

De la definición al argumento: conocimiento del profesor sobre el diseño de tareas

Deivis Lucía Alarcón Martínez

Jenifer Alexandra Fernández Caicedo

Universidad Pedagógica Nacional

Maestría en Docencia de la Matemática

Directora Carmen Samper de Caicedo

Febrero 2021

Dedicatoria

A mi mamá Martha Martínez,
por su constante apoyo y cariño.

A mi tía Gilma Alarcón,
porque gracias a su ejemplo y apoyo,
durante mi formación académica,
logré ser la persona que hoy soy.

A mi esposo Fernando Casallas,
por su apoyo incondicional, colaboración y paciencia
en los momentos de estrés y de decaimiento
que tuve que superar en este proceso.

Te amo.

Lucía Alarcón

A Gustavo Puentes, mi compañero de vida,
porque su gran amor, apoyo y confianza,
fueron mi mayor motivación para luchar
cada día por cumplir esta meta.

A Esperanza y Francisco, mis padres,
y Pilar y Javier, mis suegros,
por todo su apoyo, colaboración y comprensión,
lo cual me permitió culminar este logro.

Jenifer Fernández

Agradecimientos

A la profe Carmen Samper de Caicedo, por su paciencia, dedicación, esfuerzo e interés en dirigir nuestra investigación y, además, por compartirnos su valioso y amplio conocimiento.

Muchas Gracias profe por todas sus enseñanzas.

A los profesores del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G) y demás profesores de la Maestría en Docencia de la Matemática de la UPN, por sus aportes en nuestra formación académica, por hacer que el amor hacia la docencia de la matemática creciera.

A nuestro familiares y amigos más cercanos, por alentarnos y motivarnos a continuar en este proceso que no fue fácil. Pero, este nos significó crecer a nivel personal, profesional e investigativo.

Tabla de contenido

Introducción	8
1. Descripción del problema	11
1.1. Motivaciones iniciales.....	11
1.2. Delimitación del problema.....	15
1.3. Justificación.....	16
1.4. Objetivos	18
1.4.1. Objetivo General.....	18
1.4.2. Objetivos Específicos.....	19
1.5. Revisión de antecedentes	19
2. Marco de referencia	22
2.1. Modelos sobre el conocimiento del profesor	22
2.2. Modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) del profesor	24
2.3. Interpretación del CDM en nuestra investigación.....	26
3. Metodología de investigación.....	28
3.1. Perspectiva Investigativa.....	28
3.2. Estrategia Investigativa	29
3.2.1. Fases de cada ciclo de nuestra investigación	30
3.3. Descripción general de registro de información y construcción de datos.....	31
3.4. Categorías de análisis	32

3.4.1.	Categorías de análisis de los Estados de nuestro CDM-DD	32
3.4.2.	Categorías de análisis de la transformación de nuestro CDM-DD	33
4.	Ciclo 1 de investigación.....	36
4.1.	Fase 1: Identificación del problema que dio lugar al Ciclo.....	36
4.2.	Fase 2: Plan de acción para movilizar el conocimiento	36
4.3.	Fase 3: Implementación del plan y registro de información	38
4.3.1.	Captura de la información.....	38
4.3.2.	Tratamiento de la información.....	38
4.4.	Fase 4: Proceso de análisis de los datos	41
4.5.	Problemática que surgió del Ciclo 1	46
5.	Ciclo 2 de investigación.....	47
5.1.	Fase 1: Identificación del problema que dio lugar al Ciclo 2.....	47
5.2.	Fase 2: Plan de acción para movilizar el conocimiento	48
5.3.	Fase 3: Implementación del plan y registro de información	49
5.4.	Fase 4: Proceso de análisis de los datos	50
5.5.	Cambios significativos en nuestro CDM-DD en el Ciclo 2.....	56
5.6.	Problemática que surgió del Ciclo 2	56
6.	Ciclo 3 de investigación.....	58
6.1.	Fase 1: Identificación del problema que dio lugar al Ciclo.....	58
6.2.	Fase 2: Plan de acción para movilizar el conocimiento	59

6.3.	Fase 3: Implementación del plan y registro de información	60
6.4.	Fase 4: Proceso de análisis de los datos	62
6.5.	Cambios significativos en nuestro CDM-DD en el Ciclo 3.....	70
7.	Análisis de la transformación de nuestro CDM-DD.....	73
7.1.	Comparación de los cuatro estados de nuestro CDM-DD	73
7.1.1.	Respecto a la argumentación	73
7.1.2.	Respecto al argumento.....	78
7.1.3.	Respecto a definir	83
7.1.4.	Respecto a la definición	83
7.2.	Ideas que solo ubicamos en un estado de nuestro CDM-DD.....	87
7.2.1.	Nueva información Estado 2.....	88
7.2.2.	Nueva información Estado 3.....	88
8.	Conclusiones.....	91
8.1.	En cuanto a la pregunta de investigación.....	91
8.2.	Acerca de la transformación de nuestro <i>CDM-DD</i>	93
8.3.	Acerca del objetivo general.....	95
8.4.	Acerca de los objetivos específicos.....	95
8.5.	Acerca del diseño de tareas	97
8.6.	Conclusiones personales	98
8.7.	Proyecciones.....	100

9. Referencias bibliográficas.....	102
10. Anexos	105
Anexo A: Tarea 1, Argumento y argumentación.....	105
Anexo B: Tarea 2, definiciones	109
Anexo C: Tarea 3, propuesta por la profesora	111
Anexo D: Tarea 4, definiciones y argumentación	113
Anexo E: Narración del Estado Inicial	114
Anexo F: Narración del Estado 1	117
Anexo G: Narración del Estado 2	123
Anexo H: Narración del Estado 3	141

Introducción

La inquietud para realizar este estudio surgió porque evidenciamos que nuestro conocimiento didáctico y matemático para diseñar tareas era limitado. Entendemos por conocimiento didáctico y matemático al conjunto de saberes que utiliza un profesor, entre otras cosas, para diseñar y gestionar tareas con las que pretende acercar a sus estudiantes a conceptos y procesos matemáticos. Esta limitación se evidenciaba en las tareas que proponíamos pues se centraban en la conceptualización y descuidábamos el favorecimiento de la argumentación y de definir. Esta situación coincide con lo que señalan Schwarz y Kaiser (2009) sobre el conocimiento deficiente de los educadores para promover la argumentación. Otra problemática que teníamos era la dificultad para incorporar el uso de geometría dinámica (GD) en las tareas que proponíamos. Requeríamos, como lo señalan Hanna y de Villiers (2012), repensar la manera en que se utilizan estas herramientas en el aula escolar para favorecer el aprendizaje y la argumentación.

Esta investigación tenía como propósito describir el proceso de transformación de nuestro conocimiento didáctico y matemático que fuimos adquiriendo para diseñar tareas que promovieran la argumentación, involucraran el uso de definiciones de objetos geométricos y en las que había que usar GD para resolverla. Para cumplir este propósito nos basamos en el modelo del conocimiento didáctico matemático (CDM) propuesto por Godino, Batanero y Font (2007), el cual tomamos como referente conceptual. Realizamos un estudio que tiene carácter de Investigación Acción (IA), mediante el desarrollo de planes de acción en varios ciclos, diseñados por nosotras, que buscaban atender problemáticas emergentes en cada ciclo. Como consecuencia de tales planes de acción, determinamos el estado de nuestro conocimiento en cada ciclo.

Además, reconocimos acciones que consideramos fueron potentes para transformar nuestro conocimiento, particularmente respecto al uso de las definiciones para argumentar.

En el Capítulo 1, presentamos las motivaciones iniciales y problemática que nos llevaron a realizar esta investigación, la justificación de su importancia y relevancia, el planteamiento del objetivo general y objetivos específicos de esta, junto con la revisión de algunos antecedentes teóricos provenientes de investigaciones en educación matemática.

En el Capítulo 2, exponemos el referente conceptual o teórico en el cual nos basamos para cumplir con el objetivo de esta investigación. Iniciamos con los antecedentes del modelo del CDM, sus características generales y la interpretación de este modelo en nuestra investigación.

En el Capítulo 3, presentamos la perspectiva y la estrategia investigativa que asumimos en esta investigación y damos razones para sustentar por qué las escogimos. También describimos las principales herramientas utilizadas para el proceso del registro de información. Además, mostramos y explicamos el conjunto de categorías que usamos para hacer el análisis de nuestro conocimiento didáctico y matemático.

Describimos, en el Capítulo 4, el Ciclo 1 de la investigación y cada una de las fases que lo componen: identificación del problema que dio lugar al Ciclo, plan de acción para movilizar el conocimiento, implementación del plan, registro de la información, proceso de análisis de los datos, y la problemática que surgió del Ciclo. Por el carácter cíclico de la investigación, como mencionamos anteriormente, en los Capítulos 5 y 6, se presentan respectivamente el Ciclo 2 y Ciclo 3 de la investigación, con las respectivas fases que componen cada uno.

En el Capítulo 7, exponemos el análisis que realizamos a los estados de nuestro conocimiento didáctico y matemático para evidenciar la transformación de este. Realizamos la

comparación entre los fragmentos, clasificados en cada estado, con un mismo indicador y asunto de estudio. Además, mencionamos los indicadores que aparecen solamente en un estado.

En el Capítulo 8, presentamos las conclusiones y proyecciones. En este apartado se incluye, respectivamente, lo referente a los siguientes aspectos de nuestro estudio: la pregunta de investigación, el objetivo general, los objetivos específicos, la transformación que se evidenció de nuestro *conocimiento didáctico y matemático* y consideraciones personales.

En los anexos aparecen las tareas que diseñamos como acciones del plan del Ciclo 2 y 3. También, la tarea que propuso la profesora y que analizamos como acción del plan del Ciclo 3. Además, mostramos las narraciones del Estado Inicial, Estado 1, Estado 2 y Estado 3, en las que describimos los conocimientos logrados a propósito de cada acción propuesta en el plan de cada ciclo.

1. Descripción del problema

En este capítulo presentamos las motivaciones iniciales que nos llevaron a realizar esta investigación. Primero, presentamos algunas de nuestras experiencias de enseñanza y labor como profesoras de matemáticas. Además, mostramos las respuestas que dieron algunos de nuestros estudiantes, producto de estas experiencias. Estas nos mostraron que los aprendizajes esperados para nuestros estudiantes no eran los que deseábamos. Por ello, evidenciamos que existían incongruencias en el conocimiento que requeríamos para diseñar tareas que promovieran la argumentación. Segundo, exponemos los objetivos y justificación del trabajo de grado. Tercero, presentamos la revisión de antecedentes que fundamentó el desarrollo de esta investigación.

1.1. Motivaciones iniciales

La motivación que tuvimos, inicialmente, para realizar estudios de maestría fue la necesidad de mejorar nuestra acción docente. Lo anterior al ver que los esfuerzos que hacíamos en las clases de geometría no surtían los efectos que esperábamos en términos de la conceptualización de objetos geométricos. Esto nos llevó a pensar en diferentes estrategias para poder mejorar nuestra práctica profesional.

Una de las estrategias fue intentar promover una mejor conceptualización de objetos geométricos en nuestras clases a partir de la implementación de tareas diferentes a las tradicionales y rutinarias. Por ello, Lucía propuso la elaboración de proyectos en el aula (método de enseñanza Aprendizaje basado en proyectos) y Jenifer la resolución de problemas que involucraban la construcción de figuras geométricas con regla y compás; en ambos casos, primaba el favorecimiento del uso de definiciones.

Por ejemplo, Lucía propuso, como parte del proyecto transversal Agricultura Urbana del grado décimo, tareas como la construcción de macetas con forma de sólidos geométricos con el

uso de técnicas como "construcción con yeso". Lo anterior, con la intención de que los estudiantes identificaran las características y propiedades de los objetos tridimensionales, propusieran definiciones y relacionaran los sólidos con objetos de la vida cotidiana.

Imagen 1.1

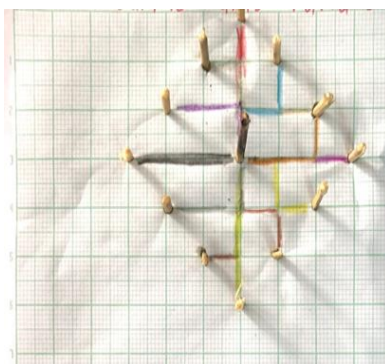
Producto obtenido del desarrollo del proyecto Agricultura Urbana



A su vez, Jenifer propuso tareas como la construcción de una circunferencia utilizando la métrica del taxista, a partir de una situación de un contexto cotidiano en la cual un taxista tenía que determinar la posible posición de una estación de servicio que se encontraba a tres cuadras de su posición. El objetivo de hacer la representación gráfica era reconocer las características de una circunferencia y proponer una definición, con base en las propiedades y no en la representación usual del objeto geométrico.

Imagen 1.2

Representación gráfica de la construcción de la circunferencia con la métrica del taxista

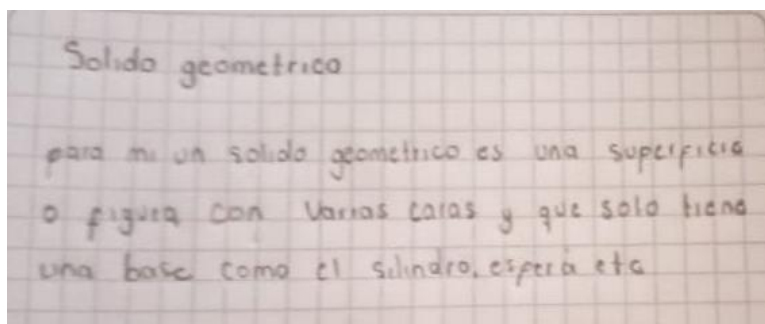


Con lo anterior queremos mostrar que el estilo de las tareas que propusimos a nuestros estudiantes se centraba en la construcción y la conceptualización, buscando que las definiciones establecieran la relación entre una representación gráfica y un conjunto de propiedades, para dotar de significado los objetos geométricos.

Por ejemplo, como conclusión a la tarea propuesta por Lucía, un estudiante formuló la siguiente definición para sólido geométrico (Imagen 1.3).

Imagen 1.3

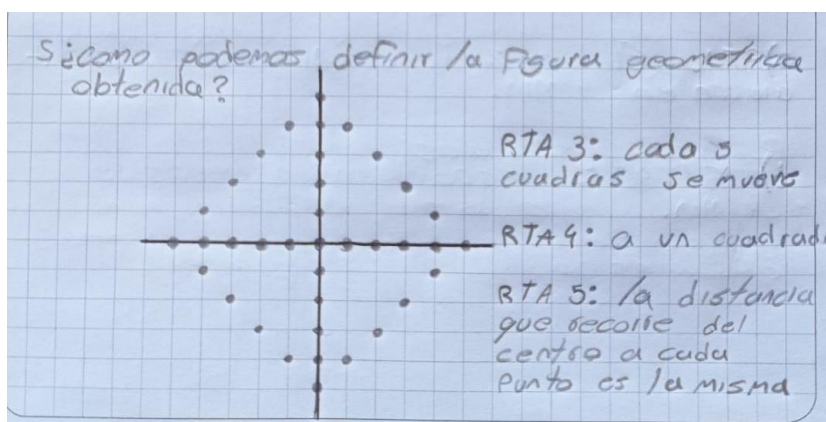
Respuesta de un estudiante: definición de sólido geométrico



En el caso de la tarea propuesta por Jenifer, un estudiante expuso la siguiente definición de circunferencia en la métrica del taxista (Imagen 1.4).

Imagen 1.4

Respuesta de un estudiante: definición de circunferencia en la métrica del taxista



Como se evidencia en estos ejemplos, nuestros estudiantes no conceptualizan de forma adecuada los conceptos que les enseñamos. Esto es evidencia de que no teníamos el conocimiento suficiente para diseñar tareas que, por medio del uso de definiciones, promovieran un aprendizaje significativo de la geometría en nuestros estudiantes.

Una segunda estrategia fue inscribirnos en el programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, ya que el énfasis ofertado era el uso de tecnología digital en la enseñanza de la matemática. Esto con el fin de poder resolver la inquietud que teníamos sobre si el uso de Geometría Dinámica (GD) podría servir como recurso para incentivar la conceptualización de figuras geométricas. Esta inquietud surgió debido a la experiencia que habíamos tenido con el uso de la GD en nuestra formación y las condiciones de nuestros respectivos lugares de trabajo. En el caso de Lucía, durante su formación de pregrado, usó esporádicamente software de GD para la resolución de problemas, pues no era obligación utilizarlo. Por ello, ella nunca se preocupó por implementar el uso de GD en el aula ni reconoció el valor de esta en la resolución de problemas. En el caso de Jenifer, durante su formación de pregrado adquirió conocimiento extenso sobre el uso de software de GD para resolver problemas, pues era requerido en todos los cursos de geometría. Sin embargo, Jenifer no utilizaba esta herramienta regularmente en su práctica profesional por la falta de recursos tecnológicos en la institución donde se desempeña. Esto la llevó a no poner en práctica sus conocimientos sobre el uso de GD en las tareas que proponía.

Sin embargo, al ingresar a la Maestría, nos vinculamos al grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{A} \cdot G$) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), responsable de la cohorte 2020-1. Los profesores nos incitaron a realizar un trabajo de grado no solamente acerca del proceso de definir, sino también de la argumentación, pues ello

podría contribuir a un aprendizaje más significativo de los estudiantes. Lo hicieron, dado que el núcleo problémico de la cohorte era el conocimiento del profesor en torno a tareas que involucran el uso de GD para promover discursos argumentativos en la enseñanza de la geometría. En ese momento, decidimos acoger la propuesta. Así nuestro estudio no se iba a orientar específicamente en la conceptualización, sino en el uso de las definiciones en la construcción de argumentos, cosa que contribuye al proceso de conceptualización. Por ello, nos surgió el interés de cómo diseñar tareas apoyadas por GD, que promovieran la construcción de argumentos con el uso de las definiciones. Adicionalmente, reconocimos que el paso por la Maestría iba a afectar nuestro conocimiento didáctico y matemático. Dado nuestro interés inicial y la propuesta de estudio de la cohorte, decidimos estudiar cómo se iba transformando dicho conocimiento.

1.2. Delimitación del problema

Teniendo en cuenta lo anterior y la oportunidad ofrecida por el grupo ($\mathcal{A} \cdot G$) de la UPN, coincidimos con algunos autores en la importancia de investigar sobre nuestro conocimiento didáctico y matemático en relación con los asuntos: argumentación, GD, tareas y definiciones.

Retomando las experiencias narradas en la primera parte de esta sección, concluimos que las tareas que diseñábamos y proponíamos a nuestros estudiantes no favorecían la argumentación vinculada a procesos de definir, ni el uso de definiciones de figuras geométricas. Aunque habíamos implementado diferentes estrategias para favorecer la conceptualización, nos hacían falta conocimientos didácticos y matemáticos para diseñar tareas que promovieran la argumentación haciendo uso de las definiciones de objetos geométricos. Necesitábamos estrategias para lograr que nuestros estudiantes desarrollarán el hábito de usar las definiciones correctamente al argumentar, cuestión que destacan Cabassut, Conner, Iscimen, Furinghetti,

Jahnke y Morselli, (2012). Además, reconocíamos las falencias que teníamos para proponer tareas apoyadas de GD que favorecieran la argumentación. Dreyfus, Nardi, y Leikin (2012) mencionan que el diseño de tareas impone fuertes exigencias a los maestros en términos del conocimiento de matemáticas requerido. Adicionalmente, Hanna y de Villiers (2012) advierten que es necesario que la comunidad de educación matemática replantee el papel de la demostración a la luz del rápido desarrollo del software de GD. Orit, Nickerson, Stylianides, Kidron y Winicki-Landman (2012) destacan que parte del conocimiento requerido por un profesor es saber cómo desarrollar en el aula escolar la necesidad de demostrar. Siendo la demostración una forma de argumentación, consideramos que esta necesidad planteada por los autores impone a los profesores otro reto: propiciar la argumentación en el aula escolar.

Partiendo de la problemática evidenciada desde nuestra experiencia profesional y a la luz de los diferentes autores, nos formulamos la siguiente pregunta:

¿De qué manera se va incorporando en el conocimiento didáctico y matemático del profesor fundamentos para diseñar tareas apoyadas con geometría dinámica (GD), que promuevan la construcción de argumentos en los que se propongan o utilicen definiciones de objetos geométricos?

1.3. Justificación

Argumentamos la importancia de este trabajo, teniendo en cuenta razones de tipo: investigativo, institucional y curricular. Los siguientes párrafos sustentan la relevancia de nuestro estudio.

Con referencia al desarrollo de la investigación, la revisión de la literatura ya presentada muestra que el tema del estudio que proponemos coincide con el interés de investigaciones realizadas por la comunidad de educadores matemáticos, en las cuales se ha indagado sobre los

procesos de argumentar y definir. Sin embargo, son escasos los trabajos que vinculan estos dos procesos, que los relacionen con el uso de GD y que se refieren al conocimiento del profesor. Algunas de estas investigaciones concluyen que la argumentación tiene un papel fundamental en la conceptualización y que las definiciones se pueden utilizar para la generación o reproducción de argumentos (Bills, y Tall,1998; citado por Calvo 2001) e indican que ello requiere que el profesor adquiera conocimiento al respecto. Molina y Samper (2019) aseguran que reconocer que hay diferentes tipos de problemas e identificar los argumentos que pueden emerger de cada uno de estos, se considera parte de ese conocimiento. Arzarello, Bartolini, Leung, Mariotti (2012) afirman que el uso de artefactos, entre ellos la GD, por los estudiantes ha sido eficaz para entender lo que es demostrar y, por tanto, que puede ser un apoyo didáctico para enseñar a demostrar, y, por ende, a argumentar. Esto significa que se requiere que un profesor sepa cómo debe ser el uso de GD para que realmente apoye la argumentación.

Las instituciones educativas en las que laboramos prevén que el profesor sea diseñador de tareas para que la enseñanza se base en guías o proyectos, elaborados por él, que promuevan el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico y destrezas en el área de matemáticas. Además, en ellas a menudo se manifiesta que el uso de la tecnología debe incluirse en las prácticas escolares. Por ejemplo, en el PEI del Colegio Federico García Lorca, en el cual se desempeña Lucía, se estipula que “la aplicación de la tecnología debe ser incluida dentro de todas las actividades escolares”. Todo esto requiere que, como profesores de estas instituciones, contemos con los conocimientos sobre el diseño de tareas que promuevan actividad matemática, haciendo uso de GD para favorecer la argumentación.

Por último, asuntos de carácter curricular señalan la importancia y necesidad de nuestro trabajo. En los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas (MEN, 1998) se plantea

que, "la geometría, por su mismo carácter de herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico, (...) es un ámbito para desarrollar el pensamiento espacial, los procesos y diversas formas de argumentación" (p. 17). En esta cita se muestra la importancia del proceso de argumentar en la formación de una persona y que la geometría es un escenario propicio para ello. Además, en los Lineamientos se aclara que el uso efectivo de las nuevas tecnologías en la educación es un campo que requiere investigación, desarrollo y la formación correspondiente de los docentes. Los Lineamientos muestran los saberes, las competencias que deben desarrollar los estudiantes y los procesos que se deben abordar, pero no se evidencian pautas o principios que pueden utilizar los profesores para el diseño de tareas que promuevan los procesos de argumentar y definir.

Dadas las exigencias impuestas por las instituciones donde nos desempeñamos y por el Ministerio, debemos fortalecer nuestro conocimiento para promover el proceso de argumentar haciendo uso de definiciones a través de las tareas que diseñamos que requieran el uso de GD. Estudiar, por tanto, cómo se transforma nuestro conocimiento didáctico y matemático durante nuestro paso por la Maestría y se subsanan las necesidades mencionadas anteriormente, e identificar qué acciones provocan los cambios evidenciados en los estados de nuestro conocimiento didáctico y matemático, nos permitirá realizar procesos semejantes con otros temas y procesos matemáticos que son parte del currículo escolar.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

Describir el proceso de transformación de nuestro conocimiento didáctico y matemático sobre diseño de tareas, apoyadas con GD, que promueven la argumentación y el uso de definiciones en ella.

1.4.2. Objetivos Específicos

- Fundamentar nuestro conocimiento didáctico y matemático sobre el diseño de tareas, uso de GD, argumentación y definir a través de la revisión de literatura relacionada con nuestro tema de estudio.
- Analizar los estados de conocimiento determinados en cada ciclo de la investigación, con el fin de determinar la transformación en nuestro conocimiento didáctico y matemático con respecto a los asuntos mencionados.
- Adaptar la metodología Investigación Acción de tal manera que nos permita evidenciar el proceso de transformación de nuestro conocimiento didáctico matemático.
- Identificar en el plan de acción establecido, las acciones que provocan cambios en nuestro conocimiento didáctico y matemático.

1.5. Revisión de antecedentes

Presentamos evidencia de dos escritos que se han desarrollado sobre el conocimiento didáctico y matemático de profesores respecto a asuntos como: tareas y argumentación. Entre estos escritos, se encuentra el libro de Hanna y de Villiers (2012), que no corresponde a un proyecto de investigación, pero es un documento que recopila información y da un panorama general sobre el campo de la argumentación y la prueba. Además, pone de manifiesto la importancia de transformar el conocimiento del profesor para diseñar tareas. También, mostramos el documento de Chapman (2013) el cual es una nota editorial, en la que destaca la importancia de investigar sobre el conocimiento del profesor para diseñar tareas. A continuación, presentamos la revisión organizada cronológicamente.

Gila Hanna y Michael de Villers (2012) presentan un volumen, patrocinado por la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI¹). Es el resultado de la recopilación de presentaciones y discusiones de la 19° Conferencia del ICMI, que se realizó del 10 al 15 de mayo del 2009 en la Universidad Nacional de Taiwán, en Taipei, Taiwán. Este es un evento en el que participan investigadores en el campo de la educación matemática, mostrando los resultados de sus investigaciones en relación con el documento de discusión. Para este evento se propuso cuestionar sobre nociones teóricas y prácticas de por qué y cómo los educadores de matemáticas deberían abordar la enseñanza y el aprendizaje de la argumentación y la demostración. Para examinar este asunto, en el libro se exponen diferentes posturas con relación a los focos de estudio, organizados en seis partes. Para este estudio solo nos interesaron algunos temas propuestos como: conocimiento que debe tener un profesor sobre argumentación, el uso de la GD para favorecer la argumentación, principios para diseñar tareas, entre otros temas, que apunten hacia los intereses de este estudio. Los editores esperan que este libro permita profundizar en la comprensión de la argumentación y la demostración para generar más cuestionamientos, teniendo en cuenta que el documento de discusión es un insumo para plantear futuras investigaciones. Además, ponen un reto a la comunidad de educadores matemáticos, para que reconsideren constante y fundamentalmente el papel de la experimentación y la argumentación a la luz de las tecnologías informáticas y los entornos de software dinámico.

La revisión del libro de Hanna y de Villiers (2012) nos aportó varios elementos para sustentar nuestro problema, con algunas afirmaciones sobre la importancia de transformar el conocimiento del profesor para promover la argumentación a partir del diseño de tareas.

¹ Por las siglas en inglés, International Commission on Mathematical Instruction.

Olive Chapman (2013) realizó la nota editorial para la revista *Journal of Mathematics Teacher Education* (JMTE) volumen 16 del mes de febrero, que contiene artículos cuyo tema principal es el conocimiento del profesor respecto a tareas. En este escrito, Chapman expone brevemente los artículos que se van a presentar en este volumen de la revista, resaltando la importancia de estas investigaciones con relación al tema principal. En especial, la autora resalta la importancia del conocimiento que debe tener un profesor para diseñar tareas a sus estudiantes, con el fin de lograr estimular la actividad matemática y favorecer el aprendizaje significativo. Además, ella destaca que involucrar a los profesores en tareas valiosas puede no ser suficiente para el desarrollo del conocimiento de las tareas de matemáticas para la enseñanza. Por ello, es necesario prestar atención a las creencias que tienen los profesores sobre las tareas y realizar una investigación continua sobre este aspecto. La revisión de la nota editorial de Chapman (2013) nos sirvió para justificar la importancia que tiene realizar un estudio sobre el conocimiento didáctico y matemático del profesor en relación al diseño de tareas.

2. Marco de referencia

En este capítulo presentamos el modelo del conocimiento del profesor de matemáticas propuesto por Godino, Batanero y Font (2007), el cual tomamos como referente conceptual para construir el conjunto de categorías que nos sirvieron como base para realizar el análisis de nuestro CDM-DD. A continuación, presentamos algunos modelos que antecedieron a este modelo, características generales del modelo y la interpretación de este modelo en nuestra investigación.

2.1. Modelos sobre el conocimiento del profesor

Uno de los precursores en estudiar el conocimiento del profesor fue Shulman (1986), quien propuso tres categorías: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido (PCK²) y conocimiento curricular. Luego, Shulman en 1987 propone las denominadas “*categorías del conocimiento base*”, compuestas por: 1) conocimiento del contenido, 2) conocimiento pedagógico general, 3) conocimiento curricular, 4) conocimiento pedagógico del contenido (PCK), 5) conocimiento de los estudiantes y sus características, 6) conocimiento de los contextos educativos y 7) conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación (Pino-Fan y Godino, 2015). Entre estas categorías, se resalta la importancia del PCK, porque en esta se identifica la estructura del conocimiento para la enseñanza. Como afirman Pino-Fan, Assis y Castro (2015) es una amalgama entre contenido y pedagogía.

Pino-Fan y Godino (2015), afirman que, posteriormente, Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Schilling y Ball, 2004; Ball, Hill y Bass, 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008) desarrollaron la propuesta “*conocimiento matemático para la enseñanza*” (MKT³), que no es más que una profundización

² Siglas en inglés que significan “Pedagogical Content Knowledge”

³ Siglas en inglés que significan “Mathematical Knowledge for Teaching”

de la propuesta de Shulman con relación a la noción del conocimiento de contenido y el PCK. Estos investigadores utilizaron estas dos nociones como dos categorías generales y propusieron unas subcategorías para cada una de estas. Por un lado, el conocimiento del contenido se compone del conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y el conocimiento en el horizonte de las matemáticas. Por otro lado, el PCK incluye el conocimiento del contenido y los estudiantes, el conocimiento del contenido y la estructura, y el conocimiento del currículo. El modelo presentado anteriormente, se ha considerado como un aporte significativo para caracterizar el conocimiento del profesor de matemáticas.

Otro estudio que ha permitido especificar el conocimiento del profesor de matemáticas, de acuerdo con lo mencionado por Pino-Fan y Godino (2015), ha sido el realizado por Schoenfeld y Kilpatrick (2008). En este estudio se resalta lo que ellos llaman “*la proficiencia*” de la enseñanza de las matemáticas. Esta se refiere al conocimiento y competencias que debe tener el profesor para que pueda ofrecer una enseñanza de calidad. Para esto, los autores, proponen una serie de dimensiones entre las que resaltamos la reflexión que un profesor debe hacer sobre su propia práctica.

Las anteriores investigaciones proponen un conjunto de categorías globales para determinar el conglomerado de conocimientos didácticos y matemáticos que debería tener un profesor para realizar una buena práctica profesional. Al respecto, Godino (2009) menciona que “sería útil disponer de modelos que permitan análisis más detallados de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas”. Con el fin de dar respuesta a este cuestionamiento, el autor propone como modelo “idóneo”, el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM), el cual se originó a raíz de las limitaciones que evidenció en los otros modelos.

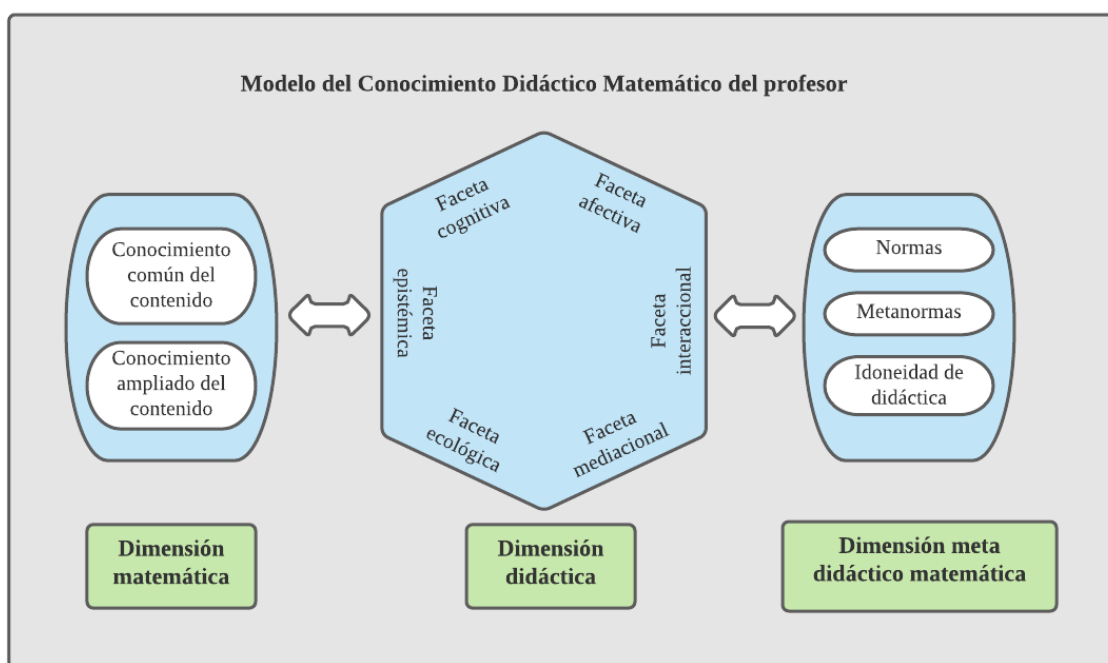
2.2. Modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) del profesor

En esta investigación usamos como marco de referencia el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) del profesor, basado en la propuesta del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). El modelo del CDM interpreta y caracteriza el conocimiento del profesor de matemáticas, a partir de tres categorías denominadas dimensiones: dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión meta didáctico-matemática (Pino-Fan y Godino, 2015). En este estudio cuando hagamos mención de nuestro conocimiento didáctico y matemático haremos referencia únicamente a la dimensión didáctica del CDM. Por ello, en adelante, utilizaremos la sigla CDM - DD para referirnos a este.

Aunque las dimensiones matemática y meta didáctico-matemática no son parte de nuestro estudio, a continuación, mostramos un breve resumen de cada una de las dimensiones del modelo. Además, en el Esquema 2.1 ilustramos la forma en la que entendemos el modelo.

Esquema 2.1

Modelo del CDM (fuente: elaboración con base a la propuesta de Pino-Fan y Godino, 2015)



La dimensión matemática incluye dos subcategorías: conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido. De acuerdo con Pino Fan y Godino (2015), el conocimiento común del contenido es el conocimiento sobre un objeto matemático concreto, que se considera suficiente para resolver los problemas o tareas en un nivel educativo determinado. Este es un conocimiento compartido entre el profesor y los estudiantes. En cuanto al conocimiento ampliado del contenido, es el que le provee al profesor las bases matemáticas para vincular el objeto matemático de estudio con otras nociones matemáticas.

La dimensión didáctica incluye seis subcategorías, denominadas facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica; en su artículo, Pino-Fan y Godino definen claramente cada una. Aquí describimos de forma breve cada una de estas facetas. La *faceta epistémica* es el conocimiento necesario para la enseñanza, es decir, el conocimiento que requiere el profesor para encontrar las soluciones a una tarea, en el que incluye las representaciones, los procedimientos, los argumentos y los objetos matemáticos que se usan. La *faceta cognitiva* corresponde al conocimiento para prever las posibles respuestas que pueden dar los estudiantes a un problema, así como las concepciones erróneas o errores que puedan surgir en la solución, para dar el tratamiento correspondiente. La *faceta afectiva* es el conocimiento necesario para comprender y tratar los estados de ánimo de los estudiantes respecto a la tarea, con el fin de poder motivarlos a resolver el problema. La *faceta interaccional* es el conocimiento para pronosticar y gestionar las interacciones entre los sujetos que participan en el proceso de enseñanza, con el fin de fijar y negociar significados. La *faceta mediacional* es el conocimiento para poder usar y evaluar la pertinencia del uso de materiales y recursos tecnológicos para potenciar el aprendizaje. La *faceta ecológica* se refiere a los conocimientos sobre el currículo de matemáticas y las relaciones de dicho currículo con aspectos sociales, políticos y económicos.

La dimensión meta didáctico-matemática hace referencia a las normas, metanormas y la noción de idoneidad didáctica. Según Godino (2009), la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de seis componentes: idoneidad epistémica, idoneidad cognitiva, idoneidad interaccional, idoneidad mediacional, idoneidad afectiva e idoneidad ecológica.

2.3. Interpretación del CDM en nuestra investigación

Como lo mencionamos anteriormente, en esta investigación nos centramos únicamente en la dimensión didáctica del CDM. De esta dimensión, solo utilizamos las facetas: epistémica, mediacional y ecológica, porque estas nos permitieron analizar nuestro CDM-DD en relación al propósito de nuestra investigación. Es decir, estas facetas nos permitieron analizar los datos en cada ciclo de investigación, específicamente en los momentos en que manifestamos nuestro CDM-DD sobre: argumentación, definiciones y su relación, el uso que se puede dar a la GD, el diseño de tareas para promover la argumentación y el uso de definiciones, cuando enunciamos lo que conocemos respecto a las propuestas curriculares para promover la argumentación y el uso de definiciones en algún nivel escolar específico, y cuándo analizamos diferentes tareas propuestas. No consideramos la faceta cognitiva, interaccional y afectiva porque no fue objeto de estudio la gestión de tareas con los estudiantes mismos. Por ello, no pudimos evidenciar nuestro CDM-DD en relación a las dificultades que pueden tener los estudiantes, los sentimientos que ellos puedan expresar o las interacciones que se puedan dar entre profesor y estudiantes, cuando los estudiantes resuelven tareas que promueven el uso de las definiciones para construir argumentos.

A continuación, respecto a los asuntos argumentación y definiciones, mostramos las facetas que nos brindaron herramientas para poder analizar nuestro CDM-DD. Con relación a la

argumentación, nos centramos específicamente en la faceta epistémica y mediacional. Con relación a las definiciones, nos ubicamos en la faceta epistémica, mediacional y ecológica.

