentar el rastro, cuando ingresan la función original.

En las líneas 337, 339 y 340 se evidencia que los estudiantes reconocen que cuando se ingresaron funciones lineales, el segmento no presentó cambios mientras se movía el punto A. Este es un indicador de AM2.

Por otro lado, en las líneas 347, 350 y 351, se evidencia que los estudiantes determinaron el valor de la pendiente de la recta que estaban graficando. En particular, Niño1 justifica su respuesta a partir de un triángulo diferencial imaginario. Este es un indicador de AM3.

Inicialmente los estudiantes describen un cambio constante en el segmento que aparece en pantalla, y relacionan este con la función ingresada, reconocen que cuando se ingresa una función lineal, no se evidencia ningún tipo de cambio en el segmento. Esto lo notan gracias a que ven que nada cambia mientras mueven el punto [Línea 337, 339 y 340]. Indicador (B2).

		
353	**Niño 1:**	Solo es positivo *(sorprendido).*
354	**Invest1:**	¿Y por qué tú dices “solo es positivo” ?, ¿por qué solo sale azul?
355	**Niño 1:**	Pues porque está creciendo la función
356	**Invest1:**	O sea que la pendiente de esa recta ya sabemos que es…
357	**Niños:**	Positiva.
358	**Invest1:**	Listo, ahora van a colocar…
359	**Niña 1:**	Listo. *(Niña 1 sin que se le indique cambia el signo de la pendiente de la función escrita previamente, de modo que esta queda como* $-2x+3$ *Luego, empieza a mover el punto, el rastro que aparece en ese caso es el de la recta* $y=-2$*).* 
360	**Invest1:**	Listo, yo les iba a dictar otra función, pero…

Ahora bien, en las líneas 353, 355, 357, 362, 365, 367 y 369, se puede evidenciar que los estudiantes asocian el rastro con comportamientos de crecimiento y decrecimiento de la función. En el caso de la primera recta, verbalizan que la pendiente es positiva. Además, en la línea 359 se evidencia que Niña1 decide graficar la misma recta, pero con pendiente negativa y justifica esta decisión en la línea 361, indicando que les es más fácil comparar los comportamientos de la función, teniendo la misma recta pero con pendiente negativa. Adicionalmente, Niño2 verbaliza que la recta paralela al eje x generada por el rastro del punto A cuando se ingresa la función $-2x+3$, corta al eje y en -2, porque esta es la pendiente de dicha recta. Todo lo anterior describe comportamientos asociados a AM4.

La relación matemática que los estudiante establecen entre el crecimiento o decrecimiento de la recta y el valor positivo o negativo de la pendiente, con el segmento que lo representa, evidencia que los estudiantes están relacionando los objetos GGB con los objetos matemáticos corporeizados a partir de estos. Esta relación les permite llegar a conclusiones matemáticas en lo que se refiere al crecimiento constante de la recta. Líneas 353, 355, 357, 361 a 369. Indicador (B2).

