INTRODUCCIÓN A LA NOCIÓN DE DERIVADA COMO PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE DESDE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO: DESCRIPCIÓN DE PROCESOS DE CONJETURACIÓN, ARGUMENTACIÓN Y EXPLICACIÓN.

ÁNGEL LEANDRO ROMERO SANTIAGO
Cód. 2015182020
OSCAR JAVIER RAMÍREZ VARGA
Cód.2015182018

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPATYAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2015

INTRODUCCIÓN A LA NOCIÓN DE DERIVADA COMO PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE DESDE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO: DESCRIPCIÓN DE PROCESOS DE CONJETURACIÓN, ARGUMENTACIÓN Y EXPLICACIÓN.

ÁNGEL LEANDRO ROMERO SANTIAGO
Cód. 2015182020
OSCAR JAVIER RAMÍREZ VARGA
Cód.2015182018

TRABAJO DE GRADO PARA ASPIRAR AL TÍTULO DE: ESPECIALISTA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

MARIA NUBIA SOLER ALVARES
Docente

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPATYAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.
2015

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE VALORACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado "***Introducción a la noción de derivada como pendiente de la recta tangente desde la variación y el cambio: descripción de procesos de conjeturación, argumentación y explicación***", presentado por los estudiantes:

Angel Leandro Romero Santiago - 2015182020 - 1071628757
Oscar Javier Ramírez Vargas - 2015182018 - 1023871543

Como requisito parcial para optar al título de **Especialista en Educación Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado,** con **45** Puntos.

Observaciones:

____

En constancia se firma a los 03 días del mes de diciembre de 2015.

JURADOS

Directora del Trabajo: Profesora: Nubia Soler
MARÍA NUBIA SOLER

Jurados:

Profesor: ______________________
EDWIN CARRANZA

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Introducción a la noción de derivada como pendiente de la recta tangente desde la variación y el cambio: descripción de procesos de conjeturación, argumentación y explicación.
Autor(es)	Romero Santiago Angel Leandro Ramírez Varga Oscar Javier
Director	Soler Alvares María Nubia
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015. 90 pags.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	DERIVADA, RAZÓN DE CAMBIO, CONJETURACIÓN, ARGUMENTACIÓN Y EXPLICACIÓN.

2. Descripción
En este trabajo de grado se plasma el proceso de implementación de una secuencia de actividades planteadas por Vrancken, S., & Engler A. en el 2.014, las cuales se aplicaron a estudiantes de undécimo grado de la Institución educativa departamental Bicentenario del municipio de Funza Cundinamarca. Las actividades enmarcadas en de variación (qué magnitudes cambian, cómo y cuánto cambian), permitieron que a través de procesos donde se construyeron argumentos, conjeturas y explicaciones.

3. Fuentes
* Balacheff N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Editorial Una empresa docente. * Camargo L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria.* Valencia, Universitat de Valencia. * CANTORAL, R., MOLINA, J.; SÁNCHEZ, M. *Socioepistemología de la Predicción.* In: LEZAMA, J.; SÁNCHEZ, M. y MOLINA, J. (Ed.). Acta Latinoamericana de Matemática

Educativa. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2005. p. 463-468.

* CANTORAL, R.; MONTIEL, G. *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. México: Pearson Education, 2001.

* Duval R. (1999). *Algunas cuestiones relativas a la argumentación*. La lettre de la Preuve, recuperado de: http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html

* Goizueta M. (2011). *Interpretaciones sobre la argumentación en el aula de matemáticas de secundaria por parte de un grupo de profesores.* Barcelona, Universitat Autònoma de Barcelona.

* Imaz C., Moreno L., (2014). Cálculo, su evolución y enseñanza. México D.F., México:Trillas.

* MEN (1998), serie lineamientos curriculares.

* Toulmin (2009). *Los usos de la argumentación,* Barcelona, España, Editoriales Península.

* Vrancken, S., & Engler A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. Bolema, Rio Claro (SP), volumen 28 (número 48), 449-468.

4. Contenidos

A través de este proceso se dio un enfoque principalmente a la introducción del concepto de Derivada desde las razones de cambio, con dicho enfoque le damos manejo principalmente al pensamiento variacional y su relación con el cálculo, describiendo procesos de conjeturación, argumentación y explicación enmarcados en el campo de los lineamientos curriculares indicados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN).

5. Metodología

Se aplicó una secuencia de actividades a estudiantes del grado once de la institución educativa departamental Bicentenario de Funza, se modificaron las preguntas de las actividades para generar más argumentaciones, conjeturación y formar debates dentro de los respectivos grupos. Se realizó la implementación en varios momentos y espacios, dentro de la jornada académica, elaborando grabaciones y trabajos escritos de los procesos o actividades realizadas por cada grupo de estudiantes, Este trabajo se llevó a cabo con 20 alumnos dentro de la jornada única académica, dicha prueba fue desarrollada por estudiantes con desempeño alto-superior en las asignaturas de física y cálculo, los cuales no fueron tenidos en cuenta en la prueba piloto aplicada con anterioridad. La prueba estuvo acompañada por el docente que dirigía la actividad e interactuaba con los estudiantes cuando era requerido.

6. Conclusiones

Las actividades implementadas posibilitaron el trabajo de diferentes aspectos como fueron: trabajar funciones en escenarios de fenómenos físicos de cambio como relaciones entre magnitudes, analizar y cuantificar los comportamientos de cada cambio tanto en la variable independiente (tiempo) y la variable dependiente (distancia), así como del cociente entre las cantidades de estas magnitudes, la interpretación de la razón de cambio como la comparación de los cambios de una variable con relación a otra, la relación entre la pendiente de la recta y las razón de cambio. Por otro lado, esta secuencia de actividades permitió generar en los distintos grupos: debates, conjeturaciones, argumentaciones y explicaciones afines al proceso y objetivos plantados dentro de la investigación.

Elaborado por:	Romero Santiago Angel Leandro Ramírez Varga Oscar Javier
Revisado por:	Carranza Vargas Edwin Alfredo

Fecha de elaboración del Resumen:	7	12	2015

CONTENIDO

LISTA DE ANEXOS

1. INTRODUCCIÓN

Desde sus inicios el cálculo ha sido concebido como una herramienta para dilucidar las relaciones cuantitativas que hay en la naturaleza y ha estado articulado alrededor de la idea de variación y acumulación. Es por esto que estas ideas deberían tenerse en cuenta en los procesos de enseñanza-aprendizaje y no ser sustituidas por procesos de construcción formales y aspectos algorítmicos. En busca de aportar a la comprensión de algunas nociones entorno a la variación y el cambio, se implementó una secuencia de actividades que aborda la introducción de la noción de derivada como pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto. Este trabajo se enmarca en la línea del Pensamiento y Lenguaje Variacional, que estudia la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio.

La implementación de esta secuencia de actividades se hizo con estudiantes de undécimo grado de una Institución educativa departamental del municipio de Funza Cundinamarca. Las actividades enmarcadas en contextos de variación (qué magnitudes cambian, cómo y cuánto cambian), permitieron que a través de procesos donde se construyeron argumentos, conjeturas y explicaciones, se pudieran caracterizar variaciones entre las magnitudes, por medio del cálculo de razones de cambio, y explorar cómo la pendiente de una curva se relaciona con dichas razones.

En este trabajo se describen fundamentos teóricos y metodológicos que fundamentan la implementación de la secuencia y el análisis de algunos resultados obtenidos a partir de la observación de las actividades desarrolladas por los estudiantes. Se deducen algunas conclusiones derivadas del análisis y la reflexión sobre algunos aspectos para mejorar la aplicación de la secuencia de actividades, dicha secuencia de actividades implementada fue tomada de un trabajo de grado elaborado por Vrancken y Engler (2014).

2. OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GENERAL

- Introducir la noción de derivada mediante distintos escenarios de variación, que permitan caracterizar variaciones entre magnitudes, a través del cálculo de razones de cambio y explorar cómo la pendiente de una curva se relaciona con dichas razones de cambio.

2.2 OBJETIVO ESPECIFICOS

- Contribuir a la construcción del concepto de derivada desde la variación y el cambio, mediante diferentes representaciones presentadas en una secuencia de actividades.

- Describir procesos de conjeturación y argumentación en estudiantes de grado once con relación a la introducción de la noción de derivada.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

3.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

En el proceso de la enseñanza del cálculo escolar, se logra, más o menos de forma mecánica, que los estudiantes hagan cálculos de límites, derivadas e integrales, dando prioridad a la parte algorítmica y algebraica del cálculo, así como a construcciones formales de los conceptos, dejando de lado la comprensión satisfactoria de los mismos. Así como lo afirman Imaz & Moreno (2014), no hay primero un fortalecimiento de las intuiciones de variación y cambio que los estudiantes poseen, para luego si desarrollar una parte más formal de los conceptos. Esto ha sido incluido en las prácticas pedagógicas a través de la experiencia.

El cálculo es una disciplina diferente a la fundamentación aritmética, sin duda ésta es importante para otros propósitos, pero seguramente no para solucionar los problemas de la enseñanza y aprendizaje del cálculo, lo que no necesariamente implica que se esté proponiendo el abandono de este trabajo. Recordando un punto de vista de Thom (citado por Imaz y Moreno 2014): ‘‘el verdadero problema al que se enfrenta la enseñanza no es el del rigor, sino el problema del desarrollo del significado y de la existencia de los objetos matemáticos’’ (p. 50).

Buscando dar respuesta a esta problemática, se implementa una secuencia didáctica de actividades en el contexto de la variación y el cambio, que permita aportar a la introducción de la noción de derivada como pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, por medio del establecimiento de procesos de conjeturación y explicación con estudiantes del grado 11 de una Institución Educativa Departamental del municipio de Funza (Cundinamarca)

4. MARCO TEÓRICO

Las bases teóricas en las que se fundamenta el presente trabajo son dos: el pensamiento variacional y su relación con el cálculo (en particular con la noción de derivada) y la argumentación. En este sentido se abordará en el orden mencionado, lo que se considera necesario para dar respuesta a la problemática planteada, estableciendo una relación entre estos dos constructos teóricos.

4.1 Pensamiento variacional y su relación con el cálculo y la derivada

Antes de abordar el sentido y significado de la palabra ‘variacional’ se debe establecer la diferencia entre cambio y variación, tal como lo afirman Cantoral, Medina & Sánchez (2005). La noción de cambio comprende la transformación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un objeto, sistema o cuerpo; mientras que la variación, se entiende la cuantificación de estos fenómenos de cambio, es decir, estudiar la variación significa entender y conocer cómo y cuánto cambia el sistema o cuerpo dado.

El pensamiento variacional comprende las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio y los procesos de pensamiento, además de analizar la relación entre las prácticas socialmente compartidas y el conocimiento, es por esto que Cantoral & Montiel (citados por Vrancken & Engler, 2014) afirman que:

El pensamiento variacional estudia los procesos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Hace énfasis en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales.

El objeto principal de estudio del pensamiento variacional, son los fenómenos de cambio y su entendimiento, por lo que en este contexto un concepto fundamental es el cambio, que matemáticamente puede ser modelado por la diferencia. La diferencia da cuenta de cuánto cambian, en un proceso de variación, las cantidades de una magnitud. En este sentido son elemento central del cálculo, por eso éste es llamado la matemática de la variación y el cambio. Esta relación entre el pensamiento variacional y el cálculo es clave para identificar nociones de cálculo en el análisis de los resultados de la secuencia de actividades que se presentará más adelante.

Estas matemáticas de la variación y la acumulación, concibiéndolas como lo hacían los matemáticos en los siglos XVI y XVII como un instrumento para desentrañar relaciones cuantitativas del mundo natural, no dejan de lado que gran parte de su importancia reside en su capacidad para suministrar un instrumento para estudiar la naturaleza física (Imaz & Moreno, 2014). Es la derivada la que refleja con precisión, una de las propiedades esenciales de los fenómenos de la naturaleza física: la rapidez de la variación, que está relacionada con tres nociones básicas: el cambio, la razón media de cambio y la razón instantánea de cambio

Para Dolores C (citada en Vrancken & Engler, 2014),

La incorporación de elementos variacionales y el otorgamiento de significado a los distintos elementos relacionados a la variación en estudio favorecerán la construcción de la derivada. En un sentido más amplio, influirán positivamente en el desarrollo del pensamiento variacional de los alumnos, y, también, de su lenguaje variacional, en tanto sean capaces de comunicar sus ideas.

Volviendo a las matemáticas de la variación y su entendimiento, diversas investigaciones en Educación Matemática proporcionan ejemplos sobre problemas de aprendizaje y el papel de la visualización en la comprensión del cálculo, una de estas es la que presenta Cantoral & Montiel, (2001), donde señalan que visualizar no es solamente el hecho de ‘‘ver’’ la gráfica, sino que es una habilidad que permite representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento de quien aprende. En este mismo sentido realizar correctamente esta actividad de visualización requiere del manejo de nociones matemáticas asociadas a lo numérico, gráfico o algebraico, a fin de operar con ellas y obtener un resultado; también exige el uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso para describir experiencias vivenciales.

‘‘Es por esto que muchas de las dificultades del cálculo se superarían si se enseñara a los estudiantes a interiorizar las connotaciones visuales de los distintos conceptos’’ (Vrancken y Engler, 2014, p.453).

Por otra parte y retomando las ideas para desarrollar el pensamiento variacional, Cantoral & Medina (2005) afirman que en un proceso de variación, se presentan argumentos de tipo variacional cuando una persona utiliza o comunica argumentos y estrategias al hacer uso de maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando. Es acá donde se identifica una relación entre los procesos de argumentación y el desarrollo de pensamiento variacional. Por lo que se abordará la segunda parte de la base teórica que fundamenta el trabajo y que se relaciona con el pensamiento variacional.

4.2 Argumentación, conjeturación y explicación

Para definir argumentación, argumento, conjetura y explicación es válido hablar de lo que se entiende por actividad matemática y para esto es necesario hablar de matemáticas, de cómo son percibidas, es hablar del trabajo matemático y de cómo es que éstas se producen. En la serie lineamientos curriculares (MEN, 1998) se afirma que: las matemáticas no son solamente el cuerpo teórico acumulado a través de la historia. Son también la actividad de quienes las piensan bien sea como objeto de reflexión o como instrumento útil como herramienta.

Hacer matemáticas es en cierta medida realizar una reproducción de una actividad científica (MEN, 1998), lo que significa, que el aprendiz deberá ejercer acciones que realizan matemáticos cuando hacen su trabajo formal, o en palabras de Brousseau (citado por MEN, 1998) cometer errores, elaborar hipótesis, realizar inducciones, generalizaciones, etc., y posteriormente al juzgar que ha encontrado un resultado digno de ser "comunicado", elegir, del gran laberinto de sus reflexiones, aquello que es comunicable y "susceptible de convertirse en un saber nuevo e interesante para los demás" .

Para el caso específico de las matemáticas que se desarrollan en los colegios o matemáticas elementales como las define Yaglom (citado por Luque et al., 2006), ¨hacer matemáticas elementales es desarrollar el trabajo de un matemático con objetos que puedan ser introducidos con poco, o nada, de conocimientos previos¨, (Luque et al., 2006, p.71). Es por tal motivo que las actividades de la secuencia de actividades que se implementó y que más adelante se describirá, promueve actividad matemática, sin embargo, no solamente por este hecho se debe considerar que una tarea específica genera actividad matemática, también lo es cuando consiste en:

Proponer y discutir símbolos, reglas y algoritmos, Proponer y discutir definiciones, Formular y describir relaciones, Formular y argumentar proposiciones matemáticas, Establecer conjeturas, Codificar y decodificar informaciones matemáticas, Formular y manejar teorías matemáticas, Construir nuevas teorías a partir de las ya establecidas. (Luque, Mora y Torres, 2006 p. 70)

A partir de lo anterior son tareas del profesor como lo señala el MEN (1998) ¨simular en su clase una micro sociedad científica¨ (hacer que en el aula se cometan errores, formulen hipótesis, conjeturas, realicen inducciones, generalizaciones, etc.), ¨también dar a los alumnos los medios para encontrar en esta historia particular que les ha hecho vivir, lo que es el saber cultural y comunicable que ha querido enseñarles¨ o en otras palabras dotar de sentido lo que enseña. Igualmente estimular al estudiante para que sea agente activo de su aprendizaje, y que las actividades que proponga contribuyan a tal fin, dado que esto conlleva a que él aprecie las matemáticas como un proceso y no como un producto acabado (Luque et al, 2006), enseñarle a valorar las matemáticas, promover el aprendizaje en la resolución de problemas, la comunicación matemática y el razonamiento matemático, proponiendo preguntas que lo orienten hacia allá. Por lo tanto se necesita que el profesor reflexione todos los aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje, diagnostique dificultades y planee cómo superarlas, aumente el trabajo grupal y el individual (Santaló 2009).

Este accionar del profesor debe buscar que el estudiante actúe, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca las que están conformes con la cultura, que tome las que le son útiles, etcétera. (MEN,1998, p.13).