De manera general, cuando catalogamos algo en la faceta epistémica es porque pretendemos analizar las expresiones en las que se ven reflejados atributos que describen los asuntos de estudio, argumento y definición, como: qué es, con qué se relaciona, cómo se representa o estructura, y cómo se clasifica. Respecto a la faceta mediacional, nos centramos en analizar cómo manifestamos la relación entre el uso de la GD para solucionar tareas que promueven la argumentación y el uso de definiciones. Cuando nos referimos a la faceta ecológica, nos centramos en analizar las afirmaciones que expresan expectativas curriculares para promover el aprendizaje de los asuntos de estudio. En la Tabla 2.1, presentamos los indicadores que determinamos para cada faceta, los cuales fueron fundamentales para realizar el análisis de nuestro CDM-DD.

Tabla 2.1

Categorías de análisis e indicadores de nuestro CDM-DD

Faceta	Indicadores del conocimiento
Epistémica	Qué es
	Para qué sirve
	Con qué se relaciona
	Cómo se representa o estructura
	Cómo se clasifica
Mediacional	Cómo favorece (GD)
	Cómo favorece (Tareas)
Ecológica	Cuáles son las expectativas en cada curso

3. Metodología de investigación

En este capítulo, presentamos la perspectiva y la estrategia investigativa que se asumieron en este trabajo de grado. Estas, junto con el marco de referencia presentado en el Capítulo 2, conforman la metodología de nuestro trabajo. Damos razones que sustentan la importancia de adoptar algunos de los elementos de lo denominado Investigación Acción (Carr y Kemmis (1998; citado en Serres, 2007) como parte de la metodología, describimos las fases que componen cada ciclo de nuestra investigación y presentamos las categorías que utilizamos para el análisis de los datos. Lo anterior, con el fin de cumplir con el objetivo de describir el proceso de transformación de nuestro conocimiento didáctico y matemático cuando diseñamos tareas que requieren el uso de GD, que promuevan el uso de las definiciones en el proceso de construcción de argumentos.

3.1. Perspectiva Investigativa

Asumimos un enfoque fenomenológico porque nos interesa describir e interpretar nuestro CDM-DD sobre el diseño de tareas, en las que se usa GD, para promover la construcción de argumentos en los que se usan definiciones, con el fin de buscar acciones que lo transformen. Algunas de estas son: i) la autorreflexión y el cuestionamiento sobre los asuntos que se involucran para diseñar dichas tareas, ii) el diseño y desarrollo de un plan de acción que lleve a profundizar en dichos asuntos y iii) el diálogo constante entre los participantes de la investigación.

Asumimos la aproximación hermenéutica, dado que, sin realizar juicios de valor, pretendíamos identificar el significado que fuimos refinando sobre los asuntos implicados. Queríamos evidenciar el proceso de transformación de estos significados a medida que avanzaba el proceso investigativo, a través de las acciones realizadas para tal fin. Además, adoptamos

algunos rasgos de la aproximación colaborativa social (Camargo, sf), dado que, junto con la profesora de trabajo de grado, con compañeros de la maestría y otros profesores de matemáticas, realizamos acciones colaborativas, en las que se pudo evidenciar la incorporación de nuevo conocimiento y el proceso de transformación de este.

En concreto, pretendíamos buscar una vía para transformar nuestro CDM-DD respecto al diseño de tareas que promueven la construcción de argumentos en los que se usen definiciones y obtener información que diera cuenta del proceso que adelantamos y de cómo este permitió generar dicha transformación.

3.2. Estrategia Investigativa

La Investigación Acción (IA) es una estrategia de investigación utilizada en las ciencias humanas, en la que el investigador es una persona que quiere mejorar su práctica, en la cual ha identificado una problemática. En particular, en educación, el profesor se puede involucrar en la investigación siendo a la vez investigador y sujeto de estudio.

Carr y Kemmis (1998; citado en Serres, 2007) mencionan que la IA es una forma de indagación autorreflexiva, que emprende un conjunto de personas con el fin de mejorar la racionalidad o la comprensión de una práctica social. La autorreflexión y autocuestionamiento le permiten al profesor investigador identificar las problemáticas que evidencia en su práctica o en las experiencias que vivencia, para luego tomar decisiones sobre el rumbo de la investigación. En nuestro caso, pudimos decidir sobre las acciones que implementamos para evidenciar la transformación de nuestro CDM-DD

En la IA se realiza un proceso cíclico de investigación, el cual permite generar constantemente preguntas para orientar la investigación hacia la búsqueda de una posible solución al problema. Además, resaltamos que en la IA los resultados se basan en evidencia

recogida por los propios participantes; hay un constante análisis de las evidencias lo que promueve la generación de nuevas preguntas; y, el conocimiento obtenido tiende a ser local y particular de la práctica educativa de los profesores investigadores participantes.

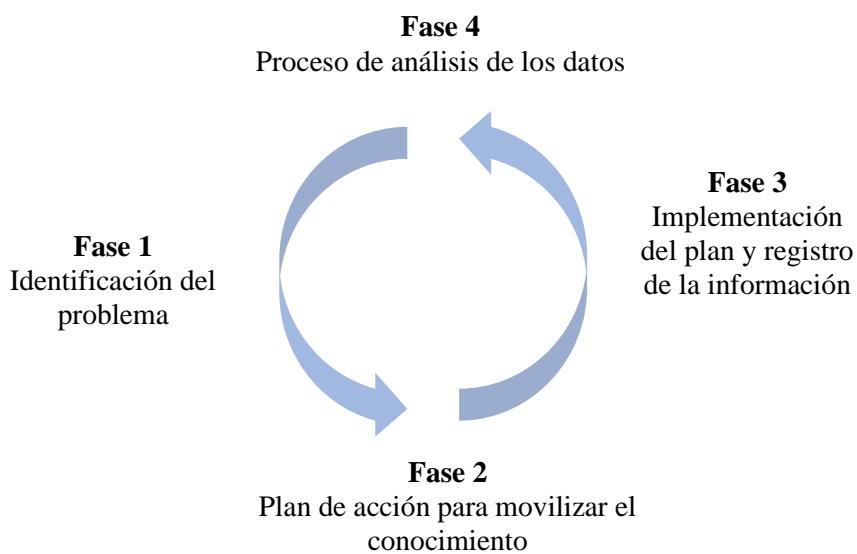
En nuestro estudio, los resultados surgieron a partir del análisis realizado a los datos en los cuales se evidencia el estado de nuestro CDM-DD con relación a los asuntos de este trabajo. El análisis y seguimiento de los datos, nos permitió generar inquietudes sobre nuestro CDM-DD, los cuales orientaron el proceso cíclico de esta. El conocimiento que se generó es específico y únicamente nuestro.

3.2.1. Fases de cada ciclo de nuestra investigación

Como mencionamos anteriormente, la IA se desarrolla por medio de un proceso cíclico. En nuestro caso, desarrollamos tres ciclos, cada uno compuesto por cuatro fases. En el Esquema 3.1 presentamos la denominación de cada fase de un ciclo.

Esquema 3.1

Fases de cada ciclo de investigación. Fuente propia



En la Fase 1, identificación del problema, se detecta un subproblema particular relacionado con el problema de investigación. En la Fase 2, plan de acción para movilizar el conocimiento se formulan las acciones que se van a realizar para buscar soluciones al subproblema. En la Fase 3, implementación del plan y registro de la información, se realizan las acciones y se recogen los insumos para obtener los datos investigativos. En la Fase 4, proceso de análisis de los datos, se hace el análisis de los datos y se realiza la reflexión sobre los resultados encontrados para determinar un nuevo subproblema. Con la generación de nuevos subproblemas se da lugar a un nuevo ciclo, hasta cuando se considera que se debe terminar el proceso.

3.3. Descripción general de registro de información y construcción de datos.

Los instrumentos que utilizamos para recoger los insumos en los diferentes ciclos de la investigación fueron:

- Apuntes personales tomados durante las clases.
- Grabación de las sesiones virtuales (asesoría, conversatorio, gestión de las tareas).
- Transcripciones de las grabaciones.
- Propuesta para ingresar a la Maestría.
- Anteproyecto del trabajo de grado.

En los siguientes capítulos, explicaremos con más detalle cuáles de estos instrumentos se utilizaron en cada ciclo investigativo y el tratamiento que se hizo a la información

En cada ciclo, los datos investigativos se extrajeron de una narración en la que describimos las acciones que realizamos en cada plan y lo que iba surgiendo de cada una (aclaraciones, reflexiones, inquietudes, respuestas de las inquietudes, etc.). Cabe destacar que en la narración del Ciclo 1, no se describieron las acciones realizadas sino las ideas que

evidenciamos sobre los asuntos de estudio. Esto debido a que, el plan de acción en este ciclo no fue propuesto por nosotras, sino por los profesores encargados de la cohorte 2020-1, entonces no veíamos la necesidad de narrar todo lo que sucedía para caracterizar los conceptos.

3.4. Categorías de análisis

Como hemos mencionado anteriormente, este estudio se centra en poder describir nuestro CDM-DD en relación a los asuntos argumentación y definiciones y, a través del análisis de varios Estados de este conocimiento, poder evidenciar su transformación. Es por ello que identificamos el estado de conocimiento que se evidenció en cada Ciclo investigativo y luego rastreamos ese conocimiento a lo largo de los ciclos para evidenciar si hubo una transformación. Para lograr lo anterior, utilizamos dos conjuntos de categorías que son la base para realizar este análisis, las cuales son: categorías de análisis de los Estados de nuestro CDM-DD y categorías de análisis de la transformación de nuestro CDM-DD.

3.4.1. Categorías de análisis de los Estados de nuestro CDM-DD

Para la construcción de estas categorías, nos basamos en las facetas epistémica (E), mediacional (M) y ecológica (Ec) de la Dimensión Didáctica del Modelo del CDM descritas en nuestro marco de referencia. Así mismo, construimos unos indicadores en forma de pregunta, con el fin de poder clasificar de forma más específica las ideas que daban cuenta de nuestro CDM-DD- identificadas en las narraciones de cada estado. Por último, a cada indicador le asignamos un código y un descriptor con el fin de facilitar el procedimiento de análisis. En la Tabla 3.1, mostramos las categorías que utilizamos para analizar nuestro CDM-DD, en las narraciones de cada estado, con relación a los asuntos argumento, argumentación, definiciones y definir.

Tabla 3.1

Categorías de análisis para los Estados de nuestro CDM-DD

Faceta	Indicadores del conocimiento	Códigos	Descriptor
Epistémica	Qué es	E1	Atributos que describen el objeto o relación.
	Para qué sirve	E2	Propósitos del objeto o relación.
	Con qué se relaciona	E3	Otros procesos u objetos matemáticos que tienen relación con el asunto.
	Cómo se representa o estructura	E4	Elementos que conforman al objeto o relación.
	Cómo se clasifica	E5	Tipificación del objeto o relación.
Mediacional	Cómo favorece (GD)	M1	Uso de GD para fomentar el proceso o comprensión del objeto o relación.
	Cómo favorece (Tareas)	M2	Tareas para fomentar el proceso o comprensión del objeto o relación.
Ecológica	Cuáles son las expectativas en cada curso	Ec1	Afirmaciones que expresan logros que se proponen curricularmente para promover el proceso en algún nivel escolar.

Cuando una frase que reflejaba nuestro conocimiento se refería a los asuntos argumentación o argumento, utilizamos el prefijo “Arg” en el código del indicador. En el caso de los asuntos definición y definir, utilizamos el prefijo “Def” en el código del indicador. Por ejemplo, si vamos a clasificar el fragmento: “es la expresión de un tema específico”, al referirnos a la argumentación, este se clasifica con el código ArgE1.

3.4.2. Categorías de análisis de la transformación de nuestro CDM-DD

Como las categorías anteriores solo permiten identificar el conocimiento en cada momento sobre cada asunto, requerimos otras categorías de análisis que nos permitiera reconocer cualquier transformación de nuestro CDM-DD. Fue necesario construir otras categorías que nos permitieran comparar el conocimiento sobre cada asunto, respecto a cada categoría, de una fase a otra. Estas categorías emergen cuando comparamos fragmentos de un mismo asunto, clasificados con el mismo indicador en el mismo estado o en diferentes estados. Nos dimos cuenta que los

cambios se encontraban en: diferencias en lo que se ha expresado, la forma como se han expresado las ideas, o la inclusión de nuevas ideas. Estos cambios son evidencia de una transformación. Por ello, titulamos las nuevas categorías como: Contenido, Forma, Novedad.

Respecto a Contenido, nos referimos al cambio que se identifica en las ideas expuestas. Estos cambios pueden darse en la ampliación de la idea, la profundización de ella o la reformulación de esta. Estos se convierten en los indicadores para esta categoría; en la

Tabla 3.2 se describe cada uno.

Con la categoría Forma, buscamos identificar cambios en la manera de comunicar las ideas. Las diferencias las encontramos en expresiones más claras o con mayor precisión. Estos se convierten en los indicadores para esta categoría, en la

Tabla 3.2 se describe cada uno.

En la categoría Novedad, nos referimos a aquello expresado que es información que no se ha mencionado en ningún estado y es relevante en nuestro CDM-DD.

Tabla 3.2

Categorías de análisis para la transformación de nuestro CDM-DD

Categoría	Indicadores	Código	Descriptor
Contenido	Amplitud	CO-A	Se refiere a una idea que extiende o incluye algo nuevo en lo expresado, al respecto, anteriormente.
	Profundización	CO-P	Se considera cuando se explican términos ya usados en una idea expresada anteriormente.
	Reformulación	CO-R	Se refiere a un cambio completo del contenido de una idea que se había expresado anteriormente.
Forma	Claridad	FO-Cl	Consiste en expresar la misma idea de otra forma, buscando mejorar la comunicación de esta.
	Precisión	FO-Pr	Se evidencia mayor rigurosidad en la expresión de una idea. Es decir, se utiliza un lenguaje especializado o específico.
Novedad	Nueva información	No	Se refiere a la nueva información y a la que es relevante en nuestro CDM-DD.

Para una mejor comprensión sobre el uso de estas categorías e indicadores, a continuación, presentamos un ejemplo. En el Estado 1, mencionamos que “(El argumento) sirve para justificar lo que se hace y se dice” y luego en el Estado 2 expresamos que “(El argumento) consiste en dar razones para justificar y convencer a alguien, o a uno mismo, sobre una declaración hecha”. La segunda afirmación modifica el contenido de la primera; específicamente, extiende la primera idea al decir que el argumento sirve también para convencer. Por eso lo clasificamos como categoría Contenido, indicador amplitud.

Como segundo ejemplo, en el Estado 1 expresamos que “(la argumentación sirve) para convencer o persuadir, sobre una declaración hecha y establecer una conclusión”. Luego, en el Estado 2 afirmamos que “(en la argumentación) se dan razones para justificar una declaración hecha”. Con lo anterior, evidenciamos que la segunda expresión aclara la idea expresada inicialmente. Por ello, lo clasificamos como Forma, indicador claridad.

4. Ciclo 1 de investigación

En este capítulo presentamos las cuatro fases que componen el Ciclo 1 de investigación. En la Fase 1, concretamos la inquietud que surgió porque los profesores encargados del desarrollo del programa evidenciaron carencias en nuestro CDM-DD con relación a los asuntos de estudio. En la Fase 2, los profesores diseñaron un plan de acción con el fin de resolver la inquietud que emergió en ese ciclo. En la Fase 3, realizamos el proceso que llevamos a cabo para capturar la información y convertirla en datos investigativos, en nuestro caso la narración del Estado Inicial y Estado 1 de nuestro CDM-DD. En la Fase 4, clasificamos nuestro CDM-DD identificado en las narraciones del Estado Inicial y Estado 1, y realizamos el análisis de lo que encontramos con base a las categorías. Por último, recogimos las inquietudes que surgieron a raíz de este ciclo de investigación y que dan origen al Ciclo 2 de investigación. A continuación, se presentan en detalle las acciones realizadas en cada fase.

4.1. Fase 1: Identificación del problema que dio lugar al Ciclo

En la propuesta inicial para ingresar a la Maestría, los profesores encargados del desarrollo del programa identificaron que en el conocimiento didáctico y matemático de los aspirantes existían incongruencias o carencias sobre temáticas como argumentación, gestión de tareas en las que interviene la argumentación y en nuestro caso, su relación con el proceso de definir. Por eso, plantearon como subproblema que da lugar al Ciclo1 la búsqueda de un mecanismo para favorecer que los estudiantes adquirieran conocimiento específico sobre esos asuntos.

4.2. Fase 2: Plan de acción para movilizar el conocimiento

Los profesores propusieron un plan de acción, el cual consistió en involucrar a los estudiantes de esta cohorte en un proceso de formación que fue implementado en los cursos

correspondientes al primer semestre del programa de Maestría. En la Tabla 4.1, presentamos una breve descripción de los cursos correspondientes.

Tabla 4.1

Descripción de los seminarios semestre 2020-1

Seminario	Descripción
Diseño y Desarrollo curricular	Este curso se centró en el diseño de tareas. Se abordó el estudio de la teoría sobre el diseño de tareas propuesta por Gómez (2016) y aspectos como el diseño de tareas con el uso de GD. Durante el curso, los estudiantes adoptamos, en diferentes momentos, el rol de resolutor o diseñadores de tareas, para analizar las tareas a la luz de la teoría. Lo anterior, con el fin de adquirir herramientas para diseñar tareas que promovieran la argumentación.
Profundización en Matemáticas Elementales	En este curso se profundizó en algunos temas de la geometría, a través de la resolución de problemas de conjeturación con el apoyo de GD que exigían, entre otras cosas, la justificación de la solución obtenida. Ello llevó a centrarse en la argumentación. Principalmente, se trabajó sobre el reconocimiento de lo que conforma un argumento y diferentes tipos de argumentos que surgen al abordar problemas.
Investigación innovación	La primera acción realizada en este curso fue convertir la problemática general, que fue identificada por los profesores de la cohorte, en el problema de investigación particular de cada estudiante, añadiendo a este el asunto de interés que cada uno tenía y que se expuso en el trabajo presentado para ingresar a la Maestría. Se proveyeron los elementos necesarios para poder identificar los antecedentes del problema de investigación, justificar su pertinencia, buscar la bibliografía adecuada y escribir, como producto final del curso, el anteproyecto.

Además, como parte del plan de acción, hubo otras actividades como: asistir a conferencias sobre argumentación presentadas por expertos en el tema y, en los cursos, proveer el espacio para la conversación y discusión entre los estudiantes de temáticas específicas, con la intención de que se reflexionara sobre el conocimiento que íbamos adquiriendo.

4.3. Fase 3: Implementación del plan y registro de información

En las diversas actividades del plan de acción, recogimos insumos para determinar los datos investigativos. A continuación, presentamos el proceso de captura de la información, y luego describimos el tratamiento que se hizo a dicha información para convertirla en datos.

4.3.1. Captura de la información

Una vez terminados los cursos del semestre 2020 – 1, cada una de nosotras se concentró en recoger la información sobre los asuntos relacionados con el problema de investigación de las siguientes fuentes. Esta información se encontraba registrada en papel y/o en archivo digital:

- Propuesta inicial para presentarnos a la Maestría.
- Apuntes personales tomados durante las clases. Estos apuntes son de diferente tipo: los que exponían los profesores en clase, nuestras interpretaciones personales de la lectura de diversos artículos de los asuntos de estudio, y comentarios de los profesores.
- Ideas tomadas de conferencias de expertos.
- Solución de las tareas propuestas en cada una de las clases.
- Anteproyecto, documento producido durante el semestre.

4.3.2. Tratamiento de la información

Inicialmente, realizamos una matriz con los siguientes campos: insumo (seminario), mes, año, palabra clave, tipo de insumo (reflexión, inquietud o concepto), descripción breve. En la tabla, cada una transcribió de los recursos mencionados anteriormente, los párrafos que daban cuenta de su conocimiento en relación a los asuntos de interés. Estos registros corresponden a reflexiones, comentarios, afirmaciones, argumentos o párrafos textuales de lo expresado por algún profesor (Ver ejemplo en Tabla 4.2).

Tabla 4.2

Ejemplo de la primera matriz en la que registramos los insumos

Insumo	Mes	Año	Palabra clave	Tipo de insumo	Descripción breve
Diseño y desarrollo curricular en matemáticas	Marzo	2020	Tareas	Conocimiento	Las tareas de aprendizaje son propuestas por el profesor con la intención de brindar oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y afectivas que ha establecido, además, para que superen las limitaciones que ha conjeturado que ellos tendrán. (Gómez, Mora, Velasco, 2018)
Diseño y desarrollo curricular en matemáticas	Marzo	2020	Tareas	Concepto	La tarea es una demanda estructurada con un contenido matemático y un propósito de aprendizaje. (Gómez, Mora, Velasco, 2018)

En el proceso, los campos de la matriz se modificaron varias veces, ya que se buscó la manera más adecuada de interpretar y consignar la información. La segunda versión de la matriz contenía campos como fecha, fuente, párrafos textuales, idea del texto en propias palabras y el asunto al que se refiere. Luego, surgió un nuevo ajuste agregando campos que indican lo que se evidenciaba del conocimiento previo, lo que conformaría el conocimiento nuevo e inquietudes que surgieron. Por último, se reformularon los campos quedando de la siguiente manera: fecha, fuente, texto como está en el documento, asunto, interpretación del texto, conocimiento previo (Estado Inicial), conocimiento nuevo (Estado 1) e inquietudes. (Ver ejemplo en Tabla 4.3).

Tabla 4.3

Ejemplo insumos extraídos del Anteproyecto sobre el constructo argumentación

No	Fecha	Fuente	Texto como esta en el documento	Asunto	Interpretación del texto	Conocimiento previo (Estado inicial)	Conocimiento nuevo (Estado uno)	Inquietudes
3	10 de junio 2020	Secuencia de tareas final Alarcón, Fernández	<p>El programa permite crear de forma macro la construcción de las circunferencias, lo cual no se podría hacer con lápiz y papel.</p> <p>El programa permite variar la posición del punto C, para identificar el lugar geométrico que determina.</p>	GD	<p>La GD permiten hacer construcciones macro; estas construcciones no se pueden hacer con lápiz y papel. En el programa se puede variar la posición de un punto y esto permite dibujar el lugar geométrico. Pero, no especifica cómo se genera el lugar geométrico.</p>	<p>En el programa se puede arrastrar un punto para variar su posición.</p>	<p>En la GD se puede representar el lugar geométrico que genera un punto cuando se arrastra. Pero, no es claro cómo se genera el lugar geométrico.</p>	<p>¿Qué condiciones se deben tener en cuenta para crear el lugar geométrico de algo?</p>

Los fragmentos registrados en la matriz se editaron, eliminando información, de manera que se mencionara únicamente lo que reflejaba el CDM-DD de cada una sobre los asuntos en cuestión. Luego, clasificamos la información, según el asunto al que se refería, en una matriz para cada una de nosotras. De esta clasificación se evidenció que había párrafos similares en las matrices de cada una. Por eso se realizó una nueva matriz en la que se puso la información que aparecía en ambas matrices, para ser considerada como conocimiento común.

Seguido, realizamos dos narraciones a partir de los fragmentos que hacían alusión al conocimiento previo y al conocimiento nuevo identificado en la última matriz. La primera narración la denominamos Estado Inicial (ver Anexo E), pues da cuenta de nuestro conocimiento al comenzar los estudios de Maestría; la segunda, la denominamos Estado 1 (ver Anexo F), ya que refleja nuestro CDM-DD sobre los asuntos en cuestión al finalizar el primer semestre de formación. Estas se convierten en los datos.

4.4. Fase 4: Proceso de análisis de los datos

Para realizar el análisis de los datos, utilizamos las categorías emergentes mencionadas en el capítulo anterior (Tabla 3.1). Para ello, en cada narración rastreamos los fragmentos en donde evidenciamos nuestro conocimiento y las clasificamos a partir de los indicadores propuestos para cada categoría. En la Tabla 4.4, presentamos las ideas expuestas sobre los asuntos de estudio en la narración del Estado Inicial.

Tabla 4.4*Clasificación de nuestro CDM-DD Estado Inicial*

Asunto	Fragmentos	Indicador
Argumento/ argumentación	Argumentar es demostrar. Tiene estructura lógica. Es la expresión de un tema específico.	ArgE1 (argumentación)
	Sirve para justificar lo que se hace y se dice.	ArgE2 (argumento)
	Permite resolver problemas.	ArgE2 (argumentación)
	Relaciona la argumentación con el razonamiento.	ArgE3 (argumentación)
	Es difícil que los estudiantes argumenten con el rigor que se exige en matemáticas.	ArgCog1 (argumentación)
Definición/ definir	(En la definición se) identifican las características y propiedades de objetos.	DefE1 (definición)
	Permite lograr el aprendizaje de los estudiantes. Favorece la conceptualización de los objetos geométricos.	DefE2 (definición)
	El uso de definiciones en la argumentación.	DefE3 (definición)
	(La GD) favorece la construcción de representaciones de figuras y la exploración empírica de estas, lo cual promueve un acercamiento informal a conceptos, relaciones y propiedades geométricas.	DefM1 (definición)
	Las construcciones se realizan con la intención de identificar las características y propiedades de objetos.	
	La tarea sirve para entrever lo que los estudiantes saben y por qué hacen lo que hacen, cuando están desarrollando un proceso para definir.	DefM2 (definir)

Nuestro CDM-DD en el Ciclo 1 Estado Inicial se ubica principalmente en las facetas epistémica, cognitiva y mediacional. En la Tabla 4.4, se puede observar que hay seis indicadores relacionados con la faceta epistémica; tres de ellos se refieren a argumentación, uno a argumento y dos a definiciones. También, hay un fragmento que se clasificó en la faceta cognitiva que se refiere a argumentación y dos que se clasificaron en la faceta mediacional con relación a definir y definición.

Con relación a la faceta epistémica, reconocemos que la argumentación es una expresión de un tema específico usando una estructura lógica (*ArgE1*), relacionábamos la argumentación con el razonamiento (*ArgE3*) e identificamos su utilidad para resolver problemas (*ArgE2*). Respecto al argumento, aceptamos que este sirve para justificar lo que se hace y se dice (*ArgE2*).

En cuanto a la definición, admitimos que en esta se identifican las características y propiedades de objetos (*DefE1*). Conocemos que esta permite el aprendizaje y favorece la conceptualización de los objetos geométricos (*DefE2*). Además, reconocemos que se relaciona con la argumentación (*DefE3*).

En la faceta cognitiva de argumentación se encuentra un fragmento en el que se expresa que aprender a demostrar formalmente es un proceso difícil (*ArgCog1*), pero sin indicar en qué consisten las dificultades.

En la faceta mediacional, respecto a la definición, reconocemos que el uso de GD pone en juego la definición para realizar o explorar construcciones (*DefM1*). Con relación a definir, conocemos que hay tareas que dejan entrever el conocimiento que tienen los estudiantes de un objeto, cuando lo tratan de definir (*DefM2*).

En la Tabla 4.5, listamos las ideas encontradas sobre los asuntos de estudio en la narración del Estado 1.

Tabla 4.5

Clasificación de nuestro CDM-DD Estado 1

Asunto	Fragmentos	Indicador
Argumento/ argumentación	Proceso comunicativo en el que se produce un discurso. Se desarrolla de acuerdo con “normas establecidas” y/o “normas compartidas”. Consiste en dar razones. La demostración es una secuencia de afirmaciones que, es organizada y/o lógica.	ArgE1 (argumentación)

	Para demostrar se utilizan afirmaciones que son verdaderas y aceptadas, se emplean esquemas de razonamiento.	
	Es un enunciado oral o escrito.	ArgE1 (argumento)
	Consiste en dar razones para convencer o persuadir, sobre una declaración hecha. Establecer una conclusión. La secuencia en la demostración busca establecer la validez o no de una afirmación.	ArgE2 (argumentación)
	Producto de un razonamiento. La demostración es un tipo especial de argumentación. La conjetura es una afirmación de la que se tiene alto grado de convicción de su certeza. Esta se convierte en un hecho cuando se demuestra.	ArgE3 (argumentación)
	El argumento está conformado por dato, aserción y garantía. La garantía es una proposición general que relaciona el dato con la aserción. Siendo el dato y aserción proposiciones particulares.	ArgE4 (argumento)
	Los argumentos se clasifican en: deductivos, inductivos, abductivos y analógicos. En un argumento deductivo se aplica la garantía al dato conocido para obtener la aserción. En un argumento abductivo, se conocen la aserción y la garantía, y se usan para inferir un posible dato. En un argumento inductivo, se tiene un número n de casos que particularizan el dato y se descubre que ellos cumplen otra propiedad (la aserción). En un argumento inductivo se infiere la garantía, la cual es una relación que se caracteriza por ser plausible.	ArgE5 (argumento)
	El proceso de visualización y exploración con la GD favorece los procesos de argumentación, conjeturación y prueba.	ArgM1 (argumentación)
	Problema de búsqueda del consecuente, favorece la producción de argumentos inductivos. Problemas de búsqueda del antecedente, favorece la producción de argumentos abductivos.	ArgM2 (argumentación)
Definición/ definir	La definición juega el papel de establecer la relación entre la representación gráfica y un conjunto de propiedades. Permite generar significado de los objetos geométricos. La definición se utiliza como garantía en las demostraciones.	DefE2 (definición)

	Las definiciones se utilizan como garantías en las demostraciones	DefE3 (definición)
	El uso de la GD permite representar objetos geométricos, visualizar y descubrir propiedades variantes e invariantes.	DefM1 (definición)

Nuestro CDM-DD en el Ciclo 1 Estado 1 se ubica principalmente en las facetas epistémica y mediacional. En la Tabla 4.5, se puede observar que hay ocho indicadores relacionados con la faceta epistémica; tres de ellos se refieren a la argumentación, tres a argumento y dos a definiciones. También, hay cuatro indicadores de la faceta mediacional: dos se refieren a argumentación y dos a definición.

Respecto a los indicadores que refieren a la argumentación, con relación a la faceta epistémica, manifestamos que esta es un proceso comunicativo en el que se produce un discurso de acuerdo a unas normas, en el que se emplean esquemas de razonamiento (*ArgE1*). Admitimos que los propósitos de esta son: dar razones para convencer o persuadir sobre una declaración hecha y establecer una conclusión (*ArgE2*). Afirmamos que la argumentación es producto del razonamiento (*ArgE3*). Además, reconocemos la relación de esta con la demostración y la conjetura. En relación a la faceta mediacional, reconocemos que se puede favorecer la argumentación a partir del uso de GD a partir de los procesos de visualización y exploración (*ArgM1*). Conocemos que las tareas que incluyen problemas de búsqueda de consecuente y búsqueda de antecedente promueven la producción de argumentos (*ArgM2*).

Respecto a los indicadores que se refieren a argumento, en relación a la faceta epistémica, afirmamos que este es un enunciado verbal o escrito (*ArgE1*). Reconocemos que los elementos que conforman su estructura son: dato, aserción y garantía (*ArgE4*). Conocemos que los tipos de argumentos son: inductivo, abductivo y deductivo (*ArgE5*).

Para el asunto definiciones, con relación a la faceta epistémica, ubicamos nuestro conocimiento en dos indicadores: *DefE2* y *DefE3*. Respecto al primero, reconocemos que los propósitos de la definición son: establecer la relación entre la representación gráfica y un conjunto de propiedades, dotar de significado los objetos geométricos y ser garantía en la demostración. En el segundo, admitimos que las definiciones y las demostraciones se relacionan. Con relación a la faceta mediacional, entendemos que la GD favorece la definición, ya que permite representar objetos geométricos para visualizar y descubrir propiedades variantes e invariantes (*DefM1*).

4.5. Problemática que surgió del Ciclo 1

Producto del proceso de identificar las ideas que expresamos respecto a los asuntos de estudio y del análisis anterior, surgieron varios cuestionamientos sobre la argumentación (Tabla 4.6), los cuales nos llevaron a realizar un Ciclo 2. El plan de acción consistió en releer artículos estudiados en los cursos vistos durante el Ciclo 1, para poder aclarar las ideas y buscar respuestas a nuestras preguntas.

Tabla 4.6

Cuestionamientos sobre argumentación Ciclo

Asunto	Cuestionamiento
Argumentación	<ol style="list-style-type: none"> 1. ¿Qué es una norma compartida? 2. ¿Las normas son compartidas o establecidas? 3. ¿A qué tipo de normas se refiere? 4. ¿Qué diferencia existe entre argumentación y argumento? 5. ¿Qué es una conjetura? 6. ¿Qué es una secuencia lógica? 7. ¿Qué son esquemas de razonamiento? 8. ¿Qué es validar? 9. ¿A qué se refiere que la regla general no es única, en el argumento abductivo? 10. ¿A qué hacen alusión los autores sobre las estructuras argumentativas?

5. Ciclo 2 de investigación

En este capítulo presentamos las cuatro fases que componen el Ciclo 2 de nuestro estudio. En la Fase 1, concretamos la inquietud que surgió luego de ejecutar y analizar el plan de acción del Ciclo 1. En la Fase 2, diseñamos el plan de acción con el fin de resolver la inquietud que emergió en ese ciclo. En la Fase 3, realizamos el proceso que llevamos a cabo para capturar la información y convertirla en datos investigativos, en nuestro caso la narración del Estado 2 de nuestro CDM-DD. En la Fase 4, clasificamos nuestro CDM-DD identificado en la narración del Estado 2 y efectuamos el análisis de lo que encontramos con base a las categorías. Por último, recogimos las inquietudes que surgieron a raíz de este ciclo de investigación, lo cual dio lugar a un Ciclo 3 de investigación. A continuación, se presentan en detalle las acciones realizadas en cada fase.

5.1. Fase 1: Identificación del problema que dio lugar al Ciclo 2

Producto del estudio y análisis hecho en el Ciclo 1, logramos identificar nuestras concepciones sobre los asuntos de estudio. Respecto a argumentación y argumento, establecimos una definición personal para cada uno. Además, reconocimos la estructura de un argumento y tipos de argumento. Respecto a tarea, identificamos el propósito de diseñar tareas, los elementos que componen una tarea y algunos tipos de esta. En relación a GD, dimos una definición personal de esta y lo que consideramos son los propósitos de su uso en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. También, mencionamos algunas acciones que se pueden realizar en un ambiente de geometría dinámica. Con referencia a definiciones, reconocimos que el uso de estas en el aula de geometría favorece el aprendizaje.

En el Ciclo 1, surgieron diferentes cuestionamientos sobre nuestro conocimiento de los asuntos de estudio. Dado que la mayoría de las dudas que surgieron eran sobre las características

y conceptos involucrados con la argumentación, decidimos que para poder hacer un estudio juicioso de este asunto era mejor enfocarnos únicamente en la argumentación.

5.2. Fase 2: Plan de acción para movilizar el conocimiento

Propusimos el plan de acción atendiendo a dos propósitos: primero, dar respuesta a las preguntas que surgieron en el Ciclo 1 y segundo, buscar una actividad que nos obligara a usar nuestro CDM--DD sobre argumentación y argumento. Con respecto al primer propósito, decidimos realizar la lectura de los documentos que se muestran en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1

Referentes teóricos para realizar lecturas

Cuestionamiento	Artículos
¿Qué es una norma compartida? ¿Las normas son compartidas o establecidas? ¿A qué tipo de normas se refiere?	Molina, Pino-Fan (2018) Molina y Samper (2019)
¿Qué diferencia existe entre Argumentación y argumento?	Molina, Font, Pino-Fan (2019)
¿Qué es una secuencia lógica? ¿Dónde está el dato, la garantía y la aserción en la demostración? ¿Qué son esquemas de razonamiento?	Molina y Samper (2019) Stylianides (2007)
¿Cómo los argumentos inductivos y abductivos sirven para validar argumentos deductivos? ¿Qué es validar?	Molina y Samper (2019) Stylianides (2007)
¿A qué se refiere que la regla general no es única, en el argumento abductivo?	Molina y Samper (2019) Stylianides (2007)
¿De qué manera la abducción provee los pasos de la construcción de un objeto geométrico? ¿A qué se refiere con actividad matemática cuando se induce una conjetura? ¿Acaso la conjetura no hace parte de esa actividad matemática?	Molina, Font, Pino-Fan (2019) Toulmin (2003)
¿A qué hace alusión los autores sobre las estructuras argumentativas?	Schwarz y Kaiser (2009)

Respecto al segundo propósito, diseñamos una tarea sobre argumento y argumentación para implementarla en un conversatorio con compañeros del trabajo. Nuestro objetivo para esta

acción era identificar en lo que se propone como tarea, en lo que se discute durante el diseño y en la interacción sobre la tarea con la asesora, elementos de nuestro conocimiento sobre argumento y argumentación, y encontrar, posiblemente, modificaciones de nuestro CDM-DD.

5.3. Fase 3: Implementación del plan y registro de información

Durante la realización de la primera acción del plan, identificamos fragmentos de los artículos de los cuales surgieron los cuestionamientos presentados anteriormente.

Individualmente, realizamos las lecturas interpretando los fragmentos para dar respuesta a dichas inquietudes. Luego, establecimos conjuntamente la respuesta. Después, en asesoría con la profesora, socializamos la información correspondiente con el fin de aclarar las ideas que teníamos e identificar algún cambio en nuestro conocimiento. En la Tabla 5.2, presentamos un ejemplo de la matriz en la que consignamos la información.

Tabla 5.2

Ejemplo matriz de información recolectada

Cuestionamiento	Fuente	Nuestra respuesta a la pregunta
¿Qué es una norma compartida?	Molina, Pino-Fan (2018) Samper y Molina (2019)	Las normas compartidas en la argumentación son reglas acordadas por un grupo social para establecer determinadas formas de proceder en el proceso. Estas reglas son el producto de los significados convenidos por el grupo para establecer la veracidad o falsedad de una declaración. En particular, el grupo social acepta cuáles son los elementos del sistema teórico compartido que se pueden utilizar como garantía en los argumentos, establece las reglas de inferencia lógica que se pueden utilizar en los argumentos para justificar la declaración, y la forma como se pueden representar los argumentos (en tabla, párrafo, esquema, etc.). Lo anterior, con el fin de facilitar la comunicación entre los integrantes del grupo social.

Durante el desarrollo de la segunda acción, recogimos información en varios momentos. El primero, cuando diseñamos una tarea que denominamos “test acerca de argumentación”. El segundo momento, durante la presentación de la tarea diseñada a la profesora en la asesoría;

como producto de esta obtuvimos una segunda versión de la tarea. El tercer momento, cuando gestionamos la aplicación de la segunda versión de la tarea a los compañeros de la maestría. A partir de lo que ocurrió en esta gestión, hicimos una última modificación, obteniendo la versión final de la tarea (ver Anexo A).