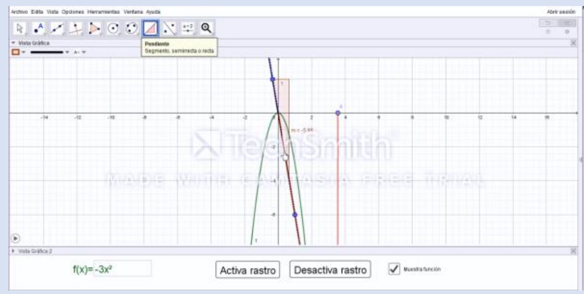
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>361</td><td>Niña 1:</td><td>No, pero mira que es que si tenemos la misma función, pero cambiada [refiriéndose al cambio de signo de la pendiente], podemos ver la diferencia entre las dos funciones.</td></tr>
<tr><td>362</td><td>Niño 2:</td><td>Ah sí, ahí sale en rojo porque la pendiente es negativa.</td></tr>
<tr><td>363</td><td>Niño 3:</td><td>Y esas dos son paralelas. (Señala el rastro de las rectas $y = 3$ y $y = -3$).</td></tr>
<tr><td>364</td><td>Invest1:</td><td>Bien, la función que graficamos fue una recta ¿verdad? Y el rastro que salió fue…</td></tr>
<tr><td>365</td><td>Niño 1:</td><td>Una recta paralela al eje x</td></tr>
<tr><td>366</td><td>Invest1:</td><td>Listo y dónde corta esa recta al eje y</td></tr>
<tr><td>367</td><td>Niño 3:</td><td>Ahhh, en dos (señala la recta generada por el rastro azul) y en menos dos (señala la recta generada por el rastro rojo).</td></tr>
<tr><td>368</td><td>Invest1:</td><td>¿Por qué la roja corta en menos dos?</td></tr>
<tr><td>369</td><td>Niño 2:</td><td>Por la pendiente negativa de la recta.</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>53:38 a 75:32</td>
<td>
<table>
<tr><td>370</td><td>Invest1:</td><td>Listo, vas a oprimir el botón “Desactiva rastro” y luego por favor ingresa la función x^2. Después empiezas a mover el punto.</td></tr>
<tr><td>371</td><td>Niña 1:</td><td>Ah sí. Empieza a mover el punto, pero antes de esto se percata de que debe oprimir el botón “Activa rastro”</td></tr>
<tr><td>372</td><td>Niño 1:</td><td>Se le quita una dimensión.</td></tr>
<tr><td>373</td><td>Invest1:</td><td>¿Cómo así?</td></tr>
<tr><td>374</td><td>Niño 1:</td><td>Pues la función que metimos es un equis al cuadrado y el rastro sale una recta, o sea solo una equis.</td></tr>
<tr><td>375</td><td>Invest1:</td><td>Listo, ¿nuevamente se repite lo de los colores?</td></tr>
<tr><td>376</td><td>Niño 3:</td><td>Sí, donde crece sale azul, donde decrece sale rojo. (Señala la función).</td></tr>
<tr><td>377</td><td>Invest1:</td><td>Entonces cuando ingresamos una parábola el rastro es…</td></tr>
<tr><td>378</td><td>Niño 2:</td><td>Una recta</td></tr>
</table>
</td>
<td>En las líneas 372, 374, 376, 378 y 380 se evidencia que los estudiantes reconocen que cuando ingresan una parábola, el rastro que va a generar el punto A es una recta y que además se mantiene el comportamiento de crecimiento y decrecimiento de la función original, asociado con los colores. Es decir, que en los intervalos en los que la recta es de</td>
<td>Los estudiantes, a partir de lo trabajado con los recursos, llegan a algunas conclusiones que se acercan a las formales, incluso hablan de algunos términos formales como “dimensión”, se refiere a la relación que guardan la función ingresada y el rastro que aparece (esto, de manera formal, es una propiedad de las derivadas)</td>
</tr>
</table>

379	**Invest1:**	Listo, ingresemos otra parábola, $-3x^2$ y van a empezar a mover el punto, otra vez. Bueno, ahí ¿qué paso? Cuando es una parábola la gráfica que se forma con el rastro ¿qué es?
380	**Niño 1:**	Una recta
381	**Invest1:**	Y esa recta ¿qué pendiente tiene?
382	**Niño 2:**	¿Cinco?
383	**Invest1:**	¿Por qué cinco?
384	**Niño 2:**	Porque parece que abajo corta en 10, la punta del triángulo *(el estudiante intenta dibujar con su dedo un triángulo rectángulo, pero no alcanza a visibilizar con exactitud dónde quedaría uno de los vértices).*
385	**Niña 1:**	Entonces así *(grafica dos puntos sobre la recta formada por el rastro).* 
386	**Niño 1:**	¿El dos corta con el diez? Si el dos corta con el diez, sí es cinco, bueno menos cinco (señala la parte negativa del eje *y*), menos diez sobre dos da cinco.
387	**Niño 2:**	Ah pues sí, dos mentes piensan mejor que una.
388	**Niña 1:**	Bueno, uno coge acá *(va a la barra de herramientas de GeoGebra y busca la opción "Pendiente")* y luego acá… *(hace clic en los dos puntos que graficó intentando encontrar la pendiente de la recta que pasa por esos dos*

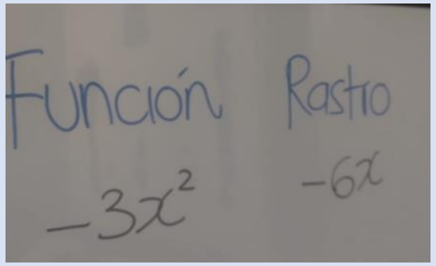
color azul, la función original crece y en los que es roja, decrece. Este es un indicador de AM4.

Por otro lado, en las líneas 382, 384, 386, 391 a 395, 399 y 414, se muestra una conversación en la que los estudiantes intentan determinar cuál es el valor de la pendiente de la recta generada por el rastro del punto A. Para esto, inicialmente tratan de imaginar un triángulo diferencial sobre el plano. Luego, recurren a dibujar dos puntos sobre dicha recta, trazarla y calcular la pendiente con la herramienta que ofrece GeoGebra para esto. A partir de estos métodos consiguen una aproximación al valor de la pendiente. Después, mueven la vista gráfica, generan nuevamente el rastro y descubren otra vez recurriendo a la idea del triángulo diferencial, que la pendiente de la recta generada por el rastro es menos seis. Lo anterior es un indicador de AM3.

