

**TRANSFORMACIÓN DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS
SOBRE TAREAS DE ARGUMENTACIÓN: UN EJERCICIO DE ANÁLISIS PROPIO**

CARLOS DAVID GUEVARA BORRÁS

OMAR AUGUSTO MARTÍNEZ DOMÍNGUEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.

2021

**TRANSFORMACIÓN DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS
SOBRE TAREAS DE ARGUMENTACIÓN: UN EJERCICIO DE ANÁLISIS PROPIO**

CARLOS DAVID GUEVARA BORRÁS
OMAR AUGUSTO MARTÍNEZ DOMÍNGUEZ

Trabajo de grado presentado para obtener el título de Magister en Docencia de la Matemática

Directora

Claudia Marcela Vargas Guerrero
Profesora Departamento de Matemáticas
Magister en Docencia de la Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D.C.

2021

DEDICATORIA

A nuestros padres Consuelo, Teresa y Omar quienes con su apoyo y comprensión nos han permitido cumplir una meta más en nuestras vidas. Gracias por inculcar en nosotros la perseverancia, el esfuerzo y la dedicación, frente a los retos que se presentan en el camino.

A nuestras familias, quienes siempre nos acompañaron y motivaron en los momentos difíciles. Sus oraciones, consejos y palabras de aliento nos permitieron nunca perder nuestro horizonte.

Finalmente queremos dedicar esta tesis a la memoria del señor Ernesto Guevara, padre de Carlos, quien con su ejemplo de vida demostró que el esfuerzo y la perseverancia siempre dan frutos. Gracias por ser un apoyo desde el inicio de esta investigación. Sabemos que desde la eternidad está orgulloso de cada uno de los logros de su hijo.

AGRADECIMIENTOS

Nuestro más grande y sincero agradecimiento a la profesora Claudia Marcela Vargas, principal colaboradora durante todo este proceso. Gracias por compartir sus conocimientos y recomendaciones. También, por la dedicación y disposición para acompañarnos en diferentes momentos de nuestro tránsito por la maestría y del desarrollo de este trabajo investigativo.

De igual manera, nuestros agradecimientos a la Universidad Pedagógica Nacional, a la Maestría en Docencia de la Matemática y a nuestros profesores. En especial a los profesores Leonor Camargo Uribe, Óscar Molina Jaimes y Edgar Alberto Guacaneme, por brindarnos sus conocimientos y contribuir a nuestro crecimiento tanto personal como profesional.

Finalmente, agradecemos a aquellos compañeros de la cohorte 2020 - 1 que estuvieron presentes en nuestro trasegar por el programa formativo de la maestría y apoyaron de una u otra manera la elaboración del presente documento.

Contenido

1	Capítulo 1: Planteamiento del problema	3
1.1	Delimitación del Problema.....	3
1.2	Justificación.....	5
1.3	Objetivos	6
1.3.1	Objetivo General	6
1.3.2	Objetivos Específicos	6
1.4	Revisión de Literatura	7
2	Capítulo 2: Marco de Referencia	12
2.1	El Enfoque Ontosemiótico	12
2.2	Modelo del Conocimiento Didáctico – Matemático del Profesor.....	12
2.2.1	Dimensión Matemática	14
2.2.2	Dimensión Didáctica.....	15
2.2.3	Dimensión Meta Didáctico - Matemática	22
3	Capítulo 3: Metodología.....	24
3.1	Perspectiva Investigativa.....	24
3.2	Estrategia Investigativa	25
3.3	Recursos para el Registro de la Información y Datos Investigativos.....	29
3.4	Descripción del Proceso de Análisis de los Datos Investigativos.....	29
3.4.1	Análisis de la Caracterización del Estado del Conocimiento en cada Ciclo.	29
3.4.2	Análisis de la Transformación del Conocimiento	30
4	Capítulo 4: Ciclo 1 de Investigación – Acción.....	31

4.1	Fase 1: Identificación del Problema que dio Lugar al Ciclo	31
4.2	Fase 2: Plan de Acción para Movilizar el Conocimiento	31
4.3	Fase 3: Implementación de Acciones, Recolección de Información y Construcción de Datos Investigativos.....	32
4.4	Fase 4: Proceso de Análisis de los Datos	33
4.4.1	Análisis de datos Ciclo 1	34
5	Capítulo 5: Ciclo 2 de Investigación – Acción.....	52
5.1	Fase 1: Identificación del Problema que dio Lugar al Ciclo	52
5.2	Fase 2: Plan de Acción para Movilizar el Conocimiento	52
5.3	Fase 3: Implementación de Acciones, Recolección de Información y Construcción de Datos Investigativos.....	53
5.4	Fase 4: Proceso de Análisis de los Datos	54
5.4.1	Análisis de datos Ciclo 2.....	54
6	Capítulo 6: Ciclo 3 de Investigación – Acción.....	75
6.1	Fase 1: Identificación del Problema que dio Lugar al Ciclo	75
6.2	Fase 2: Plan de Acción para Movilizar el Conocimiento.....	75
6.3	Fase 3: Implementación de Acciones, Recolección de Información y Construcción de Datos Investigativos.....	77
6.4	Fase 4: Proceso de Análisis de los Datos	77
6.4.1	Análisis de datos Ciclo 3.....	78
7	Capítulo 7: Transformación del Conocimiento Didáctico – Matemático	98
7.1	Origen del Conocimiento	102

7.2	Profundidad	105
7.3	Concisión.....	108
7.4	Impacto en el Discurso	110
7.5	Relación entre Términos	113
8	Capítulo 8: Conclusiones.....	116
9	Referencias	120
10	Anexos	125
10.1	Anexo 1: Base de Datos Ciclo 1	125
10.2	Anexo 2: Textos Narrativos Ciclo 2	157
10.3	Anexo 3: Datos Investigativos.....	167
10.4	Anexo 4: Libreto Sesión 1 Grupo de Estudio sobre Argumentación – Ciclo 2 183	
10.5	Anexo 5: Conjunto de Tareas Ciclo 3	191
10.6	Anexo 6: Implementación Plan de Acción Ciclo 3	203
10.7	Anexo 7: Síntesis de Datos por Asunto y Rotulación	224
10.8	Anexo 8: Síntesis de la Transformación del Conocimiento Didáctico – Matemático	245

Índice de tablas

Tabla 1: Indicadores de la faceta epistémica.	17
Tabla 2: Indicadores de la faceta cognitiva.	18
Tabla 3: Indicadores de la faceta afectiva.....	19
Tabla 4: Indicadores de la faceta interaccional.....	20
Tabla 5: Indicadores de la faceta mediacional.....	21
Tabla 6: Indicadores de la faceta ecológica.	22
Tabla 7: Descripción de los Ciclos de IA implementados en la presente investigación.	28
Tabla 8: Datos sobre argumentación para la faceta epistémica en Estado 0.	35
Tabla 9: Datos sobre tareas para la faceta epistémica en Estado 0.....	36
Tabla 10: Datos sobre argumentación para la faceta epistémica en Estado 1.	38
Tabla 11: Datos sobre tareas para la faceta epistémica en Estado 1.....	40
Tabla 12: Datos sobre tareas de argumentación para la faceta epistémica en Estado 1. .	42
Tabla 13: Datos sobre tareas de argumentación para la faceta cognitiva en Estado 1. ...	43
Tabla 14: Datos sobre tareas para la faceta interaccional en Estado 0.	45
Tabla 15: Datos sobre tareas para la faceta interaccional en Estado 1.	46
Tabla 16: Datos sobre tareas de argumentación para la faceta interaccional en Estado 1.	47
Tabla 17: Datos sobre tareas para la faceta mediacional en Estado 0.	48
Tabla 18: Datos sobre tareas para la faceta mediacional en Estado 1.	48
Tabla 19: Datos sobre argumentación para la faceta ecológica en Estado 0.	50
Tabla 20: Datos sobre tareas para la faceta ecológica en Estado 0.....	50

Tabla 21: Datos sobre argumentación correspondiente al indicador Vocabulario especializado sobre argumentación para la faceta epistémica en Estado de transición 1 al 2.	55
Tabla 22: Datos sobre argumentación correspondiente al indicador Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación para la faceta epistémica en Estado de transición 1 al 2.	59
Tabla 23: Datos sobre argumentación correspondiente al indicador Elementos de un argumento para la faceta epistémica en Estado de transición 1 al 2.	62
Tabla 24: Datos sobre argumentación correspondiente al indicador Vocabulario especializado sobre argumentación para la faceta epistémica en Estado 2.	63
Tabla 25: Datos sobre argumentación correspondiente al indicador Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación para la faceta epistémica en Estado 2. .	66
Tabla 26: Datos sobre argumentación correspondiente al indicador Elementos de un argumento para la faceta epistémica en Estado 2.	71
Tabla 27: Datos sobre tareas para la faceta epistémica en Estado 2.	71
Tabla 28: Datos sobre argumentación para la faceta interaccional en Estado de transición 1 al 2.	72
Tabla 29: Datos sobre argumentación para la faceta interaccional en Estado 2.	73
Tabla 30: Datos sobre tareas para la faceta interaccional en Estado 2.	74
Tabla 31: Datos sobre argumentación para la faceta epistémica en Estado de transición 2 al 3.	79
Tabla 32: Datos sobre tareas para la faceta epistémica en Estado de transición 2 al 3. ..	79
Tabla 33: Datos sobre tareas de argumentación para la faceta epistémica en Estado de transición 2 al 3.	81

Tabla 34: Datos sobre tareas para la faceta epistémica en Estado 3.....	83
Tabla 35: Datos sobre tareas de argumentación para la faceta epistémica en Estado 3. .	88
Tabla 36: Datos sobre tareas para la faceta interaccional en Estado de transición 2 al 3.	91
Tabla 37: Datos sobre tareas de argumentación para la faceta interaccional en Estado de transición 2 al 3.....	91
Tabla 38: Datos sobre tareas para la faceta interaccional en Estado 3.	92
Tabla 39: Datos sobre tareas de argumentación para la faceta interaccional en Estado 3.	93
Tabla 40: Datos sobre tareas para la faceta mediacional en Estado de transición 2 al 3.	95
Tabla 41: Datos sobre tareas para la faceta mediacional en Estado 3.	96
Tabla 42: Síntesis de datos investigativos.	98
Tabla 43: Conformación de categorías a partir de rótulos.....	100
Tabla 44: Definición de categorías y subcategorías emergentes.	101
Tabla 45: Conformación de Estados para la caracterización de la transformación.	102

Índice de figuras

Figura 1: Conocimiento Didáctico - Matemático del profesor. Tomado de Pino-Fan y Godino (2015).....	14
Figura 2: Representación de las fases y ciclos de la IA. Fuente: Propia.	27
Figura 3: Datos correspondientes a la faceta epistémica para Ciclo 1.....	35
Figura 4: Datos correspondientes a la faceta interaccional para Ciclo 1.....	44
Figura 5: Datos correspondientes a la faceta mediacional para Ciclo 1.....	48
Figura 6: Datos correspondientes a la faceta ecológica para Ciclo 1.	49
Figura 7: Plan de acción del Ciclo 2 (Grupo de estudio).....	52
Figura 8: Datos correspondientes a la faceta epistémica para Ciclo 2.	54
Figura 9: Vínculos entre los términos del vocabulario especializado sobre argumentación.....	59
Figura 10: Datos correspondientes a la faceta interaccional para Ciclo 2.....	72
Figura 11: Plan de acción Ciclo 3.....	75
Figura 12: Datos correspondientes a la faceta epistémica para Ciclo 3.	78
Figura 13: Datos correspondientes a la faceta interaccional para Ciclo 3.....	90
Figura 14: Datos correspondientes a la faceta mediacional para Ciclo 3.....	95
Figura 15: Patrón de transformación para la categoría "Origen del conocimiento".....	103
Figura 16: Patrón de transformación para la categoría "Profundidad".....	105
Figura 17: Patrón de transformación para la categoría "Concisión".	108
Figura 18: Patrón de transformación para la categoría "Impacto en el discurso".	111
Figura 19: Patrón de transformación para la categoría "Relación de términos".....	114

Introducción

En este documento presentamos el reporte de una investigación cuyo propósito es caracterizar la transformación del conocimiento didáctico – matemático de los dos autores de esta tesis, respecto al diseño de tareas de argumentación, cuando desarrollan acciones tendientes a indagar sobre el conocimiento que soporta su quehacer docente. La misma la desarrollamos como requisito para optar por el título de Magister en Docencia de la Matemática de la Maestría en Docencia de la Matemática (MDM) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN). Adicionalmente, estuvo vinculada a una propuesta de formación liderada por el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (AEG) que busca que los profesores-estudiantes indaguen, describan y transformen su conocimiento acerca del diseño de tareas de argumentación apoyadas con Entornos de Geometría Dinámica (EGD).

El reporte de investigación incluye un primer capítulo en el que planteamos una problemática fundamentada en dudas de los dos autores de este documento sobre aspectos específicos de su conocimiento, y el impacto de este en su práctica educativa. También presentamos una problemática similar en el campo de la Educación Matemática. Basándonos en autores como Pino-Fan, Godino y Font (2013), Solar y Deulofeu (2016), Jiménez y Carreño (2018) y Camargo, Samper y Perry (2006), sustentamos la importancia de ahondar en el conocimiento y habilidades del profesor, la relevancia de la argumentación y el potencial de los EGD para el diseño de tareas.

En Capítulo 2, tomamos como referente el modelo del Conocimiento Didáctico – Matemático del profesor (CDM), enmarcado en el Enfoque Ontosemiótico, para determinar los componentes del conocimiento del profesor de matemáticas, involucrados en los procesos de enseñanza – aprendizaje. Allí proponemos un conjunto de indicadores ligados al CDM, que

permiten la caracterización del conocimiento del profesor respecto a argumentación, tareas y tareas de argumentación.

En el Capítulo 3, describimos la metodología que guió la investigación y la estrategia investigativa utilizada (Investigación – Acción). Esta nos permite identificar problemáticas específicas y momentos temporales del conocimiento de los profesores. De esta manera, logramos evidenciar características del conocimiento, a la luz de los indicadores propuestos. En los Capítulos 4, 5 y 6, presentamos cada uno de los ciclos investigativos aplicados y el correspondiente análisis de los datos. Este se realiza para cada uno de los datos clasificados en las facetas de la dimensión didáctica del CDM, los estados del conocimiento detectados y los indicadores personalizados del CDM.

Finalmente, en el Capítulo 7 mostramos la caracterización de la transformación del conocimiento didáctico – matemático de los profesores, por medio de la identificación de categorías y subcategorías emergentes. El Capítulo 8 presenta las conclusiones derivadas de cada uno de los objetivos específicos propuestos para la presente investigación.

1 Capítulo 1: Planteamiento del problema

1.1 Delimitación del Problema

Los dos autores de esta tesis, nos hemos desempeñado como profesores de matemáticas en instituciones de educación básica y media por aproximadamente diez años. A su vez, los dos tenemos una formación inicial de pregrado como profesores, aunque uno de nosotros es Licenciado en Matemáticas y otro es Licenciado en Electrónica. A pesar de ello, antes de iniciar el tránsito por la Maestría en Docencia de la Matemática (MDM) ambos teníamos una inconformidad con las clases de matemáticas que liderábamos, y en particular con las de geometría. En nuestras clases era común estructurar el currículo por contenidos y no por procesos. Además, solíamos enfocarnos en la enseñanza de procedimientos de construcción de figuras geométricas con regla y compás, buscando que ello contribuyera a promover el significado de algunos objetos geométricos. A veces también introducíamos teoremas como verdades irrefutables, con la esperanza de que los mismos se pudiesen convertir en una herramienta para que nuestros estudiantes argumentaran proposiciones o resolvieran problemas geométricos. No obstante, observábamos que este tipo de prácticas llevaba a una problemática identificada también por Harel y Sowder (1998), Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron y Winicki-Landman (2012), que consiste en introducir conceptos matemáticos a las clases sin desarrollar acciones tendientes a que los estudiantes identifiquen la necesidad de aprender lo que se les pretende enseñar.

Adicionalmente, aunque durante nuestro proceso de formación inicial como profesores tuvimos experiencias que involucraban la solución de tareas en las cuales se utilizaba software especializado de matemáticas, el uso que le dábamos a este recurso era limitado. En los pocos casos que lo usamos, lo empleábamos para ganar velocidad, exactitud y confiabilidad en la

realización de cálculos, trazos, dibujos o representaciones. Esto conllevaba a omitir el verdadero potencial de estos en el contexto educativo, que tiene que ver con hacer visibles para los estudiantes las matemáticas experimentales (Hanna y De Villiers, 2008). Así, teniendo en cuenta que el uso de software para promover aprendizajes matemáticos no solo concierne al diseño de la tecnología digital involucrada, sino también al diseño de las tareas y las actividades involucradas (Drijvers, 2013), percibíamos que el conocimiento construido a partir de nuestra experiencia no era suficiente para generar tareas matemáticas que les permitieran a nuestros estudiantes “hacer matemáticas” con el apoyo de este tipo de tecnología.

Al identificar esta preocupación inicial, y buscar elementos para cambiar nuestras prácticas y formas de actuar, nos acercamos a la MDM. Al ingresar, el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (ÆG) propuso que el trabajo que se realizará en nuestra cohorte estuviera enfocado en asuntos del conocimiento del profesor de matemáticas para el diseño de tareas que promuevan la argumentación usando entornos de geometría dinámica (EGD). Esto conllevó a reformular nuestras preocupaciones previas al ingreso a la maestría, pues empezamos a asumir que el mal uso de las tecnologías digitales en nuestras prácticas o la poca pertinencia de las tareas que diseñábamos o seleccionábamos para favorecer procesos como la argumentación, podría estar relacionado con el conocimiento que como profesores teníamos.

Esta problemática es compartida por Carson (2010; citado por Chapman, 2013), quien indica que una de las razones que le impide a un profesor transformar sus prácticas, es no tener un conocimiento especializado sobre asuntos específicos, como por ejemplo, las tareas que promuevan la argumentación. Además, indica que involucrar a los profesores en tareas que implican una rica actividad matemática, puede no ser suficiente para que desarrollen un conocimiento especializado para el diseño de tareas matemáticas. Así, la experiencia vivida al

involucrarse en este tipo de tareas permite al profesor comprender aspectos aislados del conocimiento, pero no todos los componentes que posibilitan un impacto significativo en el aula. En relación con lo anterior, Simon, Erduran y Osborne (2006) afirman que la comprensión inicial de la argumentación por parte de los profesores es lo que determina su desarrollo. La capacidad básica de cambio de los profesores puede depender de su conocimiento y comprensión existente.

Buscando estrategias que nos ayuden a acercarnos a nuestra realidad, su análisis y posible solución, nos preguntamos: ¿Qué cambios se evidencian en el conocimiento didáctico – matemático de dos profesores de matemáticas, respecto al diseño de tareas que favorecen la argumentación, cuando desarrollan acciones tendientes a indagar sobre el conocimiento que soporta su quehacer docente?

1.2 Justificación

Desde hace un poco más de tres décadas, el interés por el estudio de los conocimientos que un profesor requiere para la enseñanza idónea de tópicos concretos de las matemáticas ha tomado cada vez más relevancia en el campo de la educación del profesor de matemáticas. Esto se ve reflejado en el aumento de investigaciones relacionadas con este asunto, por ejemplo, las incluidas en el handbook *The International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), o revistas especializadas como el *Journal of Mathematics Teacher Education*. La razón principal es que el desarrollo del pensamiento y competencias matemáticas de los estudiantes depende esencialmente de los conocimientos y habilidades de sus profesores (Pino-Fan, Godino y Font, 2013).

Al iniciar esta investigación, nuestro mayor interés era mejorar nuestras prácticas educativas. En el desarrollo de esta tomamos como hipótesis que una forma de lograr esto es mejorando el conocimiento didáctico – matemático que sustenta dichas prácticas. Por ello, en

esta investigación pretendemos caracterizar nuestro conocimiento sobre el diseño de tareas y la argumentación, elementos que hacen parte de la práctica pedagógica de un profesor de matemáticas. La decisión de poner el foco de la investigación en nosotros como profesores, radica en el reconocimiento del rol determinante que tiene el maestro para promover la argumentación (Solar y Deulofeu, 2016; Jiménez y Carreño, 2018; y Camargo, Samper y Perry , 2006).

A partir de lo anterior, vemos conveniente mostrar a la comunidad de educadores matemáticos, una experiencia en la cual se caracterice el conocimiento del profesor y su transformación. En nuestro caso, los asuntos en los cuales centramos nuestra atención son los conocimientos referentes a argumentación, diseño de tareas y tareas de argumentación. Por último, la presente investigación, podría aportar insumos, sugerencias y literatura, a la comunidad de educadores matemáticos con intereses relacionados.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Caracterizar la transformación del conocimiento didáctico – matemático de dos profesores, respecto al diseño de tareas que favorecen la argumentación, cuando desarrollan acciones tendientes a indagar sobre el conocimiento que soporta su quehacer docente.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Formular indicadores que particularicen la dimensión didáctica del modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) propuesto por el Enfoque Ontosemiótico (EOS), buscando ubicar y categorizar datos que aludan a argumentación, diseño de tareas y tareas que promueven la argumentación.

- Diseñar e implementar planes de acción tendientes a mejorar el conocimiento didáctico – matemático de los profesores, en lo que respecta a argumentación, tareas y tareas de argumentación.
- Recolectar y construir insumos, textos narrativos, transcripciones y diversos documentos que permitan identificar momentos temporales del conocimiento didáctico – matemático de dos profesores, en los cuales se expliciten conocimientos previos, posteriores o acciones que posibilitaron una transición entre dichos conocimientos.
- Caracterizar el conocimiento didáctico – matemático en momentos temporales específicos, utilizando los indicadores personalizados del CDM.
- Analizar los datos por medio de la estrategia de microanálisis propuesta por Strauss y Corbin (2002), para identificar categorías y subcategorías emergentes que permitan caracterizar la transformación del conocimiento didáctico – matemático de dos profesores en lo que respecta a argumentación, tareas y tareas de argumentación.
- Caracterizar la transformación del conocimiento didáctico – matemático a través de patrones procedentes de la implementación de las categorías y subcategorías definidas y aplicadas en los datos seleccionados para tal finalidad.

1.4 Revisión de Literatura

En este apartado, presentamos una descripción de literatura e investigaciones que han abordado asuntos afines a nuestra investigación. Los siguientes párrafos presentan, de forma sucinta, referentes investigativos sobre diseño de tareas, argumentación y tareas que promueven la argumentación. La revisión de la literatura la realizamos en documentos referenciados en los espacios académicos de la maestría, en bases de datos académicas (Academia, Scielo, Springer,

Google Scholar) y efectuando un rastreo bibliográfico de las investigaciones elaboradas por el grupo de investigación ÆG. El criterio de selección consistió en que los textos incluyeran mínimo tres palabras claves sobre los aspectos incluidos directamente en la pregunta de investigación.

En lo que corresponde al asunto de diseño de tareas, tomamos como referente a Triana y Zambrano (2016). Esta investigación se desarrolló en el marco de la Maestría en Docencia de la Matemática, en la Universidad Pedagógica Nacional. Este trabajo propone una adaptación de una secuencia de tareas para estudiantes de séptimo grado de un colegio de la ciudad de Bogotá. Dicha secuencia fue diseñada por el grupo de investigación ÆG, para el aula escolar, en torno a relaciones y propiedades de un objeto geométrico. El objetivo general de este estudio era caracterizar el tipo de tareas matemáticas que propiciaran el uso experto de elementos teóricos geométricos en la argumentación matemática. El diseño metodológico estaba orientado por algunas características de un experimento de enseñanza, pero con el objetivo de analizar los argumentos generados durante la resolución de las tareas y no de presentar una secuencia didáctica. Para el análisis de los datos se recolectó información de la producción de argumentos en la resolución de nueve tareas por parte de ocho estudiantes. Las tareas que se desarrollaron en la secuencia se analizaron mediante dos criterios: i) de acuerdo con la estructura y ii) con el objetivo de la tarea, que está relacionado con los procesos matemáticos que con ella se quieren desarrollar. Los argumentos generados se clasificaron según su estructura, la forma de su estructura y la naturaleza de la garantía.

Las conclusiones obtenidas Triana y Zambrano (2016) fueron: i) se debe propiciar la exploración de diversas representaciones de la imagen del concepto, y el uso de la definición del concepto en diferentes contextos, para favorecer el proceso de conceptualización y el uso experto

de dicho elemento teórico; ii) se debe tener en cuenta que es mejor proponer inicialmente tareas de metas cerradas, mientras los estudiantes van adquiriendo elementos teóricos que les permitan idear estrategias de solución, utilizar garantías legítimas en sus argumentos y manejar con destreza los recursos utilizados en la clase de geometría; iii) el proceso de conformar conjuntamente un sistema teórico local, permite que los estudiantes vayan adquiriendo elementos que pueden usar como garantías en sus argumentos.

Esta investigación nos permite acercarnos a una caracterización de tareas de geometría escolar, nos muestra una vía de relación entre de los procesos matemáticos de exploración y argumentación, y nos sugiere una tipificación de argumentos emergidos en la actividad. Adicionalmente, nos posibilita comprender que el diseño de una tarea de argumentación no puede estar desligada de un sistema teórico local construido con los estudiantes y los acuerdos socio-matemáticos de la clase.

En lo que respecta a la argumentación y el uso de programas de geometría dinámica, encontramos un trabajo realizado en el marco de un proyecto de innovación curricular de la línea de geometría, desarrollado por Camargo, Samper y Perry (2006) con estudiantes de segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas. El objetivo de la investigación era brindar un espacio y una oportunidad de aprendizaje de la demostración en Geometría Euclidiana para los estudiantes, desde lo disciplinar y lo pedagógico. En el documento se sugiere una concepción amplia de la actividad demostrativa, que incluye acciones propias de la justificación en matemáticas, entendiendo estas, como acciones heurísticas propias como la visualización y la exploración, enfocadas en la producción de conjeturas y la verificación de estas. El trabajo de Camargo et al., (2006) se realizó por medio del planteamiento de algunas situaciones a los estudiantes, buscando entrelazar los procesos de visualización, exploración, formulación de

conjeturas y verificación con los productos de la explicación, la prueba y la demostración formal, en el marco de la actividad demostrativa. A partir del desarrollo de los problemas por parte de los estudiantes, por medio de exploraciones mediadas por la función arrastre de un programa de geometría dinámica (Cabri), se pudo vislumbrar el rico contexto que producen los EGD. En un sentido más amplio se puede decir que la exploración permite a los estudiantes observar invariantes en las construcciones; y como a partir de estas, y construcciones auxiliares, ellos pueden llegar a la verificación de conjeturas formuladas.

Camargo et al., (2006) concluyeron que no se promueve la práctica de la justificación con el simple uso de un programa de geometría dinámica. Para aprovechar el potencial del software es indispensable el diseño de situaciones de aprendizaje, gestionadas por el profesor, cuya finalidad sea la práctica de la justificación, la elaboración de un sistema teórico local y la conformación de una comunidad de práctica de indagación. Además de esto, el profesor debe proponerse la construcción y socialización de normas socio-matemáticas para la actividad en la clase, en donde se establezcan los principios para la elaboración y acogimiento de enunciados en el sistema local y los métodos de validación que se usarán.

En lo concerniente a tareas que promueven la argumentación, se tiene el trabajo realizado por Molina y Samper (2019) en el grupo de investigación ÆG de la UPN. Dicha investigación se desarrolló en la última década, en el marco de las actividades realizadas por estudiantes de primer semestre del espacio académico de Geometría Plana, buscando una innovación en programas de formación inicial de profesores de matemáticas. El trabajo realizado tiene como objetivo encontrar un entorno favorable para aprender a demostrar en geometría, a partir de problemas abiertos de conjeturación. Lo anterior, se desarrolla como investigación de diseño, por medio de la cual se aplican tres tipos de problemas abiertos, clasificados en problemas de

búsqueda del consecuente, problemas de búsqueda del antecedente y problemas de determinación de dependencia. Cada tipo de problema podría originar en los estudiantes diversos tipos de argumentos, los cuales, se analizaron para evidenciar de qué manera cada tipo de problema provoca la producción de argumentos. El análisis de los argumentos emergidos se realizó a la luz del modelo de Toulmin, para la representación de argumentos formales e informales.

A partir de los resultados, Molina y Samper (2019) resaltan la importancia que tienen aspectos tales como: i) el tipo de problema propuesto, pues provoca la generación de ciertos tipos de argumentos durante el proceso de resolución; ii) la metodología, pues puede contribuir a la generación de argumentos; iii) el uso de EGD, debido a que posibilita una mayor riqueza en la exploración de las situaciones; específicamente, los tipos de arrastre libre y guiado estuvieron presentes en todos los tipos de problemas, y fueron, principalmente, el soporte para argumentos inductivos; iv) el uso del arrastre mantenido, como soporte para los argumentos abductivos. Molina y Samper (2019) muestran como diversos tipos de argumentos pueden surgir a partir del diseño de una tarea con problemas abiertos de conjeturación.

Respecto al conocimiento del profesor sobre el diseño de tareas, mencionamos una investigación de realizada por Chapman (2013), quien resalta la importancia del conocimiento que debe tener un profesor para diseñar tareas a sus estudiantes, con el fin de lograr estimular la actividad matemática y favorecer el aprendizaje significativo. Chapman indica que es necesario prestar atención a los conocimientos y creencias del profesor respecto al diseño de tareas, porque estas determinan el tipo de tareas que propone el profesor.

2 Capítulo 2: Marco de Referencia

2.1 El Enfoque Ontosemiótico

Durante las últimas décadas se han planteado diversos modelos del conocimiento del profesor. Los trabajos aportados desde la pedagogía por Shulman (1986); la ampliación del primer modelo planteado (Shulman, 1987); el “*modelo del conocimiento del profesor*” desarrollado por Grossman (1990) y; la noción de “*Conocimiento Matemático para la Enseñanza*” (MKT, por sus siglas en inglés) desarrollada por Hill, Ball, y Schilling (2008) (v.g.). Cada uno de estos modelos del conocimiento del profesor, corresponde a diferentes concepciones sobre el conocimiento general o específico que un profesor debería tener para la enseñanza. Según Godino (2000), la variedad de enfoques, teorías y métodos de la Didáctica de la Matemática está reclamando la realización de investigaciones que pongan un cierto orden y estructura en el panorama del componente científico de este campo.

En correspondencia con lo anterior, y atendiendo a la necesidad que él presenta, surge en el seno del campo el Enfoque Ontosemiótico (EOS). El EOS es un marco teórico que tiene como propósito articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Este marco teórico adquiere una perspectiva global, en donde se toman en cuenta las facetas del conocimiento implicadas en la enseñanza idónea de las matemáticas, así como las interacciones presentes entre estas.

2.2 Modelo del Conocimiento Didáctico – Matemático del Profesor

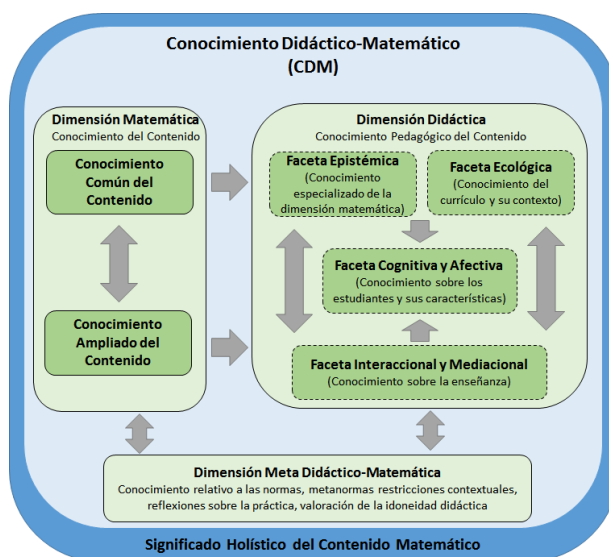
El origen del modelo del Conocimiento Didáctico – Matemático del profesor (CDM) se ubica en la necesidad de articular las diversas aproximaciones y modelos usados en la investigación en Educación Matemática sobre las matemáticas, su enseñanza y la caracterización del conocimiento del profesor de matemáticas. Partiendo de lo anterior, el EOS, por medio de un

lenguaje globalizado, aplica aspectos antropológicos, socioculturales y semióticos de su marco teórico para formular el CDM. Este modelo toma en consideración: 1) la contribución y desarrollo del marco teórico del EOS a la cognición y a la instrucción matemática, el cual ha sido desarrollado en varias investigaciones (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2009; Godino, 2014); 2) el desarrollo y contribución de la investigación de Pino-Fan y Godino (2015) donde se presentan los fundamentos y bases de CDM; 3) los hallazgos y aportes de los diversos modelos sobre el conocimiento del profesor que existen actualmente en el campo de investigación de la Educación Matemática.

En esta investigación realizamos una adaptación del modelo de acuerdo con las necesidades específicas de esta. Inicialmente, el CDM permite una caracterización del conocimiento del profesor en un momento temporal específico sobre objetos matemáticos. La adaptación la realizamos para poder caracterizar el conocimiento sobre argumentación, diseño de tareas y tareas de argumentación. No obstante, la adaptación por sí sola no nos permite usar el modelo para dar cuenta de la transformación. De allí, que del modelo surjan unas categorías y subcategorías emergentes para la caracterización del conocimiento en cada estado del conocimiento. En otras palabras, buscamos identificar qué cambia en el conocimiento del profesor, cómo cambia y por qué cambia. Esta adaptación se irá mostrando a medida que se vayan presentando las generalidades del CDM.

El CDM interpreta y caracteriza el conocimiento del profesor desde tres dimensiones: dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión meta didáctica matemática. En la Figura 1 mostramos cada una de las dimensiones y sus subcategorías / facetas que las componen. Estas dimensiones las abordaremos en los siguientes párrafos, dando claridad de sus aspectos específicos, así como de la adaptación que se usará en nuestra investigación.

Figura 1: Conocimiento Didáctico - Matemático del profesor. Tomado de Pino-Fan y Godino (2015).



2.2.1 Dimensión Matemática

La dimensión matemática hace referencia al conocimiento que le permite al profesor resolver un problema o tarea matemática que se implementa en el aula y vincularlo con objetos matemáticos que posteriormente se pueden encontrar en el currículo matemático escolar. Incluye dos subcategorías de conocimiento: conocimiento de contenido común y conocimiento de contenido extendido. La primera subcategoría es el conocimiento de un objeto matemático específico, que se considera suficiente para resolver problemas y tareas propuestas en el currículo de matemáticas y en los libros de texto de un determinado nivel educativo; es un conocimiento compartido entre el profesor y los alumnos. La segunda subcategoría hace referencia al conocimiento que debe tener el profesor sobre las nociones matemáticas que, tomando como referencia las nociones matemáticas que se están estudiando en un momento determinado, se adelantan en el currículo del nivel educativo en cuestión o en el siguiente nivel. El conocimiento ampliado del contenido proporciona al profesor los fundamentos matemáticos

necesarios para sugerir nuevos desafíos matemáticos en el aula, vincular un determinado objeto matemático en estudio con otras nociones matemáticas y guiar a los estudiantes al estudio de las nociones matemáticas posteriores a la noción que se está estudiando.

Según Pino-Fan y Godino (2015), estas dos subcategorías que incluyen la dimensión matemática del CDM, son reinterpretaciones tanto del Conocimiento Común del Contenido (CCK) como del Conocimiento en el Horizonte Matemático (Hill, Ball y Schilling, 2008). Según estos autores, esta interpretación se basa en la necesidad de postular las bases de los conocimientos que debe poseer un profesor de matemáticas sobre temas específicos a ser enseñados en algunos grados escolares específicos.

Para fines de esta investigación, a la dimensión matemática no le realizamos una adaptación, porque esta dimensión no se va a utilizar en nuestro estudio. Lo anterior, lo fundamentamos en los siguientes argumentos:

1. La dimensión matemática hace referencia a los objetos matemáticos que se ponen en juego para la solución de un problema. Así como las relaciones existentes entre estos objetos.
2. Nuestra investigación, no se centra en objetos matemáticos específicos, sino en la argumentación y el diseño de tareas. Estos asuntos no hacen parte de un conocimiento común ni ampliado del contenido; y por ello no hace parte de la dimensión matemática.

2.2.2 Dimensión Didáctica

La dimensión matemática del CDM, que permite al profesor resolver tareas y problemas matemáticos, no es suficiente para la práctica de la docencia. Por ejemplo, el conocimiento de algunas características que afectan la planificación y gestión de clases de una asignatura específica deben ser tomados como parte del conocimiento que debería tener un profesor de matemáticas. En este sentido, la dimensión didáctica del CDM considera seis facetas (Pino-Fan y

Godino, 2015). En lo que sigue, presentamos cada una de estas facetas y los indicadores que nos permiten la particularización que mencionamos con anterioridad.

2.2.2.1 Faceta Epistémica.

Hace referencia al conocimiento especializado de la dimensión matemática. El profesor, además de las matemáticas que le permiten resolver problemas que le exigen movilizar su conocimiento común y ampliado, debe tener conocimientos matemáticos “configurados” para la enseñanza. En otras palabras, el profesor debe ser capaz de: movilizar varias representaciones de un objeto matemático; resolver una tarea a través de distintos procedimientos; vincular objetos matemáticos con otros objetos matemáticos enseñados en un determinado nivel educativo o en niveles anteriores o futuros; comprender y movilizar la diversidad de significados parciales para un solo objeto matemático, que son parte del significado holístico de dicho objeto (Pino-Fan, Godino y Font, 2011) para brindar varias justificaciones y argumentaciones; e identificar el conocimiento en juego durante el proceso de resolución de una tarea matemática.

Las características del conocimiento enmarcado en esta faceta, nos posibilita resumir el conocimiento del profesor en los siguientes cuestionamientos: ¿Además de la solución propuesta, existe otra forma de resolver la tarea?, ¿Cómo explicarías la solución de la tarea a un estudiante que no ha logrado solucionarla?, ¿Qué conocimientos se ponen en juego al momento de abordar la tarea? Hacemos la claridad de que, el conocimiento que se presenta se relaciona con objetos matemáticos. En correspondencia con lo anterior, y para esta investigación, realizamos una adaptación por medio de indicadores para identificar el conocimiento didáctico – matemático del profesor sobre argumentación, tareas y tareas de argumentación, que no son entendidos como objetos matemáticos. La conformación de los indicadores que presentamos en la Tabla 1, la realizamos por medio de un paralelo entre las preguntas presentadas con anterioridad y preguntas

que se enfocan en los objetos que abordamos en esta investigación. Algunas de estas fueron como las que siguen: ¿Qué vocabulario especializado se involucra cuando se abordan procesos de argumentación o la solución de una tarea?, ¿Qué tipos de argumentación se ponen en juego para la solución de una tarea?, ¿Qué tipos de tareas puedo aplicar para favorecer la argumentación?, ¿Qué elementos componen un argumento o una tarea?

Tabla 1: Indicadores de la faceta epistémica.

Indicadores	
<i>Argumentación</i>	<i>Tareas</i>
<ul style="list-style-type: none"> • Vocabulario especializado sobre argumentación (argumentación, argumento, discurso, expresión discursiva, práctica, entre otros). • Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación (explicación, justificación, razonamiento, validación, demostración). • Tipos de argumentos. • Importancia de un argumento. • Elementos de un argumento. • Representaciones de argumentos. • Criterios para identificar argumentos o parte de estos en expresiones discursivas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Vocabulario especializado sobre tareas. • Tipos de tareas. • Importancia del diseño de una tarea. • Elementos de la tarea. • Vínculos entre los elementos de una tarea. • Procesos involucrados en la solución de una tarea.
Tareas de argumentación	
<ul style="list-style-type: none"> • Tareas que favorecen la argumentación. • Procesos involucrados en una tarea que favorece la argumentación. • Tipos de problemas y su relación con los tipos de argumentos. 	

2.2.2.2 Faceta Cognitiva.

Esta faceta se refiere al conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes. Esta subcategoría considera los conocimientos necesarios para 'reflejar y evaluar' la proximidad o grado de ajuste de los significados personales (conocimiento de los estudiantes) con respecto a los significados institucionales (conocimiento del punto de vista del centro educativo). Para ello, el docente debe ser capaz de prever (durante la etapa de planificación / diseño) y probar (durante la etapa de implementación), a partir de los trabajos de los estudiantes, o trabajos esperados, posibles respuestas a un determinado problema, conceptos erróneos, conflictos o errores que surgen del proceso de resolución del problema, vínculos (matemáticamente correctos o

incorrectos) entre el objeto matemático que se está estudiando y otros objetos matemáticos que se requieren para resolver el problema.

La faceta cognitiva nos permite resolver preguntas del tipo: ¿Qué tipo de respuestas se esperan de los estudiantes?, ¿Cuáles podrían ser las posibles dificultades y errores que los estudiantes tendrían al abordar una tarea? En la Tabla 2 hacemos referencia a la adaptación de esta faceta para la presente investigación, en lo que corresponde al conocimiento didáctico – matemático sobre tareas, argumentación y tareas que promueven la argumentación. Esta adaptación contribuye a resolver preguntas del tipo: ¿Qué dificultades, errores y obstáculos podrían tener los estudiantes al momento de argumentar o abordar una tarea?, ¿Cuáles podrían ser las posibles concepciones erróneas de los estudiantes?, ¿Cómo podría emerger un argumento de la actividad de los estudiantes?

Tabla 2: Indicadores de la faceta cognitiva.

Indicadores	
<i>Argumentación</i>	<i>Tareas</i>
<ul style="list-style-type: none"> • Dificultades, errores y obstáculos de los estudiantes al momento de argumentar. • Identificación errónea de un dato, una garantía o una aserción por parte de los estudiantes. 	<ul style="list-style-type: none"> • Dificultades, errores y obstáculos de los estudiantes al momento de abordar una tarea. • Concepciones erróneas de los estudiantes sobre los conceptos involucrado en la tarea. • Formas esperadas de abordar una tarea por parte de los estudiantes.
Tareas de argumentación	
<ul style="list-style-type: none"> • Surgimiento de un tipo argumento a partir de la actividad desarrollada por el estudiante. • Actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea, con respecto al argumento esperado. 	

2.2.2.3 Faceta Afectiva.

Esta faceta hace referencia al conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales y conductuales de los estudiantes. Se trata de los conocimientos necesarios para comprender y afrontar los cambios de humor de los estudiantes, los aspectos que los motivan a resolver o no un determinado problema. En general, se refiere al conocimiento que ayuda a describir las experiencias y sensaciones de los estudiantes en una clase específica o con un determinado problema matemático, en un nivel educativo específico. Las facetas afectiva y cognitiva brindan

al profesor un buen acercamiento y comprensión a la forma de pensar de los estudiantes.

Podríamos afirmar, que la faceta afectiva complementa a la faceta cognitiva.

La faceta afectiva nos permite solucionar preguntas del tipo: ¿Cómo motivarías a un estudiante que no ha logrado solucionar un problema? Nuestra adaptación (Tabla 3) se basa en indicadores del conocimiento del profesor para abordar experiencias y sensaciones de los estudiantes, en lo que respecta a los asuntos específicos nombrados en las facetas anteriores. En este orden de ideas, buscamos solucionar preguntas como ¿Cómo se puede lograr que un estudiante sea participativo en la solución de una tarea?

Tabla 3: Indicadores de la faceta afectiva.

Indicadores	
<i>Argumentación</i>	<i>Tareas</i>
<ul style="list-style-type: none"> • Acciones del profesor tendientes a la conformación de la comunidad donde se desarrolla la práctica. 	<ul style="list-style-type: none"> • Diferentes tipos de tarea que hacen que estudiantes poco participativos, sean participes de la clase. • Impacto de una tarea en como un estudiante se percibe en la clase.
Tareas de argumentación	
<ul style="list-style-type: none"> • Acciones del profesor para que un estudiante sea parte activa de la comunidad. 	

2.2.2.4 Faceta Interaccional.

Esta faceta es la encargada del estudio de las características necesarias para gestionar adecuadamente el aprendizaje de los estudiantes en temas específicos de matemáticas. El CDM ha considerado a las interacciones como un componente fundamental en el proceso de aprendizaje y enseñanza. En este sentido, y teniendo en cuenta las ideas de Schoenfeld y Kilpatrick (2008) sobre la construcción de relaciones que apoyen el proceso de aprendizaje, la faceta interaccional se refiere al conocimiento de las interacciones que ocurren dentro de un aula. Esta subcategoría involucra los conocimientos requeridos para prever, implementar y evaluar secuencias de interacción, entre los agentes que participan del proceso de enseñanza y aprendizaje, orientado a la fijación y negociación de significados (aprendizaje) de los estudiantes.

La faceta interaccional permite responder preguntas del tipo: ¿Qué estrategias efectuarías para aplicar una tarea con tus estudiantes?, ¿Cuáles serían las interacciones entre profesor, estudiantes y recursos, que podrían suceder cuando se soluciona una tarea?, ¿De qué manera podrías guiar las posibles interacciones presentes en el aula? La adaptación realizada a esta faceta está enfocada en indicadores del conocimiento del profesor para las diversas interacciones que se suscitan en el aula (profesor – estudiante, estudiante – estudiante, estudiante – recurso, profesor – recurso – estudiante). Con esta, las preguntas que podríamos resolver son del tipo: ¿Qué tipo de interacciones se presentan dentro del aula que promuevan la argumentación o permitan la solución de una tarea?, ¿Qué interacciones permiten superar errores, obstáculos o dificultades durante el proceso de argumentación o el desarrollo de una tarea?, ¿Cuáles son las funciones de las interacciones durante el surgimiento de un argumento o el desarrollo de una tarea? Los indicadores orientados a argumentación, tareas y tareas de argumentación las presentamos en la Tabla 4.

Tabla 4: Indicadores de la faceta interaccional.

Indicadores	
<i>Argumentación</i>	<i>Tareas</i>
<ul style="list-style-type: none"> • Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que promueven la argumentación. • Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase tendientes a superar un error, obstáculo o dificultad con respecto a la argumentación. • Función de las interacciones durante el surgimiento de un argumento. 	<ul style="list-style-type: none"> • Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que permiten abordar una tarea. • Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase tendientes a superar un error, obstáculo o dificultad con respecto al desarrollo de una tarea. • Impacto de una tarea en el rol del estudiante en el aula. • Función de las interacciones durante el desarrollo de una tarea.
Tareas de argumentación	
<ul style="list-style-type: none"> • Interacciones que favorecen la argumentación en la actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea. 	

2.2.2.5 Faceta Mediacional.

En relación con los recursos y medios utilizados para gestionar el aprendizaje, los modelos propuestos por Shulman (1987) y Grossman (1990) consideran el conocimiento de los materiales del aula como parte del conocimiento curricular. No obstante, debido a las tendencias

actuales del currículo de matemáticas, estos adquieren un papel importante en la organización y gestión del aprendizaje. Por esta razón, la faceta mediacional se refiere al conocimiento de los recursos y medios que pueden favorecer el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Se trata de los conocimientos que debe tener un docente para valorar la pertinencia del uso de materiales y recursos tecnológicos para favorecer el aprendizaje de un objeto matemático específico, y también la asignación de tiempo para las diversas acciones y procesos de aprendizaje (Pino-Fan y Godino, 2015).

En lo que respecta a esta faceta, el conocimiento del profesor permite solucionar preguntas del tipo: ¿Qué recursos podrías usar para resolver una tarea?, ¿Cuánto tiempo le asignarías a cada una de las acciones que permiten la solución de una tarea? En la Tabla 5 exhibimos los indicadores que describen la adaptación de la faceta mediacional para el presente trabajo de investigación. Con estos indicadores buscamos resolver preguntas del tipo: ¿Cuál es el impacto de los materiales y recursos en el proceso argumentación?, ¿Cuál es la relación entre los tiempos y las acciones asociadas a la argumentación que realizan los estudiantes?

Tabla 5: Indicadores de la faceta mediacional.

Indicadores	
<i>Argumentación</i>	<i>Tareas</i>
<ul style="list-style-type: none"> • Uso y pertinencia de los materiales y recursos para promover la argumentación. • Impacto de los materiales y recursos en el proceso de argumentación. 	<ul style="list-style-type: none"> • Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea. • Impacto de los materiales y recursos en una tarea. • Vínculo entre tiempo y fases de una tarea.
Tareas de argumentación	
<ul style="list-style-type: none"> • Uso y pertinencia de los materiales y recursos para potenciar el aprendizaje de la argumentación. • Vínculo entre tiempo, fases de una tarea y procesos asociados a la argumentación. 	

2.2.2.6 Faceta Ecológica.

La faceta ecológica se refiere al conocimiento de aspectos curriculares, contextuales, sociopolíticos, económicos etc. que inciden en la gestión del aprendizaje de los estudiantes. En otras palabras, el docente debe tener conocimiento del currículo de matemáticas del nivel que

considera el estudio de un objeto matemático, los vínculos que puedan existir con otros currículos, las relaciones que dicho currículo tiene con los aspectos sociales, políticos y económicos que sustentan y condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Con la faceta ecológica, se pueden abordar preguntas del tipo: ¿En qué curso implantarías un problema o abordarías un contenido específico?, ¿De qué manera el estudio de una temática o la implementación de un problema se vincula con una propuesta curricular? En la

Tabla 6, presentamos la adaptación que realizamos a la faceta ecológica para los asuntos de tareas, argumentación y tareas que favorecen la argumentación. Con esta, buscamos solucionar preguntas del tipo: ¿Cuáles son los vínculos entre una propuesta curricular específica y la argumentación?, ¿Cuál es la pertinencia de una tarea en relación con una propuesta curricular específica y el contexto en donde se desarrolla?, ¿Qué acciones se pueden aplicar para implementar tareas que promueven la argumentación, en correspondencia con la propuesta curricular y el contexto?

Tabla 6: Indicadores de la faceta ecológica.

Indicadores	
<i>Argumentación</i>	<i>Tareas</i>
<ul style="list-style-type: none"> • Vínculos entre el currículo de matemáticas y la argumentación. 	<ul style="list-style-type: none"> • Pertinencia de una tarea con respecto al currículo y el contexto.
Tareas de argumentación	
<ul style="list-style-type: none"> • Acciones del profesor encaminadas a la implementación de tareas que promueven la argumentación, en correspondencia con el currículo y el contexto. 	

2.2.3 Dimensión Meta Didáctico - Matemática

Esta dimensión incluye los conocimientos sobre las normas y meta normas (epistémicas, ecológicas, cognitivas, interaccionales, mediacionales, afectivas), las condiciones y restricciones contextuales, que permiten obtener elementos para la reflexión y valoración de la práctica. En otras palabras, la dimensión meta didáctico – matemática aporta principios y normas para observar la idoneidad en cada una de las facetas. Esta dimensión, para cada una de las

dimensiones que contempla CDM, anticipa cuatro niveles de análisis. Estos niveles permiten: a) identificar las características de los problemas o secuencia de problemas que los docentes proponen para su implementación; b) describir las prácticas matemáticas o didácticas que realizan los docentes y estudiantes sobre los problemas involucrados; c) identificar y describir sistemáticamente los aspectos matemáticos o didácticos de objetos (lingüístico elementos, conceptos / definiciones, proposiciones / propiedades, procedimientos y argumentos) inmersos en el desarrollo de tales prácticas; y d) estudiar los procesos que realizan profesores y estudiantes, y que conducen al surgimiento de tales objetos matemáticos.

En concordancia con la presente investigación, no tomaremos en cuenta a la dimensión meta didáctico – matemática como herramienta teórica para el análisis de los datos, dado que el interés es caracterizar la transformación de nuestro conocimiento, más no obtener elementos para realizar una reflexión acerca de la práctica realizada en cada una de las facetas del modelo CDM.

3 Capítulo 3: Metodología

En este capítulo describimos los diferentes aspectos del proceso metodológico que adelantamos para el desarrollo de la presente investigación, en busca de establecer una ruta de acción que nosotros, como educadores matemáticos, adelantamos hacia la mejora de nuestro conocimiento didáctico – matemático en el marco del diseño de tareas que favorecen la argumentación en Entornos de Geometría Dinámica (EGD). Para ello, en primer lugar, hacemos referencia al enfoque y aproximación investigativa bajo la cual se desarrollaron las acciones. En segundo lugar, nos referimos a la estrategia implementada que nos permitió evidenciar la transformación de nuestro conocimiento. Finalmente, presentamos los ciclos y fases del proceso, adelantados en el marco de la estrategia investigativa, que posibilitaron vislumbrar las etapas de la transformación.

3.1 Perspectiva Investigativa

Esta investigación se enmarca en el enfoque fenomenológico, ya que pretendemos presentar la transformación de nuestro conocimiento didáctico – matemático acerca de tareas, argumentación y tareas de argumentación como asuntos independientes, pero que guardan conexiones entre ellos. Por tal motivo, para la realización de esta investigación tenemos en cuenta los supuestos, visiones y prácticas de nosotros como sujetos investigados, que evidencian el estado de nuestro conocimiento y su transformación. Queremos, mediante la reflexión y la indagación sistematizada, describir, explicar e interpretar el proceso de transformación ya descrito.

Consideramos que la aproximación es interpretativa o hermenéutica ya que buscamos rastrear los significados que subyacen a las acciones, interacciones y discursos de las personas, vistas como conjuntos de signos Camargo (2021). En otras palabras, buscamos interpretaciones

factibles y útiles acerca de la transformación de nuestro conocimiento didáctico – matemático. Cabe aclarar que, no pretendemos extraer información del contexto investigativo de manera imparcial, sino mediante una co-elaboración de nosotros como investigadores, a partir de producciones, interacciones y escritos realizados durante los diversos seminarios de la Maestría en Docencia de la Matemática (MDM).

3.2 Estrategia Investigativa

La estrategia investigativa que usamos para abordar la presente investigación es la Investigación – Acción (IA). Esta estrategia es una forma de indagación reflexiva que se realiza en conjunto con el objetivo de transformar las prácticas sociales o educativas y su comprensión sobre estas. Para Doerr y Tinto (2000), la IA es un proceso reflexivo dirigido al desarrollo profesional del individuo. En coherencia con el objetivo propuesto en nuestra investigación, la IA es pertinente, ya que usualmente esta es utilizada para describir un conjunto de acciones que realizan los sujetos investigados con el fin de mejorar sus prácticas profesionales y transformar su realidad. Esta estrategia nos permite realizar de forma simultánea la expansión de nuestro conocimiento y la solución de los problemas planteados en los Capítulos 4 y 5.

En nuestro caso, la IA nos permite, como profesores, adquirir un rol de investigadores. Somos nosotros los encargados de llevar a cabo esta investigación con la finalidad de describir la transformación de nuestro conocimiento didáctico – matemático acerca de tareas, argumentación y tareas de argumentación. Lo anterior, se efectúa mientras aumenta nuestra competencia profesional por medio de la reflexión y autocrítica sobre nuestro conocimiento. Esto nos permite vislumbrar una genuina transformación que puede ir robusteciendo una mayor autonomía profesional (Miguélez, 2000).

De manera particular, la IA como estrategia investigativa nos permite relatar la transformación de nuestro conocimiento didáctico-matemático sobre los objetos de estudio. A esto añadimos que, por medio de acciones de planificar, actuar, observar y reflexionar, ejecutadas en forma cíclica o de espiral, recolectamos elementos útiles para modificar nuestro conocimiento y caracterizarlo en diversos momentos.

Esta estrategia se diferencia de otras al permitir que el profesor se desenvuelva como investigador de su propia práctica y de su conocimiento. Así mismo, posibilita la formación y el desarrollo del docente como sujeto reflexivo en la acción. El profesor es sujeto y objeto de la producción de conocimiento derivado de la experiencia; por lo cual, se promueve una imagen del docente más compenetrado con su realidad y su práctica. Cabe señalar que todo lo anterior ocurre cuando se evidencia una necesidad de iniciar un cambio e innovar, buscando el desarrollo curricular, un desarrollo profesional, la mejora de programas educativos o una política de desarrollo.

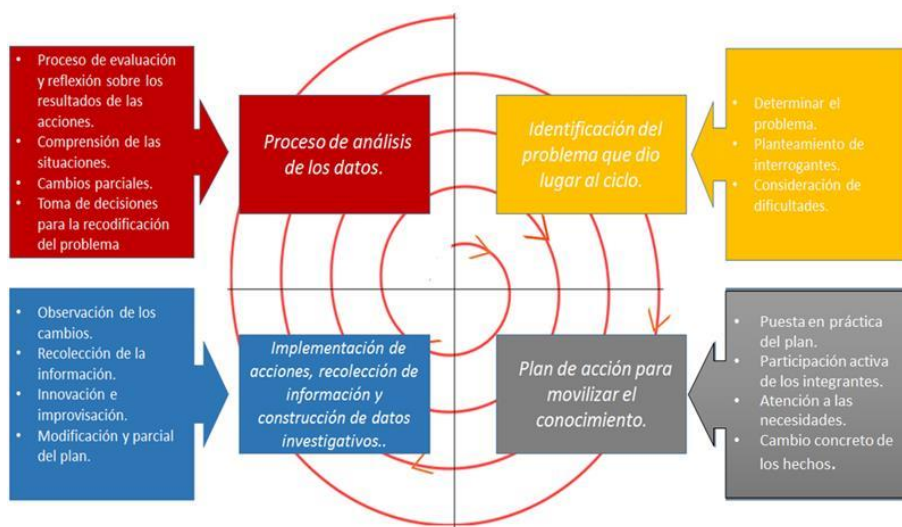
Las características principales de la IA según Kemmis y McTaggart (1988) son: i) es participativa, puesto que las personas implicadas en la investigación trabajan con intención de transformar sus propias prácticas y conocimiento; ii) es colaborativa, dado que se realiza en grupo con las personas implicadas; iii) es un proceso sistemático de aprendizaje; iv) es un ejercicio que induce a teorizar la práctica; v) es un proceso que somete a prueba las prácticas, las ideas y las suposiciones; vi) es un ejercicio que implica registrar, recopilar y analizar nuestros propios juicios, reacciones e impresiones en torno a lo que ocurre; vii) es un procedimiento que realiza análisis críticos de las situaciones; viii) es una labor que progresivamente incita a cambios más amplios, empezando con pequeños ciclos de planificación, acción, observación y reflexión y avanzando hacia problemas de mayor envergadura. Estas características nos permiten ser parte

fundamental en la investigación, desde la postura de legítimos coinvestigadores. También, planificamos, analizamos, observamos y reflexionamos sobre nuestro conocimiento didáctico – matemático durante cada uno de los ciclos implementados, lo que nos permite evidenciar una trayectoria de transformación.

La IA es un proceso de aprendizaje colectivo e introspectivo. Es por ello, que suele tener varios ciclos, mínimos dos, que se adelantan en cuatro fases cada uno. Las fases de estos ciclos generalmente están enfocadas en planificar, actuar, observar y reflexionar.

En nuestro caso en particular, las fases de cada uno de los ciclos son las siguientes: i) identificación del problema que da lugar al ciclo; ii) plan de acción para movilizar el conocimiento; iii) implementación de acciones, recolección de información y construcción de datos investigativos; iv) proceso de análisis de los datos. En la Figura 2 presentamos la estructura de la IA.

Figura 2: Representación de las fases y ciclos de la IA. Fuente: Propia.



A continuación, en la Tabla 7 describimos de manera sucinta cada ciclo. La presentación de los ciclos la realizamos en concordancia con la estructura de la Figura 2.

Tabla 7: Descripción de los Ciclos de IA implementados en la presente investigación.

		Ciclo 1	Ciclo 2	Ciclo 3
Fase 1		Los profesores que ingresan a la MDM tienen un conocimiento más cercano al conocimiento común que al conocimiento especializado en lo que respecta a tareas, argumentación y EGD.	Se evidencian problemas en la diferenciación de términos afines a la argumentación, de lo cual surge la pregunta ¿Cuál es la diferencia entre los procesos de argumentación, explicación, justificación y validación?	En la fase final del Ciclo 2, surge un interrogante sobre como la diferenciación de los términos argumentación, explicación, justificación y validación podría impactar al momento de diseñar una tarea que promueva la argumentación por medio de un EGD.
Fase 2		Programa formativo (teórico – práctico) sobre tareas, EGD, argumentación y geometría.	Grupo de estudio con pares académicos para movilizar el conocimiento acerca del proceso de argumentación y vocabulario especializado.	Diseño de una tarea a partir de cinco etapas: 1. Recolección de dos tareas diseñadas durante los ciclos 1 y 2. 2. Comparación de las tareas y descripción de cada una de ellas. 3. Identificación de características de una tarea para favorecer la argumentación. 4. Diseño de una tarea que promueva la argumentación por medio de EGD. 5. Implementación de la tarea diseñada.
Fase 3	<i>Implementación de acciones</i>	Profesores – investigadores participes en los seminarios del programa formativo de la MDM en el semestre 2020 – 1.	Planeación e implementación de una sesión de estudio para identificar diferencias y similitudes entre argumentar, explicar, justificar y validar.	Diseño e implementación de una tarea que promueva la argumentación a través de un EGD (GeoGebra).
	<i>Recolección de información</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Apuntes de clase y charlas con expertos. • Producciones de tareas propuestas en las clases. • Diarios de campo. • Versiones de anteproyecto. • Propuesta inicial para ingresar a la MDM. 	<ul style="list-style-type: none"> • Transcripciones de videos de la planificación e implementación del grupo de estudio. • Libreto que soporta la planificación de la sesión del grupo de estudio. • Material utilizado en la sesión del grupo de estudio. 	<ul style="list-style-type: none"> • Transcripciones de videos de las sesiones de planificación y diseño de una tarea. • Cuadro comparativo de las tareas iniciales. • Criterios para el diseño de una tarea que favorece la argumentación. • Tarea diseñada. • Observación de la implementación.
	<i>Construcción de datos investigativos</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Organización de los insumos digitales y físicos. • Reducción de información por medio de bases de datos. • Depuración por medio de preguntas para evocar conocimiento. • Fragmentación por medio de tres textos narrativos, que evidencian los Estados 0 y 1 del conocimiento de los profesores. • Los textos narrativos conforman el dato. 	<ul style="list-style-type: none"> • Organización de los insumos por momentos. • Reducción de la información con la selección de los fragmentos que aludan a argumentación y vocabulario especializado, evidenciando un Estado 2 del conocimiento de los profesores. • Los fragmentos conforman el dato. 	<ul style="list-style-type: none"> • Organización por momentos de acuerdo con las etapas del plan de acción. • Reducción mediante la selección de fragmentos de los insumos, que aluden a argumentación y tareas, evidenciando un Estado 3 del conocimiento de los profesores. • Los fragmentos conforman el dato.
Fase 4		<ul style="list-style-type: none"> • Implementación de la adaptación del modelo CDM para clasificar los datos en las facetas de la dimensión didáctica. • Identificación y conformación de categorías emergentes asociadas a las facetas del CDM. • Análisis de los fragmentos a luz de las categorías emergentes para caracterizar la transformación del conocimiento. 		

3.3 Recursos para el Registro de la Información y Datos Investigativos

Para el registro de la información y los datos investigativos, presentamos dos estrategias. La primera se centra en la evocación de conocimientos por parte de los profesores. Con esta, buscamos que los profesores puedan recordar aquellos conocimientos del semestre 2020 – 1, en lo que respecta a argumentación y tareas. La segunda estrategia permite la selección de fragmentos en cada uno de los insumos, que evidencian el conocimiento de los profesores en momentos temporales específicos, en lo correspondiente a tareas, argumentación y tareas de argumentación.

Cabe mencionar que, el acompañamiento de la directora de la investigación permitió que la información fuera más explícita. Esto, a partir de preguntas realizadas en diversas sesiones lo que permitía abordar un campo del conocimiento mucho más amplio. Como resultado de lo expuesto, obtenemos información mucho más robusta durante la investigación.

3.4 Descripción del Proceso de Análisis de los Datos Investigativos

3.4.1 Análisis de la Caracterización del Estado del Conocimiento en cada Ciclo

Para cada uno de los ciclos de esta investigación, ubicamos los datos en cada una de las facetas del CDM. La caracterización la realizamos a luz de cada uno de los indicadores de la personalización, buscando las ideas más relevantes de las cuales versan cada uno de los fragmentos. Luego de esto, y tomando en cuenta las ideas principales de cada uno de los datos previamente clasificados, realizamos agrupaciones de datos que aludían a una misma idea. Esto, nos permitió identificar los puntos centrales en los cuales podría girar la transformación del conocimiento de los profesores.

3.4.2 Análisis de la Transformación del Conocimiento

Para el análisis de la información utilizamos el microanálisis, que consiste en un análisis detallado y pormenorizado, “palabra por palabra” o “línea por línea” (Strauss y Corbin, 2002). Este análisis se aplica a fragmentos seleccionados y categorizados con el modelo CDM. La aplicación de esta técnica nos permite descomponer cada uno de los datos en ideas o conceptos que los representen. Esto, se utiliza para analizar e interpretar datos de manera cuidadosa, identificando porciones de texto dentro de cada fragmento, generando un rotulo, con el propósito de generar categorías emergentes con sus correspondientes propiedades y dimensiones. Las propiedades y dimensiones nos permiten describir cada una de las categorías. Luego de rotular los datos, identificamos características de los rótulos para generar categorías asociadas a la faceta ya nombrada del CDM, que permitan describir una transformación del conocimiento didáctico – matemático de los profesores. Estas categorías emergentes del dato se definen de tal manera que agrupen varios de los conceptos presentados en los rótulos y no exista ambigüedad en los significados asociados.

4 Capítulo 4: Ciclo 1 de Investigación – Acción

El primer ciclo de esta investigación se diferencia de los demás ciclos y se distancia de la estrategia. Esto se debe a que las fases 1 y 2 fueron propuestas por los profesores que forman parte del grupo de investigación ÆG de la UPN, en el marco del programa de formación de profesores MDM. Por su parte, las fases 3 y 4 se ajustan a la estrategia y nosotros contribuimos asumiendo el papel de profesores – investigadores. Al finalizar la fase 4 se generan preguntas sobre aspectos específicos de nuestro conocimiento didáctico – matemático que permiten el inicio del siguiente ciclo de Investigación – Acción (IA).

4.1 Fase 1: Identificación del Problema que dio Lugar al Ciclo

Los integrantes del grupo de investigación ÆG detectan que los profesores que entran al programa MDM tienen un conocimiento más cercano al conocimiento común que al conocimiento especializado, en lo que corresponde al conocimiento del profesor para diseñar y gestionar tareas de argumentación en geometría con apoyo de Entornos de Geometría Dinámica (EGD).

4.2 Fase 2: Plan de Acción para Movilizar el Conocimiento

El grupo de investigación ÆG diseña e implementa un programa formativo (teórico – práctico) sobre tareas, EGD, argumentación y geometría. El primer ciclo se desarrolla en el marco del programa formativo de posgrado MDM en el semestre 2020-1. Inicialmente, los encuentros se dan de forma presencial; pero debido a la contingencia sanitaria ocasionada por la pandemia del COVID-19, los espacios académicos migran a una plataforma virtual (TEAMS).

Los profesores – estudiantes son partícipes de tres seminarios: Diseño y Desarrollo Curricular (DDC), Innovación e Investigación (II) y Profundización en Matemáticas Elementales (PME). En el seminario DDC, los docentes abordan el diseño de tareas desde lo teórico y lo

práctico, realizando conexiones con la argumentación y los EGD. En el seminario II, los profesores caracterizan el campo de estudio del conocimiento del profesor sobre argumentación, tareas y EGD; esto lo realizan por medio de la construcción del anteproyecto de tesis. Por último, en el seminario PME, los profesores profundizan en el proceso de argumentación con hechos de la geometría escolar, procurando reconocer los diferentes tipos de argumentos durante los procesos de resolución de problemas de conjeturación con el apoyo de EGD. Adicionalmente, se hace una ampliación de los objetos matemáticos de la geometría escolar, en lo que respecta a su aplicación en tareas escolares; y la adquisición de herramientas para la interpretación de las producciones de los estudiantes.

4.3 Fase 3: Implementación de Acciones, Recolección de Información y Construcción de Datos Investigativos

El plan de acción del Ciclo 1 fue desarrollado durante el primer semestre de 2020 y las acciones fueron ejecutadas en el marco del programa formativo de la MDM. Los informantes somos nosotros, como profesores – investigadores. Nuestro objeto de estudio es el conocimiento didáctico – matemático del profesor sobre argumentación, tareas y tareas de argumentación.

Los insumos recolectados durante la implementación del plan de acción fueron los siguientes: 1) apuntes sobre lo correspondiente a argumentación y tareas; 2) soluciones de tareas propuestas en los diferentes seminarios del semestre de los autores del trabajo; 3) apuntes de charlas con expertos de la línea de investigación de la cohorte 2020; 4). propuesta inicial para ingresar al programa formativo de la MDM.

Ahora, mencionamos el proceso de producción de datos investigativos a partir de la recolección de información. Este proceso inicia con la organización de los insumos digitales, en carpetas referenciadas con las siglas de los seminarios de la MDM: DDC, II y PME. Luego de

organizar la información, se reduce por medio de una base de datos. Con esto, se busca extraer fragmentos de los insumos para identificar la idea central respecto al conocimiento. La base de datos se puede consultar en el Anexo 1. Durante el trabajo de identificación de los fragmentos para determinar los datos para el análisis, evidenciamos que la información seleccionada es insuficiente. Por esta razón, la depuración de la información se lleva a cabo por medio de la incorporación de nuevas columnas que refieren a ¿qué sabía antes?, lo que sé ahora, relación con otros fragmentos, acción que genera esa transformación (en el conocimiento) y nuevas inquietudes. Lo anterior, lleva a realizar evocaciones sobre lo que sabían los profesores antes de ingresar a la MDM y al terminar el primer semestre del 2020 (Anexo 1).

Finalmente, realizamos un proceso de fragmentación por medio de la construcción de tres textos narrativos (Anexo 2). Estos, son los datos investigativos del primer ciclo. En cada uno de los textos narrativos hacemos explícito el conocimiento de dos profesores en dos momentos específicos relacionados con el paso por el programa MDM. Estos momentos los denominamos Estados del conocimiento. El Estado 0 hace referencia a los conocimientos evocados sobre diseño de tareas, EDG y argumentación, que se tenían antes de ingresar al programa formativo de la maestría. El Estado 1 exhibe aquellos conocimientos presentes al finalizar el primer semestre del programa formativo de la maestría, con relación a los contenidos ya mencionados.

En el Anexo 3 se encuentran los datos clasificados de acuerdo con el asunto (FA: dato que alude a argumentación; FT: dato que alude a tareas; FTA: dato que alude a tareas de argumentación), el estado del conocimiento al que corresponde y el insumo del que proviene.

4.4 Fase 4: Proceso de Análisis de los Datos

Con el marco de referencia del modelo del Conocimiento Didáctico – Matemático del profesor (CDM) propuesto por el Enfoque Ontosemiótico (EOS), se realiza una adaptación de la

dimensión didáctica. Esto, lo realizamos con la intención de enfocar el modelo a la argumentación, los EGD y el diseño de tareas, que no son objetos matemáticos. Luego de esto, realizamos un proceso de microanálisis de cada uno de los datos clasificados en cada una de las facetas de la dimensión didáctica del CDM y que permiten evidenciar una transformación del conocimiento de los profesores para el Ciclo 1. En este punto, aclaramos que la adaptación del modelo CDM nos aleja de datos investigativos que hagan referencia a la práctica y reflexión sobre la práctica de los profesores; por tal razón, este tipo de datos no fueron tomados en cuenta para el análisis y caracterización de la transformación.

En lo correspondiente a la primera parte del análisis, clasificamos los datos en las facetas predeterminadas del CDM propuesto por el EOS (Pino-Fan y Godino, 2015). Esta clasificación la realizamos por medio de los indicadores resultantes de la adaptación del modelo CDM. Estos indicadores se encuentran en las Tablas 1 a 6, del presente documento. Luego de esto, los datos son agrupados en cada una de las facetas para realizar una caracterización por cada uno de los indicadores del CDM y los Estados del conocimiento 0 y 1.

4.4.1 Análisis de datos Ciclo 1

4.4.1.1 Faceta Epistémica.

En la Figura 3 reportamos la cantidad de datos del Ciclo 1 asociados a la faceta epistémica, indicando el Estado de conocimiento al que corresponde y el asunto sobre el cual versan. Consideramos que la mayoría de los datos están asociados a tareas porque fue el objeto de estudio en uno de los seminarios del plan de acción (DDC). Por su parte en dos seminarios (DDC y PEM) los profesores estuvieron inmersos en la práctica de diseñar tareas. Adicionalmente, la cantidad de datos asociado a argumentación se debe a que en el seminario PEM, los profesores estuvieron involucrados en la producción y explicitación de argumentos.

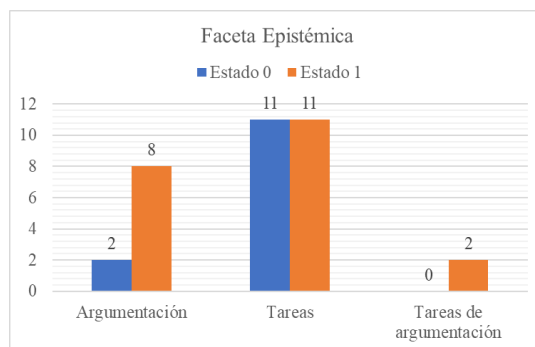


Figura 3: Datos correspondientes a la faceta epistémica para Ciclo 1.

4.4.1.1.1 Estado 0.

En el Estado 0, encontramos dos datos que son evidencia del conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre **argumentación**. Uno está asociado al *Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación* y el otro a *Criterios para identificar argumentos, o parte de estos, en expresiones discursivas* (Tabla 8).

Tabla 8: Datos sobre argumentación para la faceta epistémica en Estado 0.

Código	Datos	Indicador
FA01	Los profesores identifican a [la argumentación] como sinónimo de justificación, explicación y establecimiento del valor de verdad de una proposición.	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
FA02	Los docentes asumen que si el estudiante evalúa afirmaciones y expresa el por qué de su percepción con un ejemplo o un contraejemplo está realizando procesos de argumentación.	Criterios para identificar argumentos, o parte de estos, en expresiones discursivas

El dato clasificado en el indicador *Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación* [FA01] evidencia que en el Estado 0, los profesores proveían una caracterización de argumentación a partir de la relación con otros términos correspondientes a objetos discursivos, como la justificación o la explicación. Estos términos, al igual que argumentación, hacen parte del vocabulario del profesor. No obstante, al asumirlos como sinónimos podemos inferir que su empleo está asociado al uso coloquial que se le da en el español, sin que se evidencien diferencias entre ellos. Respecto al dato asociado a *Criterios para identificar argumentos, o parte de estos, en expresiones discursivas* [FA02], los profesores ejemplifican cómo en su práctica identifican un argumento en las expresiones discursivas de los estudiantes.

Este primer criterio va en concordancia con la caracterización de argumentación que los profesores expresan en [FA01]. Debido a que ellos asumen la argumentación como sinónimo de justificación y de explicación, en los criterios para identificar argumentos se incluía la necesidad de proveer un “por qué” y de ampliar la información por medio de ejemplos.

En el Estado 0 también encontramos 11 datos que son evidencia del conocimiento didáctico – matemático del profesor respecto a **tareas** (Tabla 9).

Tabla 9: Datos sobre tareas para la faceta epistémica en Estado 0.

Código	Datos	Indicador
FT01	Los profesores definen tarea como toda actividad extra-clase que propone un docente buscando reforzar las temáticas vistas en clase y la apropiación de algoritmos realizados en el aula.	Vocabulario especializado sobre tareas
FT03	Los profesores consideran que al diseñar una tarea se deben tener en cuenta aspectos tales como [...] los preconcepciones de los estudiantes [...]	Elementos de la tarea
FT07	Los profesores consideran que al diseñar una tarea se deben tener en cuenta aspectos tales como [...] las expectativas del profesor.	Elementos de la tarea
FT10	Las tareas que propone el profesor deberían permitir a los estudiantes inferir conceptos y definiciones [...]	Importancia del diseño de una tarea
FT13	Los profesores gestionaban el orden [de secuenciación de los problemas en una tarea,] de acuerdo con la dificultad que representaba la solución del ejercicio para los estudiantes; primero, aquellos que se abordan mediante procesos algorítmicos y luego, aquellos problemas que involucraban un contexto y requerían un análisis adicional por parte del estudiante. Así mismo, se gestionaba aspectos relevantes, tales como el tiempo y el agrupamiento de los estudiantes.	Vínculos entre los elementos de una tarea
FT14	[Los requisitos de una tarea son los] conceptos que se deben tener en cuenta para abordar los problemas propuestos y usar los algoritmos vistos en clase de forma adecuada.	Elementos de la tarea
FT16	[La meta de una tarea es la] aplicación correcta de los algoritmos matemáticos y la comprensión de la temática. A partir de esto, el estudiante puede explicar y sustentar lo realizado.	Elementos de la tarea
FT18	[La formulación de una tarea consiste en la] selección de los ejercicios y/o problemas.	Elementos de la tarea
FT20	[Los materiales y recursos son los] medios que se emplean para la solución de una tarea. Los profesores no los tomaban en cuenta, puesto que las tareas se realizan únicamente en lápiz y papel, y el apoyo de una calculadora cuando se requería.	Elementos de la tarea
FT23	[El agrupamiento en una tarea hace referencia a las] formas de ordenar a los estudiantes por grupos o individualmente.	Elementos de la tarea
FT27	[La temporalidad constituye el] tiempo destinado para resolver la tarea.	Elementos de la tarea

El dato clasificado en *Vocabulario especializado sobre tareas* [FT01] nos permite establecer que la definición de tarea de los profesores incluía características y finalidades de esta. En este caso, otorgan a la tarea un espacio y tiempo específico para su ejecución por parte del estudiante (extra-clase). El propósito de la tarea se enfoca en el proceso matemático

correspondiente a la ejercitación de procedimientos. De lo anterior, inferimos que el significado que los profesores asignaban al término *tarea* correspondía al uso habitual en el ámbito escolar.

En lo correspondiente al dato ubicado en el indicador *Importancia del diseño de una tarea* [FT10], evidenciamos la explicitación de un propósito para las tareas que difiere del reportado en [FT01]. En este dato, una tarea se enfoca en los procesos de conceptualización y definición, y allí radica su importancia.

Los 8 datos asociados al indicador *Elementos de la tarea* los agrupamos en dos asuntos: elementos requeridos para el diseño de una tarea [FT03, FT07], y definiciones de elementos que Gómez (2015) propone para el diseño de una tarea [FT14, FT16, FT18, FT20, FT23, FT27]. Para el primer asunto, los elementos son los prerrequisitos de los estudiantes [FT03] y las expectativas del profesor [FT07]. Son elementos asociados a los roles que asumen las personas que están involucradas en la realización de la tarea: que sabe y qué puede hacer quien resolverá la tarea, y qué espera el que la propone. En lo que respecta al segundo asunto, los datos [FT14, FT16, FT18, FT20, FT23, FT27] son las definiciones que los profesores asignaban a los elementos que propone Gómez (2015) para el diseño de una tarea¹: requisitos, meta, formulación del enunciado, recursos y materiales, temporalidad y agrupamiento.

Por último, el dato asociado al indicador *Vínculos entre elementos de una tarea* [FT13] nos permite evidenciar un conocimiento didáctico – matemático del profesor en torno a la gestión de una tarea. Para los profesores, el nivel de dificultad que se le atribuía a cada una de las

¹ Es importante recordar que en la construcción del texto narrativo correspondiente al Estado 0, los profesores se preguntaban qué sabían al iniciar la MDM respecto a lo que habían aprendido durante el semestre. Por ello, aunque ellos solo mencionaban dos elementos involucrados en su práctica de diseño de tareas (prerrequisitos y expectativas del profesor), en el Estado 0 se encuentran datos correspondientes a definiciones de elementos que propone Gómez (2015) y que los profesores no consideraban como elementos involucrados en el diseño de tareas.

tareas que seleccionaban permitía la toma de decisiones frente a aspectos tales como orden de solución, tiempo y agrupamiento.

4.4.1.1.2 Estado 1.

En el Estado 1 encontramos 8 datos que son evidencia del conocimiento didáctico – matemático de los profesores sobre **argumentación**. Uno está asociado al *Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación*, cuatro a *Vocabulario especializado sobre argumentación* y tres a *Representaciones de argumentos* (Tabla 10).

Tabla 10: Datos sobre argumentación para la faceta epistémica en Estado 1.

Código	Datos	Indicador
FA04	Los profesores identifican al argumento como faceta ostensiva del razonamiento, en tanto permite generar un discurso en un individuo.	Vocabulario especializado sobre argumentación
FA05	[...] Para los profesores una conjetura con estructura de “Datos... existen...” o “Si... entonces...” constituye un argumento válido.	Representaciones de argumentos
FA06	Para [los profesores, la representación de argumentos por medio del modelo de Toulmin] es útil para comprender el tipo de argumento emergido de la actividad matemática a partir de sus elementos: datos, aserción y garantía	Representaciones de argumentos
FA07	Para los profesores la argumentación es un proceso que busca persuadir a otro individuo sobre algo que es cierto o plausible apoyándose en sistemas de conocimientos o creencias.	Vocabulario especializado sobre argumentación
FA08	En el discurso de los profesores se identifica con claridad la definición que ahora trabajan sobre argumentar: acción que realiza un individuo para generar un discurso oral o escrito.	Vocabulario especializado sobre argumentación
FA09	Si vamos de lo macro a lo micro, tendríamos la argumentación como un proceso, el argumentar como una acción que permite desarrollar lo anterior y el argumento como frases con sentido, que tienen una estructura definida y permiten conformar el discurso en la acción de argumentar.	Vocabulario especializado sobre argumentación
FA10	En el discurso de los profesores podemos evidenciar que aún se consideran como sinónimos los términos de argumentar, explicar, justificar y validar, al finalizar el primer semestre.	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
FA11	[...] Los profesores por medio del desarrollo de las tareas propuestas en los seminarios de PME y DDC apropiaron en su discurso y en la actividad matemática desarrollada, la representación de un argumento por medio del modelo de Toulmin. Para ellos, esta forma de representación es útil para comprender el tipo de argumento emergido de la actividad matemática a partir de sus elementos: datos, aserción y garantía.	Representaciones de argumentos

En los datos clasificados en el indicador *Vocabulario especializado sobre argumentación*

identificamos que el conocimiento didáctico – matemático del profesor alude a dos asuntos:

proveer una definición de argumento, argumentación y argumentar [FA04, FA07, FA08] e

indicar relaciones con otros términos necesarios para poder caracterizarlo [FA04, FA09].

Respecto al primer asunto, los datos [FA04, FA07, FA08] proveen la definición de los profesores

sobre argumento, argumentación y argumentar, respectivamente. Las tres definiciones están conformadas por una clase² y por una función. Las clases utilizadas en cada definición permiten indicar la diferencia que los profesores le asignan a los tres términos: argumentar es una faceta ostensiva del razonamiento (evidencia tangible de un razonamiento), argumentación es un proceso, y argumentar es una acción. Las funciones asignadas permiten identificar diferencias que los profesores atribuyen a cada término, que podrían permitir diferenciarla de otros términos que pudiesen clasificarse en la misma clase: el argumento y argumentar es para generar un discurso y la argumentación para persuadir. Respecto al segundo asunto, los datos [FA04] establece una relación entre argumento y razonamiento y [FA09] entre argumento, argumentación y argumentar. Específicamente, [FA04] muestra que para los profesores existe una relación de dependencia entre el argumento y el razonamiento, ya que para ellos sin el razonamiento no existiría el argumento. Por su parte, [FA09] explicita la relación que mencionamos en el análisis del primer asunto, salvo por el hecho de que en este dato asignan al argumento la clase “frases”, siendo esta más específica que “faceta ostensiva del razonamiento”, y a su vez, modifican la función del argumento, puesto que asumen el argumento como una frase que se genera para ser parte un discurso.