Para capturar información sobre nuestro conocimiento respecto a argumentación y argumento, realizamos la grabación de las sesiones de asesoría y de la experimentación de la tarea, y se realizaron las respectivas transcripciones. Luego, escogimos en las transcripciones los fragmentos en los que se evidenció nuestro CDM-DD. Después, utilizamos esta información para hacer una narración denominada Estado 2 (ver Anexo G), la cual da cuenta de nuestro CDM-DD adquirido durante este ciclo respecto a argumento y argumentación.

5.4. Fase 4: Proceso de análisis de los datos

Para realizar el análisis, se utilizó el mismo procedimiento usado en el Ciclo 1. Pero, a diferencia del ciclo anterior, en el proceso de análisis identificamos que las ideas rastreadas se podían clasificar en dos tipos: descripciones generales e ilustraciones. La primera se refiere a las expresiones que describen de manera general el asunto o relación. La segunda se refiere a fragmentos de las transcripciones en las que tomamos ejemplos que ilustran el asunto o relación. Estas ideas son expresiones nuestras cuando teníamos una conversación con los compañeros o la profesora. Por ello, en la Tabla 5.3 agregamos la columna ilustraciones. En esta presentamos las ideas rastreadas en la narración del Estado 2.

Tabla 5.3

Clasificación de nuestro CDM-DD Estado 2

Asunto	Descripciones generales	Ilustraciones	Indicador
Argumento/ argumentación	La argumentación es un proceso comunicativo. La argumentación expone un argumento. Se utilizan normas compartidas para mejorar el lenguaje (matemático) de los estudiantes.		ArgE1 (argumentación)
	El argumento es una expresión discursiva. Se realiza de acuerdo con normas compartidas. En un argumento debe haber una declaración. En un argumento se justifica algo. Hay tipos de discurso que pueden ser usados para dar argumentos Las normas se refieren a unos acuerdos respecto al conocimiento matemático Es una secuencia conectada de afirmaciones a favor o en contra de una afirmación matemática.	Y una expresión discursiva puede ser una representación. (Esta) podría ser argumento, en el sentido en el que él (el estudiante) coja la representación para decir “mire el segmento AM es la mediana, porque el punto M , yo lo construí, siendo el punto medio del segmento BC . Y yo tracé el segmento teniendo en cuenta un extremo del triángulo y ese punto. Por eso es que el segmento AM es la mediana”	ArgE1 (argumento)
	Se dan razones para justificar una declaración hecha. Proceso en el que se comunican los argumentos. Es un proceso en el que no solo consiste en hacer un dibujo y ya, sino en el que consiste en mostrar y convencer a alguien de lo que uno hizo.		ArgE2 (argumentación)
	Consiste en dar razones para justificar y convencer a alguien, o a uno mismo, sobre una declaración hecha.		ArgE2 (argumento)

	Para justificar la declaración se utilizan proposiciones o conjeturas.		
	<p>La argumentación y el razonamiento son procesos diferentes.</p> <p>Las estructuras argumentativas se consideran las pruebas pre-formales y formales. Las pruebas pre formales es un conjunto de aserciones que no se presentan en un esquema de demostración formal y pueden provenir de una exploración intuitiva. Las pruebas formales una cadena de aserciones verdaderas que se sustentan por medio de axiomas, teoremas y definiciones del sistema axiomático, que conforma una secuencia de argumentos deductivos.</p>		ArgE3 (argumentación)
	<p>El argumento es producto de un razonamiento. Es decir, emerge en el proceso de razonar.</p> <p>El argumento se puede generar en el proceso de conjeturar.</p> <p>El argumento puede llegar a ser parte de la demostración cuando la proposición general (garantía) pertenece al sistema axiomático.</p>	<p>Siempre que uno va a dar una respuesta a algo, va a responder una pregunta, generalmente uno razona, ... de manera mental el cerebro conecta todos los conceptos, teoremas, representaciones, significados, que tiene sobre lo que le están preguntando, para que después, pueda que genere un argumento, como pueda que no, pero sí nace de ahí el argumento.</p>	ArgE3 (argumento)
	<p>Los elementos del argumento son proposiciones.</p> <p>Un argumento está estructurado por seis elementos: dato, garantía, aserción, respaldo a la garantía, refutación, cualificador modal.</p> <p>En un argumento puede identificarse el dato y la</p>	<p>Un argumento sería si tú me preguntas a mí.</p> <p>“Jenifer, ¿el AM (dato) qué relación tiene con el ΔABC?” y yo te digo, “ahh pues es la mediana” (aserción) y tú me dices “¿por qué es la mediana?”. Yo te respondo “porque es el segmento que une el</p>	ArgE4 (argumento)

	<p>aserción, no es necesario que la garantía sea explícita. Se representan argumentos con el esquema “qué sé, qué uso y qué concluyo”. Las razones para justificar son el dato. La conclusión es la misma aserción. El dato se refiere a esas afirmaciones o esas razones que buscan justificar la declaración que hicimos. Entonces, la aserción se convierte como en la conclusión, declaración, afirmación o proposición. La garantía es el elemento del sistema teórico.</p>	<p>vértice con el punto medio del lado opuesto” (dato). La regla general sería la definición de mediana. No es argumento, porque es una afirmación que no incluye dato; no tiene los elementos de la estructura de un argumento. En el Ejemplo 2, nos dimos cuenta que se presentan dos aserciones, por lo cual corroboramos que ese argumento está compuesto por dos argumentos diferentes. No se explicitan las garantías. El dato del primer argumento sí se expresa, y la aserción del primer argumento se convierte en dato del segundo argumento.</p>	
	<p>Los modos de argumentación que se usan son: - La aplicación de reglas lógicas de inferencia como el modus ponendo ponens, modus tollendo ponens, modus tollendo tollens. - Uso de definiciones para derivar enunciados generales. - Enumeración sistemática de todos los casos a los que se reduce un enunciado (dado que su número es finito). - Construcción de contraejemplos. - Desarrollo de un razonamiento en el que se muestra la aceptación de una declaración que conduce a una contradicción, etc.</p>		ArgE5 (argumentación)
	<p>Argumentos nucleares. Argumento simple: es un argumento que está compuesto</p>	<p>A mí se me hace que eso que está ahí es argumento abductivo,</p>	ArgE5 (argumento)

	<p>de mínimo tres proposiciones: aserción y dato, que deben estar explícitos, y garantía, que puede o no estar explícita.</p> <p>Argumento global: es un argumento compuesto por una cadena de argumentos simples.</p> <p>En un argumento abductivo, la procedencia de la proposición general (garantía) no es única, ya que puede provenir de una exploración empírica (conjetura) o puede ser una regla aceptada como elemento del sistema axiomático con el que se cuenta (exploración teórica).</p>	<p>porque estoy diciendo, “construyo la mediana (aserción)”. Sé cómo construirla. Luego digo por qué esa es la mediana: “ya que es el segmento ...” (dato).</p>	
Definición / definir	<p>La definición incluye los atributos necesarios para identificar ejemplos y no ejemplos.</p>	<p>Yo ya sé que eso es una mediana. Entonces, por la definición de mediana, yo sé que tengo que tener el segmento; tengo que encontrar el punto medio del segmento y trazar la mediana.</p>	DefE1 (definición)
	<p>Describe como se construye el objeto.</p> <p>Para resolver un problema, se comparan las propiedades mencionadas en el problema con las definiciones que se conocen.</p>	<p>Para resolver un problema, se comparan las propiedades mencionadas en el problema con las definiciones que se conocen, se identifican las figuras geométricas requeridas, se determinan qué herramientas de GeoGebra son útiles para construir las figura y se realiza la construcción correspondiente.</p>	DefE2 (definición)

Nuestro CDM-DD en el Ciclo 2 Estado 2 se ubica únicamente en la faceta epistémica. En la Tabla 5.3 se presentan treinta y siete fragmentos, de los cuales ocho refieren a argumentación, veinticinco a argumento y tres a definiciones. También se puede observar que hay once ilustraciones, las cuales están relacionadas con los fragmentos en los que expresamos ejemplos

y/o no ejemplos de argumento o uso de definiciones. Entre estas, nueve son sobre argumento y dos sobre definiciones.

Respecto a la argumentación, indicamos que este es un proceso comunicativo en el que se expone un argumento usando normas compartidas (*ArgE1*). Expresamos que este proceso consiste en justificar algo que se afirma y convencer a otros (*ArgE2*). Reconocemos que la definición se relaciona con el razonamiento y la demostración (*ArgE3*).

Con relación a argumento, identificamos que este es una expresión discursiva en la que se justifica una declaración hecha usando normas compartidas (*ArgE1*). Conocemos que el propósito de este es dar razones para justificar y convencer a alguien o a uno mismo sobre una declaración. Además, aceptamos que para justificar una declaración se utilizan proposiciones (*ArgE2*). Entendemos que los argumentos se relacionan con el razonamiento, la conjeturación y la demostración (*ArgE3*). Reconocemos que un argumento está compuesto de seis elementos, pero nosotras solo consideramos tres de ellos: dato, aserción y garantía (*ArgE4*).

Adicionalmente, indicamos que es suficiente que la expresión esté compuesta de solo dato y aserción para que sea argumento. Distinguimos otros tipos de argumentos como: los nucleares, los simples y globales (*ArgE5*). Además, entendemos que, en un argumento abductivo la garantía puede provenir de una exploración empírica o de una exploración teórica.

Con relación a definición, expresamos que esta incluye atributos necesarios para identificar ejemplos y no ejemplos de un objeto (*DefE1*). Reconocemos que algunos propósitos de esta son: describir un objeto, comparar sus propiedades, realizar la construcción de un objeto y resolver problemas (*DefE2*).

5.5. Cambios significativos en nuestro CDM-DD en el Ciclo 2

En el Ciclo 2, identificamos una transformación de nuestro CDM-DD, lo cual se evidenció en el indicador *Qué es*. Al iniciar este ciclo, nuestra definición de argumentación y de argumento surgió producto del plan de acción del Ciclo 1. A continuación, presentamos estas:

Argumentación: es un proceso en el que se produce un discurso, es decir, es un proceso comunicativo, producto de un razonamiento. Consiste en dar razones para convencer o persuadir a alguien, o a uno mismo, sobre una declaración hecha, con el fin de establecer una conclusión.

Argumento: es un enunciado oral o escrito producto de la argumentación.

Pero, como presentamos en la narración del Estado 2 (ver Anexo G), surgió un cambio en estas definiciones a raíz de las discusiones que tuvimos con la profesora cuando socializamos el diseño de la tarea propuesta en el plan de acción de este ciclo. Esto debido a que lo que expresábamos en nuestro discurso, cuando nos referíamos a la definición de argumento, eran los atributos de la definición que teníamos de argumentación. Aquí presentamos las definiciones de argumentación y argumento nuevas:

Argumentación: Es un proceso comunicativo en el que se exponen los argumentos.

Argumento: es una expresión discursiva, producto de un razonamiento, que se realiza de acuerdo con normas compartidas, y que consiste en dar razones para justificar y convencer a alguien, o a uno mismo, sobre una declaración hecha.

5.6. Problemática que surgió del Ciclo 2

Como se presenta en la narración de Estado 2 (ver Anexo G), expresamos “No sé si estoy haciendo uso del proceso de definir o, más bien, estoy haciendo uso de una definición, o estoy argumentando”. En lo anterior, se evidencia que es necesario poder responder la siguiente pregunta: *¿qué relación existe entre definición y argumento?* Esto nos llevó a realizar el Ciclo 3

de investigación. Además, en la Tabla 5.4 presentamos las demás inquietudes que surgieron a partir de la pregunta anterior.

Tabla 5.4

Cuestionamientos sobre argumentación Ciclo 1

Asunto	Cuestionamiento
Definición/ Definir	<ol style="list-style-type: none">1. ¿Qué es definir?2. ¿Qué es definición?3. ¿Cuál es el propósito de las definiciones?4. ¿Cuál es su estructura?5. ¿Qué tipos de definiciones hay?6. ¿Cuál es el vínculo que tienen las definiciones con la argumentación?

6. Ciclo 3 de investigación

En este capítulo describimos las cuatro fases que componen el Ciclo 3 de nuestra investigación. En la Fase 1, concretamos la inquietud que surgió en el ciclo anterior y que deseamos resolver en este ciclo. En la Fase 2, diseñamos el plan de acción cuyo fin era dar respuesta a nuestra inquietud. En la Fase 3, realizamos el proceso para capturar la información y convertirla en datos investigativos, en nuestro caso la narración del Estado 3 de nuestro CDM-DD. En la Fase 4, clasificamos nuestro CDM-DD identificado en la narración del Estado 3 y realizamos el análisis de lo que encontramos con base a las categorías. Por último, presentamos las inquietudes que surgieron al finalizar este ciclo de investigación. Pero, no llevaremos a cabo un Ciclo 4 de investigación para dar respuesta a estas inquietudes por la falta de tiempo para ejecutarlo. A continuación, presentamos con detalle lo realizado en cada fase.

6.1. Fase 1: Identificación del problema que dio lugar al Ciclo

A partir del plan de acción y análisis realizado a los datos obtenidos en el Ciclo 2, logramos ampliar nuestro CDM-DD con relación a los asuntos argumento y argumentación. Principalmente, modificamos las definiciones de argumento y argumentación que teníamos en el ciclo anterior. Esto nos sirvió para establecer la diferencia entre estos dos asuntos. Con esto logramos dar respuesta a una de las inquietudes que dieron origen al Ciclo 2 de nuestra investigación. Además, expresamos de forma espontánea nuestra caracterización del asunto “definición” y algunos de sus propósitos.

Durante una de las acciones realizadas en el Ciclo 2, expresamos “[...] No sé si estoy haciendo uso del proceso de definir o, más bien, estoy haciendo uso de una definición, o estoy argumentando...” (ver Anexo G). Con esto, como mencionamos en el capítulo anterior,

evidenciamos que existía una inquietud: *¿qué relación existe entre definición y argumento?* Por ello, en este ciclo nos enfocaremos en dar respuesta a esta pregunta.

6.2. Fase 2: Plan de acción para movilizar el conocimiento

Diseñamos un plan de acción con el fin de cumplir dos propósitos: primero, ampliar nuestro conocimiento sobre definición, dado que en los ciclos anteriores no habíamos tocado este tema de manera explícita, y segundo, poder dar respuesta a la pregunta que surgió en el Ciclo 2.

Con el fin de poder cumplir estos propósitos se desarrollaron las siguientes acciones:

- 1) Revisar la literatura para ampliar nuestro conocimiento sobre el asunto “definiciones” y el vínculo que tiene esta para favorecer la argumentación. Para ello, consultamos autores como: Freudenthal (1973), de Villiers (1998), Calvo (2001), Silva (2013), y Camargo y Samper (2014). Buscamos encontrar respuestas a las siguientes preguntas: ¿qué es definir?, ¿qué es definición?, ¿cuál es el propósito de las definiciones?, ¿cuál es su estructura?, ¿qué tipos de definiciones hay?, ¿cuál es el vínculo que tienen las definiciones con la argumentación?
- 2) Resolver una tarea propuesta por la profesora con el fin de hacer visible el conocimiento que habíamos adquirido sobre definiciones. La tarea consistía en proponer una definición a partir de los atributos necesarios y suficientes identificados en los ejemplos y no ejemplos de una figura geométrica llamada fala (ver Anexo C)
- 3) Diseñar una tarea sobre definiciones para ser implementada con profesores de matemáticas de las instituciones donde trabajamos. Nuestro objetivo para realizar esta acción fue evidenciar, durante las discusiones en las asesorías sobre la tarea diseñada y en el análisis a las definiciones propuestas por lo profesores, la incorporación de nuevo CDM-DD sobre el asunto definición (ver Anexo B)

- 4) Diseñar una tarea para nuestros compañeros de trabajo o para estudiantes con buenos conocimientos de cuadriláteros y congruencia de triángulos, cuya meta es favorecer, a través del uso de definiciones, la argumentación. Nuestro objetivo para realizar el diseño de esta tarea era evidenciar en el proceso de resolución de esta y durante el análisis de la misma con la profesora, nuestro CDM-DD sobre el uso de las definiciones para argumentar (ver Anexo D)

6.3. Fase 3: Implementación del plan y registro de información

En la primera acción del plan, de manera individual, realizamos la lectura de los artículos escogidos, con el fin de identificar los fragmentos del texto que nos permitían dar respuestas a las preguntas planteadas sobre el asunto “definición”. Luego, conjuntamente, realizamos nuestra interpretación de cada uno de los fragmentos, para dar respuesta a las preguntas o plantear nuevas inquietudes que surgieran. Para registrar dicha información, construimos una tabla. En las asesorías realizábamos lectura de la información registrada en una tabla, con el fin de identificar si coincidíamos en las interpretaciones de las ideas expuestas por los autores. En el caso de que nuestras propuestas fueran ambiguas o no se entendieran, la profesora nos proponía ejemplos para aclarar nuestras ideas. En la Tabla 6.1, presentamos un fragmento de la tabla mencionada anteriormente.

Tabla 6.1

Fragmento de la tabla asunto definición

Fuente	Fragmento del texto	¿Qué entendimos?	Inquietudes o aclaraciones
Camargo y Samper (2014)	Dos propósitos del curso Elementos de Geometría tienen que ver con las definiciones: uno, aprender a definir objetos geométricos y dos,	Se identifican dos acciones particulares relacionadas con el proceso de definir: Aprender a definir objetos geométricos	¿Cuál es la diferencia entre definir y definición? Definir es el proceso en el que se construye una definición (se mencionó anteriormente).

	<p>aprender a extraer información de una definición. En el primer caso, se trata de poder construir un enunciado verbal que determine de manera clara, precisa y sin redundancias, un objeto geométrico a partir de un conjunto de propiedades. En el segundo caso, se trata de poder sacar conclusiones derivadas de una definición para, por ejemplo, producir un argumento deductivo. En esta sección nos referimos a ambos propósitos.</p>	<p>Aprender a extraer información de una definición, es decir, sacar la información más relevante que sirva de camino a la producción de argumentos.</p>	<p>La definición es el resultado o producto del proceso de definir (el enunciado verbal o escrito...)</p>
--	--	--	--

La segunda acción consistió en, de manera individual, resolver la tarea propuesta por la profesora y de manera conjunta proponer una solución para presentársela (ver Anexo C). Luego, en la asesoría se discutió la solución propuesta por nosotras; la profesora nos cuestionó sobre diversos asuntos en relación al proceso de definir y definición.

Durante la tercera acción, realizamos una primera versión del diseño de la tarea para nuestros compañeros de trabajo. Luego, presentamos el diseño a la profesora que llevó a un análisis de la tarea. Producto de esta surgieron algunos ajustes a ella, con lo que obtuvimos la segunda versión de esta (ver Anexo B). Además, presentamos la tarea a los compañeros de trabajo, gestionamos la aplicación, y luego informamos a la profesora lo que había ocurrido durante esta implementación.

La cuarta acción consistió en diseñar la tarea (ver Anexo D) para compañeros de trabajo o estudiantes que cuenten con buenos conocimientos de cuadriláteros y congruencia de triángulos para resolverla. El propósito principal fue tener otro insumo para identificar nuestro

conocimiento sobre definiciones y argumentación, específicamente el uso de la definición para argumentar. En la asesoría analizamos con la profesora algunos aspectos del diseño de la tarea y la solución propuesta por nosotras. Algunos ejemplos de los aspectos analizados en las tareas son: el lenguaje que se utiliza, la claridad de las preguntas, las posibles respuestas que podrían dar los estudiantes, si había coherencia entre lo que se podía lograr con la tarea y las metas de aprendizaje, los elementos de la tarea, etc.

En las acciones implementadas, realizamos el proceso de captura de la información a partir de la grabación de las sesiones de asesoría y de la experimentación de la tarea con nuestros compañeros de trabajo, y produjimos las respectivas transcripciones. Luego, extrajimos de las transcripciones los fragmentos en los que se evidenció nuestro CDM-DD sobre definición y su uso en la construcción de argumentos. Después, utilizamos esta información para realizar una narración denominada Estado 3 (ver Anexo H) la cual da cuenta del conocimiento adquirido durante este ciclo respecto a definición, definir y el vínculo entre definición y argumentación.

6.4. Fase 4: Proceso de análisis de los datos

El proceso de análisis se realizó utilizando el mismo procedimiento usado en los anteriores ciclos. En la Tabla 6.2, presentamos las ideas principales extraídas de los fragmentos que seleccionamos de la narración del Estado 3, en los que se evidencia nuestro conocimiento. Estas las clasificamos en descripciones generales o ilustraciones según la categoría y el indicador.

Tabla 6.2

Clasificación de nuestro CDM-DD en el Estado 3

Asunto	Descripciones generales	Ilustraciones	Indicador
Argumento Argumentación	Si el argumento es abductivo, también se establece una conjetura.	Para que me dé rectángulo, parece que necesito hacer que las diagonales sean congruentes y que se bisequen. ¿Eso es un argumento? [...] ¿Qué tipo de argumento? [...] Es abductivo porque	ArgE5 (argumento)

Asunto	Descripciones generales	Ilustraciones	Indicador
Argumento / Argumentación	Un argumento es inductivo cuando a partir de unos datos que se generalizan se crea una conjetura.	conozco la aserción y en este caso el dato es plausible, o sea hay que probarlo. [...] Pues es abductivo porque nosotras partimos de que fuera (el cuadrilátero) un rectángulo. Y que encontraríamos las condiciones para que el cuadrilátero fuera rectángulo.	
		[...] El problema es de búsqueda de antecedente; es necesario hacer la construcción a partir de los datos en el enunciado (un cuadrilátero y sus diagonales) y explorar qué condición de las diagonales hace que se cumpla el consecuente (ser rectángulo)	ArgM1 (argumentación)
		[...] El problema es de búsqueda de antecedente porque queremos que la consecuencia sea ser un rectángulo.	ArgM2 (argumentación)
Definición / definir	<p>Una definición matemática es un enunciado verbal o escrito que determina de manera clara, precisa y consistente los atributos de un objeto matemático; es decir, que es fácil de comprender, incluye los atributos necesarios y suficientes para caracterizar el objeto matemático y no tiene contradicciones lógicas.</p> <p>Las definiciones tienen una característica de minimalidad, la cual consiste en que la definición sea económica; es decir, que contenga solamente los atributos necesarios y suficientes.</p> <p>La convencionalidad se refiere a escoger del conjunto de definiciones del objeto, aquella que sea clara, de acuerdo a los conocimientos previos de los estudiantes, y que sea más operativa dentro del sistema axiomático para poder utilizarla en las demostraciones.</p> <p>Una definición matemática es un enunciado en el que se le asigna un nombre a un conjunto mínimo de atributos necesarios y suficientes que caracterizan un objeto; es decir, que es fácil de comprender, no presenta contradicciones lógicas y es económica.</p> <p>Las definiciones son convencionales. Por ello, es necesario especificar cuál es la definición que se está usando al momento de diseñar y resolver un problema. Esto debido a que un objeto puede tener varias definiciones y dependiendo del conocimiento que se tenga, estas pueden variar. Es decir, las definiciones no son</p>	<p>Que el concepto de ángulo al que nos referimos en la definición (de fala) no es el mismo que tenemos las dos. Por tanto, la definición (de ángulo) no es clara.</p> <p>Hay varias maneras de definir el cuadrado. Lo puedo definir como cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y cuatro lados congruentes. Lo puedo definir como cuadrilátero con diagonales congruentes que se bisecan y son perpendiculares. Todas esas son posibles definiciones. Y la convencionalidad de la definición se refiere a que uno introduce aquella que conviene en el momento o aquella que hace más operativo el sistema teórico.</p> <p>¿Cuál es la definición de rombo? Nosotras coincidimos en que el rombo es un cuadrilátero que tiene cuatro lados congruentes. Según las construcciones que cada una realizó, evidenciamos que utilizamos los atributos enunciados en la definición. A partir del análisis, notamos que le agregamos a nuestro rombo la condición de que la diagonal fuera congruente con los lados del rombo, la cual no era una condición necesaria. Por ello, no era posible transformar con el arrastre la construcción para que el rombo fuera cuadrado, siendo este último un ejemplo de rombo.</p> <p>[...] Nos dimos cuenta que no fue necesario utilizar todos los atributos mencionados en nuestra definición personal de cuadrado, puesto que fue suficiente construir tres ángulos rectos y un par de lados adyacentes congruentes.</p> <p>[...] Entonces miren, basta con tener estos atributos no más. ¿Cuáles? Cuadrilátero, es</p>	DefE1 (definición)

Asunto	Descripciones generales	Ilustraciones	Indicador
Definición / definir	únicas; un objeto puede tener varias definiciones que son equivalentes.	necesario, pero no suficiente; tener tres segmentos congruentes es necesario, pero no es suficiente. Y de acuerdo a la construcción que hizo Arley, tener dos ángulos rectos (es necesario). Y ahí están los atributos que necesito para definir cuadrado. [...] en el proceso de solucionar la tarea iniciamos con D1 ⁴ , pero cuando empezamos a construir rectángulos, la definición de rectángulo se proponía según el procedimiento utilizado para construirlos. [...] en el proceso de definir rectángulo partimos de D1, la cual es una definición convencional en los libros de texto de geometría y la transformamos a D2 ⁵ teniendo en cuenta lo que sabíamos del problema y los pasos utilizados en la construcción.	
	Buscar ejemplos y no ejemplos de un objeto es importante para corroborar lo que sí es la figura que se está definiendo y para determinar cuáles son los atributos necesarios y suficientes. En el proceso de definir debe existir una congruencia entre la imagen figural y la definición personal que se tiene de un objeto, para utilizar coherentemente estos elementos en la construcción de una nueva definición.		DefE1 (definir)
	Una definición es operativa cuando se extrae la información que brindan los atributos de dicha definición para generar argumentos deductivos que conforman la demostración. Las definiciones contribuyen a la organización del conocimiento matemático, ya que cuando se establecen definiciones se busca que el conocimiento matemático aumente. Esas definiciones van organizando ese conocimiento, dentro de las teorías matemáticas para poderlas categorizar. Las definiciones sirven para corroborar las propiedades invariantes que se perciben de manera visual en la representación gráfica	[...] Entonces, ¿cómo sé yo lo que causa que se convierta en un rectángulo? Uso mi definición de rectángulo y digo: “Yo necesito ver qué causa que las medidas de todos los ángulos de este cuadrilátero sean rectos”, porque esa es mi definición de rectángulo. [...] Usar la definición para hacer la construcción, porque ustedes querían la construcción de un cuadrilátero especial o sea un rectángulo. [...] Vieron que se usaba la definición para justificar. No para justificar nada, para en vez de decir la distancia de $AE = EC$, decir E es el punto medio de \overline{AC} . [...] al uso que damos a la definición en el proceso de realizar la construcción, ya que, en	DefE2 (definición)

⁴ D1: La figura geométrica es un trapecio si y solo si es un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos.

⁵ D2: Un trapecio es un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos.

Asunto	Descripciones generales	Ilustraciones	Indicador
Definición / definir	del problema y que pueden ser consideradas la solución a este.	este caso, utilizamos los atributos de la definición de rectángulo para que el cuadrilátero cumpliera unas características especiales.	
	<p>El proceso de definir nos sirvió para darnos cuenta que los atributos suficientes y necesarios que se exponen en una definición conforman el conjunto mínimo de atributos que realmente describen esa figura geométrica.</p> <p>Este proceso de definir puede consistir en varias cosas: construir una definición, usar una definición para definir otro objeto, decidir si una figura es o no ejemplo de lo que se está definiendo o para argumentar.</p> <p>En geometría el proceso de definir es importante porque se involucran las nociones primitivas, los postulados y el lenguaje geométrico para expresar las definiciones</p>		DefE2 (definir)
	<p>Una definición se hace operativa en el sistema axiomático cuando se expresa de una forma que hace fácil su uso en una demostración.</p> <p>En la solución de un problema de búsqueda de consecuente encontramos que es diferente el uso que damos a la definición en la construcción, exploración y conjeturación [...] en estos procesos pueden emerger algunos (argumentos) deductivos y el argumento abductivo No ocurre siempre que en esos procesos exista la necesidad de utilizar las definiciones o incluso hay veces en las que no surgen argumentos.</p> <p>Las definiciones sirven como garantías para validar el proceso de razonamiento que se está haciendo en el proceso de exploración.</p> <p>La importancia del uso de las definiciones al momento de realizar demostraciones. Es decir, si se quiere hacer una justificación formal de una conjetura es necesario hacer uso de las definiciones. Esto porque las definiciones proveen los atributos necesarios y suficientes de los objetos geométricos que se necesitan para armar los argumentos que conforman la demostración.</p> <p>Usar el proceso de definir para argumentar.</p>	<p>[...] solamente establecimos que tenía un ángulo recto porque usamos D1 y queríamos que la definición fuera económica. Decidimos cambiar D1 por D2 ya que utilizar a D2 en la demostración iba a facilitar este proceso.</p> <p>[...] Este cambio surgió ya que D1 no era económica y operativa. Mientras que, D2 era operativa, dado que es más útil para utilizarla en la demostración</p> <p>[...] Escogimos D2 ya que es más operativa, es decir, esta definición nos da atributos que podemos utilizar en la demostración, para justificar argumentos deductivos.</p>	DefE3 (definición)

Asunto	Descripciones generales	Ilustraciones	Indicador
	La definición se puede enunciar de dos maneras diferentes según su estructura lingüística: en explícitas e implícitas.	D1: La figura geométrica es un trapecio si y solo si es un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos. [...] D2: Un trapecio es un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos. [...] D1 es una definición explícita porque se conectan dos proposiciones con el término “si y solo si” mostrando de forma evidente una relación de bicondicionalidad. En cambio, en D2 no se hace evidente la bicondicionalidad.	DefE4 (definición)
Definición / definir	<p>Las definiciones son correctas o incorrectas. Consideramos que una definición es correcta cuando presenta los atributos necesarios para que quede clara e inequívocamente determinado el objeto que se está definiendo. Tuvimos en cuenta que esta puede contener más atributos de los necesarios. Mientras que las definiciones incorrectas son aquellas que no mencionan todos los atributos necesarios para determinar el objeto o presenta contradicciones lógicas.</p> <p>Las definiciones son particionales y jerárquicas.</p> <p>Las definiciones no son únicas, un objeto puede tener varias definiciones que son equivalentes</p>	[...] Es particional porque no admite que otros paralelogramos se caractericen con estos mismos atributos. [...] Ejemplo: Todo cuadrado es paralelogramo, pero no todo paralelogramo es cuadrado.	DefE5 (definición)
	Identificamos uno de los aspectos de la convencionalidad de la definición, atendiendo a los factores: didáctico, estético y operativo.	Pero, si uno define cuadrado como un paralelogramo, digamos a un estudiante, ¿qué estaría sucediendo? ¿Si tú por ejemplo vas a un grado 6º? [...] La definición no sería clara ¿Cierto que sí? Porque para saber entonces que es un cuadrado, necesito saber antes que es un paralelogramo. Y yo no creo que un niño de 6º sepa que es un paralelogramo.	DefEc1 (definición)
	Resaltamos la importancia de escoger los atributos que se incluirían en la definición de cuadrado de acuerdo a los conocimientos previos de los estudiantes, según el grado escolar en el que se encuentran. En este sentido, el profesor toma la decisión de escoger cierta definición atendiendo al factor didáctico, el cual es un aspecto de la convencionalidad de las definiciones.	¿Cómo construimos el cuadrado sin utilizar polígono regular? [...] Si estamos en el plano cartesiano, ubicamos los puntos con la misma longitud horizontal que vertical y los reflejamos al otro lado. [...] Pero, no podemos hacer esto porque estamos hablando de niños de quinto de primaria... Y los niños de quinto de primaria todavía no trabajan conceptos de traslación, reflexión y simetría.	
	Las construcciones que realizamos no se reducen a la representación de los atributos del objeto según la definición que tenemos, por lo cual incluimos o excluimos atributos de la figura. Además, a partir de los pasos que seguimos en la construcción podemos	[...] La primera construcción y exploración que realizamos consistió en realizar una construcción blanda a partir de un cuadrilátero cualquiera y sus diagonales. Luego, tomamos las medidas de los ángulos y arrastramos los vértices con la intención de que los ángulos	DefM1 (definición)

Asunto	Descripciones generales	Ilustraciones	Indicador
Definición / definir	determinar cuáles son los atributos necesarios y suficientes que componen la definición. Es decir, la definición debe reflejarse en la construcción que se realice.	midieran 90° , con el fin de que el cuadrilátero fuera rectángulo.	
		[...] cuando los profesores realizaron la construcción de cuadrado (con GD), no utilizaron todos los atributos que había en su definición personal. Por ello, nosotras les propusimos realizar la construcción de acuerdo a los atributos que ellos habían mencionado (en la definición), para mostrar que daban lugar a no ejemplos de cuadrado [...] (destacamos) el papel de los no ejemplos para construir definiciones porque aprovechamos esas construcciones para que los profesores identificaran que los atributos expuestos no eran suficientes y necesarios. [...] La definición de rectángulo que utilizamos es “paralelogramo con un ángulo recto”. Esta definición le vamos a llamar D2. Esta surgió en el proceso de construir un rectángulo a partir de un paralelogramo, ya que sabíamos que el rectángulo es paralelogramo teniendo en cuenta D1	DefM1 (definir)
	Hay tareas para definir objetos en las que se utilizan ejemplos y no ejemplos. Le decimos un no ejemplo a algo que no nos sirvió, pero que nos permitió darnos cuenta de algo que hacía falta a la definición.	[...] Es que ya encontré contraejemplos. Es que yo te decía todos sus lados son congruentes y todos sus ángulos internos miden 90 grados. [...] Todos sus lados son congruentes. No sabríamos cuántos porque dice todos. Entonces, esta es una definición que no cumple todas las condiciones necesarias y suficientes para que sea cuadrado. [...] decir que es un cuadrilátero porque, yo no coloqué que eran cuatro lados.	DefM2 (definición)

Nuestro CDM-DD en el Ciclo 3 Estado 3, se ubica en las facetas epistémica, ecológica y mediacional. En la Tabla 6.2, se evidencian veintiocho fragmentos extraídos de la narración del Estado 3, de los cuales dos se refieren a argumento, veinte a definición y seis a definir. Además, encontramos veinticinco ilustraciones en las que se evidencian expresiones de nuestro CDM-DD sobre los asuntos de la investigación, en situaciones específicas como diseñar tareas, solucionar las tareas propuestas, etc. Entre estas, una se refiere a argumento, dos a argumentación, diecinueve a definición y dos a definir.

Respecto a los indicadores que se refieren a la argumentación, con relación a la faceta mediacional, identificamos que el uso de GD ayuda a resolver problemas de búsqueda de antecedente, pues estos exigen hacer una construcción a partir de los datos dados en el enunciado y explorar qué condición se requiere para obtener como consecuencia la propiedad exigida en el problema (*ArgM1*). Aceptamos que una tarea que incluye problemas de búsqueda de antecedente favorece la argumentación durante el proceso de resolución (*ArgM2*).

Respecto a los indicadores que se refieren a argumento, en relación a la faceta epistémica, reconocemos atributos de los argumentos abductivos e inductivos. Específicamente, que en un argumento abductivo se crean conjeturas y en un argumento inductivo, a partir de la generalización de los datos, se obtiene una conjetura (*ArgE5*). Adicionalmente, proveemos razones para justificar que un argumento es abductivo. Estas son: se conoce la aserción y se provee un dato, que es plausible hasta que se demuestre que de él y los demás datos se deduce la aserción.

A partir de nuestro análisis, podemos resumir nuestro CDM-DD sobre definición así: la definición es un enunciado en el que se le asigna un nombre a un conjunto mínimo de atributos necesarios y suficientes que caracterizan un objeto, es fácil de comprender, no presenta contradicciones lógicas y es económica. Reconocemos características de la definición como la minimalidad y la convencionalidad (*DefE1*). Identificamos que la definición se puede usar en los argumentos deductivos de una demostración, sirve para organizar el conocimiento matemático y para corroborar las propiedades invariantes de la representación gráfica de un objeto (*DefE2*). Reconocemos que las definiciones se relacionan con los procesos de construcción, exploración, conjeturación, demostración y argumentación (*DefE3*). Consideramos que las definiciones se

pueden clasificar según su estructura lingüística en implícitas y explícitas (*DefE4*) y según sus atributos en particionales, jerárquicas, correctas e incorrectas (*DefE5*).

Respecto a nuestro CDM-DD en la faceta ecológica, sabemos que los textos escolares escogen las definiciones para ser enseñadas en la escuela de acuerdo con la convencionalidad de estas. La convencionalidad de la definición atiende a factores estéticos, didácticos y operativos. Específicamente, el factor didáctico se refiere a la elección de la definición considerando los conocimientos previos que se tengan en la clase o los objetivos de aprendizaje del curso (*DefEc1*).

En relación a la faceta mediacional, expresamos que el uso de la definición apoya el proceso de construcción de una figura en una situación problema (*DefM1*). Además, reconocemos que el uso de ejemplos y no ejemplos ayuda a verificar si una definición es correcta, económica y clara.

Respecto al proceso de definir, reconocemos que en este se determinan cuáles son los atributos necesarios y suficientes que caracterizan una figura (*DefE1*). Expresamos que este proceso consiste en construir una definición, usar una definición para definir otro objeto, decidir si una figura es o no ejemplo de lo que se está definiendo o para argumentar (*DefE2*). Reconocemos que durante el desarrollo de este proceso pueden surgir argumentos (*DefE3*).

En la faceta mediacional, justificamos el uso de GD para realizar construcciones en las que se puedan encontrar ejemplos y no ejemplos de las definiciones. La representación de no ejemplos con GD favorece la construcción de definiciones porque facilita la identificación de los atributos necesarios y suficientes que caracterizan al objeto (*DefM1*).

En conclusión, surgió una caracterización para el proceso de definir y para la definición. Entendemos que la diferencia que existe entre estos dos conceptos es que la primera es el

proceso y la segunda es el producto que surge de ese proceso. Además, reconocemos que las definiciones se utilizan como garantías en los argumentos; por ello su utilidad en las demostraciones. También, las definiciones proveen los atributos necesarios y suficientes de los objetos geométricos que se necesitan para armar los argumentos que conforman la demostración.