[líneas 372 y 371]. Relacionan además los colores dejados por el rastro (rojo y azul) con el crecimiento y decrecimiento de la función [Línea 376]. Indicador (B4).

		puntos). Ay no, no quiso coger *(en este momento no sale en pantalla el valor de la pendiente, que era lo que la estudiante esperaba).*
389	**Invest1:**	Y ¿si trazas la recta?
390	**Niña 1:**	Voy. *Va a la barra de herramientas y elige la opción recta, luego hace clic en los puntos graficados para construir la recta. Después, busca la opción "Pendiente" y hace clic sobre la recta.* 
391	**Niño 1:**	¿Cuánto es?
392	**Niña 1:**	Cinco punto noventa y seis.
393	**Niño 3:**	O sea, casi seis.
394	**Niño 2:**	*Mueve la vista gráfica, luego mueve el punto para obtener el rastro de la recta y dice:* ah sí, es seis, dos corta con el doce negativo.
395	**Niño 1:**	Pero entonces sería menos seis.
396	**Invest1:**	Bien, ahí les dio cinco punto noventa y seis, porque claro, los puntos sobre el rastro no son muy exactos, pero aproximando, tenemos que la pendiente es menos seis.
397	**Niño 3:**	Ah pues sí.
398	**Invest1:**	Bueno, ya sabemos que la pendiente es menos seis y ¿dónde corta esa recta?
399	**Niño 2:**	En cero, ahí se ve.
400	**Invest1:**	Entonces ¿cuál sería la ecuación de esa recta?

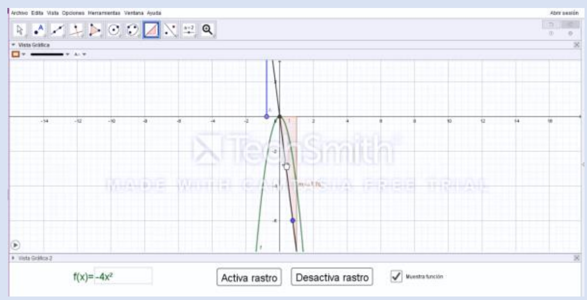
Los estudiantes requieren encontrar la pendiente de la recta generada por el rastro, la cual no pueden encontrar a simple vista, para esto ven la necesidad de usar las herramientas proporcionadas por GGB [388, 390, a 395]. A partir de esto los estudiantes reconocen el corte de la recta con el eje *y* y su pendiente, y construyen la ecuación [414]. Esto es un indicador (C4). Ya que gracias a las herramientas de GGB se

402	**Niño 2:**	Menos tres equis al cuadrado.
403	**Invest1:**	¿De la recta que sale ahí? *(señala recta generada por el rastro).*
404	**Niño 2:**	Ah no, ese equis al cuadrado es la parábola.
405	**Invest1:**	Ustedes se acuerdan de esta ecuación (escribe en el tablero $y = mx + b$)
406	**Niño 3:**	Ah sí, de la recta
407	**Invest1:**	Bueno, y esa b ¿qué simboliza?
408	**Niño 1:**	El punto de corte.
409	**Invest1:**	¿Y la m?
410	**Niño 2:**	No me acuerdo.
411	**Niño 1:**	¡La pendiente!
412	**Invest1:**	O sea que cómo quedaría la ecuación de esa recta, la del rastro.
413	**Niño 2:**	Seis equis
414	**Niño 3:**	Menos seis equis.
Uno de los investigadores realiza en el tablero una tabla como la siguiente: 		
415	**Niño 1:**	Ah y tres por dos es seis *(señalando el exponente 2 y el coeficiente* -3 *de la ecuación de la parábola).*
416	**Invest1:**	Bueno, ahora van a colocar la parábola $-4x^2$
417	**Niño 3:**	¿Sería 16?
418	**Niño 1:**	Entonces en este el rastro sería $-8x$ ¿sí?
419	**Invest1:**	Háganlo ahí y miramos. *[Refiriéndose al recurso GeoGebra].*
420	**Niño 3:**	¿Se multiplica por ese dos y se elimina la potencia?

En la línea 415, Niño1 descubre que la pendiente de la recta generada por el rastro del punto A, cuando se graficó la función $-3x^2$, resulta de multiplicar el exponente por el coeficiente, es decir 2 por -3. Cuando se pide ingresar la función $-4x^2$, Niño1, utilizando el mismo argumento,

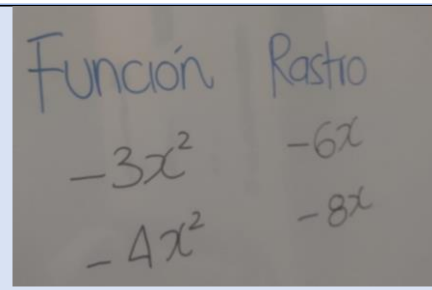
logró formalizar la ecuación de la recta formada por el rastro.