Con base en lo anterior y cómo se ha nombrado, en el proceso de la actividad matemática aparecen varios momentos como conjeturar, explicar, argumentar y demostrar. Esta actividad lleva al resolutor a encontrar evidencias que le permiten hacer suposiciones o plantear hipótesis que pueden llegar a tener altos grados de certeza, dado el trabajo previo, pero que su validez sólo puede ser asegurada mediante una demostración matemática. Esta acción es denominada conjeturar (Camargo, 2010).

Cuando se desea socializar una conjetura, es necesaria la explicación de los pasos que llevaron a su planeamiento, por lo que es idóneo definir qué se entiende por explicar.

La palabra explicar en definida similarmente por varios autores, por ejemplo, Goizueta (2011) considera que: “explicar implica hacer comprensible un hecho o fenómeno presentándolo en conexión con otros hechos o fenómenos dentro de un sistema de relaciones y funcionamiento coherente” (p.10).

Es por esto que Duval (citado por Goizueta 2011) afirma que responder preguntas como “por qué se produce este fenómeno”, “por qué se obtiene este resultado” implican la acción de explicar donde se pretende hacer comprensible un dato, una proposición, un fenómeno, un resultado, etc.

Por otra parte Balacheff (2000) refiere que: ‘‘explicar es dar las justificaciones de un teorema, explicarlo y demostrarlo señalando exigencias distintas’’ (p.16). Por lo que la persona que desea hacer una explicación, que expresa mediante un discurso, pretende hacer inteligible a los espectadores la verdad de la proposición ya adquirida por éste. (Balcheff, 2000).

Retomando el proceso de conjeturación en la resolución de un problema es indispensable hablar de la validez de las conjeturas, entonces esto conlleva a tratar el tema de la argumentación. A continuación se abordara el concepto de argumentar dado por algunos autores.

Dado el contexto, se pueden identificar dos tipos de argumentación. El primero durante la exploración, formulación y socialización de una conjetura, el segundo durante la demostración de ésta, para el caso del presente trabajo se adopta la primera idea, para describir procesos de argumentación de los estudiantes, es por esto que Duval (citado por Camargo, 2010) define el término 'argumentar' como la utilización de razones o puntos de vista para contradecir o afirmar una proposición, con la finalidad de dar credibilidad y certeza a un enunciado y postularlo para hacer una demostración formal. Adicionalmente, una argumentación consiste en varios argumentos que pueden estar conectados de manera coherente, pero que no implican un razonamiento deductivo entre estos (que uno conlleve al otro).

Partiendo de las definiciones de argumentar y explicar, es óptimo señalar las diferencias que existen entre estas concepciones para dar mayor claridad acerca de los mismos.
Con base en la definición de 'argumentar' expuesta por Duval (citado por Camargo, 2010 y por Goizueta, 2011) entendida como conjunto de razones que pueden ser de tipo deductivo o no y que se utilizan para convencer y tomando como referencia la definición de 'explicar' dada por Goizueta (2011) y citada anteriormente, donde se define como una acción descriptiva que implica hacer comprensible un hecho, es posible establecer diferencias entre los significados, ya que como afirma el mismo Duval (citado por Goizueta, 2011) cuando se identifican preguntas de tipo **"***por qué se produce este fenómeno", "por qué se obtiene este resultado" se*

deduce que requieren explicaciones; en cambio, las preguntas como "por qué afirmas que…", "por qué respondes que…", requieren que se proponga al menos un argumento.
Este hecho fue importante en las modificaciones que se le hicieron a la secuencia de actividades implementada por Vrancken y Engler (2014)

Adicionalmente al tipo de preguntas también se pueden diferenciar de acuerdo al tipo de conectivos utilizados en los discursos del resolutor, por ejemplo incluir conectivos como: también, pero, sin embargo, aunque, entre otros; señalan un discurso argumentativo, mientras que usar conectivos organizativos como: porque, en consecuencia, por lo tanto, etc., evidencian discursos de tipo explicativo.

Por otra parte, es importante señalar que: "la fuerza de un argumento va a depender principalmente de su adaptación a la situación y no tanto a su resonancia en el universo del interlocutor: se trata de asegurar que la solución funciona o que puede funcionar" (Duval, 1999, p.4).

En la teoría de la argumentación de Toulmin (2009), se establece que hay unas premisas universales que son definidas como aquellas garantías (G) que permiten el paso con seguridad de una o varias premisas iniciales que reciben el nombre de dato D (transmite información de la que se extrae la conclusión) a la conclusión C, particularmente se presentan como: Todo A es B, Ningún A es B, casi todos los A son B, apenas algún A es B.
En esta teoría se la validez al argumento con estructura D, G luego C cuando a partir de la premisa inicial (dato) se puede pasar a la conclusión dado que al poner la garantía es obligatorio el paso de los datos a la conclusión, en otras palabras cuando la garantía hace evidente el paso a la conclusión.

5. METODOLOGÍA

En este espacio se explica cómo y por qué se modificó una secuencia de actividades propuesta por profesionales de la educación matemática, para la introducción de la noción de derivada desde la variación y el cambio. Se hace una descripción de cómo se hizo el análisis de la información que permitiera responder al problema planteado resaltando cómo se logró luego de una detallada lectura de los resultados obtenidos al implementarla.

Los referentes teóricos fueron tenidos en cuenta para validar argumentos, hacer distinción entre argumentos, conjeturas y explicaciones en los procesos de resolución de una actividad matemática que se implementó, en el contexto de la variación y el cambio. Esta actividad matemática es una propuesta didáctica basada en la visualización y el desarrollo del pensamiento matemático que permite al concepto de función evolucionar en el estudiante a través de sus propias actividades matemáticas (Vrancker y Engler, 2014).

Se implementó la propuesta, "una introducción a la derivada desde la variación y el cambio" (Vrancken & Engler, 2013), haciendo unos cambios a las preguntas para que generarán mayores procesos de argumentación, conjeturación y explicación a la luz de los referentes teóricos mencionados en el marco teórico, teniendo en cuenta estructuras de preguntas como *"por qué se obtiene este resultado"* (explicaciones)*, o "por qué afirmas que…", "por qué respondes que…",* (argumento).

Esta secuencia de actividades, se aplicó a estudiantes de grado 11 en la Institución Educativa Departamental Bicentenario, ubicada en el municipio de Funza (Cundinamarca), carrera 19 Nº16-00 barrio Villa Paul. Dicha institución es de carácter público con una comunidad de estratos 1, 2 principalmente. A manera de prueba piloto, los días 1,2 y 3 de junio del 2015, se aplicó la secuencia a una muestra de la población de quince estudiantes escogidos por el profesor titular del área de matemáticas, bajo el criterio que no tuvieran un manejo tan elaborado de conceptos relacionados con matemáticas y física, para poder identificar errores en el planteamiento de preguntas y elaboración de gráficas, que generaran dificultades en la solución.

Posteriormente los días 23, 24 y 25 de Septiembre del presente año, se aplicó la secuencia de actividades con las correcciones pertinentes que se evidenciaron luego del pilotaje mencionado. Este trabajo se llevó a cabo dentro del plantel educativo Bicentenario de Funza con 20 estudiantes del grado 11 dentro de la jornada única académica, dicha prueba fue desarrollada por estudiantes con desempeño alto-superior en las asignaturas de física y cálculo, los cuales no fueron tenidos en cuenta en la prueba piloto aplicada con anterioridad. La prueba estuvo acompañada por el docente que dirigía la actividad e interactuaba con los estudiantes cuando era requerido y un acompañante que se encargaba de grabar y dar apreciaciones al docente que dirigía la actividad.

La organización de los estudiantes se dio por grupos de tres personas con el fin de generar discusiones desde distintos puntos de vista que permitieran sustentar o refutar los argumentos, conjeturas y explicaciones dados dentro del proceso.

Para la aplicación de la prueba se contó con 8 horas de 60 minutos aproximadamente, las cuales fueron implementadas así:
Un primer momento de la actividad se aplicó el día martes 22 de septiembre en la biblioteca Simón Bolívar (biblioteca institucional) de 11am a 1pm. La segunda implementación se realizó el miércoles 23 de

septiembre en el laboratorio de física, de 8am a 10am. La última sesión se implementó el jueves 24 de septiembre en el laboratorio de física, de 7am a 10am.

El primer momento fue implementado en la biblioteca de la institución, ingresaron los estudiantes al recinto sobre las 10:30am y se organizaron por grupos en orden de llegada, luego se dieron indicaciones generales de la actividad a realizar durante las 3 jornadas.
Siendo las 10:50am se le hizo entrega de los materiales (taller, hojas blancas, borrador, lápices, tajalápiz y esfero) para dar inicio a la actividad propuesta.

Siendo las 11am se inició el desarrollo de las secuencias actividades, después de entregar los materiales a cada grupo de trabajo, ellos dan inicio a la solución de las actividades propuestas. Realizaron la lectura sin mayores dificultades al igual que la grabación del desarrollo de la actividad, el docente dio orientaciones y enfocó algunas preguntas sin dar soluciones concretas a los estudiantes que se encontraban elaborando la prueba, es decir, el docente no es fue integrante activo en el desarrollo de la secuencia de actividades, sin embargo participó como orientador cuando evidenciaba que no se estaban cumpliendo los objetivos de las actividades. Al finalizar la jornada se entregaron los trabajos elaborados por cada grupo a los docentes encargados de la aplicación.

Para la aplicación de las otras dos jornadas se manejó el mismo protocolo pero aplicadas en el laboratorio de física, donde se realizaron las grabaciones y se elaboraron los documentos por parte los grupos, se dieron nuevamente las orientaciones generales para iniciar los procesos.

Al final se hizo una socialización de cada actividad en este mismo salón y se introdujo la noción de derivada como pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.

Posteriormente se organizó la información de la siguiente manera:
Los documentos escritos proporcionados por cada grupo fueron sometidos a una lectura donde se identificaron resultados importantes para el análisis, teniendo en cuenta el marco de referencia sobre pensamiento variacional, derivada y argumentación, contrastando esta información con las evidencias recogidas en video para garantizar un proceso serio donde los resultados extraídos para el análisis no son producto de la intuición de quien los analizó.

Por otra parte, las grabaciones elaboradas en el desarrollo de dichas actividades tuvieron una revisión similar a los escritos, anticipada de una trascripción y una lectura de los momentos donde se consideró que hubo ideas o nociones de variación y argumentación. Posterior a esto se elaboraron varias matrices (una para cada actividad) con el siguiente esquema:

Momento	**Ideas o nociones de variación y cálculo**	**Argumentación**
Se describe el momento de la conversación.	Se identifican ideas o nociones de variación y nociones de límite y derivada	Identificación de procesos de argumentación (argumentos, conjeturas, explicaciones)

Continuo a este proceso se hizo un listado de ideas que surgieron de la observación detallada de cada matriz, que permitieron establecer relaciones directas con los objetivos del trabajo que en gran medida buscó introducir la noción de derivada mediante distintos escenarios de variación, que permitieron caracterizar variaciones entre magnitudes, a través del cálculo desde la razón de cambio y explorar cómo la pendiente de una curva se relaciona con la razón de cambio. Así como la de describir procesos de conjeturación, argumentación y explicación con relación a la introducción la noción del concepto mencionado anteriormente.

6. DESARROLLO DEL PROYECTO

6.1 ANÁLISIS DEL DESARROLLO DEL PROYECTO

En esta sección se analizan algunos aspectos que resultaron de la implementación de la secuencia de actividades, resaltando aquellos que se enmarcan en el desarrollo del pensamiento variacional con relación la introducción de la noción de derivada como pendiente de la recta tangente a una función en un punto. Igualmente se analizan algunos procesos de conjeturación, argumentación y explicación que se generaron en el proceso y que tienen relación con la introducción de la noción de derivada mencionada anteriormente.

Para identificar los elementos que nos permiten dar cuenta de desarrollo de pensamiento variacional, es necesario hacer clara la distinción respecto a lo que se llama cambio (modificación de estado, apariencia, comportamiento, etc.) y lo que se llama variación (cuantificación de estos procesos de cambio); por lo que estudiar la variación es entender cómo y cuánto cambia el cuerpo o sistema dado.

Es por esto que los momentos extraídos para el análisis son aquellos donde los estudiantes utilizaron o comunicaron argumentos, explicaciones y estrategias de tipo variacional cuando hicieron uso de maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejaban y expresaban el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio (parafraseado cantoral y medina)en los sistemas u objetos que estaban presentes en cada actividad de una secuencia de actividades donde se proponían distintos escenarios de variación, que permitieran caracterizar variaciones entre magnitudes, a través del cálculo de razones de cambio y explorar cómo la pendiente de una curva se relaciona con la razón de cambio.

Para el análisis se tuvieron en cuenta las producciones escritas de 5 grupos de trabajo y la grabación en video de uno de los grupos. De igual manera se consideraron los registros de las observaciones del docente que dirigía la actividad durante el desarrollo de la secuencia. Esto fue considerado dado para describir momentos de interacción entre el profesor y los estudiantes en el momento en que surgieron dudas a lo largo de la resolución de las actividades, al igual que cómo respondían los estudiantes a las preguntas del docente.

Se presentan los trabajos de algunos grupos y a partir de esto se comentan los principales aciertos y dificultades que se evidencian en tramos de conversaciones e imágenes de los trabajos escritos con la intención de obtener información sobre los procesos de conjeturación, argumentación y explicación, buscando su relación con la introducción a la noción de derivada como pendiente de la recta tangente a partir de distintas actividades en el marco del pensamiento variacional propuestas en Vrancker Y Engler (2014) y modificadas para que evidenciaran los procesos mencionados.

En la primera actividad se presenta una gráfica de espacio y tiempo acompañada de una tabla de valores que representan el movimiento de un automóvil que hace un recorrido desde un lugar a otro haciendo paradas en algunos puntos, dicho movimiento está modelado por una función definida por intervalos, donde en cada uno de estos hay una función lineal, constante o afín. A partir de la lectura e interpretación de estos datos sobre el movimiento del automóvil es posible hacer el cálculo de velocidades medias en algunos intervalos de tiempo. Se esperaba con esta actividad que los estudiantes encontraran la relación, en el contexto del movimiento rectilíneo uniforme, entre la razón de cambio media con la pendiente de la recta. En la ilustración 1 se puede ver parte de la resolución de la primera actividad hecha por el grupo 1. (VER ANEXO F)

En la primera actividad, los estudiantes evidenciaron el manejo de la ecuación para hallar la velocidad media, sin embargo se presentó una discusión en cuanto al análisis de la gráfica y el movimiento del automóvil. En este momento un estudiante no estableció la relación entre los movimientos del automóvil y las paradas que hace éste, por lo que uno de sus compañeros, por medio de una explicación, le indicó cómo fue el trayecto desde el punto de partida hasta el de llegada, señalándole los momentos donde recorre distancia y donde el recorrido es cero. Aunque para los tres estudiantes fue claro el movimiento, no hicieron los cálculos correctos de algunas velocidades medias, dado que estimaron algunas medidas de distancia y no vieron la relación entre la tabla de valores y la gráfica.

Para responder a la pregunta: *¿Cuánto marca el velocímetro del auto cuando transcurre un minuto de haber salido?* Se presentó una solución, utilizando proporcionalidad directa, para hallar la distancia recorrida por el automóvil hasta ese instante de tiempo, posteriormente se preguntó si este procedimiento se puede utilizar para hallar la distancia en 0.5, 1.5 y 1.8 segundos, y si la velocidad media en esos cuatro momentos (contando hasta el minuto 1) es la misma, a lo que respondieron que si era posible debido a que se presentaba una proporcionalidad directa, pero que solamente donde la gráfica tuviera el mismo comportamiento, dado que era una función definida por intervalos. En este instante se evidencian dos argumentos, el primero para concluir que las magnitudes son directamente proporcionales y la segunda para afirmar que lo son pero solo cuando el movimiento está modelado por la misma función. Es válido aclarar que los argumentos se construyen a partir de preguntas que hace el docente para propiciar este proceso. A continuación se presenta el fragmento de la conversación genera en el grupo 1 (tres estudiantes E1, E2, E3 y el profesor P) donde se evidencia cada argumento y la interpretación que se le hace de acuerdo a la forma de los argumentos (Toulmin 2009)

E1: la siguiente (lee) ¿Cuánto marca el velocímetro del auto cuando transcurre un minuto de haber salido? ¿Cómo puedo saber lo que indica el velocímetro? Mmmm (señala la gráfica), más o menos por acá (señalando el uno muy cerca a cero en el eje x del tiempo) que da uno, la cosa es que cuál es la distancia recorrida

E2: pues (señalando el eje y de la distancia) yo creo que eso es como uno coma algo, ¿no?

E3: si, pero es que mire si en 3 minutos ha recorrido 3 kilómetros, perdón dos kilómetros cierto? (señalando la tabla y el gráfico)

E2: oiga si,…, pero de todas maneras, ¿cómo se hace para saber cuánto ha recorrido?

E3: eso es directamente proporcional

Profesor: ¡claro!, debe ser, ¿la distancia debe ser mayor o menor que 2 kilómetros?

E1, E2, E3: ¡menor!

Profesor: entonces, ¿cómo hallarían ese valor que falta?

E1: con una regla de tres, sí, claro eso es como: si en 3 minutos ha recorrido 2 kilómetros, cuánto ha recorrido en 1? (escribe la clásica forma para la regla de tres simple directa en la hoja) multiplicamos 1 por 2 y lo dividimos por tres, ¿no?