6.5. Cambios significativos en nuestro CDM-DD en el Ciclo 3

En este ciclo identificamos cambios en nuestro CDM-DD, lo cual se evidenció en los indicadores *Qué es* (definición) y *Con qué se relaciona* (definición). Sin embargo, queremos destacar como principal cambio la transformación de la caracterización que teníamos inicialmente de una definición matemática. A continuación, mostramos dicha transformación:

En el indicador *Qué es*, ubicamos el siguiente fragmento, el cual surgió durante la primera acción del plan de este ciclo. Este presenta la primera caracterización de definición, la cual se construyó a partir de la interpretación que hicimos a la lectura de los autores consultados (Calvo (2001), Silva (2013), y Camargo y Samper (2014)).

“Una definición matemática es un enunciado verbal o escrito que determina de manera clara, precisa y consistente los atributos de un objeto matemático; es decir, que es fácil de comprender, incluye los atributos necesarios y suficientes para caracterizar el objeto matemático y no tiene contradicciones lógicas.”

Luego, en la tercera acción del plan de este ciclo, tuvimos que realizar un cambio a la caracterización anterior. Esto debido a que esta no era clara, ni fácil de utilizar para analizar las definiciones que los profesores propusieron de rectángulo. Entonces, la caracterización quedó como sigue:

“Una definición matemática es un enunciado en el que se le asigna un nombre a un conjunto mínimo de atributos necesarios y suficientes que caracterizan un objeto; es fácil de comprender, no presenta contradicciones lógicas y es económica.”

Nuevamente, en el indicador *Qué es*, ubicamos el siguiente fragmento. La idea expresada en este es la conclusión a la que llegamos luego de que la profesora nos presentara un ejemplo relacionado con la definición de ángulos par lineal, de las notas de clase de uno de los cursos que ella orientaba. Esto lo hizo con el fin de aclarar la idea que teníamos sobre la convencionalidad de las definiciones.

“La convencionalidad se refiere a escoger del conjunto de definiciones del objeto, aquella que sea clara de acuerdo a los conocimientos previos de los estudiantes y más operativa dentro del sistema axiomático para poder utilizarla en las demostraciones.”

Luego, cuando analizamos con la profesora la tarea que diseñamos como cuarta acción del plan de este ciclo, profundizamos sobre esta característica de la definición, al afirmar lo siguiente:

“Las definiciones son convencionales. Por ello, es necesario especificar cuál es la definición que se está usando al momento de diseñar y resolver un problema. Esto debido a que un objeto puede tener varias definiciones y, dependiendo del conocimiento que se tenga, estas pueden variar. Es decir, las definiciones no son únicas; un objeto puede tener varias definiciones que son equivalentes.”

En el indicador *Con qué se relaciona*, ubicamos el siguiente fragmento. En este expresamos la conclusión a la que llegamos luego de diálogos con la profesora sobre la operatividad de la definición, teniendo en cuenta la lectura de Camargo y Samper (2014).

“Una definición se hace operativa en el sistema axiomático cuando se expresa de una forma que hace fácil su uso en una demostración”.

En la última acción del plan de este ciclo, realizamos la reflexión sobre el análisis que hicimos a la solución de la tarea que diseñamos, para los estudiantes de la licenciatura, nos permitió evidenciar de nuestro CDM-DD. El siguiente fragmento fue una de las conclusiones que logramos de este ejercicio. En este evidenciamos una profundización de la idea anterior debido a que ahondamos en cómo las definiciones contribuyen a construir los argumentos deductivos de una demostración.

“La importancia del uso de las definiciones al momento de realizar demostraciones. Es decir, si se quiere hacer una justificación formal de una conjetura es necesario hacer uso de las definiciones. Esto porque las definiciones proveen los atributos necesarios y suficientes de los objetos geométricos que se necesitan para armar los argumentos que conforman la demostración.”

7. Análisis de la transformación de nuestro CDM-DD

En este capítulo presentamos el análisis que realizamos a los estados de nuestro CDM-DD. Primero, mostramos la comparación que hicimos entre los fragmentos clasificados en cada estado respecto a un mismo indicador para cada asunto. Con ello queremos evidenciar si hubo una transformación de nuestro conocimiento respecto a los asuntos objeto de estudio. Segundo, mostramos los indicadores que aparecen solamente en un estado.

7.1. Comparación de los cuatro estados de nuestro CDM-DD

A continuación, presentamos el análisis realizado para evidenciar los cambios de nuestro CDM-DD al comparar los fragmentos que corresponden a un mismo indicador en los cuatro estados de nuestro conocimiento identificados en este estudio. Para dar cuenta de estos cambios, primero, en una tabla, agrupamos los fragmentos que corresponden a un mismo indicador en cada estado según el asunto; segundo, relacionamos los fragmentos que expresan ideas similares; y tercero analizamos si lo expresado en un fragmento y otro se podría considerar como un cambio, ya sea por *Contenido*, *Forma* o *Novedad*. En algunos casos, relacionamos fragmentos de estados diferentes que clasificamos con indicadores diferentes debido a que evidenciamos que lo expresado en un estado cambia de naturaleza en otro estado.

7.1.1. Respecto a la argumentación

En la faceta epistémica, encontramos evidencia que da cuenta de nuestro CDM-DD sobre argumentación en más de un estado con respecto a los indicadores *Qué es* (ArgE1), *Para qué sirve* (ArgE2) y *Con qué se relaciona* (ArgE3). Además, en la faceta mediacional encontramos los indicadores *Cómo favorece la GD* (ArgM1) y *Cómo favorecen las tareas* (ArgM2) en más de un estado. A continuación, presentamos el análisis realizado para cada uno de estos indicadores del asunto argumentación.

7.1.1.1. Respecto al indicador Qué es (ArgE1)

En la Tabla 7.1, registramos los fragmentos que ubicamos en el Estado Inicial, Estado 1 y Estado 2 con el indicador *Qué es*. En ella, colocamos la correspondiente categoría de cambio de las ideas presentadas. Luego, explicamos cuáles son los cambios que evidenciamos en nuestro CDM-DD a partir de la comparación entre los fragmentos de cada estado.

Tabla 7.1

Comparación del indicador ArgE1 Estado inicial, Estado 1 y Estado 2

Estado Inicial	Estado 1	Estado 2
1. Argumentar es demostrar. (argumentar) 2. Tiene estructura lógica. (argumentar) 3. Es la expresión de un tema específico.	1.1 Para demostrar se utilizan afirmaciones que son verdaderas y aceptadas, se emplean esquemas de razonamiento. (CO-A) 1.2 (La demostración) Se desarrolla de acuerdo con “normas establecidas” y/o “normas compartidas”. (CO-A) 1.3 La demostración es una secuencia de afirmaciones que, es organizada y/o lógica. (CO-P) 1.4 (La argumentación) Proceso comunicativo en el que se produce un discurso que consiste en dar razones. (CO-A, FO-Pr)	2.1 Se utilizan normas compartidas para mejorar el lenguaje (matemático) de los estudiantes. (CO-A) 2.2 La argumentación es un proceso comunicativo en el que se exponen argumentos. (CO-P)

En el Estado Inicial, consideramos que argumentar y demostrar son equivalentes (1). Luego, en el Estado 1, exponemos qué se usa para demostrar (1.1, 1.2) lo cual consideramos como ampliación ya que expresamos ideas nuevas. Además, en el Estado 2, ampliamos lo expresado en 1.2 al mencionar para qué se utilizan las normas en una demostración (2.1).

Respecto a la estructura de una demostración (1), en 1.3 identificamos una profundización pues pasamos de decir que esta es lógica a indicar que la estructura es una secuencia de afirmaciones organizadas de manera lógica.

Relacionamos los fragmentos 3, 1.4 y 2.2, porque en todos ellos se menciona que la argumentación es la expresión de algo. En 1.4 se amplía esa idea al mencionar que es un proceso comunicativo. Esta última idea se profundiza en los fragmentos del Estado 2, al decir que en este proceso se expresan y comunican argumentos.

7.1.1.2. Respecto al indicador Para qué sirve (ArgE2)

En la Tabla 7.2, registramos los fragmentos que ubicamos en el Estado Inicial, Estado 1 y Estado 2 con el indicador *Para qué sirve*.

Tabla 7.2

Comparación del indicador ArgE2 Estado Inicial, Estado 1 y Estado 2

Estado Inicial	Estado 1	Estado 2
1. (La argumentación) Permite resolver problemas.	1.1 (La argumentación sirve) para convencer o persuadir, sobre una declaración hecha y establecer una conclusión. (CO-R) 1.2 La secuencia en la demostración busca establecer la validez o no de una afirmación. (CO-A)	2.1 Es un proceso en el que no solo consiste en hacer un dibujo y ya, sino en el que consiste en mostrar y convencer a alguien de lo que uno hizo. (CO-A) 2.2 Se dan razones para justificar una declaración hecha. (FO-CI)

En el Estado Inicial expresamos que la argumentación sirve para resolver problemas (1), idea que reformulamos en el Estado 1, pues el propósito cambia a convencer o persuadir a uno mismo o a otros sobre una declaración hecha (1.1) Además, en el Estado 2 ampliamos la anterior idea afirmando que las declaraciones no solo son verbales o textuales, sino que también pueden ser actos como por ejemplo mostrar dibujos para convencer sobre algo (2.1). También, aclaramos que convencer o persuadir se refiere a justificar (2.2).

Respecto a para qué sirve la secuencia de afirmaciones en una demostración ((1.3) Tabla 7.1), establecer que es para validar una afirmación ((1.2) Tabla 7.2), es indicio de profundizar en este aspecto.

7.1.1.3. Respecto al indicador Con qué se relaciona (ArgE3)

En la Tabla 7.3, registramos los fragmentos que ubicamos en el Estado Inicial, Estado 1 y Estado 2 del indicador *Con qué se relaciona*.

Tabla 7.3

Comparación del indicador ArgE3 Estado Inicial, Estado 1 y Estado 2

Estado Inicial	Estado 1	Estado 2
1. Relaciona la argumentación con el razonamiento.	1.1 (la argumentación es) Producto de un razonamiento. (CO-P) 1.2 La demostración es un tipo especial de argumentación. (CO-R) 1.3 La conjetura es una afirmación de la que se tiene alto grado de convicción de su certeza. Esta se convierte en un hecho cuando se demuestra (CO-A)	2.1 La argumentación y el razonamiento son procesos diferentes. (FO-CI) 2.2 Las estructuras argumentativas se componen de las pruebas preformales y formales. [...] Las pruebas formales son una cadena de aserciones verdaderas que se sustentan por medio de axiomas, teoremas y definiciones del sistema axiomático, que conforma una secuencia de argumentos deductivos. (CO-A)

Consideramos los fragmentos 1, 1.1, y 2.1 de esta tabla, porque todos se refieren a la relación entre la argumentación y el razonamiento. En 1.1 se profundiza la idea original al afirmar que la argumentación es producto del razonamiento y luego, en 2.1, aclaramos esta idea afirmando que estos son procesos diferentes.

El fragmento 1.2 es una reformulación de la idea expresada en 1 de la Tabla 7.1, ya que pasamos de considerar que argumentar y demostrar son equivalentes, a afirmar que la demostración es un tipo especial de argumentación.

Respecto a la demostración (1.2), en 2.2 ampliamos nuestra concepción sobre este concepto al afirmar que las estructuras argumentativas se componen de dos tipos de pruebas, entre estas las

pruebas formales. Además, describimos en qué consisten estas últimas, las cuales relacionamos con la demostración.

Respecto a la relación entre conjetura y demostración, expresamos que la demostración convierte a las conjeturas en hechos (1.3). Por esto consideramos que hubo ampliación de nuestro CDM-DD en el Estado 1.

7.1.1.4. Respecto al indicador *Cómo favorece la GD (ArgM1)*

En la Tabla 7.4, mostramos los fragmentos ubicados en el indicador *Cómo favorece la GD* que solo aparecen en los Estados 1 y 3.

Tabla 7.4

Comparación del indicador ArgM1 Estado 1 y Estado 3

Estado 1	Estado 3
1.1 El proceso de visualización y exploración haciendo uso de la GD favorece los procesos de argumentación, conjeturación y prueba.	3.1 [...] como el problema es de búsqueda de antecedente es necesario hacer la construcción a partir de los datos en el enunciado (un cuadrilátero y sus diagonales) y explorar qué condición de las diagonales hace que se cumpla el consecuente (ser rectángulo). <i>(CO-A)</i>

Como se explicó en la narración del Estado 3, el fragmento del Estado 3 se refiere a lo que se requiere para poder resolver el problema y formular una conjetura. Lo vemos como amplitud de la idea expresada en el Estado 1 porque pasamos de decir que favorece la conjeturación a describir cómo la GD favorece la conjeturación: permite realizar una construcción y explorarla para determinar que se requiere añadir a los datos dados para asegurar el resultado requerido en el problema.

7.1.1.5. Respecto al indicador *Cómo favorecen las Tareas (ArgM2)*

En la Tabla 7.5, mostramos los fragmentos de los Estados 1 y 3 que ubicamos en el indicador *Cómo favorecen las Tareas*. En el Estado 2 no hay mención alguna.

Tabla 7.5

Comparación del indicador ArgM2 Estado 1 y Estado 3

Estado 1	Estado 3
1.1 (Un) Problema de búsqueda de consecuente favorece la producción de argumentos inductivos. 1.2 (Los) Problemas de búsqueda de antecedente favorecen la producción de argumentos abductivos.	3.1 El problema es de búsqueda de antecedente porque queremos que la consecuencia sea ser un rectángulo. <i>(FO-CI)</i>

En 3.1 se aclara qué hace que un problema sea de búsqueda de antecedente, esta idea se relaciona con lo expresado en el Estado 1 afirmación 1.2 (Tabla 7.9) al reconocer este tipo de argumento en la solución de un problema específico.

7.1.2. Respecto al argumento

En la faceta epistémica encontramos evidencia que da cuenta de nuestro CDM-DD respecto a los indicadores Qué es (ArgE1), Para qué sirve (ArgE2), Con qué se relaciona (ArgE3), Cómo se representa o estructura (ArgE4) y Cómo se clasifica (ArgE5). A continuación, presentamos el análisis realizado para cada indicador del asunto argumento.

7.1.2.1. Respecto al indicador Qué es (ArgE1)

En la Tabla 7.6, registramos los fragmentos que ubicamos en el Estado 1 y Estado 2 del indicador *Qué es*.

Tabla 7.6

Comparación del indicador ArgE1 (argumento) Estado 1 y Estado 2

Estado 1	Estado 2
1.1 (argumento) Es un enunciado oral o escrito.	2.1 El argumento es una expresión discursiva. Se realiza de acuerdo con normas compartidas. <i>(FO-Pr y CO-A)</i> 2.2 Las normas se refieren es a unos acuerdos respecto al conocimiento matemático. <i>(CO-P)</i>

Inicialmente, expresamos que el argumento es un enunciado oral o escrito (1.1). Luego, como se explicó en la narración del Estado 2 (ver Anexo G), en 2.1 precisamos que un enunciado oral o escrito es una expresión discursiva. Con ese término nos referimos a los tipos de discurso que pueden ser usados para dar argumentos. Ampliamos la idea al indicar que el discurso debe seguir unas normas establecidas que comparten las personas que producen y oyen el argumento.

Además, en 2.2 profundizamos la idea porque afirmamos que las normas son acuerdos respecto al conocimiento matemático.

7.1.2.2. Respecto al indicador Para qué sirve (ArgE2)

En la Tabla 7.7, consignamos los fragmentos encontrados en el en el Estado Inicial y el Estado 2 del indicador *Para qué sirve*.

Tabla 7.7

Comparación del indicador ArgE2 (argumento) Estado Inicial y Estado 2

Estado Inicial	Estado 2
1. (El argumento) Sirve para justificar lo que se hace y se dice.	2.1 (El argumento) Consiste en dar razones para justificar y convencer a alguien, o a uno mismo, sobre una declaración hecha. (CO-A) 2.2 Para justificar la declaración, se utilizan proposiciones o conjeturas. (CO-P)

En todos los fragmentos mencionamos que un argumento sirve para justificar. Sin embargo, en (2.1) ampliamos el propósito de un argumento para incluir que se busca convencer y a quién convencer. Al mencionar que para justificar una declaración hecha se deben utilizar proposiciones o conjeturas (2.2), lo consideramos una profundización de nuestro CDM-DD.

7.1.2.3. Respecto al indicador Cómo se representa o estructura (ArgE4)

Solamente en el Estado 1 y Estado 2 encontramos fragmentos correspondientes al indicador *Cómo se representa o estructura* (Tabla 7.8).

Tabla 7.8

Comparación del indicador ArgE4 (argumento) Estado 1 y Estado 2

Estado 1	Estado 2
1.1 El argumento está conformado por dato, aserción y garantía. 1.2 La garantía es una proposición general que relaciona el dato con la aserción. El dato y aserción son proposiciones particulares.	2.1 Un argumento está estructurado por seis elementos: dato, garantía, aserción, respaldo a la garantía, refutación, cualificador modal. (CO-A) 2.2 En un argumento puede identificarse el dato y la aserción; no es necesario que la garantía sea explícita. (CO-R) 2.3 Los elementos del argumento son proposiciones. Una proposición es una oración con sentido completo de la que se puede decidir si es verdadera o falsa (FO-CI) 2.4 La garantía es un elemento del sistema teórico. (CO-A) 2.5 El dato se refiere a esas afirmaciones o esas razones que buscan justificar la declaración que hicimos. (CO-A) 2.6 La aserción se convierte como en la conclusión, declaración, afirmación o proposición. (CO-A) 2.7 Se representan argumentos con el esquema “qué sé, qué uso y qué concluyo”. (CO-A)

Relacionamos los fragmentos 1.1, 2.1, 2.2, porque se refieren a los elementos de un argumento.

En 2.1 ampliamos lo expresado en 1.1 ya que reconocimos que puede haber otros elementos en un argumento tales como: respaldo a la garantía, refutación y cualificador modal. Sin embargo, en 2.2 se produce una transformación cuando afirmamos que en un argumento debe identificarse el dato y la aserción, y la garantía no tiene que estar expresada de manera explícita.

En el Estado 1, afirmamos que la garantía es una proposición general y que el dato y la aserción son proposiciones particulares (1.2). En este estado, usábamos el término “proposición” porque era la forma como se expresaba en los artículos y en las clases, pero no éramos conscientes de lo que significaba. Luego, como se expresa en la narración del Estado 2 (ver Anexo G), afirmamos que una proposición es una oración con sentido completo (2.3), lo cual nos permitió aclarar la idea (1.2).

También, relacionamos el fragmento 1.2 con 2.4, 2.5 y 2.6 ya que estas últimas profundizan lo que es dato, aserción y garantía al expresar atributos de cada uno de estos términos en 2.4, 2.5 y 2.6.

Respecto a cómo representar argumentos, afirmamos que una forma de hacerlo es utilizando el esquema “qué sé, qué uso y qué concluyo” (2.7), con lo cual consideramos que hubo ampliación de conocimiento. Esto debido a que, producto del plan de acción del Ciclo 1, nosotras conocimos el esquema propuesto por Toulmin para representar argumentos, pero en el Ciclo 2, establecimos la relación entre estos dos esquemas. Ello nos permitió reconocer argumentos más fácilmente, identificar argumentos simples y entender la diferencia entre un argumento global y un argumento nuclear. Esto se evidencio en la narración del Estado 2 (ver Anexo G)

7.1.2.4. Respecto al indicador Cómo se clasifica (ArgE5)

En esta ocasión, encontramos fragmentos en el Estado 1, Estado 2 y Estado 3 del indicador *Cómo se clasifica* (Tabla 7.9).

Tabla 7.9

Comparación del indicador ArgE5 (argumento) Estado 1, Estado 2 y Estado 3

Estado 1	Estado 2	Estado 3
1.1 Los argumentos se clasifican en: deductivos, inductivos, abductivos y analógicos.	2.1 En un argumento abductivo, la procedencia de la proposición general (garantía) no es única, ya que puede provenir de una exploración empírica (conjetura) o puede ser una regla aceptada como elemento del sistema axiomático con el que se cuenta (exploración teórica). (CO-P)	3.1 Si el argumento es abductivo, se establece una conjetura. (No hubo cambio)
1.2 En un argumento deductivo se aplica la garantía al dato conocido para obtener la aserción.	2.2 Argumentos nucleares. (CO-A)	3.2 Un argumento es inductivo cuando a partir de unos datos que se generalizan, se crea una conjetura. (FO-CI)
1.3 En un argumento abductivo, se conocen la aserción y la garantía, y se usan para inferir un posible dato.	2.3 Argumento simple: es un argumento que está compuesto	
1.4 En un argumento inductivo, se tiene un número n de casos		

que particularizan el dato y se descubre que ellos cumplen otra propiedad (la aserción). En un argumento inductivo se infiere la garantía, la cual es una relación que se caracteriza por ser plausible.	de mínimo tres proposiciones: aserción y dato, que deben estar explícitos, y garantía, que puede o no estar explícita. (CO-A) 2.4 Argumento global: es un argumento compuesto por una cadena de argumentos simples. (CO-A)	
--	---	--

En 1.1 afirmamos que los argumentos se clasifican en deductivos, inductivos, abductivos y analógicos. Como se muestra en la narración del Estado 1 (ver Anexo F), ampliamos nuestro conocimiento porque proveemos una descripción de los primeros tres tipos de argumentos.

Relacionamos los fragmentos 1.3, 2.1 y 3.1 ya que todos se refieren al argumento abductivo. En 1.3 afirmamos de este que se conoce la aserción y la garantía, y que se usan para inferir un posible dato. Indicar cuál puede ser la procedencia de la garantía, empírica o teórica, muestra profundización de este asunto. Sin embargo, en 3.1 no evidenciamos cambio alguno de la idea expresada en el Estado 1.

En 1.4 unos referimos a un argumento inductivo. Damos una descripción detallada de este. En 3.2 parece haber un retroceso en nuestro CDM-DD respectivo, pues en un argumento inductivo no se generalizan los datos, sino que se generaliza la relación entre los datos y la aserción descubierta, Sin embargo, hay ampliación de nuestro conocimiento al indicar que el argumento inductivo lleva a la formulación de una conjetura.

Relacionamos los fragmentos 2.2, 2.3 y 2.4 ya que refieren a la clasificación de argumentos según su estatus en una demostración. En este caso, hacemos referencia a los argumentos nucleares, al argumento simple y argumento global. Respecto a los argumentos nucleares, no hacemos ninguna descripción. Sin embargo, respecto a los argumentos simples, afirmamos que están compuestos de mínimo tres proposiciones: aserción, dato y garantía. Con relación al

argumento global, expresamos que es un argumento compuesto por una cadena de argumentos simples. Consideramos que los conceptos mencionados anteriormente son la ampliación de nuestro CDM-DD en el mismo estado, debido a que es la expresión de nuevas ideas.

7.1.3. *Respecto a definir*

Respecto al asunto definir, únicamente encontramos evidencia de nuestro CDM-DD que se pueda comparar en varios estados en la faceta mediacional en el indicador *Cómo favorecen las tareas*. A continuación, presentamos el análisis realizado a este indicador.

7.1.3.1. **Respecto al indicador *Cómo favorecen las tareas* (DefM2)**

En la Tabla 7.10, mostramos los fragmentos que se ubican en el indicador *Cómo favorecen las tareas* en el Estado Inicial y Estado 3.

Tabla 7.10

Comparación del indicador DefM2 (tareas) Estado inicial y Estado 3

Estado Inicial	Estado 3
1. La tarea sirve para entrever lo que los estudiantes saben y por qué hacen lo que hacen, cuando están desarrollando un proceso para definir.	3.1 Hay tareas para definir objetos en las que se utilizan ejemplos y no ejemplos. Le decimos un no ejemplo a algo que no nos sirvió, pero que nos permitió darnos cuenta de algo que hacía falta en la definición. (CO-A)

En el Estado Inicial, afirmamos que las tareas que favorecen el proceso de definir ayudan a determinar lo que saben los estudiantes. Luego, en el Estado 3, expresamos que cómo puede ser una tarea para definir, lo cual consideramos es una ampliación de la idea 1.

7.1.4. *Respecto a la definición*

En la faceta epistémica encontramos evidencia que da cuenta de nuestro CDM-DD CDM respecto a los indicadores *Qué es* (DefE1), *Para qué sirve* (DefE2) y *Con qué se relaciona* (DefE3). Además, en la faceta mediacional ubicamos nuestro conocimiento en el indicador *Cómo*

favorece la GD (DefM1). A continuación, presentamos el análisis realizado para cada indicador del asunto definición.

7.1.4.1. Respecto al indicador *Qué es (DefE1)*

En la Tabla 7.11, mostramos los fragmentos que se ubican en el indicador *Qué es* en el Estado Inicial, Estado 2 y Estado 3.

Tabla 7.11

Comparación del indicador DefE1 Estado Inicial, Estado 2 y Estado 3

Estado Inicial	Estado 2	Estado 3
1.1 (En la definición se identifican las características y propiedades de objetos.	2.1 La definición (de un objeto) incluye los atributos necesarios [...] (<i>CO-R</i>)	3.1 Una definición matemática es un enunciado en el que se le asigna un nombre a un conjunto mínimo de atributos necesarios y suficientes que caracterizan un objeto; es fácil de comprender, no presenta contradicciones lógicas y es económica. (<i>CO-A</i>)

Los fragmentos 1.1, 2.1 y 3.1 se refieren a los atributos de la caracterización de la definición. En primer lugar, cambiamos el término características y propiedades por atributos, el cual es un término más preciso. Además, consideramos que el añadir el adjetivo “necesarios” (2.1) y luego “y suficientes” (3.1), consiste en una ampliación de lo dicho en 1.1. En 3.1 ampliamos la idea anterior al proponer una definición de definición matemática que incluye cosas no mencionadas anteriormente: es un enunciado en el que se le asigna un nombre a un conjunto mínimo de atributos, los atributos son necesarios y suficientes, es fácil de comprender, no presenta contradicciones lógicas y es económica.

7.1.4.2. Respecto al indicador *Para qué sirve (DefE2)*

Fragmentos en los que mencionamos *Para qué sirve* una definición aparecen en el Estado Inicial, Estado 2 y Estado 3 (Tabla 7.12)

Tabla 7.12

Comparación del indicador DefE2 Estado Inicial, Estado 2 y Estado 3

Estado Inicial	Estado 2	Estado 3
1. (La definición) Permite lograr el aprendizaje de los estudiantes.	2.1 (La definición sirve) Para resolver un problema, se comparan las propiedades mencionadas en el problema con las definiciones que se conocen. (CO-A)	3.1 Las definiciones sirven para corroborar las propiedades invariantes que se perciben de manera visual en la representación gráfica del problema. (CO-P)
2. (La definición) Favorece la conceptualización de los objetos geométricos.	2.2 (La definición) Describe como se construye el objeto (CO-A) 2.3 La definición (sirve) para identificar ejemplos y no ejemplos de este (objeto). (CO-A)	3.2 Una definición se hace operativa cuando se extrae la información que brindan los atributos de dicha definición para generar argumentos deductivos que conforman la demostración. (CO-A) 3.3 Las definiciones contribuyen a la organización del conocimiento matemático, ya que cuando se establecen definiciones se busca que el conocimiento matemático aumente. (CO-A)

En el Fragmento 1 afirmamos que la definición genera aprendizaje en los estudiantes, pero es en 3.3 que aclaramos esta idea al indicar que la formulación de definiciones contribuye a que el conocimiento matemático aumente. Sin embargo, no indicamos cómo sucede eso.

Profundizamos esta idea en los Fragmentos 2.1, 2.2, 2.3 y 3.1 porque mencionamos los propósitos de una definición. Expresamos que la definición sirve para: favorecer la conceptualización 2, resolver problemas (2.1), describir los pasos de una construcción (2.2), identificar ejemplos y no ejemplos de un objeto (2.3). y corroborar las propiedades invariantes de un objeto (3.1). Los Fragmentos 2.2 y 3.1 amplían el Fragmento 2.1, pues describen cómo contribuyen las definiciones a la resolución de un problema.

En el Fragmento 3.2 ampliamos el propósito de las definiciones al afirmar que estas sirven para generar argumentos deductivos en las demostraciones, lo cual es una idea nueva.

7.1.4.3. Respecto al indicador Con qué se relaciona (DefE3)

Encontramos fragmentos clasificados con el indicador *Con qué se relaciona* en el Estado Inicial, Estado 1 y Estado 3 (Tabla 7.13).

Tabla 7.13

Comparación del indicador DefE3 Estado Inicial, Estado 1 y Estado 3

Estado Inicial	Estado 1	Estado 3
1. El uso de definiciones en la argumentación.	1.1 Las definiciones se utilizan como garantías en las demostraciones. <i>(CO-P)</i>	3.1 Una definición se hace operativa en el sistema axiomático cuando se expresa de una forma que hace fácil su uso en una demostración. <i>(FO-Pr)</i> 3.2 En la solución de un problema de búsqueda de consecuente encontramos que es diferente el uso que damos a la definición en la construcción, exploración y conjeturación [...] en estos procesos pueden emerger algunos (argumentos) deductivos y el argumento abductivo. No ocurre siempre que en esos procesos exista la necesidad de utilizar las definiciones o incluso hay veces en las que no surgen argumentos. <i>(CO-A)</i>

En 1 se afirma que la definición se puede utilizar para argumentar, idea que se profundiza en 1.1 cuando expresamos que las definiciones pueden ser garantías de los argumentos. Ahí mismo indicamos que las definiciones se relacionan con la demostración, idea que expresamos con más precisión en 3.1. Luego, en 3.2 se amplía las ideas anteriores al agregar que la definición se relaciona con los procesos de exploración y conjeturación.

7.1.4.4. Respecto al indicador Cómo favorece la GD (DefM1)

En la Tabla 7.14, mostramos fragmentos del Estado Inicial, Estado 1 y Estado 3 ubicados en el indicador *Cómo favorece la GD*.

Tabla 7.14

Comparación del indicador DefMI Estado Inicial, Estado 1 y Estado 3

Estado Inicial	Estado 1	Estado 3
1. (La GD) favorece la construcción de representaciones de figuras y la exploración empírica de estas, lo cual promueve un acercamiento informal a conceptos, relaciones y propiedades geométricas.	1.1 El uso de la GD permite representar objetos geométricos, visualizar y descubrir propiedades variantes e invariantes. (CO-A)	3.1 Las construcciones que realizamos no se reducen a la representación de los atributos del objeto según la definición que tenemos, por lo cual incluimos o excluimos atributos de la figura. Además, a partir de los pasos que seguimos en la construcción podemos determinar cuáles son los atributos necesarios y suficientes que componen la definición. Es decir, la definición debe reflejarse en la construcción que se realice. (CO-P)

Los fragmentos 1, 1.1 y 3.1 están relacionados porque se refieren a que el uso de GD favorece la construcción y exploración de representaciones de figuras. Expresamos que en ello están involucradas propiedades geométricas (1 y 1.1) que en 3.1 precisamos como los atributos necesarios y suficientes expresados en una definición. En los fragmentos, implícitamente expresamos que parte de la conceptualización de un objeto es reconocer sus propiedades a través de su representación con GD o usarlas para construir una representación en GD.

7.2. Ideas que solo ubicamos en un estado de nuestro CDM-DD

A continuación, presentamos la información nueva que se evidenció en el Estado 2 en relación a argumentación y en el Estado 3 en relación a definir y definición. Consideramos que es nueva información, ya que solamente se mencionó al respecto en un solo estado y no evidenciamos que en estados anteriores se haya mencionado sobre las ideas que tratan estos asuntos. Para ello, en cada estado presentamos los indicadores en cuales clasificamos fragmentos

en un solo estado. Esto con el fin de dar cuenta del conocimiento que no teníamos antes de realizar este estudio y surgió de uno de los ciclos de investigación. Cabe resaltar que, solamente presentamos los indicadores en los cuales se evidenció un conocimiento significativo sobre los asuntos de interés.

7.2.1. Nueva información Estado 2

En la Tabla 7.15, presentamos el fragmento ubicado en el indicador *Cómo se clasifica* (*ArgE5*) del asunto argumentación en el Estado 2. Este expresa nueva información sobre los modos de argumentación. De estos resaltamos las afirmaciones que hacen referencia a las reglas de inferencia lógica, y el uso de las definiciones para derivar enunciados generales.

Tabla 7.15

Fragmentos del indicador ArgE5 Estado 2 (argumentación)

<i>ArgE5</i>
<p>Los modos de argumentación que se usan son:</p> <ul style="list-style-type: none"> - La aplicación de reglas lógicas de inferencia como el modus ponendo ponens, modus tollendo ponens, modus tollendo tollens. - Uso de definiciones para derivar enunciados generales. - Enumeración sistemática de todos los casos a los que se reduce un enunciado (dado que su número es finito). - Construcción de contraejemplos. - Desarrollo de un razonamiento en el que se muestra la aceptación de una declaración que conduce a una contradicción, etc.

7.2.2. Nueva información Estado 3

En el Estado 3, encontramos nueva información en relación a los asuntos definir y definición. Respecto al proceso de definir, en la Tabla 7.16, mostramos los fragmentos ubicados en los indicadores *Qué es* (*DefE1*) y *Para qué sirve* (*DefE2*) en los cuales encontramos información nueva. En *DefE1* afirmamos que en el proceso de definir se hace una conexión entre la imagen figural de un objeto y su definición. En *DefE2* mencionamos algunos propósitos de este proceso como: construir definiciones, usar definiciones para definir otros objetos,

argumentar y buscar ejemplos y no ejemplos de una definición. Además, resaltamos el papel que cumple la definición para involucrar nociones primitivas, postulados y el lenguaje geométrico.

Tabla 7.16

Fragmentos del indicador DefE1 y DefE2 Estado 3 (definir)

DefE1	DefE2
En el proceso de definir debe existir una congruencia entre la imagen figural y la definición personal que se tiene de un objeto para utilizar coherentemente estos elementos en la construcción de una nueva definición.	<ul style="list-style-type: none"> - El proceso de definir tiene el propósito de: construir una definición, usar una definición para definir otro objeto, decidir si una figura es o no ejemplo de lo que se está definiendo o para argumentar. - (El) Proceso de definir sirve para expresar definiciones en las que se involucren las nociones primitivas, los postulados y el lenguaje geométrico

Respecto a la definición, en la Tabla 7.17, presentamos los fragmentos ubicados en los indicadores *Cómo se representa o estructura (DefE4)*, *Cómo se clasifica (DefE5)* y *Cuáles son las expectativas en cada curso (DefEc1)*. Cabe resaltar que, durante el estudio en el Estado 3 es la primera vez que ubicamos conocimiento en el indicador *DefEc1* Evidenciamos que estos expresan información nueva respecto a la clasificación de la definición según su estructura lingüística (*DefE4*) y según sus atributos (*DefE5*). Además, reconocemos que el factor didáctico de la convencionalidad de la definición influye en la elección de una definición (*DefEc1*).

Tabla 7.17

Fragmentos del indicador DefE4, DefE5 y DefEc1 Estado 3 (definición)

DefE4	DefE5	DefEc1
La definición se puede enunciar de dos maneras diferentes según su estructura lingüística: en explícitas e implícitas	Las definiciones se clasifican en correctas, incorrectas, particionales, jerárquicas y equivalentes.	Los textos escolares escogen las definiciones para ser enseñadas en la escuela de acuerdo a la convencionalidad de estas. Específicamente, el factor didáctico de la convencionalidad se refiere a la elección de la definición de acuerdo a los

		conocimientos previos que se tengan en la clase o los objetivos de aprendizaje del curso
--	--	--

8. Conclusiones

En esta sección presentamos conclusiones y proyecciones de nuestra investigación. La primera parte incluye lo referente a los siguientes aspectos de nuestro estudio: la pregunta de investigación, el objetivo general, los objetivos específicos, la transformación que se evidenció en nuestro CDM-DD y consideraciones personales. La segunda parte incluye las proyecciones que proponemos a futuro.

8.1. En cuanto a la pregunta de investigación

Durante el desarrollo del estudio, evidenciamos que el proceso realizado nos sirvió para dar respuesta a nuestra pregunta problema: ¿De qué manera se va incorporando en el conocimiento del profesor fundamentos para diseñar tareas apoyadas con geometría dinámica (GD), que favorezcan la construcción de argumentos en los que se propongan o utilicen definiciones de objetos geométricos?

Podemos concluir que las acciones más importantes que causaron la incorporación de fundamentos en nuestro CDM-DD que lo movilizaron y suscitaron cambios en este, fueron:

- Cuestionarnos sobre argumentación y definiciones nos permitió establecer los subproblemas que guiaron cada Ciclo de nuestra investigación. Cada subproblema nos llevó a proponer otras acciones para poder resolverlo. Pudimos evidenciar cambios en nuestro CDM-DD, ya que profundizamos, reformulamos y ampliamos este en relación a los asuntos de estudio.
- Realizar lecturas de artículos de autores que han hecho aportes sobre argumentación y definiciones, nos permitió conformar nuestras caracterizaciones sobre estos asuntos. Pero, a la vez, nos generó inquietudes sobre conceptos relacionados que no entendíamos bien.

Por ello, tuvimos que releer estos artículos para interpretar mejor lo dicho por los autores, con el fin discutir con la profesora nuestras interpretaciones y así aclarar estos conceptos.