En lo que respecta a los datos clasificados en el indicador *Representación de argumentos*, el conocimiento de los profesores se relaciona con tres asuntos: la estructura de un argumento [FA06, FA11], la forma en la que se puede representar [FA05, FA11] y la importancia de la representación de argumentos [FA06, FA11]. Para el primer asunto, los profesores expresan los elementos que conforman un argumento, y que a su vez podrían tomar en cuenta cuando buscan identificar un argumento. En los datos evidenciamos una estructura ternaria (dato, aserción,

² Entendemos clase como un término que permite clasificar a grupo de elementos de un conjunto que tiene características comunes.

garantía) para el argumento. En lo que respecta al segundo asunto, los profesores manifiestan dos formas para la representación de argumentos: conjeturas de la forma “Si... entonces...” o “Dados... existen...”, o mediante el modelo de Toulmin. Los datos nos permiten inferir que las dos formas de representación de argumentos están ligadas a la estructura ternaria presentada anteriormente. Por último, en lo que respecta al tercer asunto, para los profesores se torna relevante la representación de argumentos, puesto que permiten una identificación de estos. La expresión “útil para comprender el tipo de argumento” nos sugiere que los profesores identifican varios tipos de argumento a partir de los elementos que lo componen, pero no se explicitan los tipos de argumento, ni la forma de identificarlos.

En el Estado 1 reportamos 11 datos que aluden a **tareas**: dos asociados al indicador *Vocabulario especializado sobre tareas*, seis a *Elementos de la tarea*, dos a *Importancia del diseño de una tarea* y uno a *Procesos involucrados en la solución de una tarea* (Tabla 11).

Tabla 11: Datos sobre tareas para la faceta epistémica en Estado 1.

Código	Dato	Indicador
FT15	[Los requisitos de una tarea son los] conocimientos y destrezas que los estudiantes, de acuerdo con su nivel educativo, necesitan para abordar una tarea. Los requisitos se abordan mediante los objetos matemáticos primarios (conceptos – definición, procedimientos, proposiciones, lenguajes, argumentos).	Elementos de la tarea
FT17	[La meta de una tarea son los] propósitos que el profesor le asigna a la tarea. Estos, hacen referencia a las expectativas de aprendizaje y a aquellos errores y dificultades que el profesor espera que la tarea le permita superar a los estudiantes. Nuevamente, se tienen en cuenta los objetos matemáticos primarios para tal finalidad.	Elementos de la tarea
FT19	[La formulación de una tarea consiste en la] instrucción que el profesor proporciona a los estudiantes, buscando describir el contexto, la información inicial y aquellas producciones esperadas a partir de la actividad desarrollada.	Elementos de la tarea
FT21	[Los materiales y recursos son los] medios que se emplean para la solución de una tarea.	Elementos de la tarea
FT24	[El agrupamiento en una tarea hace referencia a la] organización de los estudiantes por grupos de una determinada cantidad.	Elementos de la tarea
FT29	Los profesores definen a una tarea como una demanda estructurada que tiene una finalidad de aprendizaje y de enseñanza, y requiere la aplicación de un contenido matemático por parte de los estudiantes.	Vocabulario especializado sobre tareas
FT30	[Los profesores] identifican que para el proceso de diseñar una tarea se deben tener en cuenta diversos elementos (requisitos, meta, formulación, materiales y recursos, tipos de agrupamiento, formas de interacción y temporalidad).	Elementos de la tarea
FT31	Los profesores presentan en sus producciones la distinción entre tarea y actividad, entendiendo esta última como las diversas acciones que realiza un estudiante al momento de abordar una situación con contenido matemático.	Vocabulario especializado sobre tareas

Código	Dato	Indicador
FT32	[...] un buen diseño de tarea favorece una actividad matemática enriquecida, sin necesidad de una gran cantidad de ejercicios y problemas que llevaban a los estudiantes a repetir algoritmos de solución.	Importancia del diseño de una tarea
FT33	Al momento de diseñar la tarea se puede evidenciar que los profesores son conscientes de la importancia que tienen los procesos de construcción, exploración y conjeturación al momento de solucionar la tarea.	Procesos involucrados en la solución de una tarea
FT34	Al momento de diseñar la tarea se puede evidenciar que los profesores son conscientes de la importancia que tiene [...] prever los diversos objetos matemáticos y procedimientos de solución que los estudiantes pueden desarrollar en su actividad	Importancia del diseño de una tarea

Los datos clasificados en el indicador *Vocabulario especializado sobre tareas* [FT29, FT31] nos permiten evidenciar el conocimiento didáctico de los profesores en relación con la definición de tarea y actividad, y la distinción entre estos términos. Por una parte, el dato [FT29] indica que para ellos la tarea es una demanda que el profesor diseña y que construye con una estructura determinada. Lo anterior se complementa con una finalidad (la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático) y un requerimiento (aplicación de contenido matemático) que le otorgan a la tarea. Por otra parte, en [FT31] los profesores exhiben a la actividad como las acciones que realiza el estudiante al resolver una tarea. En correspondencia con lo anterior, identificamos que para las definiciones tenemos la clase demanda para tarea y acción para actividad. Al comparar los datos [FT29, FT31] podemos inferir los sujetos que los profesores involucran en las acciones: la tarea es propuesta por el profesor y la actividad es desarrollada por el estudiante.

En lo correspondiente al indicador *Elementos de la tarea*, los datos [FT15, FT17, FT19, FT21, FT24, FT30] permiten evidenciar que los profesores tienen un conocimiento didáctico-matemático respecto a los elementos involucrados en el diseño de una tarea. Los profesores presentan una definición de cada uno de los elementos de la siguiente manera: en [FT15] notamos la definición de los requisitos, en [FT17] se alude a la meta, en [FT19] se presenta la comprensión acerca de la formulación de una tarea, en [FT21] se define los materiales y recursos, y en [FT24] se ostenta la definición de agrupamiento. Podemos inferir que este conocimiento está asociado a un referente teórico (Gómez, 2015) trabajado por los profesores, en

el marco del plan de acción del Ciclo 1. Por último, los datos presentan características propias de cada elemento involucrado en el diseño de una tarea. Por ejemplo, los requisitos son vistos no solo como conocimientos que el estudiante debe tener para abordar la tarea, sino también como las destrezas necesita para el desarrollo de esta. La meta se presenta como el propósito, en términos de objetivos de enseñanza que el profesor puede buscar en sus estudiantes. Finalmente, la formulación es una instrucción que presenta una estructura definida en tres partes: contexto, información inicial y actividad matemática. En lo referente a los datos clasificados en el indicador *Importancia del diseño de una tarea* [FT32, FT34], evidenciamos que esta radica en favorecer una actividad matemática rica.

En lo correspondiente al indicador *Procesos involucrados en la solución de una tarea*, el dato [FT33] es evidencia del conocimiento de los profesores respecto a algunos procesos involucrados en el diseño y solución de una tarea matemática en geometría (construcción, exploración y conjeturación). Este conocimiento lo podemos identificar por la importancia y relevancia que los profesores dan a estos procesos, en el marco del diseño y desarrollo de una tarea.

Finalmente, en el Estado 1 dos datos aluden a **tareas de argumentación** y están asociados al indicador *Tipos de problemas y su relación con los tipos de argumentos* (Tabla 12).

Tabla 12: Datos sobre tareas de argumentación para la faceta epistémica en Estado 1.

Código	Datos	Indicador
FTA01	Los profesores con [un referente teórico] logran vislumbrar que se pueden plantear diversos tipos de problemas que promueven diversos tipos de argumentos, formales e informales (deductivo, inductivo y abductivo), en los estudiantes. Estos argumentos se ven afectados por el proceso de exploración que realice el estudiante.	Tipos de problemas y su relación con los tipos de argumentos
FTA04	Los profesores comprenden que, según la tarea propuesta, emergen diferentes tipos de argumentos en la actividad de los estudiantes.	Tipos de problemas y su relación con los tipos de argumentos

Los datos son evidencia del conocimiento didáctico – matemático de los profesores respecto al surgimiento de argumentos en la actividad de los estudiantes. Los profesores indican

conocer varios tipos de tarea que permite a los estudiantes diferentes actividades, y por lo consiguiente, diversos argumentos. A propósito de esto último, se puede identificar que los profesores en [FTA01] exhiben un conocimiento sobre argumentos informales y formales. Adicionalmente, podemos evidenciar un discurso más cercano a una comunidad de educadores matemáticos. Términos como argumentos formales o informales, proceso de exploración y actividad, nos permiten observar una relación entre la promoción de argumentos y el tipo de tareas, ligado a la definición de tarea [FT29] que los profesores manifiestan en el Estado 1.

4.4.1.2 Faceta Cognitiva.

En el Ciclo 1 solo encontramos un dato asociado a la Faceta cognitiva. Este alude a tareas de argumentación y corresponde al Estado 1.

4.4.1.2.1 Estado 1.

Como lo mencionamos con anterioridad, para el Estado 1 reportamos un único dato asociado al indicador *Surgimiento de un tipo argumento a partir de la actividad desarrollada por el estudiante* y que alude al asunto de **Tareas de argumentación** (Tabla 13).

Tabla 13: Datos sobre tareas de argumentación para la faceta cognitiva en Estado 1.

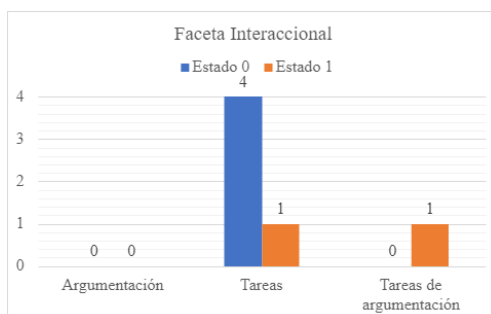
Código	Dato	Indicador
FTA02	Los docentes identifican que dependiendo de la exploración (teórica o empírica) que se realice, emergen diversos argumentos de la actividad.	Surgimiento de un tipo argumento a partir de la actividad desarrollada por el estudiante.

El dato [FTA02], permite evidenciar que, para los profesores, dependiendo de la actividad que desarrolle el estudiante, se favorece el surgimiento de un tipo de argumento particular. A partir de esto, podemos inferir que prever las posibles soluciones de una tarea, le permiten al profesor prever el tipo de argumento que puede surgir de la actividad del estudiante.

4.4.1.3 Faceta Interaccional.

En la Figura 4 reportamos la cantidad de datos del Ciclo 1 asociados a la faceta interaccional, indicando el Estado de conocimiento al que corresponde y el asunto sobre el cual versan. Para la faceta interaccional podemos identificar los siguientes comportamientos: i) no se evidencian datos que aludan a argumentación; ii) se evidencian mayor cantidad de datos en Estado 0 sobre tareas; y iii) para tareas de argumentación se presenta un solo dato referenciado al Estado 1. Con respecto al primer comportamiento, la no presencia de datos la podemos atribuir a la naturaleza del plan de acción del Ciclo 1. A lo anterior podemos añadir, la poca relación que los profesores le otorgaban a la argumentación con asuntos interaccionales. En lo que corresponde al segundo y tercer comportamiento, podemos inferir que dentro del plan de acción del Ciclo 1, para el Estado 0, se buscó evocar conocimientos de los profesores en lo respecta a tareas. Estas evocaciones permitieron el surgimiento de datos ligados al tipo de interacciones que se realizaban antes de la MDM. Estas, solo se presentaban de la forma profesor – estudiante e iban enfocadas a la resolución de problemas con respecto a los algoritmos y temáticas vistas en clase, sin influir en las decisiones que los estudiantes pueden optar. En tanto a los datos que nos permiten evidenciar interacciones dentro del Estado 1, estos están relacionados con aspectos teóricos tales como, la presencia de un elemento en el modelo de Gómez (2015) que hace referencia a la interacción, en el marco del diseño de tareas que promueven la argumentación.

Figura 4: Datos correspondientes a la faceta interaccional para Ciclo 1.



4.4.1.3.1 Estado 0.

En el Estado 0, encontramos cuatro datos que son evidencia del conocimiento didáctico – matemático del profesor respecto a **tareas**. De estos, uno está asociado al indicador *Impacto de una tarea en el rol del estudiante en el aula*, dos están vinculados al indicador *Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que permiten abordar una tarea* y un dato corresponde al indicador *Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase tendientes a superar un error, obstáculo o dificultad con respecto al desarrollo de una tarea* (Tabla 14).

Tabla 14: Datos sobre tareas para la faceta interaccional en Estado 0.

Código	Dato	Indicador
FT08	Los profesores [...] afirman su mediación frente a las tareas debe buscar que el estudiante sea el gestor de su propio aprendizaje.	Impacto de una tarea en el rol del estudiante en el aula
FT09	El papel del profesor es de mediador entre el estudiante y el conocimiento matemático.	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que explica una tarea
FT11	[...] El docente [no debe permitir que su gestión] inflencie y vicie las posibles respuestas de los estudiantes.	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase tendientes a superar un error, obstáculo o dificultad con respecto al desarrollo de una tarea
FT26	[La interacción se manifiesta en la] resolución de dudas y apoyo en procesos algorítmicos por parte del profesor hacia los estudiantes.	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que explica una tarea

En lo que respecta al indicador *Impacto de una tarea en el rol del estudiante en el aula*, el dato [FT08] evidencia el conocimiento didáctico – matemático del profesor con respecto a la función de la mediación del profesor, en el marco del desarrollo de una tarea. Podemos identificar el rol del estudiante que se pretende promover con la medición del profesor, en la aplicación de una tarea. Adicionalmente, identificamos la mención de una interacción tácita en el discurso de los profesores. Esta interacción es profesor – estudiante, la cual se hace alusión en los datos [FT09, FT11, FT26].

En lo que corresponde al indicador *Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que permiten abordar una tarea* [FT09, FT26], identificamos dos asuntos: rol del profesor, en el marco del abordaje de una tarea; y acciones del profesor en la gestión de una tarea. Para el primer asunto, los profesores otorgan el papel de mediador al profesor [FT09]. Con esto, buscan

facilitar la accesibilidad del estudiante a un conglomerado de conocimientos matemáticos. A partir de lo anterior, podemos inferir que existe una relación de jerarquía del conocimiento entre el profesor y el estudiante. De esta relación, se evidencia un conocimiento didáctico – matemático de los profesores en correspondencia con las acciones del profesor en la gestión de una tarea [FT26].

En el dato [FT11] que hace referencia al indicador *Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase tendientes a superar un error, obstáculo o dificultad con respecto al desarrollo de una tarea*, podemos evidenciar que los profesores identifican que la mediación de un profesor debe tener ciertas características. Las acciones del profesor se deben limitar hasta cierto punto, para no intervenir de forma directa con el aprendizaje del estudiante y estar en concordancia con [FT09].

4.4.1.3.2 Estado 1.

En el Estado 1, reportamos un dato que alude a **tareas**, este dato está asociado al indicador *Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que permiten abordar una tarea* (Tabla 15).

Tabla 15: Datos sobre tareas para la faceta interaccional en Estado 1.

Código	Dato	Indicador
FT25	[El agrupamiento] se realiza buscando que surjan interacciones entre [los estudiantes], para la comparación de puntos de vista y la superación de dificultades.	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que explica una tarea

En lo que respecta al dato [FT25] asociado al indicador *Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que explica una tarea*, este nos permite evidenciar un conocimiento de los profesores en relación con dos asuntos. El primero alude al propósito que los profesores le otorgan al agrupamiento, en el marco del diseño de una tarea; mientras que el segundo versa sobre la importancia de las interacciones para el desarrollo de una tarea. En lo que corresponde al primer asunto, los profesores identifican un propósito para realizar agrupaciones; este es el

surgimiento de interacciones entre los estudiantes. Para el segundo asunto, a partir de las interacciones originadas, los profesores buscan que los estudiantes realicen negociación de significados y contraste de ideas, que les permita la solución de la tarea propuesta.

Finalmente, en el Estado 1, hay un dato que hace referencia al asunto de **tareas de argumentación**, este dato corresponde al indicador *Interacciones que favorecen la argumentación en la actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tareas* (Tabla 16).

Tabla 16: Datos sobre tareas de argumentación para la faceta interaccional en Estado 1.

Código	Dato	Indicador
FTA03	[La interacción se manifiesta en las] formas de comunicación entre los miembros de la clase (profesor, estudiante, grupos). Esto, se realiza con la intención de institucionalizar significados y comparar formas de solución, puntos de vista, conocimientos y construcción de argumentos.	Interacciones que favorecen la argumentación en la actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea

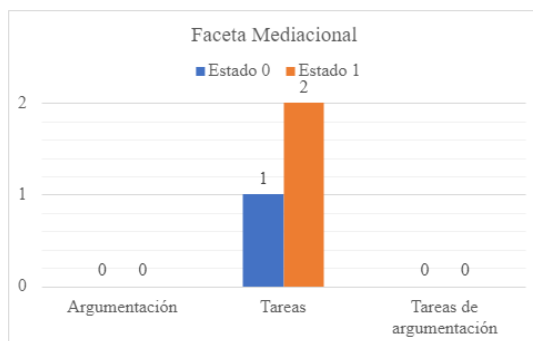
En el dato [FTA03] podemos evidenciar que para los profesores existen, diversas formas de interacción (profesor-estudiante, estudiante-estudiante, estudiante-grupo). Los profesores explicitan que las formas de interacción permiten contrastar diferentes puntos de vista, crear ejemplos y contraejemplos, y así poder concretar algunos significados grupales. Con este conocimiento didáctico – matemático de los profesores, podemos inferir que, para ellos la construcción de argumentos es un proceso social por lo cual es de suma importancia las interacciones de los estudiantes.

4.4.1.4 Faceta Mediacional.

En la Figura 5 reportamos la cantidad de datos del Ciclo 1 asociados a la faceta mediacional, indicando el Estado de conocimiento al que corresponde y el asunto sobre el cual versan. Como se observa en esta figura, la ausencia de datos que aludan sobre argumentación y tareas de argumentación la podemos referenciar al foco de trabajo abordado con el plan de acción del Ciclo 1. Al tener la atención en el diseño de tareas, el discurso de los profesores

aborda aspectos relacionado con los materiales y recursos que son utilizados con frecuencia para la solución de una tarea, en este caso son el lápiz y papel, y GeoGebra.

Figura 5: Datos correspondientes a la faceta mediacional para Ciclo 1.



4.4.1.4.1 Estado 0.

En el Estado 0, reportamos un dato que hace referencia al asunto de **tareas**, este dato está asociado al indicador *Impacto de los materiales y recursos en una tarea* (Tabla 17).

Tabla 17: Datos sobre tareas para la faceta mediacional en Estado 0.

Código	Dato	Indicador
FT12	Para [el profesor C], las tareas que involucran [EGD] permiten favorecer una mejor comprensión de los objetos matemáticos, usando diversos contextos.	Impacto de los materiales y recursos en una tarea

En referencia al dato [FT12], sobre el conocimiento didáctico – matemático de los profesores sobre como los diferentes recursos (EGD) impactan en la comprensión de los objetos matemáticos. A partir de esto, podemos inferir que ellos identifican que deberían utilizar diferentes recursos o materiales y así permitir al estudiante identificar, diferentes formas de visualizar un objeto u hecho matemático, que pueda enriquecer su actividad y comprensión.

4.4.1.4.2 Estado 1.

En el Estado 1, reportamos dos datos que aluden al asunto de **tareas**, De estos, uno está asociado al indicador *Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea* y el otro corresponde al indicador *Vínculo entre tiempo y fases de una tarea* (Tabla 18).

Tabla 18: Datos sobre tareas para la faceta mediacional en Estado 1.

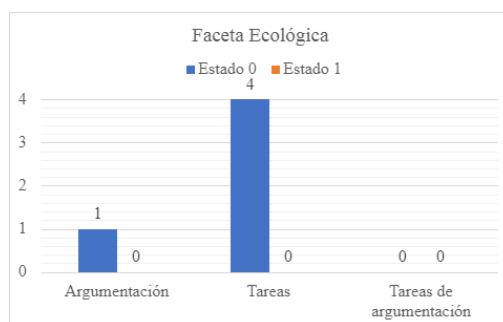
Código	Dato	Indicador
FT24	Los profesores reconocen que dependiendo de los materiales y recursos surgen diferentes actividades frente a la tarea.	Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea
FT28	[La temporalidad hace referencia a la] planeación temporal de los diferentes momentos que constituyen la tarea. Por ejemplo, proceso de construcción, proceso de exploración, proceso de conjeturación y socialización de respuestas.	Vínculo entre tiempo y fases de una tarea

El dato [FT24] es evidencia del conocimiento didáctico – matemático de los profesores con respecto a la dependencia existente entre la actividad que desarrolla el estudiante y, los materiales y recursos que el profesor tiene en cuenta en el diseño de la tarea. Con lo anterior, inferimos la existencia de un conocimiento acerca del uso y la pertinencia de los materiales y recursos. Por ejemplo, podríamos afirmar que los profesores identifican la diversidad de actividades logradas por un estudiante cuando aborda la tarea por medio de un EGD o por lápiz y papel. Por su parte, el dato [FT28] nos permite identificar la relevancia que los profesores otorgan a la división de las tareas en momentos. Estos, vienen asociados a los procesos involucrados en la solución de la tarea. Para los profesores se torna importante explicitar estos momentos en relación con la temporalidad de cada uno, en el marco del diseño de la tarea.

4.4.1.5 Faceta Ecológica.

En la Figura 6 reportamos la cantidad de datos del Ciclo 1 asociados a la faceta ecológica. La poca presencia de datos asociados a esta faceta se debe a que en el plan de acción, los seminarios desarrollados se enfocaron principalmente en asuntos epistémicos sobre argumentación y tareas.

Figura 6: Datos correspondientes a la faceta ecológica para Ciclo 1.



4.4.1.5.1 Estado 0.

En el Estado 0, reportamos un dato que hace referencia al asunto de **argumentación**, este dato está asociado al indicador *Vínculos entre el currículo de matemáticas y la argumentación*. (Tabla 19).

Tabla 19: Datos sobre argumentación para la faceta ecológica en Estado 0.

Código	Dato	Indicador
FA03	Los docentes tienen conocimiento de la argumentación como un proceso matemático que contribuye al desarrollo de competencias, debido al acercamiento a documentos curriculares, tales como los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN).	Vínculos entre el currículo de matemáticas y la argumentación

Para el indicador presentado con anterioridad, podemos evidenciar un conocimiento del profesor en torno a la existencia y exigencias de los documentos curriculares frente a la enseñanza de la argumentación [FT03]. De esto podemos inferir que los profesores saben que la argumentación es un proceso matemático, tendiente al desarrollo de competencias matemáticas.

De igual manera para el Estado 0, reportamos 4 datos que aluden a **tareas**, asociados al indicador *Pertinencia de una tarea con respecto al currículo y el contexto* (Tabla 20).

Tabla 20: Datos sobre tareas para la faceta ecológica en Estado 0.

Código	Dato	Indicador
FT02	Los profesores consideran que al diseñar una tarea se deben tener en cuenta aspectos tales como la selección del tema [...]	Pertinencia de una tarea con respecto al currículo y el contexto
FT04	Los profesores consideran que al diseñar una tarea se deben tener en cuenta aspectos tales como [...] el grado al cual pertenecen [los estudiantes] [...]	Pertinencia de una tarea con respecto al currículo y el contexto
FT05	Los profesores consideran que al diseñar una tarea se deben tener en cuenta aspectos tales como [...] las características de la institución y la población [...]	Pertinencia de una tarea con respecto al currículo y el contexto
FT06	Los profesores consideran que al diseñar una tarea se deben tener en cuenta aspectos tales como [...] los documentos curriculares [...]	Pertinencia de una tarea con respecto al currículo y el contexto

Respecto al indicador *Pertinencia de una tarea con respecto al currículo y el contexto* [FT02, FT04, FT05, FT06], los datos son evidencia del conocimiento didáctico – matemático de los profesores frente a los aspectos que deben ser tomados en cuenta para el diseño de una tarea. Para ellos, las características del contexto, de los estudiantes y de los documentos oficiales, no son indiferentes al ejercicio de diseñar una tarea que permita la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático específico.

A partir de la aplicación del Ciclo 1 que se desarrolló en torno a la argumentación y las tareas, los profesores comienzan a evidenciar que el buen uso del lenguaje es importante en la comunidad de Educadores Matemáticos. Cada término dependiendo del autor referenciado tienen similitudes y diferencias, esto lo pueden notar fácilmente en la definición de argumentación de la profesora Camargo y la del profesor Molina. Los profesores comienzan a preguntarse qué diferencias existen entre los diversos términos asociados a la argumentación. De igual manera son reflexivos en cuanto al uso indiscriminado del lenguaje y esa amalgama de términos que ellos evidencian en su conocimiento. Por esta razón nace la pregunta ¿Cuál es la diferencia entre los procesos de argumentación, explicación, justificación y validación?, que detonará la aparición del Ciclo 2 de la presente investigación.

5 Capítulo 5: Ciclo 2 de Investigación – Acción

5.1 Fase 1: Identificación del Problema que dio Lugar al Ciclo

En los textos narrativos que construimos en el Ciclo 1 observamos que en nuestro discurso se consideraban sinónimos los términos argumentación, explicación, justificación y validación. Esta situación fue explícita para nosotros durante la construcción del texto narrativo, pero al finalizar su escritura empezamos a problematizar este conocimiento, al preguntarnos si realmente esos términos hacen referencia al mismo proceso u objeto. Por esta razón, decidimos que la pregunta que guiaría el Ciclo 2 es: *¿Cuál es la diferencia entre los procesos de argumentación, explicación, justificación y validación?*

5.2 Fase 2: Plan de Acción para Movilizar el Conocimiento

Para abordar la pregunta formulada, diseñamos un grupo de estudio como plan de acción (Figura 7).

Figura 7: Plan de acción del Ciclo 2 (Grupo de estudio)



Respecto a los compromisos de los integrantes del grupo, se acordó la búsqueda de referentes teóricos, encuentros sincrónicos semanalmente para discutir los asuntos relacionados con la pregunta formulada y la preparación de una conferencia con profesores-estudiantes de la

maestría. Dentro de los referentes teóricos estudiados se encuentran Balacheff (2000), León y Calderón (2000), Camargo, Samper y Perry (2006) y Flores (2007).

5.3 Fase 3: Implementación de Acciones, Recolección de Información y Construcción de Datos Investigativos

Este plan de acción fue desarrollado durante el primer semestre de 2021 y las acciones grupales del mismo se desarrollaron por medio de la plataforma virtual TEAMS. Estas sesiones grupales fueron grabadas.

Los insumos recogidos durante la implementación de este plan de acción fueron los siguientes: 1) Transcripciones automáticas de los videos de las sesiones del grupo de estudio³; 2) Libreto de la preparación de la conferencia con profesores-estudiantes de la MDM, el cual incluye la explicación de los momentos de la sesión y las posibles respuestas a las preguntas que se prevén durante la sesión (Anexo 4).

De los dos insumos, extrajimos fragmentos que aludieran a argumentación, tareas o tareas de argumentación. En el caso de los fragmentos extraídos de las transcripciones automáticas, dado que éstas no incluían signos de puntuación, fue necesario mejorar la sintaxis de esos fragmentos para poder analizarlos. Posteriormente, eliminamos los fragmentos que repetían información. Los fragmentos que quedaron son los datos investigativos que se analizaron para dar cuenta y razón del conocimiento didáctico matemático sobre argumentación, tareas y tareas de argumentación en el Estado 2 y en un estado de transición entre el Estado 1 y el Estado 2. En el Anexo 3 se encuentran los datos clasificados de acuerdo con el asunto (DA: dato que alude a argumentación; DT: dato que alude a tareas; DTA: dato que alude a tareas de argumentación), el estado del conocimiento al que corresponde y el insumo del que proviene.

³ Debido a la extensión de las transcripciones automáticas, no se incluyen estos anexos al documento.

5.4 Fase 4: Proceso de Análisis de los Datos

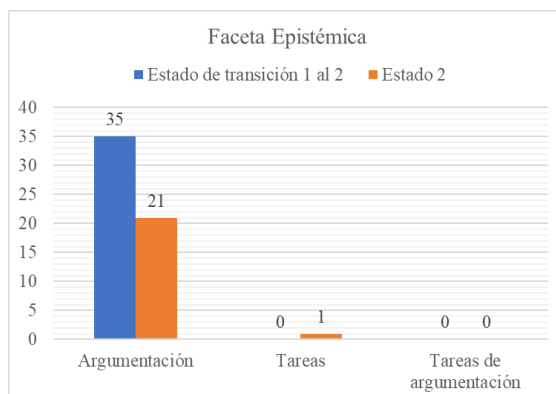
Esta fase se efectúa de igual manera como se realizó en el Ciclo anterior. Se toma como marco de referencia el CDM para realizar el análisis a luz de categorías emergentes ligadas a cada una de las facetas de la dimensión didáctica. En este Ciclo de IA aludimos a dos nuevos Estados del conocimiento: Estado de transición 1 – 2 y Estado 2. El Estado de transición 1 – 2 hace referencia a aquellos conocimientos rastreados durante la ejecución del plan de acción y que permiten la conformación del Estado 2. Por su parte, el Estado 2 del conocimiento alude al conocimiento sobre argumentación y términos afines, tareas y tareas de argumentación de los profesores al finalizar el Ciclo 2.

5.4.1 Análisis de datos Ciclo 2

5.4.1.1 Faceta Epistémica.

En la Figura 8 reportamos la cantidad de datos del Ciclo 2 asociados a la faceta epistémica, indicando el Estado de conocimiento al que corresponde y el asunto sobre el cual versan. Como se observa en esta figura, la mayoría de los datos hacen referencia a la argumentación. Esto se debe a que en el plan de acción del Ciclo 2 nos enfocamos en la definición y diferenciación de los términos afines a la argumentación, y no se trataron asuntos relacionados con tareas.

Figura 8: Datos correspondientes a la faceta epistémica para Ciclo 2.



5.4.1.1.1 Estado de Transición 1 al 2.

En este Estado del conocimiento, encontramos 35 datos que evidencian el conocimiento didáctico matemático de los profesores sobre **argumentación**. Estos datos están distribuidos en tres indicadores de la siguiente manera: 13 datos aluden a *Vocabulario especializado sobre argumentación*, 19 datos a *Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación* y 3 datos a *Elementos de un argumento*.

En la Tabla 21 mostramos los datos clasificados en el indicador *Vocabulario especializado sobre argumentación*.

Tabla 21: Datos sobre argumentación correspondiente al indicador Vocabulario especializado sobre argumentación para la faceta epistémica en Estado de transición 1 al 2.

Código	Dato
DA01	Comencé buscando [en el diccionario de la RAE] qué es la argumentación y simplemente encontré que es la acción de argumentar. Luego, amplí la búsqueda a lo qué significa argumentar y encontré que es aducir, alegar, o dar argumentos [...] Entonces, busqué qué es un argumento, y resulta que un argumento es un razonamiento para probar o demostrar una proposición, que convence, afirma o niega algo. Con esto, inmediatamente digo, que la argumentación tiene que ver algo con el razonamiento.
DA04	[...] [Después de revisar los apuntes de la clase de Investigación e Innovación considero que] para la comunidad matemática, existe una diferencia muy fuerte entre argumentar y razonar. La argumentación es una parte práctica del discurso. Entendamos el discurso como esa parte oral o escrita, lo que yo quiero decir, a partir de un razonamiento. Este último, con la intención de persuadir a las demás personas sobre si lo que estoy diciendo es verdad o falso.
DA08	[Revisando los apuntes del seminario de Profundización en Matemáticas Elementales], lo que dice el Profesor Óscar Molina, se parece mucho más a lo que dice Toulmin (Flórez, 2016). El profesor Oscar Molina dice que la argumentación es el proceso colectivo e individual, de acuerdo con unas reglas compartidas que apuntan a concluir la veracidad de una aserción.
DA12	El argumento es, cuando tengo una situación y quiero, de una u otra manera, sustentarla. Entonces, el argumento es un resultado del proceso de argumentación.
DA13	[Discutiendo acerca del significado de la palabra argumentación en la definición propuesta por León y Calderón (2003)] ¿Qué es una práctica? Para mí, la práctica es ese conjunto de acciones que se realizan de forma continuada y una práctica discursiva, es cuando yo estoy usando el discurso.
DA14	[Discutiendo acerca del significado de la palabra argumentación en la definición propuesta por León y Calderón (2003)] ¿Qué es una práctica? [...] Para mí, [el término] práctica hace referencia a los diversos momentos que un profesor debe tener en cuenta [cuando planea] su quehacer diario. [Estos momentos] son el antes, el durante y el después de una clase. [La práctica] no se limita únicamente a lo que se realiza en el aula.
DA15	La definición de León (2003), [sobre práctica discursiva], me dice que una práctica discursiva es una actividad verbal, social y racional.
DA16	La argumentación es esa faceta discursiva del razonamiento. Adicionalmente, la argumentación es la faceta ostensible del razonamiento porque me permite ver lo que estoy razonando.
DA17	La práctica discursiva son todas aquellas reglas constituidas, en un grupo único, en una comunidad específica, en un contexto particular y concreto, que posibilita un enunciado. Es decir, que cuando yo pertenezco a una comunidad, por ejemplo, a la comunidad matemática, entre todos debemos tener unas reglas compartidas.
DA18	Una expresión discursiva es aquella parte oral o escrita que un emisor envía para generar una comunicación. [Esta comunicación es] explícita y evitando ambigüedades, impresiones personales y emociones. Es decir, se trata de concretar las ideas y los datos de la manera más objetiva posible.
DA19	Pero [...] [las definiciones de] práctica y expresión [tienen] una pequeña diferencia. La práctica es lo que lleva a la acción y la expresión son esas oraciones que me permiten formar [un] discurso.

Código	Dato
DA20	La argumentación es el proceso y el argumento es el resultado. Entonces, la argumentación [está] ligada a la práctica discursiva y el argumento [está relacionado] a la expresión discursiva.
DA22	Un argumento es una expresión discursiva, tanto escrita como oral. Entonces, [...] la parte gestual no entra a formar [parte de] un argumento. [Lo gestual puede ser parte de un argumento] cuando el niño lo describe o [...] [lo] verbaliza, más no cuando está representado con los dedos o con un dibujo.

Los datos correspondientes al indicador *Vocabulario especializado sobre argumentación* nos permiten evidenciar el conocimiento del profesor en lo respecta a cinco asuntos: origen del conocimiento; definición de argumentación, argumentar, argumento, discurso, práctica y práctica discursiva; función de argumentación, argumentar y argumento; y los vínculos presentes entre los términos abordados en el indicador.

En lo que respecta al asunto del origen del conocimiento [DA01, DA04, DA08, DA13, DA14, DA15], los datos nos permiten identificar tres fuentes del conocimiento de los profesores: referencial, de autoridad y ligado a su quehacer. En los datos [DA01, DA08, DA13, DA14, DA15], los profesores acuden a diversos autores para presentar una definición de argumentación, argumentar, argumento, discurso, práctica y práctica discursiva. En [DA04, DA08], los profesores aluden a definiciones planteadas por los líderes de los seminarios de la MDM. Los datos [DA13, DA14] son evidencia del conocimiento de los profesores sobre el término práctica. La definición de este se realiza a partir del uso coloquial que se da al término. En [DA08] se presenta una comparación de dos fuentes. Los profesores contrastan una fuente referencial y una de autoridad para conformar una definición de argumentación que considera cercana a la comunidad de educadores matemáticos. Por último, los datos [DA13, DA14] surgen de problematizar la definición de argumentación presentada por un autor, en la cual se relaciona a este término con la expresión “práctica” desde su quehacer.

En lo correspondiente al asunto de las definiciones presentadas por los profesores, los datos [DA01, DA04, DA08] evidencian la definición de argumentación. Inicialmente, en [DA01] los profesores exhiben una enunciación de términos desde un contexto no especializado. Por su

parte, los datos [DA04, DA08] son evidencia de definición de argumentación desde un contexto especializado. Para esto, los profesores relacionan a la argumentación con las clases “práctica del discurso” y “proceso”. Esto se debe a que el origen de autoridad del conocimiento se ubica en dos líderes de los seminarios de la MDM. En cuanto a la definición de argumentar, el dato [DA01] nos permite identificar que los profesores, por medio de una búsqueda de significados en el diccionario, le otorgan la clase “acción”. Para la definición de argumento, los datos [DA01, DA12, DA22] son evidencia del uso de la clase “expresión discursiva”. Para los profesores, un argumento se conforma de expresiones escritas u orales que corresponden a ideas conectadas de forma lógica (razonamiento) y una función determinada. El dato [DA22] nos presenta un límite que los profesores manifiestan entre lo que se considera un argumento y lo que no. Este límite se ve marcado por la comunicación gestual. Para los profesores, lo gestual entra a formar parte de un argumento, siempre y cuando se describa por medio de lo escrito u oral.

Entre los términos definidos encontramos discurso, práctica y práctica discursiva. Los datos nos permiten inferir que los términos anteriores ayudan a los profesores a delimitar sus definiciones sobre argumentación, argumentar y argumento. Esta inferencia la podemos realizar puesto que entre las acciones realizadas por los profesores en el Ciclo 2, encontramos la búsqueda de referentes teóricos que usan dichos términos para estructurar una definición. Para el término discurso [DA04], los profesores lo relacionan como la faceta ostensible del razonamiento, puesto que les permite evidenciar por medio de la oralidad o la escritura aquellos procesos propios del pensamiento. En cuanto a la comprensión sobre el término práctica, los datos [DA13, DA14] nos permiten evidenciar un contraste entre dos concepciones. En [DA13], la práctica se liga con la clase “acción” en relación un proceso secuenciado. Por otro lado, en [DA14] se relación al término con la clase “momento temporal” con relación a lo que podemos

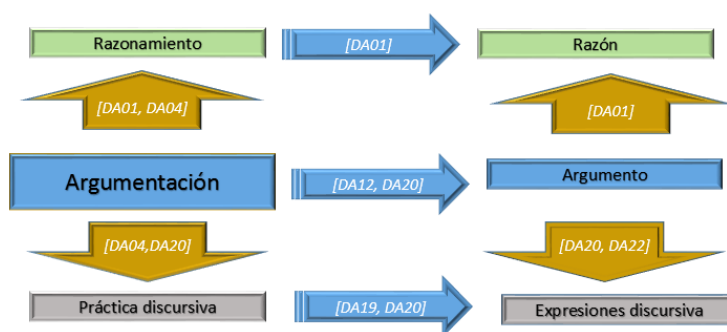
entender como práctica pedagógica. En lo que respecta a la definición de práctica discursiva [DA13, DA15, DA17], podemos inferir que los profesores inicialmente utilizan la definición de práctica presentada en [DA13] para utilizar la clase “acción” en el marco de la conformación de un discurso. Luego, en [DA15] se apoyan de un referente teórico para sustentar lo que ellos consideran como una práctica discursiva. Por último, el dato [DA17] es evidencia de una ampliación de la definición buscando explicitar el significado de las expresiones “social”, “verbal” y “racional” que se puede observar en [DA15]. En lo que concierne a la definición de expresión discursiva [DA18], los profesores le atribuyen la clase “elementos”, puesto que las expresiones discursivas son locuciones que posibilitan la comunicación entre individuos. Podemos inferir, con [DA17, DA18], que la comunicación se puede producir entre miembros de misma de la comunidad u otro contexto, siempre y cuando las expresiones discursivas estén medidas por la práctica discursiva del contexto en donde se presente la comunicación.

En lo que respecta al asunto de función, los profesores amplían las definiciones de argumentación, argumentar y argumento. En cuanto al primero, la función que se le atribuye es la de determinar la veracidad de una afirmación [DA04, DA08]. Para el segundo término, las “acciones” expresadas en la definición de argumentar [DA01] tienen como finalidad la producción de argumentos. Por último, la función del argumento se centra en demostrar proposiciones que afirman o niegan “algo” [DA01, DA12]. Esta última expresión no nos permite evidenciar sobre lo que se busca sustentar con el argumento.

Finalmente, en lo que corresponde al asunto de vínculos presentes entre los términos del vocabulario especializado sobre argumentación, en la Figura 9 podemos vislumbrar los vínculos encontrados entre los términos especializados sobre argumentación tales como razonamiento, razón, argumento, práctica y expresión discursivas. En [DA01] se puede notar que, para los

profesores, existe una relación de dependencia entre los términos razonamiento y argumentación y ven que sin el razonamiento no existe la argumentación. De igual manera evidencian una relación entre argumentación con argumento, esto se puede ver en [DA12, DA20]. Para ellos la argumentación es un proceso y el argumento es el producto de dicho proceso. En los datos [DA04, DA12, DA20, DA22] nos muestran como hacen una relación entre práctica discursiva con expresión discursiva, argumentación con práctica y expresión discursivas con argumento. En lo que respecta a la razón, podemos inferir que para los profesores la razón es al razonamiento como el argumento es a la argumentación.

Figura 9: Vínculos entre los términos del vocabulario especializado sobre argumentación.



En la Tabla 22 mostramos los datos clasificados en el indicador *Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación*.

Tabla 22: Datos sobre argumentación correspondiente al indicador Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación para la faceta epistémica en Estado de transición 1 al 2.

Código	Dato
DA02	[...] Busqué [en el diccionario de la RAE] qué significa justificación y encontré que es la acción y efecto de justificar. Inmediatamente, miré qué es justificar. Esto es, probar algo con razones convincentes, testigos o documentos.
DA03	[...] [Encontré en el diccionario de la RAE que] un razonamiento es la acción y efecto de razonar. Pero entonces, ¿qué es razonar? Encontré que es exponer razones. Ahora, una razón es un argumento o demostración que se aduce en apoyo de algo. Como que volví a lo mismo [a la definición de argumento].
DA06	[...] [Habiendo revisado los apuntes del seminario Innovación / Investigación] Y entonces, la profesora Leonor Camargo dice [parafraseando lo reportado en los apuntes]: el razonamiento y la argumentación están estrechamente vinculadas. El razonamiento es lo que yo pienso y la argumentación son partes del discurso de ese razonamiento. Se debe entender el razonamiento como el producto de conectar los conocimientos, las experiencias y los saberes; la información que tengo en mi poder para explicar y entender lo que está sucediendo a mi alrededor. [...] Aquí hay una premisa: un argumento es un razonamiento, pero no todo razonamiento se puede convertir en un argumento.

Código	Dato
DA07	Pues creo que, en mi clase tengo que ser mucho más consciente cuando utilice esos términos [argumentar, explicar, justificar, validar]. Es decir, cuando yo le diga a un niño: “por favor, justifique su respuesta”, lo que realmente le estoy pidiendo es algo diferente a cuando yo le digo: “por favor argumente su respuesta”. Cuando le pido al niño que argumente su respuesta es que construya, entre comillas, una especie de discurso donde tenga ciertas características. Este, debe tener una concatenación de argumentos. Esos argumentos deben tener datos, una justificación y una conclusión. Caso contrario de cuando yo le digo: “justifique su respuesta”. Justificar es solamente que me diga qué parte teórica fundamenta la respuesta.
DA09	Razonar es diferente de argumentar, y adicionalmente es distinto de justificar. [...] el razonamiento es como lo más grande, porque viene del pensamiento. La argumentación es esa parte discursiva del razonamiento, y está compuesta por una cantidad de argumentos que lo justifican. Adicionalmente, los argumentos tienen una estructura lingüística de la cual hace parte la justificación. Y la justificación se conforma por esos componentes teóricos que dan validez o refutan lo que yo estoy diciendo. Es decir que, para la comunidad de educadores matemáticos, razonar, argumentar y justificar son completamente distintos.
DA11	Lo que entiendo por razón es: un resultado de ese proceso de razonamiento, que ocurre en nuestras cabezas. [Una razón] son esos pensamientos e ideas que tengo y que empiezo a conectar para dar forma al discurso.
DA21	Una representación geométrica no es una proposición, porque de un gráfico no puedo decir si es falso o verdadero. La representación [me permite] obtener datos, aserciones y hasta de pronto, empezar a generar un argumento.
DA25	La exploración me permite empezar a decantar lo que estoy razonando. Los razonamientos son los que finalmente me van a empezar a generar argumentos.
DA26	[Al revisar a León y Calderón (2001)] similitud entre una demostración y una validación. La demostración, desde la comunidad de educadores matemáticos, se entiende como un proceso más formal [...]. Con la demostración estoy validando.
DA27	La definición de validación depende del contexto en donde me desenvuelva. Por ejemplo, en la Comunidad de matemáticos, una demostración es algo muy formal y nosotros, cuando iniciamos en la licenciatura en matemáticas, la demostración se hacía a dos columnas y tal vez está no sea tan formal como la de ellos.
DA28	La demostración es una validación.
DA29	La relación entre la demostración y la argumentación es que la demostración es la concatenación de argumentos deductivos.
DA30	[Cuando los estudiantes explican la solución de] un problema [por medio de un EGD], ellos mueven y arrastran [los puntos de la construcción] hasta mostrar que [...] se cumplen con las condiciones dadas [en el enunciado del problema].
DA31	Cuando justifico comienzo a buscar dentro de la teoría [aceptada] por la comunidad. Por ejemplo, la definición de mediatriz, en una [comunidad específica], puede ser el lugar geométrico que equidista de los extremos de un segmento. En otra [comunidad], la mediatriz [es] una recta perpendicular a un segmento, que pasa por el punto medio de este. Recurriendo a estos conceptos de la teoría es que se puede realizar la justificación.
DA32	Validar es determinar la validez de una aserción postulada, a partir de un sistema de conocimientos y normas [que] dependen de la comunidad en la que se desarrolla.
DA33	La diferencia entre argumentar y explicar se identifica en la función de cada proceso. [La función de] la explicación es hacer comprender, en cambio, la [función] de la argumentación es convencer o persuadir.
DA34	La explicación establece una relación asimétrica porque hay alguien que se reconoce con autoridad y otro que se reconoce sin autoridad. En cambio, la argumentación es una relación simétrica, ya que el locutor y el interlocutor entran en una discusión desde el mismo plano y con el mismo estatus [frente al conocimiento].
DA35	[Aunque los procesos de argumentación, explicación, justificación y validación] tienen nombres distintos [...] son muy parecidos, en el sentido que todos vienen del proceso de razonar. [...] Son minucias lo que los diferencian, [...] lo supremamente importante es la finalidad del proceso de argumentar. Si yo no colocó la finalidad del proceso de argumentar, simplemente, se puede decir que la explicación y la argumentación son lo mismo, y no lo son.
DA36	La definición de explicación es prácticamente la misma definición de la argumentación, es decir, son procesos discursivos que buscan o intentan justificar. [...] A diferencia de que, en la explicación ya no se intenta convencer ni persuadir al otro. [En la explicación] lo que se intenta es informar al otro ampliando lo que la otra persona reconoce, pero sin involucrar la persuasión.

Los datos correspondientes al indicador *Vocabulario especializado sobre términos afines*

a la argumentación nos permiten evidenciar el conocimiento del profesor en lo respecta a tres asuntos: origen del conocimiento; función de los términos; y los vínculos presentes entre los términos abordados en el indicador.

En lo que corresponde al asunto del origen del conocimiento los datos [DA02, DA03, DA06, DA11, DA26, DA27, DA28, DA32, DA36], nos permiten identificar cuatro fuentes del conocimiento de los profesores: referencial, de autoridad, coloquial y de propio ligado a la reflexión. En el dato [DA26], los profesores acuden a autores ligados a la comunidad de Educadores Matemáticos para presentar una definición de validación. En [DA02, DA03], los profesores aluden a definiciones más de uso coloquial planteadas en la RAE. El dato [DA02] hace referencia a la justificación y el dato [DA03] es en correspondencia al razonamiento. El dato [DA06] hace referencia a una definición planteadas por los líderes de los seminarios de la MDM que hace referencia a la definición de razonamiento. Los datos [DA11, DA28, DA32, DA36] son evidencia del conocimiento de los profesores en un origen propio resultado de contrastar fuentes referenciales, de autoridad y su quehacer diario. El dato [DA11] hace referencia a la definición de razonamiento y razón, los datos [DA28, DA32] hacen referencia a la validación y el dato [DA36] hace referencia a la explicación.

En lo que respecta al asunto de función, encontramos diversos datos [DA06, DA31, DA32, DA33] que permiten evidenciar las diferentes funciones para cada uno de los terminos afines a la argumentación, estos términos corresponden al razonamiento [DA 06], a la justificación [DA31], a la validación [DA32] y a la explicación [DA33, DA36]. En cuanto el razonamiento, [DA06] otorga la función de explicar y entender nuestro entorno, en cuanto a la justificación [DA31] que se le atribuye la función de dar razones dentro de una teoría aceptada por la comunidad, en lo que corresponde a la validación [DA32] la función que se le otorga es la de determinar la veracidad de una afirmación y en lo que corresponde a la explicación [DA33, DA36] es la de hacer comprender ampliando la información.

Para la relación entre los términos podemos encontrar en los datos [DA02, DA03, DA06, DA07, DA09, DA11, DA25, DA26, DA27, DA28, DA29, DA33, DA34, DA35, DA36], tres diferentes relaciones dentro de los datos presentados, estas relaciones están dadas por la comparación entre los términos y relaciones son: vínculos, diferencias y similitudes entre los términos. En lo que corresponde a los vínculos encontramos los datos [DA02, DA03, DA06, DA07, DA11, DA25, DA26, DA27, DA28, DA29] estos vínculos son entre argumentación y razonamiento, justificación y razonamiento, razón y razonamiento, razonamiento y argumentos, demostración y validación, validación y argumentos. En lo relacionado a las diferencias encontramos los datos [DA09, DA33, DA34] estas diferencias las encontramos en lo que corresponde a razonar y argumentar, argumentar y explicar y por último explicación y argumentación. A lo que refiere a la relación de similitud encontramos los datos [DA35, DA36] que corresponden a razonamiento y los términos argumentación, explicación, justificación y validación y la similitud entre la explicación y la argumentación.

Finalmente, para el tercer momento de análisis de datos de la faceta epistémica para el Estado de transición 1 a 2, presentamos análisis de datos que evidencian un conocimiento de los profesores sobre *Elementos de un argumento* (Tabla 23).

Tabla 23: Datos sobre argumentación correspondiente al indicador Elementos de un argumento para la faceta epistémica en Estado de transición 1 al 2.

Código	Dato
DA05	La argumentación es como una cadena de argumentos y entonces, el argumento se divide en varias partes [...] Para decir que un argumento es válido debe que tener una estructura.
DA23	Cuando se analizan argumentos en las transcripciones de los estudiantes, se puede presentar una garantía implícita, una aserción o unos datos implícitos; pero no puede estar todo implícito en el argumento.
DA24	El argumento no solamente se compone de tres elementos [dato, aserción y garantía], no es una cosa triádica. Como mínimo [el argumento] debe tener esa triada y [se debe] poder identificar.

En los datos [DA05, DA23, DA24] se puede evidenciar que, para los profesores, en el proceso de argumentación puede haber diversos argumentos [DA05]. Para ellos, un argumento se

puede distinguir sí cumple con una estructura determinada (tríadica) [DA24], aunque puede tener más elementos. Los elementos mínimos de un argumento son dato, aserción y garantía, alguno de ellos puede estar implícito, pero no más de uno y el profesor lo debe poder identificar [DA23].

5.4.1.1.2 Estado 2.

En el Estado 2, encontramos 21 datos que evidencian el conocimiento didáctico matemático de los profesores sobre **argumentación**. Estos datos están distribuidos en tres indicadores de la siguiente manera: Siete datos aluden a *Vocabulario especializado sobre argumentación* (Tabla 32), trece datos sobre *Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación* (Tabla 33) y un dato se ubica en *Elementos de un argumento* (Tabla 34). De igual manera que lo realizamos en el Estado de transición 1 a 2, presentaremos el análisis en tres momentos. En lo que sigue, presentamos el primer momento con los datos que evidencian el conocimiento sobre el indicador *Vocabulario especializado sobre argumentación* (Tabla 24).

Tabla 24: Datos sobre argumentación correspondiente al indicador Vocabulario especializado sobre argumentación para la faceta epistémica en Estado 2.

Código	Dato
DA41	En la comunidad [de práctica] de grado noveno, [cuando un estudiante] hace una señal de cruz con los dedos y dice "profe, es que es así"; [el profesor puede decirle] "no le valgo [la respuesta]", porque las normas de los niños de grado cuarto no son las mismas de un niño de noveno [...] Las normas atienden a un proceso histórico, un momento y un lugar específico.
DA43	Las prácticas discursivas son entendidas como las actividades de comunicación que se realizan en el marco de una comunidad específica y que hacen posible un discurso, atendiendo a un conjunto de reglas, constituidas en un proceso histórico que se va definiendo en una época concreta.
DA44	La expresión discursiva es aquella enunciación escrita u oral, que se realiza en el marco de la práctica discursiva, en el que el emisor trata de generar una comunicación eficaz evitando los datos ambiguos y las impresiones personales. La enunciación del tema debe ser clara desde el principio y las ideas que se van a expresar deben poseer una ordenación lógica.
DA50	[La argumentación es una] práctica discursiva que pretende convencer o persuadir de forma razonada a otro(s) sobre la veracidad de una aserción. La argumentación establece una relación simétrica, ya que el emisor y el receptor desarrollan una discusión en un mismo nivel del conocimiento. El producto de este proceso es el argumento.
DA51	La argumentación es una faceta discursiva del razonamiento, en tanto me permite expresar lo que se procesa en el pensamiento. Toda argumentación es un razonamiento, pero no todo razonamiento es una argumentación.

Código	Dato
DA52	[Un argumento es una] expresión discursiva que se emite con el propósito de convencer, persuadir, disentir o soportar la validez de una proposición. Su estructura, como mínimo, es ternaria y se compone de tres proposiciones: dato, aserción y garantía. La aserción es una proposición cuyo contenido o verdad se está considerando. El dato es hecho o información factual, que se invocan para justificar y validar la aserción. La garantía es la proposición que establece la conexión entre el dato y la aserción; esta puede ser un principio o una regla. Las proposiciones pueden ser implícitas, pero para precisar el argumento debe ser posible identificarlas.
DA55	[Un] argumento [...] colectivo se produce como resultado del proceso de argumentación llevado a cabo [en un conjunto de intervenciones de una comunidad de práctica].

En lo que correspondiente a este primer indicador, los datos nos permiten observar el conocimiento didáctico – matemático de los profesores sobre los siguientes asuntos: definición sobre práctica y expresión discursivas, argumentación y argumento; características y funciones de cada uno de los términos definidos; y vínculos entre algunos de ellos.

En lo que corresponde a las definiciones, los datos [DA41, DA43] son evidencia de la constitución del significado del término práctica discursiva a partir de la clase “actividad comunicativa”. La práctica discursiva al ser abordada desde esta clase adquiere un carácter social; y como actividad social requiere de reglas o normas que la medien. Estas, dependen del contexto específico de la comunidad de práctica. Luego, los profesores en [DA44] asocian a la expresión discursiva con la clase “enunciación”. En este sentido, todas aquellas declaraciones escritas y orales son consideradas como una expresión discursiva, puesto que permiten la conformación de un discurso por parte de un individuo. De igual manera, los datos nos muestran explícitamente que, las expresiones discursivas se ven mediadas directamente por la práctica discursiva. En cuando a la argumentación, podemos observar que [DA20] tiene una fuerte influencia en el significado que los profesores presentan en [DA50]. Los profesores presentan a la argumentación como una práctica discursiva, cuyo producto es el argumento. La argumentación vista como una actividad social se ve enmarcada por lo presentado en [DA43]. De la misma forma que los profesores exhiben una definición de argumentación, el dato [DA52] nos permite observar que al argumento se le atribuyen las características de una expresión discursiva. De esto, podemos inferir que para los profesores el argumento como producto de la

argumentación se ve mediado por las reglas o normas que se establezcan en el contexto donde se realiza la práctica discursiva.

Respecto al asunto de características, el dato [DA43] explicita el contexto en el cual se realiza la práctica discursiva atribuyéndole el significado de actividad social. Para la expresión discursiva, los profesores le atribuyen rasgos de claridad y secuenciación lógica de las ideas, como se evidencia en [DA44]. Todo esto mediado por la práctica discursiva. La argumentación vista como una actividad social que permite establecer la comunicación adquiere ciertos rasgos. Inicialmente, los individuos inmersos en este proceso obtienen un rol emisor y receptor. Adicionalmente, el discurso se desarrolla en un mismo nivel de conocimiento, lo que se denomina relación simétrica en [DA50]. Otro rasgo es la atribución de “faceta discursiva del razonamiento”. El dato [DA51] nos permite observar que, el razonamiento al ser un proceso propio del pensamiento no es tangible ni ostensible por sí solo. Pero, la argumentación, por sus características que posibilitan la conformación de un discurso, permite percibir lo que se razona. Lo anterior, nos muestra la relación entre argumentación y razonamiento presentada al final de [DA51], que a su vez se ve influenciada por [DA06]. Para el argumento [DA52, DA54], los profesores determinan una estructura ternaria. El dato [DA52] nos exhibe la comprensión de cada uno de los elementos. Así mismo, se le otorga la posibilidad de ser implícito a las proposiciones presente en un argumento, siempre y cuando estas puedan ser reconocidas. En [DA54] se presenta el significado de argumento colectivo.

Por último, en lo que respecta a las funciones para cada uno de los términos abordados en los datos, los datos exhiben una finalidad concreta y explícita. A continuación, presentamos cada una de ellas: i) Práctica discursiva (DA43), posibilitar discurso; ii) Expresión discursiva (DA44), generar una comunicación eficaz evitando los datos ambiguos y las impresiones personales; iii)

Argumentación (DA50), convencer o persuadir de forma razonada a otro(s) sobre la veracidad de una aseveración; iv) Argumento (DA52), convencer, persuadir, disentir o soportar la validez de una proposición.

El análisis realizado hasta el momento para el Estado 2, nos permiten evidenciar que, para los profesores, se torna relevante el manejo de una estructura fija para la conformación de definiciones. Esta estructura es la asignación de una clase, atribución de características y explicitación de la finalidad del proceso o término que se busca definir. Hacemos la claridad que, las definiciones no se presentan en este orden en todos los casos, y en otros se agregan algunas claridades.

Para el segundo momento, presentamos el análisis de datos que corresponden al indicador *Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación* (Tabla 25).

Tabla 25: Datos sobre argumentación correspondiente al indicador Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación para la faceta epistémica en Estado 2.

Código	Dato
DA37	[Cuando buscamos en el diccionario de la RAE el significado de] argumentar, validar, explicar y justificar, nos damos cuenta de que “son sinónimos” porque [...] están relacionadas con el proceso del razonamiento.
DA39	En algunos casos, cuando las clases están [mediadas por EGD], las justificaciones provienen de GeoGebra. Por ejemplo, nos damos cuenta de que simplemente con algo visual el niño me está justificando, [...] [cuando] nos dice “yo moví este vértice y vean [en la figura representada en la pantalla] cómo la congruencia se mantiene”.
DA40	[El profesor] puede asumir que para niños de segundo, tercero o cuarto de primaria, lo gestual hace parte de la justificación. Cuando los niños señalan con los dedos o dicen: “mire profe, [las líneas] son cómo los lados opuestos del tablero” [...] El profesor puede [interpretar] que son [líneas] paralelas. [El profesor] puede asumir que el niño con sus expresiones [está justificando] y es válido. [Esto] puede ser tomado como una garantía implícita.
DA42	[Los profesores] podemos aceptar algunas representaciones en entornos digitales como métodos de validación [...] Entonces, cuando un niño dice: “mire profe, es que pasa esto”, [el profesor] como autoridad dentro de esta comunidad puede decir si lo que ha visto [en el entorno digital] es válido [...] La validación depende de [lo que la comunidad de práctica] defina como válido.
DA45	[El razonamiento es una] actividad intelectual que busca manipular la información dada o adquirida para indagar, interpretar situaciones, determinar formas de proceder, relacionar, explicar, justificar, etc.; atendiendo a reglas de un sistema de conocimientos y experiencias.
DA46	[La explicación es una] práctica discursiva que busca, por medio de razones, describir un objeto de conocimiento o hecho particular. Su función es dar claridad y ejemplificar a partir de una ampliación cualitativa de la información. La explicación establece una relación asimétrica, ya que el receptor reconoce en el emisor una autoridad frente al conocimiento.
DA47	La explicación comprendida como un proceso comunicativo entre emisor y receptor, busca extender la comprensión de un hecho, fenómeno o concepto, más no convencer de forma intensional a otra persona. Por medio de la explicación, el emisor procura que el receptor del mensaje visualice algunas cualidades o puntos de vistas adicionales de lo que se busca explicar.

Código	Dato
DA48	[La justificación es una] práctica discursiva que permite encontrar razones para garantizar la veracidad de una aserción sobre un objeto de conocimiento o hecho particular, en el marco de un conjunto de proposiciones aceptadas por una comunidad. Las razones deben ser sólidas, coherentes, pertinentes y precisas.
DA49	[Las razones de una justificación] pueden ser parte de un sistema teórico, provenir de algún miembro experto o de autoridad en la comunidad, o por medio de construcciones en EGD. Esto, con la finalidad de soportar la veracidad de una aserción.
DA54	[La validación es un] proceso que proporciona las garantías para decidir acerca de la veracidad de una aserción. Para validar, se deben apropiar recursos técnicos y competencias argumentativas como símbolos, conceptos y prácticas, que permitan soportar la validez de una proposición frente a un conjunto de proposiciones aceptadas socialmente.
DA56	A pesar de que [explicar, justificar, argumentar y validar] tienen relación con el proceso del razonamiento, existen entre ellos diferencias en sus funciones. Cada uno de estos procesos posee una intensidad específica que le permite al profesor de matemáticas generar en sus estudiantes una forma concreta de razonar y actuar.
DA57	Si analizamos la estructura de las intervenciones y las relaciones entre los procesos abordados, podemos afirmar que la explicación, la justificación, la argumentación y la validación están desarrollados de forma lineal. Lo anterior, se origina desde una aserción, que si se hace necesario se explica para luego ser justificada y finalmente ser validada por medio de argumentos resultantes del proceso de argumentación.
DA58	La explicación busca que se amplíen las características y atributos de un proceso de construcción, de un objeto o hecho matemático, que hace parte de una aserción. Luego con esas características y atributos que se han explicitado, se busquen las garantías que validan la aserción que pasa a ser las justificaciones de esta. Estas justificaciones pueden convertirse en parte de la garantía de un argumento que se construye con la aserción y los datos. Todo este proceso es lo que llamamos argumentación.

Para este indicador, los datos nos permiten evidenciar que el conocimiento didáctico – matemático de los profesores alude a los siguientes asuntos: definición de razonamiento, explicación, justificación y validación; funciones y características de los procesos ya mencionados. Estos asuntos les permiten a los profesores abordar la solución de la pregunta postulada para el Ciclo 2. Antes de iniciar el análisis sobre cada uno de los asuntos, destacamos el dato [DA37]. En este, podemos evidenciar un primer acercamiento de los profesores a la pregunta por medio de una búsqueda inicial del uso de los términos desde un lenguaje no especializado. Con esta acción, los profesores evidencian el significado de términos similares para argumentar, validar, explicar y justificar, y su conexión con el razonamiento. Podemos inferir que, el resultado obtenido de esta acción lleva a los profesores a recurrir a autores que utilicen los términos en un contexto específico, como lo es el campo de la educación matemática.

Para el asunto que alude a las definiciones, el dato [DA45] nos permite observar que para el razonamiento se otorga la clase “actividad intelectual”. Con esto, este término se comprende como una acción propia del pensamiento. De esto, podemos inferir que el razonamiento no se puede evidenciar por sí solo; para ello, se debe recurrir a alguna manifestación del discurso. En

cuanto a los términos explicación [DA46] y justificación [DA48], los profesores le asignan la clase “práctica discursiva”. Con esto, las definiciones adquieren las características que se presentan en [DA43]. Para la validación, en el dato [DA54] se utiliza la clase “proceso”, definiendo a este término como una consecución de acciones intencionadas para lograr un propósito.

En lo que respecta a las funciones, los datos nos permiten evidenciar aspectos que ocasionan diferencias notorias entre cada uno de los términos afines a la argumentación. El razonamiento busca “indagar, interpretar situaciones, determinar formas de proceder, relacionar, explicar, justificar, etc.” [DA45]; mediante el tratamiento de la información que el sujeto tiene u obtiene. Con esta función, podemos observar una conexión con la información presentada en [DA37], en donde la explicación, justificación y validación tienen relación con el razonamiento. A partir de lo anterior, podemos inferir que esta relación lleva a los profesores a utilizar la clase “actividad intelectual” para definir al razonamiento; dándole la etiqueta de “punto de partida” para la ejecución de los otros términos afines. Para la explicación, se presenta la finalidad de esta como la descripción de un objeto de conocimiento o hecho particular, por medio de razones [DA46]. Los datos [DA46, DA47] presentan de forma explícita a la explicación como proceso comunicativo que extiende cualitativamente la información, más no el convencimiento a otra persona. Con esto, se presenta una diferenciación entre la explicación y la argumentación. Para la justificación, el dato [DA48] exhibe que la función de este término es encontrar razones para garantizar la veracidad de una aserción sobre un objeto de conocimiento o hecho particular. Con este dato, los profesores expresan la diferencia entre explicación, justificación y argumentación. Por último, los profesores exhiben que la validación proporciona las garantías para decidir acerca de la veracidad de una aserción [DA54]. Por el momento, se presentan a la justificación y

validación como términos que comparten una función similar. El análisis sobre estos dos términos los abordaremos en lo que sigue.

En lo correspondiente al asunto de las características que los profesores le otorgan a los términos, el dato [DA45] nos permite observar que el razonamiento está ligado a las normas vigentes de un sistema de conocimientos y experiencias, que atienden a un contexto específico. Como inferencia de esto, podemos asumir que las expresiones discursivas que los profesores definieron con anterioridad son una forma de evidenciar la forma como una persona razona. Los datos [DA46, DA47] otorgan a la explicación las características de una relación comunicativa entre dos individuos. En este caso, una relación asimétrica, puesto que, quien recibe la explicación reconoce en quien la emite una autoridad frente al conocimiento. Esta comunicación busca que el receptor del mensaje evidencie cualidades o ideas adicionales, del tema que es objeto de la comunicación. Los datos no nos permiten evidenciar si las explicaciones están regidas por reglas, como sucede con las prácticas discursivas. Pero, podemos inferir que, la explicación al definirse como una práctica discursiva; las explicaciones producto de esta se pueden tomar como expresiones discursivas. En cuanto a la justificación, en [DA48, DA49] se evidencia que, una justificación está conformada por razones. A estas, se le atribuyen las particularidades de ser sólidas, coherentes, pertinentes y precisas [DA48]. Los profesores enmarcan a las razones dentro de un sistema de conocimientos aceptados por una comunidad específica [DA49]. El dato [DA39] es evidencia de un ejemplo de justificación cuando se usa EGD. Las justificaciones son aceptadas puesto que las construcciones realizadas en el software están en concordancia con un sistema teórico aceptado por toda la comunidad. Estas justificaciones iniciales son visuales y el estudiante las interpreta para hacerlas parte de su discurso. Otro ejemplo es presentado en [DA40], en este caso la justificación se realiza desde lo

gestual. El profesor es quien aprueba estas justificaciones dependiendo del contexto. Así mismo, se realiza una conexión con el argumento, puesto que se indica que las justificaciones realizadas de esta forma pueden ser tomadas como una garantía implícita. Respecto a la validación, los datos [DA42, DA54] son evidencia de las características que los profesores le otorgan a este término. La validación se apoya en el uso de recursos técnicos y competencias argumentativas [DA54]. La aceptación de la validación depende de la comunidad de práctica, ya que los miembros con autoridad pueden definir aquello que es válido. Un ejemplo son las construcciones en los EGD [DA42]. De los datos podemos inferir que la demostración, al ser un recurso técnico que permite determinar la validez de una proposición, puede ser tomada como una manera formal de la validación.

En lo que respecta al asunto de la relación entre explicar, justificar, validar y argumentar, los datos son evidencia del conocimiento sobre una conexión lineal de los tres primeros términos, que conllevan a la argumentación [DA57, DA58]. La explicación aporta características del objeto que se estudia; luego se plantean razones que conforman la justificación y la construcción de las garantías que pueden llegar a validar una proposición. Los argumentos son el resultado de la reunión de los datos, la aserción y las garantías obtenidas [DA58]. El dato no nos permite evidenciar el momento en donde se obtienen los datos y la aserción. Queremos finalizar esta parte del análisis, destacando el accionar de los profesores para diferenciar los términos afines a la argumentación. Para ellos, la solución a la pregunta que origina este ciclo se basó en la conformación de definiciones especializadas de los términos por medio de una clase, funciones y características propias a cada término [DA56].

Por último, terminamos el análisis de la faceta epistémica con respecto a argumentación para el Estado 2, con el único dato que alude al indicador *Elementos de un argumento* (Tabla 26).

Tabla 26: Datos sobre argumentación correspondiente al indicador *Elementos de un argumento* para la faceta epistémica en Estado 2.

Código	Dato
DA53	Ejemplo de [una garantía implícita] son las expresiones que un profesor de primaria acepta como parte de un argumento, como lo pueden ser los gestos o cualidades de un objeto del conocimiento.

El dato es evidencia de un conocimiento de los profesores sobre la comprensión e identificación de un elemento implícito en un argumento. Para ellos, la garantía puede ser implícita y debe respetar ciertos criterios. Estos, se pueden inferir como las diversas formas gestuales en la que un estudiante puede representar características de un objeto matemático. Una inferencia adicional que podemos realizar es el contexto en el cual se aceptan este tipo de garantías. Para los profesores, en los primeros niveles de escolaridad, son válidas las formas gestuales como una garantía en un argumento.

Finalmente, en el Estado 2, encontramos un dato que hace referencia a **tareas**. Este dato está asociados al indicador *Vocabulario especializado sobre tareas*. (Tabla 27).

Tabla 27: Datos sobre tareas para la faceta epistémica en Estado 2.

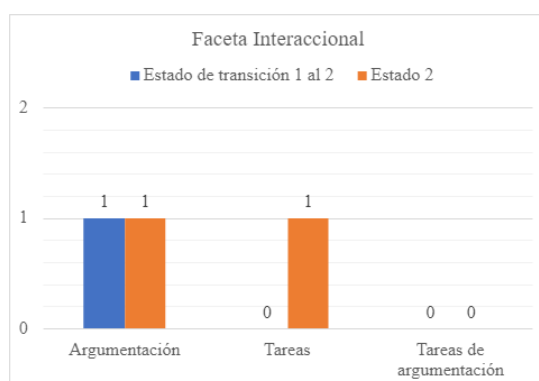
Código	Dato	Indicador
DT01	Cuando vamos a diseñar tareas, quisiéramos que, cuando le digamos al niño explique [...] sepamos exactamente qué es lo que él me tiene que contestar.	Vocabulario especializado sobre tareas

El dato nos permite evidenciar el conocimiento respecto a la importancia de la comprensión de términos especializados por parte del profesor. La instrucción debe contener expresiones que tanto los profesores como lo estudiantes comprendan de igual manera. De lo anterior, hacemos claridad sobre el uso de la expresión “instrucción”. Inferimos que los profesores se refieren a la instrucción de una tarea puesto que usa la expresión “cuando vamos a diseñar tareas” conectada con “cuando le digamos al niño”.

5.4.1.2 Faceta Interaccional.

En la Figura 10 reportamos la cantidad de datos del Ciclo 2 asociados a la faceta interaccional, indicando el Estado de conocimiento al que corresponde y el asunto sobre el cual versan. La poca presencia de datos en esta faceta se debe que los asuntos relacionados con la diferencia entre argumentación, justificación, explicación y validación atañen principalmente a la faceta epistémica. En este escenario, asuntos relacionados con interacciones surgen en el marco de la conformación de algunas de las definiciones de términos especializados sobre la argumentación o términos afines.

Figura 10: Datos correspondientes a la faceta interaccional para Ciclo 2.



5.4.1.2.1 Estado de Transición 1 al 2.

En el Estado de transición de 1 al 2, reportamos un dato que alude a la **argumentación**, que está asociado al indicador *Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que promueve la argumentación* (Tabla 28).

Tabla 28: Datos sobre argumentación para la faceta interaccional en Estado de transición 1 al 2.

Código	Dato	Indicador
DA10	¿Cómo es esto de la relación argumentativa entre el profesor y los estudiantes? [...] Son esos momentos en los cuales el estudiante explica o expresa de una u otra manera lo que él piensa acerca de una situación, un concepto, una definición al profesor. Luego de esto, el profesor lo que hace es corregir algún error o empezar a mostrarle el camino por donde el estudiante puede llegar a esas definiciones que el profesor quiere. [...] es como entablar esa comunicación asertiva buscando mejorar el proceso argumentativo; de tal manera que cuando el estudiante se exprese frente a mí, él pueda crear argumentos, justificaciones, validaciones o explicaciones de la mejor manera posible.	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que promueven la argumentación

En lo concerniente a este indicador, el dato [DA10] evidencia el conocimiento de los profesores en lo que respecta a la interacción profesor – estudiante y su función en el marco de la promoción del proceso argumentativo. El dato permite observar que el profesor considera que las interacciones que buscan la negociación de significados favorecen la conformación de argumentos. Dichos significados están en concordancia con los conocimientos matemáticos del profesor. En lo que respecta a la expresión “relación argumentativa”, los profesores le otorgan el significado del conjunto de los momentos en los cuales ocurre lo mencionado con anterioridad. La finalidad de esto es la mejora en la construcción argumentos, justificaciones, validaciones o explicaciones por parte del estudiante.

5.4.1.2.2 Estado 2.

En el Estado 2 reportamos un dato de **argumentación**, correspondiente a *Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que promueve la argumentación* (Tabla 29).

Tabla 29: Datos sobre argumentación para la faceta interaccional en Estado 2.

Código	Dato	Indicador
DA38	Nos hemos dado cuenta de que, definitivamente, el uso del lenguaje dentro de una comunidad es supremamente importante. [No se puede dar una instrucción al niño sin conocer la finalidad de los términos que se usan]. Sin esta precisión, cualquier respuesta del niño puede estar bien o mal porque el [profesor es quién] juzga la respuesta, sin tener claro lo que está pidiendo.	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que promueven la argumentación

El dato [DA38] es evidencia del conocimiento del profesor en lo concerniente al uso del lenguaje especializado y su impacto en la interacción profesor – estudiante. Podemos inferir que, para los profesores es relevante usar términos especializados en la instrucción que se le aporta a los estudiantes, puesto que les permite realizar una actividad específica. De igual manera, se hace la claridad de que el uso de los términos debe ir acompañado por un conocimiento sobre la función de cada uno. El profesor como miembro representante en el aula de la comunidad de educadores matemáticos, debe tener el conocimiento mencionado para que el proceso de validación sea correcto y en concordancia con el contexto.

Por último, en el Estado 2 encontramos un dato que alude a **tareas** y está asociado al indicador *Función de las interacciones durante el desarrollo de una tarea* (Tabla 30).

Tabla 30: Datos sobre tareas para la faceta interaccional en Estado 2.

Código	Dato	Indicador
DT02	[En la explicación] el profesor asume un rol de receptor, permitiendo a los estudiantes adquirir el papel de emisores “expertos en el asunto”.	Función de las interacciones durante el desarrollo de una tarea

Para este dato, podemos evidenciar un conocimiento en lo que respecta a la importancia del papel que desempeña el profesor cuando interactuar con sus estudiantes, en el marco de la ejecución de un proceso de enseñanza – aprendizaje, en este caso, la explicación. Podemos inferir que, el dato hace parte de la conformación de una definición sobre explicación [DA46]. El dato [DT02] nos exhibe el significado que los profesores le otorgan a la expresión “relación asimétrica” presentada en [DA46] y abordada en [DA47].

6 Capítulo 6: Ciclo 3 de Investigación – Acción

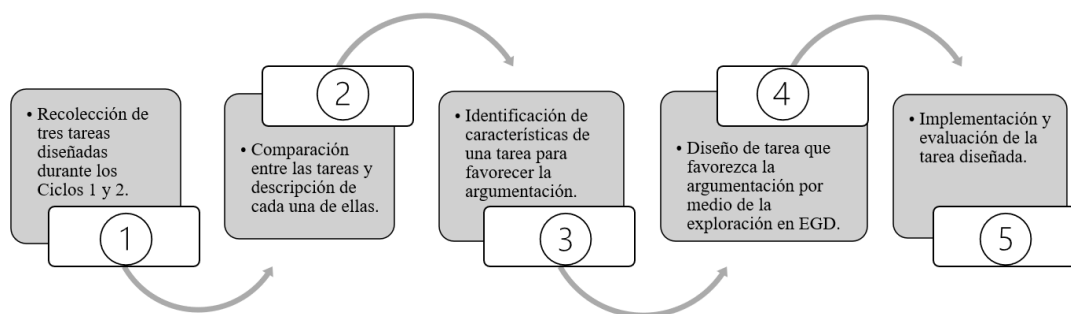
6.1 Fase 1: Identificación del Problema que dio Lugar al Ciclo

En la fase final del Ciclo 2, surge un interrogante sobre como la diferenciación de los términos argumentación, explicación, justificación y validación podrían impactar al momento de diseñar una tarea que promueva la argumentación por medio de la exploración en un EGD. Este cuestionamiento tiene fundamento en aquellas tareas en las cuales los profesores usaban dichos términos especializados de forma no especializada. La diferenciación de los terminos afines a la argumentación que se logra al finalizar el Ciclo 2, otorga a los profesores herramientas conceptuales para el diseño de una instrucción en la tarea que permita que la actividad del estudiante sea acorde a la demanda de la tarea.

6.2 Fase 2: Plan de Acción para Movilizar el Conocimiento

Para este ciclo, estructuramos un plan de acción que se lleva a cabo en cinco etapas, como se puede visualizar en la Figura 11.

Figura 11: Plan de acción Ciclo 3.



En lo concerniente a la Etapa 1, se seleccionan dos tareas que habían sido diseñadas previamente por los profesores con el propósito de favorecer la producción de argumentos: una tarea que fue diseñada por uno de los profesores para una de sus clases de geometría, mientras cursaba el segundo semestre (Anexo 5) y una en el marco de un seminario del primer semestre de la MDM (Anexo 5). En la Etapa 2, se toman como referentes teóricos los elementos del

diseño de una tarea propuestos por Gómez, Mora y Velasco (2015) y la caracterización del tipo de tareas geometría que promueve la argumentación propuesta por Triana y Zambrano (2016), para realizar una comparación entre las dos tareas centrándonos en aspectos relevantes. La comparación permite construir una descripción detallada de cada una de las tareas (Anexo 6).

En lo que respecta a la etapa tres, los profesores parten de la crítica y la comparación realizada a las dos tareas para postular un modelo para el diseño de tareas en busca de favorecer la argumentación aprovechando los Entornos de Geometría Dinámica. Para ello, se basan en el diseño de Análisis de instrucción que proporciona Gómez et al. (2015), las condiciones que posibilitan promover el desarrollo de la competencia argumentativa en el aula de matemáticas que presenta Solar y Deulofeu (2016), las características que debe tener el diseño de una tarea matemática que promueva la argumentación que propone Jiménez y Carreño (2018), los procesos subyacentes a la actividad demostrativa que postula Camargo, Samper y Perry (2006) y las acciones que se fortalecen en el ambiente de aprendizaje apoyado con GeoGebra que presenta Reyes (2017) (Anexo 6 – Etapa 3).

Para la etapa cuatro, los profesores diseñan una tarea que permita en los estudiantes favorecer la argumentación (Anexo 5). Para tal fin, se toman como punto de partida la comparación realizada en la etapa dos y el modelo postulado en la etapa tres. Con esto, se logra evidenciar una transformación del conocimiento didáctico – matemático de los profesores en aquellos asuntos involucrados en el diseño de una tarea. Finalmente, el cierre del plan de acción se ejecuta por medio de la implementación y evaluación de la tarea diseñada. La contextualización y las normas socio – matemáticas del grupo con el cual se implementó la tarea se puede consultar en el Anexo 6.

6.3 Fase 3: Implementación de Acciones, Recolección de Información y Construcción de Datos Investigativos

El plan de acción propuesto para Ciclo 3 fue desarrollado durante el segundo semestre de 2021. Las acciones se ejecutaron por medio de la plataforma TEAMS y en la institución educativa seleccionada para implementar la tarea diseñada.

Los insumos recolectados durante la implementación del plan de acción fueron los siguientes: 1) Transcripciones automáticas de los videos de las sesiones en las cuales se desarrollan las etapas 1 a 4 del plan de acción; 2) Cuadro comparativo de las tareas seleccionadas en la etapa dos del plan de acción (Anexo 6); 3) Criterios que surgen de la comparación, sobre el diseño de una tarea que promueva la argumentación (Anexo 6); 4) Diseño de la tarea tendiente a promover la argumentación (Anexo 6).

La recolección y construcción de datos se realizó de forma similar a la expuesta en el Ciclo 2. Los datos investigativos son los diversos fragmentos de los insumos que serán analizados para lograr evidenciar una transición de un Estado 2 hacia un Estado 3 del conocimiento (Anexo 3).

6.4 Fase 4: Proceso de Análisis de los Datos

Esta fase se efectúa de igual manera como se realizó en los ciclos anteriores. Se toma como marco de referencia el CDM para realizar el análisis a luz de categorías emergentes ligadas a cada una de las facetas de la dimensión didáctica. Para el Ciclo 3 se presentan los siguientes Estados del conocimiento didáctico – matemático de los profesores: Estado de transición 2 – 3 y Estado 3. El Estado de transición 2 – 3 hace referencia a aquellos conocimientos rastreados durante la ejecución del plan de acción del Ciclo 3 y que permiten la conformación del Estado 3. El Estado 3 alude al conocimiento sobre argumentación, tareas y tareas de argumentación de los

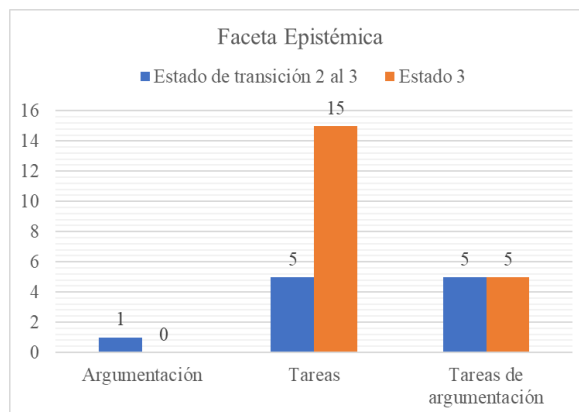
profesores al finalizar el Ciclo 3. De igual manera que lo realizamos en el Ciclo 1 y 2, los datos que aluden a la práctica de los profesores y/o reflexiones, no fueron tomados en cuenta para el análisis.