P y E3: si

E2: da 0.6666, que es lo que recorrió cierto? O sea esos son kilómetros.

E3: y, ¿la velocidad?... a claro delta de tiempo sobre delta de distancia, o sea $0{,}6666$ *dividido en* $1\ldots$

E1: si o sea $0.6666\ km/\ h$

P: bueno paren ahí, yo les hago una pregunta, y si yo quiero saber cuál es la velocidad a los $0.5, 1{,}5, 1{,}8$ *minutos de haber salido, ¿sirve el mismo procedimiento?*

E1: pues hacemos otras reglas de tres, si claro lo mismo…

E3: …claro, debe ser por qué son directamente proporcionales, ¿no?

E2: a ver (digitando en su calculadora) si da lo mismo

Es este momento digitan las demás cantidades y obtienen que las velocidades son iguales.

Organizando esta información, se infiere que es un argumento válido:

- Datos: cantidades suministradas en la tabla de valores y la gráfica.
- Garante: Al hallar las velocidades medias se encuentra que son iguales (existencia de una contante de proporcional).
- Conclusión: se puede utilizar la regla de tres simple directa para hallar la distancia recorrida por el automóvil a los 0.5, 1.5 y 1.8 segundos.

Esta conversación es inmediata a la anterior, donde se evidencia un argumento que parte desde la conclusión del anterior argumento y ésta se toma como dato inicial.

P: ¿qué pueden concluir?

E1: pues que las velocidades son las mismas

P: pero, ¿en todo el recorrido?

E2: no, solo para los primeros tres minutos, después toca con las otras (refiriéndose a las otras partes dela gráfica del movimiento señalando desde $t = 3$*), no ve que aquí no se mueve que fue lo que usted dijo (Estudiante 1), pasa el tiempo y no se mueve.*

P: ¿están de acuerdo con lo que ella dice?:

E1: si, porque cambiarían, en algunos momentos no se mueve y en otros parece diferente (pone las manos en posición horizontal y diagonal), además ya hicimos la velocidad entre el peaje y el cruce de rutas y da $1.16666\ km/h$

E3: si claro mire, eso depende del movimiento, ¿no?

E1: claro cuando se queda quieto la velocidad es cero y si recorre más distancia en menos tiempo pues cambia

E2: si claro.

Interpretando y organizando, la forma del argumento sería:

- Datos: información de la tabla de valores y la gráfica, conclusión del anterior argumento.
- Garante: Después de tres minutos la gráfica se vuelve constante y posteriormente vuelve a cambiar, la velocidad puede variar dependiendo si recorre mayor o menor distancia, lo que se puede ver comparando con la velocidad media hallada en otro intervalo de tiempo (movimiento modelado por otra función afín).
- Conclusión: el procedimiento solamente puede ser utilizado para los primeros tres minutos.

Independiente de las dificultades que tuvieron los estudiantes inconvenientes, la actividad cumplió con su objetivo, que por un parte, radicaba en que a partir de nociones que manejaran, o tareas que pudieran realizar, comenzaran a construir otras nuevas.

En cuanto al desarrollo de pensamiento variacional, se evidenciaron resultados importantes en la interpretación de las representaciones gráfica y tabular y el paso al cálculo numérico para encontrar velocidades medias en todo el recorrido, aunque hubo un momento en que ignoraron la tabla y aunque hicieron cálculos correctos para hallar velocidades medias, los resultados fueron imprecisos porque partieron de medidas estimadas. Esto se evidencia en el siguiente fragmento de conversación donde estiman las distancias recorridas a los $25\, y\, 30$ minutos en $5\, km$ y $10\, km$ respectivamente y no tienen en cuenta que éstas eran $4.5\, km$ y $10.5\, km$.

> *E2: … (Lee) si visualizamos la gráfica ¿Cuál puede ser el proceso para indicar la velocidad media entre los instantes* 25 *y* 30 *minutos? O sea no hay velocidad porque no hay aceleración está en ceros.*
>
> *E1: no, no está en ceros, acá entra (señalando la recta que va desde el punto E hasta F)*
>
> *E2: ah sí, entonces es (señalando la gráfica)* 11 *menos* 5 *sobre* 30 *menos* 25
>
> *E1: (digita en la calculadora) da* 1.2 *por* 60 *da* $72\, km/h$.

Una última observación del trabajo de los estudiantes, es que se evidenciaron aspectos en los razonamientos para iniciar la construcción de la relación, en el contexto del movimiento rectilíneo uniforme, entre la razón de cambio media con la pendiente de la recta, sin embargo dicha relación se construiría en las actividades posteriores.

En la actividad siguiente se presentó una función definida algebraicamente, con el objetivo principal que los estudiantes trabajarán con la velocidad media, a partir de la obtención de las diferencias (incrementos) y de los cocientes entre estas diferencias. Se esperaba que su resolución condujera al reconocimiento del tipo de funciones, o representaciones gráficas, que dan lugar a razones de cambio constantes. Requiere la traducción del registro analítico al numérico y gráfico además de interpretar lo realizado en el registro verbal. Se presenta a continuación una imagen de la prueba escrita del grupo 1. (VER ANEXO G)

La primera parte de la actividad requirió que los estudiantes diligenciarán una tabla que tiene separadas en varias columnas, las diferencias entre las distancias y las diferencias de los tiempos, así como una casilla donde deben poner la velocidad media en estos intervalos de tiempo, para un movimiento modelado por una función lineal.

Aquí aparece un primer análisis hecho por los estudiantes sobre las expresiones que se presentan que ($t_1 \leq t \leq t_2$, $\Delta t = t_{2-}t_1$, $\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$, y $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_{2-}t_1}$). Discutieron sobre sus significados haciendo énfasis en que representan el cambio entre las magnitudes tiempo y distancia. Posterior a esto, Encontraron una regularidad y es que al aumentar una unidad de tiempo, aumentan tres unidades en distancia, por lo que la velocidades constante.

En particular para el grupo 1, en este momento se evidencian algunos argumentos cuando el profesor hace la siguiente pregunta: *se podría decir que ¿al aumentar un segundo aumenta tres metros desde el primer instante de tiempo hasta el último?*

Las respuestas son afirmativas poniendo como garante los resultados de la tabla y que las magnitudes son directamente proporcionales (haciendo una comparación con el ejercicio de la actividad anterior), como se evidencia en el siguiente fragmento de conversación:

> *P: se podría decir que: ¿al aumentar un segundo aumenta tres metros desde el primer instante de tiempo hasta el último?*
>
> *E2: si claro en la tabla lo dice (señalando los resultados que pusieron en la tabla)*
>
> *E1: demás la tabla nos lo dice*

E3: si, pasa lo mismo que en la anterior es directamente proporcional, mientras que aumenta en tiempo de a uno, la distancia aumenta de a 3

E1: claro por eso la velocidad es la misma, es constante.

Organizando el argumento resultaría:

- Datos: las diferencias en los intervalos de tiempo y las diferencias en los intervalos de distancia son iguales para los valores dados.
- Garante: los cálculos comprueban que los cocientes son iguales (las magnitudes son directamente proporcionales)
- Conclusión: es posible afirmar que en todo el recorrido al aumentar una unidad de tiempo, se aumentan tres unidades de distancia.

Este argumento es válidos y es de tipo variacional el estudiante está utilizando y comunicando argumentos haciendo uso de los resultados hallados en los cocientes que reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo del cambio en el movimiento del objeto

En otra parte de la actividad donde se solicitaba responder a la pregunta ¿Qué puede decir a cerca de los valores de $\Delta s/\Delta t$ para cada uno de los intervalos de tiempo?, se les sugirió proponer un argumento que diera cuenta por qué se da esta relación. A lo cual responden:

- la velocidad es constante porque al aumentar de a un segundo en el tiempo, aumenta tres metros la distancia.
- seguiría siendo constante así aumente de a cuatro la distancia, pero no lo sería si los aumentos en la distancia no tuvieran una diferencia igual, dado que los cocientes serían diferentes.

En esta última apreciación hecha por un estudiante contiene un argumento a partir de un contraejemplo, que resulta en el establecimiento de una conjetura por parte de otra estudiante. Esto se evidencia en el siguiente fragmento de conversación, partiendo de la lectura de la pregunta ¿Qué puede decir a cerca de los valores de $\Delta s/\Delta t$ para cada uno de los intervalos de tiempo?, proponga un argumento por el cual se da esta relación:

E2: … pues que la velocidad es la misma o sea es constante y yo creo que es porque al aumentar de a un segundo, se aumenta tres metros la distancia.
E1: si, es por eso mire que si aumentara digamos de a 4 también daría lo mismo
E3: claro también sería proporcional, lo que si no daría igual es que por ejemplo aumentara 3 en el primero (señalando la tabla), luego 2 y luego 5, pues lógico no daría lo mismo
E2: no le entiendo
E3: pues mire (escribiendo en la tabla) que en el primer segundo aumentara de a digamos 3 metros o sea lo mismo, pero en el otro segundo fuera más rápido y recorriera 5 metros y en el tercero fuera más lento y recorriera digamos 1 metro.
E1: si hacemos las divisiones dan diferente nos darían diferente velocidad porque en unos iría más rápido que en otras
E2: mmmm (moviendo con la cabeza e indicando convencimiento y a la vez duda con sus gestos), pero, ¿la expresión sería la misma? (subrayando la expresión)
E1: E2: mmmm…
P: muy buena pregunta, pero bueno más adelante la abordamos para allá vamos

La conjetura que planteó la estudiante, se puede interpretar de la siguiente manera: si las velocidades no son constantes entonces la función podría no ser afín. El profesor solicitó pasar al siguiente punto dado que pensó que más adelante se le daría solución y aunque en cierta manera así fue (como se podrá observar más adelante), se dio como consecuencia de otros trabajos y no precisamente de uno particular para dar respuesta puntual a la conjetura.

Continuando con la actividad, con base en el ejercicio anterior de la tabla, se dio la representación gráfica del movimiento anterior y se pedía que los estudiantes hicieran la interpretación de los datos obtenidos en la tabla. En este momento se evidencia que los estudiante lograron hacer la interpretación geométrica de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, dibujando triángulos rectángulos semejantes haciendo la relación con la pendiente de una recta.

Un estudiante mediante el trazado de segmentos, dibujó los triángulos rectángulos que representan la distancia y el tiempo recorridos, señalando que al haber un aumento de una unidad en el tiempo hay un aumento de tres metros de distancia y concluyó (recordando lo que había trabajado, en el presente año, en un curso de preparación para las pruebas de estado) que a este movimiento es a lo que se llama pendiente, por lo que el profesor, intentando hacer más evidente la relación entre la razón de cambio media y la pendiente de una recta, les hizo la pregunta: *…o sea que la pendiente es ¿qué cosa?*. En el fragmento de conversación que se extrae a continuación se evidencia el proceso de un estudiante para concluir que la respuesta a la pregunta es *la velocidad*:

P: si, deben interpretar los resultados de la tabla en la gráfica

> *E2: mmmm y eso, ¿cómo lo hacemos?... igual al primer punto (refiriéndose a la primera actividad)*
>
> *E3: claro mire (toma la hoja donde está la gráfica y con el lápiz escribe los números del 1 al 4 sobre el eje x) ahora en el eje y lo mismo pero con las distancias…*
>
> *E2: a claro, cómo si graficáramos la función*
>
> *E3: si eso es lo que hay que hacer (termina de resaltar las distancias de la tabla y traza los ejes paralelos a los ejes formando triángulos rectángulos), mire que esto se parece a lo que hacíamos en álgebra.*

E1: bueno (lee) ¿Cómo puede llegar a una interpretación geométrica de la cantidad $\frac{\Delta s}{\Delta t}$*?... geométrica, ¿mmmm?, ¿Cómo es eso profe?*

P: ven esos triángulos que se formaron aquí (señalando la hoja), que pueden decir acerca de eso

E1: a pues lo que decíamos arriba, que al aumentar el tiempo de a uno se aumentan tres en distancia

E2: a eso como es que se llama, mmmm, esta vaina la, la… ahh…

E3: si eso tiene un nombre en matemáticas ¿no?, no es la pendiente

E1: si claro la pendiente, eso es lo que estábamos haciendo en el pre-icfes, lo de avanza tanto y sube o baja, ¿sí o no?

P: si claro, o sea que la pendiente es, ¿qué cosa?

E2: la distancia y el tiempo que recorre

E1: la velocidad

Se puede evidenciar que esta relación se encontró en parte por los razonamientos que se habían dado en las anteriores actividades, las preguntas orientadoras del profesor y los conocimientos previos de los estudiantes

Se observó que, a partir de la actividad, los estudiantes lograron identificar la diferencia como la operación que permite medir los cambios de cada una de las magnitudes, relacionándolos con el movimiento del automóvil, además dieron un significado a la razón de cambio media y caracterizaron una situación de razón de cambio constante, trabajando en distintos registros. La identificaron verbalmente con un movimiento de velocidad constante, con los cálculos realizados en el registro tabular y gráficamente con la gráfica de la recta que corresponde al movimiento.

Otro de los aspectos importantes de esta actividad era dar una interpretación geométrica del cociente entre las diferencias. En este trabajo, se puede decir que solo un grupo consiguió hacerlo de manera satisfactoria, relacionando este cociente con la pendiente de la recta que representa el movimiento como se evidenció en la conversación anterior.

La mayoría de los grupos realizaron la interpretación de las medidas (diferencias de cantidades de las magnitudes) pero solo pocos de ellos las asociaron a su significado en la gráfica, asociando las magnitudes involucradas en la situación de cambio con longitudes de segmentos, (como se muestra en la ilustración de y en la conversación de los estudiantes). Esto es muy importante, teniendo en cuenta la necesidad de la conversión entre registros para una verdadera comprensión.

En la siguiente actividad se presentó una función que modelaba el movimiento de una piedra cuando es lanzada hacia arriba y que generó una dificultad en cuanto a la interpretación de las velocidades medias dados los cambios de posición negativos. 2. (VER ANEXO H)

En un primer momento los estudiantes discutieron sobre cómo calcular la velocidad dado que el movimiento era diferente a los anteriores. Posteriormente abordaron las preguntas: *¿qué puede decir con respecto a la velocidad de la piedra cada intervalo de segundo sugerido en la tabla? y ¿cómo es la velocidad de la piedra en todo su trayecto?* En la discusión cuando un estudiante pregunta cómo hallar la velocidad media, sus compañeros le responden que con la información de la tabla es posible hacerlo y siguiendo las indicaciones del profesor, sin embargo la estudiante no se convence y hace los cálculos, esto se puede ver en el siguiente fragmento de conversación:

> *E1: Pues la velocidad es igual que en la anterior (refiriéndose a una actividad anterior donde se trabajó con movimientos de tipo lineal), distancia sobre tiempo…*

E2: Si pero ahí qué, ¿es lo mismo?, no creo

E1: Que sí, mire la tabla ahí están las fórmulas

E3: claro, es la misma vaina, lo que decía el profe, cambios en la distancia y el tiempo

E2: mmm (se queda pensando por un momento), yo lo que digo es que no sé si dé igual, bueno hagamos las operaciones (toma las hojas y el lápiz)

Posteriormente al hacer los cálculos se convence que la velocidad media se calcula igual, pero al ver en los resultados que no son iguales las velocidades, concluye con sus compañeros que no es posible aplicar la expresión de la velocidad media en este caso (función cuadrática) porque la velocidad no es constante. Es cuando concluyó con una afirmación, que en parte respondió a la conjetura que ella misma había planteado

Estudiante 2: ¡Sí!, eso es lo que yo decía, si ven, es que en las otras gráficas de atrás (refiriéndose a las de movimientos vlineales) nos daba igual.

Al concluir que las velocidades no son constantes en ninguno de los intervalos de tiempo, la misma estudiante planteó una duda que tuvo sobre cómo interpretar las cantidades negativas, a lo que sus compañeros le contestan con un argumento que se evidencia en la siguiente conversación:

E2: ¡Sí!, eso es lo que yo decía, si ven, es que en las otras gráficas de atrás (refiriéndose a las de movimientos lineales) nos daba igual

E3: Claro, porque la velocidad es constante

E2: Pero lo que no me cuadra es que da negativo

E1: A pues fácil, acuérdese de lo que vimos en física, que cuando es negativa es porque se devuelve o va para atrás

E2: Mmm ¿cómo así?, ¿la piedra?

E1: Si mire, ahí dice que la tiran para arriba, pues lógico que después baja, ¿no?

E2: Mmm sí, pues cuando cae es porque eso que da negativo.

Este argumento se puede organizar de la siguiente manera:

- Datos: divisiones de las cantidades de tiempo y distancia
- Garante: la descripción del movimiento de una piedra cuando se tira hacia arriba y luego cae, conocimientos previos en cuanto a cinemática.
- Conclusión: Entonces la velocidad es negativa.

De lo anterior se pueden evidenciar nociones de variación en los estudiantes, dado al hacer la interpretación del movimiento de la piedra en relación con su gráfica, identificaron que la razón de cambio no es constante en los intervalos de tiempo, haciendo una comparación de los tipos de movimientos modelados por una función lineal y una cuadrática.