- Diseñar tareas que promueven la argumentación, la construcción de definiciones y el uso de definiciones para argumentar, nos exigió utilizar los conocimientos adquiridos en la Maestría sobre el diseño de tareas. El desarrollo de esta acción nos ayudó a reconocer los elementos de una tarea y la importancia de cada uno de estos para que la tarea pudiera cumplir la meta de aprendizaje.
- Analizar las tareas que diseñamos tuvo gran incidencia para suscitar cambios en nuestro CDM-DD; nos obligó a movilizar el conocimiento que teníamos sobre el asunto matemático particular involucrado en la tarea. Además, esta acción nos sirvió para reconocer inconsistencias en el conocimiento respectivo y lograr la modificación de este.
- Exponer y discutir ideas en las asesorías, facilitaron el proceso de transformación de nuestro CDM-DD sobre los asuntos de interés, lo que nos condujo a la modificación de las posturas que teníamos. Lo anterior, porque en estos espacios expresábamos de forma espontánea nuestras definiciones personales sobre los asuntos, y en algunos casos nos dábamos cuenta de que estas no coincidían con las que habíamos establecido en nuestros escritos. Queremos destacar que el diálogo con una experta, los constantes cuestionamientos que nos hacía sobre las respuestas que dábamos, su presentación de ejemplos y no ejemplos ilustrativos sobre los asuntos tratados en las asesorías, fueron un elemento clave para que se diera el proceso de transformación que tuvimos de nuestro CDM-DD. Consideramos que las acciones mencionadas anteriormente, pueden ser consideradas como un plan de acción sobre cómo proceder cuando se quiera trabajar en el

aula sobre un proceso o concepto matemático. Por ejemplo, respecto a las preguntas que nos hacía la profesora, nosotras consideramos que se podrían tipificar en:

- Aquellas que nos pedía explicitar nuestras definiciones sobre los objetos o conceptos. Por ejemplo, ¿cuál es su definición de argumento?, ¿cómo definen cuadrado?, etc.
- Aquellas que exigían el uso de nuestras definiciones para justificar si algo era ejemplo o no ejemplo del objeto o concepto. Por ejemplo, para todo cuadrilátero si las diagonales son congruentes y se bisecan entonces va a ser rectángulo. ¿Es esto un argumento? ¿porqué?
- Aquellas en las que nos pedía identificar atributos o elementos del objeto en la solución a la tarea. Por ejemplo, ¿Cuál es la declaración hecha? (respecto a un argumento)
- Socializar resultados de las tareas con compañeros de la Maestría y de las instituciones donde trabajamos. En esos momentos se evidenciaba nuestra apropiación o no del conocimiento adquirido sobre un asunto en específico. Debido a ello, también nos generó inquietudes sobre algunos conocimientos que no eran muy claros.

8.2. Acerca de la transformación de nuestro *CDM-DD*

Usamos dos grupos de categorías. El primero, basado en el modelo CDM, nos permitió clasificar las ideas expuestas en las distintas facetas que componen la Dimensión Didáctica del modelo. Con ellas, identificamos nuestro conocimiento sobre cada asunto de interés en cada estado. Este análisis lo presentamos en los Capítulos 4,5 y 6.

El segundo grupo de categorías fue emergente. Las usamos para identificar la transformación de nuestro conocimiento. Sigue siendo la base del análisis el modelo CDM, ya que las expresiones

agrupadas para hacer la comparación están clasificadas con la misma categoría de análisis que identifica a qué faceta de la Dimensión Didáctica del CDM, se refieren. Como se mostró en el análisis realizado en los Capítulos 5, 6 y 7, la transformación de nuestro CDM-DD se evidencia cuando al expresarnos usamos un lenguaje más preciso, somos más claras al manifestar las ideas, profundizamos o ampliamos los conceptos, o reformulamos las ideas. Por ejemplo, queremos resaltar los cambios que hubo en nuestras definiciones de argumento, argumentación, y definición (Epistémico, Qué es).

Respecto a las definiciones de argumento y argumentación, el cambio surgió a raíz de las discusiones que tuvimos con la profesora cuando socializamos el diseño de la tarea propuesta en el plan de acción del Ciclo 2. Esto debido a que lo que expresábamos en nuestro discurso, cuando nos referíamos a la definición de argumento, eran los atributos de la definición que teníamos de argumentación.

Respecto a la caracterización de definición, en el Ciclo 3 necesitábamos utilizar esta para evaluar las definiciones propuestas por nuestros compañeros de trabajo después de la gestión de la tarea sobre definición. Pero, la caracterización que teníamos para definición, iniciando el ciclo luego de leer los referentes teóricos, no proveía lo que necesitábamos para poder determinar si esas definiciones eran correctas. Por ello, tuvimos que analizar nuestra definición y redefinir este objeto de estudio.

Respecto al grupo de categorías emergentes para analizar la transformación de nuestro CDM-DD, evidenciamos que estas fueron pertinentes para realizar dicho análisis y cumplir con el objetivo de investigación, puesto que logramos encontrar cambios puntuales. Por ejemplo, en la Tabla 7.12, mostramos, usando las categorías, que nuestro conocimiento acerca de para qué sirve una definición (Faceta Epistémica) modificamos el contenido de este asunto, a lo largo del

tiempo, pues pasamos en afirmar que favorece el aprendizaje a exponer que ayuda en la conceptualización de objetos matemáticos, en la resolución de problemas, la identificación de atributos para reconocer ejemplos y no ejemplos del objeto y para formular argumentos.

8.3. Acerca del objetivo general

En el objetivo general propusimos describir el proceso de transformación de nuestro CDM-DD respecto a los asuntos argumentación y definición, con el fin de favorecer el diseño de tareas apoyadas con GD para promover la argumentación y el uso de definiciones en los argumentos. Este objetivo se cumplió, ya que, como mostramos en las Secciones 4.4, 5.4, 6.4 y en el Capítulo 7, las categorías de análisis basadas en el modelo del CDM nos permitieron reconocer cambios y describir el proceso de transformación que sufrió nuestro CDM-DD sobre argumentación, definiciones y particularmente el uso de las definiciones para construir argumentos. Además, la caracterización de nuestro CDM-DD en cada ciclo de investigación fue fundamental para que en el análisis evidenciáramos de forma clara la transformación que se dio en nuestro CDM-DD. Esto fue de suma importancia para realizar la descripción del proceso de transformación que tuvo nuestro CDM-DD.

8.4. Acerca de los objetivos específicos

En el primer objetivo específico propusimos fundamentar nuestro CDM-DD sobre los asuntos que orientan nuestro estudio a partir de la revisión teórica. Este objetivo se cumplió pues, como mencionamos anteriormente, fue una acción utilizada en cada ciclo de la investigación para establecer este conocimiento.

Nuestro segundo objetivo específico consistía en analizar los estados de conocimiento determinados en cada ciclo de la investigación. En las secciones 4.4, 5.4 y 6.4 presentamos el

análisis de nuestro CDM-DD en cada ciclo. Todo ello se convirtió en los datos que usamos para determinar la transformación de este con respecto a los asuntos objeto de estudio.

El tercer objetivo específico consistía en adaptar la metodología Investigación Acción para poder diseñar acciones que pudieran afectar nuestro conocimiento, determinar inquietudes que debíamos resolver para consolidar nuestro conocimiento con el fin de lograr que este se transformara. Este objetivo se cumplió al utilizar una estrategia que tiene algunos rasgos de esta metodología. Con base a esta estrategia, realizamos un proceso compuesto de tres ciclos en los que determinamos el Estado inicial, Estado 1, Estado 2 y Estado 3 de nuestro CDM-DD, los cuales presentamos en las narraciones que se encuentran en los anexos (pág. 109 – 136). Además, en cada ciclo clasificamos el conocimiento que surgió y analizamos las transformaciones que emergieron en estos. Con base en esto, realizamos un último análisis en el que utilizamos nuestras categorías emergentes de cambio para reconocer y describir el proceso de transformación.

El cuarto objetivo específico buscaba identificar las acciones establecidas en el plan, las cuales provocaron la transformación de nuestro CDM-DD. Este objetivo se cumplió. En las Secciones 4.2, 5.2 y 6.2, indicamos qué acciones se realizaron en cada ciclo. Estas fueron: estudiar artículos académicos relacionados con cada asunto, diseñar y analizar tareas para compañeros de trabajo, una sobre argumentación y otra sobre argumentación y definición, diseñar y analizar una tarea para estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas o para estudiantes con buenos conocimientos de cuadriláteros y congruencia de triángulos, y resolver una tarea sobre definición propuesta por la asesora. Todas estas acciones influyeron en la transformación de nuestro CDM-DD, aunque creemos que lo que más afectó dicho conocimiento fue el diseño y

análisis de las tareas. Lo anterior, porque esta acción nos permitió aplicar, movilizar y expresar los conocimientos adquiridos sobre el asunto o asuntos objetos de estudio.

8.5. Acerca del diseño de tareas

Durante el proceso de diseñar una tarea, identificamos dos momentos. En el primero, diseñamos la tarea atendiendo a los elementos propuestos por Gómez (2016) y apuntando a una meta específica de aprendizaje y en el segundo, hicimos el análisis de esta. A continuación, proponemos un listado de preguntas que surgieron a partir de nuestra experiencia como diseñadoras de tareas (ver anexos pág. 100 -108), las cuales utilizamos en el primer momento del diseño. Consideramos, que estas pueden servir de guía cuando queramos diseñar tareas:

1. ¿Cuál es la meta que quiero lograr con la tarea?
2. ¿Para cuál nivel educativo es la tarea que quiero diseñar?
3. ¿Quiero que mi tarea solo sea para argumentar, definir o definir para argumentar? ¿Cuál asunto quiero que favorezca?
4. ¿Cómo debo formular la pregunta para que genere un tipo específico de argumento?
5. ¿Cómo debo formular la pregunta para que el problema sea de búsqueda de antecedente o consecuente?
6. ¿Qué tipos de argumentos puede favorecer la tarea?
7. ¿Cómo y para qué incluir el uso de GD en la tarea?
8. ¿La tarea solo se puede resolver con GD?
9. ¿Es clara la tarea que estoy proponiendo?
10. ¿Cuáles son los conceptos o preconcepciones que se necesitan para dar respuesta a la tarea?
11. ¿Cuáles son los argumentos que pueden generar los estudiantes?
12. ¿Cuáles son las construcciones que pueden realizar los estudiantes?

13. ¿Cuáles son las posibles respuestas que pueden dar los estudiantes a la tarea?
14. ¿Cuál es la solución que logra cumplir con o se acerca más a la meta de la tarea?
15. ¿Cuáles son los errores que pueden cometer los estudiantes con esta tarea y cuál es el tratamiento que debo hacer de ellos?
16. ¿Cómo debe ser mi gestión de la tarea en clase?

Luego de utilizar estas preguntas y formular la tarea, realizamos un segundo momento, que consistió en analizar la tarea diseñada. Para ello, nos preguntamos si eran claros los enunciados y preguntas que hacíamos en la formulación de esta. Además, nos cuestionamos si las definiciones y proposiciones que se deben usar para solucionarla (saberes previos) son los mismos que teníamos en mente durante el diseño de la tarea. También, nos cuestionamos si con la solución de esta se puede promover alguno de los procesos que fueron asuntos de este estudio. Por ejemplo, si las afirmaciones que se pueden lograr son argumentos o si las definiciones que se pueden generar son correctas, claras, económicas, etc. Adicionalmente, nos preguntamos qué papel juegan los argumentos o las definiciones en la solución de la tarea, qué uso se le da a la GD, qué aporta el uso de GD para favorecer un proceso u otro.

8.6. Conclusiones personales

Reconocemos que en nuestra práctica no proponíamos tareas que favorecieran la argumentación, definir, usar definiciones y el uso de GD. Resaltamos que es importante proponer a los estudiantes tareas que promueva el uso de las definiciones para argumentar. Esto debido a que una definición sirve de garantía para convencer a los demás sobre las declaraciones que hace el estudiante para resolver dicha tarea, siendo ello un paso hacia la argumentación matemática formal. Además, queremos destacar que la GD sirve para apoyar el vínculo entre los asuntos mencionados anteriormente. Esto porque, en el proceso de construcción y exploración de la

solución de un problema, se ponen en juego las definiciones personales que se tienen de los objetos, y estas son útiles durante el proceso de razonamiento que se realiza para generar los argumentos. Particularmente, en la última tarea que diseñamos (anexo p. 107), concluimos que los procesos de construcción y de exploración realizados fueron primordiales para solucionar dicha tarea (narración Estado 3 p. 163). Sin embargo, aceptamos que aún debemos formarnos para poder profundizar en nuestro CDM-DD, sobre las formas de utilizar GD para promover estos procesos.

El poder realizar este trabajo de grado, con el apoyo del grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G)*, nos permitió involucrarnos en una investigación rigurosa y minuciosa, como fue el proceso de autorreflexión con base a un modelo teórico de la didáctica de las matemáticas. Este proceso nos permitió cuestionarnos, como lo hemos mencionado anteriormente, sobre nuestro conocimiento respecto a unos asuntos específicos. Todo esto, nos hizo caer en cuenta que estudiar nuestro conocimiento profesional es importante para evidenciar las falencias que hay en este, con el fin de proponer estrategias para promover mejoras que se reflejen en nuestra práctica profesional. Con esto podremos favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes.

Consideramos que la creación de grupos de estudio con los profesores en las instituciones donde trabajamos, podría ser una acción potente para contribuir a la mejora de la enseñanza de las matemáticas en la escuela. Creemos que es necesario involucrar a otros profesores en acciones de autorreflexión y autocuestionamiento de acciones que desarrollamos como profesores de matemáticas como, por ejemplo, el diseño de tareas. Analizar las tareas que diseñemos para nuestros estudiantes permite identificar el conocimiento didáctico y matemático

que ponemos en juego y evidenciar las posibles carencias en este. Esta sería una estrategia útil para favorecer la enseñanza de las matemáticas y mejorar nuestra práctica profesional.

Destacamos que nuestras categorías de análisis e indicadores establecidos para clasificar nuestro CDM-DD, son aspectos que consideramos que un profesor debe tener en cuenta cuando quiere estudiar un concepto o proceso matemático para abordarlo en el aula. A continuación, mostramos el conjunto de preguntas que los profesores debemos hacernos con relación a tres aspectos del conocimiento, los cuales fueron los que se evidenciaron en este estudio:

1. El conocimiento para la enseñanza de un concepto o proceso: ¿Qué es?; ¿Para qué sirve?; ¿Con qué se relaciona?; ¿Cómo se representa o estructura?; ¿Cómo se clasifica?
2. El conocimiento para poder usar y evaluar la pertinencia de los materiales: ¿Cómo favorecen el aprendizaje las tareas y/o el uso de GD?
3. El conocimiento sobre las políticas curriculares: ¿Cuáles son las expectativas en cada curso?

8.7. Proyecciones

Como proyección queremos aplicar las habilidades obtenidas durante el desarrollo de esta investigación en la realización de procesos investigativos para mejorar nuestro actuar en el aula. Por ejemplo, diseñar tareas para nuestros estudiantes que promuevan la argumentación y el uso de las definiciones para construir argumentos, apoyados en el uso de GD, con el fin de evidenciar si hay un impacto positivo en su aprendizaje.

Además, presentamos la siguiente propuesta o plan de acción sobre cómo consideramos que debe proceder el profesor que quiera abordar en clase un proceso y/o objeto matemático cualquiera. A continuación, mencionamos las acciones que se pueden realizar, teniendo en cuenta que estas fueron las que nos permitieron evidenciar mejoras en nuestro *CDM*:

1. Escoger el objeto o proceso.
2. Presentar una definición personal del objeto o proceso.
3. Analizar las definiciones para encontrar diferencias y semejanzas.
4. Buscar artículos de educación matemática que traten el asunto en cuestión, leerlos y discutirlos entre nosotros o con un experto. Transformar el conocimiento correspondiente, si es el caso.
5. Analizar tareas propuestas en literatura, usando las preguntas que propusimos anteriormente.
6. Diseñar tareas
7. Analizar las tareas diseñadas usando las preguntas formuladas anteriormente.
8. Aplicar las tareas y evaluar para determinar resultados o modificaciones de esta requeridas.

9. Referencias bibliográficas

- Arzarello, F., Bartolini, M., Leung, A., y Mariotti, M. (2012). Experimental Approaches to Theoretical Thinking Artefacts and Proofs. En G. Hanna, y M. de Villiers, *Proof and Proving in Mathematics Education* (págs. 97 - 143). Springer.
- Cabassut, R., Conner, A., Iscimen, F., Furinghetti, F., Jahnke, H., y Morselli, F. (2012). Conceptions of Proof - In Research. En G. Hanna, y M. de Villiers, *Proof and Proving in mathematics educations* (págs. 172 - 193). Springer.
- Calvo, C. (2001). Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo diferencial e integral [Tesis de doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona]
- Camargo, L. (s.f.). Estrategias cualitativas en investigación en Educación Matemática. Documento en proceso de impresión. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Camargo, L., y Samper, C. (2014). Definiciones y construcción de significado en el marco de la actividad demostrativa. En P. Perry, *Relevancia de lo inadvertido en el aula de geometría* (págs. 55 - 77). Sistema de publicaciones y difusión del conocimiento, UPN.
- Chapman, O. (2013). Mathematical- task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education* (16), 1 - 6.
- de Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? En A. Oliver, y K. Newstead, *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 248 - 255). University of Stellenbosch.
- Dreyfus, T., Nardi, E., y Leikin, R. (2012). Forms of Proof and Proving in the Classroom. En G. Hanna, & M. de Villiers, *Proof and Proving in mathematics educations* (págs. 194 - 216). Springer.

- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht, Springer.
- Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática* (20), 13 - 31.
- Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1), 127 - 135.
- Gómez, P., y Mora, M. V. (2018). Análisis de instrucción. En P. Gómez, *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (Eds.) (págs. 197 - 268). Universidad de los Andes.
- Hanna, G., y de Villiers, M. (2012). Aspects of Proof in Mathematics Education. En G. Hanna, y M. de Villiers (Eds) *Proof and Proving in Mathematics Education* (págs. 13-22). Springer.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares. Matemáticas. Magisterio.
- Molina, O., y Pino-Fan, L. (s.f.). Diferencias entre discursos colectivos (verbales) e individuales (escritos) al hacer demostraciones en geometría: una explicación a partir del sistema de normas. *Educación Matemática*, 30 (2), 73 - 105.
- Molina, O., y Samper, C. (2019). Tipos de problemas que provocan argumentos inductivos, abductivos y deductivo. *Bolema*, 33 (63), 109 - 134.
- Molina, O., Font, V., y Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las ciencias*, 37 (1), 93 - 116.

- Orit, Z., Nickerson, S., Stylianides, A., Kidron, I y Winicki-Landman, G. (2012). The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical Perspectives. En G. Hanna, & M. de Villiers, *Proof and Proving in mathematics educations* (págs. 215 - 229). Springer.
- Colegio Federico García. PEI - Proyecto Educativo Institucional.
<https://www.redacademica.edu.co/colegios/colegio-federico-garcia-lorca-ied>
- Pino-Fan, L., y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico matemático. *Paradigma*, 36 (1), 87-109.
- Pino-Fan, L., Assis, A., y Castro, W. (2015). Towards a Methodology for the Characterization of Teachers' Didactic-Mathematical Knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11 (6), 1429 - 1456.
- Schwarz, B., y Kaiser, G. (2009). Professional competence of future mathematics teachers on argumentation and proof and how to evaluate it. En F. Lin, G. Hsieh, G. Hanna, y M. de Villiers, *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, págs. 190 - 195).
- Serres, Y. (2007). Un estudio de la formación profesional de docentes de matemáticas a través de investigación-acción. *Revista de pedagogía*, 28 (82), 287 - 310.
- Silva, L. (2013). Argumentar para definir y definir para argumentar (Tesis de Maestría). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Stylianides, A. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38 (3), 289 - 321.
- Toulmin, S. (2003). *The uses of argument*. University of Cambridge.

10. Anexos

Anexo A: Tarea 1, Argumento y argumentación

Introducción

La siguiente tarea se propone a un grupo de 6 profesores de matemáticas, con el fin de identificar el conocimiento que tienen sobre los constructos argumentación y argumento. También mostramos algunos elementos que tuvimos en cuenta para el diseño de esta tarea.

Fecha propuesta: 20 o 21 de mayo

Requisitos	Objetos primarios: <ul style="list-style-type: none"> ➤ Definiciones: Circunferencia, mediana de un triángulo, bisectriz de un ángulo, triángulo equilátero, polígono regular, ➤ Conceptos: argumentación y argumento.
Meta de aprendizaje	<p>Parte 1: Los profesores deben construir la definición de argumento en conjunto, a partir de las ideas que tengan. Lo anterior, con el objetivo de escoger, entre todos, la definición de argumento con relación a las propuestas por varios autores.</p> <p>Parte 2: Los profesores deben interpretar cada situación e identificar argumentos, a partir del estudio de ejemplos y no ejemplos. Para ello, los profesores deben dar cuenta del dato y la aserción, en los argumentos que encuentren, aunque ellos no conozcan estos términos de forma explícita.</p>
Agrupamiento	Inicialmente, se propone el trabajo en parejas para estudiar y resolver la tarea. Luego, se realiza la socialización con todo el conjunto de profesores, para realizar la puesta en común de sus producciones.
Materiales y recursos	<ul style="list-style-type: none"> - Tarea - Videollamada - Computador o celular - Applet de GeoGebra
Interacción	<p>Introducción: Se generará un ambiente que promueva la interacción entre los profesores para el desarrollo de la tarea.</p> <p>Trabajo en parejas: los profesores se encuentran en parejas para resolver la tarea.</p> <p>Socialización y puesta en común: se socializa la postura de cada pareja respecto a cada pregunta. Luego, se establecen las posturas que hay en común de acuerdo a la meta de aprendizaje.</p>

	Cierre: se establecen acuerdos, con los profesores, sobre las definiciones de los constructos argumentación y argumento.
Temporalidad	Sesión de 100 minutos, los cuáles se distribuirán de la siguiente manera: <ul style="list-style-type: none"> - Introducción (10 min) - Parte 1: <ul style="list-style-type: none"> o Trabajo en parejas (15 min) o Socialización y puesta en común (25 min) - Parte 2: <ul style="list-style-type: none"> o Trabajo en parejas (15 min) o Socialización y puesta en común (25 min) - Cierre: conclusiones (10 min)

PARTE 1

1. ¿Qué es un argumento?
2. a) Lean las siguientes definiciones de argumento, propuestas por autores de unos artículos:

Martínez y Romero (2015): Un argumento es una expresión discursiva, producto de un razonamiento, que se realiza de acuerdo con normas compartidas, y que consiste en dar razones para justificar y convencer a alguien, o a uno mismo, sobre una declaración hecha.
Carvajal, Martínez y Soto (2019): El argumento es un conjunto de proposiciones dirigidas a mostrar que una de ellas está justificada por las restantes.
Cervantes y Cabañas (2018): Un argumento es una razón o razones ofrecidas a favor o en contra de una proposición.

- b) ¿Cuál de las anteriores definiciones es la que mejor se ajusta a la definición propuesta por ustedes? ¿Por qué?

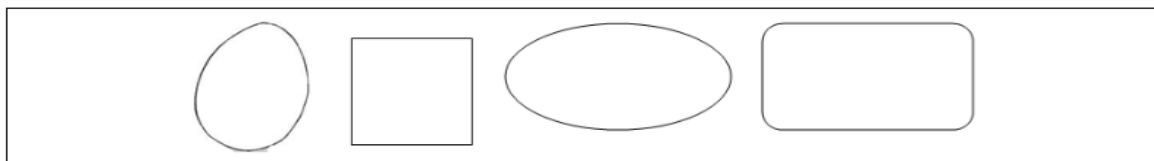
Socialización:

1. ¿Qué tienen en común las definiciones propuestas en el ítem 2?
2. ¿Cómo difiere cada definición de las otras dos?
3. ¿Cuál de las tres definiciones es la mejor y por qué?
- 4.

PARTE 2

1. Lean el siguiente diálogo y respondan la pregunta

Tomado de Silva (2013)



258.	Profesora:	[...] ¿Es la primera figura una circunferencia? Sí, no y por qué.
		[...]
267.	Sergio:	Miss, yo sé por qué no.
268.	Profesora:	Sergio: ¿por qué no?
269.	Sergio:	Porque no es una circunferencia porque el centro no tiene la misma distancia hacia arriba o hacia los lados.

¿La respuesta dada por Sergio es un argumento? Justifiquen su respuesta.

2. Andrés explica a sus compañeros cómo construir en GeoGebra la mediana \overline{AM} del ΔABC .

Andrés:	Realicé el siguiente procedimiento: <ol style="list-style-type: none"> 1. Construí el ΔABC. 2. Hallé M, punto medio del segmento \overline{BC}. 3. Construí el \overline{AM}.
---------	--

¿Lo dicho por Andrés es un argumento? Justifiquen su respuesta

3. Observen el video de la construcción realizada por un estudiante cuando se le propuso la siguiente tarea: (ver archivo anexo)

Encuentre la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad: la bisectriz de un ángulo y la mediana con extremo en el vértice del mismo ángulo coinciden. Escriba su respuesta.

¿Cuál(es) de las siguientes enunciaciones del estudiante, que pudieron ser producidos durante el proceso de construcción, es un argumento? Explique su decisión.

- a. “Construí la mediana \overline{AM} , ya que es el segmento que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto del vértice”
- b. “En este caso, la mediana \overline{AM} pertenece al \overrightarrow{AL} , bisectriz del $\angle BAC$ ”
- c. “Por ser el triángulo equilátero, la mediana \overline{AM} pertenece al \overrightarrow{AL} , bisectriz del $\angle BAC$ ”
- d. “Quiero realizar un triángulo equilátero. Para eso, construyo un polígono regular de 3 lados, porque un polígono regular tiene todos sus lados congruentes”

Anexo B: Tarea 2, definiciones

Introducción

La siguiente tarea se propone a un grupo de 6 profesores de matemáticas, con el fin de identificar nuestro conocimiento sobre el constructo definiciones. También mostramos algunos elementos que tuvimos en cuenta para el diseño de esta tarea.

Requisitos	Objetos primarios: <ul style="list-style-type: none"> • Conceptos – definiciones Matemáticos: Cuadrado, vértice, perpendicularidad, paralelismo, diagonal, bisectriz de un ángulo, lados adyacentes, bisecar • GeoGebra: conocer herramientas para construir objetos geométricos como: punto, segmento, rectas, circunferencia, entre otros. Por otro lado, usar herramientas para explorar como: distancia o Longitud, ángulo, así como el artefacto arrastre. • Representaciones: gráfica • Lenguaje: simbólico geométrico
Metas de aprendizaje	<ul style="list-style-type: none"> • Los profesores deben realizar y explorar la construcción del cuadrado haciendo uso de GeoGebra. • Los profesores deben enunciar definiciones del cuadrado, a partir del descubrimiento y clasificación de los atributos necesarios y suficientes de la figura.
Agrupamiento	<p>Un primer momento de trabajo individual para resolver el primer punto. Un segundo momento de trabajo en grupo para socializar y llegar a acuerdos en el primer punto. Además, en grupo resolverán el punto 2 y 3. Intermedio entre el punto 2 y 3, habrá un momento de socialización comentar las definiciones de cuadrado.</p> <p>Por último, habrá una socialización para verificar las soluciones propuestas en el punto 3</p>
Materiales y recursos	<ul style="list-style-type: none"> • Tarea (fotocopias) • Videollamada • Computador o celular • Cuaderno • Lápiz
Interacción	<p>Se explica cómo van a realizar los puntos de la tarea y los momentos de socialización que habrá. En los momentos de socialización las profesoras utilizarán GeoGebra para verificar las propuestas de los profesores.</p>
Temporalidad	<p>Sesión de 50 minutos, los cuáles se distribuirán de la siguiente manera:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Introducción (5 min) • Trabajo en parejas (15 min)

	<ul style="list-style-type: none"> • Socialización (10 min) • Trabajo en parejas (15 min) • Socialización (10 min)
--	---

1. Complete la siguiente definición:

Una figura geométrica es un cuadrado si y solo si _____

2. Construyan con GeoGebra un cuadrado. Reporten los pasos.

a. De acuerdo a los pasos de la construcción, ¿creen que la definición propuesta en el punto 1 incluye los atributos necesarios y suficientes? Si su respuesta es no, ¿cómo modificaría la definición inicial?

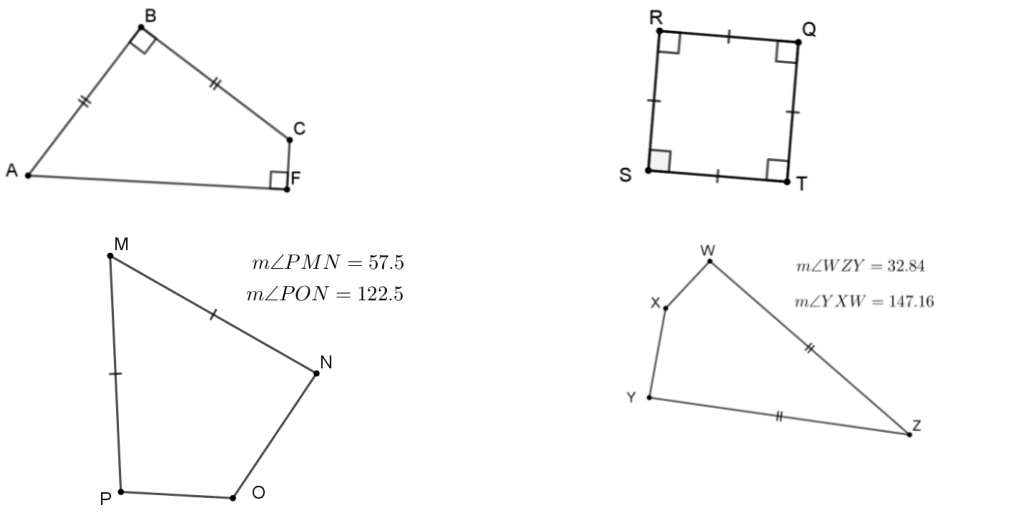
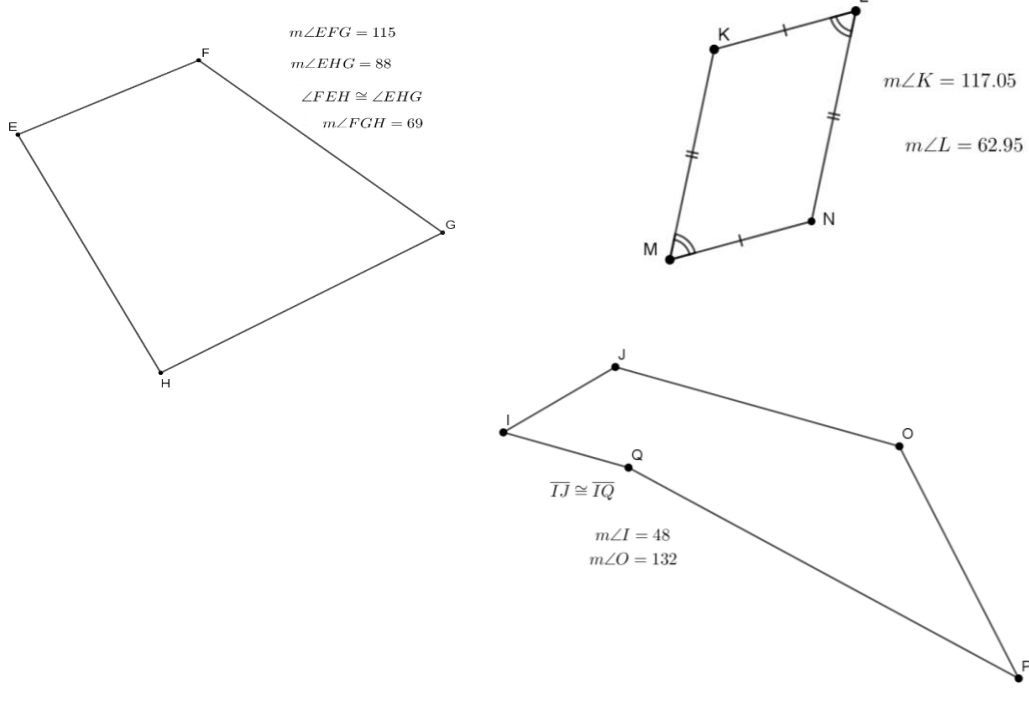
3. Algunos atributos del cuadrado son:

1. Es un cuadrilátero.
2. Tiene cuatro lados congruentes.
3. Las diagonales son congruentes.
4. Los lados opuestos son paralelos.
5. Tiene cuatro ángulos rectos.
6. Las diagonales del cuadrado están contenidas en las bisectrices de los ángulos del cuadrado.
7. Las diagonales se bisecan.
8. Un par de lados adyacentes congruentes.
9. Las diagonales son perpendiculares.

¿Cuáles de los anteriores atributos conforman conjuntos de atributos necesarios y suficientes de cuadrado y servirían para definirlo? Justifique su respuesta.

Anexo C: Tarea 3, propuesta por la profesora

1. En la tabla se dan ejemplos y no ejemplos de una figura geométrica denominada **FALA**.

Ejemplos de FALAS	
No ejemplos de FALAS	

a) Complete la siguiente definición:

La figura determinada por los puntos C, D, E y F es un fala (p) si y solo si

- b) Use el *diagrama – definición* para plasmar la definición que propuso.
- c) Para cada no ejemplo, indique porqué lo es.
- d) Dibuje otra figura que sea no ejemplo y explique por qué lo es.

Anexo D: Tarea 4, definiciones y argumentación

Introducción

La siguiente tarea se diseña con el fin de identificar nuestro conocimiento sobre definiciones y argumentación, específicamente el uso de la definición para argumentar. También mostramos algunos elementos que tuvimos en cuenta para el diseño de esta tarea.

Requisitos	Objetos primarios: <ul style="list-style-type: none"> ➤ Conceptos - definiciones: rectángulo paralelogramo con un ángulo recto, paralelogramo dos pares de lados opuestos, bisecar, diagonales, ángulos opuestos, triángulo isósceles, congruencia de triángulos, rayos opuestos, ángulos alternos internos, punto medio, rectas paralelas. ➤ Proposiciones: criterios de congruencia de triángulos, ángulos alternos internos-paralelas. ➤ Lenguajes: simbólico, geométrico, gráfico
Metas de aprendizaje	<ul style="list-style-type: none"> ➤ El estudiante por medio de la exploración y el uso del arrastre, debe encontrar las condiciones que cumplen las diagonales de un cuadrilátero para que sea rectángulo. ➤ El estudiante por medio del uso de las definiciones y teoremas argumenta que un cuadrilátero con diagonales congruentes y que se bisecan es rectángulo.
Materiales y recursos	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Computador ➤ Software GeoGebra

Descripción de la tarea:

Dado el cuadrilátero $ABCD$, ¿qué condiciones deben cumplir las diagonales para que el cuadrilátero $ABCD$ sea rectángulo?

Dado el rectángulo $ABCD$, ¿qué propiedades tienen las diagonales?

1. Describa el proceso de construcción y exploración realizado.
2. Provea una conjetura y demuéstrela.

Anexo E: Narración del Estado Inicial

Producto de la revisión hecha a la Propuesta Inicial, presentada para ingresar a la Maestría, y a la Delimitación del problema en el documento Anteproyecto, que se realizó en marzo de 2020, reportamos a continuación, la concepción que teníamos en ese momento sobre los constructos: argumentación, Geometría Dinámica (GD) y tareas. Además, dado que nuestro estudio se centra en determinar el CDM del profesor cuando diseña tareas para favorecer argumentos en los que se usan definiciones de objetos y relaciones geométricas, también reportamos el conocimiento respecto al proceso de definir y definiciones.

En cuanto a la argumentación, Jenifer manifiesta en la Propuesta Inicial que argumentar es demostrar (*ArgE1*) (*argumentación*), y afirma que los argumentos sirven para justificar lo que se hace y se dice (*ArgE2*) (*argumento*). Reconoce que es difícil que los estudiantes argumenten con el rigor que se exige en matemáticas (*ArgCog1*) (*argumentación*). Además, relaciona la argumentación con el razonamiento (*ArgE3*) (*argumentación*), pues considera que razonar es un proceso mental que permite expresar algo de acuerdo a una estructura lógica (*ArgE1*) (*argumentación*).

Por su lado, Lucía afirma en la Propuesta Inicial que la argumentación es lo que los estudiantes pueden expresar de un tema específico de la clase, gracias a la explicación del profesor (*ArgE1*) (*argumentación*). Además, reconoce que la argumentación permite resolver problemas propuestos por el profesor (*ArgE2*) (*argumentación*).

En relación a la GD, Jenifer expresa en la Propuesta Inicial que la GD “favorece la construcción de representaciones de figuras y la exploración empírica de estas”, lo cual promueve “un

acercamiento informal a conceptos, relaciones y propiedades geométricas” porque permite identificar propiedades de los objetos geométricos (*DefM1*) (*definiciones*).

Por su lado, Lucía afirma en la Propuesta Inicial que generalmente los profesores usan “la tecnología digital como un sustituto de la explicación (*ArgM1*) (*argumentación*) y no como una herramienta didáctica que permita dinamizar e interactuar con los contenidos en los procesos de aprendizaje de los estudiantes”.

Respecto al tipo de tareas, en la Propuesta inicial Jenifer se refiere a los reportes escritos e indica qué ese tipo de tarea: “refleja los aprendizajes del estudiante y así permite sistematizar su conocimiento”. Es decir, que sirve para entrever lo que los estudiantes saben y por qué hacen lo que hacen, cuando están desarrollando un proceso para definir (*DefM2*) (*definir*).

Antes de ingresar a la Maestría, Jenifer y Lucía proponían actividades tales como “el desarrollo de proyectos (en el caso de Lucía) y problemas de construcción de figuras geométricas (en el caso de Jenifer)”.

En los proyectos que ha propuesto Lucía se ponen en juego temáticas que se conjugan con las de otras áreas. Esta construcción se realiza con la intención de identificar las características y propiedades de objetos tridimensionales, para que los estudiantes relacionen los sólidos con situaciones de la vida cotidiana (*DefM1*) (*definición*).

Las actividades que propone Jenifer es construir objetos geométricos a partir de unas condiciones propuestas. El objetivo de esta tarea es realizar la representación gráfica para reconocer que el proceso usado es análogo al que identifica a una circunferencia en geometría euclidiana y que la representación del objeto geométrico varía (*DefM2*) (*definir*).

En las tareas que ellas proponían, reconocen que el uso de la definición desempeña un papel importante para lograr el aprendizaje de los estudiantes (*DefE2*) (*definición*). Esto porque este

tipo de actividades promueve el uso de la definición y favorece la conceptualización de los objetos geométricos (*DefE2*) (*definición*).

En la Propuesta Inicial, Jenifer considera que el uso de definiciones en la argumentación “promueve la conceptualización de objetos geométricos” (*DefE3 y DefE2*) (*definición*).

Anexo F: Narración del Estado 1

Para poder reportar nuestro estado 1 del conocimiento didáctico matemático, realizamos la revisión de los apuntes tomados por nosotras, la propuesta de Anteproyecto, las tareas realizadas para los seminarios y las reflexiones realizadas sobre las clases.