6.4.1 Análisis de datos Ciclo 3

6.4.1.1 Faceta Epistémica.

En la Figura 12 reportamos la cantidad de datos del Ciclo 3 asociados a la faceta epistémica, indicando el Estado de conocimiento al que corresponde y el asunto sobre el cual versan. La agrupación de los datos para el Ciclo 3 nos permiten identificar los siguientes comportamientos, i) la mayor parte de los datos corresponden al Estado 3; ii) la concentración más fuerte son aquellos datos que aluden a tareas; y iii) la argumentación presenta un trabajo leve. Lo anterior, se presenta a causa del plan de acción llevado a cabo y la pregunta propuesta para iniciar este último ciclo de investigación. Luego de clarificar asuntos correspondientes al uso de términos especializados en el marco del diseño de tareas, para los profesores se tornó relevante un trabajo conjunto de los conocimientos adquiridos en los Ciclos 1 y 2. Con esto, se buscaba profundizar en conocimientos didácticos – matemáticos en lo que respecta al diseño de tareas que promueven la argumentación.

Figura 12: Datos correspondientes a la faceta epistémica para Ciclo 3.



6.4.1.1.1 Estado de Transición 2 al 3.

En este Estado, encontramos un único dato que evidencia el conocimiento de los profesores sobre **argumentación**. Este dato está asociado al indicador *Elementos de un argumento* (Tabla 31).

Tabla 31: Datos sobre argumentación para la faceta epistémica en Estado de transición 2 al 3.

Código	Dato	Indicador
TA01	Las garantías [que obtiene un estudiante] son diferentes [...] cuando [estas] surgen [durante el proceso de] construcción, que cuando [emergen del proceso de] exploración.	Elementos de un argumento

El dato es evidencia del conocimiento de los profesores en lo que respecta a los posibles orígenes de una garantía que conforma un argumento. Podemos denotar una diferenciación entre las garantías que un estudiante puede obtener durante la construcción que soporta una situación o la exploración que puede realizar a partir de la construcción. El dato no nos permite identificar en qué se diferencian las garantías; pero podemos inferir que, para los profesores, las garantías dependen directamente del tipo de actividad desarrollada por el estudiante.

En el Estado de transición 2 al 3 también encontramos cinco datos que son evidencia del conocimiento respecto a **tareas**. De estos, cuatro están asociados al indicador *Elementos de la tarea* y uno está vinculado al indicador *Tipos de tareas* (Tabla 32).

Tabla 32: Datos sobre tareas para la faceta epistémica en Estado de transición 2 al 3.

Código	Dato	Indicador
TT02	[...] Nos damos cuenta de que los requisitos [de una tarea] son conocimientos que el estudiante necesita. [Por ejemplo] conocimientos como recta, segmento, relación entre rectas [...] triangulo o tipos de triangulo [son conocimientos necesarios para abordar una tarea] [...] [De acuerdo con la tarea,] si el estudiante debe tener una destreza con una herramienta digital, entonces, la destreza también sería parte de los requisitos.	Elementos de la tarea
TT03	El propósito [de una tarea] es [el objetivo por el cual] el profesor [diseñó] la tarea. [Lo que se busca con la tarea] [...] tiene que estar relacionado con lo que se espera que el estudiante aprenda.	Elementos de la tarea
TT04	Las expectativas de aprendizaje [es aquello] [...] que el profesor espera que el estudiante logre aprender o desarrollar. Y también, de pronto, superar algunos errores o dificultades. La tarea no siempre tiene que apuntar únicamente a que el estudiante desarrolle [algo específico], sino que también el estudiante supere ciertas cosas que de pronto [el profesor] se ha dado cuenta en sus sesiones de clase.	Elementos de la tarea
TT05	[...] En general, la formulación de una tarea matemática describe un contexto, pero proporciona una información inicial y requiere que los estudiantes produzcan una información final como solución.	Elementos de la tarea
TT08	[Una tarea abierta permite] diferentes procedimientos matemáticos que posibilitan [...] llegar a la respuesta. [Una tarea con] respuesta abierta es cuando una tarea presenta la posibilidad de que los estudiantes [encuentren] varios tipos de respuesta.	Tipos de tareas

En lo correspondiente al indicador *Elementos de la tarea* [TT02, TT03, TT04, TT05], podemos evidenciar que en los datos se aluden al significado que los profesores les otorgan a cuatro elementos de una tarea: requisitos, propósito, expectativas y formulación. Los requisitos son vistos en dos aspectos: conocimientos básicos y destrezas [TT02]. Ambos, les permiten a los estudiantes abordar la tarea. Podemos inferir que estos requerimientos conforman los conocimientos básicos que un estudiante necesita para solucionar una tarea y que el profesor debe tener en cuenta para el diseño.

En cuanto al propósito, este es la razón que “motiva” al profesor a diseñar una tarea. Utilizamos la palabra “motiva” ya que en [TT03] el propósito se relaciona con el objetivo que lleva al profesor a efectuar el diseño. Además, podemos observar que el propósito debe estar en concordancia con las expectativas de aprendizaje del profesor. Lo anterior, nos permite mencionar al dato [TT04] en el cual se enuncia el significado que los profesores le atribuyen a la expresión “expectativas de aprendizaje”. Estas son vistas como aquello que los estudiantes aprendan o desarrollan. El dato nos permite evidenciar que las expectativas también se comprenden como errores o dificultades que el profesor ha detectado.

Por último, la formulación de una tarea es descrita como una instrucción que se da a los estudiantes que consta de dos partes: una información inicial y una información final [TT05]. En otras palabras, la formulación de una tarea debe proporcionar un contexto, dar indicaciones que guíen al estudiante en el desarrollo y solución de la tarea. De igual manera que lo mencionamos para el Estado 1, los elementos de una tarea que los profesores exhiben llevan una concordancia con los elementos propuestos por Gómez (2015) en su análisis de instrucción.

En lo que respecta al indicador *Tipos de tareas*, el dato [TT08] es evidencia del conocimiento con respecto a los tipos de tarea en dos vías: Las tareas abiertas y las tareas con

respuesta abierta. Para la primera, se explicita que este tipo de tarea posibilita diversos caminos a una solución. En cuanto a la segunda, este tipo de tarea permite que los estudiantes obtengan múltiples respuestas. Podemos inferir, que esto último surge mediante diversas actividades. El dato no nos permite realizar una conexión entre los dos tipos de tareas presentadas por los profesores.

Finalmente, en el Estado de transición 2 al 3 para la faceta epistémica, encontramos cinco datos que exhiben el conocimiento en lo que respecta a **tareas de argumentación**. Los datos se encuentran distribuidos de la siguiente manera: un dato está asociado al indicador *Tipos de problemas y su relación con los tipos de argumentos*, tres datos están vinculados al indicador *Tareas que favorecen la argumentación* y un dato está clasificado en el indicador *Procesos involucrados en una tarea que favorece la argumentación* (Tabla 33).

Tabla 33: Datos sobre tareas de argumentación para la faceta epistémica en Estado de transición 2 al 3.

Código	Dato	Indicador
TTA01	Si [en una tarea] se le da [al estudiante] la construcción, los argumentos me tienen que salir en la exploración. O sea, si yo quiero generar problemas en donde la exploración [permita el surgimiento de argumentos], tengo que [otorgarle las] construcciones [al estudiante].	Tipos de problemas y su relación con los tipos de argumentos
TTA02	[...] Un problema que me permite diferentes procedimientos, respuestas y posturas, es una tarea más rica en el momento de la socialización. [Puesto que,] tengo que convencer a los demás [de la veracidad de mi respuesta] y [las otras personas pueden] [...] intentar convencerme [de la veracidad de su trabajo].	Tareas que favorecen la argumentación
TTA03	Hay dos tipos de tarea, la tarea abierta y la tarea cerrada. La tarea cerrada, es de tipo algorítmica o memorística. [Ejemplo de esto son los enunciados del tipo:] utilice el concepto o resuelva el ejercicio. Una tarea abierta es todo lo contrario, es aquella que facilita procesos, busca la argumentación y la solución de problemas. El problema no es de solución inmediata, se tiene que buscar una estrategia, usar conocimientos [previos] y [permite la adquisición de] nuevos conocimientos y habilidades.	Tareas que favorecen la argumentación
TTA04	Según Ortiz y Carreño (2019) una tarea de argumentación debe tener tres características muy importantes. La primera característica es poder promover la comunicación, eso significa que al momento del abordaje de la tarea se pueden abordar de diferentes formas; si hay una única forma, puede promover la argumentación, pero no de la mejor manera. La segunda característica es tener diversas soluciones, se puede llegar a la misma respuesta, pero de diferentes formas. La tercera característica es crear polémica porque la argumentación se trata de convencerse a uno mismo y a los demás.	Tareas que favorecen la argumentación
TTA05	[En una] tarea [que] promueve la explicación [más que la argumentación] [...] [la construcción y] la exploración [son guiadas y] todos los niños terminan [realizando] lo mismo. [...] Entonces, cuando llega el momento de [la] socialización [...] solamente una persona va a intervenir. [...] Esta persona va a narrar lo que sucedió, y todos los demás van a decir "sí, pasó eso".	Procesos involucrados en una tarea que favorece la argumentación

Para el primer indicador, el dato [TTA01] es evidencia del conocimiento sobre el impacto que tiene el limitar un proceso en la tarea sobre el surgimiento de un argumento. Para los profesores, la decisión de dar o no la construcción a los estudiantes, influye directamente sobre el momento en el cual se pueden originar argumentos. Podemos inferir que, el surgimiento de argumentos está ligado a la actividad que los estudiantes desarrollan en los procesos que conllevan a la solución de una tarea. En este caso, se explicita que los argumentos deben surgir en la exploración, si la construcción es dada por el profesor. No se evidencia si los argumentos también pueden surgir en otros momentos, como por ejemplo en la conjeturación o la validación.

En lo correspondiente al indicador *Tareas que favorecen la argumentación* [TTA02, TTA03, TTA04], encontramos dos asuntos: las características de una tarea de argumentación y la descripción de algunas de estas. El dato [TTA04] nos permite evidenciar un conocimiento referencial teórico sobre el primer asunto. En este, se plantean tres características que una tarea debe tener para promover en los estudiantes procesos argumentativos. De este conocimiento, los profesores conectan con los tipos de tareas [TTA03], específicamente, las tareas abiertas. Si analizamos [TTA03] y [TTA04] podemos observar que, las tareas abiertas adquieren la característica de tener diversas soluciones. Los profesores atribuyen a este tipo de tareas las expresiones “no es de solución inmediata” y “buscar una estrategia”, las cuales se pueden conectar con lo mencionado anteriormente. Así mismo, si miramos los datos [TT02] y [TT04] podemos inferir que, las tareas abiertas al permitir múltiples procedimientos o respuestas facilitan los procesos comunicativos. Con esto, se alude a las características de promover la comunicación y crear polémica, enunciadas en [TTA04]. Sin olvidar que, en el último fragmento de [TTA02] encontramos que los procesos comunicativos que se buscan están relacionados con la definición de argumentación presentada en el Estado 2. De este grupo de datos, podemos

concluir que, para los profesores, las tareas abiertas presentan las características que Ortiz y Carreño (2019) le atribuyen a una tarea que promueva la argumentación.

Finalmente, en lo que corresponde al indicador *Procesos involucrados en una tarea que favorece la argumentación*, el dato [TTA05] es evidencia del impacto, que algunos de los procesos involucrados en una tarea tienen en el surgimiento de argumentos. Para los profesores, limitar a los estudiantes con un proceso guiado para solucionar la tarea conlleva a obtener respuestas similares o únicas. Este escenario es enunciado como “tarea que promueve la explicación”. Esta afirmación, va en concordancia con la definición de explicación presentada en el Estado 2. De lo anterior, podemos inferir que, la argumentación se puede promover si los procesos matemáticos no se limitan en la formulación de la tarea. Con esta decisión, el profesor puede obtener actividades más ricas y variadas por parte de los estudiantes.

6.4.1.1.2 Estado 3.

En el Estado 3, encontramos 15 datos sobre el conocimiento didáctico – matemático de los profesores sobre **tareas**. Estos datos se encuentran distribuidos así: 2 datos aluden al indicador *Vocabulario especializado sobre tareas*, 2 a *Tipos de tareas*, 6 datos se clasifican en el indicador *Elementos de la tarea* y 5 a la *Importancia del diseño de una tarea* (Tabla 34).

Tabla 34: Datos sobre tareas para la faceta epistémica en Estado 3.

Código	Dato	Indicador
TT09	[...] una tarea abierta, donde [los estudiantes] pueden dar su opinión de lo que están viendo [y] no hay una respuesta única, les da libertad de hacer cosas interesantes [...] Definitivamente [las] tareas [abiertas] facilitan muchas interacciones, muchas cosas que los estudiantes hacen en clase. Su actividad se vuelve mucho más rica.	Tipos de tareas
TT10	La preparación [de una tarea] es un acierto, prever el tipo de acciones y el tipo de actividad que el niño va a realizar, porque el profesor puede comenzar a vislumbrar la gestión, el tipo de preguntas que van a surgir permite saber cómo reaccionar frente a esas preguntas. No es quedarse ahí esperando una pregunta y en ese momento imaginar una respuesta, sino que definitivamente el profesor ya sabe cómo reaccionar. No es aprenderse de memoria la respuesta sino cómo actuar frente a cada situación de la mejor manera inmediatamente.	Importancia del diseño de una tarea

Código	Dato	Indicador
TT11	Definitivamente fue un acierto haber identificado cómo se iba a comportar nuestra comunidad de práctica, frente a los niveles del modelo propuesto, que es adaptación del modelo de Gómez (2015) con la propuesta de Camargo, Samper y Perry (2006). Esto nos permitió caracterizar y clasificar el contexto de los estudiantes, ya que permite enfocarse en esas habilidades que el estudiante tiene y facilitar el desarrollo de las que no tiene [...] Permitir identificar y caracterizar la comunidad de práctica, que Gómez no tenía muy presente. Para mí es un PLUS y es supremamente importante.	Importancia del diseño de una tarea
TT12	Entre más clara sea la instrucción, los estudiantes lo pueden entender mucho más fácil y lo pueden hacer mucho más fácil. [...] Es importante que la instrucción sea con lenguaje sencillo y se dé el paso a paso de lo que tiene que hacer, que la lean e identifiquen que tienen que hacer en cada uno de los numerales y digan: bueno, puedo hacerlo.	Elementos de la tarea
TT13	El cambio de niveles [propuestos], no se logra con una sola tarea, porque esto va ligado a la experiencia que el estudiante vaya adquiriendo. El hecho de hacer una construcción no me garantiza que todas las pueda hacer. El cambio de nivel no se logra únicamente con una tarea de nivel cero, otra de nivel uno, nivel dos y así sucesivamente, y con 6 tareas ya son expertos, no. Entonces, esto se logra es con la experiencia y con lo que vaya percibiendo el profesor de su grupo, cada vez que diseñe una tarea, debo tener en cuenta el nuevo contexto puesto [que] voy a empezar a ver cosas diferentes de los estudiantes.	Importancia del diseño de una tarea
TT14	[Respecto] a los requisitos, se evidencia que para los profesores los temas necesarios para abordar la tarea, así como las destrezas que se buscan desarrollar o fortalecer en los estudiantes son el punto de partida para el diseño de una tarea.	Elementos de la tarea
TT15	[Una tarea es abierta porque] [...] permite a los estudiantes un desarrollo de estrategias para tener un acercamiento a la resolución de la tarea.	Tipos de tareas
TT16	Con respecto al manejo de los errores en las dos tareas [propuestas por los profesores, antes de MDM y en el seminario PME], en ninguna se tienen en cuenta los errores que pueden surgir a partir de la actividad matemática de los estudiantes. [Esto lo afirman puesto que, para autores como] Jiménez y Carreño (2018) esto, es de suma importancia puesto que la gestión del error tiene la finalidad de asegurar que las ideas/respuestas equivocadas se puedan utilizar para construir el conocimiento matemático. Por lo anterior, [los profesores] consideran que la planificación explícita de las posibles soluciones, así como de los errores, posibilitan la forma gestionar las diferentes respuestas y postura de los estudiantes para promover la argumentación.	Importancia del diseño de una tarea
TT17	[Respecto al contexto de una tarea, los profesores afirman que] al iniciar el diseño de una tarea, el profesor debe tener en cuenta dos aspectos que definen al contexto: la comunidad de práctica y la ubicación geo temporal. [Los profesores se refieren] a la comunidad de práctica, como un conjunto de individuos que comparten unas reglas que median el accionar de los integrantes, unas expresiones discursivas particulares, un sistema teórico constituido en conjunto, unas normas sociales que favorecen la interacción y un espacio de encuentro, ya sea presencial o virtual.	Elementos de la tarea
TT18	[Respecto al contexto de una tarea, los profesores afirman que] al iniciar el diseño de una tarea, el profesor debe tener en cuenta dos aspectos que definen al contexto: la comunidad de práctica y la ubicación geo temporal. [...] [Para los profesores] el aspecto geo temporal [son] las diferentes características de la población con respecto al espacio temporal compartido, el ámbito social y lo económico.	Elementos de la tarea
TT19	Los requisitos de la tarea hacen referencia a aquellos conocimientos y destrezas previos que, de acuerdo con el nivel educativo, los estudiantes necesitan para abordar una situación matemática. Estos, se vinculan directamente con las metas y el contenido matemático de la tarea (Gómez et al., 2015). Los requisitos deben ir vinculados directamente con los procesos matemáticos de construcción, visualización, exploración y verificación, en cada uno de sus niveles de desarrollo.	Elementos de la tarea
TT20	La formulación de la tarea se refiere al texto o instrucción que el profesor proporciona a los estudiantes y describe una situación matemática, proporciona una información inicial y requiere que los estudiantes produzcan una información final como su solución (Gómez et al., 2015). Estas instrucciones deben tener en cuenta el contexto previamente analizado y el nivel de los procesos vinculados.	Elementos de la tarea
TT21	El lenguaje utilizado para la presentación de la tarea debe ser cercano y claro para los estudiantes, evitando tecnicismos innecesarios.	Importancia del diseño de una tarea
TT26	Se puede entender la actividad como el conjunto de acciones desarrolladas por los participantes, en el contexto particular de la comunidad de práctica. La actividad se reconoce en las acciones de los participantes en aras de la consecución de la solución de la tarea, en esta actividad se deben considerar las posibles acciones, tanto asertivas como erróneas, que los estudiantes podrían realizar en el marco de la instrucción presentada por el profesor.	Vocabulario especializado sobre tareas

Código	Dato	Indicador
TT27	La actividad matemática le permite al profesor identificar en que momentos de la tarea se pueden generar argumentos en los estudiantes. Si miramos los procesos de construcción, visualización, exploración, conjeturación y verificación, podemos afirmar que la exploración que los estudiantes realizan a partir de una construcción geométrica se evidencia por medio de la conjeturación y la verificación.	Vocabulario especializado sobre tareas

Con respecto al indicador *Vocabulario especializado sobre tareas* [TT26, TT27], podemos identificar dos asuntos. El primero alude a la definición de actividad. Esta definición se encuentra ligada con el significado que los profesores le atribuyeron al término “actividad” en el Estado 2. Podemos inferir que, para los profesores, se torna relevante prever los posibles aciertos y errores de los estudiantes al momento de diseñar de una tarea. La categorización de lo que se considera “válido” o “no válido” es dada por el profesor, y tomando en cuenta el grado de cercanía con los significados institucionalizados en la comunidad de práctica. En concordancia con lo anterior, el segundo asunto exhibe la importancia de prever las posibles actividades. El dato [TT27] nos permite observar que la identificación de las acciones que realiza el estudiante le otorga la posibilidad al profesor de señalar en qué momentos del desarrollo de una tarea es factible que surjan argumentos.

En cuanto al indicador *Tipos de tareas*, los datos nos permiten analizar el conocimiento de los profesores sobre dos asuntos: la definición de tarea abierta y la importancia de una tarea abierta. Para la definición de una tarea, el dato [TT09] es evidencia de una comprensión globalizada de [TT08]. Las características presentadas en este dato se atribuyen directamente a la expresión “tarea abierta”. Por su parte, los datos [TT09, TT15] exhiben la importancia de una tarea abierta en el ámbito escolar. Para los profesores, este tipo de tareas posibilitan interacciones y formulación de estrategias.

En lo que respecta al indicador *Elementos de la tarea* evidenciamos que los profesores retoman las definiciones de dos elementos postulados por Gómez (2015): requisitos y formulación. Las definiciones de estos elementos van en concordancia con lo presentado en los

Estados 1 y transición 2 al 3. En lo que refiere a los requisitos [TT14] los profesores dan la característica de “punto de partida para el diseño de una tarea” y enuncian algunos de los aspectos involucrados. En [TT19] vemos una ampliación de los requisitos en lo que respecta a su relación con los procesos involucrados en el desarrollo de una tarea. Esta relación está en correspondencia con los niveles de desarrollo. El dato no nos permite evidenciar estos niveles. Así mismo, en el dato se aclara que, al tener diferentes procesos involucrados en la tarea, se deben tener en cuenta todas aquellas habilidades, destrezas y fortalezas que necesitan para cada uno de estos procesos [TT19]. En lo que refiere a la formulación, los profesores la relacionan con la instrucción que se da a los estudiantes, y hacen una ampliación en cuanto a que la formulación debe tener en cuenta a la comunidad de práctica en la que se desenvuelve [TT20]. De igual manera, realizan claridades en lo referente al uso del lenguaje por parte del profesor y como este influye directamente en la comprensión de la instrucción y desarrollo de la actividad. Este lenguaje debe ser acorde a la comunidad [TT12], dando claridades, sin tecnicismos innecesarios; pero con una rigurosidad suficiente. Por último, los profesores amplían los elementos de una tarea presentados por el referente teórico ya nombrado, anexando lo que ellos llaman “contexto” [TT17]. Este nuevo elemento se define a partir de dos partes: comunidad de práctica [TT17] y aspectos geo temporales [TT18]. En cuanto a la comunidad de práctica, es la misma definición que ellos postularon en el Ciclo 2. Por su parte, el aspecto geo temporal describe el momento, el espacio, el ámbito social y económico de la comunidad.

Finalmente, y en lo que respecta al indicador *Importancia del diseño de una tarea*, los datos [TT10, TT11, TT13, TT16, TT21] son evidencia del conocimiento de los profesores respecto a los siguientes asuntos: origen del conocimiento, adaptación de modelos teóricos, relevancia de prever posibles escenarios y uso de lenguaje en el diseño de una tarea. En el asunto

del origen del conocimiento, nos encontramos un origen referencial que los profesores abordaron en el Ciclo 1 [TT11]. Además, incluyeron a los autores Jiménez y Carreño (2018) quienes abordan la importancia de la gestión de error para construcción del conocimiento matemático, en el marco del diseño de una tarea [TT16]. A parte de esto, el dato [TT11] es una evidencia de un origen propio del conocimiento. Los profesores a partir de las propuestas de Gómez (2015) y Camargo, Samper y Perry (2006), realizan una adaptación de estas en torno a sus necesidades. Para la primera propuesta, incluyen un nuevo elemento que lo denotan como “contexto”. De este, destacan su relevancia e impacto al momento de diseñar una tarea y sus razones para explicitarlo en la propuesta adaptada [TT11]. En cuanto a la segunda propuesta adaptada, los profesores toman como punto de partida el modelo de la actividad demostrativa, y con estos presentan un modelo en donde cada uno de los procesos involucrados en el abordaje de una tarea (construcción, visualización, exploración, conjeturación, validación) adquieren niveles de desarrollo. Estos niveles le permiten al profesor identificar destrezas y habilidad de los estudiantes [TT13]. La transición entre los niveles se presenta como un proceso de transformación, donde el profesor puede identificar nuevos aspectos en el contexto. De lo anterior, podemos inferir que las adaptaciones teóricas realizadas responden a la necesidad de los profesores en plantear las bases para el diseño de tareas que promuevan la argumentación, asunto planteado al iniciar el Ciclo 3.

En cuanto a la relevancia de prever posibles escenarios, los profesores consideran que visualizar los posibles escenarios que podrían ocurrir cuando los estudiantes abordan la tarea, les aporta herramientas para la gestión de esta. El profesor puede llegar a prever preguntas de los estudiantes y cuál sería la mejor manera de actuar frente a estas [TT10]. Así mismo, prever las posibles soluciones le permite al profesor identificar aquellas actuaciones erróneas y su forma de

gestionar el error, de tal manera que con este se pueda construir conocimiento matemático y promover la argumentación [TT16]. En lo que respecta al uso del lenguaje, el dato [TT21] nos permite evidenciar una concordancia con lo presentado en [TT12], donde un lenguaje claro y cercano a los estudiantes facilita la comprensión de la tarea, y en especial de la instrucción que el profesor aporta a los estudiantes.

Para el Estado 3, encontramos 5 datos que son evidencia del conocimiento sobre **tareas de argumentación**. De estos, 2 están asociado *Tareas que favorecen la argumentación* y 3 a *Procesos involucrados en una tarea que favorece la argumentación* (Tabla 35).

Tabla 35: Datos sobre tareas de argumentación para la faceta epistémica en Estado 3.

Código	Dato	Indicador
TTA07	La [tarea propuesta fuera de la MDM], aunque pareciese que su instrucción promueve la argumentación, no es una tarea rica en argumentación, puesto que no permite promover la discusión, los contraejemplos y en particular, no permite el convencimiento de los demás. [...] En la socialización realmente [lo que se] busca es la explicación de la situación por parte del estudiante.	Tareas que favorecen la argumentación
TTA08	Con respecto a la [tarea propuesta en el seminario PME de la MDM], los profesores pueden observar que promueve los procesos de argumentación. [Esto, puesto que para autores como] Solar y Deulofeu (2016) una tarea promueve la argumentación debe tener las siguientes condiciones: motivar en los estudiantes diferentes procedimientos, respuestas abiertas y posturas diferentes.	Tareas que favorecen la argumentación
TTA09	Las metas de una tarea matemática escolar que promuevan la argumentación deben ir enfocadas a los procesos vinculados a esta, como lo es la conjeturación o la verificación. A esto añadimos, que los procesos de construcción, visualización y exploración realizan un trabajo implícito en cumplimiento de la meta.	Procesos involucrados en una tarea que favorece la argumentación
TTA10	Se recomienda que en el desarrollo de la tarea se realice un recorrido por cada uno de los procesos de construcción, visualización, exploración, conjeturación y verificación; enfatizando aquel proceso en el cual se busca desarrollar un mayor nivel de destreza. Por ejemplo, al momento de realizar la exploración se puede pedir a los estudiantes reportar cada una de las acciones realizadas y su finalidad. En el proceso de conjeturación, en niveles iniciales, el profesor puede usar plantillas discursivas que permitan la construcción guiada de una conjetura.	Procesos involucrados en una tarea que favorece la argumentación
TTA13	[...] El proceso argumentativo lo fundamentamos en cinco procesos matemáticos: construcción, visualización, exploración, conjeturación y verificación. Desde nuestro punto de vista, estos procesos promueven en los estudiantes el surgimiento de argumentos durante la actividad matemática. Así mismo, para Camargo et al. (2006) la actividad demostrativa se concreta en una serie de acciones de índole heurística involucradas en los últimos cuatro procesos. En nuestro caso, vemos prudente anexas el proceso de construcción, ya que permite a los estudiantes poner en juego diversos conocimientos; tales como definiciones de objetos geométricos para buscar que una construcción garantice una situación propuesta.	Procesos involucrados en una tarea que favorece la argumentación

Para el indicador *Tareas que favorecen la argumentación*, los datos [TTA07, TTA08]

aluden a los asuntos del origen del conocimiento y las características que debería tener una tarea que promueve la argumentación. El dato [TTA08] es evidencia de un conocimiento referencial.

Los profesores citan a Solar y Deulofeu (2016) para presentar algunas condiciones que una tarea

debe cumplir si se busca promover la argumentación. Basándose en estas condiciones, en [TTA07] se presentan las características de una tarea que no promueve la argumentación. Estas características son contraejemplos de las condiciones presentadas en [TTA08]. A partir de esto podemos inferir que, para los profesores, si se busca diseñar una tarea que favorezca los procesos argumentativos en los estudiantes, se debe promover la discusión, la formulación de contraejemplos e interacciones en las cuales los estudiantes puedan presentar sus ideas buscando convencer de los demás. Cabe aclarar que, estos datos surgen en el proceso realizado por los profesores al analizar dos tareas: una tarea diseñada antes del ingreso de la MDM y otra tarea diseñada durante el primer semestre del programa formativo.

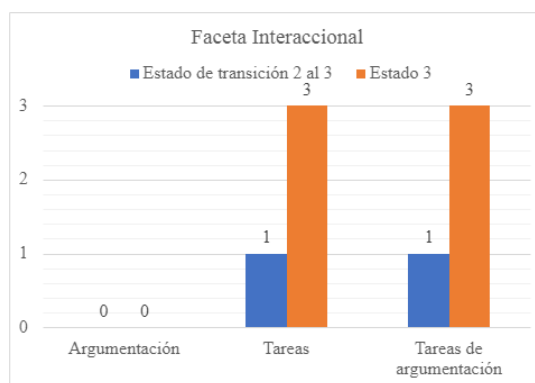
En lo que respecta al indicador *Procesos involucrados en una tarea que favorece la argumentación* [TTA09, TTA10, TTA13], los datos son evidencia de la estructura de una tarea en función de los procesos involucrados y la influencia de algunos procesos en el propósito de una tarea. Para el primer asunto, los profesores exhiben, de forma explícita, como se debe estructurar la presentación de una tarea. Podemos inferir que, se hace referencia a la formulación, puesto que se muestra que en el desarrollo de la tarea se realice un recorrido por cada uno de los procesos, y buscando profundizar en uno de estos. Además, el ejemplo presentado en [TTA10] alude a instrucciones que se otorgan a los estudiantes y algunas herramientas que se pueden usar para el desarrollo de un proceso. Esta estructura se fundamenta en la propuesta de Camargo et al. (2006) sobre la actividad demostrativa [TTA13]. Los profesores presentan una adaptación en la cual agregan el proceso de construcción, ya que durante este podrían surgir argumentos que apoyen la validez de la construcción realizada por el estudiante. Lo anterior, conforma el conocimiento de lo que se expresa como “proceso argumentativo” [TTA13]. Finalmente, el dato [TTA09] nos demuestra la influencia de los procesos de conjeturación y validación en la

conformación de la meta de una tarea. Podemos inferir que, la meta de una tarea no se puede formular buscando que un estudiante mejore sus habilidades o destrezas en la construcción, exploración o visualización. Lo anterior, puesto que estos procesos son la base para que un estudiante pueda formular una conjetura o realizar una validación. Por esta razón, en el dato encontramos la expresión de “trabajo implícito” de los procesos nombrados en primera instancia.

6.4.1.2 Faceta Interaccional.

En la Figura 13 reportamos la cantidad de datos del Ciclo 3 asociados a la faceta interaccional, indicando el Estado de conocimiento al que corresponde y el asunto sobre el cual versan. La poca presencia de datos en esta faceta se debe a que en el Ciclo 3 la atención se ubicó en un trabajo de definición y caracterización de elementos que conforman una tarea y cómo estos se pueden asociar a una tarea que promueve la argumentación. En este escenario, asuntos relacionados con interacciones surgen en el marco de la conformación de las maneras y las formas de promover las diferentes interacciones que se dan en el marco de la resolución de una tarea. Por esta razón, no se registran datos sobre argumentación.

Figura 13: Datos correspondientes a la faceta interaccional para Ciclo 3.



6.4.1.2.1 Estado de Transición 2 al 3.

En el Estado de transición 2 al 3 encontramos un dato respecto a **tareas**, que corresponde al indicador *Función de las interacciones durante el desarrollo de una tarea* (Tabla 36).

Tabla 36: Datos sobre tareas para la faceta interaccional en Estado de transición 2 al 3.

Código	Dato	Indicador
TT07	[En el diseño de una tarea el profesor] tiene que prever [las] interacciones porque a partir de eso, él puede promover dos cosas: fomentar el aprendizaje y constatar en la práctica cómo se desarrolla el aprendizaje; [así como la forma en la que] él puede influir.	Función de las interacciones durante el desarrollo de una tarea

Para este dato [TT07], podemos evidenciar un conocimiento en lo que respecta a la importancia del papel que desempeña el profesor cuando prevé, en el diseño de una tarea, las interacciones que se dan en el marco de solución de esta. Para los profesores las interacciones tienen funciones bien marcadas con respecto a la enseñanza-aprendizaje y en lo que corresponde a la influencia del profesor en la solución de la tarea y la actividad que se realiza.

En el Estado de transición 2 al 3 encontramos un dato que es evidencia del conocimiento respecto a **tareas de argumentación** y que corresponde al indicador *Interacciones que favorecen la argumentación en la actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea*. (Tabla 37).

Tabla 37: Datos sobre tareas de argumentación para la faceta interaccional en Estado de transición 2 al 3.

Código	Dato	Indicador
TTA06	[Ortiz y Carreño (2019)] dicen que el error se puede potencializar para que la tarea lleve al proceso argumentativo. [...] Si el niño hizo la exploración mal, [el profesor] puede [indagar] qué pasó, y de esa manera, hacer que los otros niños puedan crear un contraargumento y puedan hacerle entender al niño cuál fue su error. [...] En ese momento [surge] la argumentación.	Interacciones que favorecen la argumentación en la actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea

En el dato [TTA06] se puede evidenciar que, a partir de un referente teórico, para los profesores en una tarea de argumentación, se debe intervenir frente al error, puesto que esto posibilita potencializar la argumentación. Esta interacción que surge del error se puede inferir dos tipos de interacción estudiante-profesor, estudiante-estudiante, con respecto a la indagación del error y la creación de refutaciones y contrargumentos.

6.4.1.2.2 Estado 3.

En el Estado 3 encontramos tres datos que son evidencia del conocimiento respecto a **tareas**. De estos, dos están asociados al indicador *Función de las interacciones durante el*

desarrollo de una tarea y uno corresponde a *Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase tendientes a superar un error, obstáculo o dificultad con respecto al desarrollo de una tarea* (Tabla 38).

Tabla 38: Datos sobre tareas para la faceta interaccional en Estado 3.

Código	Dato	Indicador
TT28	Cuando el profesor diseña una tarea que aborda contenido matemático, la interacción que se realiza por parte de los miembros de la comunidad de práctica se torna relevante. La importancia de prever las formas de interacción que se pueden dar cuando los estudiantes abordan una tarea radica en la posibilidad de detectar aciertos y posibles errores en la actividad matemática.	Función de las interacciones durante el desarrollo de una tarea
TT29	Al momento de prever las interacciones que sucederán durante el desarrollo de la tarea, es aconsejable postular diversas preguntas orientadoras que les permitan a los estudiantes superar errores o momentos de frustración y bloqueos que impidan obtener la solución. De igual manera, las preguntas se pueden diseñar con la intencionalidad de obtener información que sea relevante para el profesor. Por ejemplo, se puede preguntar a un estudiante si un punto de una construcción es móvil o fijo; buscando detectar si existe una destreza para realizar construcciones robustas que garanticen una situación matemática.	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase tendientes a superar un error, obstáculo o dificultad con respecto al desarrollo de una tarea
TT30	Un factor relevante en la interacción, son las diversas formas de agrupamiento que un profesor puede plantear para el desarrollo de una tarea o partes de esta. El profesor debe tener presente que las interacciones van relacionadas con la forma de agrupamiento. Esto, se debe a que aprender matemáticas implica la capacidad de proponer soluciones a un problema, comunicar esas soluciones, reconocer las soluciones de otras personas y negociar significados para llegar a acuerdos.	Función de las interacciones durante el desarrollo de una tarea

En lo que respecta a la faceta interaccional, detectamos dos asuntos en lo que corresponde a las funciones de las interacciones y las maneras que se posibilitan las interacciones. En lo que corresponde a el asunto de las funciones de las interacciones encontramos que en los datos [TT28, TT29, TT30], los profesores evidencian un conocimiento sobre el impacto que tienen la planeación de las interacciones, puesto que ellos evidencian varias funciones de estas interacciones: i) gestionar las respuestas asertivas y las erradas de la actividad matemática; ii) superar los errores, frustración y bloqueos que pueda generar la tarea y; iii) proporcionar información que facilite evidenciar la adquisición de las habilidades y destrezas propuestas en la meta de la tarea.

En lo que atañe al segundo asunto detectado, los datos [TT29, TT30] nos proporcionan las maneras de facilitar las interacciones que posibilitan aprender matemáticas: las formas de agrupación y las preguntas orientadores. Para ellos, el profesor debe proporcionar estas formas

de agrupación y un conjunto de preguntas orientadoras que fomenten y generen estas interacciones. Estas agrupaciones y preguntas no son aleatorias; por el contrario, deben ser planeadas desde el momento del diseño de la tarea. Estas maneras facilitan que el estudiante genere diversos tipos de interacción: estudiante-estudiante, estudiante-profesor, estudiante-instrumento, estudiante-grupo. Podemos inferir que para los profesores aprender matemáticas es un acto social que esta mediado por la comunidad de práctica.

En el Estado 3 encontramos tres datos que son evidencia del conocimiento respecto a **tareas de argumentación**. De estos, los tres están asociados al indicador *Interacciones que favorecen la argumentación en la actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea* (Tabla 39).

Tabla 39: Datos sobre tareas de argumentación para la faceta interaccional en Estado 3.

Código	Dato	Indicador
TTA11	El profesor debe saber cuáles son las etapas de la tarea que ha diseñado y como estas etapas benefician el proceso de argumentación. Los agrupamientos como individual, en parejas, en pequeño grupo o gran grupo promueven diferentes interacciones que favorecen el surgimiento de partes de un argumento o la conformación de argumentos individuales o grupales.	Interacciones que favorecen la argumentación en la actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea
TTA12	[...] Los momentos de interacción promueven el surgimiento de argumentos, ya sea de forma explícita o con algunos de sus elementos de forma implícita. Por ejemplo, un estudiante cuando defiende su postura puede presentar de forma explícita los datos que tomó en cuenta y, manifestar una aserción que se soporta por una garantía de forma implícita, que todo el grupo acepta como verídica.	Interacciones que favorecen la argumentación en la actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea
TTA14	En el momento donde el estudiante realiza una construcción e interactúa con ella, puede tomar decisiones a partir de la realimentación que el programa le otorga. En la exploración con la herramienta digital se originan argumentos o partes de argumentos. Por ejemplo, la detección de una invariante como puede ser la condición geométrica de una figura para garantizar la solución de la situación planteada.	Interacciones que favorecen la argumentación en la actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea

En los datos podemos identificar dos asuntos, el primero con lo que respecta al tipo de interacciones que se pueden dar en la resolución de una tarea y como estas afectan el proceso argumentación. El segundo asunto alude a los diferentes momentos que se presentan las interacciones en una tarea que promueve la argumentación.

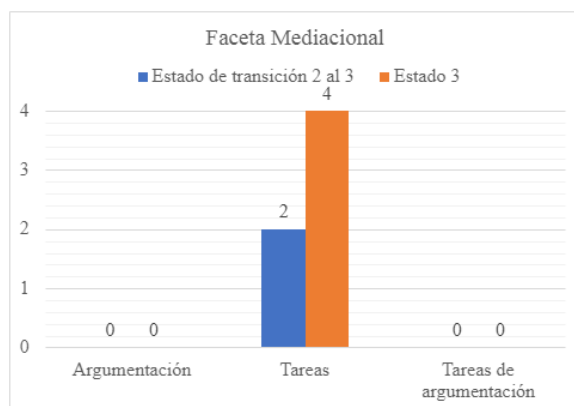
En lo que respecta al primer asunto los profesores identifican que las diferentes formas de agrupamiento (individual, en parejas, en pequeño grupo o gran grupo) generan diferentes

interacciones, que a su vez forman momentos propicios para el surgimiento de argumentos o elementos de los argumentos, bien sea de forma implícita o explícita. Adicionalmente, el agrupamiento permite la finalidad de la argumentación, expuesta por los profesores como el convencimiento o persuasión sobre la veracidad de una aseveración.

Para el segundo asunto podemos considerar que los profesores tienen claridad que en una tarea existen diferentes momentos, que permiten el surgimiento de argumentos, que dependiendo del momento el profesor debe haber planeado y considerado, las formas de interacción y de agrupamiento para potencializar el surgimiento de argumentos o elementos de este.

6.4.1.3 Faceta Mediacional.

En la Figura 14 reportamos la cantidad de datos del Ciclo 3 asociados a la faceta epistémica, indicando el Estado de conocimiento al que corresponde y el asunto sobre el cual versan. La poca presencia de datos en esta faceta se debe a la naturaleza de las acciones adelantadas en el Ciclo 3, tendientes a responder la pregunta planteada al iniciar el ciclo. La ausencia de datos que aludan sobre argumentación y tareas de argumentación la podemos referenciar al foco de trabajo abordado con el plan de acción del Ciclo 3. Al tener la atención en el diseño de tareas, el discurso de los profesores aborda aspectos relacionados con los materiales y recursos que son utilizados con frecuencia para la solución de una tarea, en este caso son el lápiz y papel, y GeoGebra.

Figura 14: Datos correspondientes a la faceta mediacional para Ciclo 3.

6.4.1.3.1 Estado de Transición 2 al 3.

En el Estado de transición 2 al 3 encontramos dos datos que son evidencia del conocimiento respecto a **tareas**. De estos, uno está asociados al indicador *Impacto de los materiales y recursos en una tarea* y uno está vinculado al indicador *Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea* (Tabla 40).

Tabla 40: Datos sobre tareas para la faceta mediacional en Estado de transición 2 al 3.

Código	Dato	Indicador
TT01	Cuando [se realizan tareas] con lápiz y papel, [los estudiantes] casi no hacen exploraciones en la construcción; y eso [...] les dificulta ver [invariantes]. No se tiene esa facilidad de las herramientas [digitales].	Impacto de los materiales y recursos en una tarea
TT06	Los materiales se distinguen de los recursos porque, [los recursos] se diseñan con fines didácticos. El tablero tradicional o electrónico, el papel y el lápiz son recursos. Mientras que, el geoplano, GeoGebra o el dominó de fracciones [son materiales porque] fueron diseñados para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.	Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea

En el dato [TT06] podemos evidenciar que los profesores hacen uso de un vocabulario especializado más cercano a la comunidad de educadores matemáticos, ellos diferencian explícitamente y con ejemplos, lo que ellos comprenden sobre recurso y material. De igual manera, en el dato [TT01], ellos muestran un conocimiento sobre los beneficios que trae el uso de las herramientas digitales en las tareas propuestas, puesto que facilitan las exploraciones de los objetos matemáticos y la detención de invariantes, que recursos como el lápiz y papel no permite con facilidad.

6.4.1.3.2 Estado 3.

En el Estado 3 encontramos cuatro datos que son evidencia del conocimiento respecto a **tareas**. De estos, todos están asociados al indicador *Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea* (Tabla 41).

Tabla 41: Datos sobre tareas para la faceta mediacional en Estado 3.

Código	Dato	Indicador
TT22	Un recurso es cualquier medio que se pueda implementar en los procesos de enseñanza – aprendizaje, por ejemplo, el tablero o el papel y lápiz. Un material se diseña con fines didácticos. GeoGebra o el Geoplano son ejemplos de un material. Para ello se debe tener en cuenta el contexto en lo correspondiente a lo geo temporal.	Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea.
TT23	Implementar una tarea mediada por el uso de un EGD como GeoGebra, requiere que el profesor analice la infraestructura de la institución educativa. Algunos materiales requieren de una preparación previa por parte del profesor y los estudiantes. En otros casos, se debe en cuenta el acceso al material, ya que algunos son de acceso libre y otros son de pago.	Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea.
TT24	La eficacia hace referencia a si el material o recurso puede contribuir al logro de la meta planteados al inicio del diseño.	Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea.
TT25	[...] [En el diseño de una tarea, el profesor] debe analizar si los materiales y recursos seleccionados son pertinentes e indispensables para la solución de la tarea. Por ejemplo, no es eficaz el diseño de una tarea centrado en un EGD, si la solución más práctica se obtiene por medio de otro recurso como lápiz y papel.	Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea.

Para los profesores el uso adecuado del lenguaje especializado es importante y hacer la aclaración de lo que se refiere un recurso y un material en el diseño de una tarea [TT22]. Adicionalmente, evidenciamos que los profesores son reflexivos sobre el impacto que tiene la implementación de un EGD en una tarea, puesto que ellos consideran que para la implementación se debe tener en cuenta el contexto (comunidad de práctica y lo geo temporal) [TT22, TT23], donde se va a llevar a cabo la tarea y como los EGD benefician y contribuyen con la actividad y a las metas propuestas en el diseño de la tarea [TT24, TT25].

Con el desarrollo de las fases del Ciclo 2 de investigación, los profesores detectaron cada uno de los términos tienen una clase, una función y unas características particulares, que hace que el uso de los términos sea intencional y deliberado. Es importante aclarar que algunos términos son muy similares a otros y solo se distancian por sus funciones. Ellos comienzan a vislumbrar que el buen uso del lenguaje podría tener un impacto en el diseño de las tareas, puesto

que los términos usados en cada instrucción serían más claros y precisos. Es por ello que surge el interrogante sobre como la diferenciación de los términos argumentación, explicación, justificación y validación podría impactar al momento de diseñar una tarea que promueva la argumentación por medio de un EGD que detona el Ciclo 3 de investigación.

7 Capítulo 7: Transformación del Conocimiento Didáctico – Matemático

En lo que sigue, presentamos la caracterización de la transformación del conocimiento didáctico – matemático de los profesores. Esta se rastreó, inicialmente, por medio de una síntesis de los datos, en la cual se evidencia la distribución de estos por facetas del CDM, indicadores y Estados del conocimiento (Tabla 42).

Tabla 42: Síntesis de datos investigativos.

	Faceta	Indicador	Estados del conocimiento					
			0	1	1 al 2	2	2 al 3	3
Argumentación	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación.		4	13	7		
		Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación.	1	1	19	13		
		Tipos de argumentos.						
		Importancia de un argumento.						
		Elementos de un argumento.			3	1	1	
		Representaciones de argumentos.		3				
	Crterios para identificar argumentos o parte de estos en expresiones discursivas.	1						
	Cognitiva	Dificultades, errores y obstáculos de los estudiantes al momento de argumentar.						
		Identificación errónea de un dato, una garantía o una aseercción por parte de los estudiantes.						
	Afectiva	Acciones del profesor tendientes a la conformación de la comunidad donde se desarrolla la práctica.						
	Interaccional	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que promueven la argumentación.			1	1		
		Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase tendientes a superar un error, obstáculo o dificultad con respecto a la argumentación.						
		Función de las interacciones durante el surgimiento de un argumento.						
	Mediacional	Uso y pertinencia de los materiales y recursos para promover la argumentación.						
		Impacto de los materiales y recursos en el proceso de argumentación.						
	Ecológica	Vínculos entre el currículo de matemáticas y la argumentación.	1					
	Tareas	Epistémica	Vocabulario especializado sobre tareas.	1	2		1	2
			Tipos de tareas.					1
Importancia del diseño de una tarea.			1	2				5
Elementos de la tarea.			8	6			4	6
Vínculos entre los elementos de una tarea.			1					
Procesos involucrados en la solución de una tarea.				1				
Cognitiva		Dificultades, errores y obstáculos de los estudiantes al momento de abordar una tarea.						
		Concepciones erróneas de los estudiantes.						
		Diversas formas de abordar una tarea por parte de los estudiantes.						

Faceta	Indicador	Estados del conocimiento						
		0	1	1 al 2	2	2 al 3	3	
Afectiva	Diferentes tipos de tarea hacen que estudiantes poco participativos, sean participes de la clase.							
	Impacto de una tarea en como un estudiante se percibe en la clase.							
Interaccional	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que explica una tarea.	2	1					
	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase tendientes a superar un error, obstáculo o dificultad con respecto al desarrollo de una tarea.	1					1	
	Impacto de una tarea en el rol del estudiante en el aula.	1						
	Función de las interacciones durante el desarrollo de una tarea.				1	1	2	
Mediacional	Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea.		1			1	4	
	Impacto de los materiales y recursos en una tarea.	1				1		
	Vínculo entre tiempo y fases de una tarea.		1					
Ecológica	Pertinencia de una tarea con respecto al currículo y el contexto.	4						
Tareas de argumentación	Epistémica	Tareas que favorecen la argumentación.				3	2	
		Procesos involucrados en una tarea que favorece la argumentación.				1	3	
		Tipos de problemas y su relación con los tipos de argumentos.		2			1	
	Cognitiva	Surgimiento de un tipo argumento a partir de la actividad desarrollada por el estudiante.		1				
		Actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea, con respecto al argumento esperado.						
	Afectiva	Acciones del profesor para que un estudiante sea parte activa de la comunidad.						
	Interaccional	Interacciones que favorecen la argumentación en la actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea.		1			1	3
	Mediacional	Uso y pertinencia de los materiales y recursos para potenciar el aprendizaje de la argumentación.						
		Vínculo entre tiempo, fases de una tarea y procesos asociados a la argumentación.						
	Ecológica	Acciones del profesor encaminadas a la implementación de tareas que promueven la argumentación, en correspondencia con el currículo y el contexto.						

La síntesis presentada reporta una total de 154 datos. Del total de datos, 70 aluden a argumentación, 66 están relacionado con tareas y 18 son evidencia del conocimiento sobre tareas de argumentación. La Tabla 42 nos permite observar que algunos indicadores y facetas presentaron menos de dos datos en los diversos Estados del conocimiento, o agrupación de datos en un solo Estado. Por esta razón, para la realización de la caracterización de la transformación tuvimos en cuenta aquellos indicadores en los cuales se evidencia presencia de datos en mínimo dos Estados del conocimiento. Luego de la aplicación de este criterio, obtuvimos un total de 140;

distribuidos de la siguiente manera: 65 para argumentación, 58 para tareas y 17 para tareas de argumentación.

Posteriormente, aplicamos la estrategia de microanálisis expuesta en el capítulo de metodología. Con esta, se generaron rótulos que nos permiten evidenciar los aspectos expuestos por los profesores en cada uno de los datos. A partir de esto, realizamos los análisis correspondientes a los datos, en lo que respecta a faceta del CDM, estado del conocimiento e indicador. En el Anexo 7, se puede observar cada uno de los datos y sus respectivos rótulos obtenidos a partir del microanálisis. Luego, iniciamos un rastreo de aquellas relaciones presentes en datos ubicados en un mismo indicador. Esto lo realizamos con la intención de agrupar aquellos rótulos que compartan características y generar las categorías que nos permiten caracterizar la transformación del conocimiento de los profesores. La agrupación de los rótulos y las categorías emergentes las presentamos en la Tabla 43.

Tabla 43: Conformación de categorías a partir de rótulos.

Categorías	Origen del conocimiento	Profundidad	Concisión	Impacto en el discurso	Relación entre términos
Rótulos	Origen del conocimiento.	Clase. Característica. Función. Impacto. Elementos. Estructura. Tipos. Formas.	Identificación. Surgimiento. Actuación. Papel de los individuos. Pautas comunicativas. Relevancia. Influencia del diseño. Consideraciones de uso.	Uso del lenguaje. Aspecto discursivo.	Vínculo. Diferenciación. Relación. Contraste.

Durante este proceso, detectamos que algunos de los datos no tenían relación con otro dato presente en su mismo indicador. Estos datos no se tomaron en cuenta para la caracterización de la transformación, y en el Anexo 7 se presentan resaltados con color rojo. Debido a lo anterior, obtuvimos un total de 134 datos (61 corresponden a argumentación, 56 a tareas y 17 a tareas de argumentación). Estos nos permiten caracterizar la transformación del conocimiento.

Como se mencionó en el párrafo anterior, las categorías surgen de la agrupación de rótulos con características compartidas. De estas, construimos subcategorías que permiten

decantar y explicitar aspectos relevantes para caracterizar la transformación del conocimiento.

Estas categorías y subcategorías permiten rastrear, identificar y enunciar la transformación del conocimiento didáctico – matemático de los profesores, en el marco del modelo CDM planteado por el EOS. La Tabla 44 define cada una de las categorías y subcategorías emergentes.

Tabla 44: Definición de categorías y subcategorías emergentes.

Categoría	Subcategorías			
Origen del conocimiento: Hace referencia a la fuente del conocimiento específico de los profesores.	Empírico: El conocimiento está ligado a las prácticas y experiencias educativas.	De autoridad: El conocimiento se deriva de expertos de la comunidad de práctica con los cuales los profesores han tenido contacto, estos son investigadores/profesores del campo de la Educación Matemática.	Referencial: El conocimiento se corresponde con lo expuesto por teóricos del campo de la Educación Matemática. Este, se insinúa por medio de la mención explícita de textos académicos.	Propio: El conocimiento es producto de la reflexión sobre su conocimiento empírico, de autoridad o referencial.
Profundidad: Hace referencia a la especificidad de los conceptos y asuntos y como los profesores usan nueva información con respecto a los significados y usos.	Enunciativo: El conocimiento se basa en listar los aspectos específicos de los conceptos y los asuntos estudiados.	Descriptivo: El conocimiento corresponde a una breve descripción de los aspectos específicos de los conceptos y los asuntos.	Explicativo: El conocimiento ya no solo enuncia y describe los aspectos específicos de los conceptos y asuntos, además ejemplifica el uso de los conceptos.	
Concisión: Hace referencia a la brevedad y economía con la que los profesores comunican su conocimiento.	Establecimiento de significado: El conocimiento manifiesta la conformación de un significado para un término o expresión.	Ampliación del significado: El conocimiento se enriquece en lo que corresponde a la descripción de los aspectos de un concepto o asunto, acercándose a la comunidad de educadores matemáticos.	Concreción del significado: El conocimiento se sintetiza para especificar los términos suficientes y necesarios para explicar y ejemplificar los conceptos y asuntos abordados, en el marco de la comunidad de Educadores Matemáticos.	
Impacto en el discurso: Hace referencia a los posibles efectos sobre el discurso, como consecuencia de la realización de diversas experiencias como actor externo o interno de la comunidad de práctica.	Uso de términos comunes: El conocimiento se evidencia por medio de un discurso en el cual se emplean términos y expresiones de carácter “coloquial”, alejado de la comunidad de Educadores Matemáticos. El uso de términos se realiza de forma indistinta, sin tener en cuenta sus significados.		Uso de términos especializados: El conocimiento se evidencia por medio de un discurso en el cual se emplean términos y expresiones técnicas dentro de la comunidad de Educadores Matemáticos. Los términos se usan teniendo en cuenta su significado y pertinencia.	
Relación entre términos: Hace referencia a los posibles vínculos entre términos, permitiendo explicitar nueva información y la conformación de nuevas ideas.	Conexiones: El conocimiento es producto de enlazar términos afines o que comparten similitudes en algunos de sus significados.	Similitudes: El conocimiento es producto de realizar un paralelo comparativo que permite identificar si dos o más términos tienen aproximaciones en sus significados.	Diferenciaciones: El conocimiento es producto de realizar un paralelo comparativo que permite identificar si dos o más términos tienen contrastes en sus significados. Con esto, se posibilita determinar límites entre los conceptos.	

En el Anexo 8, el lector puede consultar una síntesis de los datos clasificados en cada categoría y subcategoría, en correspondencia con la faceta en la cual surgieron. A partir de esta síntesis, identificamos patrones en los comportamientos de los datos en relación con cada una de las subcategorías. Estos, nos posibilitan caracterizar la transformación del conocimiento en función de las cinco categorías definidas. Los patrones se presentarán en función de tres Estados: Estado inicial, Estados intermedios y Estado final. La definición de estos nuevos estados se realiza por la naturaleza de cada uno de los ciclos investigativos implementados. La Tabla 45 presenta la conformación de lo anterior, y su relación con los Estados del conocimiento 0, 1, transición 1 al 2, 2, transición 2 al 3 y 3.

Tabla 45: Conformación de Estados para la caracterización de la transformación.

Conocimiento	Estado inicial	Estados intermedios		Estado final
Argumentación	Estado 0	Estado 1	Estado de transición 1 al 2	Estado 2
Tareas	Estado 0	Estado 1	Estado de transición 2 al 3	Estado 3
Tareas de argumentación	Se fundamenta en los conocimientos sobre argumentación y tareas en el Estado 0	Estado 1	Estado de transición 2 al 3	Estado 3

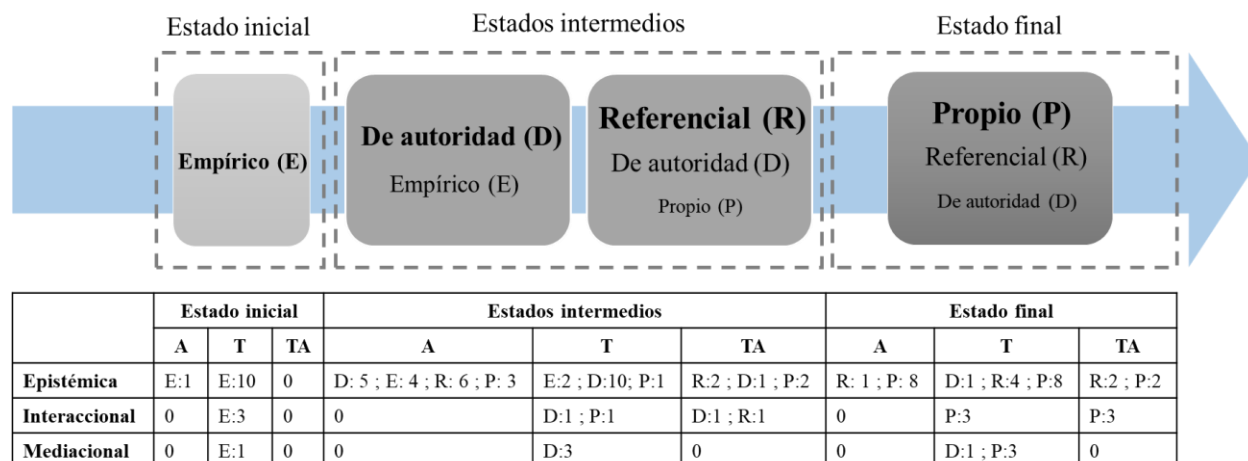
En cada uno de los patrones, los datos que aluden a argumentación y tareas presentaron un comportamiento similar al tener un Estado inicial correspondiente al Estado 0 del conocimiento. Por su parte, aquellos datos que indican el conocimiento sobre tareas de argumentación no manifiestan un Estado inicial; puesto que este conocimiento se fundamenta en los Estados iniciales de argumentación y tareas. En lo que sigue, exhibimos la caracterización de la transformación realizada para cada una de las categorías, a partir de los patrones identificados.

7.1 Origen del Conocimiento

La Figura 15 presenta una síntesis de la cantidad de datos clasificados en la categoría Origen del conocimiento y una representación del patrón de transformación que encontramos en el conocimiento asociado a esta categoría. El patrón observado nos permite rastrear cuatro momentos en la transformación del conocimiento: Estado inicial, primer momento del Estado

intermedio, segundo momento del estado intermedio y Estado final. En cada uno de estos estados, el conocimiento atañe principalmente a la *Faceta epistémica* y al asunto *Tareas*.

Figura 15: Patrón de transformación para la categoría "Origen del conocimiento"⁴.



Para el Estado inicial se evidencia un conocimiento ligado a la subcategoría “Empírico”.

En este estado, la mayoría de los conocimientos sobre tareas de la faceta epistémica son descripciones generalizadas de actuaciones de los profesores respecto a la práctica del diseño de tareas, la gestión de estas y las prácticas argumentativas en las cuales han estado inmersos. Los datos estaban principalmente asociados al indicador “Elementos de una tarea”, y en menor medida a “Vocabulario especializado sobre tareas” e “Importancia del diseño de una tarea”. Pero, también encontramos datos asociados al indicador “Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que explica una tarea” de la faceta interaccional.

En lo que respecta al primer momento del Estado intermedio, el conocimiento de los profesores corresponde, en mayor parte, a la subcategoría “De autoridad”. Al ingresar al programa formativo de la MDM y cursar el primer semestre, los profesores empiezan a involucrar en su discurso las diferentes ideas y concepciones de los líderes de los seminarios. Por esta razón el conocimiento Empírico se hace menos representativo, aunque en algunos momentos

⁴ Argumentación: A; Tareas: T; Tareas de argumentación: TA.

se hace evidente. La mayoría de los datos estuvieron asociados a los indicadores “Elementos de la tarea” y “Vocabulario especializado sobre tareas” de la faceta epistémica, pero también se encontró un dato asociado al indicador “Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que explica una tarea” de la faceta interaccional. A comparación de los indicadores anteriores, en el primer momento no asocian datos al indicador “Importancia del diseño de una tarea”.

Para el segundo momento del Estado intermedio, la subcategoría Referencial comienza a ser representativa. Los profesores tienen acercamiento permanente a textos académicos que aluden a argumentación, tareas y tareas de argumentación. El conocimiento del profesor se manifiesta por medio de citas de diversos autores que soportan sus ideas. Por su parte, el conocimiento de autoridad disminuye y se manifiestan algunos conocimientos ligados a la subcategoría “Propio”. Los datos estuvieron asociados a los indicadores “Elementos de la tarea” y “Tipos de tareas” de la faceta epistémica. A diferencia de los indicadores presentados en el estado anterior, hay menor presencia de datos y por lo tanto menor cantidad de indicadores. La faceta interaccional no es nombrada.

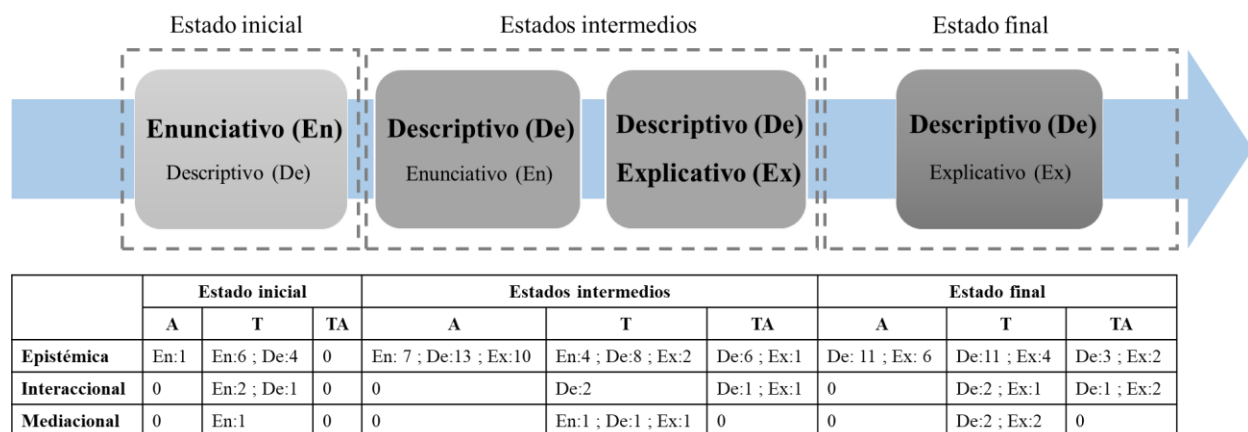
Por último, en el Estado final podemos evidenciar un conocimiento que corresponde a la subcategoría “Propio”. El acercamiento al diseño de una tarea que promueva la argumentación y la definición de términos especializados como argumentación, explicación, justificación y validación, les permite a los profesores generar nuevo conocimiento. Este es producto de la reflexión y apropiación de los conocimientos adquiridos en Estados anteriores. El conocimiento de los profesores continúa ligado, en menor proporción, al conocimiento referencial; y en muy pocas ocasiones se manifiestan conocimientos de autoridad. La mayoría de los datos estuvieron asociados al indicador “Importancia del diseño de una tarea”, y en menor cantidad a los

indicadores “Vocabulario especializado sobre tareas”, “Tipos de tareas” y “Elementos de la tarea” de la faceta epistémica. También se asocia un dato al indicador “Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase tendientes a superar un error, obstáculo o dificultad con respecto al desarrollo de una tarea” de la faceta interaccional. A diferencia del estado anterior, se torna relevante el indicador “Importancia del diseño de una tarea”. El indicador “Elementos de la tarea” se sigue reportando en los datos.

7.2 Profundidad

Para la categoría “Profundidad”, el patrón de transformación del conocimiento didáctico – matemático de los profesores se presenta en la Figura 16. En cada estado, el conocimiento apunta principalmente a la *Faceta epistémica* y a los asuntos *Argumentación y Tareas*.

Figura 16: Patrón de transformación para la categoría "Profundidad".



El patrón expuesto en la Figura 16, nos muestra cuatro momentos en la ruta que el conocimiento atravesó para su transformación. En el Estado inicial, el conocimiento de los profesores sobre argumentación, tareas y tareas de argumentación se relaciona con la subcategoría “Enunciativo”. Los profesores expresan su conocimiento manifestando términos de uso común o “coloquial” para presentar definiciones iniciales de términos y expresiones, en el marco del diseño de tareas. Los conceptos expuestos por los profesores son superficiales y en

pocas ocasiones se evidencia un acercamiento a la descripción de algunas palabras que se usan para términos como tarea, actividad, argumento, entre otros. Los datos estaban principalmente asociados al indicador “Elementos de una tarea”, y en menor medida a “Vocabulario especializado sobre tareas” e “Importancia del diseño de una tarea” sobre Tareas; y al indicador “Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación” sobre argumentación. Todos estos pertenecientes a la faceta epistémica. También, encontramos datos asociados al indicador “Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que explica una tarea” y “Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase tendientes a superar un error, obstáculo o dificultad con respecto al desarrollo de una tarea” de la faceta interaccional.

El primer momento del Estado intermedio, presenta un cambio en la subcategoría predominante con respecto al Estado anterior. La subcategoría “Descriptivo” nos permite evidenciar que el conocimiento de los profesores presenta la necesidad de mencionar aspectos como Clase, característica, función e impacto, para conformar definiciones de los términos trabajados en el Ciclo 1 de la investigación. Los aspectos mencionados conformaron lo que, para los profesores, constituye una definición. En algunos datos, se presenta enunciaciones de algunos términos que en los siguientes Estados determinarán una ampliación o concreción de las definiciones. La mayoría de los datos estuvieron asociados a los indicadores “Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación” y en menor cantidad a los indicadores “Vocabulario especializado sobre argumentación” y “Elementos de un argumento” sobre argumentación de la faceta epistémica. En cuanto a tareas, la mayoría de los datos se asociaron al indicador “Elementos de la tarea”, y en menor cantidad a los indicadores “Vocabulario especializado sobre tareas”, “Tipos de tareas” e “Importancia del diseño de una tarea” de la faceta epistémica; “Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que explica una tarea” y

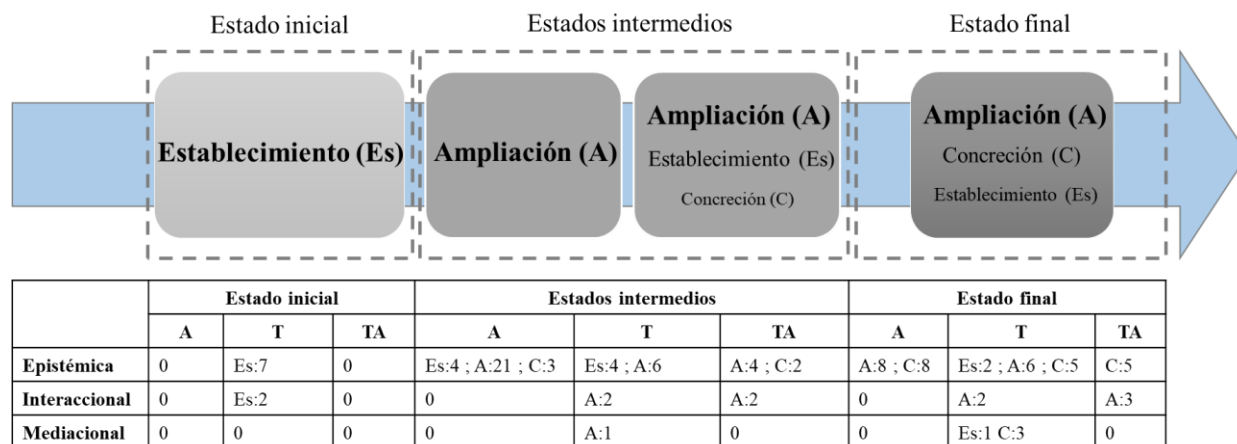
“Función de las interacciones durante el desarrollo de una tarea” de la faceta interaccional; y “Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea” de la faceta mediacional. A comparación de los indicadores del estado anterior, se abordan más indicadores para argumentación y tareas; así como la presencia de las facetas interaccional y mediacional.

Por último, el segundo momento del Estado intermedio y el Estado final tienen un comportamiento similar. Las subcategorías “Descriptivo” y “Explicativo” permiten que el conocimiento de los profesores se amplíe, buscando agregar características o funciones para los términos afines a la argumentación, las tareas o vocabulario que permite la definición de lo anterior. Ejemplo de esto son los datos en los cuales se presenta descripciones concisas y ejemplificaciones de la comprensión sobre práctica y expresión discursivas. Cabe destacar que, en el Estado final la subcategoría “Descriptivo” adquiere relevancia. Esto se debe a la concreción de definiciones y vínculos entre términos que permiten el abordaje del diseño de una tarea de argumentación, en el marco de la implementación del plan de acción del Ciclo 3. La mayoría de los datos estuvieron asociados al indicador “Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación”, y en menor cantidad a los indicadores “Vocabulario especializado sobre argumentación” y “Elementos de un argumento” de la faceta epistémica sobre argumentación. En lo que respecta a tareas, la mayoría de los datos se asociaron a los indicadores “Elementos de la tarea” e “Importancia del diseño de una tarea”, y en menor cantidad a los indicadores “Tipos de tareas” y “Vocabulario especializado sobre tareas” de la faceta epistémica; “Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase tendientes a superar un error, obstáculo o dificultad con respecto al desarrollo de una tarea” y “Función de las interacciones durante el desarrollo de una tarea” de la faceta interaccional; y “Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea” de la faceta mediacional”.

7.3 Concisión

Para la categoría “Concisión”, en la Figura 17 presentamos el patrón de transformación del conocimiento de los profesores. En cada uno de estos estados, el conocimiento atañe principalmente a la *Faceta epistémica* y al asunto *Argumentación*.

Figura 17: Patrón de transformación para la categoría "Concisión".



En el Estado inicial, la subcategoría “Establecimiento de significados” es la que predomina. Esto dado que, en este Estado, la evocación del conocimiento de los profesores manifiesta la conformación de significados desde la práctica o experiencias académicas anteriores. Los datos estaban principalmente asociados al asunto de tareas al indicador “Elementos de una tarea”, y en menor medida “Vocabulario especializado sobre tareas”. No encontramos datos asociados a la Argumentación.

En lo que respecta al primer momento del Estado intermedio, el conocimiento de los profesores sufre una transformación, donde la mayoría de los significados corresponde a la subcategoría “Ampliación de significados”. Esto debido que este estado corresponde a cursar el primer semestre del programa formativo de la MDM. En este lapso, los profesores apropian los conceptos de los líderes de los seminarios y de algunos referentes teóricos. Por esta razón los significados iniciales que no van en contravía de los planteados en la MDM ganan cualidades y

los que no corresponden cambian. En este estado los datos están principalmente asociados a la Argumentación, al indicador “Vocabulario especializado sobre argumentación” y en menor medida a “Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación”. En lo que respecta a asunto de Tareas encontramos que el indicador con mayor relevancia es “Elementos de una tarea”. En comparación del estado anterior, en el primer momento no se asocian datos a la Argumentación y para este estado es el de mayor relevancia y para el asunto de Tareas sigue siendo el más relevante el mismo indicador.

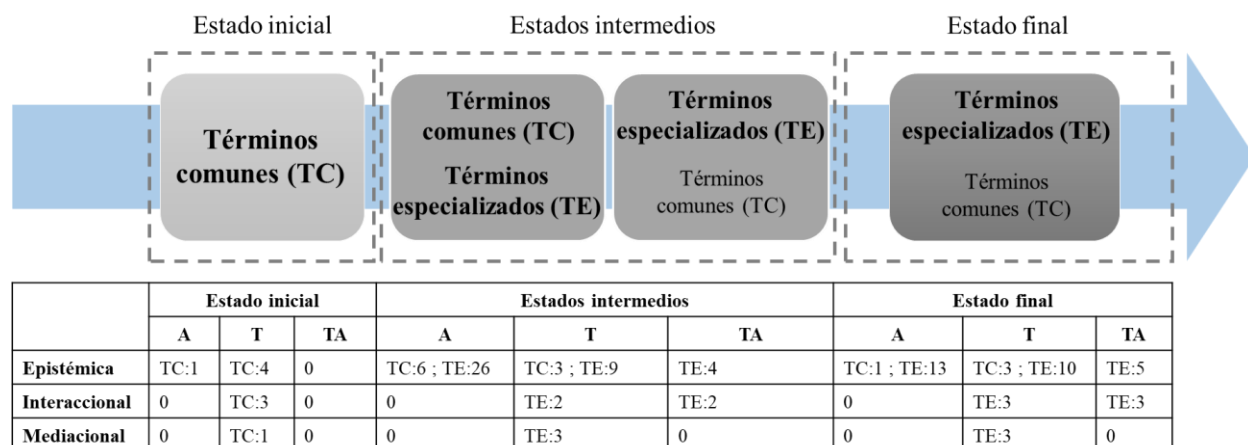
En lo que corresponde al segundo momento del Estado intermedio, la subcategoría “Ampliación de significados” vuelve a ser la representativa. Los profesores se preocupan por tener un acercamiento a textos académicos de la comunidad de Educadores Matemáticos que den claridad y profundidad a los términos y conceptos que predominan en la investigación. El conocimiento de los profesores en algunos asuntos, necesitan mayor comprensión por lo que origina el establecimiento de nuevos significados, por lo que esta subcategoría se hace presente. Por su parte, el conocimiento que ya se tiene suficiente claridad y se acerca en gran medida al establecido por la comunidad de Educadores Matemáticos se ubica en la subcategoría “Concreción de significados”. Los datos estuvieron asociados en gran medida a la Argumentación en los indicadores “Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación” y “Vocabulario especializado sobre argumentación” y en menor medida al indicador “Elementos de un argumento”. Para este estado, comparado con los estados anterior se ve que la Argumentación es el asunto con mayor relevancia, pero el indicador “Vocabulario especializado sobre argumentación” deja de ser el más relevante para darle paso al indicador “Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación”.

Por último, en el Estado final, la subcategoría “Ampliación de significados” sigue siendo la predominante donde los profesores siguen otorgando cualidades y ejemplificando los términos que han concretado en los estados anteriores, permitiendo una claridad y profundidad a los términos que no han concretado. La subcategoría “Concreción de significados” se vuelve importante en el establecimiento de significados que los acercan a la comunidad de Educadores Matemáticos y la subcategoría “Establecimiento de significados” se evidencia en menor medida para dar claridad a aquellas ampliaciones y concreciones que se consideren necesarias. De igual manera a lo sucedido con el estado anterior los datos estuvieron asociados en gran parte a la Argumentación en los indicadores “Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación” y “Vocabulario especializado sobre argumentación” y en menor medida al indicador “Elementos de un argumento”. Para este estado, comparado con los estados anterior la Argumentación sigue siendo el asunto con mayor relevancia, y el indicador “Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación” vuelve a ser el más relevante, el indicador “Vocabulario especializado sobre argumentación” se ve presente en gran medida.

7.4 Impacto en el Discurso

En lo correspondiente a la categoría “Impacto en el discurso”, el patrón de transformación del conocimiento lo presentamos en la Figura 18. La *Faceta epistémica* es la que tiene mayor cantidad de datos asociados y en cuanto al asunto es la *Argumentación*.

Figura 18: Patrón de transformación para la categoría "Impacto en el discurso".



La transformación del conocimiento didáctico de los profesores para la presente categoría se da a partir de los cuatro momentos mencionados en las categorías anteriores. Inicialmente, el Estado inicial está ligado a la subcategoría “Uso de términos comunes”. Los profesores exhiben su conocimiento sobre argumentación, tareas y tareas de argumentación por medio del uso de términos sencillos y cercanos a la práctica educativa. Esto se debe al poco acercamiento a la comunidad de práctica de Educadores Matemáticos, que se nota en los momentos previos del ingreso a la MDM. Los datos están principalmente asociados al asunto de tareas al indicador “Elementos de una tarea”, y en menor medida a “Vocabulario especializado sobre tareas” e “Importancia del diseño de una tarea”. En lo que respecta a la Argumentación se evidencia un único dato asociado al indicador “Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación”.

Para el primer momento del Estado intermedio, el conocimiento lo clasificamos en las subcategorías “Uso de términos comunes” y “Uso de términos especializados”. Los datos evidencian el uso de un vocabulario especializado, más cercano a la comunidad de Educadores Matemáticos, para otorgar Clases, características o definir las funciones de términos como tarea, actividad, elementos de una tarea, argumentación, argumento, explicación, justificación,

validación, práctica discursiva, entre otros. El conocimiento de los profesores se centra en la necesidad de comprender cada uno de los términos usados al momento de diseñar tareas de argumentación. Por ello, las subcategorías mencionadas se presentan en igual proporción, y con una tendencia al uso de términos especializados. Para este estado los datos están principalmente asociados a la Argumentación, al indicador “Vocabulario especializado sobre argumentación”. En lo que respecta a asunto de Tareas encontramos que el indicador con mayor relevancia es “Elementos de una tarea” y en menor medida el indicador “Vocabulario especializado sobre tareas”. En comparación al estado anterior, en el primer momento solo se asocia un dato a la Argumentación ahora es el asunto de mayor relevancia, aunque el indicador sigue siendo el mismo. Para el asunto Tareas sigue siendo más relevante el indicador “Elementos de una tarea”.

En lo que respecta al segundo momento, el conocimiento está ligado a la subcategoría “Uso de términos especializados”. Los datos son evidencia del uso de un vocabulario especializado correspondiente a las características y las funciones de algunos términos involucrados en el diseño de una tarea. Por esta razón, el uso de términos especializado es más notorio en la faceta epistémica. Por su parte, el uso de términos comunes disminuye, y la comunicación del conocimiento de los profesores se centra en la implementación de términos y expresiones cercanas a la comunidad de Educadores Matemáticos. En este estado la mayoría de los datos están asociados a la argumentación en particular a los indicadores “Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación” y en menor cantidad a los indicadores “Vocabulario especializado sobre argumentación” y “Elementos de un argumento”. En cuanto a tareas, la mayoría de los datos se asociaron al indicador “Elementos de la tarea”, y en menor cantidad al indicador “Tipos de tareas”. A comparación de los indicadores del estado anterior, se evidencia que el indicador con mayor relevancia con respecto a la argumentación cambia, de

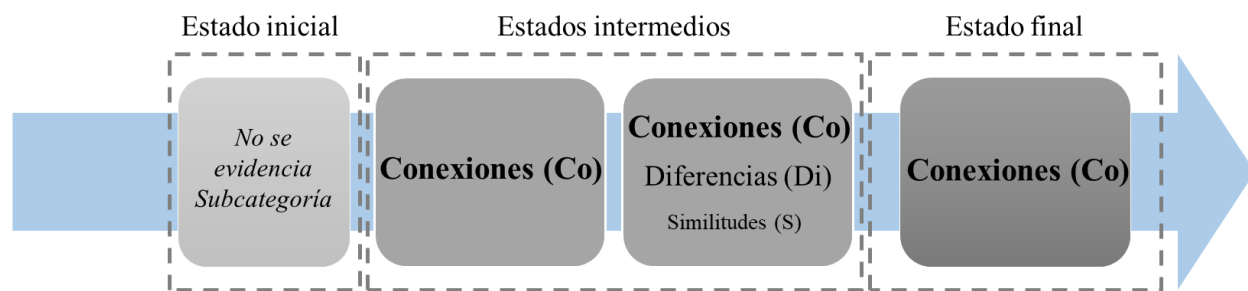
de ser el de “Vocabulario especializado sobre argumentación” y pasa a ser el indicador “Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación”. En lo que respecta a tareas; el indicador con mayor relevancia sigue siendo el mismo que el de los estados anteriores.

Finalmente, en el Estado final, nuevamente la subcategoría “Uso de términos especializados” es relevante. Sin olvidar lo mencionado en el párrafo anterior, podemos anexar que, el conocimiento evidencia la necesidad de concretar definiciones finales para muchos de los términos centrados en argumentación y tareas, así como los términos afines a estos. De igual manera, los profesores exhiben diversos ejemplos que explican la comprensión de los términos ya definidos. En estos casos es donde se presenta en menor cantidad la subcategoría de “Uso de términos comunes”. En este estado datos que están asociados a la argumentación en su mayoría está en relación con el indicador “Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación” y en menor cantidad a los indicadores “Vocabulario especializado sobre argumentación”. En cuanto a tareas, la mayoría de los datos se asociaron al indicador “Vocabulario especializado sobre tareas”, y en menor cantidad al indicador “Importancia del diseño de una tarea”. A comparación de los indicadores del estado anterior, se evidencia que el indicador con mayor relevancia con respecto a la argumentación sigue siendo “Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación”. En lo que respecta a tareas; el indicador cambia y pasa a ser “Vocabulario especializado sobre tareas”.

7.5 Relación entre Términos

En lo que respecta a la categoría “Relación entre términos”, en la Figura 19 podemos evidenciar un patrón de comportamientos que nos permiten caracterizar la transformación del conocimiento. Este, atañe principalmente a la *Faceta epistémica* y al asunto *Argumentación*.

Figura 19: Patrón de transformación para la categoría "Relación de términos".



	Estado inicial			Estados intermedios			Estado final		
	A	T	TA	A	T	TA	A	T	TA
Epistémica	0	0	0	Co:14 ; S:2 ; Di:5	Co:1 ; Di:1	Co:5 ; Di:1	Co:7 ; Di: 1	Co:3	Co:3
Interaccional	0	0	0	0	0	Co:1	0	Co:1	Co:3
Mediacional	0	0	0	0	Co:3	0	0	Co:1	0

En el primer momento del Estado intermedio, el conocimiento de los profesores se ve involucrado con la identificación de algunas relaciones entre los conceptos trabajados. Por esta razón, la subcategoría “Conexiones” surge en este estado. Los datos estaban principalmente asociados a los indicadores “Vocabulario especializado sobre argumentación” y “Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación” de la faceta epistémica.

En el segundo momento del Estado intermedio, la subcategoría “Conexiones” sigue siendo la representativa. Los profesores se preocupan por tener claridad en los conceptos trabajados y hacen relaciones y vínculos entre los diversos conceptos y términos que han surgido en la investigación. De igual manera, intentan diferenciar y ver las particularidades de algunos de los conceptos, por lo que surge la subcategoría “Diferenciación” y en una menor medida la subcategoría “Similitudes”. La mayoría de los datos estuvieron asociados al indicador “Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación”, y en menor medida a “Vocabulario especializado sobre argumentación” y “Elementos de un argumento” de la faceta epistémica. A diferencia del estado anterior, se torna relevante el indicador “Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación”, además de la inclusión del indicador “Elementos de un argumento”.

Por último, en el Estado final, la subcategoría “Conexiones”, es la única que se evidencia. Lo anterior, puesto que los profesores exhiben claridad en los vínculos existentes entre los diversos conceptos y términos relacionados con tareas, argumentación y tareas de argumentación. Los datos estuvieron asociados a los indicadores “Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación” y “Vocabulario especializado sobre argumentación” de la faceta epistémica. En comparación con el estado anterior, los indicadores se nombran en igual cantidad, dejando de asociar datos al indicador “Elementos de un argumento”.