Los estudiantes son capaces de describir una relación matemática directa entre la curva original y el rastro generado por el punto, esta relación fue descrita

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>421</td><td>Niño 1:</td><td>Sí, por eso digo que queda $-8x$ o sino $8x$, estoy seguro.</td></tr>
<tr><td>422</td><td>Niña 1:</td><td>A ver. Ingresa la función $-4x^2$, activa el rastro y empieza a mover el punto. Luego grafica dos puntos sobre la recta generada por el rastro, traza la recta que pasa por esos dos puntos…</td></tr>
<tr><td>423</td><td>Niño 2:</td><td>Pero ¿afecta en algo el negativo?</td></tr>
<tr><td>424</td><td>Invest1:</td><td>Miremos ahí, ¿cómo es la pendiente de esa recta, positiva o negativa? [Refiriéndose a la recta que trazó Niña 1]</td></tr>
<tr><td>425</td><td>Niños:</td><td>Negativa, decrece</td></tr>
<tr><td>426</td><td>Niña 1:</td><td>Menos siete coma setenta y seis (va a la barra de herramientas y selecciona la opción “pendiente” y hace clic sobre la recta que trazó).

</td></tr>
<tr><td>427</td><td>Niño 3:</td><td>Entonces sí, es menos ocho.</td></tr>
<tr><td>428</td><td>Invest1:</td><td>Y, la ecuación de esa recta ¿cuál sería?</td></tr>
<tr><td>429</td><td>Niño 3:</td><td>Menos ocho equis.</td></tr>
<tr><td>430</td><td>Invest1:</td><td>Y sigue cortando a y…</td></tr>
<tr><td>431</td><td>Niño 2:</td><td>En cero.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Uno de los investigadores agrega los datos obtenidos a la tabla que realizó en el tablero.</td></tr>
</table>
</td>
<td>sugiere que el rastro generado por el punto A podría ser la recta $-8x$. Sin embargo, no se muestra completamente seguro al respecto.

En la línea 422, se evidencia que Niña1 vuelve a utilizar la estrategia de dibujar dos puntos sobre la recta generada por el rastro, para posteriormente, trazar la recta que pasa por esos dos puntos y hallar una aproximación del valor de la pendiente de esa recta.

En la línea 425 se muestra que los estudiantes reconocen que la pendiente de la recta generada por el trazo es negativa, puesto que decrece. Este es un indicador de AM3.</td>
<td>previamente de manera cualitativa, en este caso, ya es descrita de manera cuantitativa y cercana a lo formal [Líneas 415, 418, 429]. Asignamos el indicador (C4).</td>
</tr>
</table>



432	**Invest1:**	Ahora por favor ingresa $2x^3$. Cuando graficamos una función de grado dos nos sale en el rastro… 
433	**Niño 2:**	Una recta.
434	**Niño 3:**	Ah pues sería cuatro equis a la dos
435	**Niño 1:**	Sí, yo pienso que puede ser esa parábola.
436	**Niño 3:**	Sí es una parábola.
437	**Invest1:**	Bueno, pero siguiendo la idea de lo que hicieron con las otras dos funciones, por ejemplo, en la anterior, ¿qué hicieron para saber que la ecuación de la recta del rastro era $-8x$?
438	**Niño 1:**	Pues se multiplicaba el grado por el número que va con la x.
439	**Invest1:**	O sea que en esta, al hacer eso, ¿cómo quedaría?
440	**Niño 1:**	Ah, seis equis a la dos, entonces sería ¿no?
441	**Invest1:**	Listo, ¿por qué dijiste equis al cuadrado?

En la línea 433, Niño2 verbaliza que cuando se ingresa una función de grado dos, el rastro, es una recta. Esto es un comportamiento asociado con AM4.

Ahora bien, cuando se pide ingresar la función $2x^3$, los estudiantes afirman que el rastro

Se evidencia que los estudiantes se apropiaron de la regla que han venido trabajando y la usan al ponerles una función de grado más alto, en la conversación de las líneas 433 a 455, se muestra esto al ingresar la función $2x^3$. Nuevamente, el indicador asignado es (C4).