Continuando con la actividad, el grupo 1, al responder las pregunta: si utiliza la expresión $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$ para calcular la velocidad media en el intervalo $[0,4]$, ¿qué significa el resultado obtenido en esta cuenta?, ¿es coherente con el movimiento de la piedra?, los estudiantes identificaron que no es posible utilizar la expresión de la velocidad media en un movimiento de tipo cuadrático, dado que no es coherente el resultado numérico con el movimiento del objeto, en este proceso se identifican algunas explicaciones que dan los estudiantes:

E2: Eso quiere decir que no "ando" nada

E1: No lo que pasa es que volvió al lugar de donde se lanzó, una piedra se tira hacia arriba y cae, es por eso entonces que da cero la distancia

El profesor reitera si los resultados son coherentes con el movimiento del piedra a lo que responden conjuntamente con un NO. Adicionalmente un estudiante afirma que: *no tiene sentido porque quería decir que no recorrió ninguna distancia la piedra por lo que la expresión no sirve*. Preguntan entonces cómo se hace para calcular la velocidad en este caso, a lo que el profesor sugiere continuar con la actividad, dado que más adelante podrán encontrar la respuesta.

En la siguiente pregunta: ¿Qué diferencias encuentra en el movimiento del automóvil expuesto en el primer ejercicio y el movimiento de la piedra? se presentan explicaciones por parte de los estudiantes, esto se puede observar en la siguiente conversación:

> *E2: Pues miren, en los primeros la velocidad es constante, acá no*
> *E3: Si, lo que ahorita decíamos…*
> *E1: Si, en cambio en la piedra no es constante la velocidad porque llega un punto en que deja de subir y se devuelve*
> *E2: ¡Claro!, por eso da diferente, porque llega un momento en que se pone más lento.*

De la conversación se pueden observar aspectos importantes, uno de estos es que hallaron una relación importante respecto al movimiento del objeto y es que cuando en intervalos de tiempo iguales la piedra recorre menos distancia es porque va llegando a la altura máxima y por este motivo la razón de cambio no es constante, adicionalmente con la ayuda del registro tabular, que la variación del tiempo es constante, mientras que la variación de posición no, por lo que los cocientes tampoco lo son (la velocidad media no es constante). También hubo reconocimiento del tipo de funciones que dan lugar a razones de cambio variables distinguiéndolas de aquellas que llevan a razones de cambio constantes Vale aclarar que esos resultados son de acuerdo al trabajo desarrollo por estos dos grupos, y no es posible generalizar los resultados a toda la muestra porque el grupo restante tuvo complicaciones en cuanto a la interpretación de las velocidades negativas. Conclusiones de este tipo son indicadores del desarrollo de estrategias del pensamiento variacional. Son importantes, también, para comprender otros aspectos del comportamiento variacional de una función, como cuándo una función es creciente o decreciente o por qué en determinados puntos alcanza un valor máximo o mínimo.

Para la actividad 4 se les solicitó a los estudiantes abordar una situación de caída libre de una bola, buscando la comparación del tipo de funciones que modelan situaciones de movimiento, y cómo se calcula la velocidad en situaciones donde la velocidad no es constante en ningún intervalo de tiempo. En la siguiente ilustración se observa la solución de la actividad por el grupo 2. (VER ANEXO I)

Para la solución de la pregunta: aproximadamente la velocidad de la bola en el instante t=1 segundo es de $25\ cm/seg$, ¿Cómo puede llegar a validar o refutar este enunciado?, fue necesaria la participación del profesor dado que ningún grupo propuso un intervalo alrededor del punto en cuestión. En el siguiente fragmento se observa cómo el profesor sugiere seguir una estrategia que ya habían utilizado en una actividad anterior:

> *P: bueno pues yo diría que empezaran con analizar el movimiento de la piedra según la gráfica y ya miramos lo otro, por ejemplo si se fijan en el eje x (señala) va de a 0.2 en 0.2, podrían mirar si la distancia que recorre es la misma o no, podrían utilizar la misma estrategia de dibujar los ‘‘triángulitos’’*
> *E1: (toma el lápiz y raya), pus miren (traza un segmento horizontal desde el origen hasta el punto* $(0.2, 0)$ *y luego un segmento desde este punto hasta su imagen en la función, formando un triángulo),*

¿qué quiere decir esto?, que cuando aumenta 0.2 segundos pues aumenta como aquí (señalando el eje y y poniendo un 1) más o menos como $1\ cm$.

P: listo, ¿se cumple eso para todo el recorrido?

E3: pues a ojo no

E1: pues mire si dibujamos otro triángulo acá (dibuja un segmento desde el punto $(0.2, 0)$ hasta $(0.4, 0)$ y luego otro segmento hasta la imagen de este último punto, formando un triángulo) aquí se ve que recorre más (señalando con el dedo la altura de este triángulo)…

E2: si y si seguimos dibujando se ve que cada vez recorrerá más y más distancia (haciendo los triángulos en la hoja)

E3: si claro, ahí podemos ver que la velocidad va a ser diferente porque al hacer esas divisiones no va a dar diferente

E2: ¿cuáles?, ¿las de la velocidad?

E3: si mire, si por ejemplo en el primero la distancia es 1 y el tiempo es 0.2 (escribe en la calculadora), la velocidad da 5, pero si la segunda es más o menos 3, al dividir da (escribiendo en la calculadora) 7.5, ¿si ve?

E2: aaa si y pues lógicamente las otras van a dar diferente porque cada vez recorre más distancia, ¿no?

E1: si

Es este caso se puede identificar un argumento:

- Dato: al aumentar el tiempo $0.2\ seg$ la distancia aumenta $1\ cm$
- Garante: los triángulos con bases congruentes no poseen alturas congruentes, sino cada vez mayores, por lo que las divisiones entre las diferencias van a ser diferentes
- Conclusión: la velocidad no es constante en todo el recorrido

Se puede ver que la intención del profesor era que llegaran a calcular velocidades medias en intervalos de tiempo iguales, sin sugerir intervalos sino apoyando una estrategia que ya habían utilizado, para que comprobaran que no es posible utilizar la ecuación de la velocidad media para un intervalo, cuando el movimiento está modelado por una función cuadrática.

En cuanto a los estudiantes, se evidencia un análisis del movimiento de la bola a partir de la gráfica, haciendo triángulos rectángulos de igual base (unidad de tiempo) y diferentes alturas (distancias recorridas en estos momentos). Donde concluyeron que en intervalos de tiempo iguales recorre cada vez mayor distancia, hecho que se diferencia de movimientos lineales como los de las primeras dos actividades, igualmente cuando realizaron los cálculos correspondientes para encontrar las velocidades medias concluyeron que las velocidades nunca serán iguales porque las distancias recorridas cada vez son mayores. A partir de este análisis comparativo, deducen que las velocidades no van a ser iguales dado que las divisiones entre las cantidades arrojarán diferentes resultados.

Sin embargo, aún persistía la duda generalizada sobre cómo hallar la velocidad instantánea ya que la expresión para calcular la velocidad media no servía en funciones que no fueran afines. En la siguiente pregunta de la actividad se propuso a los estudiantes hallar la velocidad media entre dos puntos A y B sobre la gráfica de la función de movimiento, interpretar estos resultados y posteriormente responder a la pregunta: *¿qué pasa con la velocidad cuando se toman intervalos de tiempo más pequeños?* Uno de los objetivos de este ejercicio era que los estudiantes lograran caracterizar más exactamente la razón de cambio en fenómenos de cambio no constante por medio del cálculo de razones de cambio medias en intervalos cada vez más pequeños.

En el ejercicio se presentaron gráficas que representan el movimiento de la bola del punto anterior y la pendiente de una recta secante que pasa por dos puntos A, B de la gráfica de la función. Se solicitó hallar la velocidad media entre los puntos A, B en cada gráfica (como se puede apreciar en la siguiente imagen), y responder a las preguntas ¿qué interpretación le da a estos resultados?, ¿qué pasa con la velocidad de la bola si se toman intervalos de tiempo cada vez más pequeños?. (VER ANEXO J)

Para la primera pregunta, nuevamente los grupos solicitaron ayuda del profesor porque no hubo comprensión de lo que se debía hacer. A esto el profesor les respondió con una frase clave:

…ahí se les presentan 5 gráficas donde se deja un punto fijo que es $A = (1, 15)$ y se desliza el otro B, empezando desde $(2, 60)$ hasta $(1.2, 21.6)$ ese es un procedimiento para poder calcular la velocidad instantánea o sea en el preciso instante cuando el tiempo es 1…

Sin embargo en la afirmación del profesor no dice que los puntos lleguen a coincidir o que la distancia se vuelva cero, pero la palabra deslizar parece que da a entender lo que se pretende en la actividad. Esto se evidencia cuando uno de los estudiantes responde, con el planteamiento de una conjetura:

E1: o sea que ese punto B puede llegar a estar muy cerquita de A

A lo que el profesor contesta nuevamente que la idea es que así sea, dado que la velocidad será más precisa si hay más cercanía al punto en cuestión. El desarrollo de esta conjetura podrá apreciarse más adelante. Por otra parte, otro estudiante afirma que en la última gráfica (donde los puntos son más cercanos) La velocidad es más exacta, talvez refiriéndose a que es más acertada a lo que debería ser la velocidad en el instante $t = 2$ y de alguna manera tomando como garante las afirmaciones dadas por el profesor. Sin embargo no podríamos hablar de un argumento sino más bien una conjetura, porque carece de sustentos.

De manera orientadora, en busca de desarrollar el objetivo de la actividad, el profesor les dijo que aún con esas aproximaciones la velocidad no es exactamente la que se estaban buscando, que sería mucho mejor el resultado si el punto B se pudiera acercar más al punto A. Hasta este momento solo se presentaban algunas conjeturas, por lo que el profesor solicitó que se probaran, sin embargo solo algunos estudiantes del grupo 1 comprendieron que una manera de probar lo que se estaba afirmando consistía en calcular las velocidades y observar qué pasaba con los resultados de estas cuentas.

Al instante de comenzar a calcular las velocidades, los estudiantes del grupo 1 encontraron una regularidad: en la medida que el intervalo de tiempo se va haciendo más pequeño la velocidad va disminuyendo con una diferencia de tres, estableciendo una nueva conjetura. Sin embargo, como forma de argumentar que esta conjetura era falsa, uno de los integrantes del grupo le responde que esta regularidad no se va a seguir cumpliendo, y le presenta un argumento que parece convencerlo, proponiendo calcular la velocidad en un instante de tiempo que no se sugería, como se evidencia primero en la imagen y luego en la conversación:

P: bueno, ¿qué concluyen de eso?

E1: pues que la velocidad va disminuyendo

E3: si va disminuyendo como de 3 en 3

E1: bueno, quién sabe si se cumpla para el resto

E2: si, porque ya no se puede hacer más eso porque de 1.2 a 1 ya acabamos

E1: pero digamos (señalando), se puede aproximar digamos acá (señala la mitad del intervalo $(1, 1.2)$*) que sería como* 1.1*, hagámoslo, eso da (reemplaza* $t = 1.1$ *en la calculadora)* 18.15*.*

E3: listo, menos 15 sobre 1,1 menos 1 (escribiendo en la calculadora) da 31.5 y ahí no disminuye de 3 en 3, pero si disminuyó.

Como se puede observar el argumento presentado por el estudiante 1 no es correcto dado que su conclusión es consecuencia de un procedimiento mal hecho, dado que no tuvo en cuenta que lo que proponía su compañero era que al disminuir una unidad en tiempo, disminuía 3 unidades en velocidad y para dar un contraejemplo eficaz debía encontrar un momento donde al disminuir una unidad de tiempo no disminuyera 3 unidades la velocidad, pues lo que encontró era una equivalencia y no un contraejemplo, sin embargo algo de resaltar es que por sí mismo propuso un nuevo intervalo de menor longitud y encontró un velocidad más aproximada a la velocidad en el instante $t = 1$, hecho que sería fundamental para el desarrollo de las conjeturas mencionadas y la obtención del objetivo.

Continuo a la conversación anterior, el profesor hizo la siguiente pregunta, retomando la idea del estudiante 1: *¿se podrían tomar valores más cercanos a 1?* A partir de este momento empezó un proceso de argumentación cuando un estudiante afirmó: *Claro, como 1.0 algo, y seguiría siendo más exacto todavía, a* lo que el profesor respondió diciendo que eso era lo que debían hacer en el siguiente apartado de la actividad.

En este nueva tarea se proponían intervalos cada vez más pequeños de tiempo alrededor de $t = 1$ por la izquierda ($[0.8, 1]$, $[0.9, 1]$, $[0.99, 1]$, $[0.999, 1]$), donde debían calcular las velocidades medias y organizarlas en una tabla de tiempo, distancia y velocidad, para posteriormente responder las siguientes preguntas: ¿qué sucede con la velocidad cuando la diferencia de tiempo en el intervalo es cada vez más pequeña?, ¿Cómo se podría hallar la velocidad aproximada de la bola en el punto A?, ¿Qué relación encuentra entre las velocidades de cada intervalo?

El trabajo de los estudiantes consistió en calcular las distancias de acuerdo a la función que modelaba el movimiento, luego hallar las velocidades y organizar los resultados en una tabla, como se muestra. (VER ANEXO K)

Posterior a esto, los estudiantes abordaron una por una las preguntas. En los siguientes fragmentos se pueden evidenciar algunos argumentos que construyeron los estudiantes y que respondieron, aunque no de manera explícita, las conjeturas planteadas anteriormente que eran:

a) El punto B puede llegar a estar muy cerquita de A
b) Si los puntos están más cercanos, la velocidad es más exacta.

En esta primera conversación se puede observar la argumentación para la conjetura b):

Estudiante 1: bueno resolvamos la preguntas, dice: ¿qué sucede con la velocidad cuando la diferencia de tiempo en el intervalo es cada vez más pequeña?, bueno pues la velocidad va siendo como más precisa, ¿no? Lo que decía el profe

Estudiante2: y se va acercando cada vez más a 30

Estudinte3: si mire que hice el de 0.9999 y da 29.9985 (mostrando la calculadora)

Estudiante1: o sea que si le ponemos otros nueves nos va a dar 30

Estudiante 3: nos va a dar 29. 9999, si 30.

Los datos son los resultados de las velocidades medias obtenidos y registrados en la tabla, el garante está en la interpretación que hacen de los cálculos, una inferencia que aunque no es comprobada la toman como una regularidad que se cumplirá y es que al estar más cercano a 1 por su derecha (0.9999999…) la velocidad va a ser (tenderá a serlo) 30; y una última que son las apreciaciones del profesor. Por lo que les permite concluir que efectivamente la velocidad será 30.

Acá es evidente una noción de infinitamente pequeño, y de cierta manera la idea intuitiva de límite.

Para la siguiente pregunta se presentó una explicación por parte de un estudiante, donde utilizó información del trabajo del punto anterior y dio un argumento para apoyar la veracidad de la conjetura a), como se muestra a continuación.

> *E2: la otra pregunta es ¿qué relación encuentra entre las velocidades de cada intervalo?*
>
> *E3: que cada vez son más aproximadas al 30*
>
> *P: listo y qué relación tiene eso con la gráfica que está ahí:*
>
> *E1: pues es que si acercamos más, pues casi que nos van a dar el mismo punto*
>
> *P: ¿en algún momento pueden llegar a coincidir los dos puntos A y B?*
>
> *E3: si claro cuando sea 1. 999999999999 que esté casi sea 2*
>
> *E2: si ahí coinciden*

Para los estudiantes resultó de gran ayuda la intervención del profesor (tomándolo como referente en la sustentación) para determinar que las velocidades medias en un intervalo son más aproximadas a la velocidad en el instante t, cuando se toman intervalos de tiempo cada vez más pequeños, sin embargo se evidencia que el planteamiento de conjeturas y argumentos les ayudó a construir conocimiento matemático.

Por otra parte, con esta actividad quedó planteada la imposibilidad de resolver el problema mediante la razón de cambio media, ya que el movimiento no es uniforme. Esto sirvió de motivación para introducir la segunda fase de la secuencia, la de introducción de la noción de derivada, intentando encontrar solución al problema planteado inicialmente. Para esto, desde un punto de vista geométrico, se exploró la relación de la velocidad media con la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función y de la velocidad instantánea con la pendiente de la recta tangente. Se siguieron trabajando las aproximaciones, buscando que descubran la necesidad de realizar el paso al límite para calcular la velocidad instantánea.

Para la solución de la última actividad se observaron algunos aspectos que integraron los trabajos hechos por algunos grupos de estudiantes en cuanto a la recuperación de intuiciones, conjeturas y hallazgos que las actividades anteriores pretendieron desarrollar.

En la primera tarea de la actividad se plantea la idea de intervalos *infinitamente pequeños*, así como la introducción de la notación de tiende a un número (→...). Uno de los objetivos de la actividad era que los estudiantes explorarán qué sucede con las velocidades medias muy cerca del punto en cuestión, acercándose al mismo tanto por derecha como por izquierda. Este proceso refiere de manera intuitiva a los procesos infinitos y se esperaba que los estudiantes dieran cuenta de la relación con lo que habían estudiado sobre límite.