8 Capítulo 8: Conclusiones

En este capítulo presentamos las conclusiones derivadas de la presente investigación. Cada una se encuentra relacionada con los objetivos específicos propuestos que orientaron el desarrollo de la investigación.

En cuanto a la formulación de indicadores personalizados para la dimensión didáctica del modelo CDM, propusimos indicadores pertinentes que nos permitieron caracterizar el conocimiento de los profesores con respecto a argumentación, tareas y tareas de argumentación. A pesar de que, a cada una de las facetas les otorgamos indicadores, no todas las facetas e indicadores fueron implementados. La faceta epistémica fue la única que posibilitó el uso de todos sus indicadores. La faceta afectiva no se vio involucrada en el desarrollo de la investigación. Por su parte, el resto de las facetas y algunos de sus indicadores fueron incluidos en la clasificación de los datos y el análisis de estos. La razón de esto, la ubicamos en la naturaleza de los planes de acción que originó datos, ligados en su mayoría a la faceta epistémica. A modo de sugerencia para nuevas investigaciones, vemos prudente que los planes de acción ejecutados en cada uno de los ciclos posibiliten abordar asuntos correspondientes a las facetas poco usadas o no usadas en nuestra investigación.

Respecto al diseño e implementación de los planes de acción, cada uno de estos surgen de inquietudes detectadas en cada uno de los ciclos de investigación. Los datos y los análisis de estos dan cuenta de una transformación en lo que respecta a argumentación, tareas y tareas de argumentación. Podemos concluir que los planes de acción correspondientes al Ciclo 2 y 3 fueron ambiciosos, puesto que el tiempo invertido en el diseño e implementación fue muy extenso. Para próximas investigaciones, recomendamos el diseño de planes de acción que sean más concretos y estrictos frente al cronograma.

En lo que corresponde a los insumos y datos investigativos, la cantidad de insumos fue suficiente para obtener una buena cantidad de datos que nos permitiesen evidenciar Estados del conocimiento en cada uno de los ciclos. Las transcripciones automáticas de las grabaciones nos fueron de gran utilidad, ya que la calidad de cada uno de los datos fue fiel al conocimiento expresado por los profesores en cada una de sus sesiones de trabajo. De igual manera, los documentos derivados de las sesiones de trabajo fueron relevantes para la obtención de datos y cierre de cada uno de los ciclos. Debido a la naturaleza del Ciclo 1, los insumos no tuvieron la calidad esperada y no permitieron la obtención de datos que evidenciaran un conocimiento concreto de los profesores. Por esta razón, se utiliza la evocación de conocimientos y construcción de los textos narrativos. Por su parte, la extensión de los planes de acción de los Ciclos 2 y 3 ocasionaron la generación de un alto volumen de datos. Esto nos causó que el proceso de construcción de los datos investigativos fuera robusto. Para futuras investigaciones, recomendamos tener un mayor control en la producción de insumos y datos investigativos; así como la concreción en cada una de las sesiones que fuesen grabadas.

La caracterización del conocimiento didáctico – matemático de los profesores se realizó para cada una de las facetas y Estados del conocimiento, por medio de los indicadores propuestos para el CDM. La evidencia de esto se puede observar en las secciones 4.4, 5.4 y 6.4 del presente documento. La implementación de los indicadores nos permitió abordar los datos y realizar de forma sucinta y ordenada la caracterización del conocimiento en lo que respecta a argumentación, tareas y tareas de argumentación.

La aplicación de la estrategia de microanálisis propuesta por Strauss y Corbin (2002), que se puede evidenciar en el Anexo 7, nos permitió la detección de asuntos particulares en lo que respecta a la argumentación, tareas y tareas de argumentación, que se abordan en los datos

investigativos y que fueron reportados en los rótulos. La agrupación de estos rótulos de acuerdo con sus características semejantes nos permitió la conformación de categorías emergente y sus subcategorías asociadas. La generación de las categorías y subcategorías permitieron hacer evidente los asuntos que se abordaban en el análisis de los datos por medio de los indicadores propuestos para el modelo CDM.

En lo que respecta a la caracterización del conocimiento didáctico – matemático de los profesores por medio de patrones procedentes de la implementación de las categorías y subcategorías, la podemos evidenciar en el capítulo 7. A partir de esta, podemos concluir que la faceta epistémica fue la de mayor cambio, en comparación con las otras facetas del CDM. A continuación, nombramos algunos de los aspectos del conocimiento de los profesores en cuales se logramos evidenciar transformación: 1) La definición de argumentación, argumentar, argumento, explicación, justificación, validación, tarea, actividad, practica y expresión discursiva; 2) la descripción de cada una de las definiciones en lo que corresponde a clase, característica, función, impacto, elementos; 3) la rigurosidad en el uso del lenguaje; 4) el crecimiento en lo que corresponde a tipos de tarea, tipos de argumento, estructura de un argumento, diseño de una tarea en matemáticas, así como la promoción de la argumentación; y 5) relaciones entre las diferentes definiciones. Por último, la caracterización del conocimiento nos permite ostentar una ruta de transformación para cada una de las categorías emergentes, en función de sus subcategorías.

Finalmente, presentamos algunas conclusiones personales en lo correspondiente a los aprendizajes de la experiencia vivida, el impacto en nuestro desempeño profesional y las proyecciones del estudio. En lo que respecta a los aprendizajes logrados a partir de la realización de la investigación, podemos afirmar que, la transformación del conocimiento del profesor

promueve el inicio de un proceso de resignificación de los términos usados en la comunidad de práctica. Una apropiación y uso de lenguaje especializado permite una mayor participación e impacto de los profesores en sus instituciones. En lo correspondiente al impacto en nuestro desempeño profesional, evidenciar un proceso de transformación del conocimiento nos permite identificar la importancia del diseño de tareas intencionadas que nos permitan responder a las necesidades de la población, teniendo en cuenta su contexto. Así mismo, el uso de un lenguaje e instrucciones intencionadas que promuevan procesos de argumentación en los estudiantes. Por último, las proyecciones de esta investigación se centran en promover una transformación del conocimiento en nuestros compañeros, ya sea en las instituciones donde laboramos o fuera de ella. Esperamos que la divulgación de esta investigación sea un motivante para que otros profesores inicien un proceso de reflexión sobre su conocimiento.

9 Referencias

- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas* (Primera ed). una empresa docente.
- Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática*.
- Camargo, L., Samper, C., y Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas, Especial*, 371–383.
<https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/7176377.pdf>
- Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(1), 1–6. <https://doi.org/10.1007/s10857-013-9234-7>
- Doerr, H., y Tinto, P. (2000). Paradigms for Teacher-Centered, Classroom-Based Research. In *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 403–427). Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 10 Industrial Avenue, Mahwah, NJ 07430. Web site: <http://www.erlbaum.com>.
- Drijvers, P. (2013). Digital Technology in Mathematics Education: Why It Works (Or Doesn't). En *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 135–151). <https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6>
- Flores, Á. H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, 19(1), 63–98.
- Godino, J. (2014). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática*, 0(11), 111–132.
- Godino, J. D. (2000). La consolidación de la educación matemática como disciplina científica.

Números. *Revista de Didáctica de Las Matemáticas, Ejemplar dedicado a: Las matemáticas del siglo XX: una mirada en 101 artículos*, 347–352.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas.

Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13–31.

<http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/123456789/3098>

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 39(1–2), 127–135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>

Gómez, P., Mora, M. F., y Velasco, C. (2015). Análisis de instrucción. En *Formación de Profesores de Matemáticas y Práctica de Aula* (pp. 197–222).

Groman, M. W. (1996). Integrating “Geometer’s Sketchpad” into a Geometry Course for Secondary Education Mathematics Majors. *Association of Small Computer Users in Education Summer Conference Proceedings*, 61–65.

Hanna, G., y De Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *International Journal on Mathematics Education*, 40(2), 329–336.

<https://doi.org/10.1007/s11858-008-0073-4>

Harel, G., y Sowder, L. (1998). *Students’ proof schemes: Results from exploratory studies* (pp. 234–283). <https://doi.org/10.1090/cbmath/007/07>

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers’ topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372–400.

Jiménez, A., y Carreño, C. (2018). Condiciones que promueven la habilidad de argumentar en el aula matemática de una escuela municipal en Chile. *Revista Iberoamericana de Educación*

Matemática, 54, 60–77.

- León, O. L., y Calderón, D. I. (2000). Concepciones de estudiantes universitarios sobre la argumentación y la validación de lo matemático en el aula. *Tercer Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 34–37.
- Lin, F. L., Yang, K. L., Lee, K. H., Tabach, M., y Stylianides, G. (2012). Principles of Task Design for Conjecturing and Proving. En *New ICMI Study Series* (Vol. 15).
https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_13
- Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1–3), 25–53.
<https://doi.org/10.1023/A:1012733122556>
- Miguélez, M. (2000). La investigación-acción en el aula. *Agenda Académica*, 7(1), 27.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. En *Revolución educativa* (Issue 3).
- Molina, O., y Samper, C. (2019). Tipos de Problemas que Provocan la Generación de Argumentos Inductivos, Abductivos y Deductivos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(63), 109–134. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a06>
- Pino-Fan, L., y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87–109.
- Pino-fan, L. R., Godino, J. D., y Font, V. (2011). Faceta Epistémica Del Conocimiento Didáctico-Matemático Sobre La Derivada. *Educação Matemática Pesquisa. Revista Do Programa de Estudos Pós-Graduados Em Educação Matemática. ISSN 1983-3156*, 13(1), 141–178.
- Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., y Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para

- explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (2ª parte)
 < i>Desenho e aplicação de um instrumento para explorar a faceta epistêmica do conhecim. < i>Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 8(0), 1–49. < a href="https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8nespp1">https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8nespp1
- Reyes Acosta, D. M. (2017). < i>Visualización y Exploración, acciones que se fortalecen en el ambiente de aprendizaje apoyado con Geogebra en la asignatura de Geometría Euclídea en estudiantes Universitarios.
- Schoenfeld, A. H., y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. < i>The International Handbook of Mathematics Teacher Education, 2.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching : Foundations of the New Reform. < i>Harvard Educational Review, 57(1), 1–22.
- Simon, S., Erduran, S., y Osborne, J. (2006). Learning to teach argumentation: Research and development in the science classroom. < i>International Journal of Science Education, 28(2–3), 235–260. < a href="https://doi.org/10.1080/09500690500336957">https://doi.org/10.1080/09500690500336957
- Solar, H., y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. < i>Bolema - Mathematics Education Bulletin, 30(56), 1092–1112. < a href="https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a13">https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a13
- Strauss, A., y Corbin, J. (2002). < i>Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada. < a href="http://www.academia.edu/download/38537364/Teoria_Fundamentada.pdf">http://www.academia.edu/download/38537364/Teoria_Fundamentada.pdf
- Triana, J., y Zambrano, J. (2016). < i>Tareas que promueven el uso experto de un elemento teórico en la argumentación matemática. Universidad Pedagógica Nacional.
- Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., y Winicki-Landman, G. (2012).

The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical Perspectives. In *New ICMI Study Series* (Vol. 15, pp. 215–229). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-](https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_9)

6_9

10 Anexos

10.1 Anexo 1: Base de Datos Ciclo 1

Tabla 1: Insumos Ciclo 1

Insumo	Código Insumo	febrero	marzo	abril	mayo	junio
Propuesta con la que ingresamos al programa de MDM	PIC	<u>Carlos David Guevara Borrás</u> : Propuesta para enseñar la proporcionalidad usando herramientas un entorno de geometría dinámica y contextos desde las ciencias naturales.	Se realiza en el seminario Investigación e innovación un análisis guiado de las propuestas de anteproyecto buscando conexiones con los cuatro componentes de la línea de investigación propuesta para la cohorte 2020 (argumentación, tecnologías digitales, tareas, geometría). De igual manera se propone como objeto de estudio el conocimiento didáctico - matemático del profesor.	No aplica.	No aplica.	No aplica.
	PIO	<u>Omar Augusto Martínez Domínguez</u> : Propuesta para enseñanza de la factorización por medio de herramientas digitales y la transversalización de contextos de diversas áreas.		No aplica.	No aplica.	No aplica.
Apuntes seminario Profundización en Matemáticas Elementales (Prof. Oscar Molina).	APME	Se abordan 3 tareas en las cuales por medio de la exploración, el procedimiento de construcción, la formulación de la conjetura y el sistema axiomático; se tiene un primer acercamiento al concepto de tarea visto desde el enfoque Ontosemiótico. Lo anterior, se trabaja desde los objetos matemáticos primarios. Se tiene un primer acercamiento a la definición de argumentación o proceso de argumentar. Finalmente se trabajan los argumentos formales e informales. Con esto último, se trabaja en la identificación de argumentos inductivo, deductivo y abductivo. Finalmente se aborda el modelo de Toulmin para la representación de los argumentos en una tarea matemática y su análisis epistémico. Lo anterior contiene información sobre argumentación, tareas y entornos de geometría dinámica.	Presentación de argumentos a la luz del modelo de Toulmin. Se revisan las tareas realizadas con anterioridad, analizando las fortalezas y debilidades encontradas en cada uno de los escritos. Lo anterior contiene información sobre argumentación, tareas y entornos de geometría dinámica.	Exposición de tarea en relación con la parábola. Se desarrolló por doblado de papel, envolventes y puntos tangentes. Lo anterior, generó una transformación en lo que se entendía acerca de argumentos, así mismo, generó una confrontación al analizar las diversas formas de abordar una tarea.	Abordaje de tareas desde lo sintético, analítico y sintético - analítico. Se observan y analizan las fortalezas y dificultades de cada método. De igual manera, se trabajan las diversas partes que conformar una tarea. Se presenta los componentes de una red conceptual (definiciones, procedimientos y proposiciones). Esto, se realiza desde el papel de resolutor y profesor. Lo anterior contiene información sobre argumentación y diseño tareas.	Realimentación de la tarea final. Se analizan las fortalezas y debilidades de cada grupo en el diseño de una tarea matemática escolar y los diversos componentes. Lo anterior contiene información sobre argumentación, tareas y entornos de geometría dinámica. Además, se puede indicar una transformación en lo que se entendía por diseño de tareas y todo lo que eso conlleva.

Insumo	Código Insumo	febrero	marzo	abril	mayo	junio
Apuntes seminario Investigación e Innovación (Prof. Leonor Camargo).	AII	Se dan a conocer los componentes de la línea de investigación de la cohorte 2020. Se trabajan los componentes de un anteproyecto. Análisis de pregunta problema y planteamiento del problema en diversos trabajos de grado de maestría. Finalmente, se abordan los grupos de investigación existentes a nivel mundial (escuela italiana, inglesa, Norteamérica, latinoamericana). Lo anterior contiene información sobre fuentes de información en didáctica de la matemática.	Presentación de la idea de anteproyecto. Se realizan ajustes a la propuesta, en lo referente a tema, título, planteamiento del problema. Se trabajan evidencias empíricas. Se define argumentación, entorno de geometría dinámica, exploración, conocimiento del profesor como objeto de estudio.	Exposición de las propuestas de anteproyecto. Se dan pautas para la escritura de un anteproyecto. Se aborda el conocimiento didáctico - matemático del profesor.	Presentación de las partes de una justificación y como redactarlas. Intereses y aspectos relevantes de la investigación. Explicación del marco conceptual preliminar, objetivos y revisión de literatura. Corrección en vivo de la revisión de literatura de los anteproyectos.	Exposición de estrategia metodológica de investigación acción. Ensayo de exposición final.
Apuntes seminario Diseño y Desarrollo Curricular (Prof. Claudia Vargas).	ADDC	Propuesta de Pedro Gómez para el diseño de tareas. Enfoque especial en el análisis de instrucción. ¿Qué es una tarea matemática? ¿Qué es una actividad matemática? Tipos de construcciones en entornos de geometría dinámica. Importancia de los EGD. Resolución de tareas por medio de diversas herramientas. Problemas de visualización. Análisis de contenido y fenomenología.	Resolución de una tarea utilizando cada uno de los recursos disponibles: doblado de papel, GeoGebra, regla y compás. Análisis de los recursos. Argumentos que emergen en cada uno. Objetos matemáticos involucrados.	Diferencia entre tarea y actividad. Desarrollo de actividad de logo: la tortuga que dibuja. ¿Cuál es la relación entre comando y objeto geométrico específico? Estructura de diseño de una tarea. Tipos de problema, Principios que están involucrados en el diseño de una tarea. ¿Qué actividad matemática hace el estudiante? ¿Qué actividad matemática hace el software? ¿Qué decisiones toma el profesor frente a la forma de escribir y dar a conocer la instrucción y recurso que elige? ¿Qué obstáculos epistemológicos se tienen?	Análisis curricular. ¿Qué entiendo por currículo? Niveles del currículo. Componentes básicos que debe tener el currículo (contenido, propuesta, organización). Componentes ampliados (diseño de tareas). Cuando diseño una tarea se debe preguntar: que, como, con que, con quien, en donde, como se mide. Currículo declarado, implementado y oculto. Metas de educación geométrica (macro, meso, micro). Relaciones socio-matemáticas de una clase.	Realimentación de la tarea final. Se analizan las fortalezas y debilidades de cada grupo en el diseño de una tarea matemática escolar y los diversos componentes. Lo anterior contiene información sobre argumentación, tareas y entornos de geometría dinámica. Además, se puede indicar una transformación en lo que se entendía por diseño de tareas y todo lo que eso conlleva.

Insumo	Código Insumo	febrero	marzo	abril	mayo	junio
Apuntes seminario Escritura y Uso de Recursos Bibliográficos (Prof. Edgar Guacaneme).	AEURB	No aplica.	Identificación de perfil profesional. ¿Qué significa formar parte de una comunidad académica? ¿Qué características tiene una comunidad académica? Innovación matemática. Presentación de perfil profesional a un compañero. Estructura de un texto (micro y macroestructura). Estructura de una reseña. Capacitación de biblioteca UPN sobre bases de datos.	Instrucción y charla sobre importancia y aplicación de normas APA. Revisión superficial de documento (tesis doctoral Edgar Guacaneme) sin normas APA.	Presentación de información para eventos. Poster. Exposiciones por grupos de acuerdo con las falencias de las tareas del mes de marzo.	Evaluación de los posters, analizando dificultades y fortalecer para versión 2. Exposiciones grupales sobre los documentos Galicia - Velandia - Ruiz: Posing Significant Research Questions Guevara - Martínez - Díaz - Acero: Theoretical Framing as Justifying Acosta - Montana - Camargo - Triana: Choosing and Justifying Robust Methods for Educational Research Alarcón - Fernández - Bello - Raigoso: So What? Justifying Conclusions and Interpretations of Data
Tareas extra-clase seminario Profundización en Matemáticas Elementales (Prof. Oscar Molina).	TEPME	No aplica.	Tarea extra-clase 1. Exposición de argumentos emergidos en las situaciones 1 y 3 del día 1, procesos de construcción, representación GeoGebra. Replicar proceso de doblado de papel en GeoGebra, formular conjetura y demostrarla, procedimiento de construcción y argumento emergido. Objetos primarios involucrados en el problema.	Tarea extra-clase 2: Doblado de papel (elipse por envolventes). Formular conjetura y presentar argumento emergido en la construcción por GeoGebra. Tangente por punto P a una elipse (procedimiento de solución, conjetura, demostración por los procedimientos sintético, sintético - analítico y analítico).	Claridad y análisis sobre Tarea extra-clase 2 por medio de la solución propuesta por el profesor. Correcciones y observaciones.	Tarea final: Reuniendo lo trabajado en los cursos de Profundización en matemáticas elementales y Diseño y desarrollo curricular, se diseña una tarea que reúna las características vistas en clase.
Tareas extra-clase seminario Investigación e Innovación (Prof. Leonor Camargo).	TEII	Análisis de trabajos de grado de maestría. Análisis de propuesta de anteproyecto con la que se ingresó a la MDM.	Basándose en autores sugeridos por la profesora se formula primer borrador del anteproyecto con la construcción del problema. También se realiza la exposición del documento.	Realización de la delimitación del problema de investigación con entregas semanales. También se plantean las preguntas: ¿Cuál es mi conocimiento inicial sobre el tema del proyecto? ¿De dónde proviene el conocimiento que tengo sobre el tema del proyecto? ¿Como se ha expresado usualmente el conocimiento que tengo sobre el tema en la práctica docente?	Corrección de delimitación del problema, objetivos, coherencia título - tema - pregunta, revisión de literatura y justificación.	Acercamiento a la estrategia de metodología. Entrega de documento final de anteproyecto.

Insumo	Código Insumo	febrero	marzo	abril	mayo	junio
Tareas extra-clase seminario Diseño y Desarrollo Curricular (Prof. Claudia Vargas).	TEDDC	Tarea 1: Análisis de instrucción y diseño inicial de una tarea. Tarea 2: Construcciones blandas y robustas (reseña Laborde). Tarea 3: Mapa conceptual Lee.	No aplica.	Tarea 1: Análisis de tarea y principios que favorecieran la argumentación.	Tarea 1: Diseñar una secuencia de tres tareas. Resolución de preguntas con respecto al diseño de la secuencia de tareas. Tarea 2: Revisión de las memorias del ICMI 22. Elaboración de principios para fomentar la argumentación.	Tarea final: Reuniendo lo trabajado en los cursos de Profundización en matemáticas elementales y Diseño y desarrollo curricular, se diseña una tarea que reúna las características vistas en clase.
Tareas extra-clase seminario Escritura y Uso de Recursos Bibliográficos (Prof. Edgar Guacaneme).	-	Revisión de documento Molina y Samper (2019)	Tarea 1: Realizar CvLAC. Tarea 2: Perfil profesional. Tarea 3: Resumen documento Molina y Samper (2019). Tarea 4: Hoja de vida.	Tarea 1: Revisión de documentos sobre normas APA.	Tarea 1: Exposiciones por grupos de acuerdo con las falencias de las tareas del mes de marzo. Tarea 2: Poster.	Tarea 1: Corrección del poster. Tarea 2: Evaluación por grupos de los posters. Tarea 3: Exposición de documento "el marco teórico como justificación". Tarea 4: Entrega de documento final de anteproyecto.
Diarios personales.	DP	El diseño de una tarea es un proceso que se debe trabajar desde 4 etapas; dichas etapas por propuestas por Pedro Gómez, permite al docente un diseño de tareas que tienen un objetivo de aprendizaje claro y una ejecución más eficiente. No es lo mismo una tarea que una secuencia de tareas. ¿De qué manera puedo como docente fortalecer los procesos de argumentación en mis estudiantes? ¿Cómo puedo realizar un uso eficiente de las herramientas tecnológicas que el colegio pone a mi disposición?	La argumentación o proceso de argumentar es un resultado de razón, es decir: Todo argumento es resultado de una razón, pero no toda razón genera un argumento. La función del argumento es convencer, pero esto se puede tomar desde dos puntos de vista: Establecer certidumbre o auto convencerse y persuadir o convencer a otras personas. Es otras palabras el argumento generar dos procesos de convencimiento: uno interno y otro externo.	La experiencia con el doblado de papel me ha dejado observar que las aplicaciones geométricas tienen otras formas de realizar exploraciones además del lápiz, regla, compás y GeoGebra. Es curioso como de a poco nos vamos dando cuenta que el centro del discurso no son los estudiantes, durante todos estos años de práctica docente he adquirido una visión errónea de los procesos educativos; los resultados no dependen de los estudiantes sino directamente del docente.	Existe en enfoque Ontosemiótico para analizar las tareas. Se aclaran los 4 tipos de argumentos: Deductivo, Abductivo, Inductivo, Analógico. ¿Cómo profesor que practicas puedo ejercer para favorecer la argumentación? ¿Se puede agregar la subestimación del software?	Comprensión de la metodología en una investigación. Importancia del diseño de tareas y todos aquellas posibles soluciones y errores que pueden llegar a tener nuestros estudiantes. Ser claro en la instrucción de una tarea. Importancia de la exploración en el proceso de argumentar. La dificultad del tema no asegura un proceso enriquecedor. Importancia de una red conceptual en el diseño de una tarea.

Insumo	Código Insumo	febrero	marzo	abril	mayo	junio
Versiones del anteproyecto.	GA-V#	Posible pregunta de investigación y tema.	Versión 1 (Titulo, delimitación, pregunta problema).	Versión 2 (Delimitación, pregunta problema). Versión 3 (Delimitación, pregunta problema). Versión 4 (Tema, titulo, resumen, delimitación, pregunta problema, referencias).	Versión 5 (Tema, titulo, resumen, delimitación, pregunta problema, justificación, referencias). Versión 6 (Tema, titulo, resumen, delimitación, pregunta problema, justificación, objetivo general, referencias). Versión 7 (Tema, titulo, resumen, delimitación, pregunta problema, justificación, objetivo general, objetivos específicos, revisión de la literatura, referencias). Versión 8 (Tema, titulo, resumen, delimitación, pregunta problema, justificación, objetivo general, objetivos específicos, revisión de la literatura, marco conceptual preliminar, aproximación inicial a la estrategia metodológica, referencias).	Versión final (Tema, titulo, resumen, delimitación, pregunta problema, justificación, objetivo general, objetivos específicos, revisión de la literatura, marco conceptual preliminar, aproximación inicial a la estrategia metodológica, cronograma, referencias).
Síntesis de la reunión con expertos	ARE	No aplica.	Reunión con el profesor Oscar Molina, en la cual se abordaron relaciones entre exploración, argumento y razón. Además, se vislumbraron posibles preguntas de investigación a partir de los postulados presentados por el profesor.	No aplica.	No aplica.	No aplica.

Insumo	Código Insumo	febrero	marzo	abril	mayo	junio
Tareas en clase seminario Diseño y Desarrollo Curricular (Prof. Claudia Vargas).	TCDDC	<p>1. Seleccionar un curso en el cual usted sea profesor actualmente.</p> <p>2. Elegir un contenido de geometría que usualmente desarrolla en ese grado.</p> <p>3. Diseñar una tarea en relación con dicho contenido que propenda al desarrollar del proceso de argumentar y emplear el uso de un software especializado.</p> <p>4. Reportar los aspectos que tuvo en cuenta para diseñar la tarea.</p> <p>Con una pieza de papel en forma de círculo, se pretende formar un cono. Para ello, se corta de ella una región circular determinada por un ángulo central tal como se ilustra en la Figura. ¿Cuál debe ser la medida de tal ángulo central para que el volumen del cono sea máximo?</p>	<p>1. Resolver cada una de las situaciones propuestas en clase, utilizando cada uno de los recursos disponibles: doblado de papel, GeoGebra, regla y compás.</p> <p>2. Elaborar un análisis de cada uno de los recursos.</p> <p>3. Describir los argumentos que surgieron al solucionar la tarea.</p> <p>4. Identificar los principios del diseño de tareas de aprendizaje relacionadas con la tarea TEDDC-04.</p> <p>5. Discutir con sus compañeros la relación entre el recurso y los principios de tarea.</p> <p>6. Seleccionar uno de los recursos. Formular un posible objetivo de aprendizaje para la tarea 1 e indicar diferentes formas en que los estudiantes podrían desarrollar esta tarea y los argumentos que podrían generarse.</p> <p>1. Describir y comparar tres conjuntos de situaciones de tarea.</p> <p>2. Caracterizar el tipo de argumentos que genera cada conjunto de tareas.</p> <p>3. Seleccionar una tarea de cada conjunto. Responder: ¿Es posible transformarla en el enunciado de una tarea que pertenezca a alguno de los otros dos conjuntos?</p> <p>4. Seleccionar una de las tareas que diseñó. ¿Es posible categorizarla en alguno de los</p>	<p>Efectuar un análisis de una tarea propuesta a un grupo de estudiantes para ser desarrollada con un programa de geometría dinámica, junto con una breve caracterización del curso y de sus estudiantes. Dicho análisis debe centrarse en las siguientes categorías:</p> <p>1. Sobre la tarea propuesta.</p> <p>2. Previsión de la actividad de los estudiantes.</p> <p>3. Rol y potencial del software.</p> <p>4. Obstáculos.</p>	<p>Teniendo en cuenta la acción TCDDC-01, rediseñar una secuencia de tres tareas y describir lo siguiente:</p> <p>1. Formulación de la situación.</p> <p>2. Caracterización de la población.</p> <p>3. Análisis de instrucción.</p> <p>4. Posibles respuestas por parte de los estudiantes.</p>	<p>Desarrollo de los conceptos del diseño de tareas a partir preguntas problematizadoras.</p>

Insumo	Código Insumo	febrero	marzo	abril	mayo	junio
			anteriores conjuntos de tareas? Si su respuesta es sí, explique su respuesta. Si la respuesta es no, ¿qué diferencia la tarea que propuso con estas tareas?"			

Insumo	Código Insumo	febrero	marzo	abril	mayo	junio
Tareas en clase seminario Profundización en Matemáticas Elementales (Prof. Oscar Molina).	TCPME	<p>1. Proveer los pasos de construcción en GeoGebra validándolos teóricamente siempre que sea posible.</p> <p>2. Proveer la exploración realizada para encontrar propiedades invariantes en busca de la solución del problema.</p> <p>3. Formular una conjetura que reporte el invariante encontrado.</p> <p>4. Proveer la demostración de la conjetura.</p> <p>Dadas las siguientes situaciones: SITUACIÓN 1: Dados dos puntos A y B, ¿cuántas circunferencias contienen a A y B? SITUACIÓN 2: Dados tres puntos A, B y C, ¿cuántas circunferencias contienen a A, SITUACIÓN 3: Dados cuatro puntos A, B, C y D, ¿cuántas circunferencias contienen a A, B, C y D?</p> <p>1. Identifique los conceptos-definición, proposiciones, lenguajes, procedimientos y argumentos que emergieron de la solución de cada una de las situaciones-problema abordadas previamente.</p> <p>2. Identifique procesos matemáticos que estuvieron involucrados en la solución de cada una de las situaciones-problema abordadas previamente. Precise momentos en los que estos procesos emergieron.</p> <p>A partir de los resultados puestos en común y la discusión de la acción TCPME-01.</p>	<p>Realizar los siguientes pasos de doblado de papel:</p> <p>1. Tomar una hoja en blanco. Hacer un doblez por la mitad de la hoja rectangular, a lo largo de la misma.</p> <p>2. Dibujar en uno de los bordes más cortos de la hoja, puntos cuya distancia podría ser un centímetro entre ellos. Dibujar un punto P sobre el doblez del paso 1.</p> <p>3. Solapar, mediante un doblez, cada uno de los puntos del borde de la hoja con el punto P.</p> <p>Reportar:</p> <p>a. ¿Qué objeto se visualiza? b. ¿Qué objeto representa cada doblez con respecto al punto P y el punto correspondiente al borde la hoja? c. Modelar el proceso usando GeoGebra.</p>	<p>Dada una parábola ϕ con un foco F y una directriz d. Determinar la recta tangente a ϕ por un punto P a ella. Proveer:</p> <p>1. Procedimiento de construcción. 2. Solución de la situación analíticamente.</p>	<p>Claridad y análisis sobre Tarea extra- clase 2 por medio de la solución propuesta por el profesor. Correcciones y observaciones.</p>	<p>Tarea final: Reuniendo lo trabajado en los cursos de Profundización en matemáticas elementales y Diseño y desarrollo curricular, se diseña una tarea que reúna las características vistas en clase.</p>

Tabla 2: Acciones Ciclo 1

Seminario	Código acción	Acción
Diseño y Desarrollo Curricular	LDDC-01	Leer documento Gómez, P., Mora, M. F., y Velasco, C. (2015). Análisis de instrucción. In <i>Formación de Profesores de Matemáticas y Práctica de Aula</i> (pp. 197–222).
	LDDC-02	Leer documento Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments. <i>Proceedings of the Tenth Asian Technology Conference in Mathematics</i> , 22–35.
	LDDC-03	Leer documento Lin, F. L., Yang, K. L., Lee, K. H., Tabach, M., y Stylianides, G. (2012). Principles of Task Design for Conjecturing and Proving. In <i>New ICMI Study Series</i> (Vol. 15). https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_13
	LDDC-04	Leer documento Molina, O., y Samper, C. (2019). Tipos de Problemas que Provocan la Generación de Argumentos Inductivos, Abductivos y Deductivos. <i>Bolema: Boletim de Educação Matemática</i> , 33(63), 109–134. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a06

Seminario	Código acción	Acción
	LDDC-05	Leer documento Hanna, G., de Villiers, M., y International Program Committee. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. <i>International Journal on Mathematics Education</i> , 40(2), 329–336. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0073-4
	TCDDC-01	<ol style="list-style-type: none"> 1. Seleccionar un curso en el cual usted sea profesor actualmente. 2. Elegir un contenido de geometría que usualmente desarrolla en ese grado. 3. Diseñar una tarea en relación con dicho contenido que propenda por desarrollar el proceso de argumentar y requiera emplear el uso de un software especializado. 4. Reportar los aspectos que tuvo en cuenta para diseñar la tarea.
	TCDDC-02	Con una pieza de papel en forma de círculo, se pretende formar un cono. Para ello, se corta de ella una región circular determinada por un ángulo central tal como se ilustra en la Figura. ¿Cuál debe ser la medida de tal ángulo central para que el volumen del cono sea máximo?
	TCDDC-03	<ol style="list-style-type: none"> 1. Resolver cada una de las situaciones propuestas en clase, utilizando cada uno de los recursos disponibles: doblado de papel, GeoGebra y regla y compás. 2. Elaborar un análisis de cada uno de los recursos. 3. Describir los argumentos que surgieron al solucionar la tarea. 4. Identificar los principios del diseño de tareas de aprendizaje relacionadas con la tarea TEDDC-04. 5. Discutir con sus compañeros la relación entre el recurso y los principios de tarea. 6. Seleccionar uno de los recursos. Formular un posible objetivo de aprendizaje para la tarea 1 e indicar diferentes formas en que los estudiantes podrían desarrollar esta tarea y los argumentos que podrían generarse.
	TCDDC-04	<ol style="list-style-type: none"> 1. Describir y comparar tres conjuntos de situaciones de tarea. 2. Caracterizar el tipo de argumentos que genera cada conjunto de tareas. 3. Seleccionar una tarea de cada conjunto. Responder: ¿Es posible transformarla en el enunciado de una tarea que pertenezca a alguno de los otros dos conjuntos? 4. Seleccionar una de las tareas que diseñó. ¿Es posible categorizarla en alguno de los anteriores conjuntos de tareas? Si su respuesta es sí, explique su respuesta. Si la respuesta es no, ¿qué diferencia la tarea que propuso con estas tareas?
	TCDDC-05	<p>Efectuar un análisis de una tarea propuesta a un grupo de estudiantes para ser desarrollada con un programa de geometría dinámica, junto con una breve caracterización del curso y de sus estudiantes. Dicho análisis debe centrarse en las siguientes categorías:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Sobre la tarea propuesta. 2. Previsión de la actividad de los estudiantes. 3. Rol y potencial del software. 4. Obstáculos.
	TEDDC-01	Diseñar una secuencia de tres tareas que involucren el uso de un programa de geometría dinámica y que propendan por desarrollar procesos de conjeturación y prueba respecto a un tema de la geometría escolar. La misma debe ser pertinente para alguno de los cursos que usted tiene asignados en su institución (incluir caracterización de la población). Reporte el análisis de instrucción para esta secuencia.
	TEDDC-02	En correspondencia con el texto LDDC-01, ¿lo propuesto por usted en la clase es una tarea? Escriba un párrafo con su explicación.
	TEDDC-03	Realizar una reseña, máximo de dos párrafos, respecto al texto LDDC-02.
	TEDDC-04	Realizar un mapa conceptual en el que expongan las principales ideas propuestas del documento LDDC-03.
	TEDDC-05	Seleccionar dos documentos del handbook LDDC-05 y proponer un conjunto de principios para el diseño y análisis de tareas para favorecer la argumentación en la clase de geometría con el uso de un programa específico.
	TEDDC-06	<p>Teniendo en cuenta la acción TCDDC-01, rediseñar una secuencia de tres tareas y describir lo siguiente:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Formulación de la situación. 2. Caracterización de la población. 3. Análisis de instrucción. 4. Posibles respuestas por parte de los estudiantes.

Seminario	Código acción	Acción
	TEDDC-07	1. Seleccionar un problema de un libro de texto, al cual se le vea potencial de poner en juego los asuntos estudiados en los seminarios de la MDM (argumentación, uso de tecnologías digitales, diseño de tareas). 2. Diseñar una tarea o secuencia de tareas que involucre a dicho problema, pero teniendo en cuenta las siguientes situaciones: a. ¿Cuáles serían los requisitos necesarios para abordar la tarea? (caracterización de la población y objetos primarios). b. ¿Cuáles serían las metas que se pretenden alcanzar con el problema? (objetos primarios, procesos matemáticos y asuntos de otra índole). c. ¿Cómo formularían la situación de tarea para que se favorezca el logro de las metas propuestas? (tener en cuenta los recursos) d. ¿Cuál sería la potencial actividad matemática de los estudiantes al abordar la situación de tarea? • Potenciales respuestas a cada uno de los ítems puestos en la formulación de la tarea y la actividad matemática asociada. • Objetos primarios involucrados en cada potencial actividad. • ¿Cuál sería la gestión del profesor frente a la actividad prevista para lograr la meta? • ¿Cuál es la realimentación que el recurso seleccionado suministra al estudiante respecto a la actividad presupuestada?
Innovación e Investigación	LII-01	Leer documento Bernal, S., y Romero, A. (2011). Instrumentos de mediación en la actividad demostrativa.
	LII-02	Leer documento Franco Avendaño, B. P., y Moreno Cárdenas, G. A. (2011). La argumentación como núcleo de la actividad demostrativa.
	LII-03	Leer documento Sua, C. (2013). Acciones del profesor que promueven la actividad demostrativa a la luz de la práctica racional.
	LII-04	Leer documento Manrique Pérez, V. E., y Medina Meléndez, I. J. (2017). Tareas digitales: recurso didáctico para favorecer la argumentación.
	LII-05	Leer documento Toro Uribe, J. A. (2014). Acercamiento a la argumentación en un ambiente de geometría dinámica: grado octavo.
	LII-06	Leer documento Triana, J., y Zambrano, J. (2016). Tareas que promueven el uso experto de un elemento teórico en la argumentación matemática. Universidad Pedagógica Nacional.
	LII-07	Leer documento Moyano, L. E. (2016). Acciones de un profesor que promueven la experimentación y reflexión sobre la actividad demostrativa. El caso de profesores en formación avanzada.
	LII-08	Leer documento Drijvers, P. (2013). Digital Technology in Mathematics Education: Why It Works (Or Doesn't). In Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education (pp. 135–151). https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6
	LII-09	Leer documento Margolinas, C. (2013). Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22, 647.
	LII-10	Leer documento Samper, C., Cepeda-Buitrago, L. M., y Vargas-Guerrero, C. M. (2015). Descubrir un hecho geométrico: ¿mayor conocimiento implica mejor desempeño? Magis: Revista Internacional de Investigación En Educación, 7(15), 33–48. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m7-14.dhgm
	LII-11	Leer documento Camargo, L., Samper, C., y Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. Lecturas Matemáticas, Especial, 371–383. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/7176377.pdf
	LII-12	Leer documento Fiallo, J., Camargo, L., y Gutiérrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. Revista Integración, 31(2), 181–205.
	LII-13	Leer documento Groman, M. W. (1996). Integrating “Geometer’s Sketchpad” into a Geometry Course for Secondary Education Mathematics Majors. Association of Small Computer Users in Education Summer Conference Proceedings, 61–65.
	LII-14	Leer documento Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. Educational Studies in Mathematics, 44(1–3), 25–53. https://doi.org/10.1023/A:1012733122556
	LII-15	Leer documento MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Cooperativa Editorial Magisterio, 103.
	LII-16	Leer documento Sánchez Olavarría, C., y Huchim Aguilar, D. (2015). Trayectorias docentes y desarrollo profesional en el nivel medio superior. CPU-e, Revista de Investigación Educativa, 21, 148–167. https://doi.org/10.25009/cpue.v0i21.1722
	LII-17	Leer documento Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., y Winicki-Landman, G. (2012). The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical Perspectives. In New ICMI Study Series (Vol. 15, pp. 215–229). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_9
	LII-18	Leer documento Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in cabri environments. International Journal on Mathematics Education, 34(3), 66–72. https://doi.org/10.1007/BF02655708
	LII-19	Leer documento Miguélez, M. (2000). La investigación-acción en el aula. Agenda Académica, 7(1), 27.
	LII-20	Leer documento Serres Voisin, Y. (2007). Un estudio de la formación profesional de docentes de matemática a través de investigación-acción. Revista de Pedagogía, 28(82), 287–310.
TCII-01	Analizar tesis de maestría, identificando delimitación del problema, objeto de estudio y objetivo de la investigación.	

Seminario	Código acción	Acción
	TCII-02	Analizar propuestas de trabajo de grado presentadas al ingresar a la MDM, buscando conexiones con tareas, EGD, argumentación y geometría.
	TCII-03	Simulacro de presentación de anteproyecto.
	TEII-01	Realizar y corregir versiones del anteproyecto (1-10).
	TEII-02	Contestar preguntas orientadoras sobre la delimitación del problema.
	TEII-03	Redactar una narración inicial de la justificación, objetivos y revisión literaria.
	LPME-01	Leer documento Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 38(3), 289–321.
	TCPME-01	<ol style="list-style-type: none"> 1. Proveer los pasos de construcción en GeoGebra validándolos teóricamente siempre que sea posible. 2. Proveer la exploración realizada para encontrar propiedades invariantes en busca de la solución del problema. 3. Formular una conjetura que reporte el invariante encontrado. 4. Proveer la demostración de la conjetura. <p>Dadas las siguientes situaciones:</p> <p>SITUACIÓN 1: Dados dos puntos A y B, ¿cuántas circunferencias contienen a A y B?</p> <p>SITUACIÓN 2: Dados tres puntos A, B y C, ¿cuántas circunferencias contienen a A,</p> <p>SITUACIÓN 3: Dados cuatro puntos A, B, C y D, ¿cuántas circunferencias contienen a A, B, C y D?</p>
	TCPME-02	<ol style="list-style-type: none"> 1. Identifique los conceptos-definición, proposiciones, lenguajes, procedimientos y argumentos que emergieron de la solución de cada una de las situaciones-problema abordadas previamente. 2. Identifique procesos matemáticos que estuvieron involucrados en la solución de cada una de las situaciones-problema abordadas previamente. Precise momentos en los que estos procesos emergieron. <p>A partir de los resultados puestos en común y la discusión de la acción TCPME-01.</p>
Profundización en Matemáticas Elementales	TCPME-03	<p>Realizar los siguientes pasos de doblado de papel:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Tomar una hoja en blanco. Hacer un doblado por la mitad de la hoja rectangular, a lo largo de la misma. 2. Dibujar en uno de los bordes más cortos de la hoja, puntos cuya distancia podría ser un centímetro entre ellos. Dibujar un punto P sobre el doblado del paso 1. 3. Solapar, mediante un doblado, cada uno de los puntos del borde de la hoja con el punto P. <p>Reportar:</p> <ol style="list-style-type: none"> a. ¿Qué objeto se visualiza? b. ¿Qué objeto representa cada doblado con respecto al punto P y el punto correspondiente al borde la hoja? c. Modelar el proceso usando GeoGebra.
	TCPME-04	<p>Dada una parábola \wp con un foco F y una directriz d. Determinar la recta tangente a \wp por un punto P a ella. Proveer:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Procedimiento de construcción. 2. Solución de la situación analíticamente.
	TEPME-01	Representar los argumentos emergidos de la acción TCPME-01.
	TEPME-02	Proveer la construcción, exploración y argumentos emergidos de la acción TCPME-03 y TCPME-04. Así como los objetos primarios identificados en la solución.
	TEPME-03	Realizar doblado de papel para visualizar una elipse por medio de envolventes y punto tangente. Modelar en GeoGebra. Proveer proceso construcción, exploración, conjeturación y demostración de la conjetura. Representar los argumentos emergidos. Demostrar la conjetura desde lo sintético, analítico y lo sintético – analítico.

Seminario	Código acción	Acción
	TEPME-04	<p>1. Seleccionar un problema de un libro de texto, al cual se le vea potencial de poner en juego los asuntos estudiados en los seminarios de la MDM (argumentación, uso de tecnologías digitales, diseño de tareas).</p> <p>2. Diseñar una tarea o secuencia de tareas que involucre a dicho problema, pero teniendo en cuenta las siguientes situaciones:</p> <p>a. ¿Cuáles serían los requisitos necesarios para abordar la tarea? (caracterización de la población y objetos primarios).</p> <p>b. ¿Cuáles serían las metas que se pretenden alcanzar con el problema? (objetos primarios, procesos matemáticos y asuntos de otra índole).</p> <p>c. ¿Cómo formularían la situación de tarea para que se favorezca el logro de las metas propuestas? (tener en cuenta los recursos)</p> <p>d. ¿Cuál sería la potencial actividad matemática de los estudiantes al abordar la situación de tarea?</p> <ul style="list-style-type: none"> • Potenciales respuestas a cada uno de los ítems puestos en la formulación de la tarea y la actividad matemática asociada. • Objetos primarios involucrados en cada potencial actividad. • ¿Cuál sería la gestión del profesor frente a la actividad prevista para lograr la meta? • ¿Cuál es la realimentación que el recurso seleccionado suministra al estudiante respecto a la actividad presupuestada?

Tabla 3: Fragmentos Ciclo 1

Fragmento	Asunto	Idea central respecto al conocimiento	Categorías	Estado	¿Qué sabía antes?	Lo que sé ahora	Acción generó esa transformación	Nuevas inquietudes
Usualmente, enseñamos por contenidos y no por procesos, para cumplir con los lineamientos y mallas curriculares propias de cada institución. Todo esto es resultado, probablemente, de copiar el modelo de las prácticas bajo las cuales aprendimos geometría en el colegio o en la universidad.	ARG-EXP	Los dos profesores han desarrollado un conocimiento práctico a partir de su experiencia académica en el pregrado respecto a la enseñanza. Desde esta experiencia, se enseña contenidos. No se evidencia que los profesores consideren que también se enseñan procesos como la exploración y la argumentación.	Metodologías para favorecer los procesos de enseñanza hacia la exploración y la argumentación.	0		La enseñanza por contenidos no es una metodología viable. Este tipo de enseñanza genera clases en un modo de catedra tradicional pasiva. La educación en matemáticas debe enfatizar el desarrollo de pensamientos. Estos últimos ligados a procesos como la exploración y la argumentación.		¿Qué tipo de situaciones se pueden incluir en tareas que les permitan a los estudiantes espacios para la exploración?
[En] las clases [se] reproduce un círculo vicioso por parte de los profesores de dictar, explicar, calificar, y por parte de los estudiantes de copiar, imitar y entregar.	EXP	La exploración no hacia parte de nuestras prácticas, posiblemente por desconocimiento. No se encuentra evidencia de que el proceso de explorar hiciera parte de nuestras prácticas.	Importancia de la exploración.	0		El proceso de exploración permite que los estudiantes tengan espacio para construir su propio conocimiento a partir de la toma de decisiones y descubrimiento de invariantes en objetos geométricos. En este		¿Qué factores debo tener en cuenta para aplicar de forma eficiente y eficaz tareas que fomenten el proceso de exploración en

						sentido, el proceso de exploración facilita la generación de argumentos.		nuestras clases?
[En las clases que realizábamos al iniciar el semestre, estábamos] olvidando que las construcciones geométricas [en un EGD] pueden ser fuente de ricos significados si son implementadas de manera adecuada en las aulas.	EGD	Identificamos un potencial de los EDG en los procesos de enseñanza.	Importancia de los EGD.	1				
En el transcurso de los diferentes seminarios de la Maestría hemos apropiado algunos fundamentos, específicamente gracias a las tareas propuestas en los Seminarios Diseño y Desarrollo Curricular, Innovación e Investigación y Profundización en Matemáticas Elementales. Un ejemplo de las tareas propuestas es: Dados cuatro puntos A, B, C y D. ¿Cuántas circunferencias contienen a A, B, C y D? Estas tareas promueven con el uso EGD, la exploración para encontrar propiedades invariantes, la formulación de conjeturas, la realización de una demostración y la identificación de argumentos que emergen colocándonos en el papel de resolutores.	TAR	Relación entre una tarea con el EGD contribuye al desarrollo de otros procesos de la Geometría Escolar, como explorar, conjeturar, demostrar y argumentar.	Relación tarea – EGD.	1				
Gracias a [las] tareas [desarrolladas en el curso de PME con el apoyo de EGD] nos hemos dado cuenta de que la exploración tiene un papel fundamental y muy importante que permite a los resolutores generar argumentos. La importancia de integrar la exploración ha sido el tema de considerable discusión académica. En las memorias del ICMI Study 19 publicadas por Hanna et al. (2008), varios estudiosos consideran la exploración como un componente valioso en el aprendizaje de la argumentación y la demostración (MacPherson 1985; Semadeni 1980; Arzarello et al. 2009).	ARG-EXP	MacPherson (1985), Semadeni (1980), Arzarello et al. (2009) consideran la exploración como un componente valioso en el aprendizaje de la argumentación y la demostración. Este tema ha sido abordado en diversas discusiones académicas. Los profesores evidencian que el proceso de exploración tiene un papel relevante en la formulación de argumentos.	Relación argumentación – exploración.	1				
Hemos identificado que nuestros colegas y nosotros mismos tenemos conocimientos precarios sobre lo que significa una tarea.	TAR	Los conocimientos sobre lo que significa una tarea son precarios.	Definición de tarea.	0	Comprendíamos las tareas como aquella actividad extra-clase que se le asignaba a un estudiante y constaba de unas partes, tales como: tema, curso, asignatura. Normalmente se aplicaba para la repetición de algoritmos	Ahora identificamos que es una tarea, su estructura y como está relacionada con la actividad matemática realizada por los estudiantes. En el diseño de una tarea se debe tener en cuenta el análisis de instrucción, los obstáculos, posibles respuestas por parte de los estudiantes, la mediación, la evaluación,	La acción se encuentra descrita en: LDDC-01, LDDC-04, TCDDC-01, TCDDC-02, TCDDC-03, TCDDC-05, TEDDC-05, TEDDC-01, TEDDC-02, TEDDC-05,	¿Qué características debe tener una tarea para promover la argumentación en cuyo abordaje se exige el uso de la geometría dinámica? ¿Qué aspectos del

					enseñados en clase.	articulación con el currículo.	TEDDC-06, LII-06, LII-09, TCPME-01, TCPME-02, TCPME-03, TCPME-04, TEPME-02, TEPME-03, TEPME-04.	conocimiento debe tener un educador matemático para diseñar tareas que promuevan la argumentación mediada por un software de geometría dinámica?
Sobre diseño de tareas tenemos muy poca práctica pues únicamente nos limitamos a usar ejercicios y problemas que sacamos de libros de texto o fuentes en internet; es decir, no asumimos seriamente el diseño de una tarea escolar.	TAR	Asociábamos la tarea con los ejercicios y los problemas de los libros de texto y de internet. Se seleccionaba un enunciado, sin ser conscientes de que la tarea incluye también prever otras cosas.	Diseño de una tarea.	0	Sobre diseño de tareas teníamos poco conocimiento, pues únicamente nos limitábamos a usar ejercicios y problemas que sacábamos de libros de texto o fuentes en internet.	Teníamos una concepción errónea del verdadero significado y potencia de una tarea matemática escolar. Ahora, identificamos la importancia y la función que una tarea tiene en el aprendizaje de los estudiantes. Así mismo, identificamos la estructura al momento de diseñar una tarea y los principios que se deben tener en cuenta al momento de realizar un diseño.	La acción se encuentra descrita en: LDDC-01, TCDDC-01, TCDDC-02, TCDDC-03, TCDDC-05, TEDDC-05, TEDDC-01, TEDDC-02, TEDDC-05, TEDDC-06, TCPME-01, TCPME-01, TCPME-02, TCPME-03, TCPME-04, TEPME-02, TEPME-03, TEPME-04.	¿Dé que manera puedo obtener el máximo potencial al momento de diseñar y proponer una tarea a los estudiantes?
En esos ejercicios [las tareas que proponía al iniciar la MDM], la argumentación que se propone no va más allá de pedir a los estudiantes responder Verdadero / Falso, Si / No y Justificar.	ARG	Argumentar es igual a justificar y a establecer el valor de verdad de una proposición.	Definición de argumentación.	0		Al iniciar la MDM comprendíamos a la argumentación desde la justificación de ejercicios. Ahora, logramos identificar la definición del proceso de argumentar y la función de un argumento. También, a partir de lo anterior, relacionamos al		

						proceso de argumentación con otros procesos matemáticos, como la exploración.		
En los pocos casos que los usamos [las herramientas tecnológicas], los empleamos para ganar velocidad, exactitud y confiabilidad en la realización de cálculos, trazos, dibujos o representaciones.	EGD	Las herramientas tecnológicas, en particular los EGG, permiten hacer más eficiente el manejo del tiempo y generar respuesta y representaciones más precisas.	Importancia de los EGD.	0		Podemos identificar como los EGD pueden enriquecer las prácticas en la geometría escolar. Además, reconocemos que es necesario un cambio en la percepción y conocimiento del profesor frente al uso de las tecnologías al momento introducirlas al aula.		¿Cómo involucrar los EGD de forma eficiente en la actividad matemática de los estudiantes?
Lo anterior nos ha llevado a omitir el verdadero potencial de las tecnologías dentro de nuestro contexto educativo que tiene que ver con a hacer visibles para los estudiantes las matemáticas experimentales	EGD	Las herramientas tecnológicas, en particular los EDG, permiten generar ambientes de aprendizaje que permitan a los estudiantes experimentar una actividad matemática más genuina.	Importancia de los EGD.	1				
El mal uso de las tecnologías digitales [...] se debe, entre otras razones, al poco conocimiento didáctico – matemático sobre estos asuntos.	EGD	El mal uso de las tecnologías digitales se debe al poco conocimiento didáctico – matemático sobre estos asuntos.	Impacto del conocimiento del profesor en su práctica.	0		Reconocemos la importancia del conocimiento didáctico - matemático del profesor y la reflexión que se deriva del análisis de experiencias centradas en el diseño de tareas, el proceso de argumentación y los EGD.		¿Cómo se pueden llevar a la práctica las investigaciones relacionadas con la temática? ¿De qué manera, se puede llegar a evidenciar la transformación del conocimiento didáctico -

								matemático del profesor?
Nuestro mayor interés era mejorar nuestras prácticas educativas impartidas en las instituciones donde laboramos, pero hemos tomado conciencia de que esto solamente se alcanza mejorando el conocimiento didáctico – matemático del profesor, particularmente centrado en el diseño de tareas en EGD.	TAR	Mejorar el conocimiento didáctico - matemático respecto al diseño de tareas en EGD contribuye a mejorar la práctica educativa.	Impacto del conocimiento del profesor en su práctica.	1				
Aunque introducir tecnologías [EGD] al aula de clase es de por sí es un proceso innovador, como lo mencionan Groman (1996) y Mariotti (2000), puesto que permite a los estudiantes el cambio en sus formas de abordar las clases de geometría, si no se cambia la forma de percibir la actividad docente esto sería en vano.	EGD	Para transformar las prácticas educativas no solo es necesario introducir EGD al aula de clase, también es necesario un cambio en las acciones del profesor.	Gestión del profesor con EGD.	1				
El diseño de las tareas que se proponen a los estudiantes debe cambiar [es decir, alejarse de la práctica de tomar tareas de libros de texto e internet] y aún más cuando estas se centran en la utilización de EGD.	TAR	El diseño de una tarea debe estar sujeto al recurso que se quiera implementar.	Diseño de una tarea.	1				
En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) vemos un interés por la adquisición de competencias matemáticas de los estudiantes mediante el desarrollo de procesos, tales como, la argumentación, la prueba y la refutación en la construcción del conocimiento.	ARG	La argumentación es un proceso matemático que contribuye al desarrollo de competencias (MEN, 2006).	Argumentación como proceso matemático.	0		Ahora, identificamos la importancia de la argumentación como un proceso altamente estudiado, debido a la fuerte vinculación que tiene con la actividad matemática que desarrolla un estudiante a partir de las tareas que se pueden llegar a proponer.		¿Cómo se puede abordar la enseñanza del proceso de argumentación con nuestros estudiantes?
Creemos pertinente la inclusión de la exploración como medio de interacción entre pensamiento y acción en los estudiantes. La retroalimentación y visualización inmediata de las acciones que la exploración puede aportar llevaría a los estudiantes a producir conjeturas y preguntas de la forma “qué pasa si. . .” (Groman, 1996), que estarían ligados a los procesos matemáticos [de la argumentación, la prueba y la refutación].	EXP	Para Grosman (1996) la exploración en EGD provee una realimentación al estudiante que le permite a ellos producir conjeturas y preguntas de la forma “qué pasa si. . .”	Función de la exploración.	1				
Creemos importante realizar un trabajo ligado al proceso de exploración, donde este adquiere un papel relevante, debido a que es tan significativo como los demás procesos resaltados por el MEN para buscar fomentar el razonamiento y los procesos de argumentación.	EXP	La exploración es importante en los procesos matemáticos, debido a que permite fomentar el razonamiento y los procesos de argumentación.	Función de la exploración.	1				

Hemos realizado un acercamiento investigativo en el cual vemos que la exploración tiene un papel relevante en la educación matemática, según varios investigadores.	EXP	La exploración ha sido objeto de estudio en la educación matemática.	Importancia de la exploración.	1				
La importancia de los procesos de exploración se evidencia únicamente cuando se hace ostensiva la relación intrínseca que esta sostiene con el razonamiento y la argumentación.	EXP	La importancia de la exploración se evidencia cuando se relacionan el razonamiento y la argumentación.	Importancia de la exploración.	1				
Arzarello et al. (2002) nos indica que la exploración por medio del uso del arrastre en sistemas de geometría dinámica es crucial en la dialéctica entre los aspectos perceptivos y teóricos que se llevan a cabo en el razonamiento geométrico cuando se plantea en un contexto de geometría dinámica.	EGD-EXP	Arzarello et al. (2002) afirma que la exploración en EGD permite la dialéctica entre los aspectos perceptivos y teóricos de la geometría.	Función de la exploración.	1				
[La investigación realizada por Triana y Zambrano (2016)] nos permite acercarnos a una caracterización de tareas de geometría escolar [...], nos muestra una vía de relación entre de los procesos matemáticos de exploración y argumentación [...], nos sugiere una tipificación de argumentos emergidos en la actividad [...].	ARG-EXP-TAR	Triana y Zambrano (2016) proponen una caracterización de tareas de geometría escolar, mostrando una vía de relación entre la exploración y la argumentación, y una tipificación de argumentos.	Diseño de una tarea. (conocimiento referencial) Relación exploración con otros tipos de procesos matemáticos. (conocimiento referencial).	1				
[La investigación realizada por Triana y Zambrano (2016)] nos posibilita comprender que el diseño de una tarea no puede estar desligada del sistema teórico local construido con los estudiantes y los acuerdos socio-matemáticos de la clase.	TAR	Triana y Zambrano (2016) permite comprender que el diseño de una tarea no puede estar desligada del sistema teórico local construido con los estudiantes y los acuerdos socio-matemáticos de la clase.	Diseño de una tarea.	1				
La investigación desarrollada por Camargo et al., (2006), nos permite comprender la función de la exploración en la formulación de conjeturas y posibles argumentos [Así mismo, el documento de las autoras nos] aporta fundamentos teóricos en el conocimiento didáctico-matemático del profesor en torno al diseño de tareas y su gestión en EGD, en el marco de la actividad demostrativa.	EXP	Camargo et al., 2006 aporta elementos teóricos sobre el diseño de tareas y como estas pueden ser desarrolladas con la ayuda de EGD.	Importancia de la exploración. Diseño de tareas en EGD.	1				
El documento de Molina y Samper (2019) nos posibilita entender diversos tipos de argumentos y como estos pueden surgir a partir del diseño de una tarea con problemas abiertos de conjeturación.	ARG-EXP	Molina y Samper (2019) muestran los tipos de argumentos que surgen a partir del tipo de tareas propuesta y la actividad realizada por los estudiantes.	Relación argumentación – exploración.	1				

[El documento de Molina y Samper (2019)] nos ilustra el uso de EGD como artefacto que posibilita la exploración de situaciones y, en consecuencia, soluciones a los problemas propuestos.	EGD	Molina y Samper (2019) ilustran el uso de EGD como artefacto que posibilita la exploración de situaciones y, en consecuencia, soluciones a los problemas propuestos.	Función de los EGD.	1				
[El documento de Molina y Samper (2019)] nos permite evidenciar que según la exploración a la que se lleve a los estudiantes, emerge un tipo diferente de argumento.	ARG-EXP	Para Molina y Samper, (2019) la exploración realizada por un estudiante puede conllevar a diferentes tipos de argumentos.	Función de la exploración.	1				
La investigación desarrollada por Arzarello et al., (2002) nos permite comprender la función del arrastre en el proceso de exploración para la formulación de conjeturas y la demostración.	EXP	Arzarello et al. (2002) explica la función del arrastre en el proceso de exploración y su relación con la formulación y demostración de conjeturas.	Función de la exploración.	1				
[La investigación desarrollada por Arzarello et al., (2002)] nos lleva a identificar las dificultades y bondades presentes en un EGD al momento de proponer y gestionar una tarea dentro del aula de clase, tomando como referente el sistema teórico local construido y las normas socio-matemáticas establecidas.	EGD	Arzarello et al. (2002) exponen dificultades y bondades de los EGD cuando se proponer y gestiona una tarea dentro del aula de clase, teniendo en cuenta el sistema teórico local y las normas socio-matemáticas	Importancia de los EGD.	1				
[A partir de la revisión de literatura] se observa una preocupación latente en la comunidad de educadores matemáticos e investigadores en la relación permanente de los procesos de visualización, exploración, conjeturación y como estos desarrollados de una forma idónea pueden acercar a los estudiantes a la explicación y demostración de problemas resueltos.	EXP	La comunidad de educadores matemáticos e investigadores identifican, desde una preocupación inicial, al proceso de exploración como puente entre la actividad de los estudiantes y la demostración de situaciones.	La importancia de la exploración.	1				
[A partir de la revisión de literatura] se logra observar como la exploración a pesar de estar presente en muchas situaciones de investigación por medio de la función de arrastre, no se hace evidente el diseño de tareas que se enfoquen en dicho proceso.	EXP-TAR	En diversas investigaciones se nombra la exploración como proceso fundamental, pero no se evidencia investigaciones que tengan al proceso de exploración como articulador de procesos matemáticos.	Relación tarea – exploración.	1				
[La revisión de la literatura revela varios vacíos concernientes a] la preparación y el conocimiento que un profesor debería tener para introducir EGD al aula, puesto que la tecnología por si sola, no es suficiente para promover una innovación metodológica.	EGD	El conocimiento didáctico - matemático del profesor es importante al momento de incorporar los EGD al aula. Los EGD por sí mismos, no son suficientes para generar innovaciones en el aula.	Impacto del conocimiento del profesor en su práctica.	1				

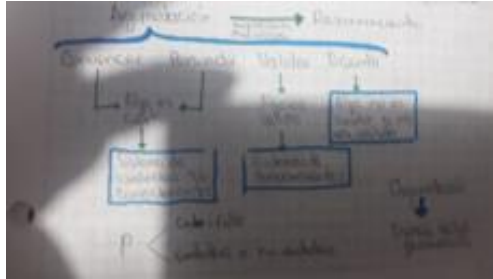
[Después de una revisión de literatura inicial] podemos resaltar que existe una preocupación por parte de la comunidad de educadores matemáticos en mejorar el conocimiento didáctico-matemático del profesor, sobre el diseño de tareas en EGD para impulsar la argumentación	-	La revisión de la literatura permite identificar una necesidad en relación con la línea investigativa propuesta por la MDM.	Identificación de una necesidad investigativa en relación con la línea investigativa propuesta por la MDM.	1				
Entendemos la exploración como la actividad experimental que permite a los estudiantes, por medio de un acercamiento empírico o teórico, interactuar con objetos geométricos en busca de invariantes que los lleven a la solución de una situación propuesta.	EXP	La exploración es la actividad experimental que permite a los estudiantes, por medio de un acercamiento empírico o teórico, interactuar con objetos geométricos en busca de invariantes que los lleven a la solución de una situación propuesta.	Definición de exploración.	1				
La exploración proporciona una oportunidad para que los estudiantes puedan construir representaciones de objetos matemáticos, transformar y medir figuras, manipular y mover construcciones en múltiples direcciones, visualizar y recibir realimentación inmediata sobre las acciones que ellos mismos realizan bajo la toma de decisiones que se fundamentan en diversos argumentos (Hanna et al., 2008).	EXP	Hanna et al. (2008) exponen al proceso de exploración como un espacio interactivo en el cual los estudiantes pueden construir objetos geométricos y por medio de diversas acciones, realimentación y toma de decisiones formar argumentos.	Función de la exploración.	1				
Diversos autores afirman que la exploración permite un acercamiento inicial de los estudiantes a la actividad matemática (Lakatos, 1976; Pólya 1981; Mariotti, 2000; De Villiers, 2004).	EXP	Lakatos (1976), Pólya (1981), Mariotti (2000) y De Villiers (2004) indican que la exploración permite un acercamiento a la actividad demostrativa.	Importancia de la exploración.	1				
Una tarea matemática escolar como un conjunto conformado por los requisitos, la formulación, las metas, los materiales y recursos, las formas de agrupamiento de estudiantes, las estrategias de interacción y la temporalidad, de forma estructurada con contenido matemático y un propósito de aprendizaje.	TAR	Una tarea matemática escolar está conformada elementos relacionados. Estos son los requisitos, la formulación, las metas, los materiales y recursos, las formas de agrupamiento de estudiantes, las estrategias de interacción y la temporalidad, de forma estructurada con contenido matemático y un propósito de aprendizaje.	Elementos de una tarea.	1				
Según Gómez, Mora y Velasco (2015) el diseño de una tarea de aprendizaje se realiza con la intención de brindar oportunidades para que los estudiantes logren los objetivos de aprendizaje y superen dificultades y errores que el profesor ha previsto en el diseño. La tarea debe motivar una actitud exploratoria e inquisitiva.	TAR	Gómez, Mora y Velasco (2015) plantean un diseño de tareas como un proceso intencionado que busca brindar oportunidades para que los estudiantes logren los objetivos de	Función de una tarea.	1				

		aprendizaje y superen dificultades y errores que el profesor ha previsto en el diseño. En el mismo sentido, una tarea debe generar en los estudiantes actitudes exploratorias e inquisitivas.						
Para nosotros, inicialmente, la argumentación es la faceta discursiva del razonamiento. El argumento nos permite hacer ostensivo el razonamiento.	ARG	La argumentación es la faceta discursiva del razonamiento. Un argumento permite hacer ostensivo el razonamiento.	Definición de argumentación. Definición de argumento.	1				
La función de un argumento es convencer a otra persona con razones o puntos de vista a favor o en contra de una afirmación plausible. Este proceso de convencimiento lleva establecer certidumbre o persuadir a otra persona.	ARG	La función de un argumento es convencer a otra persona con razones o puntos de vista a favor o en contra de una afirmación plausible. Este proceso de convencimiento lleva establecer certidumbre o persuadir a otra persona.	Función de un argumento.	1				
Un argumento se compone de tres elementos básicos: la aserción o punto de vista pronunciado por alguien, los datos que soportan la aserción y la garantía que presenta la incidencia de los datos en la aserción (Molina et al., 2019).	ARG	Según lo expuesto por Molina et al., (2019) un argumento se compone de tres elementos básicos: la aserción o punto de vista pronunciado por alguien, los datos que soportan la aserción y la garantía que presenta la incidencia de los datos en la aserción	Elementos de un argumento.	1				
Entendemos los EGD como herramientas indispensables que permiten a los estudiantes, mediante el arrastre, la medición y la visualización, encontrar invariantes a partir de construcciones, tanto iniciales como auxiliares. Esto los lleva a obtener una realimentación inmediata que el software les proporciona.	EGD	Los EGD son herramientas indispensables que permiten a los estudiantes, mediante el arrastre, la medición y la visualización, encontrar invariantes a partir de construcciones, tanto iniciales como auxiliares. Esto los lleva a obtener una realimentación inmediata que el software les proporciona.	Definición de EGD. Importancia de los EGD.	1				
Podemos vislumbrar como los EGD pueden enriquecer las prácticas en la geometría escolar y ayudar a conformar un sistema axiomático local, buscando promover los procesos de argumentación.	EGD	Los EGD pueden enriquecer las prácticas en la geometría escolar y ayudar a conformar un sistema axiomático local, buscando promover los procesos de argumentación.	Función de los EGD. Importancia de los EGD.	1				

Las nuevas generaciones son niños y jóvenes que en su mayoría han convivido con herramientas digitales [EGD] que podrían aplicarse de forma llamativa en el aula para lograr un mayor nivel de comprensión de temáticas y aplicación de experiencias educativas.	EGD	Los EGD se pueden aplicar en las aulas para lograr un mayor nivel de comprensión de temáticas y aplicación de experiencias educativas.	Importancia de los EGD.	0		Los EGD no son únicamente herramientas que faciliten y agilicen la visualización y construcción de objetos geométricos; estos espacios permiten que los estudiantes realicen una rica actividad matemática a partir de procesos como la exploración.		¿Cómo involucrar los EGD de forma eficiente en la actividad matemática de los estudiantes?
Con la presente propuesta lo que se busca es aportar a un contexto educativo específico una herramienta educativa que permita a los estudiantes mejorar de manera significativa su proceso de aprendizaje en el campo del álgebra inicial; todo esto, por medio de la experimentación y vivencia de las temáticas con ayuda de las tecnologías digitales.	EXP	El profesor busca aplicar en un contexto específico herramientas que apoye los procesos de aprendizaje en el campo del álgebra inicial. Lo anterior buscando espacios para la experimentación y aplicación de temáticas por medio de TD.	Relación exploración – EGD.	0		Se reconoce a las tecnologías digitales, específicamente a los EGD, como una herramienta que permite el abordaje de temáticas de un grado específico a partir del trabajo con construcciones geométricas.		
Se espera que la presente propuesta genere un material didáctico que estimule y motive a los estudiantes a tener un acercamiento más ameno a las temáticas iniciales, permitiéndoles visualizar conjeturas, problemáticas y experimentos; donde el error es una nueva oportunidad de aprender.	TAR	Las tareas permiten motivar a los estudiantes a tener un acercamiento a las temáticas, permitiéndoles visualizar conjeturas, problemáticas y experimentos; donde el error es una nueva oportunidad de aprender.	Diseño de una tarea.	0	El diseño de tareas era únicamente la selección de ejercicios para aplicarlos en momentos de extra-clase. Con esto buscábamos corregir errores en lo algorítmico.	Actualmente, logramos vislumbrar el potencial de las tareas cuando son diseñadas de forma consciente. Estas permiten llevar a los estudiantes a abordar temáticas de forma innovadora y tener una actividad matemática genuina.	La acción se encuentra descrita en: LDDC-01, TCDDC-01, TCDDC-02, TCDDC-03, TCDDC-05, TEDDC-05, TEDDC-01, TEDDC-02, TEDDC-05, TEDDC-06, TCPME-01, TCPME-02, TCPME-03, TCPME-04, TEPME-02, TEPME-03, TEPME-04.	¿De qué manera puedo obtener el máximo potencial al momento de diseñar y proponer una tarea a los estudiantes?

<p>La propuesta [inicial] estará orientada en una intervención en el aula a través de una secuencia didáctica basada en una serie de actividades mediada por la resolución de problemas y un asistente de demostración (GeoGebra, Cabri o CarMetal) que permitirá favorecer una mejor comprensión de la proporcionalidad usando diversos contextos de las Ciencias Naturales (CN).</p>	EGD-TAR	<p>Las tareas mediadas por EGD permitirían favorecer una mejor comprensión de un objeto matemático usando diversos contextos</p> <p>Programas como GeoGebra, Cabri o CarMetal se denominan asistentes de demostración.</p>	Relación tarea – EGD.	0	<p>La relación entre las tareas y los EGD, la identificábamos únicamente como una facilitadora en la representación de objetos matemáticos y exactitud en dichas representaciones.</p>	<p>Las tareas mediadas por EGD permiten que los estudiantes por medio de exploración y descubrimientos de invariantes aborden situaciones de aprendizaje para la construcción o consolidación de conceptos.</p>	<p>La acción se encuentra descrita en:</p> <p>LDDC-02, LDDC-04, LDDC-05, TCDDC-02, TCDDC-03, TEDDC-01, TEDDC-05, TEDDC-06, LII-11, LII-13, LII-14, LII-18, TCPME-01, TCPME-04, TEPME-02, TEPME-03, TEPME-04.</p>	<p>¿Dé que manera puedo obtener el máximo potencial al momento de diseñar y proponer una tarea a los estudiantes?</p>
<p>Se buscará incluir herramientas tecnológicas [EGD] que ofrezcan la oportunidad de crear ambientes de aprendizaje enriquecidos, para que los estudiantes perciban las matemáticas de una manera más vivencial y acorde con lo que están viviendo los jóvenes de su generación, aunque la presencia de las TIC en las aulas ha mostrado ser insuficiente para la transformación de las prácticas pedagógicas de los docentes.</p>	EGD	<p>Los EGD ofrecen la oportunidad de crear ambientes de aprendizaje enriquecidos, para que los estudiantes experimenten una actividad matemática similar a la de un matemático.</p>	Importancia de los EGD.	0		<p>Los EGD ofrecen la oportunidad de crear ambientes de aprendizaje enriquecidos, para que los estudiantes experimenten una actividad matemática similar a la de un matemático.</p>		<p>¿Cómo involucrar los EGD de forma eficiente en la actividad matemática de los estudiantes?</p>
<p>El hecho de disponer de una computadora o un tablero electrónico puede contribuir a ello, pero no es suficiente para transformar el quehacer del maestro; la clave está en la forma en que utilicen los docentes estas tecnologías [EGD] para contribuir al logro de los aprendizajes esperados (Benítez, 2013).</p>	EGD	<p>Disponer de tecnologías digitales como los EGD no es suficiente para transformar el quehacer del maestro, a clave está en la forma en que utilicen los docentes.</p>	Impacto del conocimiento del profesor en su práctica.	1				
<p>Así mismo las TIC ofrecen capacidad de interacción entre los estudiantes, pueden decidir el tipo de información por seguir, establecer el ritmo, cantidad y profundización que deseen y en el caso del manejo del software como GeoGebra, son instrumentos informáticos que les facilita establecer propiedades, interpretaciones, relaciones, que apuntan a favorecer las diversas interpretaciones de la proporcionalidad.</p>	EGD	<p>Cuando un estudiante interactúa con las TIC durante la solución de un problema, éstas realimentan al estudiante, generando en él cierta autonomía.</p> <p>Los EGD son instrumentos informáticos que permiten establecer propiedades, interpretaciones y relaciones respecto a un objeto matemático.</p>	Definición de EGD. Función de los EGD.	0		<p>Los EGD son entornos gráficos que permiten establecer propiedades, interpretaciones y relaciones respecto a un objeto matemático, a partir de la identificación de invariantes. Lo anterior, permite al estudiante generar un grado de autonomía y confianza en el abordaje</p>		

						de situaciones con este tipo de herramientas.		
Considero que no se han utilizado las TIC en una forma óptima, las tareas de incorporación de las nuevas tecnologías [EGD] constituyen en algunos casos, la observación de un video no precisamente acorde a las necesidades, el proceso de enseñanza-aprendizaje de matemática sigue realizándose bajo la metodología tradicional, el profesor como expositor, con tablero, borrador y marcadores entre las cuatro paredes del aula de clase.	EGD	El uso de EGD como un apoyo visual de lo expone un profesor genera un uso poco eficiente de los EGD en el aula.	Impacto del conocimiento del profesor en su práctica.	0		Un profesor debe tener planeación, preparación y el conocimiento que un profesor debería tener para introducir EGD al aula, puesto que la tecnología por si sola, no es suficiente para promover una innovación metodológica.		¿Cómo involucrar los EGD de forma eficiente en la actividad matemática de los estudiantes?
Un argumento tiene como función convencer, por medio de establecer certidumbre y persuadir a otra persona con ideas.	ARG	Un argumento tiene como función convencer, por medio de establecer certidumbre y persuadir a otra persona con ideas.	Definición de argumento.	1				
Argumentar es un proceso que produce un discurso oral o escrito que surge de un razonamiento.	ARG	Argumentar es un proceso que produce un discurso oral o escrito que surge de un razonamiento.	Definición de argumento.	1				
Modelo de Toulmin (2003) permite la representación de argumentos deductivos, inductivos y abductivos (formales e informales), a partir de sus componentes: datos, garantía y aserción.	ARG	Modelo de Toulmin (2003) permite la representación de argumentos deductivos, inductivos y abductivos (formales e informales), a partir de sus componentes: datos, garantía y aserción.	Representación de un argumento.	1				
La demostración es un tipo de argumento para validar. El argumento es una expresión discursiva que quiere validar una aserción. La conjetura hace parte del argumento.	ARG	La demostración es un tipo de argumento para validar. El argumento es una expresión discursiva que quiere validar una aserción. La conjetura hace parte del argumento.	Relación argumento – demostración.	1				
Tecnología digital vista como un dispositivo diseñado para manipular información representada en forma digital, específicamente en programas de geometría dinámica.	EGD	Los EGD permiten manipular información representada en forma digital.	Definición de EGD.	1				
Argumentación se entiende como una expresión discursiva del razonamiento.	ARG	Argumentación se entiende como una expresión discursiva del razonamiento.	Definición de argumentación.	1				

<p>La argumentación tiene como objetivo remover dudas mediante el autoconvencimiento y la persuasión, para llegar finalmente a validar o disentir sobre un tema en particular.</p>	<p>ARG</p>	<p>La argumentación tiene como objetivo remover dudas mediante el autoconvencimiento y la persuasión, para llegar finalmente a validar o disentir sobre un tema en particular.</p>	<p>Función de la argumentación.</p>	<p>1</p>			
	<p>ARG</p>	<p>Argumentación se entienda como una expresión discursiva del razonamiento.</p> <p>La argumentación busca convencer, persuadir, validar o disentir sobre algo que es cierto o plausible apoyado en un sistema de creencias o conocimientos.</p> <p>La argumentación enuncia hechos geométricos.</p>	<p>Definición de argumentación.</p>	<p>1</p>			
<p>Análisis de instrucción</p> <ul style="list-style-type: none"> -Requisitos -Meta -Formulación -Materiales y recursos -Agrupamiento -Interacción -Temporalidad 	<p>TAR</p>	<p>Una tarea matemática escolar está conformada por los requisitos, la formulación, las metas, los materiales y recursos, las formas de agrupamiento de estudiantes, las estrategias de interacción y la temporalidad.</p>	<p>Elementos de una tarea.</p>	<p>1</p>			
<p>[Al profesor se le propuso diseñar una tarea para un grupo de estudiantes. Al preguntarle ¿cómo elijo el tema? reportó la siguiente información:]</p> <ul style="list-style-type: none"> -Preconcepto -Curso -Características de la institución -Características de la población (acceso a la Tecnología, Nivel matemático, Necesidades especiales) -Documento curriculares (Plan de estudios, Lineamientos, Estándares, DBA, Documentos normativos, PEI) -Expectativas del profesor 	<p>TAR</p>	<p>Al diseñar una tarea se debe elegir un tema. Para ello se tiene en cuenta: los preconceptos de los estudiantes, el grado al cual pertenecen, las características de la institución y la población, los documentos curriculares y las expectativas del profesor.</p>	<p>Diseño de una tarea.</p>	<p>0</p>	<p>Comprendíamos las tareas como aquella actividad extra-clase que se le asignaba a un estudiante y constaba de unas partes, tales como: tema, curso, asignatura. Normalmente se aplicaba para la repetición de algoritmos enseñados en clase.</p>	<p>Una tarea está conformada por los siguientes elementos: Requisitos, metas, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad.</p>	<p>La acción se encuentra descrita en:</p> <p>LDDC-01, TCDDC-01, TCDDC-02, TCDDC-05, TEDDC-05, TEDDC-01, TEDDC-02, TEDDC-05, TEDDC-06, LII-06, TCPME-02, TEPME-02, TEPME-03, TEPME-04.</p>

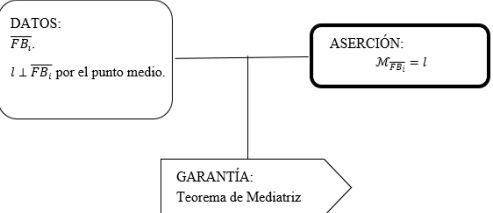
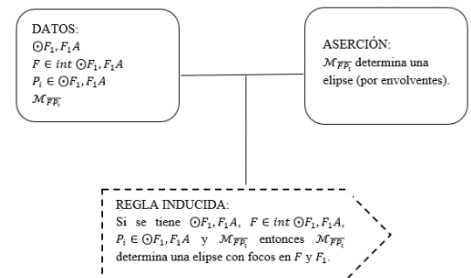
Que el estudiante sea el gestor de su propio aprendizaje, de tal forma que pueda inferir conceptos sin que el profesor influencie y vicie el aprendizaje.	TAR	Las tareas deben buscar que el estudiante sea el gestor de su propio aprendizaje, de tal forma que pueda inferir conceptos sin que el profesor influencie y vicie el aprendizaje.	Gestión del profesor frente a una tarea.	0	La gestión de nosotros frente a una tarea era un conocimiento empírico. Comprendíamos que debemos guiar el proceso de aprendizaje de los estudiantes y permitirles acercarse a la solución antes de mostrar la respuesta a la situación planteada.	Se asume en una tarea se debe tener en cuenta la interacción con el estudiante y en ella es importante en no caer en el efecto topaze, por lo cual en la planeación y diseño se debe procurar tener en cuenta las posibles preguntas y dificultades que se van a presentar	La acción se encuentra descrita en: TEDDC-06, TEPME-04. La observación de las diversas clases de la maestría y analizar la gestión de cada uno de los profesores.	¿Cuál sería una buena gestión del profesor para mediar una tarea?
Análisis curricular-Nivel micro (aula de clase)-componentes básicos (Contenido, propósito, organización). COMPONENTES AMPLIADOS Contenido ---- ¿Qué voy a enseñar? Actividades --- ¿Qué va a hacer el estudiante? Rol del profesor --- ¿Qué mediación hará el profesor? Materiales --- ¿Con qué? Agrupamiento ---- ¿Con quién? Localización --- ¿En dónde? Tiempo --- ¿En qué momento? Evaluación --- ¿cómo se mide?	TAR	El diseño de tareas en una acción del profesor que corresponde al nivel micro del currículo. Los profesores reconocen los diversos niveles de análisis curricular de una tarea, así como los componentes de esta.	Elementos de una tarea. Diseño de una tarea.	1				
Se entiende tarea como actividades desarrolladas por el estudiante que el profesor propone para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y afectivas establecidas.	TAR	La tarea se entiende como el conjunto actividades desarrolladas por el estudiante que el profesor propone para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y afectivas establecidas.	Definición de tarea.	1				
Una tarea matemática escolar es una demanda estructurada con contenido matemático y un propósito de aprendizaje.	TAR	Una tarea matemática escolar es una demanda estructurada con contenido matemático y un propósito de aprendizaje.	Definición de tarea.	1				
La tarea es un elemento central del proceso de enseñanza y aprendizaje.	TAR	La tarea es un elemento central del proceso de enseñanza y aprendizaje.	Función de una tarea.	1				
Una secuencia de tareas es una ordenación de tareas que llevan a tareas transversales.	TAR	Una secuencia de tareas es una ordenación de tareas que llevan a tareas transversales.	Definición de una secuencia de tareas.	1				

Una secuencia de tareas tiene como objetivo el logro de expectativas cognitivas y afectivas, así como superar limitaciones (dificultades y errores).	TAR	Una secuencia de tareas tiene como objetivo el logro de expectativas cognitivas y afectivas, así como superar limitaciones (dificultades y errores).	Función de una secuencia de tareas.	1				
Una tarea está conformada por los siguientes elementos: Requisitos, metas, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad.	TAR	Una tarea está conformada por los siguientes elementos: Requisitos, metas, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad.	Elementos de una tarea.	1				
La tarea debe motivar una actitud exploratoria e inquisitiva.	TAR	La tarea debe motivar una actitud exploratoria e inquisitiva.	Función de una tarea.	1				
La geometría dinámica exterioriza la dualidad invariante / variable de manera tangible por medio del movimiento en el espacio.	EGD	Los EGD permiten exteriorizar la dualidad invariante / variable de manera tangible por medio del movimiento en el espacio.	Importancia de los EGD.	1				
Los argumentos emergen según el tipo de problema que se aborde y la actividad que se realice.	ARG	Los argumentos emergen según el tipo de problema que se aborde y la actividad que se realice.	Relación argumentación – tipo de problemas.	1				
Para Pozuelo (2014), Marqués (2013) y Moreira (2008) el hecho de poseer las tecnologías, por sí solas, no generan cambios ni mejoras educativas, incorporar las tecnologías digitales [EGD] en las aulas no consiste simplemente en dotar a las instituciones de este tipo de recursos, no se trata de dar una clase magistral con una pizarra digital.	EGD	Pozuelo (2014), Marqués (2013) y Moreira (2008) exponen que incorporar EGD en las aulas no genera cambios ni mejoras educativas por si solas, la mejora no se relaciona con dotar a las instituciones con tecnologías digitales para dar clases magistrales	Impacto del conocimiento del profesor en su práctica.	1				
El sistema educativo ha impulsado la incorporación de tecnologías digitales por medio de políticas y prácticas educativas. Sin embargo, se logra observar (por medio de referencias consultadas: compañeros docentes y conocimiento empírico) que el hecho de disponer de una computadora o un tablero electrónico no es suficiente para transformar el quehacer del maestro; la clave está en la forma en que utilicen los docentes estas tecnologías para contribuir al logro de los aprendizajes esperados (Benítez, 2013).	EGD	Benítez (2013) plantea que disponer de los EGD no es suficiente para generar una transformación en la práctica educativa. La clave está en la forma en la cual los profesores utilicen estas tecnologías en los procesos de enseñanza.	Impacto del conocimiento del profesor en su práctica.	1				
[El uso poco eficiente de los EGD] nos lleva a plantearnos que la producción de argumentos en nuestras instituciones educativas es pobre, no por la falta de compromiso de los estudiantes, sino por el contrario, la aplicación de tareas que no conllevan y no motivan al estudiante a formar conceptos geométricos desde la exploración y descubrimiento de propiedades intrínsecas.	ARG- EXP- TAR	Las tareas que se han implementado hasta el momento no promueven espacio para la exploración, descubrimiento de propiedades y producción de argumentos en los estudiantes.	Importancia de una tarea. Relación tarea – exploración – argumentación.	0	Las tareas que aplicábamos eran ejercicios y problemas que sacábamos de libros de texto o fuentes en internet. No teníamos en	Para poder cambiar las formas de como nuestros estudiantes asumen la argumentación tenemos que cambiar el tipo de tareas propuestos de tal manera que los lleven a formar conceptos geométricos desde la	La acción se encuentra descrita en: LDDC-01, TCDDC-01, TCDDC-02, TCDDC-03, TCDDC-05,	¿Cómo asumir el diseño de tareas desde una postura más reflexiva, para que los estudiantes y la institución educativa

					cuenta los procesos de exploración y argumentación.	exploración y descubrimiento como un experto lo haría.	TEDDC-05, TEDDC-01, TEDDC-02, TEDDC-05, TEDDC-06, TCPME-01, TCPME-01, TCPME-02, TCPME-03, TCPME-04, TEPME-02, TEPME-03, TEPME-04.	donde laboramos se vea beneficiada?
Tomando como referente a Bacclagini (2011): la construcción y exploración de situaciones matemáticas generan argumentos que sustentan una conjetura de la solución, que, a futuro, puede permitir al estudiante la formulación de nuevos argumentos para su demostración o refutación.	EXP	Bacclagini (2011) afirma que la exploración de situaciones matemáticas favorece la producción de argumentos. Dichos argumentos sustentan conjeturas que pueden llegar a favorecer la formulación de nuevos argumentos que formen parte de una demostración o refutación.	Importancia de la exploración. Relación argumentación – exploración.	1				
Las tareas que se aplican en los contextos educativos observados, se limitan solamente a la repetición de instrucciones de forma cíclica, donde siempre se obtienen los mismos resultados, centrados en las temáticas y no en las competencias matemáticas, dado que como los docentes consultados dicen “los buenos resultados demuestran que la repetición funciona”, donde el profesor es el que tiene la verdad absoluta y el conocimiento, y el estudiante está allí solamente para recibir información, que la gran mayoría de las veces esta es irrelevante en su contexto o quehacer diario.	TAR	Las tareas que se han implementado son limitadas en su diseño y no favorecen la enseñanza por competencias.	Importancia de una tarea. Impacto del conocimiento del profesor en su práctica.	0	Las tareas que aplicábamos eran ejercicios y problemas que sacábamos de libros de texto o fuentes en internet. Con estos, buscábamos fortalecer los algoritmos aprendidos en clase sin generar conciencia de aquello de lo que se aprendía.	La tarea no es solo la repetición de un algoritmo, estas deben brindar a los estudiantes la oportunidad de asumir una actitud exploratoria e investigativa, además debe motivar a los estudiantes acerque a la actividad matemática de un experto.	La acción se encuentra descrita en: LDDC-01, TCDDC-01, TCDDC-02, TCDDC-03, TCDDC-05, TEDDC-05, TEDDC-01, TEDDC-02, TEDDC-05, TEDDC-06, LII-15, TCPME-01, TCPME-01, TCPME-02, TCPME-03, TCPME-04, TEPME-02, TEPME-03, TEPME-04.	