442	**Niño 1:**	Eh, pues porque, como se había dicho antes, se baja un grado no más.
443	**Invest1:**	Bueno, ahora grafiquen…
444	**Niño 2:**	Seis equis a la dos
445	**Niño 3:**	¿No sería seis equis a la tres?
446	**Niño 1:**	No porque es la parábola del rastro, o sea a la dos.
447	**Invest1:**	Sí, pero espera, no la vayas a poner ahí, sino aquí, donde dice entrada *(le indica a Niña 1 que no vaya a escribir la nueva función en la casilla de entrada del recurso, sino en la barra de entrada de GeoGebra).* Dale “enter” por favor y empieza a mover el punto a ver si sí es esa parábola o no la que se forma *[aludiendo a la comparación entre la parábola que se graficó y la parábola resultante del rastro].*
448	**Niño 3:**	Es esa, sí 
449	**Invest1:**	O sea que si yo les dijera que vamos a graficar la función $-5x^3$, ¿qué parábola saldría en el rastro?
450	**Niño 1:**	Menos quince al cuadrado.
451	**Niño 2:**	Equis al cuadrado.
452	**Niño 3:**	Menos quince equis al cuadrado.
454	**Invest1:**	Y esa parábola ¿quedaría así o quedaría de otra forma? *(Señala con el dedo la forma de U de la parábola graficada previamente).*
454	**Niño 2:**	Hacia abajo

que va a aparecer va a tener forma de parábola. Niño3 alude a una ecuación para dicha parábola, pero esta es incorrecta. A raíz de esto, uno de los investigadores procede a preguntar por el proceso realizado previamente para conocer la ecuación de la función dibujada por el rastro. En ese momento Niño1, al parecer recuerda dicho proceso y menciona la ecuación que corresponde a la parábola del rastro. Esto ocurre en las líneas 434 a 446 y se trata de un indicador de AM4.

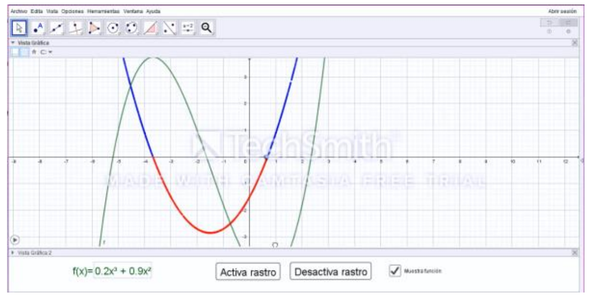
En la línea 449 uno de los investigadores pide a los estudiantes que ingresen la función $-5x^3$. Seguido a esto los estudiantes verbalizan la ecuación de la parábola que va a

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>455</td><td>Niño 1:</td><td>Pues sí pero volteada. (Hace gesto con la mano de U invertida).</td></tr>
<tr><td>456</td><td>Niño 2:</td><td>Y ¿qué pasa con las que son más grandes? O sea, usando esa lógica, si se cogiera equis al cubo, más dos equis al cuadrado y se sacara eso, entonces se bajaría un grado de cada uno</td></tr>
<tr><td>457</td><td>Invest1:</td><td>Terminemos de comprobar este [refiriéndose a la función que se estaba trabajando en ese momento] y ya hacemos la prueba.</td></tr>
<tr><td>458</td><td>Niña 1:</td><td>Ingresa la ecuación de la parábola en la barra de entrada de GeoGebra y luego ingresa la función en la casilla de entrada del recurso. Después, empieza a mover el punto que genera el rastro.

</td></tr>
<tr><td>459</td><td>Niño 3:</td><td>Si es esa.</td></tr>
<tr><td>460</td><td>Niño 2:</td><td>Ay sí, es así.</td></tr>
</table>
</td>
<td>salir en el rastro, una vez se empiece a mover el punto A. Este es un indicador de AM4.

Adicionalmente, en las líneas 454 y 455 los estudiantes manifiestan cuál será la concavidad de la parábola que generará el rastro del punto A. Esto es un indicador de AM5.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>75:37 a 79:13</td>
<td>
<table>
<tr><td>461</td><td>Invest1:</td><td>Bueno, ahora van a desactivar la casilla de “Muestra función” y ahora vamos a hacer lo contrario ¿sí? Van a ingresar la función $0.2x^3 + 0.9x^2 - 1.5x -$</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