Al hacer los cálculos, los estudiantes observaron que mientras se toman aproximaciones por cada lado de $t = 2$, los valores van cada vez aproximándose a un mismo valor, como se puede ver en la imagen. (VER ANEXO L)

A partir de este trabajo presentan algunas conclusiones sobre la velocidad en $t = 2$, donde se rescatan afirmaciones en términos conjeturales que argumentarían de inmediato y posteriormente en la socialización de la actividad.

> *E1: Bueno pues se podría decir que la velocidad se aproxima muchísimo a 12*

E3: si yo creo que por lado y lado da 30 si cogemos valores más cercanos

E2: si da 12

En el inciso siguiente se trabajaron las relaciones de las razones de cambio con las pendientes de las rectas secante y tangente a la curva. Con ayuda del docente, se les solicitó hacer una representación gráfica de la función y el trazo de las rectas que pasan por los puntos: $(1.9\ ,2), (1.99\ ,2), \ldots, (2\ ,2.01)$, para posteriormente preguntarles ¿qué pasa con la recta y la función?, ¿es posible que se vuelvan una sola en algún punto?, si es así, ¿qué significado tiene esto? Este contexto geométrico (el trazado de las rectas), ayudó a la visualización del proceso de encontrar la recta tangente mediante aproximaciones sucesivas de rectas secantes, y relacionarlo con la velocidad instantánea, lo que dio mayor veracidad a la conjetura a) planteada en la actividad anterior. De nuevo, la intervención del profesor fue clave para lograr este objetivo. Parte del proceso se evidencia en la imagen (VER ANEXO M) y conversación:

P: si pudieran seguir el proceso, ¿la seguiría cortando (la recta) a la función en dos puntos?

E1: uy pues hagámosla (las dibujan) pues que ya solo la corta en un punto, pero, ¿no o sí?

E3: es que así sea muy pequeñito la va a seguir cortando en dos puntos, lo que pasa es que no podemos dibujarla

E1: (lee), ¿es posible que se vuelva una sola en algún punto?, yo creo que no por lo que usted dice (estudiante 3)

E2: yo diría que sí pero cuando pasa solo por ese punto (señala el punto $(2, 8)$*)…*

P: pero, ¿ahí corta en un solo punto?

E2 y E3: si

E1: pero es que ahí ya no hay diferencia o sea son iguales

P: por eso, entonces son iguales los puntos, ¿cuándo qué?, o sea, ¿cuándo la diferencia entre los Δt *es qué?*

E2: cero…

E1: ¡Ah claro! es que va disminuyendo hasta que se vuelve cero (con los dedos haciendo señales que la longitud del intervalo de tiempo se hace más pequeña), pero según la pregunta, ¿qué significado tiene esto?...

E3: …la velocidad

P: listo pero recuerden que ya no es media sino en un punto específico

E1: a pues que esa sería la velocidad exacta en ese punto

E2: o sea que la velocidad sería aproximadamente 12

P: si, la velocidad más aproximada para primer segundo es 12

En la resolución presentada en la imagen, se ve cómo los alumnos utilizaron recursos geométricos para estimar la pendiente. El acercamiento visual propuesto favoreció que algunos grupos descubrieran que en la gráfica de la función, cuándo al tomar intervalos de menor longitud cuya medida tienda a ser cero, la recta secante tiende a volverse tangente a la función, sin embargo esto quedaría claro para todos los grupos hasta el momento de la socialización. Sin embargo, las observaciones de los escritos de los tres grupos, reflejan comprensión en cuánto a que al tomar intervalos de tiempo infinitamente pequeños, el valor que se obtiene (al que tiende) es la velocidad instantánea en el punto particular. A partir de la tabla, los grupos 1 y 2 lograron conjeturar sobre la velocidad de la partícula en el instante y el comportamiento en el caso de que los intervalos sean infinitamente pequeños. Este proceso de resolución permitió que, en conjunto con las indicaciones del profesor, reconocieran la necesidad de realizar el paso al límite para determinar la razón de cambio instantánea

La última tarea de la actividad tenía como objetivo propiciar que los estudiantes escribieran de una manera más formal, en términos matemáticos, la anterior situación; haciendo uso de las gráficas, tablas e interpretaciones hechas de la actividad anterior. Por lo que el profesor solicitó que escriban de otra manera los resultados encontrados en el punto interior, buscando que encuentren la relación con la noción de límite. Los grupos 1 y 2 lograron escribir una aproximación más formal a la noción de límite, el primero con usando notación simbólica y el segundo un lenguaje natural. En la imagen se observa lo que escribieron los dos grupos y en el fragmento de conversación el proceso del grupo 1 para encontrar esta relación. (VER ANEXO N).

En la imagen que muestra la escritura del grupo 1 (segunda imagen) se muestra como hacen el paso a una escritura más formal, recordando que la frase se acerca se simboliza con el símbolo →

> *P: Bueno, ya sabiendo lo que pasa, intenten escribir eso de una manera matemática (refiriéndose a escritura formal o una escritura más rigurosa), recuerden los conceptos que hemos trabajado este año en el curso…*
>
> *E1: bueno yo diría que cuando no acercamos más a aquí (señalando $t = 2$ en la gráfica) la velocidad es más exacta que es 12*
>
> *E2: si, acordémonos que el profe dijo que cuando la diferencia fuera cero la recta sería tangente y no secante*
>
> *E1: y eso, ¿qué tiene que ver?*
>
> *E3: pues que cuando esto es cero (señalando con los dedos el intervalo y haciendo señales que los cierra) la velocidad se aproxima a 12*

E1: aaa claro, listo escribamos eso

Este proceso les permitió a los estudiantes acercarse demasiado a la noción de límite, sin embargo, se hicieron apreciaciones en la instancia de la socialización que permitieron relacionar lo escrito por cada uno de los grupos, las conclusiones de cada conjetura planteada y la solución de cada actividad, así como socializar la relación entre la velocidad con la pendiente de la recta tangente y la idea de pendiente variable, importante para una concepción dinámica de la tangente y la formación de la noción de dirección de una curva. Las inclinaciones de la recta tangente en los diferentes puntos de una curva dan idea de cuán rápido cambia eso que cambia. Durante la instancia de socialización, donde se abordaron todas las actividades se intentó que los estudiantes relacionaran lo trabajado en otras actividades, haciendo un paralelo entre distintas representaciones de un mismo movimiento o de movimientos diferentes.

Luego recordando lo que habían trabajado en el curso de matemáticas y recogiendo el trabajo realizado por cada grupo en la última actividad, se escribió de manera formal la expresión:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(2+\Delta t) - s(2)}{\Delta t}$$

La resolución de este límite la llevó a cabo el profesor, luego que los estudiantes le solicitaran probar que era igual a 12. Sin embargo en la resolución del límite se encontraron algunas preguntas que iban más hacia la parte algebraica y no al significado del límite, por lo que el profesor indicó que hay una manera más corta para hallar la velocidad instantánea pero no era el sentido de la actividad.

Posterior a esto, y cómo último paso de la secuencia, se hizo la presentación de la derivada de una función en un punto. De esta manera no resultó una noción tan compleja, sino que se intentó su construcción a partir de las interpretaciones de los significados físicos y geométricos, de cada uno de los términos del límite planteado, con relación a las actividades propuestas en las actividades.

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

En primera instancia en cuanto a las nociones de variación, se puede afirmar que las actividades implementadas posibilitaron el trabajo de diferentes aspectos como fueron: trabajar funciones en escenarios de fenómenos físicos de cambio como relaciones entre magnitudes, analizar y cuantificar los comportamientos de cada cambio tanto en la variable independiente (tiempo) y la variable dependiente (distancia), así como del cociente entre las cantidades de estas magnitudes, la interpretación de la razón de cambio como la comparación de los cambios de una variable con relación a otra, la relación entre la pendiente de la recta y las razón de cambio. Por otra parte, surgió la necesidad de cuantificar los cambios en un instante, por lo que en la finalización de la secuencia se hizo una introducción a la noción de derivada como pendiente de recta tangente a la función en un punto, que no surgió de manera forzada sino acorde al proceso que se venía trabajando desde la primera actividad.

Por otra parte, durante toda la actividad matemática desde la discusión grupal hasta la instancia de la institucionalización, los estudiantes hicieron uso de algunos procedimientos relacionados con el desarrollo de pensamiento variacional, como son: ideas previas, desarrollo de estrategias para abordar las situaciones, uso de lenguaje propio de este pensamiento, aspectos relacionados directamente con el establecimiento de conjeturas, argumentos y explicaciones.

Como afirman Imaz & Moreno (2014) la geometría analítica creada por Descates e instrumento de visualización por excelencia, y que formó parte fundamental para el diseño de la secuencia por parte de sus creadoras, permitió que los estudiantes obtuvieran información importante para generar argumentos y explicaciones que les permitieran reforzar sus ideas y dar respuesta a algunas conjeturas por medio de las gráficas presentadas en las actividades, que representaban distintos tipos de movimientos. En los trabajos escritos presentados por cada grupo se evidencia, en diferente medida para cada grupo, que hubo manejo de las distintas representaciones y que esto les permitió dar un paso para hacer su propia actividad matemática, sin embargo no hubiese sido posible de no ser por las discusiones generadas en cada grupo con relación a las diferentes interpretaciones que se daban de cada representación de las funciones.

La secuencia cumplió el objetivo que era introducir la noción de derivada, a partir del estudio de fenómenos de variación y cambio. Sin embargo se debe aclara que se presentaron dificultades que se relacionaron con el manejo conceptual y algorítmico de conceptos previos de cinemática, así como de cálculo mismo, que en ocasiones tuvieron que ser reforzadas por el docente para avanzar en los objetivos de cada actividad. Por otro lado, luego del trabajo hecho queda un sentimiento que la secuencia pudo haber sido mejorada tecnológicamente y desarrollada en más sesiones para que permitiera mejores resultados de análisis y de aprendizaje para los estudiantes. Por lo tanto quedan abiertas preguntas como: ¿Qué tipo de mejoras tecnológicas necesita la secuencia para optimizar su funcionamiento?, ¿qué acciones se deben tomar para mejorar el nivel de comprensión de los conceptos previos que se necesitan para el desarrollo de los objetivos dela secuencia?

Como último, es válido resaltar el valor que tuvo esta actividad para los estudiantes y el docente en términos de motivación para conseguir los resultados, ya que en medio de las discusiones, hubo momentos de reflexión y emergieron ideas con el fin de construir conocimiento matemático.

Referencias bibliográficas

- Balacheff N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Editorial Una empresa docente
- Camargo L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria.* Valencia, Universitat de Valencia
- CANTORAL, R., MOLINA, J.; SÁNCHEZ, M. *Socioepistemología de la Predicción.* In: LEZAMA, J.; SÁNCHEZ, M. y MOLINA, J. (Ed.). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2005. p. 463-468.
- CANTORAL, R.; MONTIEL, G. *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. México: Pearson Education, 2001.
- Duval R. (1999). *Algunas cuestiones relativas a la argumentación*. La lettre de la Preuve, recuperado de: http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html
- Goizueta M. (2011). *Interpretaciones sobre la argumentación en el aula de matemáticas de secundaria por parte de un grupo de profesores.*Barcelona, Universitat Autònoma de Barcelona.
- Imaz C., Moreno L., (2014). Cálculo, su evolución y enseñanza. México D.F., México:Trillas.
- MEN (1998), serie lineamientos curriculares.
- Toulmin (2009). *Los usos de la argumentación,* Barcelona, España, Editoriales Península.
- Vrancken, S., & Engler A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. Bolema, Rio Claro (SP), volumen 28 (número 48), 449-468.

ANEXO A

ACTIVIDAD 1

Momentos	Cálculo	Argumentación
Los estudiantes abordan la actividad, discuten sobre la relación entre la gráfica y a relación con el movimiento del objeto que la genera, y responde a la pregunta: Basados en la gráfica anterior,	Se evidencia el manejo de la ecuación para hallar la velocidad media.	
	Hay una discusión en cuanto al análisis de la gráfica y el movimiento del automóvil.	En este momento un estudiante no establece la relación entre los movimientos del automóvil y las paradas que hace éste, a lo que otro estudiante le explica indicándole cómo fue el trayecto desde el punto de partida hasta el de llegada, señalándole los momentos donde recorre distancia y donde el recorrido es cero.
	Aunque para los tres estudiantes fue claro el final el movimiento, no hicieron los cálculos correctos de algunas velocidades medias, dado que estimaron algunas medidas y no tuvieron en cuenta los datos que estaban en la tabla ubicada al lado de la gráfica.	
	Para responder a la pregunta: ¿Cuánto marca el velocímetro del auto cuando transcurre un minuto de haber salido? Se presenta una solución utilizando proporcionalidad directa para hallar la distancia recorrida por el automóvil hasta ese	El profesor hace la pregunta: *bueno paren ahí, yo les hago una pregunta, y si yo quiero saber cuál es la velocidad a los 0.5, 1,5, 1,8 minutos de haber salido, ¿sirve el mismo procedimiento?* Para responder a esta pregunta, los estudiantes, responden que sí argumentando que hay una relación de

¿cómo puede hallar la distancia total recorrida por el coche, el tiempo que duró el viaje y la velocidad media del auto a lo largo del recorrido?	instante de tiempo, posteriormente se les pregunta si este procedimiento se puede utilizar para hallar la distancia en 0.5, 1.5 y 1.8 segundos, y si la velocidad media en esos cuatro momentos (contando hasta el minuto 1) es la misma, a lo que responden que si es posible debido a que se presenta una proporcionalidad directa, pero que solo es posible hasta donde la gráfica se comporta del mismo modo.	proporcionalidad directa y lo sustentan hallando las distancias que les faltan y calculando las velocidades donde obtienen un constante de proporcionalidad, por lo que concluyen que la velocidad es constante. Cuando el profesor pregunta si este procedimiento se puede utilizar en todo el recorrido, los estudiantes responden que solamente para los primeros tres minutos y como sustento de esta razón, se apoyan en la gráfica dada dado que luego de los tres minutos iniciales, la gráfica se vuelve constante y posteriormente vuelve a cambiar. Adicionalmente comparan con la velocidad media que ya habían hallado anteriormente en otro intervalo, diciendo que la velocidad puede variar de acuerdo a si se recorre mayor o menor distancia.

ANEXO B

ACTIVIDAD 2

Momentos	Cálculo	Argumentación
Se presenta una actividad a los estudiantes donde deben diligenciar una tabla que tiene separadas en varias columnas, las diferencias entre las distancias y las diferencias de los tiempos, así como una casilla donde deben poner la velocidad media en estos intervalos de tiempo, para un movimiento modelado por una función lineal.	Se ve un primer análisis sobre las expresiones que se presentan que son: $t_1 \leq t \leq t_2$, $\Delta t = t_{2-}t_1$, $\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$, y $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_{2-}t_1}$. Se discute sobre el significado de cada una haciendo énfasis en que representan el cambio enrte magnitudes.	Luego de hacer la interpretación de las expresiones, afirman que mientras el tiempo aumenta de uno en uno la distancia aumenta de tres en tres por lo que el profesor hace la siguiente pregunta: *se podría decir que ¿al aumentar un segundo aumenta tres metros desde el primer instante de tiempo hasta el último?* Las respuestas son afirmativas poniendo como garante los resultados de la tabla y que las magnitudes son directamente proporcionales (haciendo una comparación con el ejercicio de la actividad anterior)
	Encuentran una regularidad y es que al aumentar una unidad de tiempo se aumentan tres unidades en distancia, por lo que la velocidades constante.	Para la pregunta ¿Qué puede decir a cerca de los valores de $\Delta s/\Delta t$ para cada uno de los intervalos de tiempo?, se les sugiere proponer un argumento por el cual se da esta relación. A lo que responden: • la velocidad constante porque al aumentar de a un segundo en el

		tiempo, se aumenta tres metros la distancia • seguiría siendo constante así aumente de a cuatro la distancia, pero no lo sería si los aumentos en la distancia no tuvieran una diferencia igual, dado que los cocientes serían diferentes. Una estudiante propone una conjetura y es que si esto sería posible si la expresión cambiara (posiblemente refiriéndose a si la función no fuera lineal)
Con base en el ejercicio anterior de la tabla, se da la representación gráfica del movimiento anterior y se pide que hagan la interpretación de los datos obtenidos en la tabla	Logran hacer la interpretación geométrica de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, dibujando triángulos rectángulos semejantes haciendo la relación con la pendiente de una recta.	Mediante el trazado de segmentos, dibujan los triángulos rectángulos que representan la distancia y el tiempo recorridos, señalando que al haber un aumento de una unidad en el tiempo hay un aumento de tres metros de distancia y esto es a lo que se llama pendiente, a lo cual el profesor hace la siguiente pregunta: *…o sea que la pendiente es ¿qué cosa?* Y de inmediato un estudiante responde que es la velocidad.