Las limitantes incluidas en las tareas desarrolladas, se pueden abordar desde la producción de argumentos mediado por entornos de geometría dinámica (EDG).	ARG-TAR	El diseño de tareas se puede fortalecer incluyendo problemas que permitan la producción de argumentos.	Relación tarea – argumentación.	1				
[Mejorar el trabajo con tareas] se enmarca en lo postulado por Molina y Samper (2019) donde los EGD favorecen y potencializan la producción de argumentos en los estudiantes, utilizando los tipos de arrastre como estrategia de exploración y conjeturación.	ARG-EGD	Para Molina y Samper (2019) los EGD favorecen y potencializan la producción de argumentos utilizando los tipos de arrastre como estrategia de exploración y conjeturación.	Relación argumentación – exploración.	1				
La tarea o tarea matemática escolar, vista como una estrategia dentro del aula de clase que propone el profesor con la intención de brindar las oportunidades a los estudiantes para lograr objetivos, metas, expectativas planteadas; y a su vez superar limitaciones en su proceso de aprendizaje (Gómez, 2015).	TAR	Gómez (2015) define a la tarea o tarea matemática escolar como una estrategia dentro del aula de clase que propone el profesor con la intención de brindar las oportunidades a los estudiantes para lograr objetivos, metas, expectativas planteadas; y a su vez superar limitaciones en su proceso de aprendizaje	Definición de tarea.	1				
[Una tarea] demanda un proceso estructurado con contenidos matemáticos y un propósito de aprendizaje.	TAR	Una tarea demanda un proceso estructurado con contenidos matemáticos y un propósito de aprendizaje.	Función de una tarea.	1				
[Según lo que se entiende por tarea, no lleva a] pensar que en algunas instituciones educativas (tomando como referente mi lugar de trabajo) se entiende como tarea a todas aquellas actividades extra-clase, que en pocas palabras, buscan que los estudiantes únicamente repitan una temática trabajada en clase.	TAR	Una tarea es toda actividad extra-clase que propone el profesor y que busca que los estudiantes repitan algoritmos realizados en clase.	Definición de tarea.	0	Una tarea es toda actividad extra-clase que propone el profesor y que busca que los estudiantes repitan algoritmos realizados en clase.	El diseñar tarea se debe tener claro la intención y las metas propuestas, además que los estudiantes logren los objetivos de aprendizaje y superen dificultades y errores que se ha previsto. La tarea debe motivar una actitud exploratoria e investigativa, que motiven a los estudiantes a encontrar relaciones, conceptos, propiedades, es decir que se acerque a la actividad matemática de un experto.	La acción se encuentra descrita en: LDDC-01, LDDC-04, TCDDC-01, TCDDC-02, TCDDC-03, TCDDC-05, TEDDC-05, TEDDC-01, TEDDC-02, TEDDC-05, TEDDC-06, LII-06, LII-09, TCPME-01, TCPME-01, TCPME-02, TCPME-03,	¿Qué componentes debe tener una tarea para que esta se lleve con éxito a la actividad genuina del estudiante?

							TCPME-04, TEPME-02, TEPME-03, TEPME-04.	
Todo argumento es producto de una razón, pero no todo razonamiento produce un argumento, ya que en nuestras clases no todo lo que se hace por medio discursivo son argumentos.	ARG	Todo argumento es producto de una razón, pero no todo razonamiento produce un argumento. No toda expresión discursiva es un argumento.	Definición de argumento.	1				
La necesidad que se ha detectado es cambiar la forma en que el docente propone sus tareas, y que estas motiven a los estudiantes a explorar y encontrar relaciones, conceptos, entre otros; que por lo general, el docente los dictaba en clase.	TAR	Las tareas deben motivar a los estudiantes a explorar y encontrar relaciones y conceptos.	Importancia de una tarea.	1				
Algunos estudios han propuesto incluir la exploración mediante el uso de entornos informáticos dinámicos, considerándola como componente valioso en el aprendizaje o la construcción de demostraciones (De Villiers 2004; González y Herbst 2009; Larios-Osorio y Acuña-Soto 2009; Mariotti 2000; Yerushalmy y Chazan 1990). [...]. Dicha afirmación nos relaciona de forma directa al descubrimiento como elemento importante en la exploración, donde la motivación de los estudiantes se mueve de un conjunto de notas, hacia el reto de tener la posibilidad de resolver problemas por cuenta propia.	EXP	De Villiers (2004), González y Herbst (2009), Larios-Osorio y Acuña-Soto (2009), Mariotti (2000) y Yerushalmy y Chazan (1990) consideran que la exploración mediante el uso de EGD es un componente valioso en el aprendizaje o la construcción de demostraciones. Lo anterior, permite identificar al descubrimiento como elemento importante en la exploración, donde la motivación de los estudiantes se mueve de la valoración cuantitativa de su trabajo, hacia el reto de tener la posibilidad de resolver problemas por cuenta propia.	Importancia de la exploración.	1				

<p>[Exploración realizada en la situación 1]: en esta construcción fue necesario realizar una exploración mediante el arrastre limitado para verificar que las mediatrices siempre se intersecaban en E (argumento deductivo).</p> <p>[Exploración realizada en la situación 1]: Este tipo de construcción es blanda, para así mediante arrastre libre de los vértices del cuadrilátero, buscar las condiciones para que las mediatrices se intersecaran en un punto (argumento abductivo).</p> <p>[Exploración realizada en la situación 1]: en esta construcción se midieron los ángulos de cada uno de los triángulos formados por las diagonales y los lados del cuadrilátero, mediante el arrastre limitado se logra evidenciar que $\triangle ABE \sim \triangle DCE$ (argumento abductivo).</p>	<p>EGD-EXP</p>	<p>Los profesores apropian el uso de los tipos de arrastre en sus exploraciones en EGD para la verificación de propiedades invariantes de objetos geométricos.</p>	<p>Relación exploración – EGD.</p>	<p>1</p>			
<p><u>Argumento emergido:</u></p> <p>Deductivo (Argumento Formal)</p>  <p><u>Argumento emergido:</u></p> <p>Inductivo (Argumento Informal)</p> 	<p>ARG</p>	<p>El modelo de Toulmin es útil para generar una representación de argumentos a partir de sus elementos.</p>	<p>Representación de un argumento.</p>	<p>1</p>			

	<p>EXP</p>	<p>Los profesores reconocen en la herramienta rastro, un elemento de la exploración para identificar invariantes o propiedades en objetos geométricos.</p>	<p>Relación exploración – EGD.</p>	<p>1</p>			
<p>Exploración: medio de interacción para la realimentación entre pensamiento y acción.</p>	<p>EXP</p>	<p>Exploración es medio de interacción para la realimentación entre pensamiento y acción.</p>	<p>Características de la exploración.</p>	<p>1</p>			
<p>Los EGD son una herramienta que potencializa la exploración, tanto teórica como empírica.</p>	<p>EGD</p>	<p>Los EGD son una herramienta que potencializa la exploración, tanto teórica como empírica.</p>	<p>Función de los EGD.</p>	<p>1</p>			
<p>Los EGD se pueden entender como un medio para hacer ostensivo el razonamiento. En otras palabras, la relación entre los EGD y el proceso de exploración permiten decantar el razonamiento.</p>	<p>EGD</p>	<p>Los EGD se pueden entender como un medio para hacer ostensivo el razonamiento. En otras palabras, la relación entre los EGD y el proceso de exploración permiten decantar el razonamiento.</p>	<p>Función de los EGD.</p>	<p>1</p>			
<p>Argumento como faceta ostensiva del razonamiento, en tanto permite generar un discurso.</p>	<p>ARG</p>	<p>Argumento como faceta ostensiva del razonamiento, en tanto permite generar un discurso.</p>	<p>Definición de argumento.</p>	<p>1</p>			
<p>La exploración se puede ver como faceta ostensiva del razonamiento, en tanto permite ver como se está razonando.</p>	<p>EXP</p>	<p>La exploración se puede ver como faceta ostensiva del razonamiento, en tanto permite ver como se está razonando.</p>	<p>Definición de exploración.</p>	<p>1</p>			

Possible pregunta de estudio: ¿La exploración como producto del razonamiento?	EXP	Los profesores con ayuda del profesor Oscar Molina vislumbran una posible pregunta de estudio: ¿La exploración como producto del razonamiento?	Indagación sobre el proceso de exploración.	1				
Hemos identificado que nuestros colegas y nosotros mismos tenemos conocimientos precarios sobre [...] qué es un argumento.	ARG	Los conocimientos sobre lo que es un argumento son precarios.	Definición de argumento.	0		De igual manera, comprendemos el significado e importancia del proceso de argumentación y exploración; y su relación.		
Hemos identificado que nuestros colegas y nosotros mismos tenemos conocimientos precarios sobre [...] cómo y para qué se usan los EGD si se quiere enseñar a argumentar.	EGD	Los conocimientos sobre cómo y para que se usan los EGD en la enseñanza de la argumentación son precarios.	Función de los EGD.	0		Finalmente, reconocemos la potencia que pueden llegar a tener los EGD en la resolución de tareas.		
[...] no asumir seriamente el diseño de tareas escolar [...] se debe, entre otras razones, al poco conocimiento didáctico – matemático sobre estos asuntos.	TAR	El poco conocimiento didáctico – matemático sobre tareas ocasiona no asumir seriamente el diseño de tareas.	Impacto del conocimiento del profesor en su práctica.	0				
[...] el efímero acercamiento a los procesos de exploración y argumentación se debe, entre otras razones, al poco conocimiento didáctico – matemático sobre estos asuntos.	EXP	El poco conocimiento didáctico – matemático sobre el proceso de exploración y argumentación ocasiona que los profesores no tengan un acercamiento a estos procesos.	Impacto del conocimiento del profesor en su práctica.	0				
TAREA 1: GUEVARA - MARTÍNEZ 1. Construya un triángulo que dos de sus ángulos internos tengan la siguiente medida _____ y _____. ¿Cuál debería ser la medida del ángulo faltante? ¿Por qué? Comprobar la respuesta a través de la herramienta. Por medio de la herramienta de arrastre mueva los vértices, ¿Qué se puede evidenciar a partir de esto? 2. Con la herramienta de medir segmento mida cada uno de los lados del triángulo construido. ¿Qué relación hay entre los ángulos y los lados? Construya una tabla en donde evidencie cada uno de los valores de los lados en cuatro arrastres del triángulo. ¿Qué se puede evidenciar a partir de la comparación de los datos de la tabla construida?	TAR	Los profesores realizaron un primer diseño de tarea. Se logra observar los conocimientos iniciales sobre el diseño de tareas y los criterios que toman en cuenta para el diseño de esta.	Diseño de una tarea.	1				

10.2 Anexo 2: Textos Narrativos Ciclo 2

Narración: Estado 0 del conocimiento didáctico – matemático, acerca de tareas, Entornos de Geometría Dinámica, argumentación y exploración

En este documento describimos el conocimiento sobre tareas, Entornos de Geometría Dinámica (EGD), argumentación y exploración de dos profesores, al momento de ingresar al programa formativo de la Maestría en Docencia de la Matemática (MDM). De ahora en adelante, nos referiremos a este momento como Estado 0 y a los sujetos de estudio como los profesores; cuando sea necesario describir un conocimiento específico de alguno de ellos, haremos referencia al profesor C y al profesor O. La descripción del Estado 0 se realiza a partir de insumos previamente organizados, reducidos y depurados.

Respecto a tareas especificamos a continuación los conocimientos de los profesores sobre definición de tarea, diseño de una tarea, gestión de una tarea, importancia de una tarea, relación tarea – EGD y relación tarea - exploración – argumentación. Para empezar, los profesores definen tarea como toda actividad extra-clase que propone un docente buscando reforzar las temáticas vistas en clase y la apropiación de algoritmos realizados en el aula. Este es un conocimiento práctico, es decir, el mismo se ha constituido a partir de lo que ellos habitualmente hacen en sus prácticas.

2 RECUERDA → Identifica si en cada caso el triángulo es rectángulo argumentando tu respuesta.



4 APLICA → Resuelve la siguiente situación.

Desde un faro de 14 metros de altura, se divisa la llegada de un barco. Si el alcance visual desde el faro es de 3.000 m, ¿a qué distancia de la orilla se encuentra el barco?



3 CREA → Construye un triángulo ABC rectángulo de tal manera que $\sphericalangle A$ sea recto y $m\sphericalangle B = 20^\circ$.

Figura 1: Tareas propuesta antes de iniciar la MDM. Tomado de: Joya et al, (2018). *Activamente Matemáticas 8 Volumen 1 Edición Docente*. Bogotá, Colombia. Santillana Sistemas Educativos (p.41-42).

En lo correspondiente al diseño de una tarea, los profesores consideran que al diseñar una tarea se deben tener en cuenta aspectos tales como la selección del tema, los preconceptos de los estudiantes y el grado al cual pertenecen, las características de la institución y la población, los documentos curriculares y las expectativas del profesor. El diseño de las tareas que ellos proponen se limita a la selección de ejercicios y problemas de los libros de texto y de internet, para conformar un conjunto de ejercicios que estén en consonancia con los aspectos nombrados anteriormente. Algunos de los problemas que los profesores proponen como tareas son los siguientes:

En lo que respecta a la gestión de una tarea, los profesores únicamente afirman que las tareas deben buscar que el estudiante sea el gestor de su propio aprendizaje. El papel del profesor es de mediador entre el estudiante y el conocimiento matemático. Para ello, las tareas que propone el profesor deberían permitir a los estudiantes inferir conceptos y definiciones, sin que el docente influya y vicie las posibles respuestas de los estudiantes.

En este momento, los profesores ya reconocen la importancia de las tareas e identifican limitaciones en las tareas que proponen, porque no favorecen la enseñanza por competencias. De igual manera, no se promueven espacios para la exploración, descubrimiento de propiedades invariantes y producción de argumentos en los estudiantes.

El profesor C hace alusión a una relación entre tareas y EGD. Para él, las tareas que involucran este tipo de programas permiten favorecer una mejor comprensión de los objetos matemáticos, usando diversos contextos.

En lo que reportan los profesores, evidenciamos que ellos ya identifican una necesidad en cambiar el tipo de tareas que proponen y que reconocen que su conocimiento respecto a la definición, la función, la importancia, los elementos, el diseño y la gestión de una tarea es limitado. De igual manera, observamos una preocupación por el impacto que tiene su conocimiento sobre tareas en su práctica.

En segundo lugar, en lo que corresponde al asunto de EGD, abordamos el Estado 0 a partir de las siguientes categorías identificadas: definición, función e importancia de los EGD. Respecto a la definición, los profesores reconocen

a los EGD como instrumentos informáticos que permiten a los estudiantes establecer propiedades, interpretaciones y relaciones respecto a un objeto matemático. En lo que corresponde a las funciones de un EGD, el profesor C afirma que estos posibilitan que los estudiantes obtengan una realimentación durante la solución de un problema, lo cual genera autonomía en ellos.

En lo que concierne a la importancia de los EGD en las prácticas educativas, evidenciamos dos percepciones iniciales al respecto. El profesor C declara que los EGD ofrecen la oportunidad de crear ambientes de aprendizaje enriquecidos, para que los estudiantes experimenten una actividad matemática similar a la de un matemático. Por otro lado, el profesor O asume que los EGD se pueden implementar en las aulas para lograr un mayor nivel de comprensión de las temáticas por parte de los estudiantes y generar experiencias educativas innovadoras. Posteriormente, observamos que para los profesores la importancia de las herramientas tecnológicas radica en el hecho de que estas permiten hacer más eficiente el manejo del tiempo y permite al profesor hacer representaciones más precisas de objetos matemáticos. Las representaciones que se generan en los EGD sirven de apoyo visual para facilitar la comunicación por parte de los miembros de la clase. Consideran que usar los EGD de esta manera es un uso poco eficiente de las tecnologías digitales. Esta afirmación nace de las experiencias profesionales del profesor O, en la cuales, por medio de capacitaciones institucionales enfocadas en la introducción de tecnologías al aula, ha logrado vislumbrar falencias en la apropiación de dichas tecnologías en los procesos de enseñanza.

El tercer asunto sobre el conocimiento de los profesores en el cual nos enfocamos es la argumentación. Específicamente, hacemos referencia a la definición y a la relación entre argumentación, diseño de tareas y EGD.

En lo que respecta a argumentación, los profesores identifican a este proceso como sinónimo de justificación, explicación y establecimiento del valor de verdad de una proposición. La figura 2 ilustra algunas de las tareas que ellos proponen para la enseñanza de la argumentación y que respalda esta afirmación. En este tipo de ejercicios, los docentes asumen que si el estudiante evalúa afirmaciones y expresa el porqué de su percepción con un ejemplo o un contraejemplo está realizando procesos de argumentación. Los docentes tienen conocimiento de la argumentación como un proceso matemático que contribuye al desarrollo de competencias, debido al acercamiento a documentos curriculares, tales como los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN).

<p>EVALÚA → Verifica los siguientes enunciados y determina con una X si son verdaderos o falsos. Argumenta tu respuesta.</p> <p>a. En un triángulo obtuso el baricentro se encuentra fuera del triángulo. <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F</p> <p>b. En un triángulo agudo, el baricentro se encuentra en el interior del triángulo. <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F</p>	<p>8</p>	<p>EVALÚA → Juzga cada afirmación e indica si es verdadera o falsa. Si es verdadera, propón una explicación y si es falsa, propón un contraejemplo.</p> <p>a. <input type="checkbox"/> El cono se genera al hacer girar un triángulo rectángulo alrededor de su hipotenusa.</p> <p>d. <input type="checkbox"/> Si dos conos tienen la misma generatriz, entonces, tienen el mismo volumen.</p>
---	----------	---

Figura 2: Ejemplos de tareas con argumentación. Tomado de: Joya et al, (2018). *Activamente Matemáticas 8 Volumen 1 Edición Docente*. Bogotá, Colombia. Santillana Sistemas Educativos (p.54).

Finalmente, respecto a la exploración, el profesor O expresa que su importancia radica en la posibilidad de la experimentación y aplicación de temáticas específicas que pueden ser abordadas con el apoyo de tecnologías digitales. Los profesores manifiestan que la exploración no hace parte de sus prácticas educativas, posiblemente por desconocimiento.

Narración: transición del Estado 0 al Estado 1 del conocimiento didáctico – matemático, acerca de tareas, Entornos de Geometría Dinámica, argumentación y exploración

En los siguientes párrafos, presentamos el proceso de transformación del conocimiento de los profesores C y O acerca de tareas, EGD, argumentación y exploración, desde un Estado 0 (antes de ingresar a la MDM) hasta un Estado 1 (finalización del primer semestre de MDM). Esta narración tiene como objetivo evidenciar el proceso de transición entre ambos Estados, a partir de los conocimientos iniciales, las acciones que originaron un cambio y la transformación de estas nociones iniciales. La descripción la realizamos en el mismo orden de la presentación del Estado 0 y haciendo explícito el asunto sobre el cual se realizó el análisis.

En primer lugar, nos referimos a tareas, específicamente a su definición, su diseño, su relación con los procesos de exploración y argumentación y la gestión del profesor respecto a la tarea. Inicialmente, para los profesores la tarea era una actividad extra-clase que se le asigna a un estudiante. Esta definición cambio debido a varias acciones realizadas durante el primer semestre de la MDM, especialmente en el seminario de Diseño y Desarrollo Curricular (DDC). En primer lugar, nombramos la lectura de Gómez, Mora y Velasco (2015). Estos autores exponen una definición de tarea como una demanda estructurada de actuación, con un contenido matemático y un propósito de aprendizaje, que el profesor propone a los estudiantes con carácter intencional. En segundo lugar, la tesis de Triana y Zambrano (2016) en donde se presenta a la tarea como un problema con un enunciado problemático dentro de un contexto, relacionado con situaciones cotidianas o dentro del marco disciplinar de las matemáticas, que demanda un esfuerzo cognitivo porque exige usar conceptos, algoritmos y representaciones para solucionarla. A partir de este conocimiento referencial, los profesores comprenden a la tarea como una demanda estructurada que tiene una finalidad de aprendizaje y de enseñanza, y requiere la aplicación de un contenido matemático por parte de los estudiantes.

En esta sección, también nombramos el efecto que tuvieron los profesores encargados de los seminarios de Profundización en Matemáticas Elementales (PME) y DDC. Las gestiones realizadas por ellos permitieron que los profesores ampliaran la idea de tarea que tenían en el Estado 0. Además, la resolución de las tareas propuestas en estos seminarios y el participar en los mismos, permitió diferenciar el significado de los términos tarea y actividad, los cuales se tomaban como sinónimos al iniciar la MDM. Específicamente, los profesores de estos seminarios en su papel de representantes expertos del campo de la Educación Matemática ejercieron un control sobre el uso de términos y vocabulario. Este control se realiza de la mejor manera posible cuando los docentes usan las palabras tarea y actividad. Esta acción originó una diferenciación entre estos términos. Ahora la definición de actividad para los profesores hace referencia a las acciones que realizan los estudiantes al momento de solucionar la tarea. Estas acciones les permitieron a los docentes reflexionar sobre lo restringida que era su definición inicial sobre una tarea.

En lo concerniente al diseño de tareas, los profesores en un primer momento asumían el diseño de una tarea como una selección de problemas y ejercicios encontrados en libros de texto o internet. Para esta selección, tenían en cuenta aspectos tales como la temática, los preconceptos de los estudiantes, el nivel escolar, las características de la institución, la población, los documentos curriculares y las expectativas de enseñanza del profesor. Para ellos, esto era diseñar una tarea, puesto que al realizar la selección de ejercicios evaluaban la pertinencia en cuanto a la temática, al nivel educativo y las competencias que se querían desarrollar. También, los profesores gestionaban el orden de acuerdo con la dificultad que representaba la solución del ejercicio para los estudiantes; primero, aquellos que se abordan mediante procesos algorítmicos y luego, aquellos problemas que involucraban un contexto y requerían un análisis adicional por parte del estudiante. Así mismo, se gestionaba aspectos relevantes, tales como el tiempo y el agrupamiento de los estudiantes.

Este conocimiento se transformó gracias a acciones realizadas en los seminarios de DDC y PME. Aclaremos que, la evolución de este conocimiento se produjo en dos momentos. En un primer momento, una de las acciones fue las lecturas de autores que abordan teóricamente el diseño de una tarea, tales como Gómez et al., (2015) y Lin, Yang, Lee, Tabach y Stylianides (2012). De estas lecturas, fue la de Gómez et al., (2015) la que generó una mayor transformación. Para este autor, el análisis de instrucción proporciona elementos conceptuales y técnicas para diseñar, analizar y modificar la secuencia de tareas (comprendida como una ordenación de tareas), de tal forma que ella contribuya al logro de expectativas y a la superación de limitaciones de aprendizaje.

Dicho cambio en el conocimiento respecto a los elementos que conforman una tarea, lo evidenciamos en diversos fragmentos tomados de los escritos de los profesores. En estos, ellos identifican el diseño de una tarea como un proceso que requiere de diversos elementos (requisitos, meta, formulación, materiales y recursos, tipos de agrupamiento, formas de interacción y temporalidad), que están referenciados en el análisis de instrucción. Además, el proceso de analizar una tarea busca establecer en qué medida y de qué forma se superan las limitaciones y se cumplen las expectativas de aprendizaje. Lo anterior, nos posibilita realizar una comparación entre el Estado 0 y Estado 1, respecto a este asunto en particular (ver Tabla 1). Esta comparación la realizamos tomando como referente las diversas tareas que los profesores abordaron en los seminarios DDC y PME.

	Estado 0	Estado 1
Requisitos	Conceptos que se deben tener en cuenta para	Conocimientos y destrezas que los estudiantes,

	Estado 0	Estado 1
	abordar los problemas propuestos y usar los algoritmos vistos en clase de forma adecuada.	de acuerdo con su nivel educativo, necesitan para abordar una tarea. Los requisitos se abordan mediante los objetos matemáticos primarios (conceptos – definición, procedimientos, proposiciones, lenguajes, argumentos).
Meta	Aplicación correcta de los algoritmos matemáticos y la comprensión de la temática. A partir de esto, el estudiante puede explicar y sustentar lo realizado.	Propósitos que el profesor le asigna a la tarea. Estos, hacen referencia a las expectativas de aprendizaje y a aquellos errores y dificultades que el profesor espera que la tarea le permita superar a los estudiantes. Nuevamente, se tienen en cuenta los objetos matemáticos primarios para tal finalidad.
Formulación	Selección de los ejercicios y/o problemas.	Instrucción que el profesor proporciona a los estudiantes, buscando describir el contexto, la información inicial y aquellas producciones esperadas a partir de la actividad desarrollada.
Materiales y recursos	Medios que se emplean para la solución de una tarea. Los profesores no los tomaban en cuenta, puesto que las tareas se realizan únicamente en lápiz y papel, y el apoyo de una calculadora cuando se requería.	Medios que se emplean para la solución de una tarea. Los profesores reconocen que dependiendo de los materiales y recursos surgen diferentes actividades frente a la tarea.
Agrupamiento	Formas de ordenar a los estudiantes por grupos o individualmente.	Organización de los estudiantes por grupos de una determinada cantidad. Esto se realiza buscando que surjan interacciones entre ellos, para la comparación de puntos de vista y la superación de dificultades.
Interacción	Resolución de dudas y apoyo en procesos algorítmicos por parte del profesor hacia los estudiantes.	Formas de comunicación entre los miembros de la clase (profesor, estudiante, grupos). Esto, se realiza con la intención de institucionalizar significados y comparar formas de solución, puntos de vista, conocimientos y construcción de argumentos.
Temporalidad	Tiempo destinado para resolver la tarea.	Planeación temporal de los diferentes momentos que constituyen la tarea. Por ejemplo, proceso de construcción, proceso de exploración, proceso de conjeturación y socialización de respuestas.

Tabla 1: Comparación entre los Estados 0 y 1 de los elementos presentes en el diseño de una tarea.

Otra acción que evidencia la transformación del conocimiento de los profesores sobre el diseño de tarea ocurrió en una tarea propuesta en el seminario DDC. En esta tarea se solicitaba a los profesores: i) seleccionar un curso y un contenido de geometría que usualmente se desarrolla en ese grado; ii) diseñar una tarea en relación con dicho contenido que promueva el proceso de argumentar y requiera emplear el uso de un software especializado; iii) y reportar los aspectos que tuvieron en cuenta para diseñar dicha tarea (Tabla 2). Esta fue la primera vez que los profesores se pusieron en la labor de diseñar una tarea para promover un proceso específico: la argumentación. Esta acción permitió a los profesores cuestionar el tipo de tareas que diseñaban y las características que debería tener una tarea para generar un impacto en el proceso de argumentar utilizando un software especializado. Esta tarea que los profesores diseñaron posibilitó identificar la importancia del proceso de matemático al momento de formular una instrucción. El buen diseño de una tarea favorece una actividad matemática enriquecida, sin necesidad de una gran cantidad de ejercicios y problemas.

TAREA: Profesor C – Profesor O	
1.	<p>Construya un triángulo que dos de sus ángulos internos tengan la siguiente medida 30° y 50°.</p> <p>a. ¿Cuál debería ser la medida del ángulo faltante? ¿Por qué?</p> <p>b. Comprobar la respuesta a través de la herramienta GeoGebra.</p> <p>c. Por medio de la herramienta de arrastre mueva los vértices, ¿Qué se puede evidenciar a partir de esto?</p>
2.	<p>Con la herramienta de medir segmento mida cada uno de los lados del triángulo construido.</p> <p>a. ¿Qué relación hay entre los ángulos y los lados?</p> <p>b. Construya una tabla en donde evidencie cada uno de los valores de los lados en cuatro arrastres del triángulo.</p> <p>c. ¿Qué se puede evidenciar a partir de la comparación de los datos de la tabla construida?</p>

Tabla 2: Solución propuesta a tarea del seminario DDC.

Un segundo momento de la transformación del conocimiento sobre el diseño de tareas lo evidenciamos en una tarea conjunta de los seminarios PME y DDC. Esta acción permitió a los profesores ampliar el conocimiento sobre el diseño y análisis de tareas. Ahora, los docentes son conscientes del uso de los objetos matemáticos primarios para explicitar los requisitos y las metas de una tarea. En esta, se pedía a los profesores seleccionar un problema de un libro de texto y diseñar una tarea que incluyera dicho problema, explicitando los requisitos, las metas, la formulación, las posibles soluciones de los estudiantes, la gestión del profesor y el papel del recurso seleccionado para abordar la tarea. La tarea debía estar diseñada con el fin de suscitar procesos de argumentación con el uso de EGD. A continuación, presentamos algunos fragmentos de la tarea en cuestión, donde podemos evidenciar el conocimiento acerca de tareas en el Estado 1.

En la Tabla 3 presentamos el problema del libro de texto que los profesores seleccionaron y la modificación que le realizaron al problema, a partir de los requerimientos de la tarea. Esta comparación nos permite evidenciar los tipos de tarea que los profesores ahora diseñan, basándose en la definición y los elementos para el diseño.


EJERCICIO DEL LIBRO DE TEXTO	SITUACIÓN DE LA TAREA MODIFICADA
<p>En la siguiente figura, las tres rectas son mediatrices de un triángulo rectángulo y la circunferencia circunscribe el triángulo.</p> 	<p>Dada una circunferencia con centro en O, dos rectas perpendiculares que se intersectan en O y la bisectriz de uno de los ángulos formados por las rectas perpendiculares. ¿Cuántos triángulos inscritos en la circunferencia cumplen que las rectas sean las mediatrices de los lados del triángulo?</p>
INSTRUCCIÓN EJERCICIO DEL LIBRO DE TEXTO	INSTRUCCIÓN SITUACIÓN DE LA TAREA MODIFICADA
<p>Construye un triángulo que reúna las condiciones.</p>	<ol style="list-style-type: none"> Realizar la construcción en GeoGebra garantizando cada una de las condiciones que se piden. Proporcionar los pasos de la construcción, usando un lenguaje geométrico adecuado. Explorar (arrastrar, medir, activar rastro, comparar, etc.) la construcción realizada para identificar propiedades invariantes que permitan un acercamiento a la solución de la situación planteada. Realizar una lista con los pasos de la exploración realizada, haciendo explícito el uso de las herramientas. Enunciar una conjetura de la forma Si _____, entonces _____, donde presente las propiedades invariantes encontradas. Nombrar los objetos y conceptos matemáticos que pueden garantizar las propiedades invariantes encontradas.

Tabla 3: Diseño de una tarea realizada para el final de los seminarios DCC y PME.

En lo concerniente a los EGD, los profesores tenían una concepción inicial de que usarlos permitía crear ambientes de aprendizaje para que los estudiantes experimenten una actividad matemática similar a la de un matemático. Para ellos, esto favorecía una mayor comprensión de las temáticas y la apertura hacia experiencias educativas innovadoras. También, evidenciamos en sus escritos, que los implementaban como un apoyo visual de lo que exponían. Para ellos, sus construcciones en EGD son confiables y optimizan el tiempo. Los profesores eran conscientes de que este es un uso poco adecuado de las tecnologías digitales.

Para la transformación del conocimiento sobre los EGD se pueden evidenciar diversas acciones en los diferentes seminarios de la MDM. Estas, se pueden dividir en dos tipos: teóricas y prácticas. En lo concerniente a lo teórico, se propusieron varias lecturas en los seminarios II, DDC y PME. Por ejemplo, en el seminario II los profesores realizaron lecturas de Drijvers (2013), Mariotti (2000), Groman (1996), Arzarello, Olivero, Paola y Robutt (2002), Camargo, Samper y Perry (2006), entre otras.

Estas lecturas hicieron parte de la construcción del anteproyecto de trabajo de grado de los profesores. Tomando un ejemplo de estas, la lectura de Drijvers (2013) permite a los docentes identificar que la introducción por sí sola de un EGD a la

clase de geometría no es suficiente, sino que también se tiene que cambiar el diseño de las tareas propuestas y actividades que la acompañan. De la misma forma, ellos manifiestan que introducir tecnologías al aula de clase es de por sí ya es un proceso innovador, como lo mencionan Groman (1996) y Mariotti (2000). Los profesores afirman que, si bien introducir un EGD cambia la clase de geometría, si no se modifica el tipo de tareas que propone el profesor, este cambio no tendrá una incidencia significativa en el aprendizaje de los estudiantes.

La otra forma en la que se evidencia el cambio del conocimiento respecto a la función de los EGD es desde los seminarios de DDC y PME. En estos espacios académicos, las tareas propuestas por los profesores a cargo, permitió a los docentes evidenciar un tipo de tareas y de problemas que se puede proponer a los estudiantes para promover la argumentación. En estas, los EGD dejaban de ser una simple herramienta de dibujo y visualización y se convierten en un artefacto que posibilita la exploración de situaciones y, en consecuencia, soluciones a los problemas. Un ejemplo de las tareas desarrolladas por los profesores en el seminario PME, se reporta en la Tabla 4.

SITUACIÓN 1:	SITUACIÓN 2:
<p><i>Tome una hoja en blanco y haga una circunferencia con un compás de cualquier radio e indique el centro como F_1, dibuje un punto F en el interior de la circunferencia que sea distinto de su centro, dibuje puntos en la circunferencia tal que la distancia entre ellos podría ser un centímetro entre uno y otro, para cada uno de los puntos dibujados en la circunferencia haga un doblez de tal forma que el punto se solape con el punto F</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <i>¿Qué objeto visualiza cuando se terminan de hacer todos los dobleces?</i> <i>Geoméricamente hablando, cada doblez hecho, ¿Qué objeto representa respecto al segmento cuyos extremos son el punto F y el punto correspondiente en la circunferencia?</i> <i>Usando GeoGebra, modele los pasos del procedimiento antes presentados. ¿se ratifica la respuesta dada al ítem i? Formule una conjetura y presente el argumento que soporta dicha conjetura.</i> <i>¿Cómo encontrar cada punto P que conforma al objeto geométrico E?</i> 	<p><i>Con base en la experiencia surgida al abordar la situación 1, solucione el siguiente problema: Dada la curva E. Determinar la recta tangente a E por un punto P en ella.</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <i>Proveer el procedimiento que soluciona el problema.</i> <i>Con base en el procedimiento que soluciono el problema, formule una conjetura.</i> <i>Demostrar la conjetura desde lo sintético, analítico y lo sintético – analítico.</i>

Tabla 4: Ejemplos de tareas propuestas en el seminario PME.

Para la solución de dicha tarea, los profesores (que actuaron como resolutores) tuvieron la necesidad de utilizar GeoGebra como un artefacto que facilita la comprensión de los elementos geométricos involucrados en las diferentes situaciones planteadas. La construcción, la exploración, la visualización de invariantes y el dinamismo del EGD fueron fundamental para la solución del problema propuesto esto se puede evidenciar en la solución dada por los docentes para la situación 1 (Figura 3), como para la solución de la situación 2 (Figura 4).

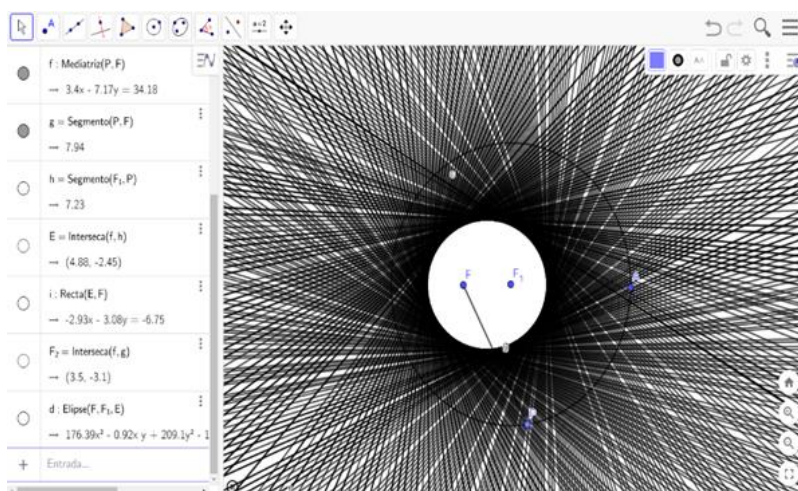


Figura 3: Solución propuesta para la situación 1. Tarea PME.

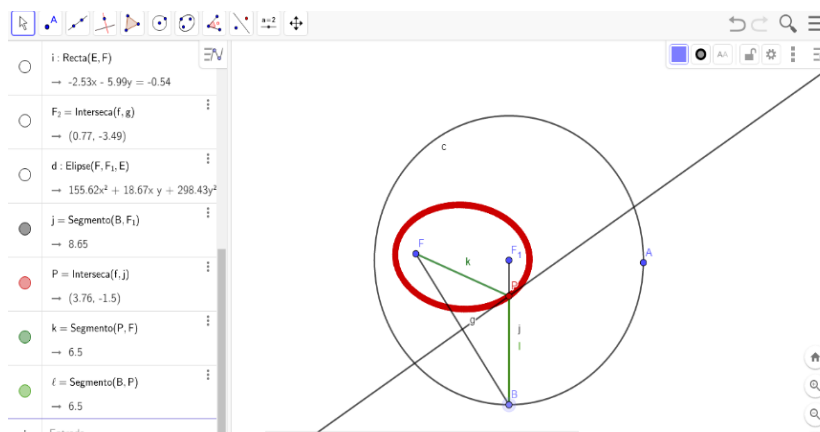


Figura 4: Solución propuesta para la situación 2. Tarea PME.

Este tipo de acciones permitió a los profesores transformar su conocimiento inicial sobre los EGD y su importancia en el abordaje de tareas. Ahora, los profesores no solamente identifican el potencial que los EGD ofrecen; sino que disponer de estos medios no son suficiente para generar una transformación en la práctica educativa. En fragmentos de los escritos, los docentes expresan que la clave está en la forma en la cual los profesores utilicen estas tecnologías en los procesos de enseñanza. En su discurso han apropiado que los EGD se pueden entender como un medio para hacer ostensivo el razonamiento. En otras palabras, la relación entre los EGD y el proceso de exploración permite decantar el razonamiento. También manifiestan que los entornos dinámicos son herramientas indispensables que permiten a los estudiantes, mediante el arrastre, la medición y la visualización, encontrar invariantes a partir de construcciones, tanto iniciales como auxiliares. Esto lleva a obtener una realimentación inmediata que el software proporciona, permitiendo una actividad matemática más rica y genuina.

En lo que atañe a la argumentación, abordamos el conocimiento del profesor y su transformación desde la definición de argumentación y argumento, y la relación con tareas y el proceso de exploración. En el Estado 0 los profesores identificaban a la argumentación como la acción de justificar y establecer el valor de verdad de una proposición. A pesar de reconocer la argumentación como proceso que permite el desarrollo de competencias matemáticas, según lo menciona el Ministerio de Educación Nacional (2006), no logramos evidenciar en sus discursos, ni en sus escritos, un abordaje constante de este asunto en las prácticas educativas.

Esta concepción inicial presenta un cambio debido a acciones exteriorizadas en las sesiones iniciales de los seminarios PME e II. En estos espacios se presenta a los profesores la argumentación como el proceso que busca convencer, persuadir, validar o disentir sobre algo que es cierto o plausible, apoyado en un sistema de creencias o conocimientos. En este sentido, se ostenta también la noción de argumentar como un proceso que produce un discurso oral o escrito que surge de un razonamiento. En este caso, los profesores transforman su conocimiento sobre la definición de argumento y argumentación, al incorporar nuevas definiciones exhibidas por los profesores que lideran los seminarios.

Otra acción que favoreció la transformación de las nociones iniciales fue una charla realizada entre los docentes y el profesor del seminario PME, Dr. Oscar Javier Molina Jaime. En este espacio, los docentes comprenden la relación entre argumento y razonamiento. Dicha relación se resume en: todo argumento es producto de una razón, pero no todo razonamiento produce un argumento. En otras palabras, los profesores identifican al argumento como faceta ostensiva del razonamiento, en tanto permite generar un discurso en un individuo.

Ejemplo de lo anterior, son las diversas conjeturas que los profesores planteaban como posibles respuestas a los diversos diseños de tareas y situaciones abordadas en los seminarios de PME:

SITUACIÓN 1	CONJETURA 1
Dados dos puntos A y B. ¿Cuántas circunferencias contienen a A y B?	Dados dos puntos A y B, μ_{AB} y $X_i \in \mu_{AB}$, existen infinitas $\odot X_i, X_i B$ que contienen a A y B.
SITUACIÓN 2	CONJETURA 2
Dada una circunferencia con centro en O, dos rectas perpendiculares que se intersecan en O y la bisectriz de uno de los ángulos formados por las rectas perpendiculares. ¿Cuántos triángulos inscritos en la circunferencia cumplen que las rectas sean las mediatrices de los lados del triángulo?	Dada $\odot O, OA$; $F, G, H \in \odot O, OA$. Si en un $\triangle FHG$, $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \perp \mathcal{M}_{\overline{GH}}$, $\mathcal{M}_{\overline{FG}}$ es bisectriz de $\angle FHG$, \overline{FG} es diámetro de $\odot O, OA$; $\overline{FG} \perp \mathcal{M}_{\overline{FG}}$, entonces $\triangle FHG$ es rectángulo isósceles.

Tabla 5: Ejemplos de algunos argumentos contruidos por los profesores en el seminario PME.

En este caso podemos observar que para los profesores una conjetura con estructura de “Dados... existen...” o “Si...

entonces...” constituye un argumento válido. También, esta conjetura puede convertirse en elemento de un sistema teórico, y posteriormente puede ser utilizada para respaldar la veracidad de una expresión. Así mismo, podemos observar que las expresiones escritas que respaldan la conjetura pueden ser argumentos. Un ejemplo de esto último, son las siguientes afirmaciones relacionada con la conjetura de la Tabla 5:

- Como las rectas dadas son perpendiculares por el punto medio con los lados del triángulo entonces las rectas dadas son mediatrices de los lados del triángulo. (Teorema de la mediatriz)
- El $\triangle FHG$ es rectángulo porque tiene un ángulo recto (Definición triángulo rectángulo)
- El $\triangle FHG$ es isósceles porque tiene dos lados congruentes (Definición de mediatriz y Definición de triángulos isósceles)

En cuanto a la relación argumentación – tareas – exploración, nombramos la lectura de Molina y Samper (2019). Los profesores con este texto logran vislumbrar que se pueden plantear diversos tipos de problemas que promueven diversos tipos de argumentos formales e informales (deductivo, inductivo y abductivo) en los estudiantes. Estos argumentos se ven afectados por el proceso de exploración que realice el estudiante.

Una última acción que nombramos es una tarea realizada por los profesores durante la MDM, en el seminario PME. La tarea propuesta consistió en el desarrollo de tres situaciones (Tabla 6). Los profesores identificaron en la actividad de sus compañeros de seminario la producción de distintos tipos de argumentos, por ende, concluyeron que las situaciones favorecían la argumentación.

SITUACIÓN 1:	SITUACIÓN 2:	SITUACIÓN 3:
Dados dos puntos A y B, ¿cuántas circunferencias contienen a A y B?	Dados tres puntos A, B y C, ¿cuántas circunferencias contienen a A, B y C?	Dados cuatro puntos A, B, C y D, ¿cuántas circunferencias contienen a A, B, C y D?"
1. Proveer los pasos de construcción en GeoGebra validándolos teóricamente siempre que sea posible. 2. Proveer la exploración realizada para encontrar propiedades invariantes en busca de la solución del problema. 3. Formular una conjetura que reporte el invariante encontrado. 4. Proveer la demostración de la conjetura.		

Tabla 6: Situaciones propuestas a los profesores en el seminario PME.

La actividad desarrollada por los profesores les permitió experimentar la actividad matemática como resolutores. Los docentes identifican que dependiendo de la exploración (teórica o empírica) que se realice, emergen diversos argumentos de la actividad. Con relación a esto, mencionamos los tipos de argumentos y la representación que podemos evidenciar en el trabajo realizado por los profesores durante el semestre 2020-1. En varios documentos, identificamos que los profesores por medio del desarrollo de las tareas propuestas en los seminarios de PME y DDC apropiaron en su discurso y en la actividad matemática desarrollada, la representación de un argumento por medio del modelo de Toulmin (Figura 5). Para ellos, esta forma de representación es útil para comprender el tipo de argumento emergido de la actividad matemática a partir de sus elementos: datos, aserción y garantía (Figura 6). Cabe aclarar que, acerca de este conocimiento no se encuentra evidencia de un Estado 0. Este, surge durante la transición entre los Estados 0 y 1.

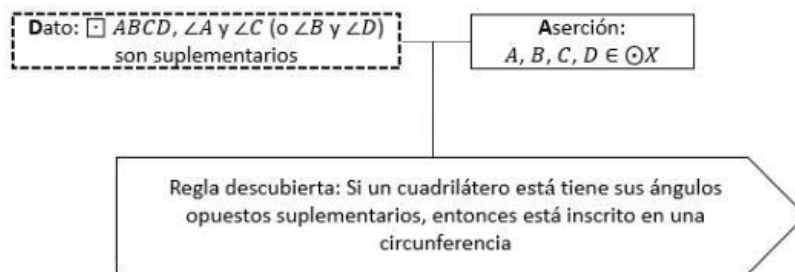


Figura 5: Ejemplo de una representación de un argumento realizada por los profesores utilizando el modelo de Toulmin.

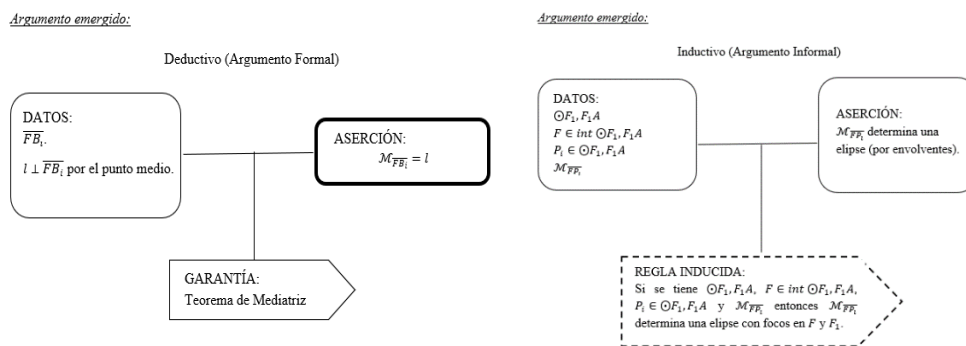


Figura 6: Representación de argumentos realizada por los profesores aplicando el modelo de Toulmin.

Finalmente, las acciones que desataron la transformación sobre la exploración son variadas y se dan en diferentes escenarios. Podemos identificar cambios acerca del conocimiento sobre el proceso de exploración a partir de las lecturas que se hicieron al respecto. Así como en las tareas que se propusieron en los diferentes seminarios de la MDM.

Con respecto a la definición, podemos identificar que los profesores evidencian un cambio con respecto a su concepción inicial reportada en el Estado 0. En este Estado, los profesores identificaban a la exploración como una forma de experimentar que le permite a los estudiantes la solución de tarea. La transformación de lo anterior se da en el marco de lecturas realizadas en la construcción del anteproyecto de grado. Ahora, podemos identificar que ellos asumen la exploración como una oportunidad que se les proporciona a los estudiantes de construir objetos matemáticos, transformar figuras, percibir información visual divergente y recibir realimentación inmediata de sus acciones (Hanna y de Villiers, 2008). En sus lecturas también analizaron a Arzarello et al. (1998) y encontraron que la función arrastre permite la exploración y la validación de una construcción para producir y validar conjeturas.

Con respecto a las diferentes funciones que un EGD brinda para la exploración, los profesores a partir del papel de resolutores de las diferentes tareas propuestas lograron identificar que arrastrar, medir distancias y ángulos, activar rastro o realizar construcciones auxiliares son importantes en el momento de la exploración, y de la forma en que el resolutor explore puede generar diferentes tipos de argumentos. Adicionalmente, en charlas con expertos pudieron identificar que la exploración es el puente entre el razonamiento y la argumentación. Esto les permite ratificar su nueva concepción de exploración y su relación con los EGD.

Narración: Estado 1 del conocimiento didáctico – matemático, acerca de tareas, Entornos de Geometría Dinámica, argumentación y exploración

En esta narrativa, presentamos el conocimiento de los profesores C y O acerca de tareas, EGD, argumentación y exploración, en el Estado 1 (finalización del primer semestre de MDM). Esta narrativa tiene como objetivo presentar el resultado de la transformación del conocimiento de los profesores. La descripción la realizamos en el orden presentado al iniciar este párrafo y abordando asuntos tales como: qué saben los profesores ahora, cómo se evidencia el nuevo conocimiento y nuevos cuestionamientos susceptibles de ser abordados.

En lo concerniente al conocimiento acerca de tareas, los profesores definen a una tarea como una demanda estructurada que tiene una finalidad de aprendizaje y de enseñanza, y requiere la aplicación de un contenido matemático por parte de los estudiantes. Adicionalmente, ellos identifican que para el proceso de diseñar una tarea se deben tener en cuenta diversos elementos (requisitos, meta, formulación, materiales y recursos, tipos de agrupamiento, formas de interacción y temporalidad). En el discurso y conocimiento de los profesores, se afianzó el uso de los objetos matemáticos primarios, para explicitar elementos del diseño de una tarea. En cuanto a terminología, los profesores presentan en sus producciones la distinción entre tarea y actividad, entendiendo esta última como las diversas acciones que realiza un estudiante al momento de abordar una situación con contenido matemático.

Frente al análisis de una tarea, los profesores identifican las expectativas de aprendizaje que quieren cumplir y como pueden llegar a superar posibles limitaciones y concepciones erróneas en sus estudiantes; así como prever posibles procedimientos para la solución de una tarea. Los profesores adquieren conciencia frente al hecho de que un buen diseño de tarea favorece una actividad matemática enriquecida, sin necesidad de una gran cantidad de ejercicios y problemas que llevaban a los estudiantes a repetir algoritmos de solución. Finalmente mencionamos que, los profesores comprenden que según la tarea propuesta emergen diferentes tipos de argumentos en la actividad de los estudiantes (Molina y Samper, 2019)(Molina y Samper, 2019)(Molina y Samper, 2019)(Molina y Samper, 2019)(Molina y Samper, 2019).

Al momento de diseñar la tarea se puede evidenciar que los profesores son conscientes de la importancia que tienen los

procesos de construcción, exploración y conjeturación al momento de solucionar la tarea. Así como, prever los diversos objetos matemáticos y procedimientos de solución que los estudiantes pueden desarrollar en su actividad. Finalmente, evidenciamos un cambio correspondiente al diseño de tareas abiertas, en las cuales la solución depende de las acciones y decisiones tomadas por los estudiantes, y no de la aplicación de algoritmos fijos y repetitivos de solución. Tomando como referencia los insumos de los diferentes seminarios podemos afirmar que este conocimiento hace parte de los profesores al finalizar el Estado 1.

En lo correspondiente a los EDG en el presente Estado del conocimiento, los profesores definen a los EGD como un medio para hacer ostensivo el razonamiento, que según la forma en la cual se aplique en las clases permiten una transformación en la práctica educativa. Adicionalmente, el discurso de los profesores nos permite aseverar que los EGD y el proceso de exploración que los estudiantes podrían llegar a realizar en la solución de una tarea, ayuda a decantar el razonamiento.

Frente a la importancia de los EGD, los profesores exteriorizan que estos, son herramientas precisas que, por medio del arrastre de puntos, la medición de distancias, la modificación y construcción de figuras, y la visualización de objetos geométricos les permite a los resolutores de una situación la detección de invariantes. Lo anterior, lleva obtener realimentación inmediata de las acciones y decisiones que se ejecutan en el software y el desarrollo de una actividad matemática más potente en los estudiantes.

En lo que corresponde a la argumentación, se identifica en los docentes una transición del conocimiento desde una concepción inicial surgida de lo empírico, hasta una definición formal sustentada desde algunos autores. Como lo hemos mencionado en nuestra narración de transición, al finalizar el Estado 1, para los profesores la argumentación es un proceso que busca persuadir a otro individuo sobre algo que es cierto o plausible apoyándose en sistemas de conocimientos o creencias. Así mismo, en el discurso de los profesores se identifica con claridad la definición que ahora trabajan sobre argumentar: acción que realiza un individuo para generar un discurso oral o escrito.

Entrelazando lo expuesto en el párrafo anterior, podemos de igual manera vislumbrar otros componentes que ahora forman parte del conocimiento de los profesores acerca de la argumentación. Si vamos de lo macro a lo micro, tendríamos la argumentación como un proceso, el argumentar como una acción que permite desarrollar lo anterior y el argumento. Este último, lo identificamos en algunas producciones de los profesores como frases con sentido, que tienen una estructura definida y permiten conformar el discurso en la acción de argumentar.

A pesar de lo anterior, en el discurso de los profesores podemos evidenciar que aún se consideran como sinónimos los términos de argumentar, explicar, justificar y validar, al finalizar el primer semestre.

Finalmente, en cuanto a la exploración, los profesores adquieren una definición mucho más amplia de este conocimiento. Para ellos, el proceso de exploración es una herramienta poderosa que le permite al estudiante o resolutor de una tarea realizar construcciones, transformar figuras, percibir información visual relevante, detectar invariantes en casos particulares y recibir realimentación de cada una de sus acciones.

Sin lugar a duda, para los docentes el proceso de exploración va estrechamente vinculado con el uso de EGD, aunque en algunas producciones podemos evidenciar que la exploración no se limita al uso de un artefacto tecnológico. Por ejemplo, en una tarea desarrollada en el marco del seminario PME, observamos como los profesores a partir de dobles de papel abordan la construcción del objeto geométrico elipse por medio de rectas tangentes (envolventes), como se puede observar en la Figura 7.

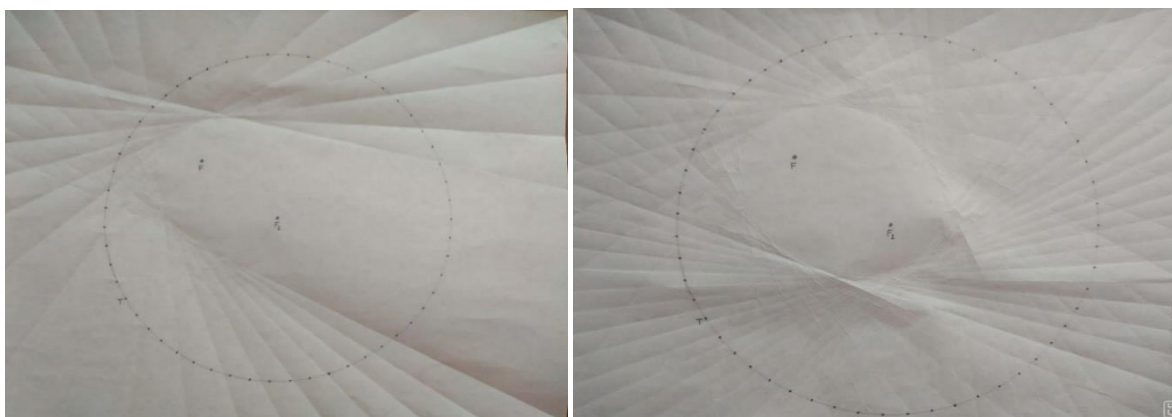


Figura 7: Secuencia y construcción de elipse por medio de envolventes.

10.3 Anexo 3: Datos Investigativos

Tabla 1: Datos sobre argumentación en Ciclo 1

Código	Dato	Fuente	Estado del conocimiento	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador
FA01	Los profesores identifican a [la argumentación] como sinónimo de justificación, explicación y establecimiento del valor de verdad de una proposición.	Texto Narrativo Estado 0	0	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
FA02	Los docentes asumen que si el estudiante evalúa afirmaciones y expresa el porqué de su percepción con un ejemplo o un contraejemplo está realizando procesos de argumentación.	Texto Narrativo Estado 0	0	Epistémica	Criterios para identificar argumentos o parte de estos en expresiones discursivas
FA03	Los docentes tienen conocimiento de la argumentación como un proceso matemático que contribuye al desarrollo de competencias, debido al acercamiento a documentos curriculares, tales como los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN).	Texto Narrativo Estado 0	0	Ecológica	Vínculos entre el currículo de matemáticas y la argumentación
FA04	Los profesores identifican al argumento como faceta ostensiva del razonamiento, en tanto permite generar un discurso en un individuo.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	1	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
FA05	[...] Para los profesores una conjetura con estructura de “Datos... existen...” o “Si... entonces...” constituye un argumento válido.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	1	Epistémica	Representaciones de argumentos
FA06	Para [los profesores, la representación de argumentos por medio del modelo de Toulmin] es útil para comprender el tipo de argumento emergido de la actividad matemática a partir de sus elementos: datos, aserción y garantía	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	1	Epistémica	Criterios para identificar argumentos o parte de estos en expresiones discursivas
FA07	Para los profesores la argumentación es un proceso que busca persuadir a otro individuo sobre algo que es cierto o plausible apoyándose en sistemas de conocimientos o creencias.	Texto Narrativo Estado 1	1	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
FA08	En el discurso de los profesores se identifica con claridad la definición que ahora trabajan sobre argumentar: acción que realiza un individuo para generar un discurso oral o escrito.	Texto Narrativo Estado 1	1	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
FA09	Si vamos de lo macro a lo micro, tendríamos la argumentación como un proceso, el argumentar como una acción que permite desarrollar lo anterior y el argumento como frases con sentido, que tienen una estructura definida y permiten conformar el discurso en la acción de argumentar.	Texto Narrativo Estado 1	1	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
FA10	En el discurso de los profesores podemos evidenciar que aún se consideran como sinónimos los términos de argumentar, explicar, justificar y validar, al finalizar el primer semestre.	Texto Narrativo Estado 1	1	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
FA11	[...] Los profesores por medio del desarrollo de las tareas propuestas en los seminarios de PME y DDC apropiaron en su discurso y en la actividad matemática desarrollada, la representación de un argumento por medio del modelo de Toulmin. Para ellos, esta forma de representación es útil para comprender el tipo de argumento emergido de la actividad matemática a partir de sus elementos: datos, aserción y garantía.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	1	Epistémica	Representaciones de argumentos

Tabla 2: Datos sobre tareas en Ciclo 1

Código	Dato	Fuente	Estado del conocimiento	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador
FT01	Los profesores definen tarea como toda actividad extra-clase que propone un docente buscando reforzar las temáticas vistas en clase y la apropiación de algoritmos realizados en el aula.	Texto Narrativo Estado 0	0	Epistémica	Vocabulario especializado sobre tareas
FT02	Los profesores consideran que al diseñar una tarea se deben tener en cuenta aspectos tales como la selección del tema [...]	Texto Narrativo Estado 0	0	Ecológica	Pertinencia de una tarea con respecto al currículo y el contexto
FT03	Los profesores consideran que al diseñar una tarea se deben tener en cuenta aspectos tales como [...] los preconceptos de los estudiantes [...]	Texto Narrativo Estado 0	0	Epistémica	Elementos de la tarea
FT04	Los profesores consideran que al diseñar una tarea se deben tener en cuenta aspectos tales como [...] el grado al cual pertenecen [los estudiantes] [...]	Texto Narrativo Estado 0	0	Ecológica	Pertinencia de una tarea con respecto al currículo y el contexto
FT05	Los profesores consideran que al diseñar una tarea se deben tener en cuenta aspectos tales como [...] las características de la institución y la población [...]	Texto Narrativo Estado 0	0	Ecológica	Pertinencia de una tarea con respecto al currículo y el contexto
FT06	Los profesores consideran que al diseñar una tarea se deben tener en cuenta aspectos tales como [...] los documentos curriculares [...]	Texto Narrativo Estado 0	0	Ecológica	Pertinencia de una tarea con respecto al currículo y el contexto
FT07	Los profesores consideran que al diseñar una tarea se deben tener en cuenta aspectos tales como [...] las expectativas del profesor.	Texto Narrativo Estado 0	0	Epistémica	Elementos de la tarea
FT08	Los profesores [...] afirman su mediación frente a las tareas debe buscar que el estudiante sea el gestor de su propio aprendizaje	Texto Narrativo Estado 0	0	Interaccional	Impacto de una tarea en el rol del estudiante en el aula
FT09	El papel del profesor es de mediador entre el estudiante y el conocimiento matemático.	Texto Narrativo Estado 0	0	Interaccional	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que explica una tarea
FT10	Las tareas que propone el profesor deberían permitir a los estudiantes inferir conceptos y definiciones [...]	Texto Narrativo Estado 0	0	Epistémica	Importancia del diseño de una tarea
FT11	[...] El docente [no debe permitir que su gestión] inflencie y vicie las posibles respuestas de los estudiantes.	Texto Narrativo Estado 0	0	Interaccional	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase tendientes a superar un error, obstáculo o dificultad con respecto al desarrollo de una tarea
FT12	Para [el profesor C], las tareas que involucran [EGD] permiten favorecer una mejor comprensión de los objetos matemáticos, usando diversos contextos.	Texto Narrativo Estado 0	0	Mediacional	Impacto de los materiales y recursos en una tarea
FT13	Los profesores gestionaban el orden [de secuenciación de los problemas en una tarea,] de acuerdo con la dificultad que representaba la solución del ejercicio para los estudiantes; primero, aquellos que se abordan mediante procesos algorítmicos y luego, aquellos problemas que involucraban un contexto y requerían un análisis adicional por parte del estudiante. Así mismo, se gestionaba aspectos relevantes, tales como el tiempo y el agrupamiento de los estudiantes.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	0	Epistémica	Vínculos entre los elementos de una tarea
FT14	[Los requisitos de una tarea son los] conceptos que se deben tener en cuenta para abordar los problemas propuestos y usar los algoritmos vistos en clase de forma adecuada.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	0	Epistémica	Elementos de la tarea
FT15	[Los requisitos de una tarea son los] conocimientos y destrezas que los estudiantes, de acuerdo con su nivel educativo, necesitan para abordar una tarea. Los requisitos se abordan mediante los objetos matemáticos primarios (conceptos – definición, procedimientos, proposiciones, lenguajes, argumentos).	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	1	Epistémica	Elementos de la tarea

Código	Dato	Fuente	Estado del conocimiento	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador
FT16	[La meta de una tarea es la] aplicación correcta de los algoritmos matemáticos y la comprensión de la temática. A partir de esto, el estudiante puede explicar y sustentar lo realizado.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	0	Epistémica	Elementos de la tarea
FT17	[La meta de una tarea son los] propósitos que el profesor le asigna a la tarea. Estos, hacen referencia a las expectativas de aprendizaje y a aquellos errores y dificultades que el profesor espera que la tarea le permita superar a los estudiantes. Nuevamente, se tienen en cuenta los objetos matemáticos primarios para tal finalidad.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	1	Epistémica	Elementos de la tarea
FT18	[La formulación de una tarea consiste en la] selección de los ejercicios y/o problemas.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	0	Epistémica	Elementos de la tarea
FT19	[La formulación de una tarea consiste en la] instrucción que el profesor proporciona a los estudiantes, buscando describir el contexto, la información inicial y aquellas producciones esperadas a partir de la actividad desarrollada.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	1	Epistémica	Elementos de la tarea
FT20	[Los materiales y recursos son los] medios que se emplean para la solución de una tarea. Los profesores no los tomaban en cuenta, puesto que las tareas se realizan únicamente en lápiz y papel, y el apoyo de una calculadora cuando se requería.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	0	Epistémica	Elementos de la tarea
FT21	[Los materiales y recursos son los] medios que se emplean para la solución de una tarea.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	1	Epistémica	Elementos de la tarea
FT22	Los profesores reconocen que dependiendo de los materiales y recursos surgen diferentes actividades frente a la tarea.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	1	Mediacional	Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea
FT23	[El agrupamiento en una tarea hace referencia a las] formas de ordenar a los estudiantes por grupos o individualmente.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	0	Epistémica	Elementos de la tarea
FT24	[El agrupamiento en una tarea hace referencia a la] organización de los estudiantes por grupos de una determinada cantidad.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	1	Epistémica	Elementos de la tarea
FT25	[El agrupamiento] se realiza buscando que surjan interacciones entre ellos, para la comparación de puntos de vista y la superación de dificultades.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	1	Interaccional	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que explica una tarea

Código	Dato	Fuente	Estado del conocimiento	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador
FT26	[La interacción se manifiesta en la] resolución de dudas y apoyo en procesos algorítmicos por parte del profesor hacia los estudiantes.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	0	Interaccional	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que explica una tarea
FT27	[La temporalidad constituye el] tiempo destinado para resolver la tarea.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	0	Epistémica	Elementos de la tarea
FT28	[La temporalidad hace referencia a la] planeación temporal de los diferentes momentos que constituyen la tarea. Por ejemplo, proceso de construcción, proceso de exploración, proceso de conjeturación y socialización de respuestas.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	1	Mediacional	Vínculo entre tiempo y fases de una tarea
FT29	Los profesores definen a una tarea como una demanda estructurada que tiene una finalidad de aprendizaje y de enseñanza, y requiere la aplicación de un contenido matemático por parte de los estudiantes.	Texto Narrativo Estado 1	1	Epistémica	Vocabulario especializado sobre tareas
FT30	[Los profesores] identifican que para el proceso de diseñar una tarea se deben tener en cuenta diversos elementos (requisitos, meta, formulación, materiales y recursos, tipos de agrupamiento, formas de interacción y temporalidad).	Texto Narrativo Estado 1	1	Epistémica	Elementos de la tarea
FT31	Los profesores presentan en sus producciones la distinción entre tarea y actividad, entendiendo esta última como las diversas acciones que realiza un estudiante al momento de abordar una situación con contenido matemático.	Texto Narrativo Estado 1	1	Epistémica	Vocabulario especializado sobre tareas
FT32	[...] un buen diseño de tarea favorece una actividad matemática enriquecida, sin necesidad de una gran cantidad de ejercicios y problemas que llevaban a los estudiantes a repetir algoritmos de solución.	Texto Narrativo Estado 1	1	Epistémica	Importancia del diseño de una tarea
FT33	Al momento de diseñar la tarea se puede evidenciar que los profesores son conscientes de la importancia que tienen los procesos de construcción, exploración y conjeturación al momento de solucionar la tarea.	Texto Narrativo Estado 1	1	Epistémica	Procesos involucrados en la solución de una tarea
FT34	Al momento de diseñar la tarea se puede evidenciar que los profesores son conscientes de la importancia que tiene [...] prever los diversos objetos matemáticos y procedimientos de solución que los estudiantes pueden desarrollar en su actividad	Texto Narrativo Estado 1	1	Epistémica	Importancia del diseño de una tarea

Tabla 3: Datos sobre tareas de argumentación en Ciclo 1

Código	Dato	Fuente	Estado del conocimiento	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador
FTA01	Los profesores con [un referente teórico] logran vislumbrar que se pueden plantear diversos tipos de problemas que promueven diversos tipos de argumentos formales e informales (deductivo, inductivo y abductivo) en los estudiantes. Estos argumentos se ven afectados por el proceso de exploración que realice el estudiante.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	1	Epistémica	Tipos de problemas y su relación con los tipos de argumentos

Código	Dato	Fuente	Estado del conocimiento	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador
FTA02	Los docentes identifican que dependiendo de la exploración (teórica o empírica) que se realice, emergen diversos argumentos de la actividad.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	1	Cognitiva	Surgimiento de un tipo argumento a partir de la actividad desarrollada por el estudiante.
FTA03	[La interacción se manifiesta en las] formas de comunicación entre los miembros de la clase (profesor, estudiante, grupos). Esto, se realiza con la intención de institucionalizar significados y comparar formas de solución, puntos de vista, conocimientos y construcción de argumentos.	Texto Narrativo Transición del Estado 0 al Estado 1	1	Interaccional	Interacciones que favorecen la argumentación en la actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea
FTA04	Los profesores comprenden que según la tarea propuesta emergen diferentes tipos de argumentos en la actividad de los estudiantes.	Texto Narrativo Estado 1	1	Epistémica	Tipos de problemas y su relación con los tipos de argumentos

Tabla 4: Datos sobre argumentación en Ciclo 2

Código	Dato	Fuente	Estado del conocimiento	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador
DA01	Comencé buscando [en el diccionario de la RAE] qué es la argumentación y simplemente encontré que es la acción de argumentar. Luego, amplí la búsqueda a lo que significa argumentar y encontré que es aducir, alegar, o dar argumentos [...] Entonces, busqué qué es un argumento, y resulta que un argumento es un razonamiento para probar o demostrar una proposición, que convence, afirma o niega algo. Con esto, inmediatamente digo, que la argumentación tiene que ver algo con el razonamiento.	Transcripción asesoría. Marzo 5 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
DA02	[...] Busqué [en el diccionario de la RAE] qué significa justificación y encontré que es la acción y efecto de justificar. Inmediatamente, miré qué es justificar. Esto es, probar algo con razones convincentes, testigos o documentos.	Transcripción asesoría. Marzo 5 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA03	[...] [Encontré en el diccionario de la RAE que] un razonamiento es la acción y efecto de razonar. Pero entonces, ¿qué es razonar? Encontré que es exponer razones. Ahora, una razón es un argumento o demostración que se aduce en apoyo de algo. Como que volví a lo mismo [a la definición de argumento].	Transcripción asesoría. Marzo 5 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA04	[...] [Después de revisar los apuntes de la clase de Investigación e Innovación liderada por la profesora Leonor Camargo, considero que] para la comunidad matemática, existe una diferencia muy fuerte entre argumentar y razonar. La argumentación es una parte práctica del discurso. Entendamos el discurso como esa parte oral o escrita, lo que yo quiero decir, a partir de un razonamiento. Este último, con la intención de persuadir a las demás personas sobre si lo que estoy diciendo es verdad o falso.	Transcripción asesoría. Marzo 5 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
DA05	La argumentación es como una cadena de argumentos y entonces, el argumento se divide en varias partes [...] Para decir que un argumento es válido debe que tener una estructura.	Transcripción asesoría. Marzo 5 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Elementos de un argumento
DA06	[...] [Habiendo revisado los apuntes del seminario Innovación/Investigación] Y entonces, la profesora Leonor Camargo dice [parafraseando lo reportado en los apuntes]: el razonamiento y la argumentación están estrechamente vinculadas. El razonamiento es lo que yo pienso y la argumentación son partes del discurso de ese razonamiento. Se debe entender el razonamiento como el producto de conectar los conocimientos, las experiencias y los saberes; la información que tengo en mi poder para explicar y entender lo que está sucediendo a mi alrededor. [...] Aquí hay una premisa: un argumento es un razonamiento, pero no todo razonamiento se puede convertir en un argumento.	Transcripción asesoría. Marzo 5 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación

Código	Dato	Fuente	Estado del conocimiento	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador
DA07	Pues creo que, en mi clase tengo que ser mucho más consciente cuando utilice esos términos [argumentar, explicar, justificar, validar]. Es decir, cuando yo le diga a un niño: “por favor, justifique su respuesta”, lo que realmente le estoy pidiendo es algo diferente a cuando yo le digo: “por favor argumente su respuesta”. Cuando le pido al niño que argumente su respuesta es que construya, entre comillas, una especie de discurso donde tenga ciertas características. Este, debe tener una concatenación de argumentos. Esos argumentos deben tener datos, una justificación y una conclusión. Caso contrario de cuando yo le digo: “justifique su respuesta”. Justificar es solamente que me diga qué parte teórica fundamenta la respuesta.	Transcripción asesoría. Marzo 5 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA08	Revisando los apuntes del seminario de Profundización en Matemáticas Elementales], lo que dice el Profesor Óscar Molina, se parece mucho más a lo que dice Toulmin (Flórez, 2016). El profesor Oscar Molina dice que la argumentación es el proceso colectivo e individual, de acuerdo con unas reglas compartidas que apuntan a concluir la veracidad de una aseerción.	Transcripción asesoría. Marzo 5 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
DA09	Razonar es diferente de argumentar, y adicionalmente es distinto de justificar. [...] el razonamiento es como lo más grande, porque viene del pensamiento. La argumentación es esa parte discursiva del razonamiento, y está compuesta por una cantidad de argumentos que lo justifican. Adicionalmente, los argumentos tienen una estructura lingüística de la cual hace parte la justificación. Y la justificación se conforma por esos componentes teóricos que dan validez o refutan lo que yo estoy diciendo. Es decir que, para la comunidad de educadores matemáticos, razonar, argumentar y justificar son completamente distintos.	Transcripción asesoría. Marzo 5 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA10	¿Cómo es esto de la relación argumentativa entre el profesor y los estudiantes? [...] Son esos momentos en los cuales el estudiante explica o expresa de una u otra manera lo que él piensa acerca de una situación, un concepto, una definición al profesor. Luego de esto, el profesor lo que hace es corregir algún error o empezar a mostrarle el camino por donde el estudiante puede llegar a esas definiciones que el profesor quiere. [...] es como entablar esa comunicación asertiva buscando mejorar el proceso argumentativo; de tal manera que cuando el estudiante se exprese frente a mí, él pueda crear argumentos, justificaciones, validaciones o explicaciones de la mejor manera posible.	Transcripción asesoría. Marzo 5 de 2021	Transición del 1 al 2	Interaccional	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que promueven la argumentación
DA11	Lo que entiendo por razón es: un resultado de ese proceso de razonamiento, que ocurre en nuestras cabezas. [Una razón] son esos pensamientos e ideas que tengo y que empiezo a conectar para dar forma al discurso.	Transcripción asesoría. Marzo 5 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA12	El argumento es, cuando tengo una situación y quiero, de una u otra manera, sustentarla. Entonces, el argumento es un resultado del proceso de argumentación.	Transcripción asesoría. Marzo 5 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
DA13	[Discutiendo acerca del significado de la palabra argumentación en la definición propuesta por León y Calderón (2003)] ¿Qué es una práctica? Para mí, la práctica es ese conjunto de acciones que se realizan de forma continuada y una práctica discursiva, es cuando yo estoy usando el discurso.	Transcripción asesoría. Marzo 5 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
DA14	[Discutiendo acerca del significado de la palabra argumentación en la definición propuesta por León y Calderón (2003)] ¿Qué es una práctica? [...] Para mí, [el término] práctica hace referencia a los diversos momentos que un profesor debe tener en cuenta [cuando planea] su quehacer diario. [Estos momentos] son el antes, el durante y el después de una clase. [La práctica] no se limita únicamente a lo que se realiza en el aula.	Transcripción asesoría. Marzo 5 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación

Código	Dato	Fuente	Estado del conocimiento	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador
DA15	La definición de León (2003), [sobre práctica discursiva], me dice que una práctica discursiva es una actividad verbal, social y racional.	Transcripción asesoría. Marzo 5 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
DA16	La argumentación es esa faceta discursiva del razonamiento. Adicionalmente, la argumentación es la faceta ostensible del razonamiento porque me permite ver lo que estoy razonando.	Transcripción asesoría. Marzo 5 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
DA17	La práctica discursiva son todas aquellas reglas constituidas, en un grupo único, en una comunidad específica, en un contexto particular y concreto, que posibilita un enunciado. Es decir, que cuando yo pertenezco a una comunidad, por ejemplo, a la comunidad matemática, entre todos debemos tener unas reglas compartidas.	Transcripción asesoría. Marzo 12 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
DA18	Una expresión discursiva es aquella parte oral o escrita que un emisor envía para generar una comunicación. [Esta comunicación es] explícita y evitando ambigüedades, impresiones personales y emociones. Es decir, se trata de concretar las ideas y los datos de la manera más objetiva posible.	Transcripción asesoría. Marzo 12 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
DA19	Pero [...] [las definiciones de] práctica y expresión [tienen] una pequeña diferencia. La práctica es lo que lleva a la acción y la expresión son esas oraciones que me permiten formar [un] discurso.	Transcripción asesoría. Marzo 12 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
DA20	La argumentación es el proceso y el argumento es el resultado. Entonces, la argumentación [está] ligada a la práctica discursiva y el argumento [está relacionado] a la expresión discursiva.	Transcripción asesoría. Marzo 12 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
DA21	Una representación geométrica no es una proposición, porque de un gráfico no puedo decir si es falso o verdadero. La representación [me permite] obtener datos, aseveraciones y hasta de pronto, empezar a generar un argumento.	Transcripción asesoría. Marzo 19 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA22	Un argumento es una expresión discursiva, tanto escrita como oral. Entonces, [...] la parte gestual no entra a formar [parte de] un argumento. [Lo gestual puede ser parte de un argumento] cuando el niño lo describe o [...] [lo] verbaliza, más no cuando está representado con los dedos o con un dibujo.	Transcripción asesoría. Marzo 19 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
DA23	Cuando se analizan argumentos en las transcripciones de los estudiantes, se puede presentar una garantía implícita, una aseveración o unos datos implícitos; pero no puede estar todo implícito en el argumento.	Transcripción asesoría. Marzo 19 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Elementos de un argumento
DA24	El argumento no solamente se compone de tres elementos [dato, aseveración y garantía], no es una cosa triádica. Como mínimo [el argumento] debe tener esa triada y [se debe] poder identificar.	Transcripción asesoría. Marzo 19 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Elementos de un argumento
DA25	La exploración me permite empezar a decantar lo que estoy razonando. Los razonamientos son los que finalmente me van a empezar a generar argumentos.	Transcripción asesoría. Marzo 19 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA26	[Al revisar a León y Calderón (2001)] similitud entre una demostración y una validación. La demostración, desde la comunidad de educadores matemáticos, se entiende como un proceso más formal [...]. Con la demostración estoy validando.	Transcripción asesoría. Marzo 19 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA27	La definición de validación depende del contexto en donde me desenvuelva. Por ejemplo, en la Comunidad de matemáticos, una demostración es algo muy formal y nosotros, cuando iniciamos en la licenciatura en matemáticas, la demostración se hacía a dos columnas y tal vez está no sea tan formal como la de ellos.	Transcripción asesoría. Marzo 19 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación

Código	Dato	Fuente	Estado del conocimiento	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador
DA28	La demostración es una validación.	Transcripción asesoría. Marzo 19 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA29	La relación entre la demostración y la argumentación es que la demostración es la concatenación de argumentos deductivos.	Transcripción asesoría. Marzo 19 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA30	[Cuando los estudiantes explican la solución de] un problema [por medio de un EGD], ellos mueven y arrastran [los puntos de la construcción] hasta mostrar que [...] se cumplen con las condiciones dadas [en el enunciado del problema].	Transcripción asesoría. Marzo 19 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA31	Cuando justifico comienzo a buscar dentro de la teoría [aceptada] por la comunidad. Por ejemplo, la definición de mediatriz, en una [comunidad específica], puede ser el lugar geométrico que equidista de los extremos de un segmento. En otra [comunidad], la mediatriz [es] una recta perpendicular a un segmento, que pasa por el punto medio de este. Recurriendo a estos conceptos de la teoría es que se puede realizar la justificación.	Transcripción asesoría. Marzo 19 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA32	Validar es determinar la validez de una aseveración postulada, a partir de un sistema de conocimientos y normas [que] dependen de la comunidad en la que se desarrolla.	Transcripción trabajo autónomo. Marzo 23 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA33	La diferencia entre argumentar y explicar se identifica en la función de cada proceso. [La función de] la explicación es hacer comprender, en cambio, la [función] de la argumentación es convencer o persuadir.	Transcripción trabajo autónomo. Marzo 23 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA34	La explicación establece una relación asimétrica porque hay alguien que se reconoce con autoridad y otro que se reconoce sin autoridad. En cambio, la argumentación es una relación simétrica, ya que el locutor y el interlocutor entran en una discusión desde el mismo plano y con el mismo estatus [frente al conocimiento].	Transcripción trabajo autónomo. Marzo 23 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA35	[Aunque los procesos de argumentación, explicación, justificación y validación] tienen nombres distintos [...] son muy parecidos, en el sentido que todos vienen del proceso de razonar. [...] Son minucias lo que los diferencian, [...] lo supremamente importante es la finalidad del proceso de argumentar. Si yo no colocó la finalidad del proceso de argumentar, simplemente, se puede decir que la explicación y la argumentación son lo mismo, y no lo son.	Transcripción trabajo autónomo. Marzo 23 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA36	La definición de explicación es prácticamente la misma definición de la argumentación, es decir, son procesos discursivos que buscan o intentan justificar. [...] A diferencia de que, en la explicación ya no se intenta convencer ni persuadir al otro. [En la explicación] lo que se intenta es informar al otro ampliando lo que la otra persona reconoce, pero sin involucrar la persuasión.	Transcripción asesoría. Marzo 26 de 2021	Transición del 1 al 2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA37	[Cuando buscamos en el diccionario de la RAE el significado de] argumentar, validar, explicar y justificar, nos damos cuenta de que “son sinónimos” porque [...] están relacionadas con el proceso del razonamiento.	Transcripción Sesión 1. Grupo de estudio. Abril 27 de 2021	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación

Código	Dato	Fuente	Estado del conocimiento	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador
DA38	Nos hemos dado cuenta de que, definitivamente, el uso del lenguaje dentro de una comunidad es supremamente importante. [No se puede dar una instrucción al niño sin conocer la finalidad de los términos que se usan]. Sin esta precisión, cualquier respuesta del niño puede estar bien o mal porque el [profesor es quién] juzga la respuesta, sin tener claro lo que está pidiendo.	Transcripción Sesión 1. Grupo de estudio. Abril 27 de 2021	2	Interaccional	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que promueven la argumentación
DA39	En algunos casos, cuando las clases están [mediadas por EGD], las justificaciones provienen de GeoGebra. Por ejemplo, nos damos cuenta de que simplemente con algo visual el niño me está justificando, [...] [cuando] nos dice "yo moví este vértice y vean [en la figura representada en la pantalla] cómo la congruencia se mantiene".	Transcripción Sesión 1. Grupo de estudio. Abril 27 de 2021	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA40	[El profesor] puede asumir que para niños de segundo, tercero o cuarto de primaria, lo gestual hace parte de la justificación. Cuando los niños señalan con los dedos o dicen: "mire profe, [las líneas] son cómo los lados opuestos del tablero" [...] El profesor puede [interpretar] que son [líneas] paralelas. [El profesor] puede asumir que el niño con sus expresiones [está justificando] y es válido. [Esto] puede ser tomado como una garantía implícita.	Transcripción Sesión 1. Grupo de estudio. Abril 27 de 2021	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA41	En la comunidad [de práctica] de grado noveno, [cuando un estudiante] hace una señal de cruz con los dedos y dice "profe, es que es así"; [el profesor puede decirle] "no le valgo [la respuesta]", porque las normas de los niños de grado cuarto no son las mismas de un niño de noveno [...] Las normas atienden a un proceso histórico, un momento y un lugar específico.	Transcripción Sesión 1. Grupo de estudio. Abril 27 de 2021	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
DA42	[Los profesores] podemos aceptar algunas representaciones en entornos digitales como métodos de validación [...] Entonces, cuando un niño dice: "mire profe, es que pasa esto", [el profesor] como autoridad dentro de esta comunidad puede decir si lo que ha visto [en el entorno digital] es válido [...] La validación depende de [lo que la comunidad de práctica] defina como válido.	Transcripción Sesión 1. Grupo de estudio. Abril 27 de 2021	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA43	Las prácticas discursivas son entendidas como las actividades de comunicación que se realizan en el marco de una comunidad específica y que hacen posible un discurso, atendiendo a un conjunto de reglas, constituidas en un proceso histórico que se va definiendo en una época concreta.	Libreto sesión 1. Grupo de estudio	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
DA44	La expresión discursiva es aquella enunciación escrita u oral, que se realiza en el marco de la práctica discursiva, en el que el emisor trata de generar una comunicación eficaz evitando los datos ambiguos y las impresiones personales. La enunciación del tema debe ser clara desde el principio y las ideas que se van a expresar deben poseer una ordenación lógica.	Libreto sesión 1. Grupo de estudio	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
DA45	[El razonamiento es una] actividad intelectual que busca manipular la información dada o adquirida para indagar, interpretar situaciones, determinar formas de proceder, relacionar, explicar, justificar, etc.; atendiendo a reglas de un sistema de conocimientos y experiencias.	Libreto sesión 1. Grupo de estudio	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA46	[La explicación es una] práctica discursiva que busca, por medio de razones, describir un objeto de conocimiento o hecho particular. Su función es dar claridad y ejemplificar a partir de una ampliación cualitativa de la información. La explicación establece una relación asimétrica, ya que el receptor reconoce en el emisor una autoridad frente al conocimiento.	Libreto sesión 1. Grupo de estudio	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA47	La explicación comprendida como un proceso comunicativo entre emisor y receptor, busca extender la comprensión de un hecho, fenómeno o concepto, más no convencer de forma intensional a otra persona. Por medio de la explicación, el emisor procura que el receptor del mensaje visualice algunas cualidades o puntos de vistas adicionales de lo que se busca explicar.	Libreto sesión 1. Grupo de estudio	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA48	[La justificación es una] práctica discursiva que permite encontrar razones para garantizar la veracidad de una aserción sobre un objeto de conocimiento o hecho particular, en el marco de un conjunto de	Libreto sesión 1. Grupo de estudio	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre

Código	Dato	Fuente	Estado del conocimiento	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador
	proposiciones aceptadas por una comunidad. Las razones deben ser sólidas, coherentes, pertinentes y precisas.				términos afines a la argumentación
DA49	[Las razones de una justificación] pueden ser parte de un sistema teórico, provenir de algún miembro experto o de autoridad en la comunidad, o por medio de construcciones en EGD. Esto, con la finalidad de soportar la veracidad de una aserción.	Libreto sesión 1. Grupo de estudio	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA50	[La argumentación es una] práctica discursiva que pretende convencer o persuadir de forma razonada a otro(s) sobre la veracidad de una aserción. La argumentación establece una relación simétrica, ya que el emisor y el receptor desarrollan una discusión en un mismo nivel del conocimiento. El producto de este proceso es el argumento.	Libreto sesión 1. Grupo de estudio	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
DA51	La argumentación es una faceta discursiva del razonamiento, en tanto me permite expresar lo que se procesa en el pensamiento. Toda argumentación es un razonamiento, pero no todo razonamiento es una argumentación.	Libreto sesión 1. Grupo de estudio	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
DA52	[Un argumento es una] expresión discursiva que se emite con el propósito de convencer, persuadir, disentir o soportar la validez de una proposición. Su estructura, como mínimo, es ternaria y se compone de tres proposiciones: dato, aserción y garantía. La aserción es una proposición cuyo contenido o verdad se está considerando. El dato es hecho o información factual, que se invocan para justificar y validar la aserción. La garantía es la proposición que establece la conexión entre el dato y la aserción; esta puede ser un principio o una regla. Las proposiciones pueden ser implícitas, pero para precisar el argumento debe ser posible identificarlas.	Libreto sesión 1. Grupo de estudio	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
DA53	Ejemplo de [una garantía implícita] son las expresiones que un profesor de primaria acepta como parte de un argumento, como lo pueden ser los gestos o cualidades de un objeto del conocimiento.	Libreto sesión 1. Grupo de estudio	2	Epistémica	Elementos de un argumento
DA54	[La validación es un] proceso que proporciona las garantías para decidir acerca de la veracidad de una aserción. Para validar, se deben apropiar recursos técnicos y competencias argumentativas como símbolos, conceptos y prácticas, que permitan soportar la validez de una proposición frente a un conjunto de proposiciones aceptadas socialmente.	Libreto sesión 1. Grupo de estudio	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA55	[Un] argumento [...] colectivo se produce como resultado del proceso de argumentación llevado a cabo [en un conjunto de intervenciones de una comunidad de práctica].	Libreto sesión 1. Grupo de estudio	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación
DA56	A pesar de que [explicar, justificar, argumentar y validar] tienen relación con el proceso del razonamiento, existen entre ellos diferencias en sus funciones. Cada uno de estos procesos posee una intensidad específica que le permite al profesor de matemáticas generar en sus estudiantes una forma concreta de razonar y actuar.	Libreto sesión 1. Grupo de estudio	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA57	Si analizamos la estructura de las intervenciones y las relaciones entre los procesos abordados, podemos afirmar que la explicación, la justificación, la argumentación y la validación están desarrollados de forma lineal. Lo anterior, se origina desde una aserción, que si se hace necesario se explica para luego ser justificada y finalmente ser validada por medio de argumentos resultantes del proceso de argumentación.	Libreto sesión 1. Grupo de estudio	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación
DA58	La explicación busca que se amplíen las características y atributos de un proceso de construcción, de un objeto o hecho matemático, que hace parte de una aserción. Luego con esas esas características y atributos que se han explicitado, se busquen las garantías que validan la aserción que pasa a ser las justificaciones de esta. Estas justificaciones pueden convertirse en parte de la garantía de un argumento que se construye con la aserción y los datos. Todo este proceso es lo que llamamos argumentación.	Libreto sesión 1. Grupo de estudio	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación

Tabla 5: Datos sobre tareas en Ciclo 2

Código	Dato	Fuente	Estado del conocimiento	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador
DT01	Cuando vamos a diseñar tareas, quisiéramos que, cuando le digamos al niño explique [...] sepamos exactamente qué es lo que él me tiene que contestar.	Transcripción Sesión 1. Grupo de estudio. Abril 27 de 2021	2	Epistémica	Vocabulario especializado sobre tareas
DT02	[En la explicación] el profesor asume un rol de receptor, permitiendo a los estudiantes adquirir el papel de emisores “expertos en el asunto”.	Libreto sesión 1. Grupo de estudio	2	Interaccional	Función de las interacciones durante el desarrollo de una tarea

Tabla 6: Datos sobre argumentación en Ciclo 3

Código	Dato	Fuente	Estado del conocimiento	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador
TA01	Las garantías [que obtiene un estudiante] son diferentes [...] cuando [estas] surgen [durante el proceso de] construcción, que cuando [emergen del proceso de] exploración.	Transcripción trabajo autónomo. Septiembre 7 de 2021	Transición del 2 al 3	Epistémica	Elementos de un argumento

Tabla 7: Datos sobre tareas en Ciclo 3

Código	Dato	Fuente	Estado del conocimiento	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador
TT01	Cuando [se realizan tareas] con lápiz y papel, [los estudiantes] casi no hacen exploraciones en la construcción; y eso [...] les dificulta ver [invariantes]. No se tiene esa facilidad de las herramientas [digitales].	Transcripción asesoría. Agosto 27 de 2021	Transición del 2 al 3	Mediacional	Impacto de los materiales y recursos en una tarea
TT02	[...] Nos damos cuenta de que los requisitos [de una tarea] son conocimientos que el estudiante necesita. [Por ejemplo] conocimientos como recta, segmento, relación entre rectas [...] triangulo o tipos de triangulo [son conocimientos necesarios para abordar una tarea] [...] [De acuerdo con la tarea,] si el estudiante debe tener una destreza con una herramienta digital, entonces, la destreza también sería parte de los requisitos.	Transcripción trabajo autónomo. Septiembre 4 de 2021	Transición del 2 al 3	Epistémica	Elementos de la tarea
TT03	El propósito [de una tarea] es [el objetivo por el cual] el profesor [diseñó] la tarea. [Lo que se busca con la tarea] [...] tiene que estar relacionado con lo que se espera que el estudiante aprenda.	Transcripción trabajo autónomo. Septiembre 4 de 2021	Transición del 2 al 3	Epistémica	Elementos de la tarea
TT04	Las expectativas de aprendizaje [es aquello] [...] que el profesor espera que el estudiante logre aprender o desarrollar. Y también, de pronto, superar algunos errores o dificultades. La tarea no siempre tiene que apuntar únicamente a que el estudiante desarrolle [algo específico], sino que también el estudiante supere ciertas cosas que de pronto [el profesor] se ha dado cuenta en sus sesiones de clase.	Transcripción trabajo autónomo. Septiembre 4 de 2021	Transición del 2 al 3	Epistémica	Elementos de la tarea
TT05	[...] En general, la formulación de una tarea matemática describe un contexto, pero proporciona una información inicial y requiere que los estudiantes produzcan una información final como solución.	Transcripción trabajo autónomo. Septiembre 4 de 2021	Transición del 2 al 3	Epistémica	Elementos de la tarea

Código	Dato	Fuente	Estado del conocimiento	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador
TT06	Los materiales se distinguen de los recursos porque, [los recursos] se diseñan con fines didácticos. El tablero tradicional o electrónico, el papel y el lápiz son recursos. Mientras que, el geoplano, GeoGebra o el dominó de fracciones [son materiales porque] fueron diseñados para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.	Transcripción trabajo autónomo. Septiembre 4 de 2021	Transición del 2 al 3	Mediacional	Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea
TT07	[En el diseño de una tarea el profesor] tiene que prever [las] interacciones porque a partir de eso, él puede promover dos cosas: fomentar el aprendizaje y constatar en la práctica cómo se desarrolla el aprendizaje; [así como la forma en la que] él puede influir.	Transcripción trabajo autónomo. Septiembre 4 de 2021	Transición del 2 al 3	Interaccional	Función de las interacciones durante el desarrollo de una tarea
TT08	[Una tarea abierta permite] diferentes procedimientos matemáticos que posibilitan [...] llegar a la respuesta. [Una tarea con] respuesta abierta es cuando una tarea presenta la posibilidad de que los estudiantes [encuentren] varios tipos de respuesta.	Transcripción trabajo autónomo. Septiembre 7 de 2021	Transición del 2 al 3	Epistémica	Tipos de tareas
TT09	[...] una tarea abierta, donde [los estudiantes] pueden dar su opinión de lo que están viendo [y] no hay una respuesta única, les da libertad de hacer cosas interesantes [...] Definitivamente [las] tareas [abiertas] facilitan muchas interacciones, muchas cosas que los estudiantes hacen en clase. Su actividad se vuelve mucho más rica.	Charla de cierre Ciclo 3. Septiembre 25 de 2021	3	Epistémica	Tipos de tareas
TT10	La preparación [de una tarea] es un acierto, prever el tipo de acciones y el tipo de actividad que el niño va a realizar, porque el profesor puede comenzar a vislumbrar la gestión, el tipo de preguntas que van a surgir permite saber cómo reaccionar frente a esas preguntas. No es quedarse ahí esperando una pregunta y en ese momento imaginar una respuesta, sino que definitivamente el profesor ya sabe cómo reaccionar. No es aprenderse de memoria la respuesta sino cómo actuar frente a cada situación de la mejor manera inmediatamente.	Charla de cierre Ciclo 3. Septiembre 25 de 2021	3	Epistémica	Importancia del diseño de una tarea
TT11	Definitivamente fue un acierto haber identificado cómo se iba a comportar nuestra comunidad de práctica, frente a los niveles del modelo propuesto, que es adaptación del modelo de Gómez (2015) con la propuesta de Camargo, Samper y Perry (2006). Esto nos permitió caracterizar y clasificar el contexto de los estudiantes, ya que permite enfocarse en esas habilidades que el estudiante tiene y facilitar el desarrollo de las que no tiene [...] Permitir identificar y caracterizar la comunidad de práctica, que Gómez no tenía muy presente. Para mí es un PLUS y es supremamente importante.	Charla de cierre Ciclo 3. Septiembre 25 de 2021	3	Epistémica	Importancia del diseño de una tarea
TT12	Entre más clara sea la instrucción, los estudiantes lo pueden entender mucho más fácil y lo pueden hacer mucho más fácil. [...] Es importante que la instrucción sea con lenguaje sencillo y se dé el paso a paso de lo que tiene que hacer, que la lean e identifiquen que tienen que hacer en cada uno de los numerales y digan: bueno, puedo hacerlo.	Charla de cierre Ciclo 3. Septiembre 25 de 2021	3	Epistémica	Elementos de la tarea
TT13	El cambio de niveles [propuestos], no se logra con una sola tarea, porque esto va ligado a la experiencia que el estudiante vaya adquiriendo. El hecho de hacer una construcción no me garantiza que todas las pueda hacer. El cambio de nivel no se logra únicamente con una tarea de nivel cero, otra de nivel uno, nivel dos y así sucesivamente, y con 6 tareas ya son expertos, no. Entonces, esto se logra es con la experiencia y con lo que vaya percibiendo el profesor de su grupo, cada vez que diseñé una tarea, debo tener en cuenta el nuevo contexto puesto [que] voy a empezar a ver cosas diferentes de los estudiantes.	Charla de cierre Ciclo 3. Septiembre 25 de 2021	3	Epistémica	Importancia del diseño de una tarea
TT14	[Respecto] a los requisitos, se evidencia que para los profesores los temas necesarios para abordar la tarea, así como las destrezas que se buscan desarrollar o fortalecer en los estudiantes son el punto de partida para el diseño de una tarea.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Epistémica	Elementos de la tarea
TT15	[Una tarea es abierta porque] [...] permite a los estudiantes un desarrollo de estrategias para tener un acercamiento a la resolución de la tarea.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Epistémica	Tipos de tareas

Código	Dato	Fuente	Estado del conocimiento	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador
TT16	Con respecto al manejo de los errores en las dos tareas [propuestas por los profesores, antes de MDM y en el seminario PME], en ninguna se tienen en cuenta los errores que pueden surgir a partir de la actividad matemática de los estudiantes. [Esto lo afirman puesto que, para autores como] Jiménez y Carreño (2018) esto, es de suma importancia puesto que la gestión del error tiene la finalidad de asegurar que las ideas/respuestas equivocadas se puedan utilizar para construir el conocimiento matemático. Por lo anterior, [los profesores] consideran que la planificación explícita de las posibles soluciones, así como de los errores, posibilitan la forma gestionar las diferentes respuestas y postura de los estudiantes para promover la argumentación.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Epistémica	Importancia del diseño de una tarea
TT17	[Respecto al contexto de una tarea, los profesores afirman que] al iniciar el diseño de una tarea, el profesor debe tener en cuenta dos aspectos que definen al contexto: la comunidad de práctica y la ubicación geo temporal. [Los profesores se refieren] a la comunidad de práctica, como un conjunto de individuos que comparten unas reglas que median el accionar de los integrantes, unas expresiones discursivas particulares, un sistema teórico constituido en conjunto, unas normas sociales que favorecen la interacción y un espacio de encuentro, ya sea presencial o virtual.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Epistémica	Elementos de la tarea
TT18	[Respecto al contexto de una tarea, los profesores afirman que] al iniciar el diseño de una tarea, el profesor debe tener en cuenta dos aspectos que definen al contexto: la comunidad de práctica y la ubicación geo temporal. [...] [Para los profesores] el aspecto geo temporal [son] las diferentes características de la población con respecto al espacio temporal compartido, el ámbito social y lo económico.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Epistémica	Elementos de la tarea
TT19	Los requisitos de la tarea hacen referencia a aquellos conocimientos y destrezas previos que, de acuerdo con el nivel educativo, los estudiantes necesitan para abordar una situación matemática. Estos, se vinculan directamente con las metas y el contenido matemático de la tarea (Gómez et al., 2015). Los requisitos deben ir vinculados directamente con los procesos matemáticos de construcción, visualización, exploración y verificación, en cada uno de sus niveles de desarrollo.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Epistémica	Elementos de la tarea
TT20	La formulación de la tarea se refiere al texto o instrucción que el profesor proporciona a los estudiantes y describe una situación matemática, proporciona una información inicial y requiere que los estudiantes produzcan una información final como su solución (Gómez et al., 2015). Estas instrucciones deben tener en cuenta el contexto previamente analizado y el nivel de los procesos vinculados.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Epistémica	Elementos de la tarea
TT21	El lenguaje utilizado para la presentación de la tarea debe ser cercano y claro para los estudiantes, evitando tecnicismos innecesarios.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Epistémica	Importancia del diseño de una tarea
TT22	Un recurso es cualquier medio que se pueda implementar en los procesos de enseñanza – aprendizaje, por ejemplo, el tablero o el papel y lápiz. Un material se diseña con fines didácticos. GeoGebra o el Geoplano son ejemplos de un material. Para ello se debe tener en cuenta el contexto en lo correspondiente a lo geo temporal.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Mediacional	Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea
TT23	Implementar una tarea mediada por el uso de un EGD como GeoGebra, requiere que el profesor analice la infraestructura de la institución educativa. Algunos materiales requieren de una preparación previa por parte del profesor y los estudiantes. En otros casos, se debe tener en cuenta el acceso al material, ya que algunos son de acceso libre y otros son de pago.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Mediacional	Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea

Código	Dato	Fuente	Estado del conocimiento	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador
TT24	La eficacia hace referencia a si el material o recurso puede contribuir al logro de la meta planteados al inicio del diseño.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Mediacional	Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea
TT25	[...] [En el diseño de una tarea, el profesor] debe analizar si los materiales y recursos seleccionados son pertinentes e indispensables para la solución de la tarea. Por ejemplo, no es eficaz el diseño de una tarea centrado en un EGD, si la solución más práctica se obtiene por medio de otro recurso como lápiz y papel.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Mediacional	Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea
TT26	Se puede entender la actividad como el conjunto de acciones desarrolladas por los participantes, en el contexto particular de la comunidad de práctica. La actividad se reconoce en las acciones de los participantes en aras de la consecución de la solución de la tarea, en esta actividad se deben considerar las posibles acciones, tanto asertivas como erróneas, que los estudiantes podrían realizar en el marco de la instrucción presentada por el profesor.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Epistémica	Vocabulario especializado sobre tareas
TT27	La actividad matemática le permite al profesor identificar en que momentos de la tarea se pueden generar argumentos en los estudiantes. Si miramos los procesos de construcción, visualización, exploración, conjeturación y verificación, podemos afirmar que la exploración que los estudiantes realizan a partir de una construcción geométrica se evidencia por medio de la conjeturación y la verificación.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Epistémica	Vocabulario especializado sobre tareas
TT28	Cuando el profesor diseña una tarea que aborda contenido matemático, la interacción que se realiza por parte de los miembros de la comunidad de practica se torna relevante. La importancia de prever las formas de interacción que se pueden dar cuando los estudiantes abordan una tarea radica en la posibilidad de detectar aciertos y posibles errores en la actividad matemática.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Interaccional	Función de las interacciones durante el desarrollo de una tarea
TT29	Al momento de prever las interacciones que sucederán durante el desarrollo de la tarea, es aconsejable postular diversas preguntas orientadoras que le permitan a los estudiantes superar errores o momentos de frustración y bloqueos que impidan obtener la solución. De igual manera, las preguntas se pueden diseñar con la intencionalidad de obtener información que sea relevante para el profesor. Por ejemplo, se puede preguntar a un estudiante si un punto de una construcción es móvil o fijo; buscando detectar si existe una destreza para realizar construcciones robustas que garanticen una situación matemática.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Interaccional	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase tendientes a superar un error, obstáculo o dificultad con respecto al desarrollo de una tarea
TT30	Un factor relevante en la interacción, son las diversas formas de agrupamiento que un profesor puede plantear para el desarrollo de una tarea o partes de esta. El profesor debe tener presente que las interacciones van relacionadas con la forma de agrupamiento. Esto, se debe a que aprender matemáticas implica la capacidad de proponer soluciones a un problema, comunicar esas soluciones, reconocer las soluciones de otras personas y negociar significados para llegar a acuerdos.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Interaccional	Función de las interacciones durante el desarrollo de una tarea

Tabla 8: Datos sobre tareas de argumentación en Ciclo 3

Código	Dato	Fuente	Estado del conocimiento	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador
TTA01	Si [en una tarea] se le da [al estudiante] la construcción, los argumentos me tienen que salir en la exploración. O sea, si yo quiero generar problemas en donde la exploración [permita el surgimiento de argumentos], tengo que [otorgarle las] construcciones [al estudiante].	Transcripción trabajo autónomo. Septiembre 7 de 2021	Transición del 2 al 3	Epistémica	Tipos de problemas y su relación con los tipos de argumentos
TTA02	[...] Un problema que me permite diferentes procedimientos, respuestas y posturas, es una tarea más rica en el momento de la socialización. [Puesto que,] tengo que convencer a los demás [de la veracidad de mi respuesta] y [las otras personas pueden] [...] intentar convencerme [de la veracidad de su trabajo].	Transcripción trabajo autónomo. Septiembre 7 de 2021	Transición del 2 al 3	Epistémica	Tareas que favorecen la argumentación
TTA03	Hay dos tipos de tarea, la tarea abierta y la tarea cerrada. La tarea cerrada, es de tipo algorítmica o memorística. [Ejemplo de esto son los enunciados del tipo:] utilice el concepto o resuelva el ejercicio. Una tarea abierta es todo lo contrario, es aquella que facilita procesos, busca la argumentación y la solución de problemas. El problema no es de solución inmediata, se tiene que buscar una estrategia, usar conocimientos [previos] y [permite la adquisición de] nuevos conocimientos y habilidades.	Transcripción Asesoría. Septiembre 10 de 2021	Transición del 2 al 3	Epistémica	Tareas que favorecen la argumentación
TTA04	Según Ortiz y Carreño (2019) una tarea de argumentación debe tener tres características muy importantes. La primera característica es poder promover la comunicación, eso significa que al momento del abordaje de la tarea se pueden abordar de diferentes formas; si hay una única forma, puede promover la argumentación, pero no de la mejor manera. La segunda característica es tener diversas soluciones, se puede llegar a la misma respuesta, pero de diferentes formas. La tercera característica es crear polémica porque la argumentación se trata de convencerse a uno mismo y a los demás.	Transcripción Asesoría. Septiembre 10 de 2021	Transición del 2 al 3	Epistémica	Tareas que favorecen la argumentación
TTA05	[En una] tarea [que] promueve la explicación [más que la argumentación] [...] [la construcción y] la exploración [son guiadas y] todos los niños terminan [realizando] lo mismo. [...] Entonces, cuando llega el momento de [la] socialización [...] solamente una persona va a intervenir. [...] Esta persona va a narrar lo que sucedió, y todos los demás van a decir "sí, pasó eso".	Transcripción Asesoría. Septiembre 10 de 2021	Transición del 2 al 3	Epistémica	Procesos involucrados en una tarea que favorece la argumentación
TTA06	[Ortiz y Carreño (2019)] dicen que el error se puede potencializar para que la tarea lleve al proceso argumentativo. [...] Si el niño hizo la exploración mal, [el profesor] puede [indagar] qué pasó, y de esa manera, hacer que los otros niños puedan crear un contraargumento y puedan hacerle entender al niño cuál fue su error. [...] En ese momento [surge] la argumentación.	Transcripción Asesoría. Septiembre 10 de 2021	Transición del 2 al 3	Interaccional	Interacciones que favorecen la argumentación en la actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea
TTA07	La [tarea propuesta fuera de la MDM], aunque pareciese que su instrucción promueve la argumentación, no es una tarea rica en argumentación, puesto que no permite promover la discusión, los contraejemplos y en particular, no permite el convencimiento de los demás. [...] En la socialización realmente [lo que se] busca es la explicación de la situación por parte del estudiante.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Epistémica	Tareas que favorecen la argumentación
TTA08	Con respecto a la [tarea propuesta en el seminario PME de la MDM], los profesores pueden observar que promueve los procesos de argumentación. [Esto, puesto que para autores como] Solar y Deulofeu (2016) una tarea promueve la argumentación debe tener las siguientes condiciones: motivar en los estudiantes diferentes procedimientos, respuestas abiertas y posturas diferentes.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Epistémica	Tareas que favorecen la argumentación
TTA09	Las metas de una tarea matemática escolar que promuevan la argumentación deben ir enfocadas a los procesos vinculados a esta, como lo es la conjeturación o la verificación. A esto añadimos, que los procesos de construcción, visualización y exploración realizan un trabajo implícito en cumplimiento de la meta.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Epistémica	Procesos involucrados en una tarea que favorece la argumentación

Código	Dato	Fuente	Estado del conocimiento	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador
TTA10	Se recomienda que en el desarrollo de la tarea se realice un recorrido por cada uno de los procesos de construcción, visualización, exploración, conjeturación y verificación; enfatizando aquel proceso en el cual se busca desarrollar un mayor nivel de destreza. Por ejemplo, al momento de realizar la exploración se puede pedir a los estudiantes reportar cada una de las acciones realizadas y su finalidad. En el proceso de conjeturación, en niveles iniciales, el profesor puede usar plantillas discursivas que permitan la construcción guiada de una conjetura.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Epistémica	Procesos involucrados en una tarea que favorece la argumentación
TTA11	El profesor debe saber cuáles son las etapas de la tarea que ha diseñado y como estas etapas benefician el proceso de argumentación. Los agrupamientos como individual, en parejas, en pequeño grupo o gran grupo promueven diferentes interacciones que favorecen el surgimiento de partes de un argumento o la conformación de argumentos individuales o grupales.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Interaccional	Interacciones que favorecen la argumentación en la actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea
TTA12	[...] Los momentos de interacción promueven el surgimiento de argumentos, ya sea de forma explícita o con algunos de sus elementos de forma implícita. Por ejemplo, un estudiante cuando defiende su postura puede presentar de forma explícita los datos que tomó en cuenta y, manifestar una aserción que se soporta por una garantía de forma implícita, que todo el grupo acepta como verídica.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Interaccional	Interacciones que favorecen la argumentación en la actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea
TTA13	[...] El proceso argumentativo lo fundamentamos en cinco procesos matemáticos: construcción, visualización, exploración, conjeturación y verificación. Desde nuestro punto de vista, estos procesos promueven en los estudiantes el surgimiento de argumentos durante la actividad matemática. Así mismo, para Camargo et al. (2006) la actividad demostrativa se concreta en una serie de acciones de índole heurística involucradas en los últimos cuatro procesos. En nuestro caso, vemos prudente anexar el proceso de construcción, ya que permite a los estudiantes poner en juego diversos conocimientos; tales como definiciones de objetos geométricos para buscar que una construcción garantice una situación propuesta.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Epistémica	Procesos involucrados en una tarea que favorece la argumentación
TTA14	En el momento donde el estudiante realiza una construcción e interactúa con ella, puede tomar decisiones a partir de la realimentación que el programa le otorga. En la exploración con la herramienta digital se originan argumentos o partes de argumentos, Por ejemplo, la detección de una invariante como puede ser la condición geométrica de una figura para garantizar la solución de la situación planteada.	Documento: Formulación plan de acción Ciclo 3	3	Interaccional	Interacciones que favorecen la argumentación en la actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea

10.4 Anexo 4: Libreto Sesión 1 Grupo de Estudio sobre Argumentación – Ciclo 2

En este documento exhibimos cada una de las intervenciones de los expositores, la explicación de los momentos de la sesión y las posibles respuestas a cada una de las preguntas que prevemos podrán formular los participantes de la sesión 1 del grupo de estudio sobre argumentación. Para esto, utilizaremos diferentes nomenclaturas que permitirán identificar a quien corresponden cada una de las intervenciones. Los expositores los denotamos con EXP, los participantes con PAR y para posibles respuestas usaremos PR.

La estructura del documento la hemos dividido en cinco momentos: i). introducción; ii) desarrollo de una situación; iii) contextualización teórica; iv) análisis de una transcripción y v) conclusiones. En la introducción presentaremos el contexto de la sesión, la pregunta orientadora y la finalidad de esta. En cuanto al desarrollo, mostraremos una situación particular que permitirá a los participantes desarrollar una tarea en la cual se les pide argumentar, explicar, justificar y validar su respuesta con el objetivo de exteriorizar cada una de las definiciones personales sobre estos asuntos. Luego, en la contextualización teórica expondremos algunos referentes que presentan algunas definiciones de los asuntos que se abordaran en esta sesión. Además, expondremos nuestras definiciones, buscando una institucionalización de los conceptos. En el cuarto momento, la actividad se desarrollará a partir de la presentación de una transcripción de algunas interacciones profesor – estudiantes (previamente diseñada), donde se aborda una posible solución a la situación propuesta en el segundo momento de la sesión. El objetivo de trabajar con la transcripción mencionada es identificar momentos en donde los estudiantes expliquen, justifiquen, validen o argumenten. Finalmente, en el quinto momento, a modo de conclusión, presentaremos una posible respuesta a la pregunta inicial de la sesión.

A continuación, presentamos las interacciones previstas para la sesión:

Momento 1 (15 minutos):

Diapositiva 1

EXP: Buenas tardes a todos (*los expositores se presentan*) y gracias por asistir a esta primera sesión del grupo de estudio sobre argumentación. Antes de iniciar, nos gustaría que cada uno se presentara de forma voluntaria y sucinta.

EXP: La conformación de este grupo de estudio hace parte de la investigación que estamos realizando con mi compañero en el marco de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional.

Diapositiva 2

EXP: En nuestra investigación estamos abordando la transformación del conocimiento didáctico matemático de nosotros como profesores respecto a cuatro asuntos: tareas, Entornos de Geometría Dinámica, argumentación y exploración. Por el momento, hemos detectado que la argumentación fue uno de los asuntos al que menos nos referimos cuando aludimos a ese tipo de conocimiento, y por ende hay menos evidencias de la transformación de esto. De igual manera, en nuestros discursos y producciones realizados durante la investigación, no existe una clara diferenciación entre los conceptos de explicar, justificar, validar y argumentar. En realidad, usamos esas palabras como sinónimos. Esto se hizo evidente en algunas de las tareas que proponíamos a nuestros estudiantes utilizando libros de texto.

Diapositiva 3

EXP: En una búsqueda inicial (ingenua), identificamos los significados los términos anteriormente nombrados, en el diccionario de la Real Academia Española⁵. Gracias a esta búsqueda, relacionamos estos conceptos con el razonamiento. Pero, aun con esto, no hallamos una diferenciación clara de los términos, lo cual nos llevó a una indagación en el marco de la Educación Matemática.

Diapositiva 4

EXP: A partir de este panorama, les queremos presentar la pregunta orientadora que nos permitirá realizar el trabajo el día de hoy: *¿Cuáles son las diferencias entre argumentar, explicar, justificar y validar?* Esto, nace de la necesidad de identificar, con claridad, diferencias o similitudes en los asuntos presentados.

EXP: Antes de continuar, nos gustaría saber si tienen algunas preguntas o percepciones que nos quieran compartir sobre este interrogante.

PR1: Es común que en nuestros contextos educativos referenciamos a la argumentación y la justificación como sinónimos, esto debido a los libros de texto en los cuales los problemas que se presentan utilizan estos términos de forma común. De igual manera, la explicación.

PR2: La argumentación es un término que poco se usa, ya que en varias clases nos centramos en el desarrollo de actividades y problemas.

PR3: Me gustaría preguntar *¿De qué manera, diferenciar estos términos aporta a mis prácticas educativas? (en este caso, como expositores indicaremos que la respuesta a esta pregunta posiblemente se dará respuesta al final de la sesión).*

⁵ Definiciones de la RAE a los asuntos propuestos:

EXPLICAR: Declarar, manifestar, dar a conocer lo que alguien piensa.

JUSTIFICAR: Probar algo con razones convincentes, testigos o documentos.

VALIDAR: Dar fuerza o firmeza a algo, hacerlo válido.

ARGUMENTAR: Aducir, alegar, dar argumentos.

ARGUMENTO: Razonamiento para probar o demostrar una proposición, o para convencer de lo que se afirma o se niega.

Momento 2 (50 minutos):**Diapositiva 5**

EXP: Para este momento, les queremos presentar una situación particular. Nos tomaremos 10 minutos (de forma individual) para plantear una posible solución. Luego de esto, regresaremos para compartir algunas de ellas.

EXP: Queremos que nos compartan algunas de sus posibles soluciones a la situación planteada.

PR1: Prevemos que los participantes realizarán una construcción para evidenciar que los triángulos que se forman son congruentes debido a que sus ángulos internos correspondientes son iguales, como se puede observar en la Figura 1.

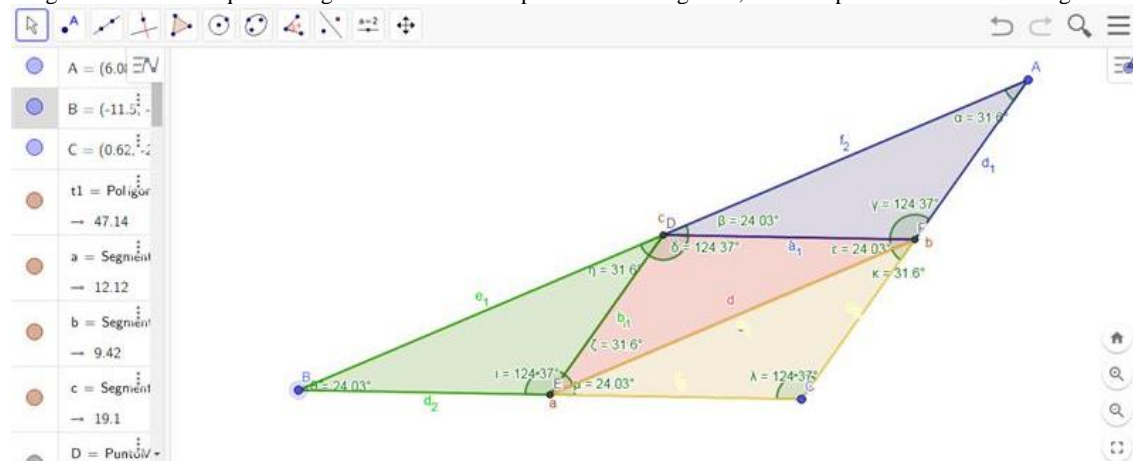


Figura 1: Posible solución 1 a la situación propuesta.

PR2: Prevemos que los participantes realizarán una construcción para evidenciar que los triángulos que se forman son congruentes debido a que sus lados correspondientes tienen igual medida, como se puede observar en la Figura 2.

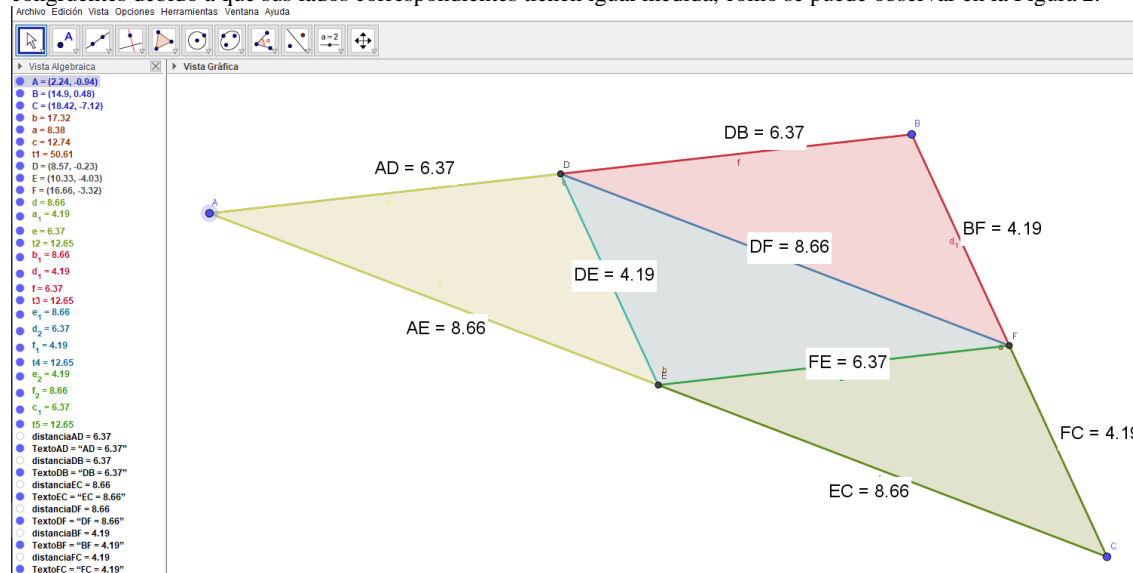


Figura 2: Posible solución 2 a la situación propuesta.

PR3: Prevemos que los participantes realizarán una construcción para evidenciar que los triángulos que se forman son congruentes usando ángulos correspondientes entre rectas paralelas, como se puede observar en la Figura 3.

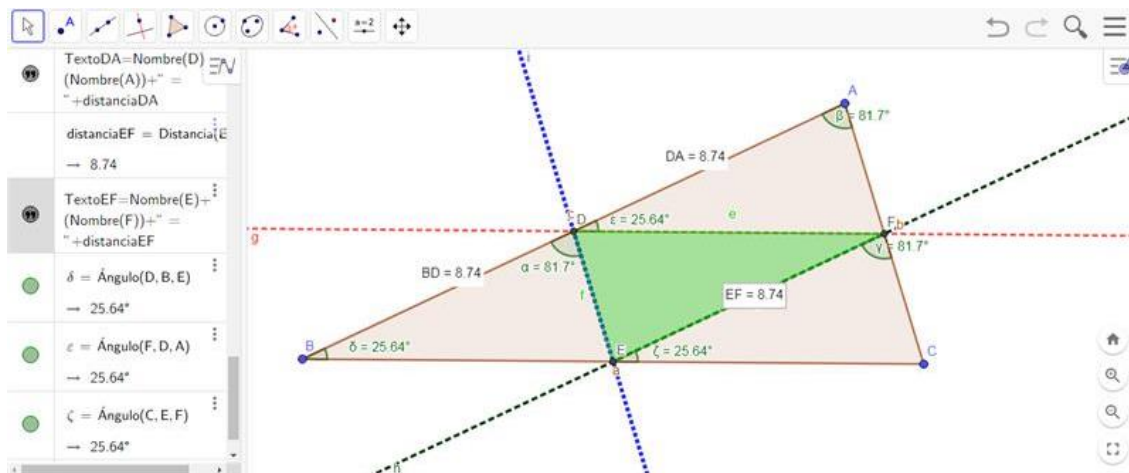


Figura 3: Posible solución 3 a la situación propuesta.

EXP: Tomando como referencia el trabajo realizado por usted, conteste las siguientes instrucciones como si fuera uno de sus estudiantes

- *Explica tu respuesta.*
- *Justifica tu respuesta.*
- *Valida tu respuesta.*
- *Argumenta tu respuesta.*

EXP: Para ello, tendremos 10 minutos. A medida que vayan terminando pueden levantar la mano.

Diapositiva 6

EXP: Para continuar, queremos que algunos nos compartan las respuestas que obtuvieron a las cuatro instrucciones presentadas anteriormente (*los expositores tendrán una diapositiva en blanco para incluir las participaciones*).

PR1: La explicación y la justificación son sinónimos, pues busca aclarar algún procedimiento o idea, donde un estudiante no hace explícita su respuesta. Por otro lado, la argumentación si tiene una forma particular, ya que debe tener 3 proposiciones, dato, aseercción y garantía, que busca convencer o persuadir sobre la veracidad de la aseercción.

PR2: La justificación busca sustentar con un conjunto de proposiciones aceptadas o razones la veracidad o falsedad de una aseercción. Con respecto a la explicación, esta se utiliza para exponer un razonamiento propio sobre algo particular. Su función es aportar comprensión sobre la idea que se quiere comunicar.

PR3: La argumentación y la justificación son sinónimos, pues ambas buscan soportar la veracidad de una proposición por medio de referentes teóricos.

PR4: La validación y la justificación son procesos relacionados más no sinónimos, puesto que cuando se justifica alguna proposición se le otorga una validez dentro de un sistema teórico. En este sentido, la justificación me permite llegar a la validación.

Momento 3 (20 minutos):

EXP: Queremos que, inicialmente, cada uno de ustedes reflexione y nos comenten que concepción o significado tienen acerca de las palabras razonamiento, explicación, justificación, argumentación y validación. Y si es posible, con algún ejemplo de sus clases nos compartan cuando sus estudiantes realizan alguno de estos procesos.

EXP: Ahora, les queremos compartir algunos referentes teóricos que nos orientan en la comprensión de las definiciones de razonamiento, explicación, justificación, argumentación, argumento y validación. Así mismo, exponemos nuestras definiciones sobre estos asuntos.

EXP: Antes de esto, queremos hacer una claridad frente a dos conceptos que son recurrentes en nuestras definiciones: expresión discursiva y práctica discursiva.

EXP: De acuerdo con Foucault (1969), las prácticas discursivas son entendidas como las actividades de comunicación que se realizan en el marco de una comunidad específica y que hacen posible un discurso, atendiendo a un conjunto de reglas, constituidas en un proceso histórico que se va definiendo en una época concreta.

EXP: La expresión discursiva es aquella enunciación escrita u oral, que se realiza en el marco de la práctica discursiva en el que el emisor trata de generar una comunicación eficaz evitando los datos ambiguos y las impresiones personales. La enunciación del tema debe ser clara desde el principio y las ideas que se van a expresar debe poseer una ordenación lógica.

EXP: Con lo anterior, ya podemos abordar las siguientes definiciones (*Se presentan las definiciones de los autores consultados y las propias, cabe aclarar que no se busca imponer nuestras definiciones, ya que son resultados de interpretaciones teóricas*).

Diapositiva 7

- *Razonamiento:*

Guevara y Martínez (2021): Actividad intelectual que busca manipular la información dada o adquirida para indagar, interpretar situaciones, determinar formas de proceder, relacionar, explicar, justificar, etc.; atendiendo a reglas de un sistema de conocimientos y experiencias.

EXP: El razonamiento es una actividad propia del pensamiento que permite el manejo de la información para abordar acciones específicas.

Diapositiva 8

- *Explicación:*

Guevara y Martínez (2021): Práctica discursiva que busca, por medio de razones, describir un objeto de conocimiento o hecho particular. Su función es dar claridad y ejemplificar a partir de una ampliación cualitativa de la información. La explicación establece una relación asimétrica, ya que el receptor reconoce en el emisor una autoridad frente al conocimiento.

EXP: La explicación comprendida como un proceso comunicativo entre emisor y receptor, busca extender la comprensión de un hecho, fenómeno o concepto, más no convencer de forma intensional a otra persona. Por medio de la explicación, el emisor procura que el receptor del mensaje visualice algunas cualidades o puntos de vistas adicionales de lo que se busca explicar.

Diapositiva 9

- *Justificación:*

Guevara y Martínez (2021): Práctica discursiva que permite encontrar razones para garantizar la veracidad de una aseercción sobre un objeto de conocimiento o hecho particular, en el marco de un conjunto de proposiciones aceptadas por una comunidad. Las razones deben ser sólidas, coherentes, pertinentes y precisas.

EXP: La justificación busca otorgar una garantía a una proposición, dentro de un conjunto de proposiciones aceptadas en una comunidad. Estas pueden ser parte de un sistema teórico, provenir de algún miembro experto o de autoridad en la comunidad, o por medio de construcciones en EGD. Esto, con la finalidad de soportar la veracidad de una aseercción.

Diapositiva 10

- *Argumentación:*

Guevara y Martínez (2021): Práctica discursiva que pretende convencer o persuadir de forma razonada a otro(s) sobre la veracidad de una aseercción. La argumentación establece una relación simétrica, ya que el emisor y el receptor desarrollan una discusión en un mismo nivel del conocimiento. El producto de este proceso es el argumento.

EXP: La argumentación es una faceta discursiva del razonamiento, en tanto me permite expresar lo que se procesa en el pensamiento. Toda argumentación es un razonamiento, pero no todo razonamiento es una argumentación.

Diapositiva 11

- *Argumento:*

Guevara y Martínez (2021): Expresión discursiva que se emite con el propósito de convencer, persuadir, disentir o soportar la validez de una proposición. Su estructura, como mínimo, es ternaria y se compone de tres proposiciones: dato, aseercción y garantía. La aseercción es una proposición cuyo contenido o verdad se está considerando. El dato es hecho o información factual, que se invocan para justificar y validar la aseercción. La garantía es la proposición que establece la conexión entre el dato y la aseercción, esta puede ser un principio o una regla. Las proposiciones pueden ser implícitas, pero para precisar el argumento debe ser posible identificarlas.

EXP: En el argumento no siempre se tienen explícitas las tres proposiciones, normalmente la garantía es implícita. Ejemplo de esto son las expresiones que un profesor de primaria acepta como parte de un argumento, como lo pueden los gestos o cualidades de un objeto del conocimiento.

Diapositiva 12

- *Validación:*

Guevara y Martínez (2021): Proceso que proporciona las garantías para decidir acerca de la veracidad de una aseercción. Para validar, se deben apropiar recursos técnicos y competencias argumentativas como símbolos, conceptos y prácticas, que permitan soportar la validez de una proposición frente a un conjunto de proposiciones aceptadas socialmente.

EXP: En la comunidad de educadores matemáticos, se acepta como método de validación algunas representaciones realizadas en entornos digitales (como GeoGebra), ya que permiten soportar la validez de una proposición. De igual manera, la demostración se acepta la manera más formal de validar (aceptada por toda la comunidad matemática).

Momento 4 (30 minutos):

Diapositivas 13, 14, 15

EXP: Ahora, les compartiremos una secuencia de interacciones entre un profesor y dos estudiantes en la solución de la situación que hemos propuesto el día de hoy. Queremos que la analicen en el marco de las definiciones que hemos trabajado, y logremos identificar cuando un estudiante explica, justifica, valida, argumenta o demuestra.

EXP: Antes de iniciar, les expondremos un poco del contexto en el cual se desarrolló la tarea que originó las intervenciones. El problema se pensó para una población de estudiantes de grado octavo de un colegio de la ciudad de Bogotá. La edad de los estudiantes se encuentra dentro del intervalo de 11 a 13 años. El estrato socio – económico de la población es cuatro. Los estudiantes cuentan con recursos tecnológicos suficientes, tales como Smartphones, computadores y tablets para abordar la tarea que se quiere proponer y están acostumbrados a solucionar tareas en Entornos de Geometría Dinámica (EGD) o en lápiz y papel.

EXP: Dentro de las normas socio – matemáticas se tiene que i) las definiciones de los objetos geométricos hacen parte del conjunto de proposiciones aceptadas ; ii) las invariantes detectadas durante el proceso de solución de la tarea, pueden pasar a formar parte del conjunto de proposiciones aceptadas después de una validación conjunta; iii) las imágenes que se presentan en un EGD se pueden tomar como parte de una justificación; iv) las proposiciones dadas por los estudiantes en el marco de la solución de una tarea pueden ser usadas en la construcción de un argumento colectivo; v) al momento de construir una conjetura los estudiantes están familiarizados con la estructura condicional si,... entonces..., para ello se usa un lenguaje y escritura matemática formal. Estas normas son las que median la práctica discursiva.

EXP: La estructura de las intervenciones sigue una continuidad lineal, en la cual las respuestas de los estudiantes pueden estar dirigidas a solucionar las preguntas orientadoras del profesor o hacia las intervenciones de sus compañeros.

EXP: Mientras analizamos cada una de las intervenciones, interroga el contenido buscando responder: ¿Cuál de las intervenciones corresponden a un argumento, una explicación, una justificación o una validación? Para realizar el ejercicio hemos denotado algunos colores con cada una de las definiciones así:

- Amarillo para explicación.
- Azul para justificación.
- Rojo para argumento.
- Verde para validación.

Con esto, buscamos que algunas de las intervenciones queden resaltadas con el color correspondiente.

PR1:

INTERACCIONES		ANÁLISIS	
1	P: ¿Cómo son los triángulos?	Pregunta orientadora	-
2	E1: Se formaron cuatro triángulos que se parecen.	Explicación	Se amplía la información sobre una característica de 1.
3	P: ¿De qué manera se parecen?	Pregunta orientadora	-
4	E1: Que a simple vista los triangulo son iguales.	Explicación	Se amplía la información sobre una característica de 3.
5	P: ¿A qué te refieres con que sean iguales?	Pregunta orientadora	-
6	E1: Que todos los triángulos tienen el mismo tamaño y forma.	Explicación	Se amplía la información sobre una característica de 5.
7	E2: Son iguales, sino que el del medio está “girado”.	Explicación	Se amplía la información sobre una característica de 5.
8	P: ¿Cómo puedes garantizar que los lados correspondientes de los triángulos son iguales?	Pregunta orientadora	-
9		Justificación	El concepto de distancia entre dos puntos permite garantizar a 5.
10	E2: Yo creo que, si movemos la figura, las medidas ya no son iguales entre los triángulos.	Proposición	Expresa un razonamiento.
11		Justificación	Se detecta una invariante que contradice a 9.
12	E2: Es decir, que se siguen correspondiendo [...] Los triángulos son congruentes.	Explicación	Se amplía la información sobre una característica de 11.
13	P: ¿Por qué ocurre eso? ¿Lo que encontramos es una invariante?	Pregunta orientadora	-
14	E2: Si es una invariante, porque los triángulos siguen siendo congruentes sin importar la posición de los vértices.	Explicación	Se amplía la información sobre una característica de 13.
15	P: ¿Qué nos permite afirmar que los triángulos formados son congruentes?	Pregunta orientadora	-
16		Justificación	Se utiliza el criterio de congruencia LLL para determinar la veracidad de la congruencia de los triángulos.
17	E1: Pero existe otra forma, la figura tiene dos rectas paralelas (Fig. 2).	Explicación	Se amplía la información sobre una característica de 15.
18	E1: Con las rectas paralelas y la secante de la izquierda podemos conformar los ángulos alternos internos.	Explicación	Se amplía la información sobre una característica de 17.
19	P: Los ángulos alternos internos que afirmas, ¿Qué nos permitirían afirmar?	Pregunta orientadora	-

INTERACCIONES		ANÁLISIS	
20		Justificación	El estudiante aplica el concepto de ángulos alternos internos para garantizar la congruencia de triángulos.
21	P: Correcto. Ahora, ¿podríamos construir una proposición o afirmación que nos permita reunir lo que hemos dicho hasta el momento?	Pregunta orientadora	-
22		Argumento	Por medio de lo dicho hasta el momento, se construye un argumento formal.
23	P: ¿Y cómo podríamos respaldar lo anterior?	Pregunta orientadora	-
24		Garantía del argumento	Esta garantía completa al argumento de 22, para conformar la estructura ternaria.

PR2:

INTERACCIONES		ANÁLISIS	
1	P: ¿Cómo son los triángulos?	Pregunta orientadora	
2	<i>E1: Se formaron cuatro triángulos que se parecen.</i>	Proposición	El estudiante hace una afirmación sobre lo que basado en la construcción de GeoGebra.
3	P: ¿De qué manera se parecen?	Pregunta orientadora	
4	E1: Que a simple vista los triangulo son iguales.	Explicación	Se intenta ampliar las características de la intervención anterior por medio de la construcción con algunas otras afirmaciones nuevamente basado en GeoGebra.
5	P: ¿A qué te refieres con que sean iguales?	Pregunta orientadora	
6	E1: Que todos los triángulos tienen el mismo tamaño y forma.	Explicación	Se intenta ampliar las características de la intervención anterior por medio de la construcción con algunas otras afirmaciones nuevamente basado en GeoGebra.
7	E2: Son iguales, sino que el del medio está "girado".	Explicación	Se intenta ampliar las características de la intervención anterior por medio de la construcción con algunas otras afirmaciones nuevamente basado en GeoGebra.
8	P: ¿Cómo puedes garantizar que los lados correspondientes de los triángulos son iguales?	Pregunta orientadora	
9	E1: Puedo medir cada uno de los lados de los triángulos y compararlos entre ellos (Fig. 1).	Justificación	Por medio del programa el estudiante da las garantías gracias a la herramienta de medir distancias de GeoGebra.
10	<i>E2: Yo creo que, si movemos la figura, las medidas ya no son iguales entre los triángulos.</i>	Proposición	El estudiante a partir de lo que puede observar en GeoGebra lanza una afirmación que se puede verificar con la herramienta de arrastre del programa.
11	E1: Mira que no, cuando moví el punto C las medidas cambiaron, pero los triángulos siguen siendo iguales (Fig. 2).	Justificación	Se intenta busca las garantías o un contraejemplo mediante la construcción realizada en GeoGebra que refute la intervención anterior.
12	E2: Es decir, que se siguen correspondiendo [...] Los triángulos son congruentes.	Aserción	El estudiante lanza una afirmación basada en los hechos ocurridos en las anteriores intervenciones.
13	P: ¿Por qué ocurre eso? ¿Lo que encontramos es una invariante?	Pregunta orientadora	
14	E2: Si es una invariante, porque los triángulos siguen siendo congruentes sin importar la posición de los vértices.	Explicación	Se intenta ampliar las características de la intervención anterior por medio de la construcción realizada en GeoGebra y un arrastre libre.
15	P: ¿Qué nos permite afirmar que los triángulos formados son congruentes?	Pregunta orientadora	

INTERACCIONES		ANÁLISIS	
16	E2: Hay un criterio de congruencia de triángulos que se hace con los lados. El criterio lado, lado, lado.	Justificación	Utiliza los criterios de congruencia para garantizar la aserción.
17	E1: Pero existe otra forma, la figura tiene dos rectas paralelas (Fig. 2).	Proposición	El estudiante lanza una afirmación basada en la construcción que se elaboró en GeoGebra.
18	E1: Con las rectas paralelas y la secante de la izquierda podemos conformar los ángulos alternos internos.	Aserción	Utiliza la proposición de ángulos congruentes entre rectas paralelas.
19	P: Los ángulos alternos internos que afirmas, ¿Qué nos permitirían afirmar?	Pregunta orientadora	
20	E1: La congruencia de los triángulos que están en las esquinas con el triángulo de la mitad.	Justificación	Utiliza los criterios de congruencia para garantizar la aserción 18
21	P: Correcto. Ahora, ¿podríamos construir una proposición que nos permita reunir lo que hemos dicho hasta el momento?	Pregunta orientadora	
22	E2: Si tenemos cualquier triángulo y unimos los puntos medios de cada uno de los lados, los triángulos que se forman son congruentes.	Conjetura	Se forma una proposición condicional con los datos y la aserción.
23	P: ¿Y cómo podríamos respaldar lo anterior?	Pregunta orientadora	
24	E1: Por el criterio de congruencia Lado, Lado, Lado o el criterio de congruencia Ángulo, Lado, Ángulo y el paralelismo.	Justificación	Utiliza los criterios de congruencia para garantizar la aserción

El siguiente cuadro presenta nuestra propuesta de solución a la instrucción propuesta:

INTERACCIONES		ANÁLISIS
1	P: ¿Cómo son los triángulos?	Pregunta orientadora
2	<i>E1: Se formaron cuatro triángulos que se parecen.</i>	<i>Aserción</i>
3	P: ¿De qué manera se parecen?	Pregunta orientadora
4	E1: Que a simple vista los triángulos son iguales.	Explicación de 2
5	P: ¿A qué te refieres con que sean iguales?	Pregunta orientadora
6	E1: Que todos los triángulos tienen el mismo tamaño y forma.	Explicación de 2
7	E2: Son iguales, sino que el del medio está "girado".	Explicación de 2
8	P: ¿Cómo puedes garantizar que los lados correspondientes de los triángulos son iguales?	Pregunta orientadora
9		Justificación de 2
10	<i>E2: Yo creo que, si movemos la figura, las medidas ya no son iguales entre los triángulos.</i>	<i>Proposición</i>
11	<i>E1: Mira que no, cuando moví el punto C las medidas cambiaron, pero los triángulos siguen siendo iguales (Fig. 2).</i>	<i>Valor de verdad de proposición 10</i>
12	<i>E2: Es decir, que se siguen correspondiendo [...] Los triángulos son congruentes.</i>	<i>Aserción</i>
13	P: ¿Por qué ocurre eso? ¿Lo que encontramos es una invariante?	Pregunta orientadora
14	E2: Si es una invariante, porque los triángulos siguen siendo congruentes sin importar la posición de los vértices.	Explicación de 12
15	P: ¿Qué nos permite afirmar que los triángulos formados son congruentes?	Pregunta orientadora
16		Justificación de 12
17	E1: Pero existe otra forma, la figura tiene dos rectas paralelas (Fig. 2).	Explicación de 12
18		Justificación de 12
19	P: Los ángulos alternos internos que afirmas, ¿Qué nos permitirían afirmar?	Pregunta orientadora
20	E1: La congruencia de los triángulos que están en las esquinas con el triángulo de la mitad.	Explicación de 12

21	P: Correcto. Ahora, ¿podríamos construir una proposición que nos permita reunir lo que hemos dicho hasta el momento?	Pregunta orientadora
22		Conjetura (Argumento colectivo con garantía implícita 16)
23	P: ¿Y cómo podríamos respaldar lo anterior?	Pregunta orientadora
24		Justificación de 22 (Garantía del Argumento)

Según lo anterior, podemos afirmar lo siguiente:

- Las intervenciones 4, 6, 7, 14, 17, y 20 son explicaciones, ya que buscan ampliar cualitativamente los datos para otorgar mayor comprensión y claridad a quienes reciben la información. De igual manera, la explicación se realiza entre individuos que manejan una relación asimétrica. En estos casos particulares, el profesor asume un rol de receptor, permitiendo a los estudiantes adquirir el papel de emisores “expertos del asunto”.
- Las intervenciones 9, 16, 18 son justificaciones, ya que aportan las razones para garantizar la veracidad de algunas aseveraciones emitidas por los estudiantes. Estas razones se originan en el marco de la práctica discursiva que se producen a partir de una construcción en GeoGebra (intervención 9) y de definiciones teóricas (intervenciones 16 y 18).
- Las intervenciones 22 y 24 conforman la estructura de un argumento, puesto que reúnen el dato y la aseveración (intervención 22); así como la garantía (intervención 24). Este argumento es colectivo y se produce como resultado del proceso de argumentación llevado a cabo desde la intervención 12 hasta la intervención 24. En este intervalo, se busca convencer o persuadir sobre la veracidad de la intervención 12.
- El proceso de validación se da a lo largo de las intervenciones profesor – estudiantes, ya que buscan aportar las garantías necesarias para decidir la validez de una aseveración (intervención 12) frente a un conjunto de proposiciones aceptadas socialmente.

Momento 5 (5 minutos):

Diapositiva 16

EXP: Para finalizar queremos compartir unas pequeñas conclusiones que permiten dar respuesta a la pregunta inicial: *¿Cuáles son las diferencias entre argumentar, explicar, justificar y validar?*

EXP: A pesar de que los asuntos trabajados tienen relación con el proceso del razonamiento, existen entre ellos diferencias en sus funciones. Cada uno de estos procesos posee una intensidad específica que le permite al profesor de matemáticas generar en sus estudiantes una forma concreta de razonar y actuar.

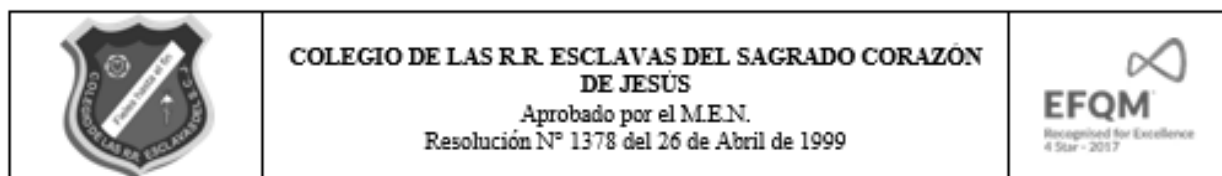
EXP: Los verbos explicar, justificar, argumentar y validar son considerados frecuentemente como sinónimos en el proceso de enseñanza de las matemáticas. Esto se puede cotejar rápidamente con los ejemplos de los textos escolares que hemos presentado. Si consideramos continuar con estas prácticas, se puede constituir un obstáculo, a nuestro modo de ver, dentro de la investigación. Puesto que ello conduce a mezclar diferentes niveles de actividad argumentativa que podrían llegar a ser necesario distinguirlos en la investigación.

EXP: Si analizamos la estructura de las intervenciones y las relaciones entre los procesos abordados, podemos afirmar que la explicación, la justificación, la argumentación y la validación están desarrollados de forma lineal. Lo anterior, se origina desde una aseveración, que si se hace necesario se explica para luego ser justificada y finalmente ser validada por medio de argumentos resultantes del proceso de argumentación.

EXP: La explicación busca que se amplíen las características y atributos de un proceso de construcción, de un objeto o hecho matemático, de una proposición, de un procedimiento, que hace parte de una aseveración. Luego con esas características y atributos que se han explicitado, se busquen las garantías que validan la aseveración que pasa a ser las justificaciones de esta, estas justificaciones pueden convertirse en parte de la garantía de un argumento que se construye con la aseveración y los datos. Todo este proceso es lo que llamamos argumentación.

10.5 Anexo 5: Conjunto de Tareas Ciclo 3

Tarea 1: Alturas y Ortocentro



“Formando desde el corazón, ciudadanos con valores y principios católicos.”

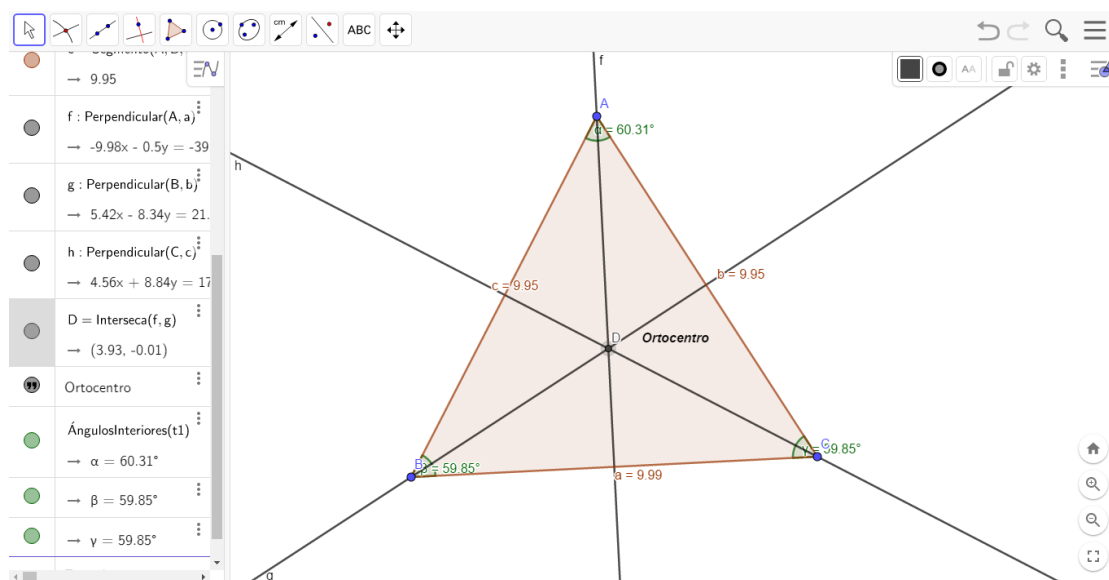
Altura de un triángulo

La altura de un triángulo (h) es el segmento perpendicular a un lado que va desde el vértice opuesto a este lado (o a su prolongación). También puede entenderse como la distancia de un lado al vértice opuesto. Un triángulo tiene tres alturas, según el vértice de referencia que se escoja. Las tres alturas confluyen en un punto llamado **ortocentro**.

Ortocentro.

El **ortocentro** D es el punto intersección de las tres alturas de un triángulo.

Las **alturas** (h_a , h_b y h_c) son los segmentos perpendiculares a cada lado que va desde el vértice opuesto a este lado (o a su prolongación). También pueden entenderse como la distancia de un lado al vértice opuesto.



Tarea para la clase del 21 de agosto

1. Construimos un triángulo ABC.
2. Trazamos las alturas del triángulo ABC. Para ello trazamos rectas perpendiculares a los lados del triángulo y que pasen por el vértice opuesto al lado.
3. Marcar el **Ortocentro** (punto D).
4. Explorar que sucede en el ortocentro con respecto a los diferentes tipos de triángulos.
5. Hallar una conjetura (una conclusión que puede ser verdad siempre tiene la forma dado _____ entonces _____).
6. Tiempo estimado para la tarea 45 min.
7. Para la tarea se debe incluir el proceso de construcción que ustedes hacen y el proceso de exploración, como ya es sabido esto puede ser por pantallazos en el documento o por un video adicional.

Tarea 2: PME DDC

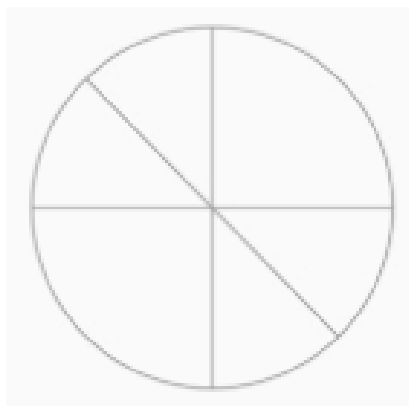
Nombres: Carlos David Guevara Borrás.
Omar Augusto Martínez Domínguez.

TAREA FINAL

El grupo debe seleccionar un problema de un libro de texto, preferiblemente el que algún integrante utiliza en su colegio, al cual se le vea potencial de poner en juego los asuntos estudiados en los seminarios de la Maestría en Docencia de la Matemática (argumentación, uso de tecnologías digitales, diseño de tareas).

Construye un triángulo que reúna la condiciones.

En la siguiente figura, las tres rectas son mediatrices de un triángulo rectángulo y la circunferencia circunscribe el triángulo.⁶



Tomado de:

Joya Vega, A., Acero Gutiérrez, E., Tami Buitrago, J., Castaño León, J., Acosta de Guerrero, M. y Sabogal Reyes, Y. (2018). *Activamente Matemáticas 8 Volumen 1 Edición Docente*. Bogotá, Colombia: Santillana Sistemas Educativos (pp.50).

Escogido el problema, el grupo de trabajo debe imaginar que quiere implementarlo en uno de los cursos en los cuales alguno de sus integrantes es profesor. Para ello, el grupo se debe disponer a diseñar una tarea o secuencia de tareas que involucre a dicho problema, pero teniendo en cuenta las siguientes situaciones, las cuales involucran asuntos abordados en los cursos Profundización en Matemáticas Elementales [PME], y Diseño y Desarrollo Curricular en Matemáticas [DDC].

Situación 1. ¿Cuáles serían los *requisitos* necesarios para abordar la tarea? Para dar respuesta a ello, tenga en cuenta elementos como:

1. Una caracterización de la población a la cual se desarrollará el problema (tipo de tareas que ellos están acostumbrados a solucionar en la clase, algunas normas socio matemáticas de la clase, manejo del recurso por parte de los estudiantes) [DDC]

El problema se desarrollará con estudiantes de grado octavo del colegio Externado Caro y Cuervo de la ciudad de Bogotá. La edad de los estudiantes se encuentra dentro del intervalo de 11 a 13 años. El estrato socio – económico de la población es cuatro. Los estudiantes cuentan con recursos tecnológicos suficientes, tales como *Smartphones*, computadores y tablets para abordar la tarea que se quiere proponer.

Los estudiantes están acostumbrados a solucionar tareas en Entornos de Geometría Dinámica (EGD) y en lápiz y papel, de los cuales predomina el uso del lápiz y papel. De acuerdo a lo documentado por Triana y Zambrano (2016), los estudiantes en la mayoría de las ocasiones realizan actividades ligadas a tareas de tipo no ricas, puesto que, las tareas se limitan a procesos repetitivos o algorítmicos, en donde el estudiante da cuenta de un procedimiento y no de un proceso de exploración, conjeturación o argumentación.

⁶ La tarea seleccionada se tomó del libro de texto *Activamente Matemáticas 8*, trabajado por Andrés Bello en el colegio Externado Caro y Cuervo (Bogotá) y Omar Martínez en el colegio Madre Paula Montal (Bogotá).

Dentro de las normas socio – matemáticas se tiene que i) las definiciones de los objetos geométricos son verdades y están dadas por el docente; ii) las imágenes que se presentan en un EGD se pueden tomar como parte de una justificación; iii) los procedimientos y justificaciones dadas por los estudiantes alrededor de una actividad pueden ser parte de una demostración; iv) los pocos conceptos concebidos de la exploración realizada por los estudiantes, pasan a formar parte del sistema axiomático local, siempre y cuando el profesor lo institucionalice; v) al momento de definir un objeto geométrico se usa un lenguaje y escritura matemática formal.

El recurso que se pretende usar con los estudiantes son los EGD. Cada estudiante tiene el acceso a un dispositivo tecnológico, ya sea propio o proporcionado por el docente. El manejo del recurso por parte de los estudiantes se limita a construcciones y exploraciones guiadas por el docente, en donde el estudiante da cuenta de las propiedades de los objetos geométricos que se quieren trabajar.

Finalmente, como requisitos para desarrollar de manera adecuada la situación propuesta se tiene la conceptualización de los procesos de exploración en EGD, reporte de los pasos de construcción, comprender instrucciones básicas en contextos geométricos, tener un acercamiento a la formulación de una conjetura y validar respuestas a partir de un sistema axiomático local.

2. Objetos primarios necesarios para poder abordar el problema (conceptos-definición, procedimientos, proposiciones, lenguajes y argumentos con los que debe contar un estudiante para poder abordar el problema) [PME]

Conceptos – definición	<ol style="list-style-type: none"> 1. Ángulo. 2. Segmento. 3. Recta perpendicular. 4. Punto medio. 5. Bisectriz. 6. Mediatriz. 7. Circuncentro. 8. Triángulo rectángulo. 9. Triángulo Isósceles.
Procedimientos	<ol style="list-style-type: none"> 1. Construir $\odot O, OA$ \overrightarrow{AO} $\overrightarrow{CO} \perp \overrightarrow{AO}$ Bisectriz $\angle AOC = \overrightarrow{OE}$ 2a. Construir $F, G, H \in \odot O, OA$ $\triangle FGH$ Punto medio \overline{FG} Punto medio \overline{GH} Punto medio \overline{FH}⁷ 2b. Construir $j \perp \overrightarrow{AO}; j \cap \overrightarrow{AO} = F$ $k \perp \overrightarrow{CO}; k \cap \overrightarrow{CO} = G$ $l \perp \overrightarrow{OE}; l \cap \overrightarrow{OE} = H$⁸
Proposiciones	<ol style="list-style-type: none"> 1. $F, G, H \in \odot O, OA$ 2. $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \cap \mathcal{M}_{\overline{GH}} = O$ 3. $\mathcal{M}_{\overline{FH}} = \overrightarrow{AO}$ 4. $\mathcal{M}_{\overline{GH}} = \overrightarrow{CO}$ 5. $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \perp \mathcal{M}_{\overline{GH}}$ 6. Bisectriz $\angle AOC$ 7. \overline{FG} es diámetro de $\odot O, OA$ 8. $\overline{FG} \perp \mathcal{M}_{\overline{FG}}$ 9. Dada $\odot O, OA; F, G, H \in \odot O, OA$. Si en un $\triangle FGH$, $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \perp \mathcal{M}_{\overline{GH}}$, $\mathcal{M}_{\overline{FG}}$ es bisectriz de $\angle FGH$, \overline{FG} es diámetro de $\odot O, OA$; $\overline{FG} \perp \mathcal{M}_{\overline{FG}}$, entonces $\triangle FGH$ es triángulo isósceles.
Lenguajes	<ol style="list-style-type: none"> 1. Representación gráfica en entorno dinámico. 2. Simbología geométrica en el reporte escrito.
Argumentos	<ol style="list-style-type: none"> 1. Argumento abductivo. La tipología del argumento se presenta en la Figura 1.

⁷ Segunda posible construcción que los estudiantes realizarían para abordar la situación.

⁸ Primera posible construcción que los estudiantes realizarían para abordar la situación.

Tabla 1. Objetos primarios necesarios para abordar la situación.

Argumento emergido:

Abductivo (Argumento informal)

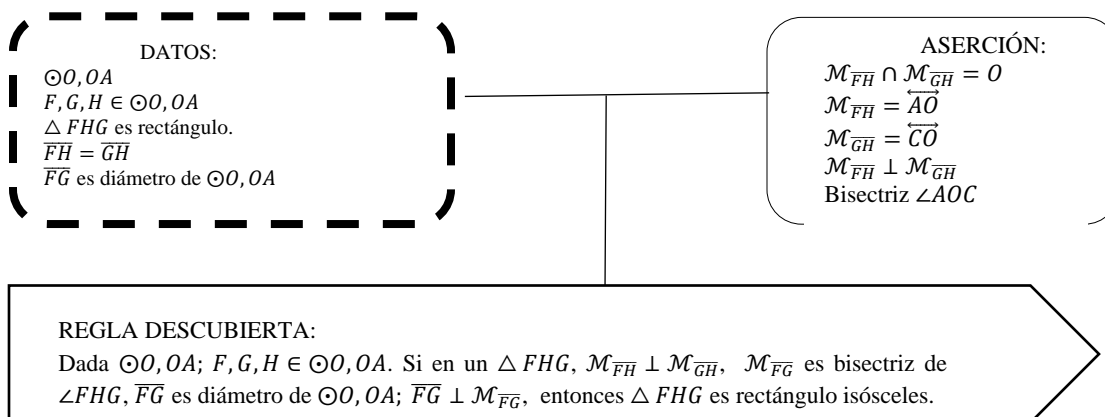


Figura 1. Argumento emergido de la actividad.

Situación 2. ¿Cuáles serían las *metas* que se pretenden alcanzar con el problema? Para dar respuesta a ello, tenga en cuenta elementos como:

1. Objetos primarios que se pretenden desarrollar mediante el abordaje del problema [PME]
2. Procesos matemáticos que se pretenden involucrar mediante el abordaje del problema [PME].
3. Asuntos de otra índole (afectiva, mediacional o de recursos, etc.) a los que se le apunta con el abordaje del problema [DDC].

La meta que se pretende alcanzar es:

1. Promover la argumentación en busca de caracterizar las propiedades que tienen las mediatrices de un triángulo rectángulo isósceles a través de la exploración en GeoGebra, recurriendo al trabajo grupal para reconocer diferentes puntos de vista y compararlos, para crear argumentos más convincentes.

Situación 3. ¿Cómo formularían la situación de tarea para que se favorezca el logro de las metas propuestas? Para dicha formulación considere los *recursos* que se tendrían a disposición para desarrollar la situación de tarea.

SITUACIÓN:

Dada una circunferencia con centro en O , dos rectas perpendiculares que se intersecan en O y la bisectriz de uno de los ángulos formados por las rectas perpendiculares. ¿Cuántos triángulos inscritos en la circunferencia cumplen que las rectas sean las mediatrices de los lados del triángulo?

TAREA:

Para la siguiente situación usted debe:

- g. Realizar la construcción en GeoGebra garantizando cada una de las condiciones que se piden.
- h. Proporcionar los pasos de la construcción, usando un lenguaje geométrico adecuado.
- i. Explorar (arrastrar, medir, activar rastro, comparar, etc.) la construcción realizada para identificar propiedades invariantes que permitan un acercamiento a la solución de la situación planteada.
- j. Realizar una lista con los pasos de la exploración realizada, haciendo explícito el uso de las herramientas.
- k. Enunciar una conjetura de la forma Si _____, entonces _____, donde presente las propiedades invariantes encontradas.
- l. Nombrar los objetos y conceptos matemáticos que pueden garantizar las propiedades invariantes encontradas.

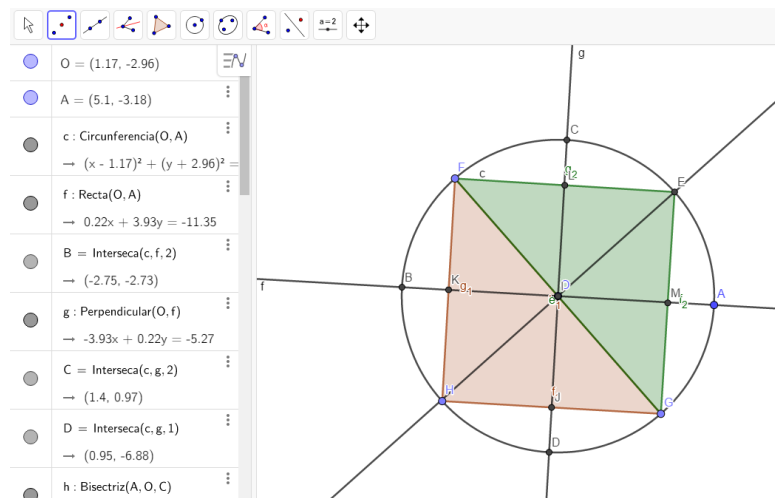
Conformación y tiempos: Grupos de tres personas para trabajar durante una hora y treinta minutos.

Situación 4. ¿Cuál sería la potencial actividad matemática⁹ de los estudiantes al abordar la situación de tarea? Para dar respuesta a la pregunta, tenga en cuenta los siguientes elementos:

1. Potenciales respuestas a cada uno de los ítems puestos en la formulación de la tarea y la actividad matemática asociada [PME-DDC].

Possible actividad 1 de la tarea propuesta:

- a. Realizar la construcción en GeoGebra garantizando cada una de las condiciones que se piden.