		4. Ahora vas a activar el rastro, ah no, ahí ya lo tienes activo.	En las líneas 464 a 473, se evidencia que los estudiantes reconocen a partir de los colores de la curva generada por el rastro del punto A, los intervalos en los que la función original es creciente o decreciente. Lo anterior es un indicador de AM4.	En esta parte de la tarea, los estudiantes deben describir la función original a partir del rastro generado por esta. En las líneas 464, 466, 468, 469, 471, esto se realiza a satisfacción, y se evidencia como los estudiantes se han apropiado de varios elementos matemáticos a partir de los recursos trabajados previamente, de tal suerte que aquí relacionan los objetos GGB, los objetos matemáticos corporeizados a través de estos y los relacionan llegando a conclusiones matemáticas formales. Indicador (D4)
462	**Niño 2:**	Ah, pues claro, es una parábola. *[Cuando aparece el rastro en la pantalla].* 		
463	**Invest1:**	Listo, bien. Ahora, ustedes van a mirar ese rastro y van a decirme en qué partes la función original es creciente. Más bien, hasta donde la función original sería creciente.		
464	**Niña 1:**	En esta parte. *(Señala una de las partes azules de la parábola generada por el rastro).*		
465	**Invest1:**	Utilicemos los números para ubicarnos (señala el eje *x*), por ejemplo, entre menos seis y menos cuatro, la función original ¿sería creciente o decreciente?		
466	**Niño 1 y niño 3:**	Creciente.		
467	**Invest1:**	Y ¿en qué intervalo sería decreciente?		
468	**Niño 3:**	Menos cuatro y uno, bueno aproximado.		
469	**Niño 2:**	Casi llegando a menos cuatro y casi llegando a uno.		
470	**Invest1:**	Y ¿dónde vuelve a ser creciente otra vez?		
471	**Niño 3:**	De casi uno en adelante.		

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>472</td><td>Invest1:</td><td>Listo, ahora sí van a activar la casilla que dice “Muestra función”. ¿Si se cumple eso que acabaron de decir?</td></tr>
<tr><td>473</td><td>Niña 1:</td><td>Sí. (Mientras recorre la curva con el cursor del mouse)
</td></tr>
<tr><td>474</td><td>Niño 2:</td><td>Aja.</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>79:20 a 89:50</td>
<td>
<table>
<tr><td>475</td><td>Invest1:</td><td>Vamos a hacer un resumen de los que hicimos hoy, ¿listo? Pero primero, una aclaración, hemos trabajo con una función que llamamos original ¿cierto?, y hemos hablado de “el rastro”, se rastro que se ha graficado en este caso, es la gráfica de la derivada de esa función original. Ese rastro de dónde salió</td></tr>
<tr><td>476</td><td>Niño 3:</td><td>De una relación entre x y y.</td></tr>
<tr><td>477</td><td>Invest2:</td><td>Por ejemplo, tú hablabas de la relación entre x y y. Ustedes cómo planteaban la fracción [refiriéndose al cociente entre los cambios de las dos variables] ¿cuál iba arriba y cuál iba abajo?</td></tr>
<tr><td>478</td><td>Niño 1:</td><td>El cambio en y arriba y lo de x abajo.</td></tr>
<tr><td>479</td><td>Invest2:</td><td>Exacto. A medida que movían el punto y cambiaba el valor de x, qué pasaba con y.</td></tr>
</table>
</td>
<td>Durante el resumen realizado al final de la sesión, los estudiantes realizaron algunas afirmaciones que pueden ser asociadas con las acciones mentales propuestas por Carlson et. al. Veamos:

En la línea 480, Niño2 manifiesta que los cambios de la variable y, dependían de los cambios en la variable x. Este es un indicador de AM2, puesto que el estudiante está coordinando la dirección del cambio.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

480	**Niño 2:**	Pues cambiaba dependiendo de quién fuera *x*
481	**Invest2:**	Entonces, por ejemplo, en esa *[refiriéndose a la función que está en la pantalla]*, cuando tú vas moviendo el punto y sale el rastro, pero no tienes la función original, cómo sabes dónde crece o decrece.
482	**Niño 1:**	Ah pues, por el rojo y el azul, negativo, positivo.
483	**Invest2:**	Entonces, cuando hicieron lo de los triángulos, ustedes mismos decían, hay triángulos que siempre se mantenían iguales y había otros triángulos qué se hacían más anchos o más altos
484	**Niño 3:**	Ah sí y entre más había se hacían más pequeños
485	**Invest1:**	Y eran más pequeños entre más llegaban a qué.
486	**Niño 1:**	A la punta.
487	**Niño 2:**	Que ahí tendía a cero.
488	**Niño 3:**	Casi cero.
489	**Invest1:**	Y ¿qué era cero?
490	**Niño 1:**	¿La razón de cambio instantánea?
491	**Niño 3:**	La pendiente de la tangente.
492	**Invest2:**	Bueno, tú hablabas ahorita de la razón de cambio. ¿Qué es una razón de cambio?
493	**Niño 2:**	La distancia entre dos puntos de una misma recta ¿no?
494	**Invest2:**	Y ¿por qué hablamos de "razón"? ¿Qué es una razón?
495	**Niño 2:**	Mmm…*[Dubitativo]*
496	**Invest1:**	Cuando hablamos de "razón" ¿a qué operación nos referimos? Si yo les digo, la razón entre cinco y siete, me estoy refiriendo a qué operación entre cinco y siete.
497	**Niño 2:**	Multiplicación
498	**Niño 3:**	Resta ¿no?
499	**Niño 1**	¿Resta?