ANEXO C

Actividad 3

Momentos (Descripción general)	Descripción detallada de los asuntos de interés (variación)	Argumentación
Los estudiantes solucionan la pregunta número uno de la actividad, que es: ¿qué puede decir con respecto a la velocidad de la piedra cada intervalo de segundo sugerido en la tabla?, ¿cómo es la velocidad de la piedra en todo su trayecto? Se presentan algunas discusiones sobre antes de contestar las preguntas que van hacia cómo calcular la velocidad.	Se evidencian nociones de variación, en cuanto a que identifican que la razón de cambio no es constante en los intervalos de tiempo. Hacen comparación de los tipos de movimientos modelados por una función lineal y otra cuadrática.	Se evidencia un primer momento de discusión cuando un estudiante pregunta cómo hallar la velocidad media, a los que sus compañeros le responden que con la información de la tabla es posible hacerlo y siguiendo las indicaciones del profesor, sin embargo la estudiante no se convence y hace los cálculos: *Estudiante 1: Pues la velocidad es igual que en la anterior (refiriéndose a una actividad anterior donde se trabajó con movimientos de tipo lineal), distancia sobre tiempo…* *Estudiante 2: Si pero ahí qué, ¿es lo mismo?, no creo* *Estudiante 1: Que sí, mire la tabla ahí están las fórmulas* *Estudiante 3: claro, es la misma vaina, lo que decía el profe, cambios en la distancia y el tiempo* *Estudiante 2: mmm (se queda pensando por un momento), yo lo que digo es que no sé si dé igual, bueno hagamos las operaciones (toma las hojas y el lápiz)* Posteriormente al hacer los cálculos se convence que la velocidad media se calcula igual, pero al ver en los resultados que no son iguales las velocidades, concluye con sus compañeros que no es posible aplicar la expresión

		de la velocidad media en este caso (función cuadrática) porque la velocidad no es constante.
	Se evidencia la interpretación del movimiento de la piedra en relación con su gráfica.	Continuo a la frase anterior el estudiante dos se pregunta por qué la velocidad es negativa en los últimos dos intervalos, a lo que sus compañeros le responden con ideas y explicaciones sobre el movimiento de la piedra, que la convencen que son correctos los resultados de la calculadora. Se evidencia la estructura de un argumento, dado que hay afirmación y garante, partiendo que los datos iniciales son los resultados obtenidos en la calculadora y la gráfica de la función *Estudiante 2: Pero lo que no me cuadra es que da negativo* *Estudiante 1: A pues fácil, acuérdese de lo que vimos en física, que cuando es negativa es porque se devuelve o va para atrás* *Estudiante 2: Mmm ¿cómo así?, ¿la piedra?* *Estudiante 1: Si mire, ahí dice que la tiran para arriba, pues lógico que después baja, ¿no?* *Estudiante 2: Mmm si, pues cuando cae es porque eso que da negativo.*

1. Los estudiantes solucionan la pregunta: ¿cómo puede estimar la velocidad de la piedra a los tres segundos de iniciar el movimiento?, ¿y este dato para qué nos sirve?		
2. Si utiliza la expresión $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$ para calcular la velocidad media en el intervalo $[0,4]$, ¿qué significa el resultado obtenido en esta cuenta?, ¿es coherente con el movimiento de la piedra?	Identifican que no es posible utilizar la expresión de la velocidad media en un movimiento de tipo cuadrático, dado que no es coherente el resultado numérico con el movimiento del objeto	Al responder la pregunta: *Si utiliza la expresión* $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$ *para calcular la velocidad media en el intervalo* $[0,4]$, *¿qué significa el resultado obtenido en esta cuenta?, ¿es coherente con el movimiento de la piedra?,* se presenta un argumento dado que al tener los resultados arrojados luego de calcular la velocidad y ver que es cero salen las siguientes afirmaciones: • Eso quiere decir que no ando nada • No lo que pasa es que volvió al lugar de donde se lanzó, una piedra se tira hacia arriba y cae. • Es por eso entonces que da cero la distancia El profesor reitera si los resultados son coherentes con el movimiento del piedra a lo que responden conjuntamente con un NO. Adicionalmente un estudiante dice que no tiene sentido porque quería decir que no recorrió ninguna distancia la piedra por lo que la expresión no sirve. Preguntan

		entonces cómo se hace para calcular la velocidad en este caso.
3. ¿Qué diferencias encuentra en el movimiento del automóvil expuesto en el primer ejercicio y el movimiento de la piedra?	Encuentran la relación que cuando la razón de cambio no es constante quiere decir, respecto al movimiento del objeto, que en intervalos de tiempo iguales recorre menos distancia mientras llega a la altura máxima la piedra.	Al responder la pregunta: *¿Qué diferencias encuentra en el movimiento del automóvil expuesto en el primer ejercicio y el movimiento de la piedra?,* se presenta un argumento: Los resultados en el primer movimiento son constantes, acá no Y no son constantes porque al lanzar la piedra llega un momento (antes de llegar a su máxima altura) que empieza a recorrer menos distancia, para y luego se devuelve.

ANEXO D

Actividad 4

Momentos	Situaciones de variación	Argumentos
Los estudiantes abordan la situación que trata de la caída libre de una bola, comparando el tipo de funciones que modelan las situaciones de movimiento, buscando cómo se calcula la velocidad.	Se evidencia un análisis del movimiento de la bola a partir de la gráfica, haciendo triángulos rectángulos de igual base (unidad de tiempo) y diferentes alturas (distancias recorridas en estos momentos). Donde concluyen que en intervalos de tiempo iguales recorre cada vez mayor distancia, hecho que se diferencia de movimientos lineales como los de las primeras dos actividades. A partir de este análisis comparativo, deducen que las velocidades no van a ser iguales dado que las divisiones entre las cantidades arrojarán diferentes resultados.	Coinciden en que las funciones son diferentes, pero surge la pregunta para un estudiante y es: ¿cómo se halla la velocidad en un instante determinado?, para abordar esta pregunta acuden al profesor quién les contesta: …*yo diría que empezaran con analizar el movimiento de la piedra según la gráfica y ya miramos, por ejemplo si se fijan en el eje x (señala) va de a 0.2 en 0.2, podrían mirar si la distancia que recorre es la misma o no, podrían utilizar la misma estrategia de dibujar los triangulitos* Se puede ver que la intención del profesor era que llegaran a calcular velocidades medias en intervalos de tiempo iguales, para que comprobaran que no es posible utilizar la ecuación de la velocidad

		media para un intervalo, cuando el movimiento está modelado por una función cuadrática. Los estudiantes realizan los cálculos correspondientes para encontrar las velocidades medias y concluyen que las velocidades nunca serán iguales porque las distancias recorridas cada vez son mayores.
Abordan el punto siguiente de la actividad donde se propone hallar la velocidad media entre dos puntos A y B sobre la gráfica de la función de movimiento e interpretar estos resultados y posteriormente se pregunta: ¿qué pasa con la velocidad cuando se toman intervalos de tempo más pequeños?	Se evidencia que los estudiantes logran comprender (con ayuda del profesor) que las velocidades medias en un instante de tiempo son más aproximadas cuando se toman intervalos de tiempo cada vez más pequeños	Para responder la pregunta: *Aproximadamente la velocidad de la bola en el instante t=1 segundo es de 25 cm/seg, ¿Cómo puede llegar a validar o refutar este enunciado?* Uno de los estudiantes calcula la velocidad media en el intervalo $[0,1]$, sin embargo no convence a sus compañeros y uno de ellos otro refuta su resultado: E2: seguro, yo no creo que se pueda hacer eso tan olímpico E3: yo tampoco además dice en el instante t igual a 1 no hasta el instante 1. A lo que el estudiante 1 acepta diciendo que se equivocó.

		Sin embargo aún persiste la duda sobre cómo calcular la velocidad en el instante $t = 1$, por lo que pasan al siguiente punto
		A continuación se presentan gráficas, representan el movimiento de la bola del punto anterior y la pendiente de una recta secante que pasa por dos puntos A, B de gráfica de la función. Se solicita halar la velocidad media entre los puntos A, B en cada gráfica, y responder a las preguntas ¿qué interpretación le da a estos resultados?, ¿qué pasa con la velocidad de la bola si se toman intervalos de tiempo cada vez más pequeños? Para la primera pregunta, solicitan ayuda del profesor porque no comprenden claramente lo que se debe hacer. A esto el profesor les responde con una frase clave:

		…ahí se les presentan 5 gráficas donde se deja un punto fijo que es A= (1, 15) y se desliza el otro B, empezando desde (2, 60) hasta (1.2, 21.6) ese es un procedimiento para calcular la velocidad instantánea o sea en el preciso instante cuando el tiempo es 1… Sin embargo en la afirmación del profesor no dice que los puntos lleguen a coincidir o que la distancia se vuelva cero, pero la palabra deslizar parece que da a entender lo que se pretende en la actividad. Esto se evidencia cuando uno de los estudiantes responde: *o sea que ese punto B puede llegar a estar muy cerca de A* A lo que el profesor contesta nuevamente que la idea es que así sea, dado que la velocidad será más precisa en el momento que se quiere. Otro estudiante entiende que en la última gráfica (donde los puntos son más cercanos) La velocidad es más exacta.

		Sin embargo el profesor dice que aún asi la velocidad no es exactamente la que se está buscando, que sería mucho mejor el resultado si el punto se pudiera acercar más A lo que un estudiante responde: ¡como si se le pusiera lupa! Hasta aquí solo se presentan algunas conjeturas, por lo que el profesor les solicita probarlas y uno de los estudiantes comprende que probar lo que se está afirmando consiste en calcular las velocidades.

Con relación al mismo movimiento, se les pregunta qué pasa con la velocidad cuando se toman intervalos de tiempo cada vez más pequeños, la relación entre estas velocidades resultantes y cómo se podría hallar la velocidad en un instante determinado	Para los estudiantes, en la medida en que el intervalo va disminuyendo de longitud, la velocidad es más próxima a un punto y es más exacta, sin embargo nunca va a ser exacta.	Cuando empiezan a calcular las velocidades encuentran una regularidad y es que a medida que el intervalo de tiempo se va haciendo más pequeño la velocidad va disminuyendo con una diferencia de tres. Por lo que uno de ellos dice que esto se va a seguir cumpliendo. Sus compañeros le responden que no se cumple porque solo queda un instante de tiempo. Con sorpresa un estudiante propone calcular la velocidad en un valor que no se sugería que era en 1.1 segundos y encuentra una velocidad más aproximada (31.5 cm/seg) Por lo que le dice a su compañero que no disminuyó 3 unidades la velocidad con respecto al anterior, lo que ignora es que la longitud del intervalo fue modificada. Lo que es claro es que comprendieron que igualmente disminuyo la velocidad y que ésta es más exacta, para el instante $t = 1$
	Coinciden en que los puntos A y B pueden coincidir en algún momento	A partir de este trabajo realizado por los estudiantes, el profesor pregunta: *¿se podrían tomar valores más*

		cercanos a 1? A parti de acá empieza un proceso de argumentación que comienza cuando un estudiante responde: *Claro, como 1. 0 algo, y seguiría siendo más exacto todavía* A lo que el profesor responde diciendo que eso es precisamente lo que deben hacer en el siguiente apartado donde se toman intervalos cada vez más pequeños de tiempo alrededor de $t = 1$, por ejemplo $[0.8\,, 1]$, $[0.9\,, 1]$, $[0.99\,, 1]$, $[0.999\,, 1]$ y se representan en una tabla de tiempo, distancia y velocidad; y se les solicita responder las siguientes preguntas: ¿qué sucede con la velocidad cuando la diferencia de tiempo en el intervalo es cada vez más pequeña?, ¿Cómo se podría hallar la velocidad aproximada de la bola en el punto A?, ¿Qué relación encuentra entre las velocidades de cada intervalo? Los estudiantes se plantean hacer los cálculos de las velocidades y

		posteriormente responder la primera pregunta ¿qué sucede con la velocidad cuando la diferencia de tiempo en el intervalo es cada vez más pequeña? Se presentan una conversación buscando responder la Pregunta: *E1: … la velocidad va siendo como más precisa, ¿no? Lo que decía el profe* *E2: y se va acercando cada vez más a 30* *E3: si mire que hice el de 0.9999 y da 29.9985* *E1: o sea que si le ponemos otros nueves nos va a dar 30* *E3: nos va a dar 29, 9999, si 30.* Para la pregunta ¿Cómo se podría hallar la velocidad aproximada de la bola en el punto A? un estudiante responde: E1: *tomando un numero 0.9999999 con artos nueves, ¿no profe?* A lo que el profesor responde: *Claro sería una buena opción, pero, ¿sería exacta?*

		El estudiante responde: *pues lo que usted decía, no, nos vamos a aproximar pero no va a ser exacto.* Para la pregunta: *¿Qué relación encuentra entre las velocidades de cada intervalo?* Se extrae este fragmento donde se evidencia que los estudiantes comprenden que los puntos pueden llegar a estar muy cercanos. Estudiante 3: que cada vez son más aproximadas al 30 P: listo y qué relación tiene eso con la gráfica que está ahí: Estudiante 1: pues es que si acercamos más, ps casi que nos van a dar el mismo punto es como P: en algún momento pueden llegar a coincidir los dos puntos A y B? Estudiante 3: si claro cuando sea 1. 999999999999 que esté casi sea 2 Estudiante 2: si ahí coinciden

ANEXO E

Actividad 5

Momentos	Situaciones de variación	Argumentación
Se presenta una situación de movimiento de una partícula modelada por una función cúbica. En una primera tarea, se solicita que completen una tabla que sugiere unos intervalos de igual longitud a izquierda y derecha del instante t=2, donde deben completar las diferencias para Δt y Δs, así como el cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Posteriormente se hace una primera pregunta que es: Según el acercamiento realizado en la tabla, ¿Qué puede decir sobre la velocidad de la partícula en t=2 cuando Δt es *infinitamente* pequeño?	Exploran lo que sucede con las velocidades medias muy cerca del punto en cuestión, acercándose al mismo tanto por derecha como por izquierda, mediante el planteamiento de intervalos *infinitamente pequeños*	Los estudiantes ven que mientras se toman aproximaciones por cada lado de 2, los valores van cada vez aproximándose a un mismo valor *E1: Bueno pues se podría decir que la velocidad se aproxima muchísimo a 12* *E3: si yo creo que por lado y lado da 30 si cogemos valores más cercanos* *E2: si da 12*
Se les solicita hacer una representación gráfica de la función y que tracen las rectas que pasan por los puntos:	Interpretación gráfica de cuándo al tomar intervalos de menor longitud cuya medida tienda a ser cero, la recta secante tiende a volverse	El profesor les hace una serie de preguntas buscando que los estudiantes lleguen a la conclusión que la recta secante se volverá

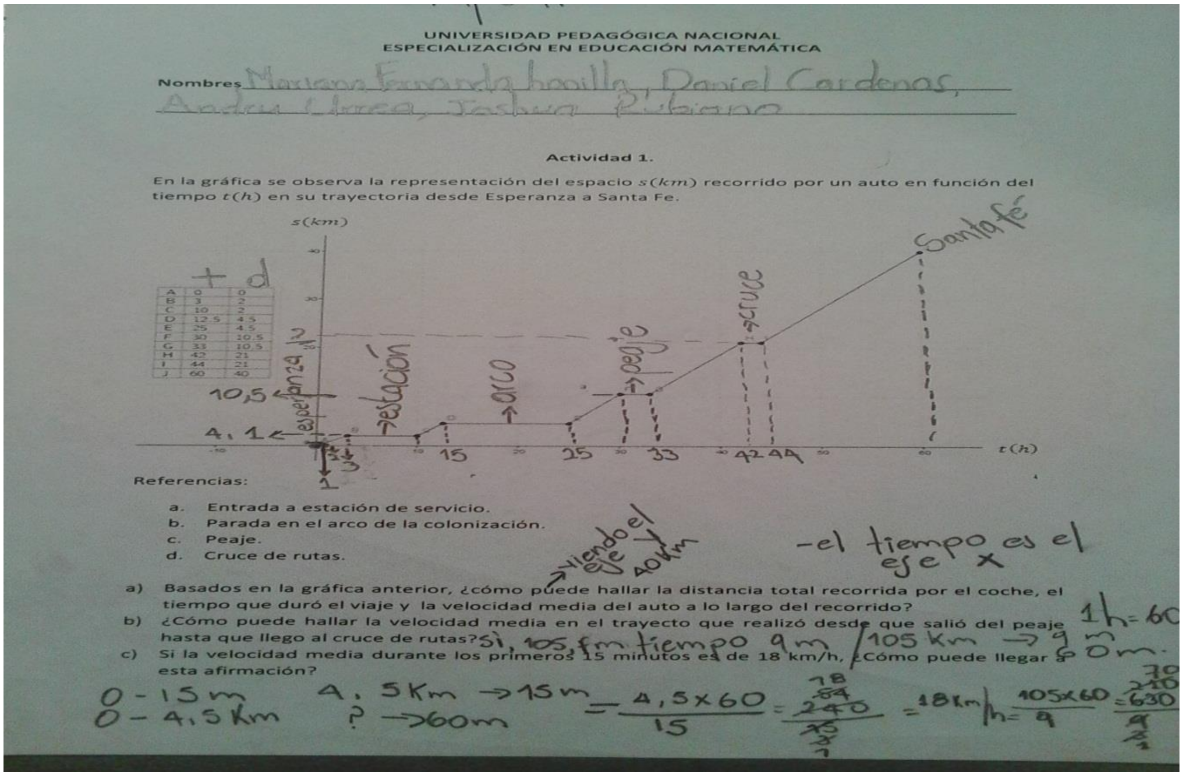
$(1.9\,,2),(1.99\,,2),\ldots,(2\,,2.01)$, para posteriormente preguntarles ¿qué pasa con la recta y la función?, ¿es posible que se vuelvan una sola en algún punto?, si es así, ¿qué significado tiene esto?	tangente a la función. El valor que se obtiene al tomar intervalos de tiempo infinitamente pequeños es la velocidad instantánea en el punto particular.	tangente a la función en el punto t=2. *P: si pudieran seguir el proceso, ¿la seguiría cortando (la recta) a la función en dos puntos?* *E1: …hagámosla (las dibujan) pues que ya solo la corta en un punto, pero no, ¿o si?* *E3: es que así sea muy pequeñito la va a seguir cortando en dos puntos, lo que pasa es que no podemos dibujarla…* Posterior a esto uno de los estudiante lee de nuevo el enunciado de la pregunta y lanza una afirmación que otro de sus compañeros refuta E1: *¿es posible que se vuelva una sola en algún punto?, yo creo que no por lo que usted dice (E3)* E2: yo diría que sí, pero cuando pasa solo por ese punto (señala el punto $(2,8)$) En este momento el profesor hace una afirmación de validación para la respuesta de la estudiante, lo que genera que los estudiantes