- b. *Procedimiento de construcción*

- $\odot O, OA$
- \overline{AO}
- $\overline{CO} \perp \overline{AO}$
- Bisectriz $\angle AOC = \overline{OE}$
- $F, G, H \in \odot O, OA$
- $\triangle FGH$
- Punto medio de $\overline{FG}, \overline{GH}$ y \overline{FH}

- d. *Procedimiento de exploración*

- Arrastre guiado de los puntos F, G, H sobre $\odot O, OA$;
- Punto medio de $\overline{FG}, \overline{GH}$ y \overline{FH} pertenezcan a $\overline{CO}, \overline{AO}, \overline{OE}$
- $\overline{CO}, \overline{AO}, \overline{OE}$ son mediatrices de $\overline{HG}, \overline{FH}, \overline{FG}$ respectivamente.

- e. *Conjetura*

Dada $\odot O, OA$; $F, G, H \in \odot O, OA$. Si en un $\triangle FGH$, $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \perp \mathcal{M}_{\overline{GH}}$, $\mathcal{M}_{\overline{FG}}$ es bisectriz de $\angle FGH$, \overline{FG} es diámetro de $\odot O, OA$; $\overline{FG} \perp \mathcal{M}_{\overline{FG}}$, entonces $\triangle FGH$ es rectángulo isósceles.

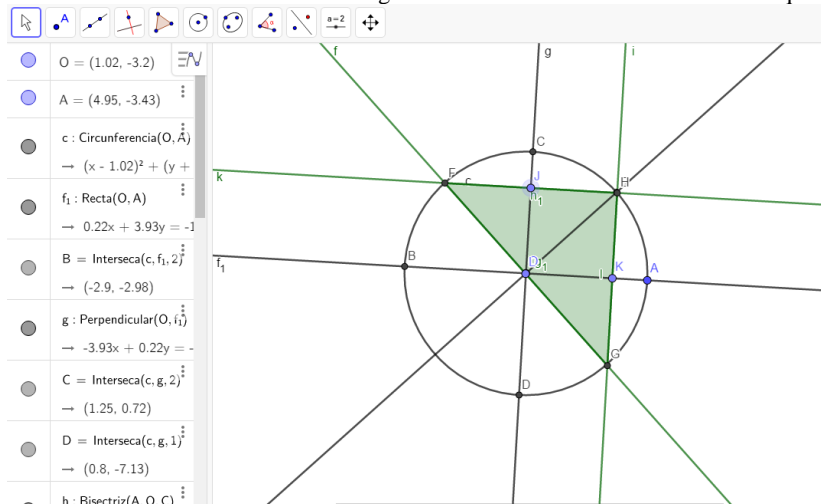
- f. *Garantías de las invariantes*

- Como las rectas dadas son perpendiculares por el punto medio con los lados del triángulo entonces las rectas dadas son mediatrices de los lados del triángulo. (*Teorema de la mediatriz*)
- El $\triangle FGH$ es rectángulo porque tiene un ángulo recto (*Definición triángulo rectángulo*)
- El $\triangle FGH$ es isósceles porque tiene dos lados congruentes (*Definición de mediatriz y Definición de triángulos isósceles*)

⁹ Recuerde que *actividad matemática* es lo que un sujeto *hace* cuando aborda una tarea matemática. Ese *hacer* implica procesos y procedimientos matemáticos. Desde esta perspectiva, *actividad* no es lo mismo que *situación de tarea* o *problema*.

Posible actividad 2 de la tarea propuesta:

a. Realizar la construcción en GeoGebra garantizando cada una de las condiciones que se piden.



b. *Procedimiento de construcción*

- $\odot O, OA$
- \overrightarrow{AO}
- $\overrightarrow{CO} \perp \overrightarrow{AO}$
- Bisectriz $\angle AOC = \overrightarrow{OE}$
- $l \perp \overrightarrow{AO}$ Por K
- $k \perp \overrightarrow{CO}$ Por J
- $f \perp \overrightarrow{OE}$ Por L
- $l \cap k = H$
- $l \cap f = F$
- $f \cap k = G$
- $\triangle FHG$

d. *Procedimiento de exploración*

- Arrastre guiado de los puntos K, J, L sobre $\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OE}$
- $K, J, L \in \odot O, OA$
- $\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OE}$ son mediatrices de $\overline{HG}, \overline{FH}, \overline{FG}$ respectivamente.

e. *Conjetura*

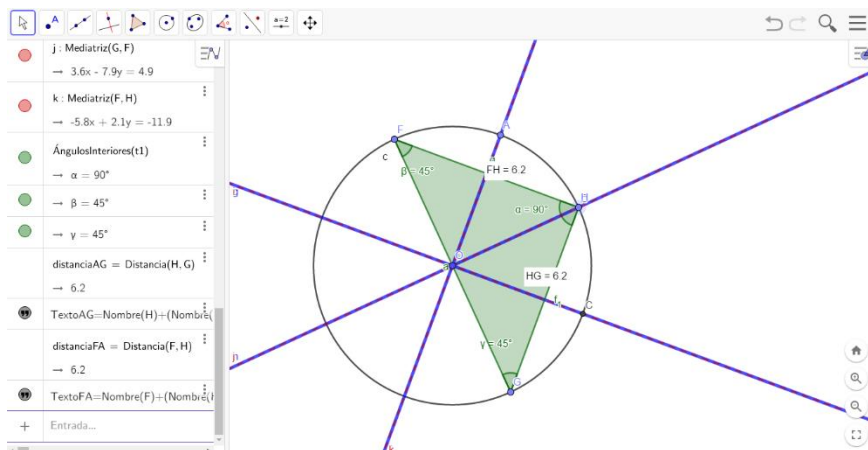
Dada $\odot O, OA$; $F, G, H \in \odot O, OA$. Si en un $\triangle FHG$, $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \perp \mathcal{M}_{\overline{GH}}$, $\mathcal{M}_{\overline{FG}}$ es bisectriz de $\angle FHG$, \overline{FG} es diámetro de $\odot O, OA$; $\overline{FG} \perp \mathcal{M}_{\overline{FG}}$, entonces $\triangle FHG$ es rectángulo isósceles.

f. *Garantías de las invariantes*

- Las rectas l, f, k deben ser perpendiculares a las rectas $\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OE}$ (*Teorema de la mediatriz*)
- Como los tres vértices de $\triangle FHG$ pertenecen a la circunferencia entonces las mediatrices se cortan en O (*Definición de Ortocentro*)
- El $\triangle FHG$ es rectángulo porque tiene un ángulo recto (*Definición triángulo rectángulo*)
- Él $\triangle FHG$ es isósceles porque tiene dos lados congruentes (*Definición de mediatriz y Definición de triángulos isósceles*)

Posible actividad 3 de la tarea propuesta:

a. Realizar la construcción en GeoGebra garantizando cada una de las condiciones que se piden.



b. *Procedimiento de construcción*

- $\odot O, OA$
- \overline{AO} ;
- $\overline{CO} \perp \overline{AO}$
- Bisectriz $\angle AOC = \overline{OE}$
- $F, G, H \in \odot O, OA$
- $\triangle FHG$
- $\mathcal{M}_{\overline{FH}}$
- $\mathcal{M}_{\overline{GH}}$
- $\mathcal{M}_{\overline{FG}}$

d. *Procedimiento de exploración*

- Arrastre guiado de los puntos F, G, H sobre $\odot O, OA$, hasta que $\mathcal{M}_{\overline{FH}}, \mathcal{M}_{\overline{GH}}, \mathcal{M}_{\overline{FG}}$ coincidan con $\overline{AO}, \overline{CO}, \overline{OE}$ respectivamente.

e. *Conjetura*

Dada $\odot O, OA$; $F, G, H \in \odot O, OA$. Si en un $\triangle FHG$, $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \perp \mathcal{M}_{\overline{GH}}$, $\mathcal{M}_{\overline{FG}}$ es bisectriz de $\angle FHG$, \overline{FG} es diámetro de $\odot O, OA$; $\overline{FG} \perp \mathcal{M}_{\overline{FG}}$, entonces $\triangle FHG$ es rectángulo isósceles.

f. *Garantías de las invariantes*

- Las rectas l, f, k deben ser perpendiculares a las rectas $\overline{CO}, \overline{AO}, \overline{OE}$ (*Teorema de la mediatriz*)
- Como los tres vértices de $\triangle FHG$ pertenecen a la circunferencia entonces las mediatrices se cortan en O (*Definición de Ortocentro*)
- El $\triangle FHG$ es rectángulo porque tiene un ángulo recto (*Definición triángulo rectángulo*)
- El $\triangle FHG$ es isósceles porque tiene dos lados congruentes (*Definición de mediatriz y Definición de triángulos isósceles*)

2. *Objetos primarios* involucrados en cada potencial actividad. Elabore una red conceptual asociada a la actividad, y contrástela con los asuntos de los ítems 1 y 2 de la Situación 2. Con ello, dé respuesta a la pregunta: ¿Los objetos y procesos a los que se les apunta en las metas necesariamente se abordan con las potenciales soluciones de los estudiantes?. [PME]

Red conceptual posible actividad 1

Dada una circunferencia con centro en O, dos rectas perpendiculares que se intersecan en O y la bisectriz de uno de los ángulos formados por las rectas perpendiculares. ¿Cuántos triángulos inscritos

LENGUAJE: Representación gráfica en entorno dinámico. Simbología geométrica en el reporte escrito. Verbal para argumentar lo escrito.

Expresa y soporta

Regulan el uso

Motiva

Resuelve

PROCEDIMIENTO

Construir $\odot O, OA; \overleftrightarrow{AO}; \overleftrightarrow{CO} \perp \overleftrightarrow{AO}$
 Bisectriz $\angle AOC = \overleftrightarrow{OE}$

$F, G, H \in \odot O, OA; \triangle FGH$
 Punto medio de $\overline{FG}, \overline{GH}$ y \overline{FH}

DEFINICIONES (CONCEPTOS)

1. Recta perpendicular.
2. Bisectriz.
3. Mediatriz.
4. Triangulo rectángulo.
5. Triangulo Isósceles.

PROPOSICIONES

1. $F, G, H \in \odot O, OA$
2. $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \cap \mathcal{M}_{\overline{GH}} = O$
3. $\mathcal{M}_{\overline{FH}} = \overleftrightarrow{AO}$
4. $\mathcal{M}_{\overline{GH}} = \overleftrightarrow{CO}$
5. $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \perp \mathcal{M}_{\overline{GH}}$
6. Bisectriz $\angle AOC$
7. Dada $\odot O, OA; F, G, H \in \odot O, OA$. Si en un $\triangle FGH$, $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \perp \mathcal{M}_{\overline{GH}}$, $\mathcal{M}_{\overline{FG}}$ es bisectriz de $\angle FGH$, \overline{FG} es diámetro de $\odot O, OA$; $\overline{FG} \perp \mathcal{M}_{\overline{FG}}$, entonces $\triangle FGH$ es rectángulo isósceles.

Conforman

Articulan, Explican, validan

ARGUMENTO ABDUCTIVO

<p>DATOS:</p> <p>$\odot O, OA$</p> <p>$F, G, H \in \odot O, OA$</p> <p>$\triangle FGH$ es rectángulo.</p> <p>$\overline{FH} = \overline{GH}$</p> <p>$\overline{FG}$ es diámetro de $\odot O, OA$</p>	<p>ASERCIÓN:</p> <p>$\mathcal{M}_{\overline{FH}} \cap \mathcal{M}_{\overline{GH}} = O$</p> <p>$\mathcal{M}_{\overline{FH}} = \overleftrightarrow{AO}$</p> <p>$\mathcal{M}_{\overline{GH}} = \overleftrightarrow{CO}$</p> <p>$\mathcal{M}_{\overline{FH}} \perp \mathcal{M}_{\overline{GH}}$</p> <p>Bisectriz $\angle AOC$</p>
<p>REGLA DESCUBIERTA:</p> <p>Dada $\odot O, OA; F, G, H \in \odot O, OA$. Si en un $\triangle FGH$, $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \perp \mathcal{M}_{\overline{GH}}$, $\mathcal{M}_{\overline{FG}}$ es bisectriz de $\angle FGH$, \overline{FG} es diámetro de $\odot O, OA$; $\overline{FG} \perp \mathcal{M}_{\overline{FG}}$, entonces $\triangle FGH$ es rectángulo isósceles.</p>	

Red conceptual posible actividad 2

Dada una circunferencia con centro en O, dos rectas perpendiculares que se intersecan en O y la bisectriz de uno de los ángulos formados por las rectas perpendiculares. ¿Cuántos triángulos inscritos

LENQUAJE:
 Representación gráfica en entorno dinámico. Simbología geométrica en el reporte escrito.
 Verbal para argumentar lo escrito.

Expresa y soporta

Regulan el uso

Motiva

Resuelve

PROCEDIMIENTO

Construir
 $\odot O, OA; \overline{AO}; \overline{CO} \perp \overline{AO}$
 Bisectriz $\angle AOC = \overline{OE}$
 $l \perp \overline{AO}$ Por F
 $k \perp \overline{CO}$ Por G
 $f \perp \overline{OE}$ Por H $\triangle FHG$
 $F, H, G \in \odot O, OA$

DEFINICIONES (CONCEPTOS)

1. Recta perpendicular.
2. Bisectriz.
3. Mediatriz.
4. Circuncentro.
5. Triangulo rectángulo.
6. Triangulo Isósceles.

PROPOSICIONES

1. $F, G, H \in \odot O, OA$
2. $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \cap \mathcal{M}_{\overline{GH}} = O$
3. $\mathcal{M}_{\overline{FH}} = \overline{AO}$
4. $\mathcal{M}_{\overline{GH}} = \overline{CO}$
5. $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \perp \mathcal{M}_{\overline{GH}}$
6. Bisectriz $\angle AOC$
7. Dada $\odot O, OA; F, G, H \in \odot O, OA$. Si en un $\triangle FHG$, $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \perp \mathcal{M}_{\overline{GH}}$, $\mathcal{M}_{\overline{FG}}$ es bisectriz de $\angle FHG$, \overline{FG} es diámetro de $\odot O, OA$; $\overline{FG} \perp \mathcal{M}_{\overline{FG}}$, entonces $\triangle FHG$ es rectángulo isósceles.

Conforman

Articulan,
Explican,
validan

ARGUMENTO ABDUCTIVO

DATOS:
 $\odot O, OA$
 $F, G, H \in \odot O, OA$
 $\triangle FHG$ es rectángulo.
 $\overline{FH} = \overline{GH}$
 \overline{FG} es diámetro de $\odot O, OA$

ASERCION
 $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \cap \mathcal{M}_{\overline{GH}}$
 $\mathcal{M}_{\overline{FH}} = \overline{AO}$
 $\mathcal{M}_{\overline{GH}} = \overline{CO}$
 $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \perp \mathcal{M}_{\overline{GH}}$
 Bisectriz $\angle A$

REGLA DESCUBIERTA:
 Dada $\odot O, OA; F, G, H \in \odot O, OA$. Si en un $\triangle FHG$, $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \perp \mathcal{M}_{\overline{GH}}$, $\mathcal{M}_{\overline{FG}}$ es bisectriz de $\angle FHG$, \overline{FG} es diámetro de $\odot O, OA$; $\overline{FG} \perp \mathcal{M}_{\overline{FG}}$, entonces $\triangle FHG$ es rectángulo isósceles.

Red conceptual posible actividad 3

Dada una circunferencia con centro en O, dos rectas perpendiculares que se intersecan en O y la bisectriz de uno de los ángulos formados por las rectas perpendiculares. ¿Cuántos triángulos inscritos

LENQUAJE:
 Representación gráfica en entorno dinámico. Simbología geométrica en el reporte escrito.
 Verbal para argumentar lo escrito.

Expresa y soporta

Regulan el uso

Motiva Resuelve

PROCEDIMIENTO
 Construir
 $\odot O, OA; \overline{AO}; \overline{CO} \perp \overline{AO}$
 Bisectriz $\angle AOC = \overline{OE}$
 $F, G, H \in \odot O, OA$
 $\triangle FHG$
 $\mathcal{M}_{\overline{FH}}; \mathcal{M}_{\overline{GH}}; \mathcal{M}_{\overline{FG}}$

DEFINICIONES (CONCEPTOS)

1. Recta perpendicular.
2. Bisectriz.
3. Mediatriz.
4. Circuncentro.
5. Triangulo rectángulo.
6. Triangulo Isósceles.

PROPOSICIONES

1. $\odot O, OA; \overline{AO}; \overline{CO} \perp \overline{AO}$
2. Bisectriz $\angle AOC = \overline{OE}$
3. $F, G, H \in \odot O, OA$
4. $\triangle FHG$
5. $\mathcal{M}_{\overline{FH}}; \mathcal{M}_{\overline{GH}}; \mathcal{M}_{\overline{FG}}$
6. Dada $\odot O, OA; F, G, H \in \odot O, OA$. Si en un $\triangle FHG$, $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \perp \mathcal{M}_{\overline{GH}}$, $\mathcal{M}_{\overline{FG}}$ es bisectriz de $\angle FHG$, \overline{FG} es diámetro de $\odot O, OA$; $\overline{FG} \perp \mathcal{M}_{\overline{FG}}$, entonces $\triangle FHG$ es rectángulo isósceles.

Conforman Articulan, Explican, validan

ARGUMENTO ABDUCTIVO

<p>DATOS: $\odot O, OA$ $F, G, H \in \odot O, OA$ $\triangle FHG$ es rectángulo. $\overline{FH} = \overline{GH}$ \overline{FG} es diámetro de $\odot O, OA$</p>	<p>ASERCIÓN $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \perp \mathcal{M}_{\overline{GH}}$ $\mathcal{M}_{\overline{FH}} = \overline{AO}$ $\mathcal{M}_{\overline{GH}} = \overline{CO}$ $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \perp \mathcal{M}_{\overline{GH}}$ Bisectriz $\angle A$</p>
---	---

REGLA DESCUBIERTA:
 Dada $\odot O, OA; F, G, H \in \odot O, OA$. Si en un $\triangle FHG$, $\mathcal{M}_{\overline{FH}} \perp \mathcal{M}_{\overline{GH}}$, $\mathcal{M}_{\overline{FG}}$ es bisectriz de $\angle FHG$, \overline{FG} es diámetro de $\odot O, OA$; $\overline{FG} \perp \mathcal{M}_{\overline{FG}}$, entonces $\triangle FHG$ es rectángulo isósceles.

3. ¿Cuál sería la gestión del profesor frente a la actividad prevista para lograr la meta? [DDC]

Durante el proceso de exploración, el profesor genera preguntas orientadoras según la actividad de cada grupo, para que los estudiantes puedan llegar a detectar las invariantes que se puedan presentar en la situación planteada.

Por ejemplo:

Mediación para la exploración

- ¿Qué significa que una recta sea mediatriz?
- Si las mediatrices se cortan en el punto O entonces ¿quién es O?
- ¿Qué significa que O sea Circuncentro?
- ¿Qué características deben cumplir las rectas para ser mediatriz?
- ¿Qué tipo de triángulo se ha formado?
- ¿Qué me garantiza que el triángulo sea _____?

Mediación para la conjeturación.

- ¿Cómo es el triángulo?
- ¿Qué características tienen las mediatrices del triángulo que encontró?

Medición de las garantías

- ¿Por qué se pueden decir que las rectas son mediatrices?
- ¿Por qué el triángulo inscrito es rectángulo?
- ¿Por qué el triángulo es isósceles?

4. ¿Cuál es la realimentación que el recurso seleccionado suministra al estudiante respecto a la actividad presupuestada? [DDC]

Realimentación que el recurso puede suministrar a la actividad del estudiante

- Para la precisión de la construcción
- Arrastre guiado
- Visualización
- Medición de ángulos y distancia entre puntos
- Verificación de la conjetura
- Justificación de la conjetura

Preguntas para reflexionar.

Reflexión de lo suscitado por el trabajo final:

- a. Con base en su experiencia al realizar la tarea final, indique aquellos aspectos del conocimiento didáctico-matemático del profesor que los confrontó cómo profesores de matemáticas en ejercicio. Considere las siguientes preguntas para elaborar su respuesta:
- ¿Con cuáles aspectos sintieron comodidad al momento de diseñar la tarea?
 - ¿Qué aspectos les produjo mayor dificultad al momento de diseñar la tarea?

Abordar el diseño de la tarea final, nos permitió identificar aspectos en los cuales nos sentimos cómodos, tales como la descripción de la potencial actividad matemática por parte de los estudiantes; atendiendo a la construcción en GeoGebra, los posibles casos de exploración que se podrían originar a partir de la situación planteada. De igual manera, la formulación de la meta nos permitió pensar en todos los aspectos que debemos tener en cuenta al momento de planear y diseñar una tarea, sin olvidar la finalidad que tendrá.


Por otra parte, los aspectos que nos produjeron mayor dificultad fueron la formulación de la conjetura y la representación del argumento que emerge de la actividad, por medio del modelo de Toulmin. En estos aspectos, durante el desarrollo de la tarea final, las ideas entre nosotros eran diversas. Esto originó, en muchas ocasiones, fuertes debates en donde cada integrante argumentaba sus ideas para llegar persuadir a los demás. En lo concerniente al uso del modelo de Toulmin, se presentaron dificultades para ubicar de forma correcta los datos y la aserción.

- b. De los aspectos citados en la respuesta al ítem a, ¿cuáles cree usted que debería atender durante su proceso formativo subsiguiente? ¿Imagina maneras mediante las cuales puede hacerlo?

Durante el proceso formativo subsiguiente vemos necesario atender el diseño de tareas escolares. En muchas ocasiones, pensamos que el diseño de tareas era un proceso sencillo que simplemente nos permitía a nosotros como profesores presentar instrucciones a los estudiantes. Pero, durante el desarrollo de esta tarea final, nos hemos percatado que el diseño de tareas es una actividad que enriquece nuestro conocimiento didáctico – matemático. Nos lleva a pensar y formular situaciones del contexto escolar donde damos por hecho muchos conocimientos y asumimos que los estudiantes nos comprenden todas las partes de una tarea.

Este es un proceso de cambio de percepción alrededor del diseño de tareas. Se debe reconocer el diseño de tareas como una estructura que le permite a un educador matemático establecer la meta a la que quiere llegar. Lo anterior, lo lleva a pensar en las formas que debe pensar, formular, presentar y mediar las actividades que los estudiantes deben realizar, sin caer en tareas que no permitan enriquecer un sistema axiomático local y desperdiciando el potencial que tienen todos los procesos matemáticos y los Entornos de Geometría Dinámica (EGD).

Tarea 3: Tarea implementada en Ciclo 3

	COMUNIDAD DE MADRES ESCOLAPIAS – PROVINCIA COLOMBIA			
	COLEGIO MADRE PAULA MONTAL TALLER N°2			
GRADO: 9°A	ASIGNATURA: Geometría	DOCENTE: Omar Martínez Domínguez	FECHA: 21 de septiembre	GESTIÓN PEDAGÓGICA

SITUACIÓN:

Dado un triángulo ABC cualquiera. Sean los puntos D , E y F puntos medio de los lados \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{BC} , respectivamente, y O baricentro del triángulo ABC . ¿Qué condiciones se debe agregar para que los triángulos EOA y FOB sean congruentes?

TAREA:

Para la siguiente situación usted debe:

- Realizar la construcción en GeoGebra garantizando cada una de las condiciones que se piden.
- Explorar (arrastrar, medir, activar rastro, comparar, etc.) la construcción realizada para identificar propiedades invariantes que permitan un acercamiento a la solución de la situación planteada.
- Reportar por medio de pantallazos o videos la exploración realizada. Para esto, narre cada una de las acciones realizadas.
- En una tabla, escribir las condiciones necesarias para la solución (invariante o propiedad geométrica detectada) y lo que se busca garantizar.

Datos necesarios	Condición o condiciones que se deben agregar	Lo que se busca garantizar

- Enunciar una conjetura de la forma Dado (datos) y Si (condición), entonces (lo que se busca garantizar) donde presente las propiedades invariantes encontradas.
- Justificar el por qué la condición que se encontró permite solucionar la situación.

10.6 Anexo 6: Implementación Plan de Acción Ciclo 3

En el presente documento exhibimos cada una de las etapas correspondientes al plan de acción del Ciclo 3.

Etapa 1

En esta primera etapa presentamos las tareas que tomaremos como insumos para nuestro plan de acción. Las tareas se encuentran como anexos, Tarea 1: Alturas y Ortocentro y, Tarea 2: Tarea 2 PME DDC.

Etapa 2

La segunda etapa del plan de acción consiste en la realización de un contraste entre las dos tareas seleccionadas en la etapa anterior. Para esto, tomamos diversos referentes como Gómez et al. (2015) quien con su Análisis de instrucción nos proporciona ojos para comparar la estructura de diseño de una tarea. De igual manera, Solar y Deulofeu (2016) nos aporta una visión para las condiciones que posibilitan promover el desarrollo de la competencia argumentativa en el aula de matemáticas. Finalmente, Jiménez y Carreño (2018) nos aportan fundamentos para el diseño de una tarea matemática que promueva la argumentación.

	Tarea 1	Tarea 2
Descripción	Tarea presentada fuera de la MDM a principio del segundo semestre del año 2020. Esta, se diseña para ser implementada en un curso específico (la tarea no hace claridad del curso) del colegio en el cual labora uno de los profesores. El documento consta de dos partes, una de ellas se compone de conceptos y gráficos que serán solicitados a los estudiantes; mientras que la otra parte, presenta la instrucción.	La tarea fue presentada como requerimiento final de los seminarios Profundización en Matemáticas Elementales y Diseño y Desarrollo Curricular en Matemáticas. La tarea consta de cada uno de los elementos presentados por Gómez et al., (2015). Además de las posibles soluciones que los estudiantes pueden presentar al abordar la tarea, los posibles argumentos de los estudiantes representados con la estructura de Toulmin. Se evidencia una descripción de la población a la cual se dirige el diseño de la tarea. Se listan los objetos primarios matemáticos necesarios para abordar la tarea y finalmente una red conceptual sobre las posibles actividades de los estudiantes.
Requisitos	La tarea permite identificar con facilidad los conocimientos y destrezas que le permiten al estudiante abordar la tarea. Conocimientos: recta, segmento, perpendicularidad, tipos de triángulos, partes de un triángulo, altura de un triángulo e intersección de rectas. Destrezas: Conjeturar, construcciones en EGD (GeoGebra), exploración y reporte de proceso de exploración en EGD y visualización.	La tarea dice explícitamente los conocimientos y destrezas que el estudiante requiere para abordar el problema. Conocimientos: ángulo, segmento, recta perpendicular, punto medio, bisectriz, mediatriz, circuncentro, triángulo rectángulo, triángulo isósceles. Destrezas: Conjeturar, construcciones en EGD (GeoGebra), exploración y reporte de proceso de exploración en EGD, visualización y justificación.
Meta	La meta de la tarea no se encuentra de forma explícita. Pero, se logra identificar de forma implícita. Esto debido a que en varias partes de documento el profesor enfatiza en el término altura y su definición lo que nos permite afirmar que el profesor busca contribuir una dificultad o en error recurrente frente al trabajo con este término y el ortocentro.	La tarea evidencia una meta de aprendizaje clara. Pero, vemos prudente incluir al procedimiento de construcción y conjeturación a los cuales se les da relevancia en la instrucción de la tarea.
Formulación	El documento describe un contexto, proporciona una información inicial y solicita a los estudiantes una información final. El contexto son los conceptos geométricos de altura y ortocentro, y una figura que exhibe la construcción. La información inicial son las instrucciones que el profesor proporciona a los estudiantes para realizar la construcción.	El documento describe un contexto, proporciona una información inicial y solicita a los estudiantes una información final. El contexto es la situación que el profesor les presenta a los estudiantes, en donde se exhiben las condiciones que se deben cumplir en la construcción. La información inicial son las instrucciones que el profesor proporciona a los estudiantes para reportar la construcción.

	La información final son el reporte de la construcción y la exploración, y la conjetura que los estudiantes formulen.	realizar y reportar la exploración y, formular la conjetura. La información final son el reporte de la construcción y la exploración, la conjetura que los estudiantes formulen y las garantías que podrían respaldar la conjetura.
Materiales y recursos	Materiales: GeoGebra. Recursos: dispositivo electrónico (computador, teléfono inteligente, tableta), procesador de texto.	El documento es explícito con referente a los materiales y recursos necesarios y adecuados para el desarrollo de la tarea, estos son: Materiales: GeoGebra. Recursos: dispositivo electrónico (computador, teléfono inteligente, tableta), procesador de texto. Adicional a esto, los profesores hacen referencia al manejo del material por parte de los estudiantes.
Agrupamiento	El documento no permite evidenciar la forma de agrupamiento para abordar la tarea.	El documento es específico en las formas de agrupamiento: <u>grupos de tres personas.</u>
Interacción	En el documento no es posible vislumbrar las posibles interacciones puesto que no se detectan las agrupaciones. En las posibles interacciones que se pueden prever son profesor-estudiante o estudiante-estudiante, no se realiza negociación de significados, ya que estos están dados por el profesor.	El documento es detallado en las diferentes formas de interacción que pueden surgir con la actividad realizada, por lo cual se tiene presente la interacción profesor-estudiante y estudiante-material, no se evidencia las posibles interacciones estudiante-estudiante. Se prevé diferentes formas de mediación del profesor.
Temporalidad	El profesor prevé una secuencia de actividades para abordar la tarea y un tiempo general para el desarrollo de esta, pero no considera tiempos particulares para cada etapa.	El profesor prevé una secuencia de actividades para abordar la tarea y un tiempo general para el desarrollo de esta, pero no considera tiempos particulares para cada etapa.
Tipo de tarea	La tarea es abierta y promueve la conjeturación y la argumentación, pero solo en el convencimiento para sí mismo puesto que, no requiere del convencimiento de los demás con respecto a su respuesta y no se evidencia una gestión del error por lo cual en la socialización es tan solo explicación.	La tarea es abierta y promueve la conjeturación y la argumentación, puesto que permite diferentes procedimientos de construcción y exploración, lo que conlleva a que los estudiantes tomen diferentes posturas y lleguen un acuerdo para identificar cual es la solución más apropiada.
Diferentes procedimientos	La tarea no permite el desarrollo de diferentes procedimientos, puesto que el profesor presenta a los estudiantes una construcción guiada y espera que por medio de la exploración los estudiantes puedan llegar a una de las posibles respuestas.	En el documento se evidencia posibles procedimientos que los estudiantes pueden desarrollar para la solución de la situación. Así mismo, con cada uno de los procedimientos se evidencia una conjetura diferente.
Respuestas abiertas	La tarea solo posibilita una única respuesta posible para solucionar la problemática planteada.	La tarea da la posibilidad que los estudiantes puedan dar variados tipos de respuestas, (varias respuestas correctas) para solucionar la problemática que se plantea.
Posturas diferentes	La tarea no permite la posibilidad que en ella se inserte variadas posturas con respecto a la respuesta y procesos de construcción y exploración o deje la duda de la forma de determinar cuál es la respuesta más certera para la problemática.	La tarea da la posibilidad que en ella se inserte variadas posturas o deje la duda de la forma de determinar cuál es la respuesta más certera para la problemática.

En concordancia con la tabla anterior, en lo que sigue presentamos una síntesis de esta, con algunos comentarios respecto a diversos autores. Con esto, buscamos identificar aquellos aspectos en los cuales las tareas han desarrollado un cambio, centrándonos en las fortalezas y debilidades de cada una. Inicialmente, detectamos que la Tarea 1 no posee, de forma explícita, cada uno de los elementos que Gómez et al. (2015) propone en su Análisis de instrucción. En cambio, la Tarea 2 posee, explícitamente, cada uno de estos elementos. Dichos elementos teóricos se evidencian en los aspectos 2 a 8 de la Tabla anterior.

Lo anterior, se debe a los momentos temporales y requerimientos en los cuales se diseñó cada una de las tareas. La Tarea 1 se diseña bajo los lineamientos del colegio en el cual el profesor C desempeña sus funciones. Bajo la afirmación anterior, podemos decir que algunos de los elementos no se reportan, puesto que el profesor C no ve su relevancia. Por su parte, la Tarea 2 se desarrolla en el marco del programa formativo de la MDM, en donde, durante uno de sus seminarios se aborda el documento de Gómez et al. (2015) para el diseño de tarea matemáticas y este, era requerimiento abordar el diseño de la tarea.

En lo que hace referencia a los requisitos, las dos tareas presentan dicha información, ya sea de forma explícita o implícita. Esto, lo podemos validar por los datos obtenidos en el Estado 1 y 2 del conocimiento de los profesores. En dichos estados se evidencia que para los profesores los temas necesarios para abordar la tarea, así como las destrezas que se buscan desarrollar o fortalecer en los estudiantes son el punto de partida para el diseño de una tarea.

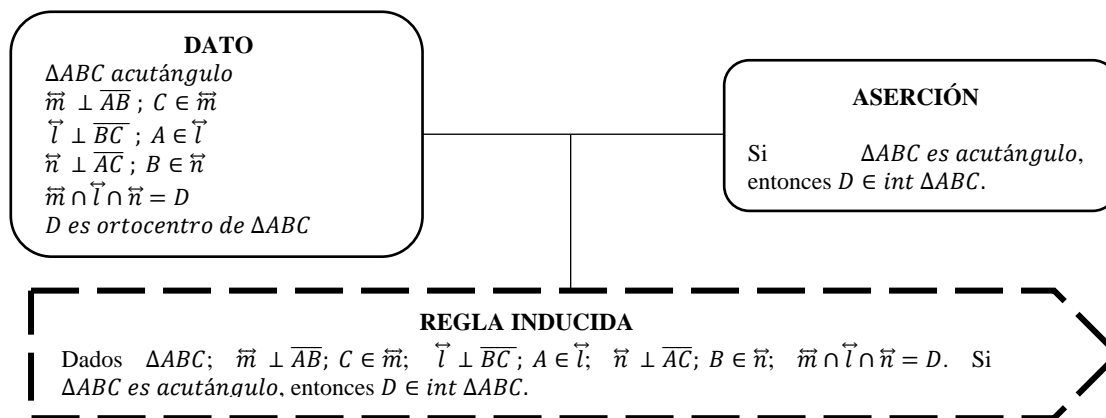
Las dos tareas son abiertas ya que permite a los estudiantes un desarrollo de estrategias para tener un acercamiento a la resolución de la tarea. La Tarea 1 aunque pareciera que su instrucción promueve la argumentación, no es una tarea rica en argumentación, puesto que no permite promover la discusión, los contraejemplos y en particular no permite el convencimiento de los demás por lo que en la socialización realmente busca es la explicación de la situación por parte del estudiante. Es decir, en la actividad matemática el estudiante no requiere convencer a otros, pues no existen posturas contradictorias ni posibles procedimientos de construcción y soluciones a la tarea (Solar y Deulofeu, 2016). Esto se debe, principalmente, a la no distinción de los profesores entre procesos afines a la argumentación, como lo es la explicación. Con respecto a la Tarea 2, podemos observar que promueve los procesos de argumentación. Según Solar y Deulofeu (2016) una tarea promueve la argumentación debe tener las siguientes condiciones: motivar en los estudiantes diferentes procedimientos, respuestas abiertas y posturas diferentes.

Con respecto al manejo de los errores en las dos tareas, en ninguna se tiene en cuenta los errores que pueden surgir a partir de la actividad matemática de los estudiantes. Para Jiménez y Carreño (2018) esto, es de suma importancia puesto que la gestión del error tiene la finalidad de asegurar que las ideas/respuestas equivocadas se puedan utilizar para construir el conocimiento matemático. Por lo anterior, consideramos que la planificación explícita de las posibles soluciones, así como de los errores, posibilitan la forma gestionar las diferentes respuestas y postura de los estudiantes para promover la argumentación.

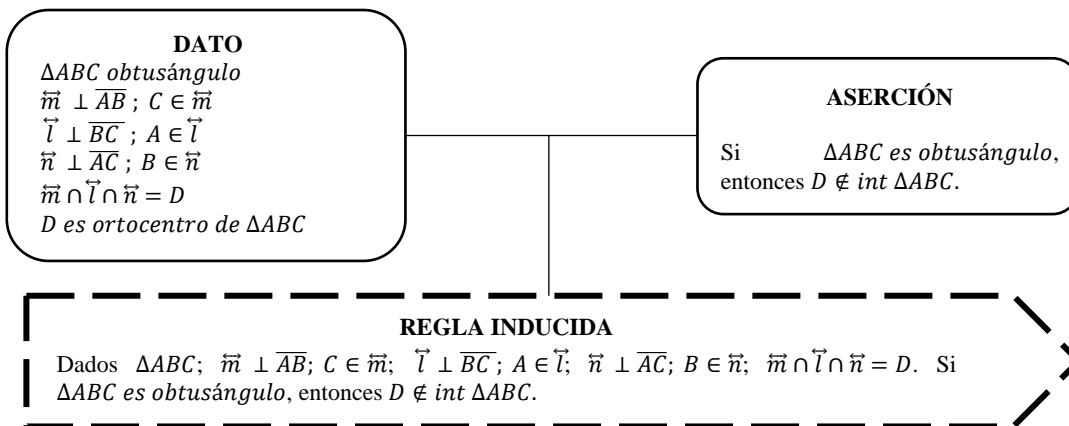
En lo que sigue, presentamos los posibles argumentos que podrían emerger de la actividad matemática desarrollada por los estudiantes en cada una de las tareas abordadas. Para esto, utilizamos la representación de argumentos formales e informales desarrollada por el modelo Toulmin.

Tarea 1:

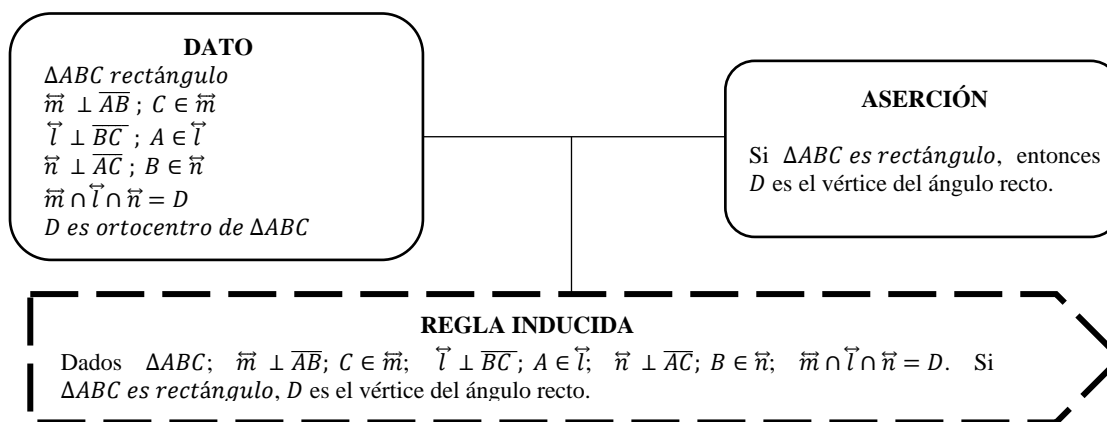
Argumento 1: Inductivo (Argumento informal)



Argumento 2: Inductivo (Argumento informal)

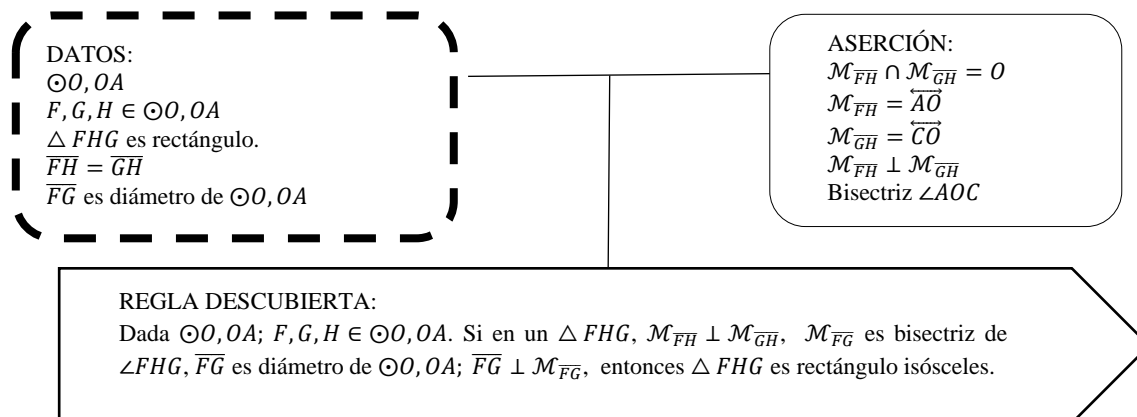


Argumento 3: Inductivo (Argumento informal)



Tarea 2:

Argumento 1: Abductivo (Argumento informal)



Etapa 3

Para la etapa 3 nos proponemos crear un modelo para el diseño de tareas en busca de favorecer la argumentación aprovechando la exploración en Entornos de Geometría Dinámica. Para ello nos basamos en el diseño de Análisis de instrucción que nos proporciona Gómez et al. (2015), las condiciones que posibilitan promover el desarrollo de la competencia argumentativa en el aula de matemáticas que nos aporta Solar y Deulofeu (2016), las características que debe tener el diseño de una tarea matemática que promueva la argumentación de nos propone Jiménez y Carreño (2018), vamos a basarnos en los procesos subyacentes a la actividad demostrativa que nos ofrece Camargo et al. (2006) y las acciones que se fortalecen en el ambiente de aprendizaje apoyado con GeoGebra que nos presenta Reyes (2017). A continuación, presentamos una adaptación de los elementos de una tarea propuestos por Gómez et al. (2015), buscando una estructura sólida para el diseño de tareas que promuevan la argumentación por medio de los EGD (Figura 1).

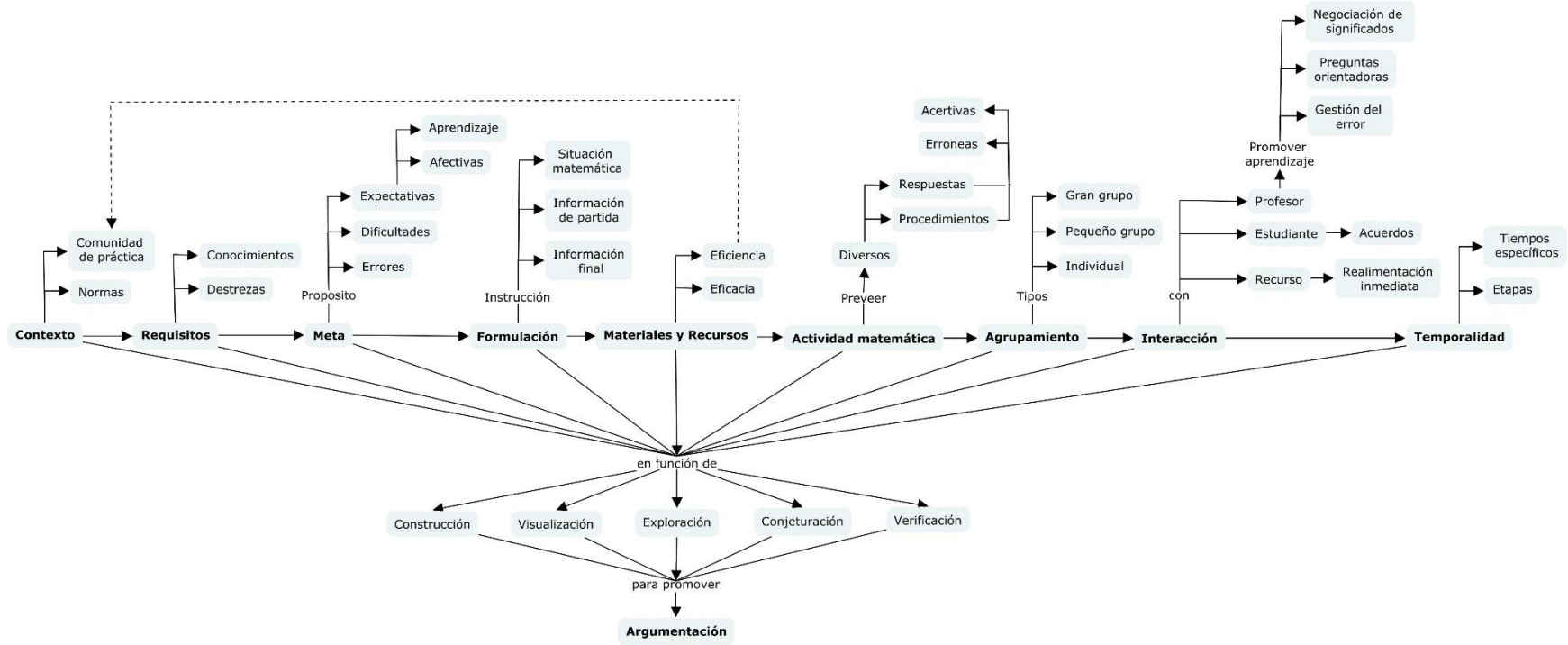


Figura 1: Adaptación del modelo de Gómez et al. (2015) para el diseño de una tarea matemática para promover la argumentación mediante el uso de EGD.

En lo que sigue describimos cada uno de los aspectos que se involucran en el diseño de una tarea escolar que busca favorecer la argumentación aprovechando la exploración en Entornos de Geometría Dinámica. Para esto tomamos como referentes algunas definiciones de Gómez et al. (2015).

Contexto: Al iniciar el diseño de una tarea, el profesor debe tener en cuenta dos aspectos que definen al contexto: la comunidad de práctica y la ubicación geo temporal. Nos referimos a la comunidad de práctica, como un conjunto de individuos que comparten unas reglas que median el accionar de los integrantes, unas expresiones discursivas particulares, un sistema teórico constituido en conjunto, unas normas sociales que favorecen la interacción y un espacio de encuentro, ya sea presencial o virtual. El aspecto geo temporal hace referencia a las diferentes características de la población con respecto al espacio temporal compartido, el ámbito social y lo económico.

Requisitos: Los requisitos de la tarea hacen referencia a aquellos conocimientos y destrezas previos que, de acuerdo con el nivel educativo, los estudiantes necesitan para abordar una situación matemática. Estos, se vinculan directamente con las metas y el contenido matemático de la tarea (Gómez et al., 2015). Los requisitos deben ir vinculados directamente con los procesos matemáticos de construcción, visualización, exploración y verificación, en cada uno de sus niveles de desarrollo. Lo anterior, visto como destrezas que favorecen la actividad argumentativa en los estudiantes se describen en la Tabla 1, y que el profesor debe tener presente para identificar el nivel de cada uno de los procesos en la comunidad de práctica.

	Construcción	Visualización	Exploración	Conjeturación	Verificación
Nivel	Uso de las diferentes herramientas del EGD para elaborar una representación de un objeto matemático o situación que involucre la interacción o relación de diversos objetos matemáticos	Mirada sobre una representación gráfica, dada o construida, que enfoca elementos de ésta para detectar, percibir o evocar propiedades geométricas	Investigación empírica hecha sobre una representación gráfica, a través de acciones tales como medir, calcular, construir, contrastar” con el objetivo de “descubrir propiedades o relaciones entre propiedades.	Establecimiento de enunciados del que se tiene alto grado de seguridad, expresado en forma general, como una implicación.	Acciones visibles sobre la representación gráfica para poner a prueba la conjeturación establecida, como respuesta a un cuestionamiento externo.
N1	Elabora representaciones blandas de objetos geométricos sin tener en cuenta sus características o propiedades.	No extrae información diferente a la dada en el enunciado verbal o gráfico.	Elabora una sola representación y actúa sobre ella.	Enuncia una afirmación falsa o No enuncia afirmaciones ni propiedades	No introduce nuevas acciones de comprobación
N2	Elabora representaciones blandas de objetos geométricos teniendo en cuenta algunas de sus características o propiedades.	Extrae nueva información sobre propiedades y relaciones geométricas, pero no es pertinente para lo que se busca o es información parcial.	Elabora una representación de un caso extremo y actúa sobre ella.	Enuncia una afirmación parcial no relacionada con el objetivo del problema.	Introduce acciones parciales de intervención y comprobación.
N3	Elabora representaciones semiblandas de objetos geométricos teniendo en cuenta algunas de sus	Extrae nueva información parcial sobre propiedades y relaciones geométricas, que es pertinente para la solución.	Elabora varias representaciones y actúa solo sobre ellas sin un criterio identificado.	Enuncia una afirmación correcta pero parcial.	Introduce nuevas acciones de intervención y comprobación

	Construcción	Visualización	Exploración	Conjeturación	Verificación
Nivel	Uso de las diferentes herramientas del EGD para elaborar una representación de un objeto matemático o situación que involucre la interacción o relación de diversos objetos matemáticos	Mirada sobre una representación gráfica, dada o construida, que enfoca elementos de ésta para detectar, percibir o evocar propiedades geométricas	Investigación empírica hecha sobre una representación gráfica, a través de acciones tales como medir, calcular, construir, contrastar” con el objetivo de “descubrir propiedades o relaciones entre propiedades.	Establecimiento de enunciados del que se tiene alto grado de seguridad, expresado en forma general, como una implicación.	Acciones visibles sobre la representación gráfica para poner a prueba la conjeturación establecida, como respuesta a un cuestionamiento externo.
	características o propiedades.				
N4	Elabora representaciones semi robustas o robustas teniendo en cuenta las características o propiedades de los objetos geométricos y las condiciones iniciales de la situación.	Extrae nueva información sobre propiedades y relaciones geométricas, que es pertinente para la solución.	Elabora varias representaciones y actúa solo sobre ellas con un criterio identificado.	Enuncia una afirmación correcta que corresponde con el objetivo del problema.	
Razonamiento asociado a la justificación					
Generación de un discurso que incluye ideas pertinentes, conectada a partir de: relaciones geométricas identificadas en la representación inicial, relacionada geométricas detectadas en casos extremos, información nueva que introduce por asociación con las figuras.					

Tabla 1: Adaptación de niveles para los procesos involucrados en la promoción de la argumentación.

El profesor es el único agente que identifica si sus estudiantes han desarrollado destrezas o habilidades en cada uno de los procesos matemáticos vinculados. La tabla presentada anteriormente es una adaptación de la caracterización de la actividad demostrativa formulada por Camargo et al. (2006). Dicha adaptación parte de una adaptación previa realizada por Reyes (2017).

Meta: Las metas de una tarea matemática escolar que promuevan la argumentación deben ir enfocadas a los procesos vinculados a esta, como lo es la conjeturación o la verificación. A esto añadimos, que los procesos de construcción, visualización y exploración realizan un trabajo implícito en cumplimiento de la meta. De igual manera, la meta debe tener un propósito ligado a aspectos de las expectativas de aprendizaje y de tipo afectivo a los que la tarea pretende contribuir. Por último, el profesor puede enfocar la meta a aquellos errores y dificultades que espera que la tarea contribuya a superar.

Formulación: La formulación de la tarea se refiere al texto o instrucción que el profesor proporciona a los estudiantes y describe una situación matemática, proporciona una información inicial y requiere que los estudiantes produzcan una información final como su solución (Gómez et al., 2015). Estas instrucciones deben tener en cuenta el contexto previamente analizado y el nivel de los procesos vinculados. Se recomienda que en el desarrollo de la tarea se realice un recorrido por cada uno de los procesos de construcción, visualización, exploración, conjeturación y verificación; enfatizando aquel proceso en el cual se busca desarrollar un mayor nivel de destreza. Por ejemplo, al momento de realizar la exploración se puede pedir a los estudiantes reportar cada una de las acciones realizadas y su finalidad. En el proceso de conjeturación, en niveles iniciales, el profesor puede usar plantillas discursivas que permitan la construcción guiada de una conjetura. Finalmente, el lenguaje utilizado para la presentación de la tarea debe ser cercano y claro para los estudiantes, evitando tecnicismos innecesarios.

Nive l	Descriptor	Subnive l	Proceso matemático				
			Construcción	Visualización	Exploración	Conjeturación	Verificación
0	La mayoría de los elementos de la población no ha tenido un acercamiento a un EGD, en este nivel se desarrolla una fase instructiva con el EGD.	a	<i>Guiado:</i> El profesor proporciona los pasos de construcción en GeoGebra o proporciona la construcción a los estudiantes.	<i>Guiado:</i> Por medio de preguntas orientadoras el profesor apoya a los estudiantes para la detección de propiedades geométricas en la construcción.	<i>Guiado:</i> El profesor orientará el uso de herramientas del EGD o tipo de arrastres, que permitan la detección de invariantes en la construcción por parte de los estudiantes.	<i>Guiado:</i> El profesor explicará la estructura condicional Si... Entonces..., para la formulación de una conjetura.	<i>Guiado:</i> Por medio de preguntas orientadoras el profesor lleva a los estudiantes a la detección de garantías que soporten la veracidad de la conjetura.
1	La mayoría de los elementos de la población han afianzado los conocimientos de los protocolos de construcción y las herramientas del EGD, por lo cual se solicita una descripción del proceso de construcción para compartir experiencias, identificar errores y el porqué de ellos.	a	<i>Autónomo:</i> Los estudiantes reconocen cada una de las herramientas del EGD y realizan construcciones blandas o robustas que cumplan con las condiciones iniciales que se plantean en una situación.	<i>Guiado:</i> Por medio de preguntas orientadoras el profesor apoya a los estudiantes para la detección de propiedades geométricas en la construcción.	<i>Guiado:</i> El profesor orientará el uso de herramientas del EGD o tipo de arrastres, que permitan la detección de invariantes en la construcción por parte de los estudiantes.	<i>Guiado:</i> El profesor explicará la estructura condicional Si... Entonces..., para la formulación de una conjetura.	<i>Guiado:</i> Por medio de preguntas orientadoras el profesor lleva a los estudiantes a la detección de garantías que soporten la veracidad de la conjetura.
2	La mayoría de la población ha afianzado el proceso de construcción en un EGD, en este nivel se intentará afianzar los procesos de visualización y exploración, por lo cual se solicita al estudiante una descripción durante el proceso de construcción y exploración, se pedirá reporte sobre la información que puede ser extraída de la	a	<i>Autónomo:</i> Los estudiantes reconocen cada una de las herramientas del EGD y realizan construcciones blandas o robustas que cumplan con las condiciones iniciales que se plantean en una situación.	<i>Autónomo:</i> El estudiante tiene la habilidad de detectar e informar propiedades geométricas en la construcción. El profesor otorga la pertinencia de la información detectada.	<i>Guiado:</i> El profesor orientará el uso de herramientas del EGD o tipo de arrastres, que permitan la detección de invariantes en la construcción por parte de los estudiantes.	<i>Guiado:</i> El profesor explicará la estructura condicional Si... Entonces..., para la formulación de una conjetura.	<i>Guiado:</i> Por medio de preguntas orientadoras el profesor lleva a los estudiantes a la detección de garantías que soporten la veracidad de la conjetura.
		b	<i>Autónomo:</i> Los estudiantes reconocen cada una de las herramientas	<i>Guiado:</i> Por medio de preguntas orientadoras el profesor apoya a los estudiantes	<i>Autónomo:</i> El estudiante analiza cada una de las realimentaciones que el EGD les proporciona	<i>Guiado:</i> El profesor explicará la estructura condicional Si... Entonces...,	<i>Guiado:</i> Por medio de preguntas orientadoras el profesor lleva a los estudiantes a

Nive 1	Descriptor	Subnive 1	Proceso matemático				
			Construcción	Visualización	Exploración	Conjeturación	Verificación
	construcción de acuerdo con las acciones realizadas en el EGD; se propone al estudiante acciones guiadas para la conjetura y la justificación.		del EGD y realizan construcciones blandas o robustas que cumplan con las condiciones iniciales que se plantean en una situación.	para la detección de propiedades geométricas en la construcción.	a sus acciones, para tomar decisiones. Así mismo, detecta invariantes y las reporta. El profesor otorga la pertinencia o parcialidad de la información detectada.	para la formulación de una conjetura.	la detección de garantías que soporten la veracidad de la conjetura.
		c	<i>Autónomo:</i> Los estudiantes reconocen cada una de las herramientas del EGD y realizan construcciones blandas o robustas que cumplan con las condiciones iniciales que se plantean en una situación.	<i>Autónomo:</i> El estudiante tiene la habilidad de detectar e informar propiedades geométricas en la construcción. El profesor otorga la pertinencia o parcialidad de la información detectada.	<i>Autónomo:</i> El estudiante analiza cada una de las realimentaciones que el EGD les proporciona a sus acciones, para tomar decisiones. Así mismo, detecta invariantes y las reporta. El profesor otorga la pertinencia o parcialidad de la información detectada.	<i>Guiado:</i> El profesor explicará la estructura condicional Si... Entonces..., para la formulación de una conjetura.	<i>Guiado:</i> Por medio de preguntas orientadoras el profesor lleva a los estudiantes a la detección de garantías que soporten la veracidad de la conjetura.
3	La mayoría de la población ha afianzado el proceso de construcción, visualización y exploración en un EGD. En este nivel se intentará afianzar los procesos de conjeturación para lo cual los estudiantes plantean conjeturas y en forma general construye sus propios conceptos y elabora sus propias conclusiones. Se busca establecer relaciones, contenidos conceptuales y procedimentales	a	<i>Autónomo:</i> Los estudiantes reconocen cada una de las herramientas del EGD y realizan construcciones blandas o robustas que cumplan con las condiciones iniciales que se plantean en una situación. <i>Dado:</i> En algunos casos, el profesor puede proporcionar la construcción, buscando enfatizar los	<i>Autónomo:</i> El estudiante tiene la habilidad de detectar e informar propiedades geométricas en la construcción. El profesor otorga la pertinencia o parcialidad de la información detectada.	<i>Autónomo:</i> El estudiante analiza cada una de las realimentaciones que el EGD les proporciona a sus acciones, para tomar decisiones. Así mismo, detecta invariantes y las reporta. El profesor otorga la pertinencia o parcialidad de la información detectada.	<i>Autónomo:</i> Los estudiantes durante los procesos anteriores detectan los datos, la garantía y la aserción. En otras palabras, los estudiantes detectan que información se le solicita y que información le proporciona la situación. A partir de esta información, y por medio de estructura condicional, formulan una conjetura en escritura formal.	<i>Guiado:</i> Por medio de preguntas orientadoras el profesor lleva a los estudiantes a la detección de garantías que soporten la veracidad de la conjetura.

Nive l	Descriptor	Subnive l	Proceso matemático					
			Construcción	Visualización	Exploración	Conjeturación	Verificación	
	s que cada estudiante ha adquirido, los cuales se ponen a prueba en el EGD.		otros procesos.					
4	La mayoría de la población ha afianzado el proceso de construcción, visualización y exploración en un EGD y el proceso de la elaboración de una conjetura de la forma Si... entonces... En este nivel se validan los resultados obtenidos, los estudiantes deben socializar en gran grupo el resultado de las incógnitas encontradas en forma de conjetura, con el fin de identificar si el uso del sistema axiomático y de creencias fue acertado y si encontraron las propiedades y características de las figuras construidas, visualizadas y exploradas. Con el fin de llegar a convencer y persuadir al grupo y llegar a acuerdos sobre la respuesta más pertinente.	a	<p><i>Autónomo:</i> Los estudiantes reconocen cada una de las herramientas del EGD y realizan construcciones blandas o robustas que cumplan con las condiciones iniciales que se plantean en una situación.</p> <p><i>Dado:</i> En algunos casos, el profesor puede proporcionar la construcción, buscando enfatizar los otros procesos.</p>	<p><i>Autónomo:</i> El estudiante tiene la habilidad de detectar e informar propiedades geométricas en la construcción. El profesor otorga la pertinencia o parcialidad de la información detectada.</p>	<p><i>Autónomo:</i> El estudiante analiza cada una de las realimentaciones que el EGD les proporciona a sus acciones, para tomar decisiones. Así mismo, detecta invariantes y las reporta. El profesor otorga la pertinencia o parcialidad de la información detectada.</p>	<p><i>Autónomo:</i> Los estudiantes durante los procesos anteriores detectan los datos, la garantía y la aseveración. A partir de esta información, y por medio de estructura condicional, formulan una conjetura en escritura formal.</p>	<p><i>Autónomo:</i> El estudiante aporta garantías que justifiquen y validen cada una de las conjeturas. Las garantías se pueden obtener desde un sistema de conocimientos local o de creencias.</p>	

Tabla 2: Descriptores de niveles para los procesos involucrados en la promoción de la argumentación.

Materiales y recursos: Para el diseño de tareas que promuevan la argumentación por medio de los EGD, se debe tener en cuenta que los recursos son aquellos artefactos que me permite conectividad con el material de EGD. En otras palabras, un recurso es cualquier medio que se pueda implementar en los procesos de enseñanza – aprendizaje, por ejemplo, el tablero o el papel y lápiz.

Un material se diseña con fines didácticos. GeoGebra o el Geoplano son ejemplos de un material. Para ello se debe tener en cuenta el contexto en lo correspondiente a lo geo temporal.

Al momento de diseñar una tarea, se deben tener en cuenta la eficiencia y eficacia de los materiales y recursos. La eficiencia se refiere a la disponibilidad y buen uso de los materiales y recursos (Gómez et al., 2015). Implementar una tarea mediada por el uso de un EGD como GeoGebra, requiere que el profesor analice la infraestructura de la institución educativa. Algunos materiales requieren de una preparación previa por parte del profesor y los estudiantes. En otros casos, se debe en cuenta el acceso al material, ya que algunos son de acceso libre y otros son de pago. La eficacia hace referencia a si el material o recurso puede contribuir al logro de la meta planteados al inicio del diseño. También se debe analizar si los materiales y recursos seleccionados son pertinentes e indispensables para la solución de la tarea. Por ejemplo, no es eficaz el diseño de una tarea centrado en un EGD, si la solución más práctica se obtiene por medio de otro recurso como lápiz y papel.

Actividad matemática: Se puede entender la actividad como el conjunto de acciones desarrolladas por los participantes, en el contexto particular de la comunidad de práctica. La actividad se reconoce en las acciones de los participantes en aras de la consecución de la solución de la tarea, en esta actividad se deben considerar las posibles acciones, tanto asertivas como erróneas, que los estudiantes podrían realizar en el marco de la instrucción presentada por el profesor. La actividad matemática le permite al profesor identificar en que momentos de la tarea se pueden generar argumentos en los estudiantes. Si miramos los procesos de construcción, visualización, exploración, conjeturación y verificación, podemos afirmar que la exploración que los estudiantes realizan a partir de una construcción geométrica se evidencia por medio de la conjeturación y la verificación.

Agrupamiento: El profesor debe saber cuáles son las etapas de la tarea que ha diseñado y como estas etapas benefician el proceso de argumentación. Agrupamientos como individual, en parejas, pequeño grupo o gran grupo promueven diferentes interacciones que favorecen el surgimiento de partes de un argumento o la conformación de argumentos individuales o grupales.

Interacciones: Cuando el profesor diseña una tarea que aborda contenido matemático, la interacción que se realiza por parte de los miembros de la comunidad de practica se torna relevante. La importancia de prever las formas de interacción que se pueden dar cuando los estudiantes abordan una tarea radica en la posibilidad de detectar aciertos y posibles errores en la actividad matemática. Tener en cuenta estos escenarios, otorga al profesor la oportunidad de diseñar posibles planes de acción que le permitan reaccionar y lograr desarrollar de la forma más optima posible cada uno de los procesos matemáticos, en busca de la promoción de la argumentación.

Al momento de prever las interacciones que sucederán durante el desarrollo de la tarea, es aconsejable postular diversas preguntas orientadoras que le permitan a los estudiantes superar errores o momentos de frustración y bloqueos que impidan obtener la solución. De igual manera, las preguntas se pueden diseñar con la intencionalidad de obtener información que sea relevante para el profesor. Por ejemplo, se puede preguntar a un estudiante si un punto de una construcción es móvil o fijo; buscando detectar si existe una destreza para realizar construcciones robustas que garanticen una situación matemática.

Un factor relevante en la interacción, son las diversas formas de agrupamiento que un profesor puede plantear para el desarrollo de una tarea o partes de esta. El profesor debe tener presente que las interacciones van relacionadas con la forma de agrupamiento. Esto, se debe a que aprender matemáticas implica la capacidad de proponer soluciones a un problema, comunicar esas soluciones, reconocer las soluciones de otras personas y negociar significados para llegar a acuerdos. Los estudiantes aprenden cuando, para abordar el reto que la tarea implica, ponen en juego su conocimiento, negocian la solución con sus compañeros y el profesor, defienden la posición propia, critican la posición de los compañeros, llegan a acuerdos sobre una solución común y la comunican a los demás (Gómez et al., 2015). Debido a lo anterior, estos momentos de interacción, promueven el surgimiento de argumentos, ya sea de forma explícita o con algunos de sus elementos de forma implícita. Por ejemplo, un estudiante cuando defiende su postura puede presentar de forma explícita los datos que tomó en cuenta y, manifestar una aserción que se soporta por una garantía de forma implícita, que todo el grupo acepta como verídica.

Temporalidad: El profesor puede prever que una tarea matemática se desarrolle como una secuencia de etapas. En cada etapa, el profesor puede establecer qué parte de la formulación de la tarea se realiza, qué materiales y recursos se utilizan, de qué manera se agrupan los estudiantes y qué formas de interacción desea promover (Gómez et al., 2015). La duración de cada una de las etapas debe estar ligada al proceso matemático al que el profesor quiera realizar énfasis. Por ejemplo, si el profesor quiere realizar un proceso guiado podrá destinar un tiempo menor, en comparación a un proceso autónomo donde el estudiante necesita un mayor espacio temporal para interactuar con sus compañeros o con el material, en el caso de un EGD.

En correspondencia con lo preliminar, el proceso argumentativo lo fundamentamos en cinco procesos matemáticos: construcción, visualización, exploración, conjeturación y verificación. Desde nuestro punto de vista, estos procesos promueven en los estudiantes el surgimiento de argumentos durante la actividad matemática. Así mismo, para Camargo et al. (2006) la actividad demostrativa se concreta en una serie de acciones de índole heurística involucradas en los últimos cuatro procesos. En nuestro caso, vemos prudente anexar el proceso de construcción, ya que permite a los estudiantes poner en juego diversos conocimientos; tales como definiciones de objetos geométricos para buscar que una construcción garantice una situación propuesta.

Etapa 4

Para esta etapa presentamos un diseño de tarea fundamentado en las adaptaciones realizadas en la etapa anterior. A continuación, exhibimos de forma explícita cada uno de los aspectos que se tomaron en cuenta para el diseño de la tarea.

Contexto

Los estudiantes que pertenecen a la comunidad de práctica son de grado noveno del colegio Madre Paula Montal, ubicado al sur – oriente de la ciudad de Bogotá. La edad de los estudiantes se encuentra dentro del intervalo de 13 a 15 años. El estrato socio – económico de la población es dos. Los estudiantes no cuentan con recursos tecnológicos suficientes para trabajar individual en las instalaciones del colegio, aunque es posible realizar grupos de trabajo. Esta población la consideramos una comunidad de práctica, puesto que los estudiantes y el profesor comparten un mismo espacio y momento histórico. En este, tienen intereses afines y por medio de interacciones y reflexiones se llegan a negociaciones y acuerdos de significados; teniendo en cuenta normas que median la actuación y comunicación.

Los estudiantes están acostumbrados a interactuar con herramientas básicas de un EGD como GeoGebra y en lápiz y papel, de los cuales predomina el uso del lápiz y papel. El manejo del recurso por parte de los estudiantes se limita a construcciones y exploraciones guiadas por el docente, en donde el estudiante da cuenta de las propiedades de los objetos geométricos que se quieren trabajar.

Dentro de las normas socio – matemáticas se tiene que i) las definiciones de los objetos geométricos son verdades y están dadas por el docente; ii) las imágenes que se presentan en un EGD se pueden tomar como parte de una justificación; iii) los procedimientos y justificaciones dadas por los estudiantes alrededor de una actividad pueden ser parte de una demostración; iv) los pocos conceptos concebidos de la exploración realizada por los estudiantes, pasan a formar parte del sistema axiomático local, siempre y cuando el profesor lo valide y; v) al momento de definir un objeto geométrico se usa un lenguaje y escritura matemática formal.

De acuerdo con las características del grupo, vemos prudente la ubicación de la población en un nivel 2 de la promoción del proceso de argumentación. Por lo cual las tareas que se recomienda proponer a los estudiantes de este nivel son para fortalecer y afianzar el proceso de visualización y exploración. Los estudiantes han tenido un acercamiento con el EGD y el proceso de construcción se ha venido consolidando. Por su parte, el proceso de conjeturación y verificación debe guiado por el profesor ya que ellos aún están en vía de desarrollar habilidades para la formulación y justificación de las diversas afirmaciones que se realizan durante la actividad matemática.

Requisitos

En este apartado, presentamos aquellos conocimiento y destrezas que los estudiantes necesitan para abordar la tarea planteada.

Conocimientos	Destrezas / Habilidades
<ul style="list-style-type: none"> • Punto medio (Definición). • Segmento (Definición). • Ángulo (Definición). • Triángulo (Definición). • Tipos de triángulos. • Mediana (Definición). • Baricentro (Definición). • Congruencia entre triángulos (Criterios). • Mediatriz (Definición por lugar geométrico). 	<ul style="list-style-type: none"> • Realizar construcciones blandas en EGD. • Identificar información parcial en la construcción sobre propiedades y relaciones geométricas. • Interactuar con la construcción por medio de arrastres libres, mediciones y comparaciones. • Reportar afirmaciones parciales que sean posibles soluciones a la situación planteada.

Meta

Formular una conjetura a partir de las condiciones que garantizan la solución de una situación; involucrando la visualización y exploración de una construcción en GeoGebra que envuelve puntos y líneas notables de un triángulo y, recurriendo al trabajo grupal para reconocer diferentes puntos de vista y compararlos.

Formulación

A continuación, presentamos la situación y tarea diseñada para ser implementada con los estudiantes.

SITUACIÓN:

Dado un triángulo ABC cualquiera. Sean los puntos D , E y F puntos medio de los lados \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{BC} , respectivamente, y O baricentro del triángulo ABC . ¿Qué condiciones se debe agregar para que los triángulos EOA y FOB sean congruentes?

TAREA:

Para la siguiente situación usted debe:

- g. Realizar la construcción en GeoGebra garantizando cada una de las condiciones que se piden.
- h. Explorar (arrastrar, medir, activar rastro, comparar, etc.) la construcción realizada para identificar propiedades invariantes que permitan un acercamiento a la solución de la situación planteada.
- i. Reportar por medio de pantallazos o videos la exploración realizada. Para esto, narre cada una de las acciones realizadas.
- j. En una tabla, escribir los datos necesarios, las condiciones necesarias para la solución (invariante o propiedad geométrica detectada) y lo que se busca garantizar.

Datos necesarios	Condición o condiciones que se deben agregar	Lo que se busca garantizar

- k. Enunciar una conjetura de la forma Dado (*datos*) y Si (*condición*), entonces (*lo que se busca garantizar*) donde presente las propiedades invariantes encontradas.
- l. Justificar el por qué la condición que se encontró permite solucionar la situación.

Materiales y recursos

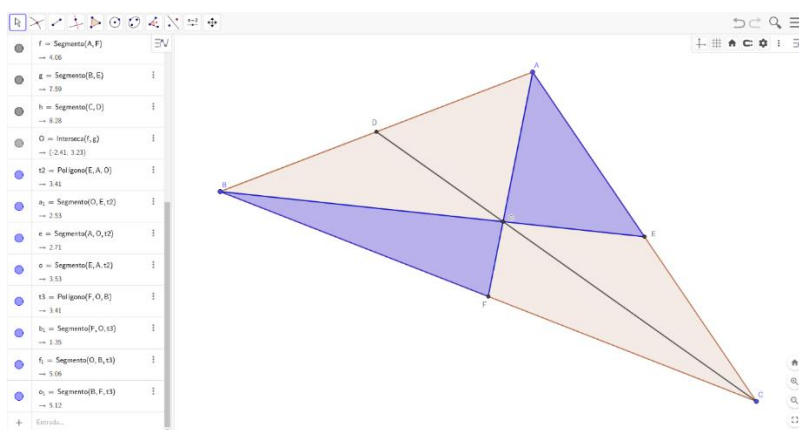
Para esta tarea, los materiales son GeoGebra y los recursos necesarios son dispositivos electrónicos (celular, computador) y un procesador de texto e imágenes (Word). La pertinencia de GeoGebra como material, radica en la interactividad que el EGD proporciona a los estudiantes. En el momento donde el estudiante realiza una construcción e interactúa con ella, puede tomar decisiones a partir de la realimentación que el programa le otorga. En la exploración con la herramienta digital se originan argumentos o partes de argumentos, Por ejemplo, la detección de una invariante como puede ser la condición geométrica de una figura para garantizar la solución de la situación planteada.

Actividad matemática

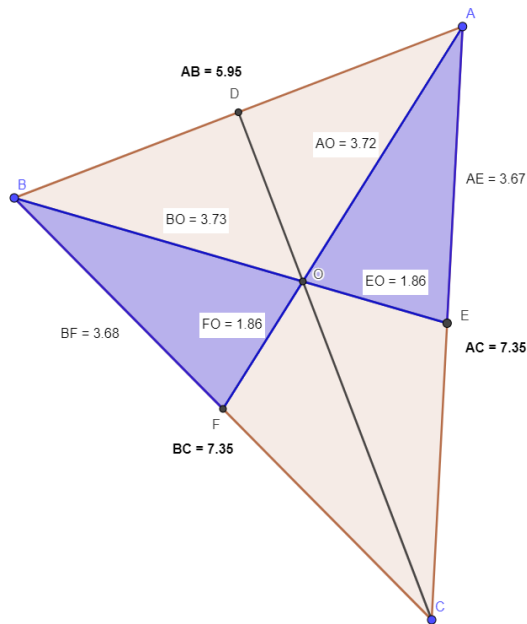
Para el diseño de esta tarea, tuvimos en cuenta aquellos procedimientos y respuestas correctas y poco asertivas que los estudiantes podrían presentar como producto. En este caso, previmos tres posibles soluciones correctas y una posible solución errónea. En lo que sigue, presentamos dichos resultados.

Posible actividad matemática correcta 1

- a. Realizar la construcción en GeoGebra garantizando cada una de las condiciones que se piden.



- b. Explorar (arrastrar, medir, activar rastro, comparar, etc.) la construcción realizada para identificar propiedades invariantes que permitan un acercamiento a la solución de la situación planteada.



- c. Reportar por medio de pantallazos o videos la exploración realizada. Para esto, narre cada una de las acciones realizadas.

- En el proceso de exploración, se realizan las mediciones de cada uno de los lados de los triángulos ABC , EOA y FOB en los cuales se centra el problema.
- Para obtener la congruencia de los triángulos EOA y FOB se realiza un arrastre libre de los puntos A , B y C .
- Lo anterior, permite evidenciar que el arrastre del punto C es el correcto para obtener que las medidas de los lados correspondientes de los triángulos EOA y FOB sean iguales.
- Al lograr la congruencia de los triángulos EOA y FOB se puede observar en la construcción que el triángulo ABC es isósceles.

- d. En una tabla, escribir los datos necesarios, las condiciones necesarias para la solución (invariante o propiedad geométrica detectada) y lo que se busca garantizar.

Datos necesarios	Condición o condiciones que se deben agregar	Lo que se busca garantizar
<ul style="list-style-type: none"> • Triángulo ABC. • D, E, F puntos medios de puntos medio de los lados \overline{AB}, \overline{AC} y \overline{BC}, respectivamente. • O baricentro del triángulo ABC. 	Triángulo ABC isósceles.	Congruencia de los triángulos EOA y FOB .

- e. Enunciar una conjetura de la forma Dado (datos). Si (condición), entonces (lo que se busca garantizar) donde presente las propiedades invariantes encontradas.

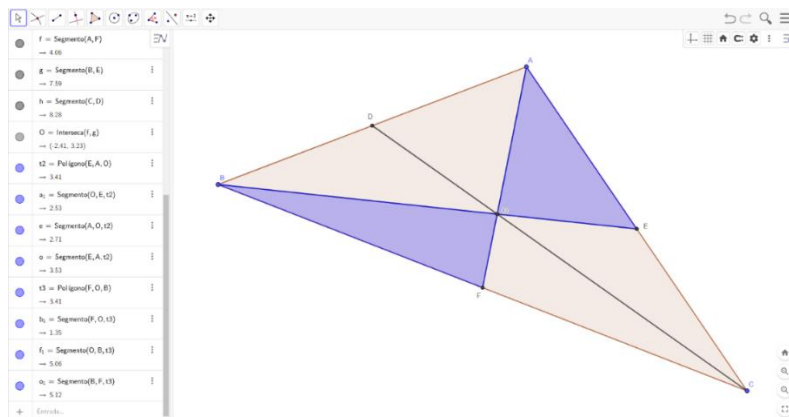
Dado el triángulo ABC ; D, E, F puntos medios de puntos medio de los lados \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{BC} , respectivamente; y O baricentro del triángulo ABC . Si el triángulo ABC es isósceles, entonces los triángulos EOA y FOB son congruentes.

- f. Justificar el por qué la condición que se encontró permite solucionar la situación.

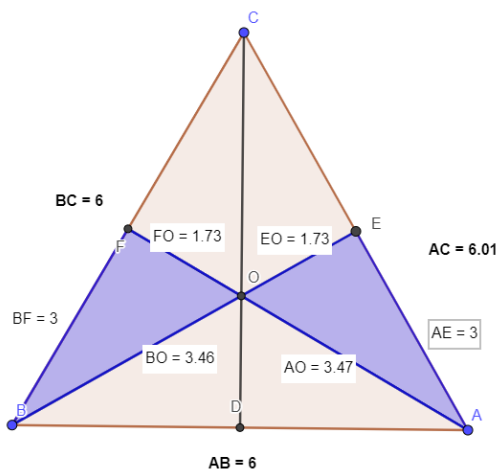
Si el triángulo ABC es isósceles se puede garantizar que los segmentos BF y AE congruentes, puestos que los segmentos BC y AC son congruentes. De igual manera, las longitudes de los segmentos \overline{FO} y \overline{EO} son congruentes y, los segmentos \overline{BO} y \overline{AO} también son congruentes.

Possible actividad matemática correcta 2

a. Realizar la construcción en GeoGebra garantizando cada una de las condiciones que se piden.



b. Explorar (arrastrar, medir, activar rastro, comparar, etc.) la construcción realizada para identificar propiedades invariantes que permitan un acercamiento a la solución de la situación planteada.



c. Reportar por medio de pantallazos o videos la exploración realizada. Para esto, narre cada una de las acciones realizadas.

- En el proceso de exploración, se realizan las mediciones de cada uno de los lados de los triángulos ABC , EOA y FOB en los cuales se centra el problema.
- Para obtener la congruencia de los triángulos EOA y FOB se realiza un arrastre libre de los puntos A , B y C .
- Lo anterior, permite evidenciar que el arrastre de los puntos A , B y C posibilitan formar un triángulo equilátero, que a su vez permite obtener que las medidas de los lados correspondientes de los triángulos EOA y FOB sean iguales.

d. En una tabla, escribir los datos necesarios, las condiciones necesarias para la solución (invariante o propiedad geométrica detectada) y lo que se busca garantizar.

Datos necesarios	Condición o condiciones que se deben agregar	Lo que se busca garantizar
<ul style="list-style-type: none"> • Triángulo ABC. • D, E, F puntos medios de puntos medio de los lados AB, AC y BC, respectivamente. • O baricentro del triángulo ABC. 	Triángulo ABC equilátero.	Congruencia de los triángulos EOA y FOB .

e. Enunciar una conjetura de la forma Dado (datos). Si (condición), entonces (lo que se busca garantizar) donde presente las propiedades invariantes encontradas.

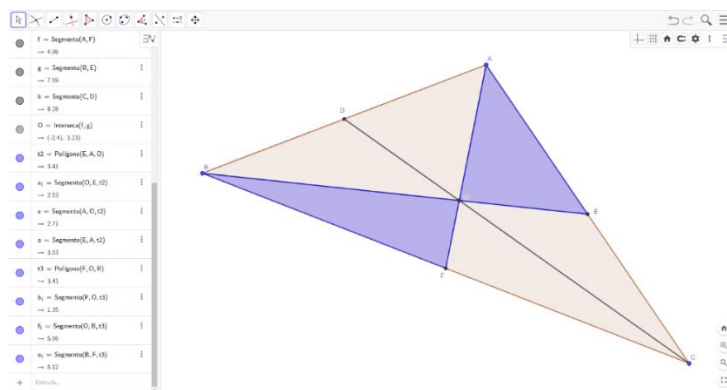
Dado el triángulo ABC ; D, E, F puntos medios de puntos medio de los lados AB, AC y BC , respectivamente; y O baricentro del triángulo ABC . Si el triángulo ABC es equilátero, entonces los triángulos EOA y FOB son congruentes.

f. Justificar el por qué la condición que se encontró permite solucionar la situación.

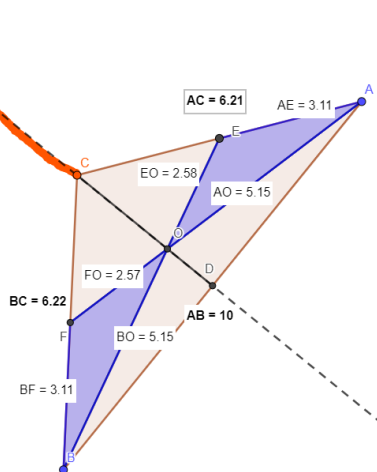
Si el triángulo ABC es equilátero se puede garantizar que los segmentos BF y AE congruentes, puestos que los segmentos BC y AC son congruentes. De igual manera, las longitudes de los segmentos FO y EO son congruentes y, los segmentos BO y AO también son congruentes.

Possible actividad matemática correcta 3

a. Realizar la construcción en GeoGebra garantizando cada una de las condiciones que se piden.



b. Explorar (arrastrar, medir, activar rastro, comparar, etc.) la construcción realizada para identificar propiedades invariantes que permitan un acercamiento a la solución de la situación planteada.



c. Reportar por medio de pantallazos o videos la exploración realizada. Para esto, narre cada una de las acciones realizadas.

- En el proceso de exploración, se realizan las mediciones de cada uno de los lados de los triángulos ABC , EOA y FOB en los cuales se centra el problema.
- Para obtener la congruencia de los triángulos EOA y FOB se realiza un arrastre libre de los puntos A , B y C .
- Lo anterior, permite evidenciar que el arrastre del punto C es el correcto para obtener que las medidas de los lados correspondientes de los triángulos EOA y FOB sean iguales.
- Al lograr la congruencia de los triángulos EOA y FOB se puede observar una invariante. El punto C de los triángulos EOA y FOB sí pertenece a la mediatriz del segmento \overline{AB} .

d. En una tabla, escribir los datos necesarios, las condiciones necesarias para la solución (invariante o propiedad geométrica detectada) y lo que se busca garantizar.

Datos necesarios	Condición o condiciones que se deben agregar	Lo que se busca garantizar
<ul style="list-style-type: none"> • Triángulo ABC. • D, E, F puntos medios de puntos medio de los lados \overline{AB}, \overline{AC} y \overline{BC}, respectivamente. • O baricentro del triángulo ABC. 	Punto C pertenece a la mediatriz del segmento \overline{AB} .	Congruencia de los triángulos EOA y FOB .

e. Enunciar una conjetura de la forma Dado (datos). Si (condición), entonces (lo que se busca garantizar) donde presente las propiedades invariantes encontradas.