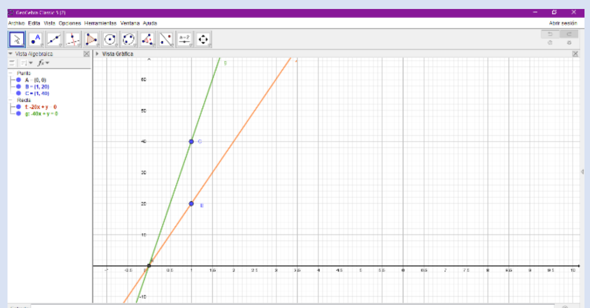
En las líneas 482 y 484, se evidencia que los estudiantes realizaron de manera efectiva una asociación entre los colores del rastro del punto A y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función original. Dicho comportamiento está asociado con AM4.
Seguido a esto en las líneas 486 a 491, se observa que los estudiantes de una u otra manera describen que entre más se acercaban a la parte más alta de la función los triángulos del primer recurso con el que exploraron, la razón de cambio en ese instante tendía a cero. Esto podría ser un indicador de AM5. Sin embargo, en las líneas posteriores, se evidencia que los estudiantes no estaban asociando el término "razón", con un cociente o división, entre el cambio en *y* y el cambio en *x*. Lo que nos lleva a pensar que este se puede clasificar como un comportamiento pseudoanalítico asociado con AM5.

En todo el diálogo desarrollado entre las líneas 479 y 530 no existe alguna interacción con un recurso particular, sin embargo en el diálogo los estudiantes constantemente se están refiriendo a elementos que trabajaron en los recursos pasados (movimiento de puntos, triángulos, colores, rastro) y los relacionan con los objetos matemáticos que se corporeizan a través de estos (pendiente, crecimiento, decrecimiento, razón), y esto los lleva describir relaciones de cambio en las funciones [Líneas 523 y 525]. A estas relaciones descritas por los estudiantes es posible asignarles el indicador (D4).

500	**Invest1:**	A la resta le llamamos diferencia y la multiplicación producto. ¿Y una razón?
501	**Niño 2:**	División no, porque esa es “cociente”.
502	**Niño 3:**	Pero solo hay cuatro operaciones básicas.
503	**Invest1:**	¿De cuál de esas operaciones hemos estado hablando en estas clases?
504	**Niño 1:**	División
505	**Invest1:**	Un cociente cierto, una división.
506	**Niño 2:**	¿Razón es cociente?
507	**Invest1:**	Ajá, una razón hace referencia a un cociente o división.
508	**Invest2:**	Para que lo recuerden, razón viene de “racional”, de los números racionales, que es cuando literalmente yo tengo una ración de algo, una parte de algo.
509	**Niño 1:**	Ahhh, ahora sí.
510	**Invest2:**	Por ejemplo, un medio, es un número racional. Entonces estoy viendo la razón entre uno y dos ¿sí? ¿Tú decías que cuál era esa razón de la que hemos hablado?
511	**Niño 1:**	Razón de cambio
512	**Invest2:**	Exacto, que cambia, ¿si ven que la razón entre y y x literalmente está cambiando a medida que van moviendo el punto por la función? O sea que cuando yo me voy moviendo por la función el triángulo va cambiando su forma, pero de qué depende el triángulo, ustedes mismos lo veían. ¿Qué representaba la altura del triángulo?
513	**Niño 3:**	Ye
514	**Invest2:**	Exacto y ¿qué representaba la base?
515	**Niño 1:**	Equis
516	**Invest2:**	Y a medida que iban moviendo el deslizador [refiriéndose al primer recurso] el triángulo iba creciendo o haciéndose más pequeño. Entonces si ven, es la razón, la relación entre ambos, que tú lo