		comprendan que cuando la diferencia entre los valores extremos del intervalo de tiempo es cero la recta se vuelve tangente *P: si muy bien ahí solo la corta en ese punto* *E1: pero es que ahí los puntos son el mismo y eso pues ya es otra cosa* *P: pero, ¿ahí corta en un solo punto?* *E 2 y E3: si* *E1: pero es que hay ya no hay diferencia o sea son iguales.* *P: por eso, entonces, ¿son iguales los puntos cuando qué?* *E3: cuando no se diferencian los puntos* *P: ¿la diferencia de qué?* *E2: cuando la diferencia es cero* *E3: si cuando se vuelven unos solo.* El profesor pregunta: *¿qué significado tiene esto?* (refiriéndose a que la recta se vuelva tangente a la función en el punto $(2,8)$)) E3: la velocidad P: listo pero recuerden que ya no es media sino en un punto específico E1: a pues que esa sería la

		velocidad exacta en ese punto (señalando el punto $(2,8)$) Estudiante 2: o sea que la velocidad sería aproximadamente 12 P: si, la velocidad más aproximada para el segundo dos es 12, eso se conoce como velocidad instantánea, ya no se le llama media porque se refiere a la velocidad en un solo instante no en un intervalo.
El último momento de la actividad es propiciar que los estudiantes escribir de una manera más formal, en términos matemáticos, la anterior situación; haciendo uso de las gráficas, tablas e interpretaciones hechas de la actividad anterior.	Los estudiantes se dan cuenta de la relación con la noción de límite sin embargo no logran escribirlo de una manera formal.	El profesor les solicita que escriban de otra manera los resultados encontrados en el punto interior, buscando que encuentren la relación con la noción de límite. P: Bueno, ya sabiendo lo que pasa, intenten escribir eso de una manera matemática (refiriéndose a escritura formal o una escritura más rigurosa), recuerden los conceptos que hemos trabajado este año en el curso… E1: bueno yo diría que cuando no acercamos más a aquí (señalando t=2 en la gráfica) la velocidad es más exacta que es 12 E2: si, acordémonos que el profe dijo

		que cuando la diferencia fuera cero la recta sería tangente y no secante E1: y eso, ¿qué tiene que ver? E3: pues que cuando esto es cero (señalando con los dedos el intervalo y haciendo señales que los cierra) la velocidad se aproxima a 12 E1: aaa claro, listo escribamos eso

ANEXO F


UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Nombres Mariana Fernanda bonilla, Daniel Cardenas, Andres Ulloa, Joshua Rubiano

Actividad 1.

En la gráfica se observa la representación del espacio $s(km)$ recorrido por un auto en función del tiempo $t(h)$ en su trayectoria desde Esperanza a Santa Fe.

Referencias:

a. Entrada a estación de servicio.
b. Parada en el arco de la colonización.
c. Peaje.
d. Cruce de rutas.

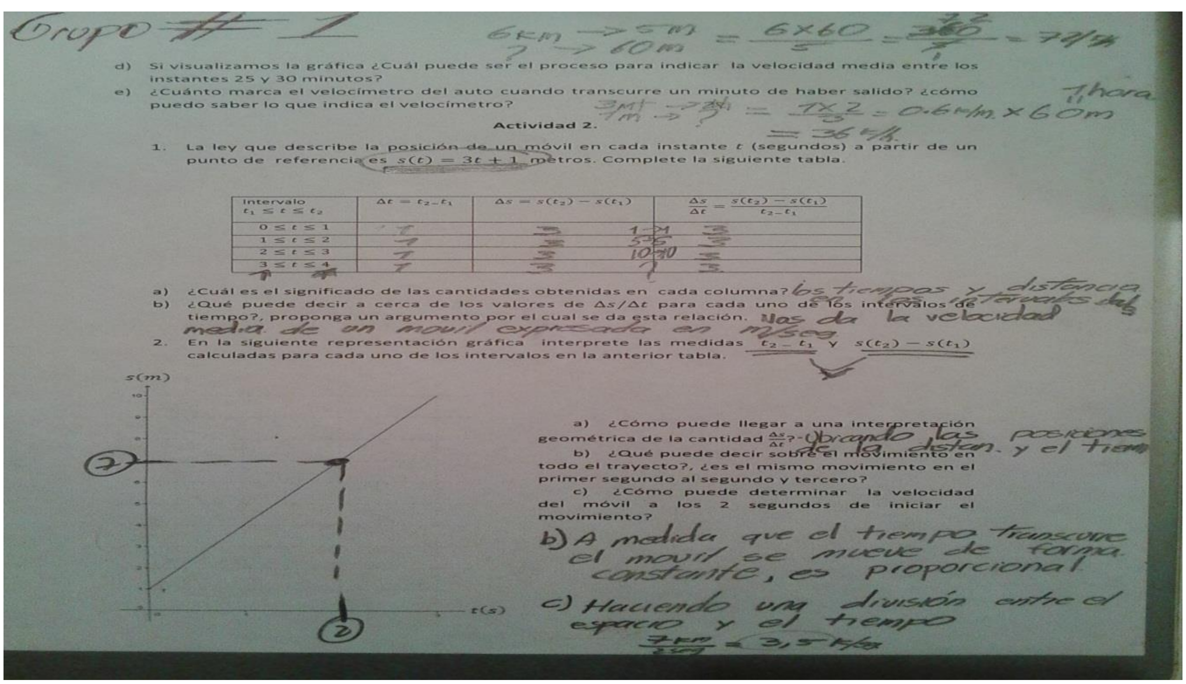
viendo el eje y 40km

-el tiempo es el eje x

a) Basados en la gráfica anterior, ¿cómo puede hallar la distancia total recorrida por el coche, el tiempo que duró el viaje y la velocidad media del auto a lo largo del recorrido?
b) ¿Cómo puede hallar la velocidad media en el trayecto que realizó desde que salió del peaje hasta que llego al cruce de rutas? Si, 105 km tiempo 9m / 105 Km → 9m ; 1h = 60m
c) Si la velocidad media durante los primeros 15 minutos es de 18 km/h, ¿Cómo puede llegar a esta afirmación?

0 - 15m 4,5Km → 15m $= \frac{4,5 \times 60}{15} = \frac{240}{15} = 18$ Km/h $= \frac{105 \times 60}{9} = 630$
0 - 4,5Km ? → 60m

ANEXO G


Grupo # 1 6Km → 5m ? → 60m $= \frac{6 \times 60}{5} = \frac{360}{5} = 72$ k/h

d) Si visualizamos la gráfica ¿Cuál puede ser el proceso para indicar la velocidad media entre los instantes 25 y 30 minutos?
e) ¿Cuánto marca el velocímetro del auto cuando transcurre un minuto de haber salido? ¿cómo puedo saber lo que indica el velocímetro? 3mt → 5m, 1m → ? $= \frac{1 \times 3}{5} = 0.6$ km/m $\times$ 60m = 36 k/h 1 hora

Actividad 2.

1. La ley que describe la posición de un móvil en cada instante t (segundos) a partir de un punto de referencia es $s(t) = 3t + 1$ metros. Complete la siguiente tabla.

Intervalo $t_1 \le t \le t_2$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \le t \le 1$	1	3	3
$1 \le t \le 2$	1	3	3
$2 \le t \le 3$	1	3	3
$3 \le t \le 4$	1	3	3

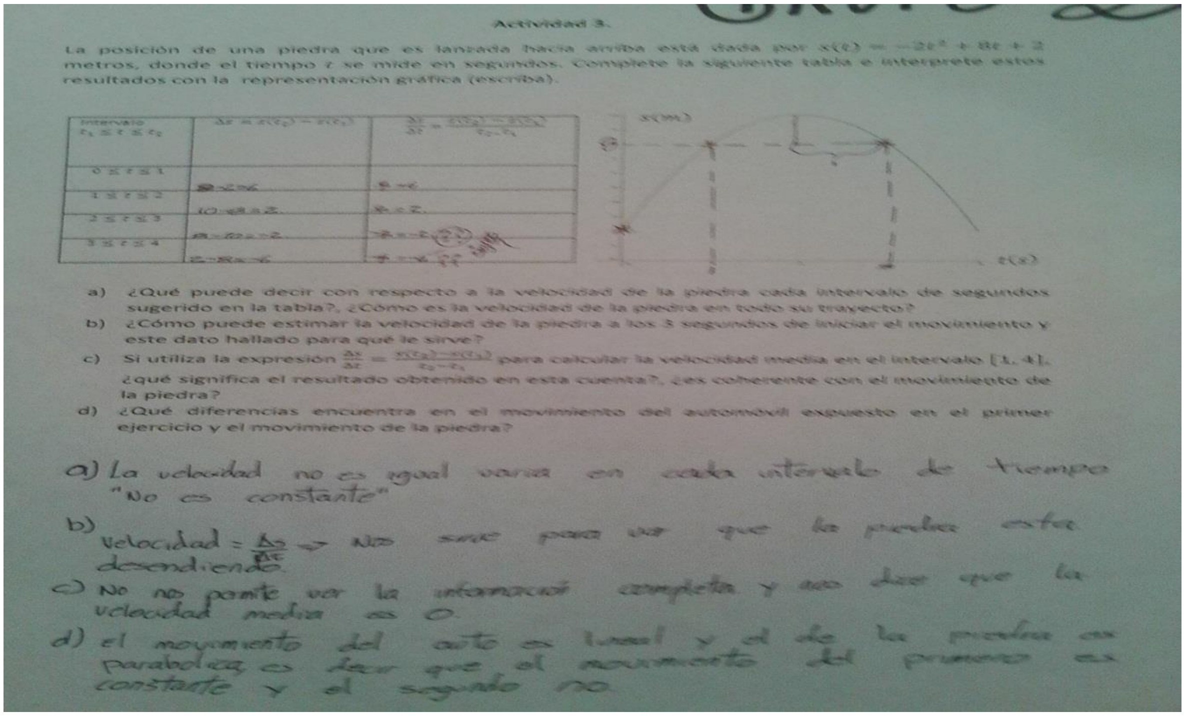
a) ¿Cuál es el significado de las cantidades obtenidas en cada columna? los tiempos y distancia de los intervalos del
b) ¿Qué puede decir a cerca de los valores de $\Delta s/\Delta t$ para cada uno de los intervalos de tiempo?, proponga un argumento por el cual se da esta relación. Nos da la velocidad media de un movil expresada en m/seg

2. En la siguiente representación gráfica interprete las medidas $t_2 - t_1$ y $s(t_2) - s(t_1)$ calculadas para cada uno de los intervalos en la anterior tabla.

a) ¿Cómo puede llegar a una interpretación geométrica de la cantidad $\frac{\Delta s}{\Delta t}$? Ubicando las posiciones de la distan. y el tiempo
b) ¿Qué puede decir sobre el movimiento en todo el trayecto?, ¿es el mismo movimiento en el primer segundo al segundo y tercero?
c) ¿Cómo puede determinar la velocidad del móvil a los 2 segundos de iniciar el movimiento?

b) A medida que el tiempo transcurre el movil se mueve de forma constante, es proporcional.
c) Haciendo una división entre el espacio y el tiempo $\frac{7m}{2s} = 3,5$ m/seg

ANEXO H



GRUPO 2

Actividad 3.

La posición de una piedra que es lanzada hacia arriba está dada por $s(t) = -2t^2 + 8t + 2$ metros, donde el tiempo t se mide en segundos. Complete la siguiente tabla e interprete estos resultados con la representación gráfica (escriba).

Intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \leq t \leq 1$	8-2=6	6
$1 \leq t \leq 2$	10-8=2	2
$2 \leq t \leq 3$	8-10=-2	-2
$3 \leq t \leq 4$	2-8=-6	-6

a) ¿Qué puede decir con respecto a la velocidad de la piedra cada intervalo de segundos sugerido en la tabla?, ¿Cómo es la velocidad de la piedra en todo su trayecto?

b) ¿Cómo puede estimar la velocidad de la piedra a los 3 segundos de iniciar el movimiento y este dato hallado para qué le sirve?

c) Si utiliza la expresión $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ para calcular la velocidad media en el intervalo [1, 4], ¿qué significa el resultado obtenido en esta cuenta?, ¿es coherente con el movimiento de la piedra?

d) ¿Qué diferencias encuentra en el movimiento del automóvil expuesto en el primer ejercicio y el movimiento de la piedra?

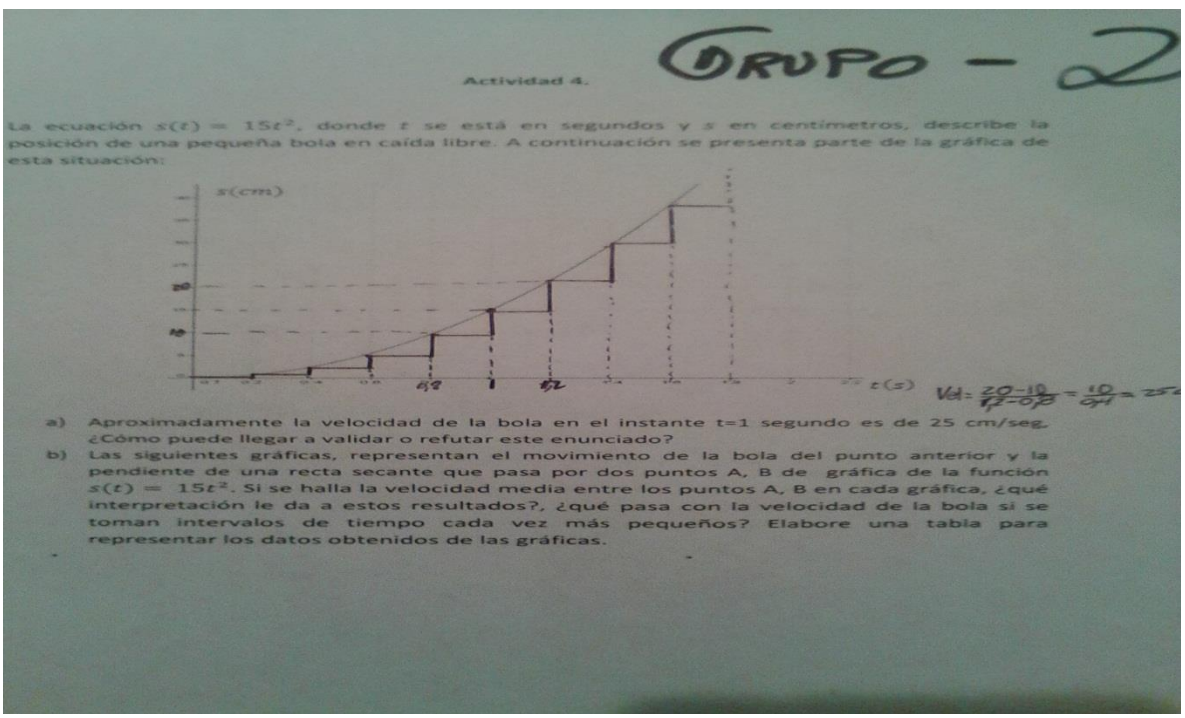
a) La velocidad no es igual varia en cada intervalo de tiempo "No es constante"

b) Velocidad $= \frac{\Delta s}{\Delta t}$ → Nos sirve para ver que la piedra esta desendiendo.

c) No nos permite ver la información completa y nos dice que la velocidad media es 0.

d) el movimiento del auto es lineal y el de la piedra es parabolica, es decir que el movimiento del primero es constante y el segundo no.

ANEXO I



GRUPO - 2

Actividad 4.