Acerca de la argumentación

Respecto a la argumentación, tanto Jenifer como Lucía afirman que es un proceso en el que se produce un discurso (*ArgE1*) (*argumentación*). Es decir, la consideran como un proceso comunicativo (*ArgE1*) (*argumentación*), producto de un razonamiento (*ArgE3*) (*argumentación*). Sin embargo, Lucía dice que este se desarrolla de acuerdo con “normas establecidas” y Jenifer con “normas compartidas” (*ArgE1*) (*argumentación*). Coinciden en que la argumentación consiste en dar razones (*ArgE1*) (*argumentación*) para convencer o persuadir a alguien, o a uno mismo, sobre una declaración hecha, con el fin de establecer una conclusión (*ArgE2*) (*argumentación*).

En relación al argumento, ellas afirman que es un enunciado oral o escrito (*ArgE1*) (*argumento*). Según el modelo de Toulmin, la estructura del argumento está conformada por dato, aserción y garantía (*ArgE4*) (*argumento*), en donde la garantía es una proposición general que relaciona el dato con la aserción y que estas son proposiciones particulares (*ArgE4*) (*argumento*). Los argumentos se pueden clasificar en varios tipos: deductivos, inductivos, abductivos y analógicos (*ArgE5*) (*argumento*). Un argumento deductivo es aquel en el que se aplica la garantía al dato conocido para obtener la aserción (*ArgE5*) (*argumento*). En un argumento abductivo, se conocen la aserción y la garantía, y se usan para inferir un posible dato (*ArgE5*) (*argumento*). En un argumento inductivo, se tiene un número n de casos que particularizan el dato y se descubre que ellos cumplen otra propiedad (la aserción) (*ArgE5*) (*argumento*). En este tipo de argumento, se

infiere la garantía, la cual es una relación que se caracteriza por ser plausible (*ArgE5*) (*argumento*).

Particularmente, ambas afirman que la demostración es un tipo especial de argumentación (*ArgE3*) (*argumentación*); es una secuencia de afirmaciones que, según Jenifer es “organizada” y según Lucía es “lógica” (*ArgE1*) (*argumentación*). Esa secuencia busca establecer la validez o no de una afirmación (*ArgE2*) (*argumentación*). Mencionan que, dentro de una comunidad de aula, para demostrar se utilizan afirmaciones que son verdaderas y aceptadas, se emplean esquemas de razonamiento (*ArgE1*) (*argumentación*) y se presenta la demostración haciendo uso de diferentes modos de representación. Explicitan que la demostración convierte a las conjeturas en hechos (*ArgE3*) (*argumentación*), siendo una conjetura una afirmación de la que se tiene alto grado de convicción de su certeza (*ArgE3*) (*argumentación*).

Acerca de definiciones

Afirman que la definición “juega el papel de establecer la relación entre la representación gráfica y un conjunto de propiedades” (*DefE2*) (*definición*); para ellas, esto permite generar significado de los objetos geométricos (*DefE2*) (*definición*). Además, respecto al vínculo entre las definiciones y la argumentación, Jenifer y Lucía mencionan que “las definiciones se utilizan como garantías en las demostraciones” (*DefE3*) (*DefE2*) (*definición*).

Acerca de tareas

Respecto a tareas, Jenifer y Lucía las definen como un instrumento que se propone con el objetivo de que los estudiantes logren cumplir las metas de aprendizaje que ha establecido el profesor. Así mismo, son un instrumento para que los estudiantes logren superar los obstáculos que se puedan presentar y errores que cometen en el proceso de resolución de la tarea. En cuanto

a la actividad, la definen como la producción que hace el estudiante en el momento de resolver la tarea.

Ellas reconocen que existen tipos de tareas como las de aprendizaje y las de evaluación.

Particularmente, reconocen hay un tipo de tareas que favorece la conjeturación. Estas tareas se pueden tipificar de acuerdo a la información que provee y los interrogantes que propone, en tres tipos: problema de búsqueda del consecuente, problemas de búsqueda del antecedente y problemas de determinación de dependencia (*ArgM2*) (*argumentación*).

En los del primer tipo, están dadas las condiciones suficientes y se deben hallar las consecuencias necesarias de estas. Es decir, se conoce el antecedente de la conjetura y se pretende determinar el consecuente. Este tipo de problemas puede favorecer la producción de argumentos inductivos (*ArgM2*) (*argumentación*).

En los del segundo tipo, se enuncian las propiedades o consecuencias esperadas y se deben hallar las condiciones suficientes que den lugar a dichas propiedades. Es decir, se conoce el consecuente de la conjetura y se pretende determinar el antecedente. Este tipo de problemas puede favorecer la producción de argumentos abductivos (*ArgM2*) (*argumentación*).

Respecto a los de tercer tipo, no identifican características generales y que tipo de argumentos favorece.

Por otro lado, afirman que, según varios autores, el diseño de la tarea está compuesta por los siguientes elementos: los requisitos, las metas, la formulación, los materiales y recursos, la temporalidad, el agrupamiento y la interacción. Ellas definen cada uno de los elementos de la siguiente manera:

- Los requisitos son los conocimientos y destrezas que deben tener los estudiantes antes de resolver la tarea. Para determinar los requisitos se deben puntualizar los objetos primarios

que estarán involucrados. Es decir, determinar cuáles son los conceptos, definiciones, las proposiciones que expresan elementos teóricos, representaciones, lenguajes que el estudiante debe conocer para poder resolver la tarea y qué argumentos puede producir.

- Las metas son las expectativas y limitaciones que el profesor establece y que quiere que los estudiantes logren. Al igual que para los requisitos, en las metas se puntualizan los objetos primarios, pero ahora son los que podrían o se quiere que emerjan al finalizar la actividad del estudiante.
- La formulación es el enunciado de la tarea, en el que se presentan las indicaciones de esta. El enunciado debe ser claro y de fácil interpretación para los estudiantes. En particular, el enunciado de la tarea que favorece la conjeturación debe contener preguntas en las que se pida a los estudiantes reportar el procedimiento de construcción y exploración, con el fin de poder identificar los argumentos que emergen en la actividad realizada para poder formular la conjetura.
- Los materiales y recursos se escogen de acuerdo a las metas de aprendizaje y se evalúa la pertinencia de estos para abordar la tarea.
- El agrupamiento es la forma como el profesor organiza a los estudiantes para promover la construcción del conocimiento colectivo; por eso se recomienda realizar la tarea en grupos de máximo tres estudiantes.
- La temporalidad son tiempos destinados para desarrollar la tarea en los diferentes momentos estipulados por el profesor. Se pueden identificar algunos momentos como el abordaje de la tarea, en grupos o de forma individual; la puesta en común para socializar las conjeturas propuestas por los estudiantes y la construcción colectiva de la conjetura, momento guiado por el profesor.

- En la interacción se prevé las formas en que pueden interactuar los estudiantes entre ellos mismos o con el docente, durante los diferentes momentos de la clase.

Acerca de GD

Respecto a la GD, Jenifer afirma que la GD es un espacio en el que se promueve el aprendizaje de la geometría haciendo uso de un software. Lucía, no se refiere a la definición de GD, pero reconoce que estos entornos permiten mejorar el razonamiento geométrico en la resolución de problemas.

Ambas reconocen que el uso de la GD en la resolución de problemas permite representar objetos geométricos, visualizar y descubrir propiedades variantes e invariantes (*DefMI*)

(*definición*). Además, el proceso de visualización y exploración que nos brinda la GD favorece los procesos de argumentación, conjeturación y prueba (*ArgMI*) (*argumentación*).

Particularmente, consideran el arrastre como el movimiento o desplazamiento de un punto u objeto por la pantalla de una herramienta digital, el cual se utiliza para buscar o confirmar propiedades. Además, al activar la herramienta del software llamada rastro se puede visualizar el lugar que recorre ese objeto en el plano o espacio. En cuanto a la actividad, la definen como la producción que hace el estudiante en el momento de resolver la tarea.

Según la propuesta de Olivero (2002) los tipos de arrastre son: errante, guiado y de lugar geométrico ficticio. A continuación, se expresa lo que consideran que diferencia cada tipo de arrastre:

- El arrastre errante consiste en mover los puntos sin un rumbo o plan, con el fin de poder ver alguna propiedad del objeto geométrico.

- El arrastre guiado, según Lucía, se realiza con la intención de encontrar una forma particular del objeto geométrico. Mientras que, según Jenifer, consiste en mover un punto cuidando que la propiedad invariante no se altere en la figura.
- El arrastre de lugar geométrico ficticio se realiza cuando se mueve un punto, el cual tiene una relación de dependencia con otro, lo cual genera un lugar geométrico.

Jenifer y Lucía afirman que existen dos tipos de construcciones que se pueden realizar haciendo uso de software de GD: las construcciones robustas y construcciones blandas. Las primeras, son aquellas en las que, bajo el arrastre, la figura mantiene las propiedades invariantes del objeto geométrico. Las segundas, son aquellas en las que, bajo el arrastre, la figura no conserva las propiedades invariantes del objeto.

Anexo G: Narración del Estado 2

Acerca de Argumentación

Durante el Ciclo 2 realizamos las siguientes acciones: el diseño de una tarea sobre argumentación y argumento para usar en un conversatorio con compañeros de trabajo (ver anexo p. 100), las asesorías de trabajo de grado en el mes de marzo y abril del 2021, el simulacro del conversatorio con algunos compañeros de la Maestría, y las lecturas realizadas con la intención de buscar respuestas a las preguntas que surgieron durante el Ciclo 1. A continuación, reportamos el efecto de estas acciones en nuestro conocimiento.

Durante el diseño de la tarea

Inicialmente, diseñamos una tarea que sería implementada en un conversatorio con un grupo de profesores de matemáticas de las instituciones en las que laboramos. El propósito del conversatorio es que los profesores expresen sus ideas y concepciones, sobre los constructos argumento y argumentación. Nuestro objetivo para esta acción es identificar en lo que se propone como tarea, en lo que se discute durante el diseño y en la interacción sobre la tarea con la profesora, elementos de nuestro conocimiento sobre argumento y argumentación, y encontrar, posiblemente, modificaciones de este.

Al iniciar el diseño, contábamos con las siguientes definiciones:

Argumentación: es un proceso en el que se produce un discurso, es decir, es un proceso comunicativo, producto de un razonamiento. Consiste en dar razones para convencer o persuadir a alguien, o a uno mismo, sobre una declaración hecha, con el fin de establecer una conclusión.

Argumento: es un enunciado oral o escrito producto de la argumentación.

Pero, entre nosotras existían unas diferencias con respecto a la argumentación: si esta se desarrolla de acuerdo con “normas establecidas” o con “normas compartidas”, y si estas dos frases expresan cosas diferentes.

En la asesoría del 9 de marzo, presentamos la primera versión de la tarea. Cuando revisamos con la profesora el primer punto, presentado a continuación, surgió una inquietud con respecto a la definición de argumentación.

Cuadro 10.1

Primer enunciado de la tarea

Seleccione en los siguientes enunciados, los atributos más importantes para definir argumentación.

- a. Proceso en el que se produce un discurso
- b. Sirve para justificar una idea
- c. Convencer a alguien o a uno mismo
- d. Sirve para expresar lo que se dice y hace
- e. Se utilizan normas compartidas
- f. Se establece una conclusión sobre una declaración hecha
- g. Es un enunciado oral o escrito
- h. Se utiliza para demostrar una afirmación hecha
- i. Es producto de un razonamiento

A petición de la profesora, indicamos cuáles de las opciones eran los atributos que considerábamos acertados, los cuales son las opciones a, c, e, f, i. Pero, la profesora nos cuestionó sobre la afirmación f pues no le era claro a qué nos referimos con conclusión. Ahí caímos en cuenta que el literal f no expresaba lo que teníamos en nuestra definición de argumentación. Por tanto, modificamos el literal f: “se dan razones para justificar una declaración hecha” (*ArgE2*) (*argumentación*).

Cuando estábamos diseñando la tarea, propusimos los siguientes ejemplos y no ejemplos de argumento en el punto 7:

Cuadro 10.2

Enunciado del punto 7 de la tarea

7. Con base a la construcción realizada por el estudiante, ¿cuál(es) de los siguientes enunciados, cree usted, podría ser un argumento proferido por el estudiante?
a. Juan: “Construyo la mediana AM , ya que es el segmento que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto del vértice.”
b. Pedro: “Por ser el triángulo equilátero, la mediana AM pertenece a la bisectriz AL .”
c. Ana: “Quiero realizar un triángulo equilátero. Para eso, construyo un polígono regular de tres lados, porque un polígono regular tiene todos sus lados congruentes.”

Inicialmente, nos centramos en analizar si la afirmación de Juan correspondía a un argumento, o si estaba repitiendo una definición. Asumimos que era argumento y tratamos de tipificarlo; esto nos llevó a analizar la estructura del argumento, como se evidencia en la siguiente transcripción.

Tabla 10.1

Fragmento de la transcripción de la discusión cuando diseñamos la tarea 1

28	Lucía	A mí se me hace que eso que está ahí es argumento abductivo, porque estoy diciendo, “construyo la mediana AM (aserción)”. Sé cómo construirla. Luego digo por qué esa es la mediana: “ya que es el segmento ...” (dato) (<i>ArgE1</i>) (<i>práctica de reconocer un argumento</i>)
29	Jenifer	Si estás buscando el dato (ArgE5) ... Bueno; sí tienes razón, pensándolo de esa forma.
30	Lucía	Entonces, ¿cuándo es una definición?
31	Jenifer	Esa es mi duda. ¿Si ves? Porque ahí es donde yo me estoy confundiendo. No sé si estoy haciendo uso del proceso de definir o, más bien, estoy haciendo uso de una definición, o estoy argumentando o si las dos cosas son lo mismo. Porque yo digo, “voy a construir la mediana AM ”. Yo ya sé que eso es una mediana. Entonces, por la definición de mediana, yo sé que tengo que tener el segmento, tengo que encontrar el punto medio del segmento y trazar la mediana (<i>DefE1</i>) (<i>definición</i>). Entonces, ahí la regla general sería la definición de mediana (<i>ArgE4</i>) (<i>argumento</i>), si es un argumento abductivo. Entonces según eso, esto sería un argumento abductivo o ¿será que estamos haciendo uso de la definición?
		...
40	Jenifer	Un argumento sería si tú me preguntas a mí. “Jenifer, ¿el segmento AM (dato) qué relación tiene con el triángulo ABC ?” y yo te digo, “ahh pues es la mediana” (aserción) y tú me dices “¿por qué es la mediana?”. Yo te respondo “porque es el segmento que une el vértice con el punto medio del lado opuesto” (dato). ¿Si ves la diferencia? (<i>ArgE1-ArgE4</i>) (<i>argumento</i>)

41	Lucía	Lo noto en la pregunta, pero no en la respuesta.
42	Jenifer	Lo que pasa es que, vuelvo y te digo, para que haya un argumento debe haber una declaración (<i>ArgE1</i>) (<i>argumento</i>). En el primer caso, cuando yo te digo a ti “yo construí la mediana” te estoy contando ...
43	Lucía	Entonces, la a. (lo dicho por Juan) sí es un argumento, porque está justificando (<i>ArgE1</i>) (<i>argumento</i>) por qué esa es la mediana.

Sin embargo, no fue suficiente esta discusión entre nosotras para tomar una decisión. Por eso, surgió de nuevo la inquietud en la asesoría del 9 de marzo. Para resumir lo que habíamos discutido anteriormente, comentamos: “Lucía decía, “para construir la mediana, creé un triángulo, hallé el punto medio de uno de los lados y luego tracé el segmento desde el vértice al punto medio”, ¿Esto es un argumento o estoy haciendo uso de una definición?”. La profesora responde: “No, lo que dice ella es una descripción de lo que hizo. ¿Si ella hubiera dicho ‘esta es la mediana, porque es el segmento que tiene un extremo en el vértice del triángulo y un segmento en el punto medio del lado opuesto’, es distinto?”. Cuando presentamos la afirmación de Juan a la profesora se dio la siguiente discusión:

Tabla 10.2

Fragmento de la transcripción de la asesoría del 9 de marzo del 2021

6	Profesora	¿La afirmación de Juan es un argumento?
7	Jenifer	Como decimos de la argumentación, cuando damos una declaración (<i>ArgE1</i>) (<i>argumento</i>) y justificamos esa declaración utilizando ya sea una proposición o una conjetura, ahí sí hay un argumento (<i>ArgE2</i>) (<i>argumento</i>). ¿Entonces este de acá podría ser un argumento, Lucía? Yo ayer dije que no, pero ya dudé. Sí, porque mira que dice: “construí la mediana”
8	Lucía	Pero ahí la estamos definiendo.
9	Lucía y Jenifer	Este no es un argumento.
10	Profesora	¿Por qué no?
11	Jenifer	Porque está describiendo como construyó la mediana (<i>DefE2</i>) (<i>Definición</i>). Entonces, construyo la mediana ya que es el segmento que pasa, esto, esto y esto. Pero, no está diciendo “está es una mediana.
12	Lucía	Él está diciendo que hizo y porque, y justificando por qué lo hizo.
13	Jenifer	Entonces, si es un argumento.

La interacción anterior nos llevó a afirmar que lo que dijo Juan es un argumento. Para justificar que es un argumento, identificamos los elementos de la estructura del argumento (dato, aserción y garantía) (*ArgE5*) (*argumento*). En ese momento, notamos que la definición que teníamos de argumento no hacía referencia a los tres elementos, lo cual significaba que no era correcta, porque no incluía los atributos necesarios para poder identificar cuál de los enunciados de cada estudiante era ejemplo y cuál no ejemplo de argumento (*Def E1*) (*definición*).

Además, en este proceso nos dimos cuenta de que para que una afirmación sea argumento, por lo menos deben identificarse en lo dicho el dato y la aserción, es decir, no necesariamente debe estar explícita la garantía (*ArgE4*) (*argumento*). Evidencia de lo anterior se muestra en el siguiente fragmento:

Tabla 10.3

Fragmento de la transcripción de la asesoría del 9 de marzo del 2021

18	Profesora	La pregunta es si eso que él está enunciando es un argumento ... La (parte c) no es argumento o ¿sí?
19	Jenifer y Lucía	No.
20	Profesora	Estamos de acuerdo. No es un argumento. Hay una aserción, pero ¿por qué no es un argumento entonces?
21	Lucia y Jenifer	No hay unos datos.
22	Jenifer	No hay un dato ni una garantía.
23	Profesora	Pero los estudiantes rara vez dan garantías, ¿no?
24	Lucía	Entonces, por lo menos debe haber unos datos para justificar la aserción
25	Profesora	O sea, ¿qué tiene que estar en lo que dice un estudiante, para que uno pueda decir hay un argumento? Eso es lo que necesitamos saber.
26	Lucía	Dato y aserción, ¿sí?

Durante la experimentación de la tarea diseñada

En el proceso de preparación para la implementación de la tarea para los compañeros del trabajo, decidimos realizar un simulacro de conversatorio con una pareja de compañeros de la Maestría que, al igual que nosotras, estaban diseñando una tarea para trabajar con sus compañeros de trabajo. El simulacro tenía como objetivo que durante la interacción surgieran asuntos y dudas sobre el conocimiento que teníamos los unos y los otros sobre argumento y argumentación. La dinámica consistió en implementar la tarea a la otra pareja y gestionar el desarrollo de esta. Durante el conversatorio también participaron las profesoras Carmen y Leonor.

Una parte de la tarea que nuestros compañeros diseñaron consistía en comparar nuestra definición de argumento con la de ellos y otros autores. Para ello, nos presentaron las siguientes definiciones:

Carvajal, Martínez y Soto (2019): El argumento es un conjunto de proposiciones dirigidas a mostrar que una de ellas está justificada por las restantes.

Grupo AEG de la UPN: Argumento es una expresión discursiva escrita u oral conducida de acuerdo con normas compartidas y que tiene por objetivo exponer razones (justificar) para sustentar una postura o asección, cuyo contenido o verdad se está considerando. El argumento incluye la asección o la conclusión que se sustenta con la justificación.

Pérez y Torres (2019): Un argumento es una expresión discursiva, escrita u oral, conducida de acuerdo con normas compartidas, compuesta por un conjunto de proposiciones y que tiene como propósito mostrar que una de ellas está justificada por las restantes.

Después de socializar las comparaciones que hicimos, la profesora Leonor nos hizo la siguiente pregunta: ¿Los elementos del argumento son simples oraciones o unas oraciones de un tipo especial? Con esto, ella quería cuestionarnos sobre la definición que teníamos de argumentación, pero, en ese momento, no supimos cómo dar respuesta. Luego, en la asesoría que tuvimos después

de esta experiencia, retomamos la pregunta, ya que esta nos hizo caer en cuenta que no habíamos caracterizado el tipo de oración que debían ser el dato, la aserción y la garantía. Teniendo en cuenta que una oración se compone de sujeto y predicado, los tres elementos son oraciones, pero ¿son de algún tipo especial? Como en las definiciones que nos dieron los compañeros hablan de proposiciones, buscamos en el DRAE la definición de proposición y Lucía escoge una que nos pareció mejor: una proposición es una oración con sentido completo de la que se puede decidir si es verdadera o falsa. A partir de esta definición, concluimos que los elementos del argumento mencionados anteriormente son proposiciones (*ArgE5*) (*argumento*).

Adicionalmente, como consecuencia de la experiencia, surgieron estos otros cuestionamientos: de acuerdo a la definición que planteamos de argumento, ¿a qué nos referimos con argumentación? y ¿a qué con argumento?; ¿en la definición de argumento debe mencionarse el propósito por el cual se enuncia?; ¿qué es una expresión discursiva?, entre otros. En la asesoría del 23 de marzo, luego de que la profesora conociera las preguntas, nos cuestionó sobre la diferencia entre argumento y argumentación. Para dar respuesta a la pregunta, nosotras manifestamos que la diferencia principal es que la argumentación es un proceso (*ArgE1*) (*argumentación*) y el argumento es un producto (*ArgE1*) (*argumento*). De acuerdo a lo que expresamos, vimos la necesidad de definir primero argumento y luego argumentación. A partir de esto, nos dimos cuenta que lo que entendíamos por argumentación es lo que debíamos utilizar para definir argumento. Para determinar si tenía sentido ello, empezamos a analizar los ejemplos y no ejemplos de argumento propuestos en nuestra tarea diseñada, con el fin de establecer si cada uno de los atributos de la definición de argumentación se encontraban en los ejemplos y así poder redefinir argumento. En la Tabla 10.4 presentamos los tres ejemplos utilizados.

Tabla 10.4*Ejemplos de argumentos*

Ejemplo 1	Construí la mediana \overline{AM} , ya que es el segmento que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto del vértice.
Ejemplo 2	Quiero realizar un triángulo equilátero. Para eso, construyo un polígono regular de tres lados, porque un polígono regular tiene todos sus lados congruentes.
Ejemplo 3	La mediana AM pertenece al \overline{AL} bisectriz del $\angle BAC$

Como primera acción para confrontar la definición con los ejemplos, la profesora Carmen nos preguntó: ¿es un discurso?, ¿qué es un discurso?, ¿qué quiere decir expresión discursiva?, ¿es lo mismo?, ¿qué expresión discursiva no sería producto de un razonamiento? y ¿por qué ponemos producto de un razonamiento?

Para dar respuesta a la pregunta: ¿Qué quiere decir una expresión discursiva?, consultamos las definiciones de expresión y de discursiva que provee el DRAE. A partir de ellas, construimos la siguiente definición:

Expresión discursiva: es una declaración escrita, oral o por medio de gestos para dar a entender lo que se piensa o se siente.

Esta se ajusta a nuestra concepción de argumento, ya que consideramos que caracteriza los tipos de discurso que pueden ser usados para dar argumentos (*ArgE1*) (*argumento*).

Luego, para responder la pregunta: ¿por qué ponemos producto de un razonamiento?, expresamos inicialmente que, en el primer semestre del 2020, afirmábamos que la argumentación y el razonamiento significaban lo mismo. Pero, al incluir la frase “producto de un razonamiento” queremos resaltar que no son la misma cosa, que el argumento emerge del proceso de razonamiento (*ArgE1*) (*argumento*), y se expone a través de la argumentación. La argumentación y el razonamiento son procesos diferentes (*ArgE3*) (*argumentación*), porque el primero es un proceso comunicativo (*ArgE1*) (*argumentación*), y el segundo es un proceso

mental; la argumentación expone un argumento (*ArgE1*) (*argumentación*) producto de un razonamiento, pero no todo razonamiento produce una argumentación. Por ejemplo, para resolver un problema, se comparan las propiedades mencionadas en el problema con las definiciones que se conocen, se identifican las figuras geométricas requeridas, se determinan qué herramientas de GeoGebra son útiles para construir la figura y se realiza la construcción correspondiente. (*DefE2*) (*definición*) Esto es un razonamiento, pero no se produce una argumentación a menos que se requiera justificar el proceso.

Como segunda acción para continuar en el proceso de analizar si la definición que teníamos para argumentación se compaginaba con los ejemplos de argumento que incluimos en la tarea, utilizamos el Ejemplo 1 para identificar si cumplían los atributos que incluimos en nuestra definición de argumento. En el siguiente fragmento se presenta la discusión que se dio al respecto.

Tabla 10.5

Fragmento de la transcripción de la asesoría del 23 de marzo

27	Lucía	El argumento tiene estructura. (<i>ArgE1</i>) (<i>argumento</i>)
28	Profesora	¿En dónde, en la definición de argumento, dicen que es argumento solo si están los elementos de la estructura?
29	Jenifer	Pues es que en la definición decimos es que se dan razones, y esas razones son los hechos o el dato. (<i>ArgE4</i>) (<i>argumento</i>)
30	Profesora	Un minuto, un minuto. ¿Estás diciendo que en esta definición razones refiere al dato o hechos?
31	Jenifer	Al dato profe.
33	Profesora	¿Cómo se compagina el ejemplo de argumento con la definición para decir que (sí) es un argumento?
34	Lucía	Porque se están dando las razones, “construí la mediana ya que es el segmento ...”.
36	Lucía	Está diciendo por qué esa es la mediana.
37	Profesora	Está justificando por qué el segmento es mediana. Entonces, ¿es una expresión discursiva? ¿Por qué podemos decir que es producto de un razonamiento?
38	Lucía	Sí, porque está expresando la idea que, o sea, mediana lo relacionó con que es el segmento. Sí. Y luego lo expresó.

39	Profesora	O sea, lo relacionó con lo que para él es la definición de mediana. Entonces eso lo hizo mentalmente. ¿Está dando razones para justificar? Y, ¿cuál es la declaración que hizo?
40	Jenifer	Sí. (La declaración es) la mediana \overline{AM} .
41	Profesora	¿Y cuál es la conclusión? O, ¿es lo mismo?
42	Lucía	Sí, en este caso la conclusión es la misma afirmación, la misma aserción. (ArgE4) (<i>argumento</i>)
43	Profesora	Declaración que hizo. Y, si es lo mismo ¿por qué tenemos “sobre una declaración hecha con el fin de establecer una conclusión”?
44	Jenifer	Pues, anteriormente habíamos dicho que la conclusión era decidir si la declaración era verdadera o falsa,
45	Profesora	O sea, ¿la conclusión es si lo que se está declarando es aceptable o no, para quienes lo están oyendo? No es una afirmación, sino consiste (el argumento) en dar razones para justificar una declaración hecha (ArgE2) (<i>argumento</i>). ¿Cuál es la declaración que está haciendo esta persona? Que el segmento AM es mediana, ¿sí?
46	Jenifer	Si señora
47	Profesora	Con el fin de establecer una conclusión o ¿con el fin de qué? ... ¿el fin no está dado ahí, cuando dice “consiste en dar razones y justificar y convencer a alguien”?
48	Lucía	Es que creo que nos referíamos a establecer la conclusión, cuando ya estaba justificada. ¿Cierto Jenifer? Cuando ya se tenía esa seguridad, ¿sí? Que ya los datos y la garantía, ya nos daban esa seguridad para establecer esa conclusión.

Como producto del dialogo anterior, se aclaró que para nosotras las “razones o hechos” se refieren al dato y que la “declaración hecha” se refiere a la aserción. Con estas claridades, la nueva definición de argumento quedó de la siguiente manera:

Argumento: es una expresión discursiva, producto de un razonamiento, que se realiza de acuerdo con normas compartidas, (**ArgE1**) (*argumento*) y que consiste en dar razones para justificar y convencer a alguien, o a uno mismo, sobre una declaración hecha.

(**ArgE2**) (*argumento*)

Seguido a esto, utilizamos el esquema “qué sé, qué uso y qué concluyo” (**ArgE4**) (*argumento*) para evaluar si los ejemplos incluidos en la tarea eran o no eran argumentos, a partir de la definición nueva y las razones que habíamos propuesto en la guía para gestionar la tarea. En la

¡Error! No se encuentra el origen de la referencia., se muestra cómo utilizamos el esquema para identificar los elementos del argumento dado en el Ejemplo 3.

Tabla 10.6

Representación del Ejemplo 3 en el esquema qué sé, qué uso, qué concluyo

Qué sé (dato)	Qué uso (garantía)	Qué concluyo (aserción)
		La mediana AM pertenece al AL bisectriz del $\angle BAC$

Con lo anterior, corroboramos que el Ejemplo 3 no es argumento, porque es una afirmación que no incluye dato; no tiene los elementos de la estructura de un argumento (**ArgE4**) (*argumento*).

Es decir, no se están dando razones para justificar la declaración hecha.

Mientras que, la profesora usa el esquema para el Ejemplo 2, nos dimos cuenta que se presentan dos aserciones, por lo cual corroboramos que ese argumento está compuesto por dos argumentos diferentes. No se explicitan las garantías. El dato del primer argumento sí se expresa, y la aserción del primer argumento se convierte en dato del segundo argumento. (**ArgE4**)

(*argumento*) En la Tabla 10.7, se presentan los dos argumentos con las correspondientes garantías, que para indicar que son implícitas, las colocamos entre paréntesis.

Tabla 10.7

Representación del Ejemplo 2 en el esquema qué sé, qué uso, qué concluyo

Qué sé (dato)	Qué uso (garantía)	Qué concluyo (aserción)
Polígono regular de tres lados.	(D. Polígono regular)	El polígono de tres lados tiene todos sus lados congruentes.
El polígono de tres lados tiene todos sus lados congruentes.	(D. Triángulo equilátero)	El polígono es un triángulo equilátero.

Durante la implementación de la tarea diseñada

El proceso de implementación de la tarea con compañeros de trabajo incluyó un conversatorio para dialogar con ellos sobre las ideas y concepciones que tenemos de los constructos argumento

y argumentación. La dinámica consistió en implementar la tarea a los siete profesores y gestionar el desarrollo de esta. Los profesores estaban organizados en tres grupos de trabajo de dos y tres integrantes con el objetivo de promover la interacción y el diálogo entre ellos.

La primera parte de la tarea consistió en preguntarles qué era para ellos argumento, buscando que propusieran una definición. Luego, les presentamos las siguientes definiciones para que ellos escogieran la que mejor se ajustaba a su respuesta anterior:

Martínez y Romero (2015): Un argumento es una expresión discursiva, producto de un razonamiento, que se realiza de acuerdo con normas compartidas, y que consiste en dar razones para justificar y convencer a alguien, o a uno mismo, sobre una declaración hecha.

Carvajal, Martínez y Soto (2019): El argumento es un conjunto de proposiciones dirigidas a mostrar que una de ellas está justificada por las restantes.

Cervantes y Cabañas (2018): Un argumento es una razón o razones ofrecidas a favor o en contra de una proposición.

Las definiciones de Carvajal, Martínez y Soto (2019) y Cervantes y Cabañas (2018) fueron tomadas de los autores, mientras que la de Martínez y Romero (2015) era nuestra definición. La intención de utilizar estas definiciones era que identificaran semejanzas y diferencias entre ellas. Durante la gestión de la primera parte, las respuestas dadas por los profesores concordaron en que la definición de Martínez y Romero (2015) era la que más se ajustaba a sus definiciones de argumento. Por ello, explicamos cada uno de los atributos de esa definición. En ese proceso, evidenciamos la apropiación que teníamos de nuestra definición de argumento ya que expresamos algunas de las ideas incluidas en ella para explicar los atributos de argumento. Por

ejemplo, mencionamos a qué nos referimos con normas compartidas, expresión discursiva y razonamiento. En la Tabla 10.8, presentamos los fragmentos que dan cuenta de lo anterior.

Tabla 10.8

Fragmentos de la transcripción del conversatorio con compañeros del trabajo

Normas compartidas	Jenifer	[...] Una norma compartida se establece en una comunidad donde se argumenta ... En nuestro caso, las normas se dan dentro del aula, dentro de la clase que damos nosotros con los chicos. Estas normas no solo son decirles a los chicos, levanten la mano para hablar o permanezcan sentados. No, las normas se refieren es a unos acuerdos respecto al conocimiento matemático (ArgE1) (argumento). Sí, (a) cómo construimos el conocimiento matemático dentro del aula. Entonces, hablamos de cuándo aceptamos algo que dijo algún compañero respecto a lo que estamos trabajando en el aula, las reglas lógicas que se tienen en cuenta ... Cuando, digamos, uno valida un argumento a un estudiante, tiene en cuenta el conocimiento matemático que hay detrás y ese conocimiento matemático se construye con los mismos estudiantes ... Además, para eso también uno hace unos acuerdos con ellos respecto a que gráfico sirve, que representación podemos utilizar, de qué manera presentamos un argumento ...
	Lucía	[...] En las normas compartidas también se tienen en cuenta definiciones, teoremas, formas de escritura, voy a llamarlo así, que uno quiere que los estudiantes utilicen.
Expresión Discursiva	Lucía	[...] Para nosotras una expresión discursiva es una declaración escrita, también puede ser oral o por gestos, para dar a entender lo que se piensa o se siente. Es decir, esta definición es una definición muy inclusiva ... Ahí se incluiría a la mayoría de la población, teniendo en cuenta que, pues hay diferentes tipos de estudiantes, entonces que puede ser por gestos, oral o escrita ... Era más sociocultural ... Es decir, esa definición estaba incluyendo a todos esos aspectos.
Razonamiento	Jenifer	[...] Siempre que uno va a dar una respuesta a algo, va a responder una pregunta, generalmente uno razona, ... de manera mental el cerebro conecta todos los conceptos, teoremas, representaciones, significados, que tiene sobre lo que le están preguntando, para que después, pueda que genere un argumento, como pueda que no, pero sí nace de ahí el argumento. (ArgE3) (argumentación)

En la segunda parte de la tarea, abordamos conceptos como la diferencia entre argumento y argumentación y los elementos del argumento. En la Tabla 10.9 presentamos los fragmentos más ilustrativos del conversatorio.

Tabla 10.9

Fragmentos tomados de la transcripción del conversatorio en los que se evidencia nuestro CDM

Diferencia entre argumento y argumentación	Lucía	Como les venía diciendo, nosotras diferenciamos entre argumento y argumentación ... Y pues, argumentación ya lo vemos como ese proceso ... Ese proceso comunicativo. Sí, en el que ya uno comunica esos argumentos (ArgE2) (<i>argumentación</i>)... Es un proceso comunicativo, discursivo, en el que se expresan esos argumentos.
Elementos del argumento	Jenifer	... Un argumento nace de una declaración que uno haga (ArgE1) (<i>argumento</i>) ... Entonces, yo tengo esa declaración y a partir de la declaración establezco unas razones, como bien lo decía ahí, unas proposiciones. Entonces dense cuenta que estos se convierten como en términos sinónimos.
	Lucía	... Nosotras nos basamos en un modelo que se llama el modelo de Toulmin ... Este modelo nos sirve para identificar unos elementos ... (Un argumento) está estructurado por seis elementos, de los que se mencionan acá, un dato, una garantía, una aserción, un respaldo a la garantía, una refutación, un cualificador modal... Estos tres son los principales (dato, aserción y garantía) (ArgE4) (<i>argumento</i>).
	Jenifer	... Para nosotras poder identificar un argumento, nada más uno, tenemos que identificar estos tres elementos. Como observan, el dato se refiere a esas afirmaciones o esas razones que buscan justificar la declaración que hicimos. Entonces, la aserción se convierte como en esa, algunos autores le llaman, conclusión, declaración, afirmación o proposición. Y la garantía es el elemento del sistema teórico en el que estamos. (ArgE4) (<i>argumento</i>)
	Lucía	... Esos conceptos previos que tiene el estudiante, y que pues, en ese proceso de razonamiento los utiliza para dar soporte a lo que diga ... pues la idea de argumentación con esas normas compartidas es ir mejorando ese lenguaje de los estudiantes (ArgE2) (<i>argumentación</i>), sí. Y pues que, a futuro, ellos ya utilicen algo más matemático.
Expresión discursiva	Jenifer	... Y una expresión discursiva puede ser una representación. (Esta podría ser argumento, en el sentido en el que él (el estudiante) coja la representación para decir “mire el segmento AM es la mediana, porque el punto M , yo lo construí, siendo el punto medio del segmento BC y yo tracé el segmento teniendo en cuenta un extremo del triángulo y ese punto. Por eso es que el segmento AM es la mediana” (ArgE1) (<i>argumento</i>) ... Es un proceso en el que no solo consiste en hacer un dibujo y ya, sino en el que consiste en mostrar y convencer a alguien de lo que uno hizo (ArgE2) (<i>argumentación</i>).

Respuestas a las preguntas del Ciclo 1

Otra acción realizada en el Ciclo 2 consistió en la lectura, comprensión e interpretación de diversos artículos con el fin de encontrar respuestas a las preguntas surgidas en el Ciclo 1, y con ello aumentar nuestro conocimiento sobre argumentación.

La primera lectura era una parte de una secuencia didáctica sobre argumento y argumentación, realizada por el grupo ($\mathcal{A} \cdot G$) para el curso Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría en la Universidad Pedagógica Nacional. Con base a este documento, en la asesoría del 6 de abril, pudimos establecer la diferencia entre los argumentos de los Ejemplos 1 y 2.