		mencionabas al principio, la relación entre *x* y *y*. Y esa va cambiando. ¿Sí? Entonces, lo que les preguntaba ahorita era, qué pasaba con esos triángulos. ¿Pueden volver a abrir el primer recurso?
517	**Niña 1:**	Ya. *Abre el primer recurso y empieza a mover el deslizador.*
518	**Invest2:**	Entonces, ¿si ven qué pasa con los triángulos? Ustedes decían algo al principio, ¿qué pasaba con las distancias entre los puntos que están en el eje *x*?
519	**Niño 1:**	Son iguales
520	**Invest2:**	¿Cuáles eran las que cambiaban?
521	**Niño 2 y Niño 3:**	Las de *y*
522	**Invest2:**	Exacto, entonces, por ejemplo, si el triángulo es más alto, ¿cambia más o cambia menos?
523	**Niño 3:**	Cambia más
524	**Invest2:**	Qué quiere decir, que la razón de cambio es…
525	**Niño 2:**	Mayor
526	**Invest2:**	Entonces, lo que nosotros estamos viendo es cómo cambia la función ¿listo? Ahora, pongamos un ejemplo, el más común, que es cuando ustedes están en un carro ¿sí? Entonces, por ejemplo, ustedes están en un carro que en una hora avanza 20 kilómetros, y yo estoy en otro que en una hora, avanza 40 kilómetros, ¿cuál de los dos va más rápido?
527	**Niño 1:**	En el de 40
528	**Invest2:**	Exacto. ¿Eso yo lo puedo relacionar con esto? *[haciendo referencia a la razón de cambio y al comportamiento de la función].*
529	**Niño 3:**	No sé.

En las líneas 523 y 525 los estudiantes responden a la pregunta que formula uno de los investigadores respecto al tamaño de los triánguos del primer recurso trabajado en la sesión. El investigador pregunta si el cambio es mayor o menor en un triángulo con mayor altura, a esto Niño3 y Niño2 indican que en ese caso la razón de cambio es mayor. Como en este caso los estudiantes están cuantificando el cambio, este comportamiento se puede asociar a AM3.
Por otro lado, en la línea 527, Niño1 indica que el carro que va más rápido es el que ha recorrido 40 Km en una hora. Esto nos hace pensar que el estudiante está coordinando la razón de cambio promedio de la velocidad durante ese lapso, que sería un indicador de AM4. Sin embargo, cuando el investigador pregunta si se puede

530	**Niño 1:**	Pues digamos que, el tiempo, el tiempo se representa por *x*, y la distancia se representa por *y*.
En ese momento los investigadores abren un nuevo archivo de GeoGebra, dado que el estudiante está asignado cada una de las magnitudes a los ejes coordenados. Esto con el fin de realizar una representación gráfica que ilustre la situación.		
531	**Invest2:**	Listo y entonces dijimos que el primer carro, en la hora uno ha recorrido 20 kilómetros y el segundo 40 kilómetros. Ahora ¿cómo sabes que ese va más rápido? *El investigador realiza la siguiente gráfica en GeoGebra, la recta naranja simboliza el carro en el que van los estudiantes y la recta verde el carro en el que va el investigador.* 
532	**Niño 1:**	Eh, pues porque recorre más distancia en menos tiempo.
533	**Niña 1:**	En igual tiempo.
534	**Niño 3:**	En el mismo tiempo.
535	**Niño 1:**	Ah sí, en el mismo tiempo
536	**Invest2:**	Desde la forma gráfica, ¿qué cambio?
537	**Niña 1:**	La pendiente
538	**Invest2:**	Sí, la pendiente, ¿es más qué?

establecer una relación entre ese problema y la razón de cambio, los estudiantes no tienen una respuesta clara. En la línea 530 Niño1 verbaliza que en términos de la representación gráfica del problema, el tiempo se ubica en el eje *x* y la distancia en el eje *y*. Este es un indicador de AM1.

Cuando el investigador realiza la gráfica, pregunta a Niño1 por qué concluyó que el carro que avanzó más rápido fue el que recorrió 40 Km en una hora, él respondió que asumió esto porque era el carro que recorría más distancia en menos tiempo, sin embargo sus compañeros lo corrigen diciendo que no es en menor tiempo, sino en el mismo tiempo que lo hace el carro que recorrió 20 Km. Ahora bien, este es un indicador de AM3, pues los estudiantes están cuantificando el cambio.

La gráfica construida por Inves2 les permite a los estudiantes, a partir de la pendiente de dos rectas, modificar la noción de distancia recorrida por dos autos, en el mismo tiempo. La interpretación del triángulo y los elementos trabajos previamente en los recursos los lleva a concluir que en el mismo tiempo un carro recorrió más distancia que el otro. Indicador (B3).

539	**Niño 2:**	Más cerca al eje *y*
540	**Invest2:**	Sí, literalmente más empinada. Entonces, si ven yo formo este triángulo [*refiriéndose al triángulo naranja]*, pero si formo este [*refiriéndose al triángulo verde]*, ¿qué pasa?, que el triángulo verde, el que corresponde al segundo carro es más alto. que es lo que ustedes estaban mirando hoy. Ahí es donde hablamos de que estamos viendo la razón con la que cambia algo.