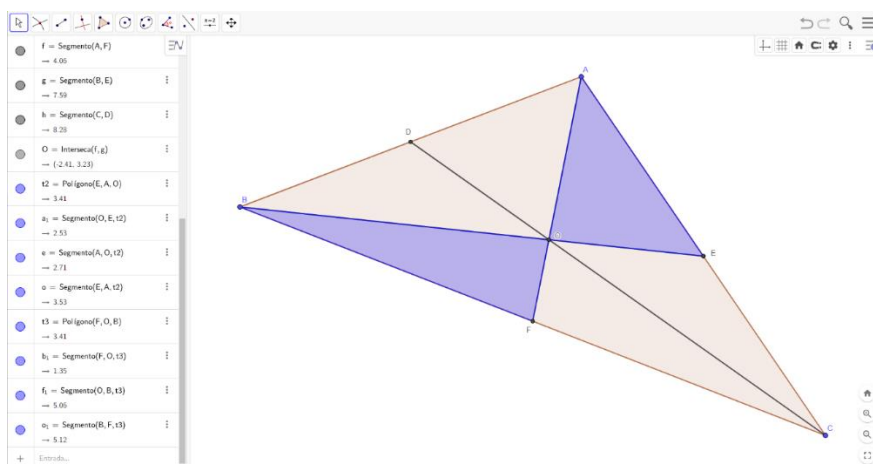
Dado el triángulo ABC ; D, E, F puntos medios de puntos medio de los lados \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{BC} , respectivamente; y O baricentro del triángulo ABC . Si C pertenece a la mediatriz de \overline{AB} , entonces los triángulos EOA y FOB son congruentes.

f. Justificar el por qué la condición que se encontró permite solucionar la situación.

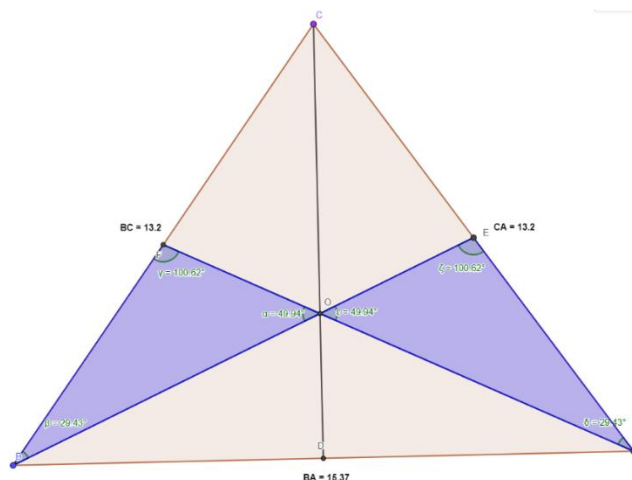
Si C pertenece a la mediatriz de \overline{AB} se puede garantizar que los lados correspondientes de los triángulos EOA y FOB son congruentes por la equidistancia de todos los puntos de los triángulos a la mediatriz.

Possible actividad matemática errónea 1

a. Realizar la construcción en GeoGebra garantizando cada una de las condiciones que se piden.



b. Explorar (arrastrar, medir, activar rastro, comparar, etc.) la construcción realizada para identificar propiedades invariantes que permitan un acercamiento a la solución de la situación planteada.



c. Reportar por medio de pantallazos o videos la exploración realizada. Para esto, narre cada una de las acciones realizadas.

- En el proceso de exploración, se realizan las mediciones de cada uno de los ángulos de los triángulos EOA y FOB .
- Para obtener la congruencia de los triángulos EOA y FOB se realiza un arrastre libre de los puntos A, B y C .
- Lo anterior, permite evidenciar que el arrastre de los puntos A, B y C posibilitan la congruencia de los ángulos internos correspondientes de los triángulos EOA y FOB .
- Al lograr la congruencia de los triángulos EOA y FOB se puede observar en la construcción que el triángulo ABC es isósceles.

d. En una tabla, escribir los datos necesarios, las condiciones necesarias para la solución (invariante o propiedad geométrica detectada) y lo que se busca garantizar.

Datos necesarios	Condición o condiciones que se deben agregar	Lo que se busca garantizar
<ul style="list-style-type: none"> • Triángulo ABC. • D, E, F puntos medios de puntos medio de los lados \overline{AB}, \overline{AC} y \overline{BC}, respectivamente. • O baricentro del triángulo ABC. 	Triángulo ABC equilátero.	Congruencia de los triángulos EOA y FOB .

e. Enunciar una conjetura de la forma Dado (datos). Si (condición), entonces (lo que se busca garantizar) donde presente las propiedades invariantes encontradas.

Dado el triángulo ABC ; D, E, F puntos medios de puntos medio de los lados \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{BC} , respectivamente; y O baricentro del triángulo ABC . Si el triángulo ABC es isósceles, entonces los triángulos EOA y FOB son congruentes.

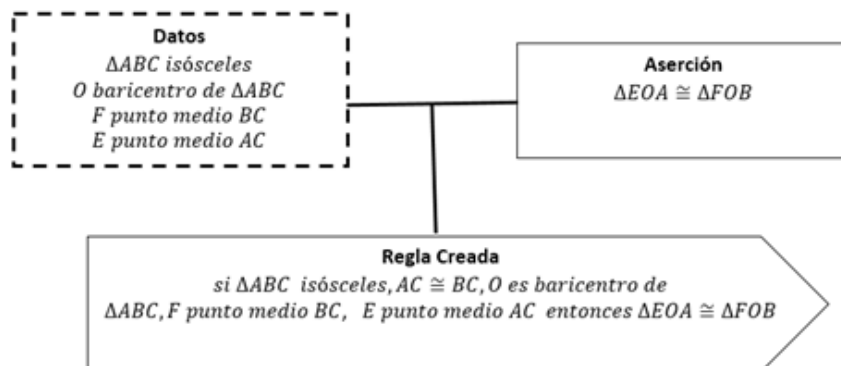
f. Justificar el por qué la condición que se encontró permite solucionar la situación.

Si el triángulo ABC es isósceles se puede garantizar que los ángulos internos de los triángulos EOA y FOB son congruentes, y por tanto triángulos EOA y FOB son congruentes.

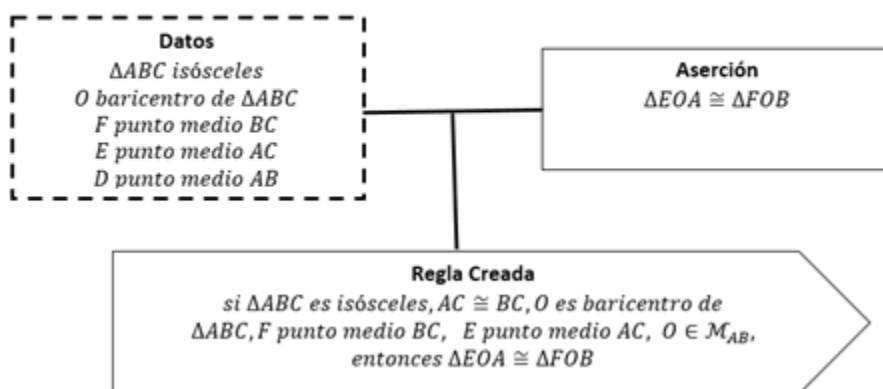
NOTA: En este caso, los estudiantes pueden omitir el hecho de que existen infinitos triángulos que tienen sus ángulos internos congruentes, sin necesidad de tener sus lados correspondientes congruentes. Lo anterior, sería un caso de semejanza de triángulos.

Argumentos emergidos a partir de la actividad matemática

Argumento 1: Abductivo (Argumento informal)



Argumento 2: Abductivo (Argumento informal)



Agrupamiento

En este caso, la tarea diseñada se implementará el día 21 de septiembre de 2021. Por esta razón, se tendrán dos grupos de estudiantes: presencialidad y virtualidad. Los estudiantes de virtualidad trabajaran de forma individual. Los estudiantes de presencialidad formaran grupos de cuatro estudiantes.

Interacciones

Durante el proceso de exploración, el profesor genera preguntas orientadoras según la actividad de cada grupo, para que los estudiantes puedan llegar a detectar las invariantes que se puedan presentar en la situación planteada. Por ejemplo:

Mediación para la construcción:

- ¿Cómo ubicó los puntos medios?
- ¿Cómo construyo las medianas del triángulo?
- ¿Qué herramienta(s) utilizó para identificar el baricentro del triángulo?

Mediación para la exploración y visualización:

- En la construcción que realizó, ¿Cuáles puntos son fijos y cuáles se pueden mover?
- ¿Qué cambios detecta al mover alguno de los vértices del triángulo ABC ?
- ¿Qué herramienta de GeoGebra podría usar para garantizar que los triángulos EOA y FOB son congruentes?

- ¿Con qué finalidad midió los lados de los triángulos EOA y FOB ?
- ¿Con qué finalidad midió los ángulos de los triángulos EOA y FOB ?
- ¿Qué tienen en común todos los puntos que me garantizan la solución del problema?
- ¿Qué tipo de recta es la que garantiza la solución del problema?
- ¿Por qué usó la herramienta perpendicular para construir la mediatriz?
- ¿Qué significa que una recta sea mediatriz?
- ¿La solución que encontró es única?

Mediación para la conjeturación:

- ¿Qué condición tiene la construcción para afirmar que esta es solución?
- ¿Qué características tiene el triángulo ABC ?
- De la información obtenida en la exploración, ¿Cuál es pertinente y necesaria de reportar?
- ¿Qué implica la forma condicional Si... entonces...?
- ¿Qué se buscaba garantizar en el problema?

Mediación para la verificación:

- ¿Se podría verificar la solución por medio de otra construcción?
- ¿Cómo puedo garantizar, desde la construcción, que el triángulo es isósceles?
- ¿Cómo puedo garantizar, desde la construcción, que el triángulo es equilátero?
- ¿Por qué la medida de los lados me garantiza la congruencia de los triángulos?
- Medir los ángulos internos de los triángulos EOA y FOB , ¿garantizan que siempre sean congruentes?
- ¿Por qué se puede decir que la recta es mediatriz?
- ¿Por qué utilizar una mediatriz en la solución?
- ¿Por qué la equidistancia me garantiza la congruencia?

Temporalidad

La tarea está destinada para desarrollarse en 90 minutos. A continuación, presentamos cada uno de los momentos con sus respectivos tiempos.

Momento	Tiempo presupuestado
1. Organización en el espacio y grupos de trabajo.	10 minutos.
2. Presentación de la tarea.	5 minutos.
3. Proceso de construcción.	15 minutos.
4. Proceso de exploración, visualización y reporte.	30 minutos.
5. Proceso de conjeturación.	15 minutos.
6. Proceso de verificación.	10 minutos.
7. Cierre de la tarea.	5 minutos.

Durante cada uno de los momentos se realiza una puesta en común de las ideas, preguntas y afirmaciones que los grupos vayan identificando.

10.7 Anexo 7: Síntesis de Datos por Asunto y Rotulación

Tabla 1: Datos para caracterizar transformación sobre argumentación

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
FA04	Los profesores identifican al argumento como faceta ostensiva del razonamiento, en tanto permite generar un discurso en un individuo.	1	Origen del conocimiento Característica argumento. Función argumento.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si
FA07	Para los profesores la argumentación es un proceso que busca persuadir a otro individuo sobre algo que es cierto o plausible apoyándose en sistemas de conocimientos o creencias.	1	Origen del conocimiento Clase (argumentación). Característica argumentación. Función argumentación.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si
FA08	En el discurso de los profesores se identifica con claridad la definición que ahora trabajan sobre argumentar: acción que realiza un individuo para generar un discurso oral o escrito.	1	Clase (argumentar). Función argumentar.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si
FA09	Si vamos de lo macro a lo micro, tendríamos la argumentación como un proceso, el argumentar como una acción que permite desarrollar lo anterior y el argumento como frases con sentido, que tienen una estructura definida y permiten conformar el discurso en la acción de argumentar.	1	Vínculo argumentación, argumentar, argumento.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si
DA01	Comencé buscando [en el diccionario de la RAE] qué es la argumentación y simplemente encontré que es la acción de argumentar. Luego, amplíé la búsqueda a lo qué significa argumentar y encontré que es aducir, alegar, o dar argumentos [...] Entonces, busqué qué es un argumento, y resulta que un argumento es un razonamiento para probar o demostrar una proposición, que convence, afirma o niega algo. Con esto, inmediatamente digo, que la argumentación tiene que ver algo con el razonamiento.	Transición del 1 al 2	Origen del conocimiento. Clase (argumentación). Clase (argumentar). Clase (argumento). Vínculo argumentación, argumentar, argumento. Vínculo con razonamiento.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	No
DA04	[...] [Después de revisar los apuntes de la clase de Investigación e Innovación liderada por la profesora Leonor Camargo, considero que] para la comunidad matemática, existe una diferencia muy fuerte entre argumentar y razonar. La argumentación es una parte práctica del discurso. Entendamos el discurso como esa parte oral o escrita, lo que yo quiero decir, a partir de un razonamiento. Este último, con la intención de persuadir a las demás personas sobre si lo que estoy diciendo es verdad o falso.	Transición del 1 al 2	Origen del conocimiento. Clase (argumentación). Clase (discurso). Función argumentación.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
DA08	[Revisando los apuntes del seminario de Profundización en Matemáticas Elementales], lo que dice el Profesor Óscar Molina, se parece mucho más a lo que dice Toulmin (Flórez, 2016). Él dice que la argumentación es el proceso colectivo e individual, de acuerdo con unas reglas compartidas que apuntan a concluir la veracidad de una aserción.	Transición del 1 al 2	Origen del conocimiento. Clase (argumentación). Característica argumentación. Función argumentación.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si
DA12	El argumento es, cuando tengo una situación y quiero, de una u otra manera, sustentarla. Entonces, el argumento es un resultado del proceso de argumentación.	Transición del 1 al 2	Función argumento. Vinculo argumentación, argumento.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si
DA13	[Discutiendo acerca del significado de la palabra argumentación en la definición propuesta por León y Calderón (2003)] ¿Qué es una práctica? Para mí, la práctica es ese conjunto de acciones que se realizan de forma continuada y una práctica discursiva, es cuando yo estoy usando el discurso.	Transición del 1 al 2	Origen del conocimiento. Clase (práctica). Clase (práctica discursiva).	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si
DA14	[Discutiendo acerca del significado de la palabra argumentación en la definición propuesta por León y Calderón (2003)] ¿Qué es una práctica? [...] Para mí, [el término] práctica hace referencia a los diversos momentos que un profesor debe tener en cuenta [cuando planea] su quehacer diario. [Estos momentos] son el antes, el durante y el después de una clase. [La práctica] no se limita únicamente a lo que se realiza en el aula.	Transición del 1 al 2	Origen del conocimiento. Clase (práctica). Características práctica.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si
DA15	La definición de León (2003), [sobre práctica discursiva], me dice que una práctica discursiva es una actividad verbal, social y racional.	Transición del 1 al 2	Origen del conocimiento. Clase (práctica discursiva). Características práctica discursiva.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si
DA16	La argumentación es esa faceta discursiva del razonamiento. Adicionalmente, la argumentación es la faceta ostensible del razonamiento porque me permite ver lo que estoy razonando.	Transición del 1 al 2	Característica argumentación. Función argumentación. Vínculo argumentación, razonamiento.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si
DA17	La práctica discursiva son todas aquellas reglas constituidas, en un grupo único, en una comunidad específica, en un contexto particular y concreto, que posibilita un enunciado. Es decir, que cuando yo pertenezco a una comunidad, por ejemplo, a la comunidad matemática, entre todos debemos tener unas reglas compartidas.	Transición del 1 al 2	Origen del conocimiento. Clase (práctica discursiva). Característica práctica discursiva. Función práctica discursiva.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
DA18	Una expresión discursiva es aquella parte oral o escrita que un emisor envía para generar una comunicación. [Esta comunicación es] explícita y evitando ambigüedades, impresiones personales y emociones. Es decir, se trata de concretar las ideas y los datos de la manera más objetiva posible.	Transición del 1 al 2	Origen del conocimiento. Clase (expresión discursiva). Característica expresión discursiva. Función expresión discursiva.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si
DA19	Pero [...] [las definiciones de] práctica y expresión [tienen] una pequeña diferencia. La práctica es lo que lleva a la acción y la expresión son esas oraciones que me permiten formar [un] discurso.	Transición del 1 al 2	Característica práctica discursiva. Característica expresión discursiva. Vínculos expresión y práctica	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si
DA20	La argumentación es el proceso y el argumento es el resultado. Entonces, la argumentación [está] ligada a la práctica discursiva y el argumento [está relacionado] a la expresión discursiva.	Transición del 1 al 2	Clase (argumentación). Clase (argumento). Vínculo argumentación, práctica discursiva. Vínculo argumento, expresión discursiva.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si
DA22	Un argumento es una expresión discursiva, tanto escrita como oral. Entonces, [...] la parte gestual no entra a formar [parte de] un argumento. [Lo gestual puede ser parte de un argumento] cuando el niño lo describe o [...] [lo] verbaliza, más no cuando está representado con los deditos o con un dibujo.	Transición del 1 al 2	Clase (argumento). Característica (argumento).	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si
DA41	En la comunidad [de práctica] de grado noveno, [cuando un estudiante] hace una señal de cruz con los dedos y dice "profe, es que es así"; [el profesor puede decirle] "no le valgo [la respuesta]", porque las normas de los niños de grado cuarto no son las mismas de un niño de noveno [...] Las normas atienden a un proceso histórico, un momento y un lugar específico.	2	Característica práctica discursiva.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si
DA43	Las prácticas discursivas son entendidas como las actividades de comunicación que se realizan en el marco de una comunidad específica y que hacen posible un discurso, atendiendo a un conjunto de reglas, constituidas en un proceso histórico que se va definiendo en una época concreta.	2	Origen del conocimiento. Clase (práctica discursiva). Característica práctica discursiva. Función práctica discursiva.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
DA44	La expresión discursiva es aquella enunciación escrita u oral, que se realiza en el marco de la práctica discursiva, en el que el emisor trata de generar una comunicación eficaz evitando los datos ambiguos y las impresiones personales. La enunciación del tema debe ser clara desde el principio y las ideas que se van a expresar deben poseer una ordenación lógica.	2	Origen del conocimiento. Clase (expresión discursiva). Característica expresión discursiva. Función expresión discursiva. Vínculo práctica, expresión.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si
DA50	[La argumentación es una] práctica discursiva que pretende convencer o persuadir de forma razonada a otro(s) sobre la veracidad de una aseercción. La argumentación establece una relación simétrica, ya que el emisor y el receptor desarrollan una discusión en un mismo nivel del conocimiento. El producto de este proceso es el argumento.	2	Origen del conocimiento. Clase (argumentación). Característica argumentación. Función argumentación. Vínculo argumentación, argumento.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si
DA51	La argumentación es una faceta discursiva del razonamiento, en tanto me permite expresar lo que se procesa en el pensamiento. Toda argumentación es un razonamiento, pero no todo razonamiento es una argumentación.	2	Característica argumentación. Función argumentación. Vínculo argumentación, razonamiento.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si
DA52	[Un argumento es una] expresión discursiva que se emite con el propósito de convencer, persuadir, disentir o soportar la validez de una proposición. Su estructura, como mínimo, es ternaria y se compone de tres proposiciones: dato, aseercción y garantía. La aseercción es una proposición cuyo contenido o verdad se está considerando. El dato es hecho o información factual, que se invocan para justificar y validar la aseercción. La garantía es la proposición que establece la conexión entre el dato y la aseercción; esta puede ser un principio o una regla. Las proposiciones pueden ser implícitas, pero para precisar el argumento debe ser posible identificarlas.	2	Origen del conocimiento. Clase (argumento). Característica argumento. Función argumento.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si
DA55	[Un] argumento [...] colectivo se produce como resultado del proceso de argumentación llevado a cabo [en un conjunto de intervenciones de una comunidad de práctica].	2	Característica argumento. Vínculo argumentación, argumento.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre argumentación	Si

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
FA01	Los profesores identifican a [la argumentación] como sinónimo de justificación, explicación y establecimiento del valor de verdad de una proposición.	0	Origen del conocimiento. Característica argumentación. Función argumentación. Vínculo argumentación, justificación y explicación.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
FA10	En el discurso de los profesores podemos evidenciar que aún se consideran como sinónimos los términos de argumentar, explicar, justificar y validar, al finalizar el primer semestre.	1	Origen del conocimiento. Vínculo entre argumentar, explicar, justificar y validar. Uso del lenguaje.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA02	[...] Busqué [en el diccionario de la RAE] qué significa justificación y encontré que es la acción y efecto de justificar. Inmediatamente, miré qué es justificar. Esto es, probar algo con razones convincentes, testigos o documentos.	Transición del 1 al 2	Origen del conocimiento. Característica justificación. Función justificación. Vínculo razonamiento.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA03	[...] [Encontré en el diccionario de la RAE que] un razonamiento es la acción y efecto de razonar. Pero entonces, ¿qué es razonar? Encontré que es exponer razones. Ahora, una razón es un argumento o demostración que se aduce en apoyo de algo. Como que volví a lo mismo [a la definición de argumento].	Transición del 1 al 2	Origen del conocimiento. Característica razonamiento. Función razonamiento. Vínculo razones, argumento y demostración.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA06	[...] [Habiendo revisado los apuntes del seminario Innovación/Investigación] Y entonces, la profesora Leonor Camargo dice [parafraseando lo reportado en los apuntes]: el razonamiento y la argumentación están estrechamente vinculadas. El razonamiento es lo que yo pienso y la argumentación son partes del discurso de ese razonamiento. Se debe entender el razonamiento como el producto de conectar los conocimientos, las experiencias y los saberes; la información que tengo en mi poder para explicar y entender lo que está sucediendo a mi alrededor. [...] Aquí hay una premisa: un argumento es un razonamiento, pero no todo razonamiento se puede convertir en un argumento.	Transición del 1 al 2	Origen del conocimiento. Clase (razonamiento). Características razonamiento. Vínculo entre razonamiento argumento.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
DA07	Pues creo que, en mi clase tengo que ser mucho más consciente cuando utilice esos términos [argumentar, explicar, justificar, validar]. Es decir, cuando yo le diga a un niño: “por favor, justifique su respuesta”, lo que realmente le estoy pidiendo es algo diferente a cuando yo le digo: “por favor argumente su respuesta”. Cuando le pido al niño que argumente su respuesta es que construya, entre comillas, una especie de discurso donde tenga ciertas características. Este, debe tener una concatenación de argumentos. Esos argumentos deben tener datos, una justificación y una conclusión. Caso contrario de cuando yo le digo: “justifique su respuesta”. Justificar es solamente que me diga qué parte teórica fundamenta la respuesta.	Transición del 1 al 2	Origen del conocimiento. Clase (argumentación). Elementos de un argumento. Características justificación. Vínculo entre argumentación argumento.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA09	Razonar es diferente de argumentar, y adicionalmente es distinto de justificar. [...] el razonamiento es como lo más grande, porque viene del pensamiento. La argumentación es esa parte discursiva del razonamiento, y está compuesta por una cantidad de argumentos que lo justifican. Adicionalmente, los argumentos tienen una estructura lingüística de la cual hace parte la justificación. Y la justificación se conforma por esos componentes teóricos que dan validez o refutan lo que yo estoy diciendo. Es decir que, para la comunidad de educadores matemáticos, razonar, argumentar y justificar son completamente distintos.	Transición del 1 al 2	Diferenciación entre argumentar, justificar, razonar. Clase (razonamiento). Clase (argumentación). Clase (Argumento). Características del argumento. Vínculo entre Argumento y justificación.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA11	Lo que entiendo por razón es: un resultado de ese proceso de razonamiento, que ocurre en nuestras cabezas. [Una razón] son esos pensamientos e ideas que tengo y que empiezo a conectar para dar forma al discurso.	Transición del 1 al 2	Origen del conocimiento. Características de la razón. Vínculo razonamiento-razón.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA21	Una representación geométrica no es una proposición, porque de un gráfico no puedo decir si es falso o verdadero. La representación [me permite] obtener datos, aseveraciones y hasta de pronto, empezar a generar un argumento.	Transición del 1 al 2	Elementos de un argumento	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	No
DA25	La exploración me permite empezar a decantar lo que estoy razonando. Los razonamientos son los que finalmente me van a empezar a generar argumentos.	Transición del 1 al 2	Vínculos razonamientos-Argumentos.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA26	[Al revisar a León y Calderón (2001)] similitud entre una demostración y una validación. La demostración, desde la comunidad de educadores matemáticos, se entiende como un proceso más formal [...]. Con la demostración estoy validando.	Transición del 1 al 2	Origen del conocimiento. Vínculo entre demostración-validación.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
DA27	La definición de validación depende del contexto en donde me desenvuelva. Por ejemplo, en la Comunidad de matemáticos, una demostración es algo muy formal y nosotros, cuando iniciamos en la licenciatura en matemáticas, la demostración se hacía a dos columnas y tal vez está no sea tan formal como la de ellos.	Transición del 1 al 2	Características de la validación. Vinculo validación-argumentación. Tipos de demostración.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA28	La demostración es una validación.	Transición del 1 al 2	Vinculo validación-Demostración	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA29	La relación entre la demostración y la argumentación es que la demostración es la concatenación de argumentos deductivos.	Transición del 1 al 2	Vínculos demostración - Argumentación.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA30	[Cuando los estudiantes explican la solución de] un problema [por medio de un EGD], ellos mueven y arrastran [los puntos de la construcción] hasta mostrar que [...] se cumplen con las condiciones dadas [en el enunciado del problema].	Transición del 1 al 2	Características de la Explicación.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA31	Cuando justifico comienzo a buscar dentro de la teoría [aceptada] por la comunidad. Por ejemplo, la definición de mediatriz, en una [comunidad específica], puede ser el lugar geométrico que equidista de los extremos de un segmento. En otra [comunidad], la mediatriz [es] una recta perpendicular a un segmento, que pasa por el punto medio de este. Recurriendo a estos conceptos de la teoría es que se puede realizar la justificación.	Transición del 1 al 2	Características de la justificación.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA32	Validar es determinar la validez de una aserción postulada, a partir de un sistema de conocimientos y normas [que] dependen de la comunidad en la que se desarrolla.	Transición del 1 al 2	Origen del conocimiento. Función de la validación. Características de validación.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA33	La diferencia entre argumentar y explicar se identifica en la función de cada proceso. [La función de] la explicación es hacer comprender, en cambio, la [función] de la argumentación es convencer o persuadir.	Transición del 1 al 2	Origen del conocimiento. Función de Argumentar. Función de Explicación. Diferencia argumentar-explicar.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA34	La explicación establece una relación asimétrica porque hay alguien que se reconoce con autoridad y otro que se reconoce sin autoridad. En cambio, la argumentación es una relación simétrica, ya que el locutor y el interlocutor entran en una discusión desde el mismo plano y con el mismo estatus [frente al conocimiento].	Transición del 1 al 2	Características de la explicación. Características de la argumentación. Diferencia entre explicar- argumentar.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
			Origen del conocimiento.			
DA35	[Aunque los procesos de argumentación, explicación, justificación y validación] tienen nombres distintos [...] son muy parecidos, en el sentido que todos vienen del proceso de razonar. [...] Son minucias lo que los diferencian, [...] lo supremamente importante es la finalidad del proceso de argumentar. Si yo no colocó la finalidad del proceso de argumentar, simplemente, se puede decir que la explicación y la argumentación son lo mismo, y no lo son.	Transición del 1 al 2	Vínculo entre argumentar, explicar, justificar, validar con razonar. Diferencia entre explicar- argumentar.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA36	La definición de explicación es prácticamente la misma definición de la argumentación, es decir, son procesos discursivos que buscan o intentan justificar. [...] A diferencia de que, en la explicación ya no se intenta convencer ni persuadir al otro. [En la explicación] lo que se intenta es informar al otro ampliando lo que la otra persona reconoce, pero sin involucrar la persuasión.	Transición del 1 al 2	Clase (explicar). Clase (argumentar). Función de la explicación. Función de la argumentación. Diferencia entre explicar- argumentar.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA37	[Cuando buscamos en el diccionario de la RAE el significado de] argumentar, validar, explicar y justificar, nos damos cuenta de que “son sinónimos” porque [...] están relacionadas con el proceso del razonamiento.	2	Vínculo entre argumentar, explicar, justificar, validar con razonar. Origen del conocimiento.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA39	En algunos casos, cuando las clases están [mediadas por EGD], las justificaciones provienen de GeoGebra. Por ejemplo, nos damos cuenta de que simplemente con algo visual el niño me está justificando, [...] [cuando] nos dice "yo moví este vértice y vean [en la figura representada en la pantalla] cómo la congruencia se mantiene".	2	Características de la justificación.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA40	[El profesor] puede asumir que para niños de segundo, tercero o cuarto de primaria, lo gestual hace parte de la justificación. Cuando los niños señalan con los dedos o dicen: “mire profe, [las líneas] son cómo los lados opuestos del tablero” [...] El profesor puede [interpretar] que son [líneas] paralelas. [El profesor] puede asumir que el niño con sus expresiones [está justificando] y es válido. [Esto] puede ser tomado como una garantía implícita.	2	Características de la justificación.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA42	[Los profesores] podemos aceptar algunas representaciones en entornos digitales como métodos de validación [...] Entonces, cuando un niño dice: “mire profe, es que pasa esto”, [el profesor] como autoridad dentro de esta comunidad puede decir si lo que ha visto [en el entorno digital] es válido [...] La validación depende de [lo que la comunidad de práctica] defina como válido.	2	Características de la validación. Clase (validación)	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA45	[El razonamiento es una] actividad intelectual que busca manipular la información dada o adquirida para indagar, interpretar situaciones, determinar formas de proceder, relacionar, explicar, justificar, etc.; atendiendo a reglas de un sistema de conocimientos y experiencias.	2	Origen del conocimiento. Clase (razonamiento) Función del razonamiento.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
			Características del razonamiento.			
DA46	[La explicación es una] práctica discursiva que busca, por medio de razones, describir un objeto de conocimiento o hecho particular. Su función es dar claridad y ejemplificar a partir de una ampliación cualitativa de la información. La explicación establece una relación asimétrica, ya que el receptor reconoce en el emisor una autoridad frente al conocimiento.	2	Origen del conocimiento. Clase (explicación) Función de la explicación. Características de la explicación.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA47	La explicación comprendida como un proceso comunicativo entre emisor y receptor, busca extender la comprensión de un hecho, fenómeno o concepto, más no convencer de forma intensional a otra persona. Por medio de la explicación, el emisor procura que el receptor del mensaje visualice algunas cualidades o puntos de vistas adicionales de lo que se busca explicar.	2	Clase (explicación) Función de la explicación. Características de la explicación.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA48	[La justificación es una] práctica discursiva que permite encontrar razones para garantizar la veracidad de una aseercción sobre un objeto de conocimiento o hecho particular, en el marco de un conjunto de proposiciones aceptadas por una comunidad. Las razones deben ser sólidas, coherentes, pertinentes y precisas.	2	Origen del conocimiento. Clase (justificación) Función de la justificación. Características de la justificación.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA49	[Las razones de una justificación] pueden ser parte de un sistema teórico, provenir de algún miembro experto o de autoridad en la comunidad, o por medio de construcciones en EGD. Esto, con la finalidad de soportar la veracidad de una aseercción.	2	Clase (justificación) Función de la justificación. Características de la justificación.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA54	[La validación es un] proceso que proporciona las garantías para decidir acerca de la veracidad de una aseercción. Para validar, se deben apropiar recursos técnicos y competencias argumentativas como símbolos, conceptos y prácticas, que permitan soportar la validez de una proposición frente a un conjunto de proposiciones aceptadas socialmente.	2	Origen del conocimiento. Clase (validación) Función de la validación. Características de la validación.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA56	A pesar de que [explicar, justificar, argumentar y validar] tienen relación con el proceso del razonamiento, existen entre ellos diferencias en sus funciones. Cada uno de estos procesos posee una intensión específica que le permite al profesor de matemáticas generar en sus estudiantes una forma concreta de razonar y actuar.	2	Vínculo entre argumentar, explicar, justificar, validar con razonar. Diferencia entre argumentar, explicar, justificar, validar.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA57	Si analizamos la estructura de las intervenciones y las relaciones entre los procesos abordados, podemos afirmar que la explicación, la justificación, la argumentación y la validación están desarrollados de forma lineal. Lo anterior, se origina desde	2	Vínculo entre argumentar, explicar, justificar, validar	Epistémica	Vocabulario especializado sobre	Si

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
	una asección, que si se hace necesario se explica para luego ser justificada y finalmente ser validada por medio de argumentos resultantes del proceso de argumentación.				términos afines a la argumentación	
DA58	La explicación busca que se amplíen las características y atributos de un proceso de construcción, de un objeto o hecho matemático, que hace parte de una asección. Luego con esas esas características y atributos que se han explicitado, se busquen las garantías que validan la asección que pasa a ser las justificaciones de esta. Estas justificaciones pueden convertirse en parte de la garantía de un argumento que se construye con la asección y los datos. Todo este proceso es lo que llamamos argumentación.	2	Vínculo entre argumentar, explicar, justificar, validar	Epistémica	Vocabulario especializado sobre términos afines a la argumentación	Si
DA05	La argumentación es como una cadena de argumentos y entonces, el argumento se divide en varias partes [...] Para decir que un argumento es válido debe que tener una estructura.	Transición del 1 al 2	Relación entre argumento y argumentación. Identificación de un argumento.	Epistémica	Elementos de un argumento	Si
DA23	Cuando se analizan argumentos en las transcripciones de los estudiantes, se puede presentar una garantía implícita, una asección o unos datos implícitos; pero no puede estar todo implícito en el argumento.	Transición del 1 al 2	Estructura de un argumento. Formas de un argumento. Surgimiento de un argumento. Identificación de un argumento.	Epistémica	Elementos de un argumento	Si
DA24	El argumento no solamente se compone de tres elementos [dato, asección y garantía], no es una cosa triádica. Como mínimo [el argumento] debe tener esa triada y [se debe] poder identificar.	Transición del 1 al 2	Identificación de un argumento. Tipos de argumento. Formas de un argumento.	Epistémica	Elementos de un argumento	Si
DA53	Ejemplo de [una garantía implícita] son las expresiones que un profesor de primaria acepta como parte de un argumento, como lo pueden ser los gestos o cualidades de un objeto del conocimiento.	2	Formas de un argumento. Surgimiento de un argumento. Identificación de un argumento.	Epistémica	Elementos de un argumento	Si
TA01	Las garantías [que obtiene un estudiante] son diferentes [...] cuando [estas] surgen [durante el proceso de] construcción, que cuando [emergen del proceso de] exploración.	Transición del 2 al 3	Surgimiento de un argumento.	Epistémica	Elementos de un argumento	Si

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
DA10	¿Cómo es esto de la relación argumentativa entre el profesor y los estudiantes? [...] Son esos momentos en los cuales el estudiante explica o expresa de una u otra manera lo que él piensa acerca de una situación, un concepto, una definición al profesor. Luego de esto, el profesor lo que hace es corregir algún error o empezar a mostrarle el camino por donde el estudiante puede llegar a esas definiciones que el profesor quiere. [...] es como entablar esa comunicación asertiva buscando mejorar el proceso argumentativo; de tal manera que cuando el estudiante se exprese frente a mí, él pueda crear argumentos, justificaciones, validaciones o explicaciones de la mejor manera posible.	Transición del 1 al 2	Interacción estudiante profesor Función de la interacción. Impacto de la interacción. Relación de la interacción y la argumentación.	Interaccional	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que promueven la argumentación	No
DA38	Nos hemos dado cuenta de que, definitivamente, el uso del lenguaje dentro de una comunidad es supremamente importante. [No se puede dar una instrucción al niño sin conocer la finalidad de los términos que se usan]. Sin esta precisión, cualquier respuesta del niño puede estar bien o mal porque el [profesor es quién] juzga la respuesta, sin tener claro lo que está pidiendo.	2	Uso del lenguaje en una comunidad. Impacto de uso de lenguaje.	Interaccional	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que promueven la argumentación	No

Tabla 2: Datos para caracterizar transformación sobre tareas

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
FT01	Los profesores definen tarea como toda actividad extra-clase que propone un docente buscando reforzar las temáticas vistas en clase y la apropiación de algoritmos realizados en el aula.	0	Origen del conocimiento. Clase (Tarea). Característica (Tarea). Función (Tarea).	Epistémica	Vocabulario especializado sobre tareas	Si
FT29	Los profesores definen a una tarea como una demanda estructurada que tiene una finalidad de aprendizaje y de enseñanza, y requiere la aplicación de un contenido matemático por parte de los estudiantes.	1	Origen del conocimiento. Clase (Tarea). Característica (Tarea). Función (Tarea).	Epistémica	Vocabulario especializado sobre tareas	Si
FT31	Los profesores presentan en sus producciones la distinción entre tarea y actividad, entendiendo esta última como las diversas acciones que realiza un estudiante al momento de abordar una situación con contenido matemático.	1	Origen del conocimiento. Clase (Actividad). Característica (Actividad).	Epistémica	Vocabulario especializado sobre tareas	Si
DT01	Cuando vamos a diseñar tareas, quisiéramos que, cuando le digamos al niño explique [...] sepamos exactamente qué es lo que él me tiene que contestar.	2	Aspecto discursivo.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre tareas	No

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
TT26	Se puede entender la actividad como el conjunto de acciones desarrolladas por los participantes, en el contexto particular de la comunidad de práctica. La actividad se reconoce en las acciones de los participantes en aras de la consecución de la solución de la tarea, en esta actividad se deben considerar las posibles acciones, tanto asertivas como erróneas, que los estudiantes podrían realizar en el marco de la instrucción presentada por el profesor.	3	Origen del conocimiento. Clase (Actividad). Característica (Actividad). Función (Actividad).	Epistémica	Vocabulario especializado sobre tareas	Si
TT27	La actividad matemática le permite al profesor identificar en que momentos de la tarea se pueden generar argumentos en los estudiantes. Si miramos los procesos de construcción, visualización, exploración, conjeturación y verificación, podemos afirmar que la exploración que los estudiantes realizan a partir de una construcción geométrica se evidencia por medio de la conjeturación y la verificación.	3	Origen del conocimiento. Impacto (Actividad). Vinculo actividad, procesos.	Epistémica	Vocabulario especializado sobre tareas	Si
TT08	[Una tarea abierta permite] diferentes procedimientos matemáticos que posibilitan [...] llegar a la respuesta. [Una tarea con] respuesta abierta es cuando una tarea presenta la posibilidad de que los estudiantes [encuentren] varios tipos de respuesta.	Transición del 2 al 3	Origen del conocimiento. Característica (Tarea). Función (Tarea).	Epistémica	Tipos de tareas	Si
TT09	[...] una tarea abierta, donde [los estudiantes] pueden dar su opinión de lo que están viendo [y] no hay una respuesta única, les da libertad de hacer cosas interesantes [...] Definitivamente [las] tareas [abiertas] facilitan muchas interacciones, muchas cosas que los estudiantes hacen en clase. Su actividad se vuelve mucho más rica.	3	Origen del conocimiento. Función (Tarea). Impacto (Tarea).	Epistémica	Tipos de tareas	Si
TT15	[Una tarea es abierta porque] [...] permite a los estudiantes un desarrollo de estrategias para tener un acercamiento a la resolución de la tarea.	3	Característica (Tarea). Función (Tarea).	Epistémica	Tipos de tareas	Si
FT10	Las tareas que propone el profesor deberían permitir a los estudiantes inferir conceptos y definiciones [...]	0	Origen del conocimiento. Impacto (Tarea).	Epistémica	Importancia del diseño de una tarea	Si
FT32	[...] un buen diseño de tarea favorece una actividad matemática enriquecida, sin necesidad de una gran cantidad de ejercicios y problemas que llevaban a los estudiantes a repetir algoritmos de solución.	1	Característica (Tarea). Estructura (Tarea). Contraste.	Epistémica	Importancia del diseño de una tarea	Si
FT34	Al momento de diseñar la tarea se puede evidenciar que los profesores son conscientes de la importancia que tiene [...] prever los diversos objetos matemáticos y procedimientos de solución que los estudiantes pueden desarrollar en su actividad	1	Estructura (Tarea).	Epistémica	Importancia del diseño de una tarea	Si
TT10	La preparación [de una tarea] es un acierto, prever el tipo de acciones y el tipo de actividad que el niño va a realizar, porque el profesor puede comenzar a vislumbrar la gestión, el tipo de preguntas que van a surgir permite saber cómo reaccionar frente a esas preguntas. No es quedarse ahí esperando una pregunta y en ese momento imaginar una respuesta, sino que definitivamente el profesor ya sabe cómo reaccionar. No es	3	Origen del conocimiento. Estructura (Tarea). Impacto diseño (Tarea).	Epistémica	Importancia del diseño de una tarea	Si

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
	aprenderse de memoria la respuesta sino cómo actuar frente a cada situación de la mejor manera inmediatamente.		Actuación (Profesor).			
TT11	Definitivamente fue un acierto haber identificado cómo se iba a comportar nuestra comunidad de práctica, frente a los niveles del modelo propuesto, que es adaptación del modelo de Gómez (2015) con la propuesta de Camargo, Samper y Perry (2006). Esto nos permitió caracterizar y clasificar el contexto de los estudiantes, ya que permite enfocarse en esas habilidades que el estudiante tiene y facilitar el desarrollo de las que no tiene [...] Permitir identificar y caracterizar la comunidad de práctica, que Gómez no tenía muy presente. Para mí es un PLUS y es supremamente importante.	3	Origen del conocimiento. Impacto diseño (Tarea). Actuación (Profesor).	Epistémica	Importancia del diseño de una tarea	Si
TT13	El cambio de niveles [propuestos], no se logra con una sola tarea, porque esto va ligado a la experiencia que el estudiante vaya adquiriendo. El hecho de hacer una construcción no me garantiza que todas las pueda hacer. El cambio de nivel no se logra únicamente con una tarea de nivel cero, otra de nivel uno, nivel dos y así sucesivamente, y con 6 tareas ya son expertos, no. Entonces, esto se logra es con la experiencia y con lo que vaya percibiendo el profesor de su grupo, cada vez que diseñé una tarea, debo tener en cuenta el nuevo contexto puesto [que] voy a empezar a ver cosas diferentes de los estudiantes.	3	Origen del conocimiento. Impacto diseño (Tarea). Actuación (Profesor).	Epistémica	Importancia del diseño de una tarea	Si
TT16	Con respecto al manejo de los errores en las dos tareas [propuestas por los profesores, antes de MDM y en el seminario PME], en ninguna se tienen en cuenta los errores que pueden surgir a partir de la actividad matemática de los estudiantes. [Esto lo afirman puesto que, para autores como] Jiménez y Carreño (2018) esto, es de suma importancia puesto que la gestión del error tiene la finalidad de asegurar que las ideas/respuestas equivocadas se puedan utilizar para construir el conocimiento matemático. Por lo anterior, [los profesores] consideran que la planificación explícita de las posibles soluciones, así como de los errores, posibilitan la forma gestionar las diferentes respuestas y postura de los estudiantes para promover la argumentación.	3	Origen del conocimiento. Impacto diseño (Tarea). Actuación (Profesor). Contraste.	Epistémica	Importancia del diseño de una tarea	Si
TT21	El lenguaje utilizado para la presentación de la tarea debe ser cercano y claro para los estudiantes, evitando tecnicismos innecesarios.	3	Aspecto discursivo.	Epistémica	Importancia del diseño de una tarea	Si
FT03	Los profesores consideran que al diseñar una tarea se deben tener en cuenta aspectos tales como [...] los preconceptos de los estudiantes [...]	0	Origen del conocimiento. Estructura de una tarea.	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
FT07	Los profesores consideran que al diseñar una tarea se deben tener en cuenta aspectos tales como [...] las expectativas del profesor.	0	Origen del conocimiento. Estructura de una tarea.	Epistémica	Elementos de la tarea	Si

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
FT14	[Los requisitos de una tarea son los] conceptos que se deben tener en cuenta para abordar los problemas propuestos y usar los algoritmos vistos en clase de forma adecuada.	0	Origen del conocimiento. Clase (Requisito). Función (Requisito).	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
FT16	[La meta de una tarea es la] aplicación correcta de los algoritmos matemáticos y la comprensión de la temática. A partir de esto, el estudiante puede explicar y sustentar lo realizado.	0	Origen del conocimiento. Característica (Meta). Función (Meta).	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
FT18	[La formulación de una tarea consiste en la] selección de los ejercicios y/o problemas.	0	Origen del conocimiento. Característica (Formulación).	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
FT20	[Los materiales y recursos son los] medios que se emplean para la solución de una tarea. Los profesores no los tomaban en cuenta, puesto que las tareas se realizan únicamente en lápiz y papel, y el apoyo de una calculadora cuando se requería.	0	Origen del conocimiento. Clase (Materiales y recursos). Impacto (Materiales y recursos).	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
FT23	[El agrupamiento en una tarea hace referencia a las] formas de ordenar a los estudiantes por grupos o individualmente.	0	Origen del conocimiento. Característica (Agrupamiento).	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
FT27	[La temporalidad constituye el] tiempo destinado para resolver la tarea.	0	Origen del conocimiento. Clase (Temporalidad). Característica (Temporalidad).	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
FT15	[Los requisitos de una tarea son los] conocimientos y destrezas que los estudiantes, de acuerdo con su nivel educativo, necesitan para abordar una tarea. Los requisitos se abordan mediante los objetos matemáticos primarios (conceptos – definición, procedimientos, proposiciones, lenguajes, argumentos).	1	Origen del conocimiento. Clase (Requisito). Característica (Requisito). Función (Requisito).	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
FT17	[La meta de una tarea son los] propósitos que el profesor le asigna a la tarea. Estos, hacen referencia a las expectativas de aprendizaje y a aquellos errores y dificultades que el profesor espera que la tarea le permita superar a los estudiantes. Nuevamente, se tienen en cuenta los objetos matemáticos primarios para tal finalidad.	1	Origen del conocimiento. Clase (Meta). Característica (Meta). Función (Meta).	Epistémica	Elementos de la tarea	Si

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
FT19	[La formulación de una tarea consiste en la] instrucción que el profesor proporciona a los estudiantes, buscando describir el contexto, la información inicial y aquellas producciones esperadas a partir de la actividad desarrollada.	1	Origen del conocimiento. Clase (Formulación). Característica (Formulación). Función (Formulación).	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
FT21	[Los materiales y recursos son los] medios que se emplean para la solución de una tarea.	1	Origen del conocimiento. Clase (Materiales y recursos). Función (Materiales y recursos).	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
FT24	[El agrupamiento en una tarea hace referencia a la] organización de los estudiantes por grupos de una determinada cantidad.	1	Origen del conocimiento. Clase (Agrupamiento). Característica (Agrupamiento).	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
FT30	[Los profesores] identifican que para el proceso de diseñar una tarea se deben tener en cuenta diversos elementos (requisitos, meta, formulación, materiales y recursos, tipos de agrupamiento, formas de interacción y temporalidad).	1	Estructura de una tarea.	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
TT02	[...] Nos damos cuenta de que los requisitos [de una tarea] son conocimientos que el estudiante necesita. [Por ejemplo] conocimientos como recta, segmento, relación entre rectas [...] triángulo o tipos de triángulo [son conocimientos necesarios para abordar una tarea] [...] [De acuerdo con la tarea,] si el estudiante debe tener una destreza con una herramienta digital, entonces, la destreza también sería parte de los requisitos.	Transición del 2 al 3	Origen del conocimiento. Clase (Requisito). Característica (Requisito). Función (Requisito).	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
TT03	El propósito [de una tarea] es [el objetivo por el cual] el profesor [diseñó] la tarea. [Lo que se busca con la tarea] [...] tiene que estar relacionado con lo que se espera que el estudiante aprenda.	Transición del 2 al 3	Clase (Propósito). Característica (Propósito).	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
TT04	Las expectativas de aprendizaje [es aquello] [...] que el profesor espera que el estudiante logre aprender o desarrollar. Y también, de pronto, superar algunos errores o dificultades. La tarea no siempre tiene que apuntar únicamente a que el estudiante desarrolle [algo específico], sino que también el estudiante supere ciertas cosas que de pronto [el profesor] se ha dado cuenta en sus sesiones de clase.	Transición del 2 al 3	Clase (Expectativa). Característica (Expectativa). Impacto (Expectativa).	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
TT05	[...] En general, la formulación de una tarea matemática describe un contexto, pero proporciona una información inicial y requiere que los estudiantes produzcan una información final como solución.	Transición del 2 al 3	Característica (Formulación). Función (Formulación).	Epistémica	Elementos de la tarea	Si

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
TT12	Entre más clara sea la instrucción, los estudiantes lo pueden entender mucho más fácil y lo pueden hacer mucho más fácil. [...] Es importante que la instrucción sea con lenguaje sencillo y se dé el paso a paso de lo que tiene que hacer, que la lean e identifiquen que tienen que hacer en cada uno de los numerales y digan: bueno, puedo hacerlo.	3	Origen del conocimiento. Característica (Instrucción). Función (Instrucción).	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
TT14	[Respecto] a los requisitos, se evidencia que, para los profesores, los temas necesarios para abordar la tarea, así como las destrezas que se buscan desarrollar o fortalecer en los estudiantes son el punto de partida para el diseño de una tarea.	3	Característica (Requisito). Función (Requisito).	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
TT17	[Respecto al contexto de una tarea, los profesores afirman que] al iniciar el diseño de una tarea, el profesor debe tener en cuenta dos aspectos que definen al contexto: la comunidad de práctica y la ubicación geo temporal. [Los profesores se refieren] a la comunidad de práctica, como un conjunto de individuos que comparten unas reglas que median el accionar de los integrantes, unas expresiones discursivas particulares, un sistema teórico constituido en conjunto, unas normas sociales que favorecen la interacción y un espacio de encuentro, ya sea presencial o virtual.	3	Característica (Contexto). Clase (Comunidad de práctica). Características (Comunidad de práctica).	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
TT18	[Respecto al contexto de una tarea, los profesores afirman que] al iniciar el diseño de una tarea, el profesor debe tener en cuenta dos aspectos que definen al contexto: la comunidad de práctica y la ubicación geo temporal. [...] [Para los profesores] el aspecto geo temporal [son] las diferentes características de la población con respecto al espacio temporal compartido, el ámbito social y lo económico.	3	Característica (Contexto). Clase (Geo temporal). Características (Geo temporal).	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
TT19	Los requisitos de la tarea hacen referencia a aquellos conocimientos y destrezas previos que, de acuerdo con el nivel educativo, los estudiantes necesitan para abordar una situación matemática. Estos, se vinculan directamente con las metas y el contenido matemático de la tarea (Gómez et al., 2015). Los requisitos deben ir vinculados directamente con los procesos matemáticos de construcción, visualización, exploración y verificación, en cada uno de sus niveles de desarrollo.	3	Origen del conocimiento. Clase (Requisito). Característica (Requisito). Función (Requisito). Vínculo con procesos.	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
TT20	La formulación de la tarea se refiere al texto o instrucción que el profesor proporciona a los estudiantes y describe una situación matemática, proporciona una información inicial y requiere que los estudiantes produzcan una información final como su solución (Gómez et al., 2015). Estas instrucciones deben tener en cuenta el contexto previamente analizado y el nivel de los procesos vinculados.	3	Origen del conocimiento. Clase (Formulación). Característica (Formulación). Función (Formulación).	Epistémica	Elementos de la tarea	Si
FT09	El papel del profesor es de mediador entre el estudiante y el conocimiento matemático.	0	Origen del conocimiento.	Interaccional	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que explica una tarea	Si

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
			Papel de los individuos.			
FT26	[La interacción se manifiesta en la] resolución de dudas y apoyo en procesos algorítmicos por parte del profesor hacia los estudiantes.	0	Origen del conocimiento. Función (Interacción).	Interaccional	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que explica una tarea	Si
FT25	[El agrupamiento] se realiza buscando que surjan interacciones entre ellos, para la comparación de puntos de vista y la superación de dificultades.	1	Origen del conocimiento. Función (Agrupamiento). Función (Interacción).	Interaccional	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase que explica una tarea	Si
FT11	[...] El docente [no debe permitir que su gestión] inflencie y vicie las posibles respuestas de los estudiantes.	0	Característica (Interacción).	Interaccional	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase tendientes a superar un error, obstáculo o dificultad con respecto al desarrollo de una tarea	Si
TT29	Al momento de prever las interacciones que sucederán durante el desarrollo de la tarea, es aconsejable postular diversas preguntas orientadoras que le permitan a los estudiantes superar errores o momentos de frustración y bloqueos que impidan obtener la solución. De igual manera, las preguntas se pueden diseñar con la intencionalidad de obtener información que sea relevante para el profesor. Por ejemplo, se puede preguntar a un estudiante si un punto de una construcción es móvil o fijo; buscando detectar si existe una destreza para realizar construcciones robustas que garanticen una situación matemática.	3	Origen del conocimiento. Impacto en el diseño. Actuación.	Interaccional	Interacciones que ocurren dentro de un aula de clase tendientes a superar un error, obstáculo o dificultad con respecto al desarrollo de una tarea	Si
DT02	[En la explicación] el profesor asume un rol de receptor, permitiendo a los estudiantes adquirir el papel de emisores "expertos en el asunto".	2	Papel de los individuos.	Interaccional	Función de las interacciones durante el desarrollo de una tarea	No
TT07	[En el diseño de una tarea el profesor] tiene que prever [las] interacciones porque a partir de eso, él puede promover dos cosas: fomentar el aprendizaje y constatar en la práctica cómo se desarrolla el aprendizaje; [así como la forma en la que] él puede influir.	Transición del 2 al 3	Impacto. Actuación.	Interaccional	Función de las interacciones durante el desarrollo de una tarea	Si
TT28	Cuando el profesor diseña una tarea que aborda contenido matemático, la interacción que se realiza por parte de los miembros de la comunidad de practica se torna relevante. La importancia de prever las formas de interacción que se pueden dar cuando los estudiantes abordan una tarea radica en la posibilidad de detectar aciertos y posibles errores en la actividad matemática.	3	Impacto.	Interaccional	Función de las interacciones durante el desarrollo de una tarea	Si
TT30	Un factor relevante en la interacción, son las diversas formas de agrupamiento que un profesor puede plantear para el desarrollo de una tarea o partes de esta. El profesor debe tener presente que las interacciones van relacionadas con la forma de agrupamiento. Esto, se debe a que aprender matemáticas implica la capacidad de proponer soluciones a un	3	Vínculo agrupación, interacciones. Pautas comunicativas. Impacto.	Interaccional	Función de las interacciones durante el desarrollo de una tarea	Si

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
	problema, comunicar esas soluciones, reconocer las soluciones de otras personas y negociar significados para llegar a acuerdos.					
FT22	Los profesores reconocen que dependiendo de los materiales y recursos surgen diferentes actividades frente a la tarea.	1	Vinculo materiales y recursos, actividad.	Mediacional	Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea	Si
TT06	Los materiales se distinguen de los recursos porque, [los recursos] se diseñan con fines didácticos. El tablero tradicional o electrónico, el papel y el lápiz son recursos. Mientras que, el geoplano, GeoGebra o el dominó de fracciones [son materiales porque] fueron diseñados para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.	Transición del 2 al 3	Característica (Recursos). Característica (Materiales).	Mediacional	Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea	Si
TT22	Un recurso es cualquier medio que se pueda implementar en los procesos de enseñanza – aprendizaje, por ejemplo, el tablero o el papel y lápiz. Un material se diseña con fines didácticos. GeoGebra o el Geoplano son ejemplos de un material. Para ello se debe tener en cuenta el contexto en lo correspondiente a lo geo temporal.	3	Característica (Recursos). Característica (Materiales). Vinculo elementos de una tarea.	Mediacional	Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea	Si
TT23	Implementar una tarea mediada por el uso de un EGD como GeoGebra, requiere que el profesor analice la infraestructura de la institución educativa. Algunos materiales requieren de una preparación previa por parte del profesor y los estudiantes. En otros casos, se debe tener en cuenta el acceso al material, ya que algunos son de acceso libre y otros son de pago.	3	Consideraciones de uso.	Mediacional	Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea	Si
TT24	La eficacia hace referencia a si el material o recurso puede contribuir al logro de la meta planteados al inicio del diseño.	3	Consideraciones de uso.	Mediacional	Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea	Si
TT25	[...] [En el diseño de una tarea, el profesor] debe analizar si los materiales y recursos seleccionados son pertinentes e indispensables para la solución de la tarea. Por ejemplo, no es eficaz el diseño de una tarea centrado en un EGD, si la solución más práctica se obtiene por medio de otro recurso como lápiz y papel.	3	Consideraciones de uso.	Mediacional	Uso y pertinencia de los materiales y recursos de acuerdo con el tipo de tarea	Si
FT12	Para [el profesor C], las tareas que involucran [EGD] permiten favorecer una mejor comprensión de los objetos matemáticos, usando diversos contextos.	0	Relevancia.	Mediacional	Impacto de los materiales y recursos en una tarea	Si
TT01	Cuando [se realizan tareas] con lápiz y papel, [los estudiantes] casi no hacen exploraciones en la construcción; y eso [...] les dificulta ver [invariantes]. No se tiene esa facilidad de las herramientas [digitales].	Transición del 2 al 3	Relevancia. Vínculo con procesos.	Mediacional	Impacto de los materiales y recursos en una tarea	Si

Tabla 3: Datos para caracterizar transformación sobre tareas de argumentación

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
TTA02	[...] Un problema que me permite diferentes procedimientos, respuestas y posturas, es una tarea más rica en el momento de la socialización. [Puesto que,] tengo que convencer a los demás [de la veracidad de mi respuesta] y [las otras personas pueden] [...] intentar convencerme [de la veracidad de su trabajo].	Transición del 2 al 3	Características de una tarea de argumentación.	Epistémica	Tareas que favorecen la argumentación	Si
TTA03	Hay dos tipos de tarea, la tarea abierta y la tarea cerrada. La tarea cerrada, es de tipo algorítmica o memorística. [Ejemplo de esto son los enunciados del tipo:] utilice el concepto o resuelva el ejercicio. Una tarea abierta es todo lo contrario, es aquella que facilita procesos, busca la argumentación y la solución de problemas. El problema no es de solución inmediata, se tiene que buscar una estrategia, usar conocimientos [previos] y [permite la adquisición de] nuevos conocimientos y habilidades.	Transición del 2 al 3	Origen del conocimiento. Tipos de tareas. Vinculo Tipo de tarea - argumentación.	Epistémica	Tareas que favorecen la argumentación	Si
TTA04	Según Ortiz y Carreño (2019) una tarea de argumentación debe tener tres características muy importantes. La primera característica es poder promover la comunicación, eso significa que al momento del abordaje de la tarea se pueden abordar de diferentes formas; si hay una única forma, puede promover la argumentación, pero no de la mejor manera. La segunda característica es tener diversas soluciones, se puede llegar a la misma respuesta, pero de diferentes formas. La tercera característica es crear polémica porque la argumentación se trata de convencerse a uno mismo y a los demás.	Transición del 2 al 3	Origen del conocimiento. Características (Tarea de argumentación). Vinculo Tipo de tarea - argumentación.	Epistémica	Tareas que favorecen la argumentación	Si
TTA07	La [tarea propuesta fuera de la MDM], aunque pareciese que su instrucción promueve la argumentación, no es una tarea rica en argumentación, puesto que no permite promover la discusión, los contraejemplos y en particular, no permite el convencimiento de los demás. [...] En la socialización realmente [lo que se] busca es la explicación de la situación por parte del estudiante.	3	Vinculo Tipo de tarea - argumentación.	Epistémica	Tareas que favorecen la argumentación	Si
TTA08	Con respecto a la [tarea propuesta en el seminario PME de la MDM], los profesores pueden observar que promueve los procesos de argumentación. [Esto, puesto que para autores como] Solar y Deulofeu (2016) una tarea promueve la argumentación debe tener las siguientes condiciones: motivar en los estudiantes diferentes procedimientos, respuestas abiertas y posturas diferentes.	3	Origen del conocimiento. Características (Tarea de argumentación). Vinculo Tipo de tarea - argumentación.	Epistémica	Tareas que favorecen la argumentación	Si
TTA05	[En una] tarea [que] promueve la explicación [más que la argumentación] [...] [la construcción y] la exploración [son guiadas y] todos los niños terminan [realizando] lo mismo. [...] Entonces, cuando llega el momento de [la] socialización [...] solamente una persona va a intervenir. [...] Esta persona va a narrar lo que sucedió, y todos los demás van a decir "sí, pasó eso".	Transición del 2 al 3	Origen del conocimiento. Influencia del diseño en la actividad del estudiante. Diferenciación procesos.	Epistémica	Procesos involucrados en una tarea que favorece la argumentación	Si

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
TTA09	Las metas de una tarea matemática escolar que promuevan la argumentación deben ir enfocadas a los procesos vinculados a esta, como lo es la conjeturación o la verificación. A esto añadimos, que los procesos de construcción, visualización y exploración realizan un trabajo implícito en cumplimiento de la meta.	3	Origen del conocimiento. Característica (meta).	Epistémica	Procesos involucrados en una tarea que favorece la argumentación	Si
TTA10	Se recomienda que en el desarrollo de la tarea se realice un recorrido por cada uno de los procesos de construcción, visualización, exploración, conjeturación y verificación; enfatizando aquel proceso en el cual se busca desarrollar un mayor nivel de destreza. Por ejemplo, al momento de realizar la exploración se puede pedir a los estudiantes reportar cada una de las acciones realizadas y su finalidad. En el proceso de conjeturación, en niveles iniciales, el profesor puede usar plantillas discursivas que permitan la construcción guiada de una conjetura.	3	Origen del conocimiento. Impacto de procesos en el diseño.	Epistémica	Procesos involucrados en una tarea que favorece la argumentación	Si
TTA13	[...] El proceso argumentativo lo fundamentamos en cinco procesos matemáticos: construcción, visualización, exploración, conjeturación y verificación. Desde nuestro punto de vista, estos procesos promueven en los estudiantes el surgimiento de argumentos durante la actividad matemática. Así mismo, para Camargo et al. (2006) la actividad demostrativa se concreta en una serie de acciones de índole heurística involucradas en los últimos cuatro procesos. En nuestro caso, vemos prudente anexar el proceso de construcción, ya que permite a los estudiantes poner en juego diversos conocimientos; tales como definiciones de objetos geométricos para buscar que una construcción garantice una situación propuesta.	3	Origen del conocimiento. Vinculo argumentación - procesos.	Epistémica	Procesos involucrados en una tarea que favorece la argumentación	Si
FTA01	Los profesores con [un referente teórico] logran vislumbrar que se pueden plantear diversos tipos de problemas que promueven diversos tipos de argumentos formales e informales (deductivo, inductivo y abductivo) en los estudiantes. Estos argumentos se ven afectados por el proceso de exploración que realice el estudiante.	1	Origen del conocimiento. Tipos de problemas. Vinculo Problema - argumento. Vinculo proceso - argumento.	Epistémica	Tipos de problemas y su relación con los tipos de argumentos	Si
FTA04	Los profesores comprenden que según la tarea propuesta emergen diferentes tipos de argumentos en la actividad de los estudiantes.	1	Vinculo Tipo de tarea - argumento.	Epistémica	Tipos de problemas y su relación con los tipos de argumentos	Si
TTA01	Si [en una tarea] se le da [al estudiante] la construcción, los argumentos me tienen que salir en la exploración. O sea, si yo quiero generar problemas en donde la exploración [permita el surgimiento de argumentos], tengo que [otorgarle las] construcciones [al estudiante].	Transición del 2 al 3	Origen del conocimiento. Vinculo proceso - argumento.	Epistémica	Tipos de problemas y su relación con los tipos de argumentos	Si
FTA03	[La interacción se manifiesta en las] formas de comunicación entre los miembros de la clase (profesor, estudiante, grupos). Esto, se realiza con la intención de institucionalizar significados y comparar formas de solución, puntos de vista, conocimientos y construcción de argumentos.	1	Origen del conocimiento. Características (Interacción). Función (Interacción).	Interaccional	Interacciones que favorecen la argumentación en la actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea	Si

Código	Dato	Estado del conocimiento	Rótulos	Faceta de la Dimensión Didáctica	Indicador	Datos transformación
TTA06	[Ortiz y Carreño (2019)] dicen que el error se puede potencializar para que la tarea lleve al proceso argumentativo. [...] Si el niño hizo la exploración mal, [el profesor] puede [indagar] qué pasó, y de esa manera, hacer que los otros niños puedan crear un contraargumento y puedan hacerle entender al niño cuál fue su error. [...] En ese momento [surge] la argumentación.	Transición del 2 al 3	Origen del conocimiento. Vinculo Interacción - argumento. Vinculo Actividad - argumento.	Interaccional	Interacciones que favorecen la argumentación en la actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea	Si
TTA11	El profesor debe saber cuáles son las etapas de la tarea que ha diseñado y como estas etapas benefician el proceso de argumentación. Los agrupamientos como individual, en parejas, en pequeño grupo o gran grupo promueven diferentes interacciones que favorecen el surgimiento de partes de un argumento o la conformación de argumentos individuales o grupales.	3	Origen del conocimiento. Vinculo Interacción - argumento.	Interaccional	Interacciones que favorecen la argumentación en la actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea	Si
TTA12	[...] Los momentos de interacción promueven el surgimiento de argumentos, ya sea de forma explícita o con algunos de sus elementos de forma implícita. Por ejemplo, un estudiante cuando defiende su postura puede presentar de forma explícita los datos que tomó en cuenta y, manifestar una aseveración que se soportó por una garantía de forma implícita, que todo el grupo acepta como verídica.	3	Origen del conocimiento. Vinculo Interacción - argumento.	Interaccional	Interacciones que favorecen la argumentación en la actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea	Si
TTA14	En el momento donde el estudiante realiza una construcción e interactúa con ella, puede tomar decisiones a partir de la realimentación que el programa le otorga. En la exploración con la herramienta digital se originan argumentos o partes de argumentos, Por ejemplo, la detección de una invariante como puede ser la condición geométrica de una figura para garantizar la solución de la situación planteada.	3	Origen del conocimiento. Vinculo Interacción - argumento - proceso.	Interaccional	Interacciones que favorecen la argumentación en la actividad de los estudiantes dependiendo del tipo de tarea	Si

10.8 Anexo 8: Síntesis de la Transformación del Conocimiento Didáctico – Matemático

Transformación del conocimiento sobre argumentación

La Figura 1 exhibe la distribución de los datos clasificados por facetas, indicadores y Estados del conocimiento sobre argumentación.

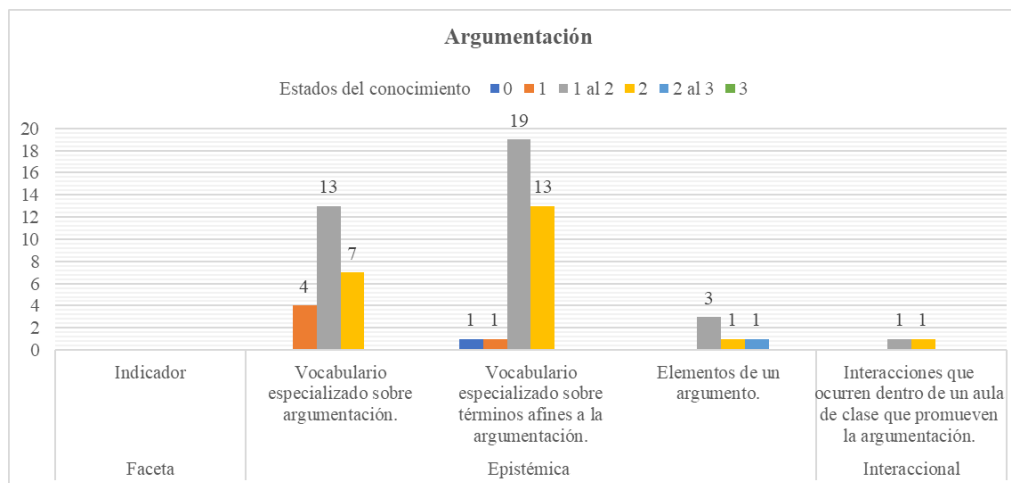


Figura 1: Distribución de datos que aluden a argumentación.

Como se puede observar en la gráfica, el conocimiento de los profesores sobre argumentación se localizó en la faceta epistémica. Esta, presenta indicadores específicos que nos permiten rastrear una transformación a lo largo de los diversos Estados del conocimiento. La Tabla 1 presenta la caracterización del conocimiento realizada por medio de las categorías y subcategorías definidas. Los datos mencionados en cada una de las tablas se pueden referenciar en el Anexo 4.

Faceta epistémica

Categoría	Estados del conocimiento				
	0	1	1 al 2	2	2 al 3
Origen del conocimiento	Empírico [FA01]	Empírico [FA10] De autoridad [FA04, FA07]	Empírico [DA11, DA13, DA14] De autoridad [DA04, DA06, DA08] Referencial [DA02, DA03, DA15, DA08, DA26, DA34] Propio [DA07, DA17, DA18]	Referencial [DA37] Propio [DA43, DA44, DA45, DA46, DA48, DA50, DA52, DA54]	No se presenta en este Estado del conocimiento.
Profundidad	Enunciativo [FA01]	Enunciativo [FA10] Descriptivo [FA04, FA07]	Enunciativo [DA02, DA03, DA05, DA13, DA14, DA15] Descriptivo [DA04, DA06, DA08, DA11, DA12, DA16, DA23, DA24, DA32, DA33, DA34] Explicativo [DA07, DA09, DA17, DA18, DA19, DA20,	Descriptivo [DA43, DA44, DA45, DA46, DA48, DA50, DA51, DA52, DA53, DA54, DA55] Explicativo [DA39, DA40, DA41, DA42, DA47, DA49]	Descriptivo [TA01]

Categoría	Estados del conocimiento				
	0	1	1 al 2	2	2 al 3
			DA27, DA30, DA31, DA36]		
Concisión	No se presenta en este Estado del conocimiento.	Ampliación del significado [FA08, FA09]	Establecimiento de significado [DA02, DA03, DA13, DA14] Ampliación del significado [DA04, DA05, DA07, DA08, DA09, DA11, DA12, DA16, DA20, DA22, DA23, DA24, DA27, DA29, DA31, DA32, DA33, DA34, DA36] Concreción del significado [DA17, DA18, DA28]	Ampliación del significado [DA39, DA40, DA42, DA47, DA49, DA51, DA53, DA55] Concreción del significado [DA43, DA44, DA45, DA46, DA48, DA50, DA52, DA54]	Ampliación del significado [TA01]
Impacto en el discurso	Uso de términos comunes [FA01]	Uso de términos comunes [FA10] Uso de términos especializado [FA04, FA07, FA08, FA09]	Uso de términos comunes [DA02, DA03, DA11, DA13, DA14] Uso de términos especializados [DA04, DA05, DA07, DA08, DA09, DA12, DA15, DA16, DA17, DA18, DA20, DA22, DA23, DA24, DA27, DA28, DA29, DA31, DA32, DA33, DA34, DA36]	Uso de términos comunes [DA37] Uso de términos especializados [DA43, DA44, DA45, DA46, DA47, DA48, DA49, DA50, DA51, DA52, DA54, DA55, DA56]	No se presenta en este Estado del conocimiento.
Relación entre términos	No se presenta en este Estado del conocimiento.	Conexiones [FA04, FA09]	Conexiones [DA02, DA03, DA05, DA06, DA07, DA11, DA12, DA16, DA20, DA25, DA26, DA27] Similitudes [DA28, DA35] Diferenciaciones [DA09, DA19, DA33, DA34, DA36]	Conexiones [DA37, DA44, DA50, DA51, DA55, DA57, DA58] Diferenciaciones [DA56]	No se presenta en este Estado del conocimiento.

Tabla 1: Aplicación de categorías y subcategorías para datos que aluden a argumentación en la faceta epistémica.

Transformación del conocimiento sobre tareas

La Figura 2 exhibe la distribución de los datos clasificados por facetas, indicadores y Estados del conocimiento sobre tareas.

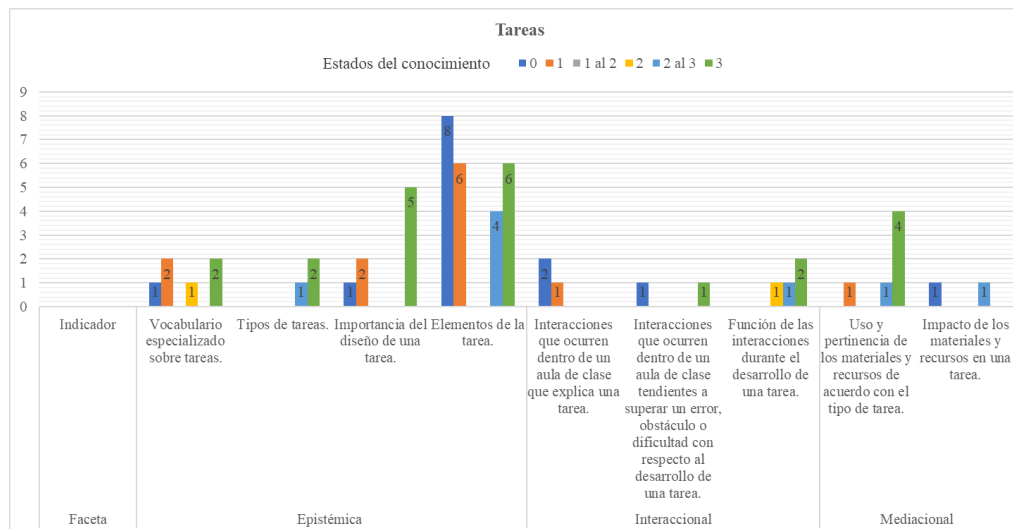


Figura 2: Distribución de datos que aluden a tareas.

Como se puede observar en la gráfica, el conocimiento de los profesores sobre tareas se localizó en tres facetas: epistémica, interaccional y mediacional. Cada una de estas, presentan indicadores específicos que nos permiten rastrear una transformación a lo largo de los diversos Estados del conocimiento. A continuación, exhibimos la caracterización de la transformación para cada una de estas facetas (Tabla 2, Tabla3, Tabla 4). Los datos mencionados en cada una de las tablas se pueden referenciar en el Anexo 4.

Faceta epistémica

Categoría	Estados del conocimiento			
	0	1	2 al 3	3
Origen del conocimiento	Empírico [FT01, FT10, FT03, FT07, FT14, FT16, FT18, FT20, FT23, FT27]	Empírico [FT21, FT24] De autoridad [FT29, FT31, FT15, FT17, FT19, FT30]	De autoridad [TT08, TT03, TT04, TT05] Propio [TT02]	De autoridad [TT09] Referencial [TT11, TT16, TT19, TT20] Propio [TT26, TT27, TT10, TT13, TT21, TT12, TT17, TT18]
Profundidad	Enunciativo [FT10, FT03, FT07, FT18, FT23, FT27] Descriptivo [FT01, FT14, FT16, FT20]	Enunciativo [FT34, FT21, FT24, FT30] Descriptivo [FT29, FT32, FT15, FT17, FT19]	Descriptivo [TT08, TT03, TT05] Explicativo [TT02, TT04]	Descriptivo [TT26, TT09, TT15, TT11, TT21, TT12, TT14, TT17, TT18, TT19, TT20] Explicativo [TT27, TT10, TT13, TT16]
Concisión	Establecimiento de significado [FT01, FT14, FT16, FT18, FT20, FT23, FT27]	Establecimiento de significado [FT31, FT21, FT24] Ampliación del significado [FT32, FT15]	Establecimiento de significado [TT08] Ampliación del significado [TT02, TT03, TT04, TT05]	Establecimiento de significado [TT17, TT18] Ampliación del significado [TT27, TT09, TT15, TT16, TT12, TT14] Concreción del significado [TT26, TT11, TT13, TT19, TT20]
Impacto en el discurso	Uso de términos comunes	Uso de términos comunes	Uso de términos comunes	Uso de términos comunes [TT09, TT15, TT21]

Categoría	Estados del conocimiento			
	0	1	2 al 3	3
	[FT01, FT10, FT03, FT07]	[FT21, FT24] Uso de términos especializados [FT29, FT15, FT17, FT19, FT30]	[TT03] Uso de términos especializados [TT08, TT02, TT04, TT05]	Uso de términos especializados [TT26, TT27, TT10, TT11, TT13, TT16, TT17, TT18, TT19, TT20]
Relación entre términos	No se presenta en este Estado del conocimiento.	Conexiones [FT30] Diferenciaciones [FT31]	No se presenta en este Estado del conocimiento.	Conexiones [TT27, TT17, TT19]

Tabla 2: Aplicación de categorías y subcategorías para datos que aluden a tareas en la faceta epistémica.

Faceta interaccional

Categoría	Estados del conocimiento			
	0	1	2 al 3	3
Origen del conocimiento	Empírico [FT09, FT26, FT11]	De autoridad [FT25]	Propio [TT07]	Propio [TT29, TT28, TT30]
Profundidad	Enunciativo [FT09, FT11] Descriptivo [FT26]	Descriptivo [FT25]	Descriptivo [TT07]	Descriptivo [TT28, TT30] Explicativo [TT29]
Concisión	Establecimiento de significado [FT09, FT26]	Ampliación del significado [FT25]	Ampliación del significado [TT07]	Ampliación del significado [TT28, TT30]
Impacto en el discurso	Uso de términos comunes [FT09, FT26, FT11]	Uso de términos especializados [FT25]	Uso de términos especializados [TT07]	Uso de términos especializados [TT29, TT28, TT30]
Relación entre términos	No se presenta en este Estado del conocimiento.	No se presenta en este Estado del conocimiento.	No se presenta en este Estado del conocimiento.	Conexiones [TT30]

Tabla 3: Aplicación de categorías y subcategorías para datos que aluden a tareas en la faceta interaccional.

Faceta mediacional

Categoría	Estados del conocimiento			
	0	1	2 al 3	3
Origen del conocimiento	Empírico [FT12]	De autoridad [FT22]	De autoridad [TT06, TT01]	De autoridad [TT25] Propio [TT22, TT23, TT24]
Profundidad	Enunciativo [FT12]	Enunciativo [FT22]	Descriptivo [TT01] Explicativo [TT06]	Descriptivo [TT23, TT24] Explicativo [TT22, TT25]
Concisión	No se presenta en este Estado del conocimiento.	No se presenta en este Estado del conocimiento.	Ampliación del significado [TT06]	Establecimiento de significado [TT24] Concreción del significado [TT22, TT23, TT25]
Impacto en el discurso	Uso de términos comunes [FT12]	Uso de términos especializados [FT22]	Uso de términos especializados [TT06, TT01]	Uso de términos especializados [TT22, TT24, TT25]
Relación entre términos	No se presenta en este Estado del conocimiento.	Conexiones [FT22]	Conexiones [TT06, TT01]	Conexiones [TT22]

Tabla 4: Aplicación de categorías y subcategorías para datos que aluden a tareas en la faceta mediacional.

Transformación del conocimiento sobre tareas de argumentación

La Figura 3 exhibe la distribución de los datos clasificados por facetas, indicadores y Estados del conocimiento sobre tareas de argumentación.

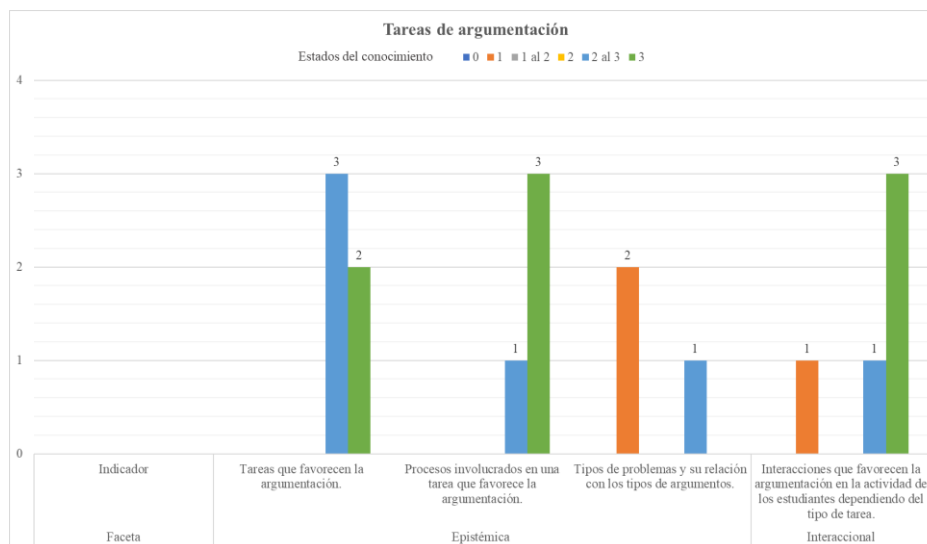


Figura 3: Distribución de datos que aluden a tareas de argumentación.

Como se puede observar en la gráfica, el conocimiento de los profesores sobre tareas argumentación se localizó en dos facetas: epistémica e interaccional. La Tabla 5 y Tabla 6 presentan la caracterización del conocimiento realizada por medio de las categorías y subcategorías definidas. Los datos mencionados en cada una de las tablas se pueden referenciar en el Anexo 4.

Faceta epistémica

Categoría	Estados del conocimiento		
	1	2 al 3	3
Origen del conocimiento	Referencial [FTA01]	De autoridad [TTA03] Referencial [TTA04] Propio [TTA05, TTA01]	Referencial [TTA08, TTA13] Propio [TTA09, TTA10]
Profundidad	Descriptivo [FTA01, FTA04]	Descriptivo [TTA01, TTA02, TTA04, TTA05] Explicativo [TTA03]	Descriptivo [TTA07, TTA08, TTA09] Explicativo [TTA10, TTA13]
Concisión	Ampliación del significado [FTA01]	Ampliación del significado [TTA01, TTA02, TTA05] Concreción del significado [TTA03, TTA04]	Concreción del significado [TTA07, TTA08, TTA09, TTA10, TTA13]
Impacto en el discurso	Uso de términos especializados [FTA01, FTA04]	Uso de términos especializados [TTA03, TTA05]	Uso de términos especializados [TTA07, TTA08, TTA09, TTA10, TTA13]
Relación entre términos	Conexiones [FTA01, FTA04]	Conexiones [TTA01, TTA03, TTA04] Diferenciaciones [TTA05]	Conexiones [TTA07, TTA08, TTA13]

Tabla 5: Aplicación de categorías y subcategorías para datos que aluden a tareas de argumentación en la faceta epistémica.

Faceta interaccional

Categoría	Estados del conocimiento		
	1	2 al 3	3
Origen del conocimiento	De autoridad [FTA03]	Referencial [TTA06]	Propio [TTA11, TTA12, TT14]
Profundidad	Descriptivo [FTA03]	Explicativo [TTA06]	Descriptivo [TTA11] Explicativo [TTA12, TT14]
Concisión	Ampliación del significado [FTA03]	Ampliación del significado [TTA06]	Ampliación del significado [TTA11, TTA12, TT14]
Impacto en el discurso	Uso de términos especializados [FTA03]	Uso de términos especializados [TTA06]	Uso de términos especializados [TTA11, TTA12, TT14]
Relación entre términos	No se presenta en este Estado del conocimiento.	Conexiones [TTA06]	Conexiones [TTA11, TTA12, TT14]

Tabla 6: Aplicación de categorías y subcategorías para datos que aluden a tareas de argumentación en la faceta interaccional.