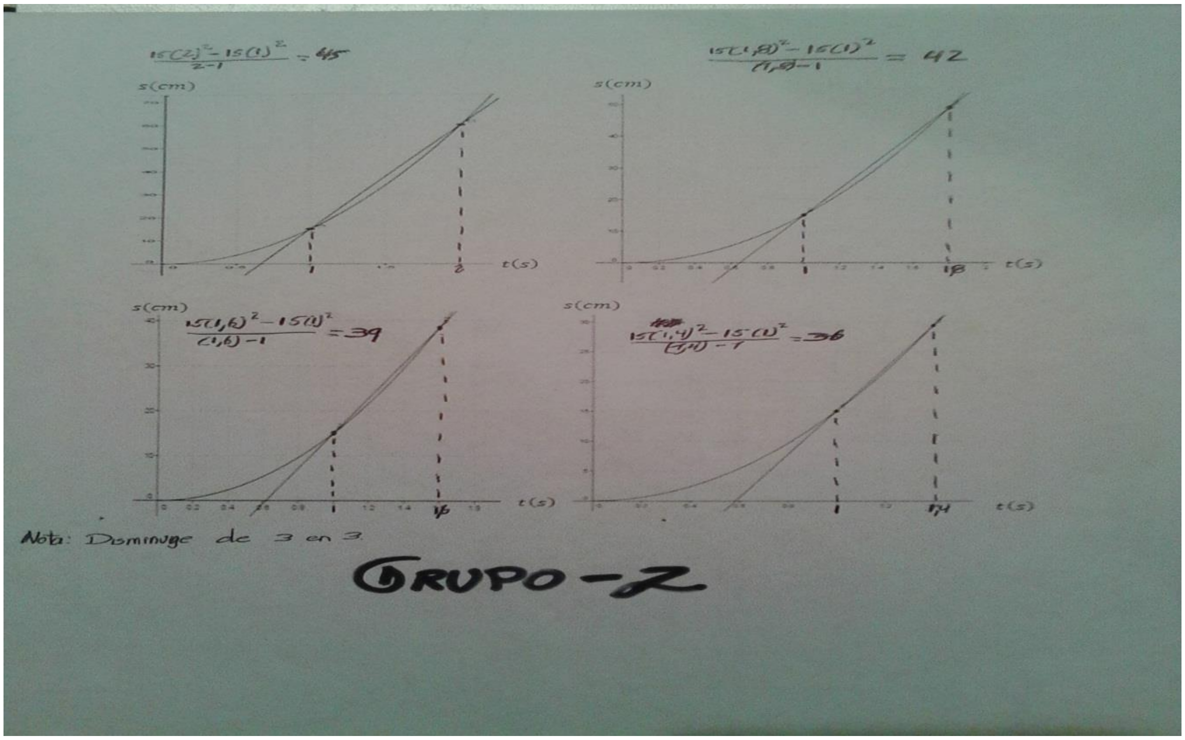
La ecuación $s(t) = 15t^2$, donde t se está en segundos y s en centímetros, describe la posición de una pequeña bola en caída libre. A continuación se presenta parte de la gráfica de esta situación:

Vel: $\frac{20-10}{1,2-0,8} = \frac{10}{0,4} = 25$

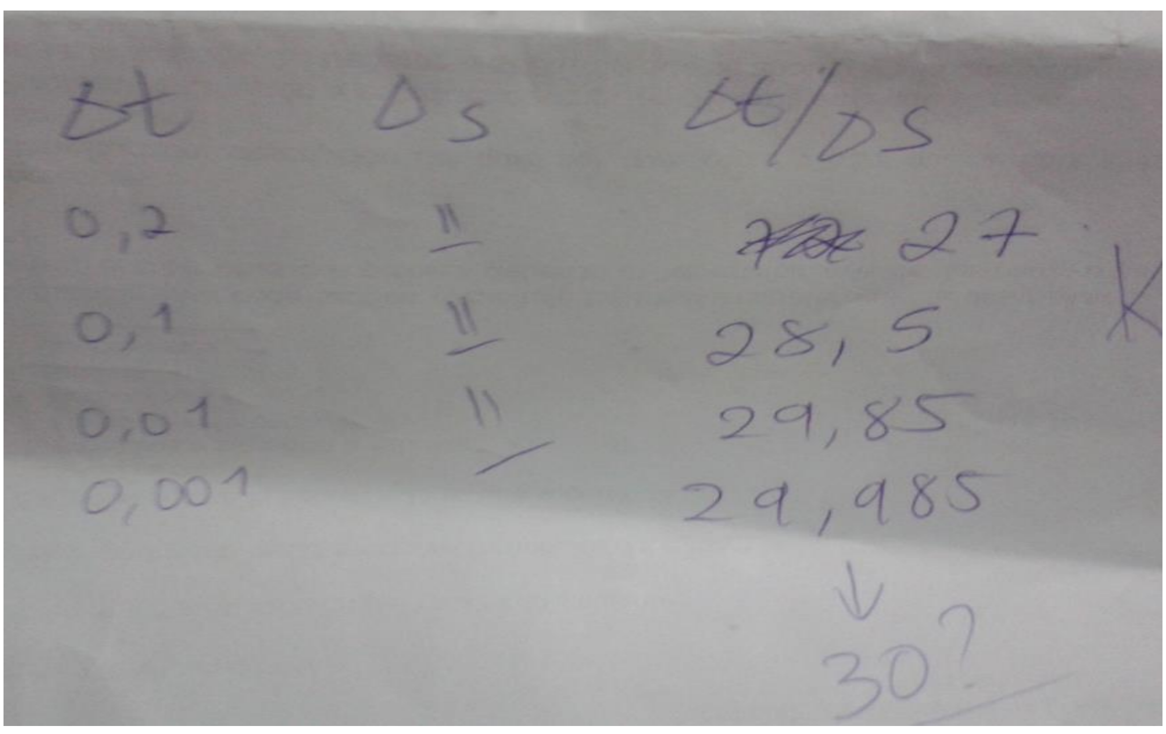
a) Aproximadamente la velocidad de la bola en el instante t=1 segundo es de 25 cm/seg. ¿Cómo puede llegar a validar o refutar este enunciado?

b) Las siguientes gráficas, representan el movimiento de la bola del punto anterior y la pendiente de una recta secante que pasa por dos puntos A, B de gráfica de la función $s(t) = 15t^2$. Si se halla la velocidad media entre los puntos A, B en cada gráfica, ¿qué interpretación le da a estos resultados?, ¿qué pasa con la velocidad de la bola si se toman intervalos de tiempo cada vez más pequeños? Elabore una tabla para representar los datos obtenidos de las gráficas.

ANEXO J

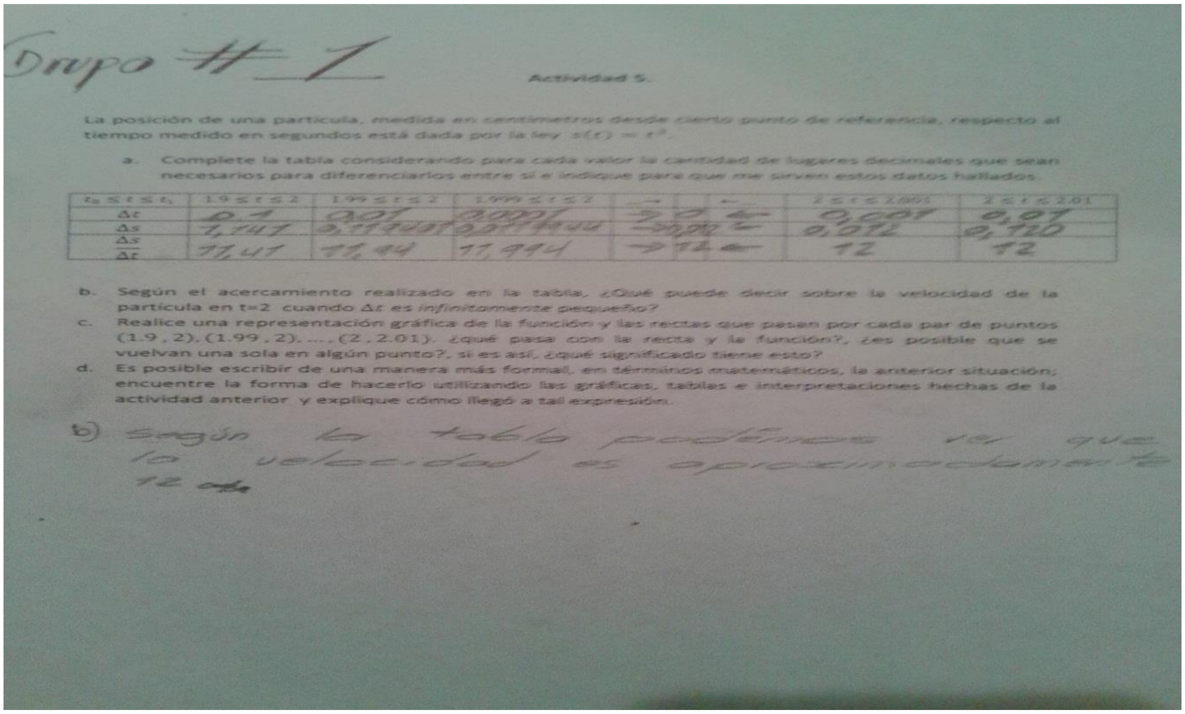


ANEXO K



Δt	Δs	$\Delta t / \Delta s$
0,2	〃	27
0,1	〃	28,5
0,01	〃	29,85
0,001		29,985
		↓
		30?

ANEXO L



Grupo # 1

Actividad 5.

La posición de una partícula, medida en centímetros desde cierto punto de referencia, respecto al tiempo medido en segundos está dada por la ley $s(t) = t^3$.

a. Complete la tabla considerando para cada valor la cantidad de lugares decimales que sean necesarios para diferenciarlos entre sí e indique para que me sirven estos datos hallados.

$t_0 \le t \le t_1$	$1.9 \le t \le 2$	$1.99 \le t \le 2$	$1.999 \le t \le 2$	→		←	$2 \le t \le 2.001$	$2 \le t \le 2.01$
Δt	0,1	0,01	0,001	→	0	←	0,001	0,01
Δs	1,141	0,119401	[illegible]	→	0,00	←	0,012	0,120
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$	11,41	11,94	11,994	→	12	←	12	12

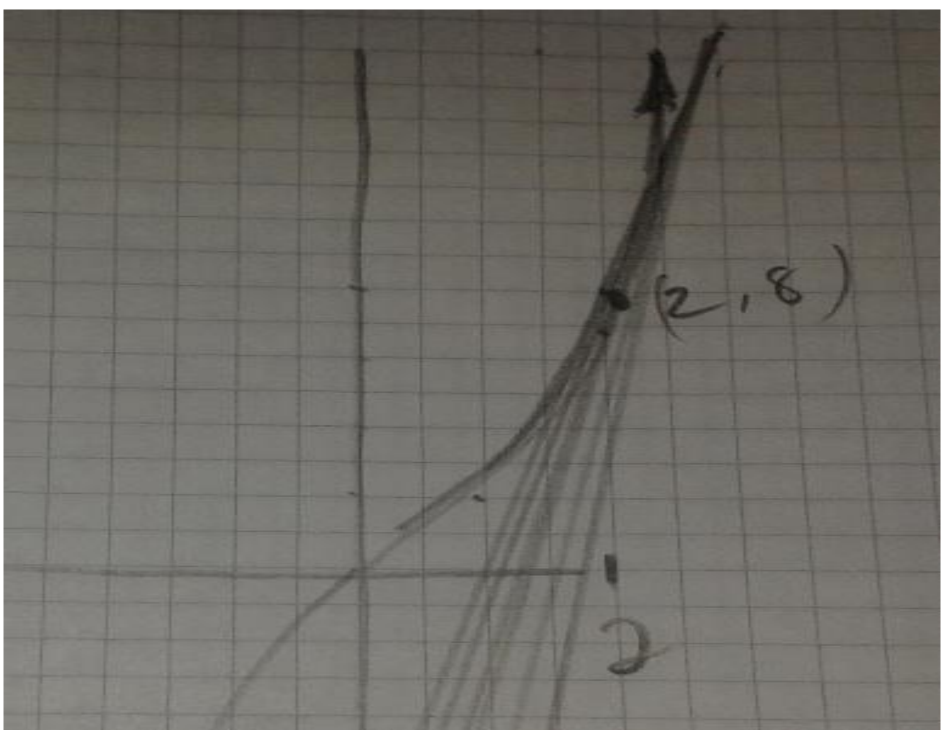
b. Según el acercamiento realizado en la tabla, ¿Qué puede decir sobre la velocidad de la partícula en t=2 cuando Δt es *infinitamente pequeño*?

c. Realice una representación gráfica de la función y las rectas que pasan por cada par de puntos (1.9 , 2), (1.99 , 2), …, (2 , 2.01). ¿qué pasa con la recta y la función?, ¿es posible que se vuelvan una sola en algún punto?, si es así, ¿qué significado tiene esto?

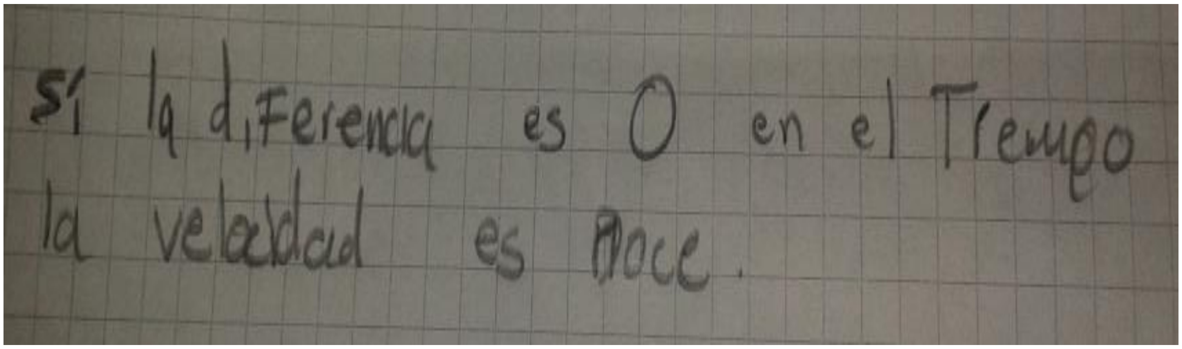
d. Es posible escribir de una manera más formal, en términos matemáticos, la anterior situación; encuentre la forma de hacerlo utilizando las gráficas, tablas e interpretaciones hechas de la actividad anterior y explique cómo llegó a tal expresión.

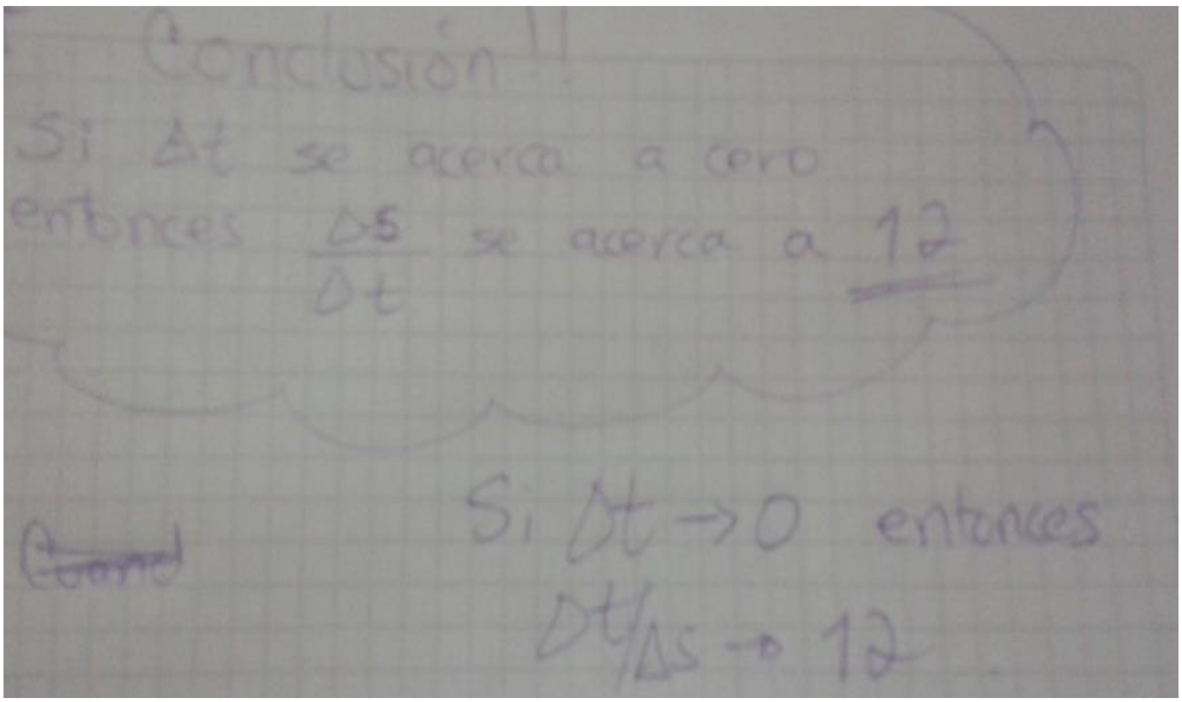
b) Según la tabla podemos ver que la velocidad es aproximadamente 12 cm

ANEXO M



ANEXO N


Sí la diFerencia es 0 en el Tiempo
la velocidad es Roce.


Conclusión !!
Si Δt se acerca a cero
entonces Δs/Δt se acerca a 12
~~Cuand~~
Si Δt → 0 entonces
Δt/Δs → 12

ANEXO O


Norma
JEAN BOOK
BLOCK ESCOLAR
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Actividad 1.
Objetivos de la actividad:


ONE DIR

Hello Kitty