Tabla 10.10

Fragmentos de la transcripción de la asesoría 6 de abril

49	Profesora	Mi pregunta es si estas dos cosas son diferentes. Esto que llamamos argumento (Ejemplo 1) y esto que llamamos argumento (Ejemplo 2), si hay alguna diferencia.
50	Lucía	Profe es que, de hecho, en la lectura que usted nos pasó, hablan de los argumentos nucleares (<i>ArgE5</i>) (<i>argumento</i>). Entonces, yo quería preguntar, y pues me acordé de este argumento (Ejemplo 2), si este es un argumento ¿sería nuclear? Por lo que tiene varios. Es que casi no entendí el argumento nuclear, pero lo relaciono con este ejemplo. No sé.
51	Jenifer	Porque ahí (Ejemplo 2), o sea, nosotras lo que hicimos ahí fue inferir los argumentos, pero no están explícitos en el enunciado (del ejemplo2).
52	Profesora	Pero, ahora tú me estás hablando de argumentos. ¿Cada uno de estos que están aquí (se refiere a los Ejemplos 1,2, y 3) son un argumento o no? ¿Ahí (refiriéndose al Ejemplo 2) encontramos una aserción, un dato y una garantía?
53	Jenifer	No señora.
54	Profesora	Pues, cuando lo pusimos en el esquema (se refiere al Esquema Qué sé, Qué uso, Qué concluyo) ¿qué encontramos? Por ejemplo, encontramos dos aserciones.
55	Jenifer	Y que en algunos casos la aserción se convierte en el dato del otro argumento.
56	Profesora	Porque este argumento (Ejemplo 2), que es un argumento, tiene encadenado ¿dos qué?, ¿se encadenaron qué?
57	Lucía	Sí profe, hay un argumento global (<i>ArgE5</i>) (<i>argumento</i>).
58	Jenifer	Conformado por argumentos simples (<i>ArgE5</i>) (<i>argumento</i>).

De acuerdo a lo anterior, decidimos establecer las definiciones para argumento simple y argumento global. Con ellas pudimos concluir que el Ejemplo 1 es un argumento simple y el Ejemplo 2 se puede considerar como un argumento global.

Argumento simple: es un argumento que está compuesto de mínimo tres proposiciones: aserción y dato, que deben estar explícitos, y garantía, que puede o no estar explícita.

(ArgE5) (argumento).

Argumento global: es un argumento compuesto por una cadena de argumentos simples.

(ArgE5) (argumento).

La segunda lectura fue el artículo de Molina y Samper (2013), dado que en el Ciclo 1, a partir de la siguiente idea de estos autores: “en el argumento abductivo, la inferencia es plausible y la regla general no es única” se planteó la pregunta: ¿a qué se refiere que la regla general no es única, en el argumento abductivo? Con lo cual se aclaró que:

En un argumento abductivo, la procedencia de la proposición general (garantía) no es única, ya que puede provenir de una exploración empírica (conjetura) o puede ser una regla aceptada como elemento del sistema axiomático con el que se cuenta (exploración teórica) *(ArgE5) (argumento)*. En relación a la primera, el argumento se puede generar en el proceso de conjeturar *(ArgE3) (argumento)*. Por ello, la proposición general es plausible. Mientras que, en la segunda, como la proposición general pertenece al sistema axiomático, puede llegar a ser parte de la demostración. *(ArgE3) (argumento)* En cualquiera de los casos anteriores, el dato es posiblemente verdadero.

La tercera lectura fue el artículo de Schwarz y Kaiser (2009), el cual nos permitió responder la pregunta: ¿a qué se refieren los autores con estructuras argumentativas? La inquietud surgió porque en la propuesta del Anteproyecto expresamos esta idea de los autores: “los maestros

debemos tener conocimientos de matemáticas, incluidas habilidades para identificar diferentes estructuras argumentativas e incluso establecer conexiones con otras áreas temáticas”. De la lectura se obtuvo la siguiente aclaración:

Respecto a las estructuras argumentativas, los autores se refieren a las pruebas pre-formales y formales (*ArgE3*) (*argumentación*). La primera es un conjunto de aserciones que no se presentan en un esquema de demostración formal y pueden provenir de una exploración intuitiva. Esta prueba se caracteriza por: (i) no incluye todo lo que requiere, (ii) da una idea global de la prueba, (iii) puede basarse en representaciones y (iv) hace alusión a algunos elementos teóricos. La segunda es una cadena de aserciones verdaderas que se sustentan por medio de axiomas, teoremas y definiciones del sistema axiomático, que conforma una secuencia de argumentos deductivos (*ArgE3*) (*argumentación*).

La cuarta lectura fue el artículo de Stilianydes (2007), ya que en el seminario Profundización en Matemáticas, el profesor utilizó la definición de demostración propuesta por este autor. Del fragmento extraído de dicha definición: “la demostración es un argumento matemático (*ArgE3*) (*argumento*), una secuencia conectada de afirmaciones a favor o en contra de una afirmación matemática (*ArgE1*) (*argumento*) ... emplea esquemas de razonamiento que son válidos y conocidos por la comunidad del aula o dentro de su alcance conceptual” surgieron las preguntas: ¿Qué es una secuencia lógica? y ¿Qué son esquemas de razonamiento? El producto de la aclaración es el siguiente:

- Secuencia lógica

Stilianydes (2007) hace referencia a una “secuencia conectada de afirmaciones a favor o en contra de una afirmación matemática” y no a secuencia lógica. Nosotras entendemos que la secuencia lógica es una serie o sucesos de afirmaciones para justificar una aserción conforme a

las reglas de la lógica (DRAE). Además, entendemos que las reglas de la lógica son reglas de inferencia o sea esquemas de razonamiento válidos.

- Esquemas de razonamiento

En la definición de demostración propuesta por Stilianydes (2007), se menciona que una característica es que “Emplea formas de razonamiento (modos de argumentación)”, refiriéndose

a: Por un lado, las formas de razonamiento que preceden como los tipos de razonamiento, por ejemplo: inductivo, abductivo y analógico. Por otro lado, los modos de argumentación (*ArgE5*) (*argumentación*) que se usan son:

- La aplicación de reglas lógicas de inferencia (como modus ponendo ponens, modus tollendo ponens, modus tollendo tollens.
- Uso de definiciones para derivar enunciados generales.
- Enumeración sistemática de todos los casos a los que se reduce un enunciado (dado que su número es finito),
- Construcción de contraejemplos
- Desarrollo de un razonamiento en el que se muestra la aceptación de una declaración que conduce a una contradicción, etc.

Anexo H: Narración del Estado 3

Acerca de la Definición

Durante el Ciclo 3, realizamos las siguientes acciones: primera parte, la lectura de artículos o tesis de algunos autores que se refieren a definición y definir; la resolución de una tarea, propuesta por la profesora Carmen, en la que se debía proponer la definición de una figura geométrica a partir del estudio de ejemplos y no ejemplos de dicha figura, (anexo p. 106); segunda parte el diseño e tercera parte implementación de una tarea sobre definiciones a compañeros de las instituciones donde trabajamos y las asesorías de trabajo de grado en el mes agosto y septiembre del 2021. A continuación, reportamos el efecto de estas acciones en nuestro conocimiento, los cambios y nuevas concepciones que tenemos sobre los constructos definición y definir.

Primera parte: A partir de las lecturas realizadas

Inicialmente, realizamos la lectura de algunos autores como Silva (2013), Camargo y Samper (2014) y Calvo (2001), para dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿qué es una definición?, ¿cómo es la estructura de una definición?, ¿qué tipos de definiciones hay? y ¿cuáles son las funciones de las definiciones?

Producto de la interpretación de las ideas de los autores, establecimos la siguiente definición:

Una definición matemática es un enunciado verbal o escrito que determina de manera clara, precisa y consistente los atributos de un objeto matemático, es decir, que es fácil de comprender, incluye los atributos necesarios y suficientes para caracterizar el objeto matemático y no tiene contradicciones lógicas. Con atributos necesarios nos referimos a que la definición debe contener los atributos principales que son obligatorios. Y atributos

suficientes, se refiere a que no se incluyan atributos que se pueden deducir de los atributos necesarios (*DefE1*) (*Definición*).

En la asesoría del 25 de agosto, la profesora nos preguntó por qué consideramos que una definición es un enunciado verbal o escrito, si lo escrito no es verbal o qué es verbal. Para dar respuesta, buscamos en el DRAE las palabras verbal y enunciado, encontrando:

verbal: i) que se refiere a la palabra o se sirve de ella, ii) se hace o se estipula solo de la palabra y no por escrito.

Enunciado (matemáticas): exponer el conjunto de datos de un problema o el contenido de una proposición.

Con lo anterior, nos cuestionamos si una definición es un enunciado o una proposición, por lo cual nos remitimos a nuestra definición de proposición que dice: una proposición es una oración con sentido completo de la cual se puede establecer si es verdadera o falsa. La profesora nos hizo caer en cuenta que las definiciones no son verdaderas ni falsas, sino correctas o incorrectas (*DefE5*) (*Definición*). Por tanto, decidimos que la definición es un enunciado (*DefE1*) (*Definición*).

Además, la profesora resalta que la definición en matemáticas consiste en asignar un nombre a un conjunto de atributos (*DefE2*) (*Definición*). Esos atributos, según nuestra definición, deben ser claros, precisos y consistentes, pero nos hizo falta mencionar una de las características que ya habíamos reconocido de uno de los autores (Calvo, 2001), la cual se denomina minimalidad. La minimalidad consiste en que la definición sea económica, es decir, que contenga solamente los atributos necesarios y suficientes (*DefE1*) (*Definición*).

Entendíamos la bicondicionalidad de las definiciones como la relación entre el nombre del objeto que se define y los atributos necesarios y suficientes que lo determinan, y viceversa. Nosotras no

teníamos en cuenta que las relaciones de bicondicionalidad se dan entre proposiciones, y como el nombre del objeto no es una proposición, no se puede establecer una relación bicondicional con los atributos. Por tanto, en esta asesoría, logramos aclarar que una definición más que bicondicional es bidireccional (*DefEI*) (*Definición*), ya que si fuera específicamente bicondicional tendríamos que darle un valor de verdad a las proposiciones, y como anteriormente dijimos, una definición no es falsa ni verdadera. El término bidireccional refiere a que al definir un objeto matemático se tiene un nombre de un lado, y una lista de atributos del otro lado, y viceversa (*DefEI*) (*Definición*).

Luego, en la asesoría, al hablar sobre las definiciones de cuadrado, hacemos referencia a la característica de la convencionalidad de la definición. A continuación, presentamos lo sucedido.

Tabla 10.11

Fragmento de la transcripción de la asesoría del 25 de agosto

60	Profesora	Yo puedo definir cuadrado así, por ejemplo, ... la definición que nosotros tenemos de cuadrado es un cuadrilátero con cuatro lados congruentes y cuatro ángulos rectos. Sin embargo, esa definición es la que damos en 2°, 3°, 4° y 5° de primaria. Ya en un curso de geometría plana universitario, esa definición no es económica porque no es necesario cuatro ángulos rectos y cuatro lados congruentes... (Luego de hacer la construcción en GeoGebra de un cuadrado) En conclusión, podemos construir el cuadrado con tres ángulos rectos y dos segmentos congruentes. Sin embargo, damos como definición cuatro ángulos rectos, cuatro lados congruentes. ¿por qué?
61	Jenifer	Profe, en ese caso entra en juego la convencionalidad que menciona Calvo. En relación a lo que sumercé decía, cuando le presenta uno (como profesor) la definición a los niños de segundo. La definición se construye con ellos, pues con ellos se habla de los cuatro lados congruentes y de los cuatro ángulos rectos. Y a medida que se va avanzado en los cursos, el profesor escoge cuál definición es la que quiere que los estudiantes trabajen, y así mismo pues, ellos la construyen en la clase. (<i>DefEI</i>) (<i>Definición</i>)
62	Profesora	Lo que ella (Calvo) dice de la convencionalidad es: hay varias maneras de definir el cuadrado. Lo puedo definir como cuadrilátero con cuatro ángulos rectos, cuatro lados congruentes. Lo puedo definir como cuadrilátero con diagonales congruentes que se bisecan y son perpendiculares... Todas esas son posibles

	definiciones. Y lo que ella dice es que uno introduce aquella que conviene en el momento o aquella que hace más operativo el sistema teórico.
--	---

Para que fuera más clara esta característica de la definición, la profesora nos mostró las notas de clase del curso de Elementos de Geometría y utilizó un ejemplo con la definición de ángulos par lineal. En la Tabla 10.12, presentamos el proceso que se llevó a cabo para definir ángulos par lineal en ese curso y el análisis que hicimos sobre las características que identificamos en cada definición para comprender la convencionalidad.

Tabla 10.12

Proceso para definir ángulo par lineal y análisis realizado en asesoría.

	Definiciones	Conceptos previos	Análisis
Definición inicial	Dos ángulos par lineal: dos ángulos son par lineal si comparten un lado, los otros dos lados están contenidos en una recta y la unión de los dos ángulos son tres rayos.		La definición concuerda con la descripción de lo que vieron los estudiantes en la imagen.
Definición dos	Dos ángulos par lineal: dados dos ángulos adyacentes, los rayos que no comparten pertenecen a una misma recta.	D. Ángulos adyacentes: Dos ángulos son adyacentes si son coplanares, uno de los rayos es lado común de los ángulos y no tiene puntos interiores en común.	Si no se define que son ángulos adyacentes, la definición no es clara.
Definición tres	Dos ángulos par lineal: dos ángulos son par lineal si son adyacentes, los rayos que no comparten son opuestos.	D. rayo: dada la \overleftrightarrow{AB} , el \overrightarrow{AB} es la unión del \overline{AB} y todos los puntos para los cuales B está entre A y P .	La definición es correcta, es económica, es clara siempre y cuando esos términos ya estén definidos para los estudiantes.
Definición final	Dos ángulos par lineal: el $\angle BCD$ y $\angle ACD$ son par lineal si $A - C - D$ y D no pertenece a la recta AB .	D. interestancia: el punto B está entre los puntos A y C si: I) A, B y C son colineales, y II) $AB + BC = AC$	Es una definición operativa ya que es más fácil usarla en una demostración. En este caso, asegurar que dos ángulos son adyacentes no es tan fácil, mientras que al nombrar los ángulos de

			manera específica se garantiza que haya una intersección $A - B - C$ y que el punto D no pertenezca a la recta AB .
--	--	--	---

Con lo anterior, concluimos que la convencionalidad se refiere a escoger del conjunto de definiciones del objeto, aquella que sea clara de acuerdo a los conocimientos previos de los estudiantes y más operativa dentro del sistema axiomático para poder utilizarla en las demostraciones *(DefE1) (Definición)*.

Con los anteriores ejemplos, también aclaramos cuándo una definición se hace operativa producto de la lectura de Camargo y Samper (2014) habíamos entendido lo siguiente:

... una definición se hace operativa cuando al extraer la información que brindan los atributos de dicha definición *(DefE2) (Definición)* y, además, al establecer relaciones entre los atributos que están explícitos en tal definición o en otras, se generan argumentos deductivos que conforman la demostración *(DefE3) (Definición)*.

Sin embargo, producto de la asesoría, concluimos que una definición se hace operativa en el sistema axiomático cuando se expresa de una forma que hace fácil su uso en una demostración *(DefE3) (Definición)*.

De acuerdo a la interpretación que hicimos de Silva (2013), la definición se puede enunciar de dos maneras diferentes según su estructura lingüística: en explícitas e implícitas *(DefE5) (definición)*. Para establecer diferencias entre estos tipos de definiciones y su estructura lingüística, en la asesoría con la profesora analizamos los siguientes ejemplos:

1. La figura geométrica es un trapecio si y solo si es un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos. *(DefE4) (Definición)*
2. Un trapecio es un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos. *(DefE4) (Definición)*

Producto de lo anterior, concluimos que el primer ejemplo, es una definición explícita porque se conectan dos proposiciones con el término “si y solo si” mostrando de forma evidente una relación de bicondicionalidad. En el segundo, no se hace evidente la bicondicionalidad (*DefE4*) (*Definición*).

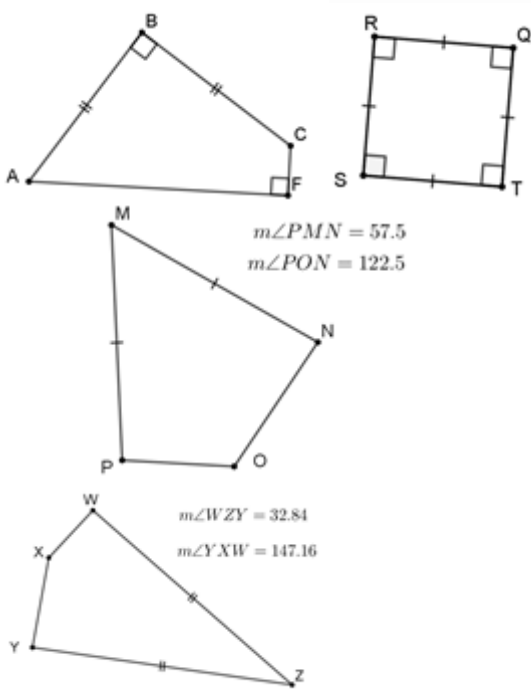
Resolución y discusión de la tarea propuesta por la profesora Carmen

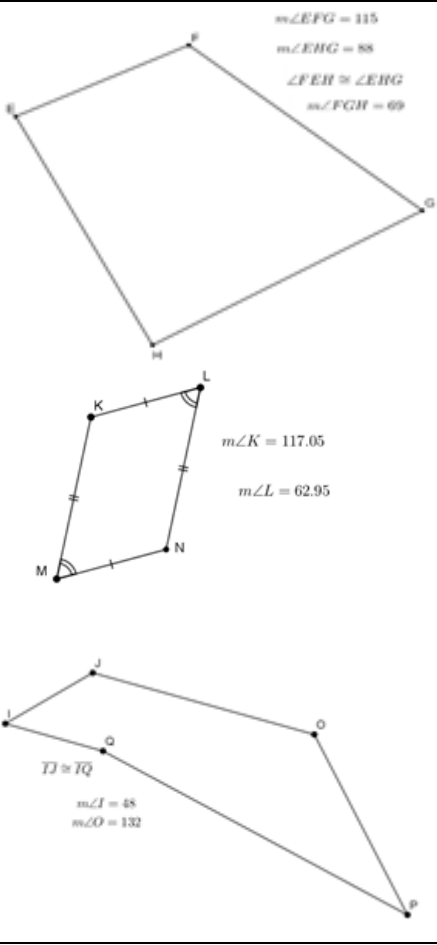
Como una acción para hacer visible el conocimiento que hemos adquirido sobre definiciones, la profesora Carmen nos propuso resolver una tarea, que luego socializaríamos en una asesoría. La tarea consistía en proponer una definición a partir de los atributos necesarios y suficientes identificados en los ejemplos y no ejemplos de una figura geométrica llamada fala. A continuación, mostramos el primer punto de la tarea.

Cuadro 10.3

Enunciado del primer punto de la tarea propuesta por la profesora

1. En la tabla se dan ejemplos y no ejemplos de una figura geométrica denominada **FALA**.

Ejemplos de FALA	
	<p> $m\angle PMN = 57.5$ $m\angle PON = 122.5$ </p> <p> $m\angle WZY = 32.84$ $m\angle YXW = 147.16$ </p>

No ejemplos de FALA	 <p> $m\angle EFG = 115$ $m\angle EHG = 88$ $\angle FEH \cong \angle EHG$ $m\angle FGH = 69$ </p> <p> $m\angle K = 117.05$ $m\angle L = 62.95$ </p> <p> $TJ \cong TQ$ $m\angle I = 48$ $m\angle O = 132$ </p>
<p>a. La figura determinada por los puntos C, D, E y F es un fala (p) si y solo si _____.</p>	

Como solución a la tarea, propusimos la siguiente definición: La figura determinada por los puntos C, D, E y F es un fala *si y solo si* es un cuadrilátero en el que el ángulo formado por dos lados adyacentes congruentes es suplementario con su ángulo opuesto.


Durante la asesoría del 31 de agosto, presentamos solución de la tarea a la profesora Carmen.

Ella nos preguntó cuál era nuestra definición de ángulo, lo cual nos llevó a darnos cuenta que de acuerdo con ella, la definición que propusimos para fala no era clara. Esto porque la definición de ángulo que teníamos cada una era diferente y no se relacionaba con la manera como

utilizamos el término “ángulo” en la definición de fala. En la Tabla 10.13, presentamos el fragmento de la discusión en el cual se evidencia lo anterior.

Tabla 10.13

Fragmento de la transcripción de la asesoría del 31 de agosto

26	Profesora	<p>O sea que, según esto (proposición s), la imagen (figural) que yo tengo de lo que ustedes están tratando de decir, es que esto es un ángulo (ver Imagen 10.1) Sin embargo, Jenifer habla de una región y Lucía de una medida. ¿Eso qué nos dice sobre definiciones? Todo esto que ha pasado.</p> <p>Imagen 10.1 <i>Representación de ángulo según nuestra definición</i></p> <p>S: <u>el ángulo formado por los lados</u> congruentes es suplemento del ángulo opuesto</p> <p>$p \leftrightarrow q, r, s$</p> 
27	Jenifer	<p>Que el concepto de ángulo al que nos referimos en la definición no es el mismo que tenemos las dos (<i>DefE1</i>) (<i>Definición</i>). Por tanto, es que la definición...</p>
28	Lucia	<p>No es clara (<i>DefE1</i>) (<i>Definición</i>).</p>
29	Profesora	<p>¿No es clara para quién? Para ustedes mismas.</p>

Con lo anterior concluimos que, si se quiere construir una definición matemática se debe estar seguro de que todos los términos que se van a usar en la definición estén ya definidos y realmente sean claros para quienes se les va a proponer una tarea en la que se construirá una definición que involucra esos términos (*DefE1*) (*Definir*).

Como no teníamos una definición correcta de ángulo, la profesora propuso que construyéramos la definición. Esto nos llevó a mencionar atributos necesarios y la profesora proponía no ejemplos para que nos diéramos cuenta que los atributos mencionados no eran suficientes.

Tabla 10.14

Fragmento de la transcripción de la asesoría del 31 de agosto

10	Carmen	[...] ¿Qué es para ustedes ángulo?
11	Jenifer	La región que se determina por la intersección entre dos rayos.
12	Lucía	La medida de la abertura que se determina por la intersección de dos rayos.
13	Carmen	Voy a ilustrar lo que ustedes creen que es un ángulo. Voy a dibujar un rayo y luego otro rayo y voy a buscar la intersección entre estos dos rayos. ¿La intersección entre los dos rayos qué es?
...
33	Carmen	[...] Entonces, lo primero que tenemos que hacer es darnos cuenta que nuestra definición de ángulo no es correcta. (El ángulo) No es una región, ni es una medida en una abertura. Entonces, ¿cuál es la definición?
34	Lucía	La unión de rayos.
35	Carmen	Un ángulo es, o sea, la figura es un ángulo si solo si, entonces dijiste: D. Un ángulo es la unión de dos rayos. ¿Estás de acuerdo Jenifer?
36	Jenifer	No, ahí hace falta información.
37	Lucía	Ah sí, que se interceptan en un punto.
38	Jenifer	Únicamente en un punto
39	Carmen	Y se pueden intersecar en más de un punto. ¿Esto es un ángulo? Imagen 10.2 <i>No ejemplos de nuestra definición de ángulo</i> ángulo ① la región que se determina por la intersección de dos rayos ② medida de abertura que se determina por intersección de dos rayos D. Un ángulo es la unión de dos rayos.
42	Lucía	No, pero se interceptan en los extremos
43	Carmen	Entonces, (escribe la definición de rayo) es la unión de dos rayos que tienen extremo común. ¿Esto es un rayo? Imagen 10.3 <i>No ejemplo de nuestra definición de ángulo</i> de C A B

44	Jenifer	No señora, son colineales (refiriéndose a que los puntos A, B, C lo son)
45	Carmen	Es la unión de dos rayos no colineales que tienen extremo común.

Así logramos identificar el conjunto de todos los atributos necesarios y suficientes que definen un ángulo. Esta actividad nos sirvió para darnos cuenta que buscar no ejemplos es importante porque ayuda a corroborar lo que sí es la figura que se está definiendo y a determinar cuáles son los atributos necesarios y suficientes (*DefE2*) (*Definir*).

El resolver esta tarea fue importante para nosotras porque al enfrentarnos directamente al proceso de definir nos permitió darnos cuenta que los atributos suficientes y necesarios que se exponen en una definición conforman el conjunto mínimo de atributos que realmente describen una figura geométrica (*DefE2*) (*Definir*). También, aclaramos a qué nos referimos con que una definición debe ser clara en todos los sentidos. Es decir, la definición debe ser fácil de comprender (*DefE1*) (*Definición*), los conceptos usados en la definición deben estar en el sistema teórico que se tiene cuando se construye una nueva definición (*DefE1*) (*Definición*), y debe existir una congruencia entre la imagen figural y la definición personal que se tiene de un objeto para utilizar coherentemente estos elementos en la construcción de una nueva definición (*DefE1*) (*Definir*).

Seguido del análisis de la solución de la tarea, se dio la discusión respecto a que significa que las definiciones contribuyen a la organización del conocimiento matemático (*DefE2*) (*Definición*). Esta duda surgió a partir de la lectura de Calvo (2001), en la que afirma que “el establecimiento de una definición matemática, por tanto, no es un fin en sí mismo, sino que responde a ciertas necesidades de organización y crecimiento del conocimiento (p, 31)”. A continuación, mostramos la discusión que se dio en torno a esta inquietud.

Tabla 10.15

Fragmento de la transcripción de la asesoría del 31 de agosto

60	Profesora	Se busca contribuir en el crecimiento y la organización del conocimiento matemático ¿Esto qué quiere decir? ¿Qué la definición no es un fin en sí mismo?
61	Lucía	En ese párrafo, nosotras interpretamos esto: que no es un fin en sí mismo porque cuando se define no se busca simplemente enumerar características del objeto, sino que va más allá (<i>DefE2</i>) (<i>Definición</i>). Ahí poníamos como ejemplo, cuando uno busca usar una definición para hacer argumentos en demostraciones (<i>DefE3</i>) (<i>Definición</i>).
62	Jenifer	Y cuando decimos que contribuye al crecimiento y la organización es porque cuando se establecen definiciones se busca que el conocimiento matemático aumente (<i>DefE2</i>) (<i>Definición</i>). Y esas definiciones van organizando ese conocimiento. O sea, como que van tratando de organizar los objetos que hay dentro de las teorías matemáticas para poderlas categorizar (<i>DefE2</i>) (<i>Definición</i>).
63	Profesora	Pero ¿ustedes están hablando de organización del conocimiento matemático de quién?
64	Jenifer	Lo hablamos más como hacia la escuela.
65	Lucía	Sí, pero ahorita lo que usted nos corrigió lo de ángulo, entonces ahí nosotras, de acuerdo a las imágenes y eso, y a la definición que logramos establecer, ahí se vio pues una muestra de cómo esa definición contribuyó a nuestra nueva definición de ángulo y a como nos organizó, que son la unión de dos rayos y no una región y no la medida de la abertura.

Producto de la interacción anterior, una de las conclusiones que obtuvimos fue que el conocimiento se va organizando para que podamos seguir desarrollándolo sin que sea tan extenso (*DefE2*) (*Definición*). Particularmente, en geometría el proceso de definir es importante porque se involucran las nociones primitivas, los postulados y el lenguaje geométrico para expresar las definiciones (*DefE2*) (*definir*). Sin embargo, este proceso podría terminar en construir una definición. Pero, también se puede dar que, la definición entre en uso para definir otras cosas (*DefE2*) (*Definir*), para argumentar (*DefE3*) (*Definir*) o para decidir si una figura es o no ejemplo de lo que se está definiendo (*DefE2*) (*Definir*).

Segunda parte: diseño de la tarea

Diseñamos una tarea para ser implementada con los profesores de las instituciones donde trabajamos. El propósito de la tarea es que, a partir de la construcción y exploración de un

cuadrado con Geometría Dinámica (GD), los profesores propongan una definición a partir del descubrimiento y clasificación de los atributos necesarios y suficientes de cuadrado. Nuestro objetivo para realizar esta acción fue evidenciar durante las discusiones en las asesorías con la profesora sobre la tarea diseñada y en el análisis a las definiciones propuestas por lo profesores, la apropiación de nuestro conocimiento sobre el asunto definición.

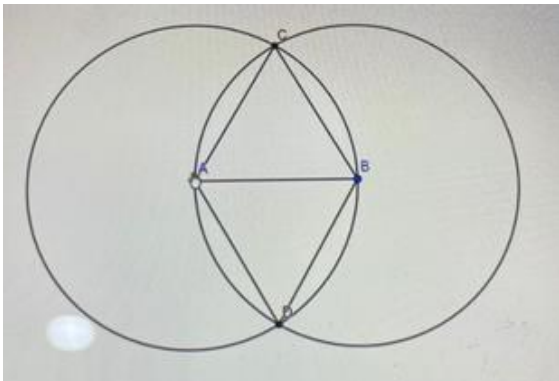
Inicialmente, diseñamos una tarea en la que propusimos los siguientes puntos (ver anexo p. 104):

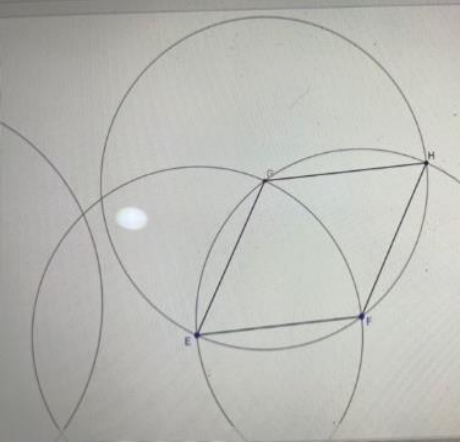
1. Definir rombo
2. Definir cuadrado

En la asesoría del 7 de septiembre, analizamos nuestra definición personal de rombo, a partir del cuestionamiento hecho por la profesora sobre como realizaríamos nosotras la construcción con GeoGebra. En la Tabla 10.16, describimos los procedimientos propuestos por nosotras para construir un rombo.

Tabla 10.16

Fragmento de la transcripción de la asesoría del 7 de septiembre

21	Lucía	\overline{AB} , una circunferencia con centro A y radio AB , circunferencia con centro en B y radio BA , punto de intersección de las circunferencias, crear \overline{AC} , \overline{CB} , \overline{BD} y \overline{AD} .
22	Profesora	Bueno. Y ahí tienes un rombo. Esta es la construcción 1. Imagen 10.4 <i>Representación de la construcción propuesta por Lucía</i> 
23	Jenifer	\overline{AB} , circunferencia con centro en E y radio EF , circunferencia con centro en F y radio EF , una de las intersecciones entre las dos circunferencias para trazar un

		<p>segmento congruente a \overline{AF}, trazar circunferencia con centro en G y radio EG, \overline{EG}, intersección de la circunferencia con centro en G y circunferencia con centro en F, \overline{GH} y \overline{FH}.</p> <p>Imagen 10.5 <i>Representación de la construcción realizada por Jenifer</i></p> 
--	--	--

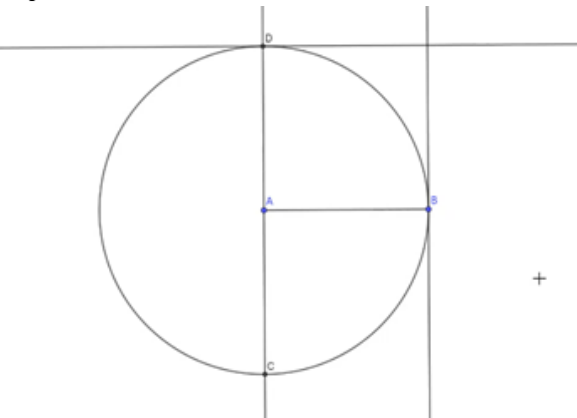
Luego la profesora nos pregunta: ¿cuál es la definición de rombo? Nosotras coincidimos en que el rombo es un cuadrilátero que tiene cuatro lados congruentes. Según las construcciones que cada una realizó, evidenciamos que utilizamos los atributos enunciados en la definición. A partir del análisis, notamos que le agregamos a nuestro rombo la condición de que la diagonal fuera congruente con los lados del rombo, la cual no era una condición necesaria (*Def E1*) (*Ilustración definición*). Por ello, no era posible transformar con el arrastre la construcción para que el rombo fuera cuadrado, siendo este último un ejemplo de rombo. Nuestras construcciones no estaban representando un rombo genérico.

Luego, revisamos el segundo punto de la tarea. De nuevo, nos solicitó que construyéramos un cuadrado. En la tabla mostramos los pasos que seguimos para construir un cuadrado.

D Cuadrado: un cuadrado es un cuadrilátero con cuatro lados congruentes y cuatro ángulos rectos.

Tabla 10.17

Descripción del proceso de construcción realizado

Construcción	Representación gráfica
<ol style="list-style-type: none"> 1. \overline{AB}. 2. Recta $l \perp \overline{AB}$ por el punto A. 3. Recta $m \perp \overline{AB}$ por el punto B. 4. Circunferencia con centro en A y radio AB 5. $\{C\} = \odot A, AB \cap l$ 6. Recta $n \perp \overline{AB}$ por el punto C. 7. D punto de intersección entre m y n. 8. Crear \overline{CD} 	<p>Imagen 10.6 <i>Representación de la construcción</i></p> 

A partir del análisis de la construcción lograda, nos dimos cuenta que no fue necesario utilizar todos los atributos mencionados en nuestra definición personal de cuadrado, puesto que fue suficiente construir tres ángulos y un par de lados adyacentes congruentes (*DefE1*) (*Definición*). Por tanto, la profesora nos cuestiona sobre la diferencia que existe entre las construcciones para el rombo y cuadrado que habíamos realizado. En la Tabla 10.18, mostramos un fragmento de la respuesta dada a la profesora.

Tabla 10.18

Fragmento de la transcripción de la asesoría del 7 de septiembre

100	Jenifer	En la del cuadrado, yo veo que la construcción es la que da los atributos necesarios y suficientes que conforman la definición. (<i>DefM1</i>) (<i>Definición</i>)
101	Profesora	Entonces, la relación es que la definición que inicialmente se ha dado no es la que necesito para construir un cuadrado. La construcción de cuadrado es la que me da los atributos necesarios y suficientes, un conjunto de atributos necesarios y suficientes teniendo en cuenta que a la definición le sobran cosas. Y ahora en la del caso del rombo ¿qué pasa?
102	Jenifer	Que a partir de la construcción aparecen unas propiedades que no son necesarias, pero que las incluimos como si fueron necesarias en la construcción (<i>DefM1</i>) (<i>Definición</i>).

De lo anterior nos dimos cuenta que, en algunas ocasiones, las construcciones que realizamos no se reducen a la representación de los atributos del objeto según la definición que tenemos, por lo

cual incluimos o excluimos atributos de la figura (*DefMI*) (*Definición*). Además, a partir de los pasos que seguimos en la construcción podemos determinar cuáles son los atributos necesarios y suficientes que componen la definición. Es decir, la definición debe reflejarse en la construcción que se realice (*DefMI*) (*Definición*).

Para la implementación de la tarea se acuerda abordar únicamente el punto sobre la definición de cuadrado, debido al tiempo que se requiere para resolver los dos puntos propuestos en la tarea.

Tercera parte: implementación de la tarea

En la tarea diseñada (ver anexo p. 104), inicialmente, se propuso a los profesores que reportaran su definición personal de cuadrado y que se pusieran de acuerdo sobre cuál era la más apropiada. Luego, debían realizar la construcción de un cuadrado en GeoGebra con el objetivo de poner en uso la definición propuesta y evidenciar que en la construcción realizada no se usaban todos los atributos de la definición que ellos dieron. Finalmente, de un listado que les presentamos con algunos atributos y propiedades que cumplen los cuadrados, debían escoger los que consideraban necesarios y suficientes para definir cuadrado.

Objetivo: en la gestión de la tarea con los profesores y segundo, analizar las definiciones de cuadrado propuestas por los profesores, para comprender la tipificación de las definiciones propuesta por los siguientes autores Kubliwoski (2009), de Villiers (1998), Samper y Camargo, (2014), y determinar si nuestro conocimiento se transforma.

A continuación, en la Tabla 10.19, reportamos las definiciones dadas por los profesores. Estas impulsaron la discusión en torno a la definición de cuadrado, lo cual nos permitió explicitar nuestro conocimiento sobre definiciones.

Tabla 10.19

Definiciones propuestas por los nuestros compañeros de trabajo

Nombre	Definición de cuadrado
Arley	Una figura geométrica es un cuadrado si y solo si tiene dos ángulos rectos y tres lados iguales.
Henry	Una figura geométrica es un cuadrado si y solo si es un paralelogramo con 4 ángulos rectos y todos sus lados congruentes.
Milton	Una figura geométrica es un cuadrado si y solo si todos sus lados son congruentes y todos sus ángulos internos miden 90° .
Juan Carlos	Una figura geométrica es un cuadrado si y solo si es paralelogramo, tiene los lados iguales y los ángulos internos iguales.
Martha	Una figura geométrica es un cuadrado si y solo si es un cuadrilátero paralelogramo con todos los ángulos iguales.
Yanet y Laura	Una figura geométrica es un cuadrado si y solo si tiene cuatro lados iguales. Cumple con ciertas características: es un rectángulo con lados opuestos paralelos.

En la discusión sobre cuál era la definición de cuadrado más apropiada, se evidenciaron nuestros conocimientos sobre: caracterización de la definición, características de la definición y uso de no ejemplos para construir una definición.

Respecto a la caracterización de la definición, al presentar la tarea se discutió sobre la importancia de escoger el conjunto mínimo de atributos necesarios y suficientes para que la definición fuera económica (*DefEI*) (*Definición*). Esto ocurrió cuando los profesores construyeron el cuadrado en GeoGebra, con el fin de corroborar si la definición escogida era lo requerido para realizar la construcción. En la Tabla 10.20, se presenta el fragmento de la discusión.

Tabla 10.20

Fragmento de la transcripción de la sesión que Lucía gestionó tarea

82	Lucía	Entonces, tú construiste segmento. Luego, una perpendicular. Es decir, para construir un ángulo recto. ¿Luego qué hiciste?
83	Arley	Circunferencia.
84	Lucía	Para construir un segmento congruente. Listo. Luego, ¿qué hiciste?
85	Arley	Perpendicular para otro ángulo recto.
86	Lucía	Es decir, vamos dos ángulos rectos. Listo. ¿Qué más hiciste?
87	Arley	Segmento congruente.
88	Lucía	Entonces vamos dos segmentos. Listo. Y luego otro segmento, ¿cierto?
89	Arley	Segmento.

90	Lucía	Y ahí tenemos el cuadrado. Entonces, ¿qué es un cuadrado, de acuerdo a la construcción que hizo Arley?
...		
93	Arley	Entonces, esa (definición de cuadrado), puede ser así: es una figura geométrica si y solo si es un cuadrilátero con tres lados congruentes y dos ángulos rectos.
94	Lucía	Eso es una definición, y es correcta (<i>DefE5</i>) (<i>Definición</i>). No estoy diciendo que la de ustedes no sea correcta (refiriéndose a la de Henry o la de Milton). ¿Sí? Pero, como les dije, ¿qué características debe tener una definición? Debe ser fácil de comprender y debe tener el mínimo conjunto de atributos necesarios y suficientes (<i>DefE1</i>) (<i>Definición</i>). Entonces, una figura geométrica es un cuadrado si y solo si es un cuadrilátero, porque necesitamos esa condición, pero, es un cuadrilátero en el que tres segmentos son congruentes y tiene dos ángulos rectos. Entonces miren, basta con tener estos atributos no más. ¿Cuáles? Cuadrilátero, es necesario, pero no suficiente. tener tres segmentos congruentes es necesario, pero no es suficiente. Y de acuerdo a la construcción que hizo Arley, con tener dos ángulos rectos. Y ahí están los atributos que necesito para definir cuadrado. (<i>DefE1</i>) (<i>Definición</i>).

Otra característica de una definición es la claridad (*DefE1*) (*Definición*). Por ejemplo, le expusimos a los profesores, al (momento) “cuando uno va a dar una definición, la definición tiene que ser clara, es decir, fácil de comprender para los estudiantes, ... Y no se debe prestar para ambigüedades” (*DefE1*) (*Definición*). Aunque mencionamos la importancia de estos atributos de una definición matemática, no ejemplificamos la falta de alguno de estos en las definiciones presentadas por los profesores.

Respecto a las características de la definición, aludimos a la convencionalidad, cuando nos referimos al grado de escolaridad para el cual se pretende presentar la definición que se está construyendo (*DefEc1*) (*Definir*). Esto ocurrió cuando se discutió con los profesores sobre los términos que incluían sus definiciones. En las tablas Tabla 10.21 y Tabla 10.22, presentamos dos fragmentos en los cuales se evidenció este aspecto.

Tabla 10.21

Fragmento de la transcripción de la sesión en la que Lucía gestionó la tarea

2	Henry	Una figura geométrica es un cuadrado si y solo si es un paralelogramo con cuatro ángulos rectos y todos sus lados congruentes.
...		
15	Lucía	Pero si uno define cuadrado como un paralelogramo, digamos a un estudiante ¿qué estaría sucediendo? ¿Si tú por ejemplo vas a un grado 6°? (<i>DefEc1</i>) (<i>Definición</i>)
...		
17	Arley	Si, la de paralelogramo es una definición más compleja.
18	Lucía	Exactamente, la definición no sería clara (<i>DefE1</i>) (<i>Definición</i>). ¿Cierto que sí? Porque para saber entonces que es un cuadrado, necesito saber antes que es un paralelogramo. Y yo no creo que un niño de 6° sepa que es un paralelogramo (<i>DefEc1</i>) (<i>Definir</i>).

Tabla 10.22

Fragmento de la transcripción de la sesión en la que Jenifer gestionó la tarea

10	Jenifer	El profe lo que hizo fue usar la herramienta polígono regular, poner que tiene 4 lados. Ahora, si ustedes no tienen esa opción de polígono regular, ¿qué se les ocurre que podríamos hacer? (<i>DefM1</i>) (<i>Definición</i>)
11	Martha	A partir de un punto. A partir de ese punto mirar la distancia tantas unidades (hacia la derecha).
...		
13	Juan Carlos	Si estamos en el plano cartesiano, ubicamos los puntos con la misma longitud horizontal que vertical y los reflejamos al otro lado.
14	Jenifer	Como estamos hablando de niños de quinto de primaria... Y los niños de quinto de primaria todavía no trabajan conceptos de traslación, reflexión y simetría (<i>DefEc1</i>) (<i>Definir</i>).

Como se evidenció en los ejemplos presentados, nosotras resaltamos la importancia de escoger los atributos que se incluirían en la definición de cuadrado de acuerdo a los conocimientos previos de los estudiantes, según el grado escolar en el que se encuentran. En este sentido, el profesor toma la decisión de escoger cierta definición atendiendo al factor didáctico, el cual es un aspecto de la convencionalidad de las definiciones (*DefEc1*) (*Definir*).

Respecto al uso de no ejemplos para construir definiciones, cuando los profesores realizaron la construcción de cuadrado, no utilizaron todos los atributos que había en su definición personal. Por ello, nosotras les propusimos realizar la construcción de acuerdo a los atributos que ellos

habían mencionado, para mostrar que daban lugar a no ejemplos de cuadrado (*DefM1*) (*Definir*).

Con esto, se evidencia nuestra apropiación del papel de los no ejemplos para construir definiciones porque aprovechamos esas construcciones para que los profesores identificaran que los atributos expuestos no eran suficientes y necesarios (*DefM1*) (*DefM2*) (*Definir*), En la Tabla 10.23 y la Tabla 10.24, mostramos ejemplos de lo mencionado anteriormente.

Tabla 10.23

Fragmento de la transcripción de la sesión en la que Jenifer gestionó la tarea

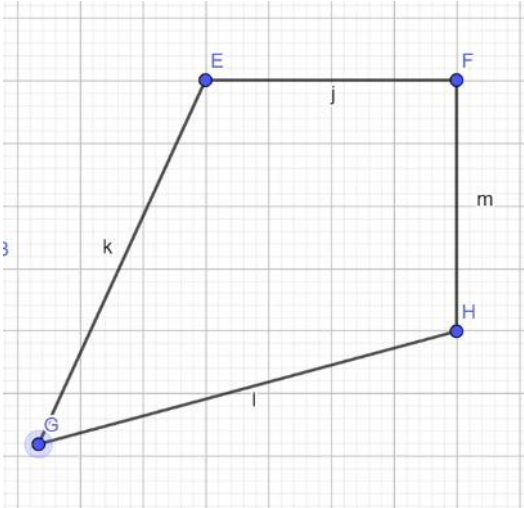
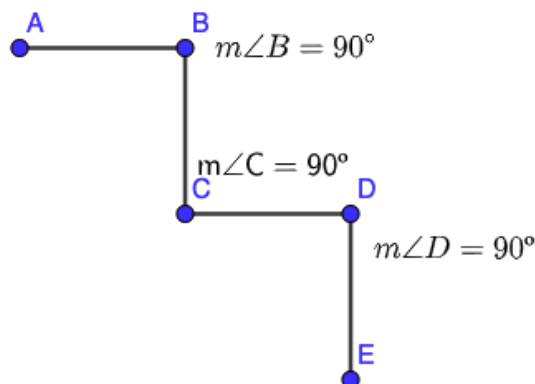
<p>Juan Carlos construye un cuadrado guiándose por la cuadrícula de la hoja de GeoGebra.</p> <p>Imagen 10.7 <i>No ejemplo de la definición de cuadrado de Juan Carlos</i></p>		
		
15	Juan Carlos	Lo que decía la profe Jenifer es esto. Si usted mueve este punto (G), entonces pasa esto (se deforma la figura). (Ver Imagen 10.7)
...		
24	Jenifer	Dejemos ese como un no ejemplo (Imagen XX). En matemáticas, le decimos un no ejemplo a algo que no nos sirvió, pero que nos permitió darnos cuenta de algo que hacía falta. (<i>DefM1</i>) (<i>DefM2</i>) (<i>Definir</i>)

Tabla 10.24

Fragmento de la transcripción de la sesión en la que Lucía gestionó la tarea

Imagen 10.8

Contraejemplo creado por Milton



59	Milton	Es que ya encontré contraejemplos. Es que yo te decía todos sus lados son congruentes y todos sus ángulos internos miden 90 grados.
60	Lucía	(Refiriéndose a la definición que escribió Milton) [tú dices] Todos sus lados son congruentes. No sabríamos cuántos porque dice todos. Entonces, esta es una definición que no cumple todos las condiciones necesarias y suficientes para que sea cuadrado. ¿Qué condición crees que le faltó a esta? (<i>DefM2</i>) (<i>Definición</i>)
61	Milton	Lo que habíamos hablado; decir que es un cuadrilátero porque, yo no coloqué que eran cuatro lados.

Cuarta parte: análisis de las definiciones dadas por profesores

Para realizar el análisis de las definiciones propuestas por los profesores como solución a la tarea, fue necesario corregir nuestra caracterización de definición matemática, ya que no era clara. Nuestra nueva definición es producto de la interpretación de las lecturas y los cuestionamientos realizados por la profesora durante las asesorías. Por tanto, nuestra nueva caracterización es:

Una definición matemática es un enunciado en el que se le asigna un nombre a un conjunto mínimo de atributos necesarios y suficientes que caracterizan un objeto; es fácil de comprender, no presenta contradicciones lógicas y es económica (*DefE1*) (*Definición*).

Con el fin de cumplir con el segundo del plan de acción, realizamos el análisis de las definiciones, el cual se muestra en la Tabla 10.25.

Tabla 10.25

Análisis realizado a las definiciones propuestas por los profesores

N°	Definición de cuadrado	Análisis
1.	Una figura geométrica es un cuadrado si y solo si tiene dos ángulos rectos y tres lados iguales.	<ul style="list-style-type: none"> • Es incorrecta ya que no menciona todos los atributos necesarios y suficientes. Hace falta el atributo ser cuadrilátero.
2.	Una figura geométrica es un cuadrado si y solo si es un paralelogramo con 4 ángulos rectos y todos sus lados congruentes.	<ul style="list-style-type: none"> • Es correcta pero no es económica, ya que al decir paralelogramo los otros dos atributos tendrían demasiada información. Por ejemplo, si un ángulo es recto, todos los demás lo serán en un paralelogramo. • Es explícita. • Es parcial (<i>DefE5</i>) (<i>Definición</i>) porque no admite que otros paralelogramos se caractericen con estos mismos atributos. Ejemplo: Todo cuadrado es paralelogramo, pero no todo paralelogramo es cuadrado. (<i>DefE5</i>) (<i>Definición</i>) • No es clara si no se cuenta con una definición personal de paralelogramo. • No es operativa porque para utilizarla en una demostración requiere validar, sin necesidad, varios atributos.
3.	Una figura geométrica es un cuadrado si y solo si todos sus lados son congruentes y todos sus ángulos internos miden 90°.	<ul style="list-style-type: none"> • Es incorrecta ya que no menciona todos los atributos necesarios y suficientes. Hace falta el atributo ser cuadrilátero.
4.	Una figura geométrica es un cuadrado si y solo si es paralelogramo, tiene los lados iguales y los ángulos internos iguales.	<ul style="list-style-type: none"> • Es correcta. • No es económica (ver primera definición). • No es operativa (ver segunda definición). • Es explícita. • Es parcial (segunda definición).
5.	Una figura geométrica es un cuadrado si y solo si es un cuadrilátero paralelogramo con todos los ángulos iguales.	<ul style="list-style-type: none"> • Es incorrecta ya que no menciona todos los atributos necesarios y suficientes. Hace falta el atributo “tener todos los lados congruentes”, pues de lo contrario, es rectángulo.

6.	Una figura geométrica es un cuadrado si y solo si tiene cuatro lados iguales. Cumple con ciertas características: es un rectángulo con lados opuestos paralelos.	<ul style="list-style-type: none"> • No es elegante (<i>DefE1</i>) (<i>Definición</i>) por la forma en que expresan los atributos. • Teniendo en cuenta nuestra caracterización de definición, esta no es correcta, porque le hacen falta atributos suficientes y necesarios, en la primera parte, pues daría un rombo. Mencionan propiedades que al parecer no están incluidas en la definición de la figura.
7.	Una figura geométrica es un cuadrado si y solo si es un cuadrilátero con dos ángulos rectos y tres lados iguales.	<ul style="list-style-type: none"> • Es correcta • Es económica porque menciona el mínimo de atributos necesarios y suficientes. • Es explícita. • Es operativa. • Es jerárquica (<i>DefE5</i>) (<i>Definición</i>)
8.	Una figura geométrica es un cuadrado si y solo si es un polígono regular con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos.	<ul style="list-style-type: none"> • Es correcta. • No es económica porque los atributos cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales, son innecesario por la definición de polígono regular. • La claridad depende de si se tiene una definición personal de polígono regular. (<i>DefE1</i>) (<i>Definición</i>) • No es operativa.
9.	Una figura geométrica es un cuadrado si y solo si es un cuadrilátero, todos sus lados son congruentes y todos sus ángulos internos miden 90 grados.	<ul style="list-style-type: none"> • Es correcta, pero no es económica. Normalmente se utiliza con fines didácticos para los estudiantes de primaria, ya que es una definición en la que los atributos permiten formar la imagen figural de cuadrado (<i>DefEc1</i>) (<i>Definir</i>). • Es explícita. • No es operativa. • Es participacional.

El análisis de las definiciones propuestas por los profesores nos permitió evidenciar nuestro conocimiento sobre definiciones, dado que tuvimos en cuenta los siguientes aspectos para realizar esta acción:

- Evaluamos si la definición era correcta o incorrecta. Consideramos que una definición es correcta cuando presenta los atributos necesarios para que quede clara e inequívocamente determinado el objeto que se está definiendo. Tuvimos en cuenta que esta puede contener más atributos de los necesarios. Mientras que las definiciones incorrectas son aquellas

que no mencionan todos los atributos necesarios para determinar el objeto o presenta contradicciones lógicas. *(DefE5) (Definición)*

- Identificamos si en los enunciados se evidenciaban atributos como: estructura (nombre del objeto y atributos), claridad, economía y consistencia *(DefE1) (Definición)*.
- Identificamos uno de los aspectos de la convencionalidad de la definición, atendiendo a los factores: didáctico, estético y operativo *(DefEc1) (Definición)*.
- Tipificamos las definiciones según si eran explícita o implícita, y particional o jerárquica *(DefE5) (Definición)*.

Quinta parte: Diseño de una tarea sobre uso de las definiciones para argumentar

Diseñamos una tarea pensada para nuestros compañeros de trabajo o para estudiantes con buenos conocimientos de cuadriláteros y congruencia de triángulos . El propósito de la tarea es que los estudiantes, a partir de la construcción, exploración y uso del arrastre de un objeto geométrico con Geometría Dinámica (GD), provean argumentos para establecer una conjetura en la que relacionen las propiedades que deben tener las diagonales de un cuadrilátero para que sea rectángulo. Nuestro objetivo para realizar el diseño de la tarea es identificar durante el análisis de la tarea diseñada con la profesora asesora, nuestro conocimiento sobre definiciones y su relación con la argumentación, específicamente en el uso de las definiciones para argumentar.

En este caso, consideramos únicamente el proceso de diseño de la tarea y la discusión sobre esta en la asesoría. No realizamos implementación con estudiantes por cuestiones de tiempo.

Creíamos que durante las actividades mencionadas podríamos identificar el conocimiento que teníamos sobre los asuntos de interés, que podrían surgir situaciones que llevara a una posible transformación. La dinámica consistió en diseñar la tarea y presentarla resuelta a la profesora

durante la asesoría, con el fin de que durante el análisis de esta se evidenciara nuestro conocimiento, dado que este tipo de acción, realizada durante el Ciclo 2, fue provechosa.

Diseño de la tarea

Inicialmente, revisamos un libro de geometría en el que encontramos el teorema: *un paralelogramo es rectángulo si solo si sus diagonales son congruentes*, el cual vamos a llamar T1. Este nos llamó la atención ya que, en la tarea diseñada anteriormente, para este mismo ciclo, nos pareció que el estudio de los cuadriláteros nos serviría para poder visibilizar las propiedades de las definiciones y su relación con la argumentación.

Como el teorema escogido está compuesto de dos partes por la bicondicionalidad, decidimos escoger la parte: *si las diagonales son congruentes entonces el paralelogramo es rectángulo*.

Entonces, empezamos a proponer diferentes problemas que dieran como resultado una conjetura relacionada a la parte del teorema escogida. El primer problema propuesto fue: *dado el paralelogramo ABCD ¿qué condiciones deben cumplir las diagonales para que el cuadrilátero sea rectángulo?* Pero, sin realizar una exploración en GD caímos en cuenta que el problema no era muy significativo, ya que bastaba construir un paralelogramo y hallar la medida de las diagonales y luego arrastrar los vértices hasta obtener un rectángulo. Por lo anterior, decidimos quitar la propiedad ser paralelogramo, proponiendo el problema de manera más general, ser cuadrilátero.

El segundo problema propuesto fue: *dado el cuadrilátero ABCD, \overline{AC} y \overline{BD} congruentes ¿qué condiciones deben cumplir las diagonales para que el cuadrilátero sea rectángulo?* Este problema lo estudiamos en GD y nos dimos cuenta que la propiedad invariante que hacía falta mencionar era que las diagonales se bisecaban. Además, si en el problema se da como dada la congruencia de las diagonales, tampoco se permitirá mucha exploración. Por ello, decidimos no

dar como dada esta propiedad. En la Cuadro 10.4, se muestra el enunciado de la tarea propuesto, el cual fue el que se presentó a la profesora.

Cuadro 10.4

Enunciado del problema propuesto en la tarea

<p>Dado el cuadrilátero $ABCD$, \overline{AC} y \overline{BD}, ¿qué condiciones cumplen las diagonales para que el cuadrilátero $ABCD$ sea rectángulo?</p>
--

- | |
|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Describa el proceso de construcción y exploración realizado. 2. Provea una conjetura y demuéstrela. |
|---|

Cuando comenzamos a resolver el problema, la primera construcción y exploración que realizamos consistió en realizar una construcción blanda a partir de un cuadrilátero cualquiera y sus diagonales. Luego, tomamos las medidas de los ángulos y arrastramos los vértices con la intención de que los ángulos midieran 90° , con el fin de que el cuadrilátero fuera rectángulo (*DefM1*) (*Definición*). Con este proceso no logramos que la figura fuera un rectángulo, ya que las medidas de los ángulos no daban exactamente 90° . Esto nos llevó a optar por otro tipo de construcción en la que se realizó un rectángulo y se miró que condiciones cumplían las diagonales. Cabe resaltar que, en el proceso mencionado anteriormente, la definición que usamos de rectángulo fue: cuadrilátero con cuatro lados rectos, la cual vamos a llamar D1.

Realizamos diferentes construcciones iniciando con la construcción de un rectángulo utilizando diferentes procedimientos, por ejemplo, con tres ángulos rectos, con lados paralelos y ángulos rectos. Pero, el procedimiento de construcción que más nos convenció lo presentamos a continuación. Mostramos en la Tabla 10.26 los pasos de construcción, en la Tabla 10.27 la exploración y en la Tabla 10.28 la conjetura. Además, en cada etapa del proceso, reportamos los argumentos que emergieron y las definiciones que utilizamos.

Tabla 10.26

Procedimiento de construcción

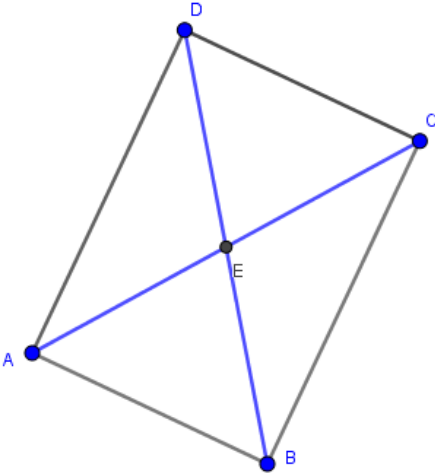
Pasos del procedimiento de construcción	Definición usada	Representación grafica
1. \overline{AB}	D. rectángulo: Paralelogramo con un ángulo recto	
2. recta $g \perp \overline{AB}$, $A \in g$		
3. $D \in g$		
4. recta $h \parallel \overline{AB}$, $D \in h$		
5. recta $i \parallel \overline{AD}$, $B \in i$		
6. \overline{AC} y \overline{DB}	D. diagonal	

Tabla 10.27

Procedimiento de exploración

Pasos del procedimiento de exploración	Argumentos que emergieron	Definición usada
1. Tomar medida de \overline{AC} y \overline{BD}	Argumento Deductivo 1: Dato: $AC = BD$ Aserción: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ Garantía: D. segmentos congruentes	D. segmentos congruentes
2. E punto de intersección entre \overline{AC} y \overline{BD}		D. intersección
3. Tomar medida de \overline{AE} , \overline{EC} , \overline{BE} , \overline{ED}	Argumento Deductivo 2: Dato: $AE = EC = BE = ED$ Aserción: $\overline{AE} \cong \overline{EC} \cong \overline{BE} \cong \overline{ED}$ Garantía: D. segmentos congruentes Argumento Deductivo 3: Dato: $AE = EC = BE = ED$ y $E \in \overline{AC} \cap \overline{BD}$ Aserción: E punto medio de \overline{AC} y \overline{BD} Garantía: D. punto medio Argumento Deductivo 4: Dato: E punto medio de \overline{AC} y \overline{BD} Aserción: \overline{AC} y \overline{BD} se bisecan Garantía: D. bisecar	D. punto medio D. bisecar

Tabla 10.28*Conjeturación*

Procedimiento de conjeturación	Argumentos que emergieron
Conjetura 1: Si el cuadrilátero $ABCD$ con \overline{AC} y \overline{BD} diagonales que se bisecan y $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es rectángulo.	Argumento abductivo 1: Dato: Dado cuadrilátero $ABCD$ con \overline{AC} y \overline{BD} diagonales que se bisecan y $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ Aserción: Cuadrilátero $ABCD$ rectángulo Garantía: conjetura

Como se observa en la Tabla 10.26, la definición de rectángulo que utilizamos es “paralelogramo con un ángulo recto”, Esta definición le vamos a llamar D2. Esta surgió en el proceso de construir un rectángulo a partir de un paralelogramo, ya que sabíamos que el rectángulo es paralelogramo teniendo en cuenta T1 (*DefM1*) (*Definir*). Además, solamente establecimos que tenía un ángulo recto porque usamos D1 y queríamos que la definición fuera económica.

Decidimos cambiar D1 por D2 ya que utilizar a D2 en la demostración iba a facilitar este proceso (*DefE3*) (*Definición*). Particularmente, dadas las condiciones dadas del problema, es más fácil demostrar que los lados del cuadrilátero son paralelos y que un ángulo es recto. Mientras que, demostrar que los cuatro ángulos son rectos es más tedioso.

Durante la asesoría con la profesora

La profesora nos cuestionó sobre por qué iniciamos el proceso de resolución construyendo un rectángulo si lo que se pide en la tarea inicialmente es la construcción de un cuadrilátero cualquiera y lo que hay que explorar es qué propiedades deben tener las diagonales para que el cuadrilátero sea rectángulo. Nosotras explicamos el primer procedimiento realizado, el cual ya mencionamos anteriormente. Dada esta respuesta, la profesora nos hizo caer en cuenta que el propósito de la tarea y la manera en cómo la abordamos eran diferentes. Por ello, nos cuestiona

sobre el tipo de problema, condiciones que cumple y el tipo de argumento que puede surgir al resolver el problema. En la Tabla 10.29, mostramos fragmentos de lo sucedido

Tabla 10.29

Fragmento de la transcripción de la asesoría del 30 de noviembre

1.	Profesora	No, pero mira, lo que me describió Jenifer es muy diferente a lo que el problema propone, muy diferente. El problema propone construir un cuadrilátero ABCD, después habla de las diagonales, entonces se construyen las diagonales. [...] ¿qué tipo de problema es este? ¿qué condiciones cumple? ¿qué tipo de argumento creen ustedes que va a surgir de este problema?
2.	Jenifer	Es un problema de búsqueda del antecedente.
3.	Lucía	Y genera argumentos abductivos.
4.	Profesora	Bueno, es búsqueda del antecedente porque queremos que la consecuencia sea ser un rectángulo (<i>ArgM2</i>) (<i>Argumento</i>). Entonces, tú no puedes comenzar (el proceso de resolución) con un rectángulo. Para nada. Tú tienes que descubrir que causa que este cuadrilátero se convierta en un rectángulo. Entonces, ¿cómo sé yo lo que causa que se convierta en un rectángulo? Uso mi definición de rectángulo y digo: “Yo necesito ver qué causa que las medidas de todos los ángulos de este cuadrilátero sean rectos.” porque esa es mi definición de rectángulo (<i>DefE2</i>) (<i>Definición</i>).
...		
15	Profesora	Pero ¿cuál es el problema grave? El problema grave es que, el problema dice que se quiere un rectángulo. Y si yo no soy una persona que tengo en cuenta que (el problema) es de búsqueda de antecedente y que el antecedente tiene que ver con las diagonales, yo puedo hacer lo que ustedes hicieron. Yo puedo hacer que el ángulo sea recto y ver que les pasó a las diagonales. Pero, eso no es correcto.

Con lo anterior, la profesora nos hizo comprender que el hecho de reconocer el tipo de problema incluido en la tarea nos indica cómo debe iniciarse el proceso de construcción y exploración de la tarea. En este caso, como el problema es de búsqueda de antecedente es necesario hacer la construcción a partir de los datos en el enunciado (un cuadrilátero y sus diagonales) y explorar qué condición de las diagonales hace que se cumpla el consecuente (ser rectángulo) (*ArgM1*) (*Argumento*). En la Tabla 10.30, presentamos el proceso de construcción y exploración realizado

por nosotras y por la profesora para resolver el problema. Esto, con el fin de mostrar la conjetura que debe surgir en cada caso.

Tabla 10.30

Comparación entre las dos formas de abordar el problema

Solución de tarea por nosotras	Solución de tarea por la profesora
<p>Construcción:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Crear rectángulo (con la D. rectángulo: paralelogramo con un ángulo recto) 2. Crear diagonales 	<p>Construcción:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Crear cuadrilátero cualquiera 2. Crear diagonales
<p>Exploración:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Tomar medida de las diagonales y confirmar si el punto de intersección de las diagonales es punto medio. 	<p>Exploración:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Tomar medida de las diagonales y arrastrar los vértices hasta encontrar las propiedades que ellas cumplen en el momento en que el cuadrilátero es rectángulo. 2. Comprobación mirando si los ángulos eran rectos.
<p>Conjetura: Si $ABCD$ es rectángulo, entonces sus diagonales se bisecan y son congruentes.</p>	<p>Conjetura Si el cuadrilátero $ABCD$ tal que \overline{AC} y \overline{BD} se bisecan y son congruentes, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es rectángulo.</p>

Como se evidencia en la Tabla 10.28 y en la Tabla 10.30, no hay una coherencia entre la conjetura que presentamos, inicialmente, a la profesora y la que realmente surge del abordaje que dimos al problema. Con esto nos dimos cuenta que la forma como se aborda el problema si afecta la solución que se encuentra. Por eso, es importante identificar el tipo de problema que es antes de solucionarlo, para no caer en el error de abordarlo de una manera incorrecta y terminar resolviendo otro problema. Para tratar en lo posible que los estudiantes no procedan a resolver el problema como lo hicimos inicialmente, podríamos cambiar el enunciado de la siguiente manera:

Dado el cuadrilátero $ABCD$, \overline{AC} y \overline{BD} , ¿qué condiciones deben cumplir las diagonales para que el cuadrilátero $ABCD$ sea rectángulo?

1. Describa el proceso de construcción y exploración realizado.

2. Provea una conjetura y demuéstrela.

También, la profesora nos pregunta sobre la necesidad de especificar o mencionar, durante la solución de la tarea, las definiciones que se utilizaron. En la Tabla 10.31, presentamos el fragmento de la discusión.

Tabla 10.31

Fragmento de la transcripción de la asesoría del 30 de noviembre

8	Profesora	¿Por qué tengo que decir cuál es la definición que tengo de rectángulo?
...		
9	Lucia	Es la que me va a permitir decir si ese cuadrilátero es rectángulo.
10	Profesora	Sí, pero ¿por qué tengo que decir cuál es la definición de rectángulo?
11	Jenifer	Porque hay varias (definiciones).

Lo anterior nos permitió corroborar que las definiciones son convencionales. Por ello, es necesario especificar cuál es la definición que se está usando al momento de diseñar y resolver un problema. Esto debido a que un objeto puede tener varias definiciones y dependiendo del conocimiento que se tenga estas pueden variar. Es decir, las definiciones no son únicas, un objeto puede tener varias definiciones que son equivalentes (*DefE1*) (*DefE5*) (*Definición*). Por ejemplo, en el proceso de solucionar la tarea iniciamos con D1, pero cuando empezamos a construir rectángulos, la definición de rectángulo se proponía según el procedimiento utilizado para construirlos (*DefE1*) (*Definir*). Es decir, en el proceso de definir rectángulo partimos de D1, la cual es una definición convencional en los libros de texto de geometría y la transformamos a D2 teniendo en cuenta lo que sabíamos del problema y los pasos utilizados en la construcción (*DefE1*) (*Definir*). Este cambio surgió ya que D1 no era económica y operativa. Mientras que, D2 era operativa dado que es más útil para utilizarla en la demostración (*DefE3*) (*Definición*). Seguido a lo anterior, la profesora nos cuestionó sobre cómo el diseño de la tarea nos permitió que saliera a la luz el conocimiento de nuestra conceptualización sobre definición y la relación

entre la definición y la argumentación. En la Tabla 10.32, se muestra el fragmento de la discusión

Tabla 10.32

Fragmento de la transcripción de la asesoría del 30 de noviembre

33	Profesora	[...] ¿Cómo salió a la luz, durante el proceso de diseño de esta tarea, su conocimiento de qué es una definición y su conocimiento de que relación hay entre definición y argumentación?
34	Jenifer	Pues digamos, lo que yo logré identificar es el uso que se le da a la definición en los diferentes momentos [construcción, exploración, conjeturación y demostración] y de qué manera se utiliza en el argumento (<i>DefE3</i>) (<i>Definición</i>). Entonces, por eso lo dividimos por pasos, la construcción, la exploración y la conjeturación. [...] porque digamos que lo vimos como diferente utilizar la definición en la construcción que utilizar la definición en la exploración y en la conjeturación porque digamos que en la exploración y en la conjeturación emergen argumentos (<i>DefE3</i>) (<i>Definición</i>). Como nos dimos cuenta algunos (argumentos) deductivos y el argumento abductivo que es el que nos da la solución del problema (<i>DefE3</i>) (<i>Definición</i>). Eso fue como lo que yo logré identificar.
35	Profesora	A ver si entendí bien lo que me trataste de decir, viste dos momentos en que surge lo que ustedes tienen como definición de definición: <ol style="list-style-type: none"> 1. Es usar, porque saben que tienen que usar la definición para hacer la construcción, porque ustedes querían la construcción de un cuadrilátero especial o sea un rectángulo. (<i>DefE2</i>) (<i>Definición</i>) 2. Vieron que se usaba la definición para justificar (<i>DefE2</i>) (<i>Definición</i>). No para justificar nada (verificar), para en vez de decir la distancia de $AE = EC$, decir (E) es el punto medio de AC. (<i>DefE2</i>) (<i>Definición</i>)
36	Jenifer	Sí, las definiciones ahí sirven es como garantías para validar el proceso de razonamiento que se está haciendo en el proceso de exploración. (<i>DefE3</i>) (<i>Definición</i>)
37	Profesora	Pero mira Jenifer. yo podría haber hecho la conjetura diciendo: si el cuadrilátero $ABCD$ tiene estas diagonales y E es el punto de intersección de las diagonales tal que la distancia de $AE = AC$... entonces el cuadrilátero es rectángulo. No hubiera tenido que usar para nada que se bisecan, ni que son congruentes. Podría haber escrito una conjetura donde no sale nada de eso y entonces no usaría ninguna definición, solo en la demostración cuando ya quiero mostrar que eso es un rectángulo.

A partir de lo presentado en el fragmento, logramos concluir dos aspectos importantes. El primero se refiere al uso que damos a la definición en el proceso de realizar la construcción, ya que, en este caso, utilizamos los atributos de la definición de rectángulo para que el cuadrilátero cumpliera unas características especiales (*DefE2*) (*Definición*). El segundo se refiere a que no siempre se utiliza la definición en el proceso de exploración y conjeturación (*DefE3*) (*Definición*). Esto lo aclaró la profesora porque nosotras en el procedimiento de exploración y conjeturación mostramos las definiciones que utilizamos y los argumentos que emergieron Tabla 10.27. Pero, no ocurre siempre que en esos procesos exista la necesidad de utilizar las definiciones o incluso hay veces en las que no surgen argumentos (*DefE3*) (*Definición*). Sin embargo, las definiciones sirven para corroborar las propiedades invariantes que se perciben de manera visual en la representación gráfica del problema y que pueden ser consideradas la solución a este (*DefE2*) (*Definición*).

También, reflejamos en nuestro conocimiento, la importancia del uso de las definiciones al momento de realizar demostraciones. Es decir, si se quiere hacer una justificación formal de una conjetura es necesario hacer uso de las definiciones. Esto porque las definiciones proveen los atributos necesarios y suficientes de los objetos geométricos que se necesitan para armar los argumentos que conforman la demostración (*DefE3*) (*Definición*).

Particularmente, la profesora a partir del problema propuesto nos presentó dos enunciados que surgieron del proceso de exploración realizado por ella. Esto lo hizo con el fin de cuestionarnos sobre la relación de la argumentación y las definiciones. En la Tabla 10.33, presentamos los fragmentos de la discusión que se dio.

Tabla 10.33

Fragmento de la transcripción de la asesoría del 30 de noviembre

46	Profesora	[...] Yo digo “parece ser que (para que el cuadrilátero sea rectángulo) se requiere diagonales congruentes que se bisecan”. Después hago esta construcción robusta, digo “todo cuadrilátero que tiene diagonales congruentes que se bisecan es un rectángulo”. ¿He dado argumentos en lo que les he dicho ahorita?
...		
48	Profesora	Para que me dé rectángulo, parece que necesito hacer que las diagonales sean congruentes y que se bisecan. ¿Eso es un argumento?
49	Jenifer	Yo digo que sí. Está dando la aserción que es el rectángulo y las razones son que las diagonales son congruentes y se bisecan. (<i>ArgE1</i>) (ilustración argumento)
...		
54	Profesora	Sí, ya identificamos la declaración hecha y las razones. Entonces ¿qué tipo de argumento es?
55	Jenifer	Es abductivo porque en este caso el dato es plausible, o sea hay que probarlo. (<i>ArgE5</i>) (<i>Argumento</i>)
56	Profesora	¿Por qué es abductivo?
57	Jenifer	Inicialmente, es abductivo porque conozco la aserción. El dato es plausible, o sea tengo que probarlo. (<i>ArgE5</i>) (<i>Argumento</i>)
58	Profesora	Después de hacer la construcción robusta, dije. Ah, entonces, para todo cuadrilátero si las diagonales son congruentes y se bisecan entonces va a ser rectángulo, ¿Es un argumento?
...		
63	Lucía	Si profe porque está justificando lo que dice ahí. Lo de que en el cuadrilátero las diagonales son congruentes y todo eso, porque es rectángulo.
...		
69	Profesora	Sí, dice consiste en dar razones para justificar una declaración hecha. Entonces, si es argumento ¿qué tipo de argumento es?
70	Lucía	Pues es abductivo porque nosotras partimos de que fuera (el cuadrilátero) un rectángulo. Y que encontraríamos las condiciones para que el cuadrilátero fuera rectángulo. (<i>ArgE5</i>) (<i>ilustración Argumento</i>)
72	Jenifer	Dudo en lo siguiente, en el anterior era argumento abductivo porque el dato era plausible, sí. Pero, en el momento de hacer la construcción robusta, ya no se duda. Ya ese dato es seguro.
...		
75	Profesora	¿O es inductivo porque establezco una conjetura general?
76	Jenifer	Si es abductivo, también se establece una conjetura. (<i>ArgE5</i>) (<i>Argumento</i>)
77	Profesora	Pero, es que en el primero (parece ser que el cuadrilátero es rectángulo, si tiene diagonales congruentes que se bisecan) y después dije “ahh, entonces cuando se cumple esto se tiene esto” (Para todo cuadrilátero que tiene diagonales congruentes y que se bisecan es rectángulo).
78	Jenifer	El argumento sigue siendo abductivo.

79	Profesora	¿Cuándo es inductivo?
80	Lucía	Cuando a partir de unos datos que se generalizan se crea una conjetura. <i>(ArgE5) (Argumento)</i>
...		
83	Profesora	Es inductivo si estudio muchos (casos). Al estudiar muchos cuadriláteros con esas condiciones establezco eso. Sigue siendo argumento abductivo, pues solo me estoy basando en un cuadrilátero que hice. <i>(ArgE5) (Argumento)</i>

Se evidencia en esta última discusión, la apropiación de nuestra definición de argumento a partir de un ejemplo presentado por la profesora. Además, de cómo identificamos elementos de su estructura y la diferenciación entre los tipos de argumento. Respecto a la relación entre las definiciones y la argumentación, mostramos como a partir del uso de la definición de rectángulo se corroboró que este lo era y, que esto permitió establecer una conjetura.

Por último, la profesora nos cuestionó sobre las siguientes preguntas ¿por qué los textos no ponen como definición la D2? Y ¿por qué ustedes deciden que esa debe ser la definición de rectángulo? Para dar respuestas a estas preguntas nos remitimos al documento de Camargo y Samper (2019). Respecto a la primera pregunta, creemos que D2 es una definición que es producto de la visualización, exploración y construcción de un objeto geométrico *(DefE3) (Definición)*. Además, esta definición depende de varios aspectos: los conocimientos matemáticos de una comunidad específica, el sistema teórico con el que se cuenta y el uso que se le va a dar a esta *(DEfEc1) (Definición)*. Por ejemplo, en relación al uso, decidimos escoger esta definición para que fuera útil en el momento de demostrar que el cuadrilátero es rectángulo *(DefE2) (Definición)*.

La definición de los textos se centra simplemente en asociar un nombre y unos atributos a un conjunto de representaciones gráficas, con el fin de que cualquier persona la pueda comprender *(DefE1) (Definición)*. Por eso, es común ver en los textos la definición de rectángulo como

cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y generalmente vienen acompañada esta con una representación gráfica.

Respecto a la segunda pregunta, consideramos que una de las características de las definiciones es que se escogen de acuerdo al uso que se le va a dar (*DefE2*) (*Definición*). En este caso, escogimos D2 ya que es más operativa, es decir, esta definición nos da atributos que podemos utilizar en la demostración, para justificar argumentos deductivos (*DefE3*) (*Definición*).