



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

UNA MIRADA DEL CAMPO ELÉCTRICO Y EL POTENCIAL ELÉCTRICO DESDE UNA
PERSPECTIVA GEOMÉTRICA

Diego Alejandro Liévano Recamán

Línea de profundización:

La enseñanza de la física y la relación física matemática



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Facultad de ciencia y tecnología

Departamento de física

Bogotá 2022

UNA MIRADA DEL CAMPO ELÉCTRICO Y EL POTENCIAL ELÉCTRICO DESDE UNA
PERSPECTIVA GEOMÉTRICA

Diego Alejandro Liévano Recamán

TRABAJO DE GRADO PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO EN FÍSICA

Asesor:

Mauricio Rozo Clavijo

Línea de profundización:

La enseñanza de la física y la relación física matemática



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Facultad de ciencia y tecnología

Departamento de física

Bogotá 2022

Tabla de contenidos

Introducción.....	6
1. Capítulo I.....	8
1.1 Contexto Problemático.....	8
1.2 Planteamiento del problema.....	9
1.3 Pregunta Problema.....	10
1.4 Objetivo General.....	11
1.5 Objetivos Específicos.....	11
1.6 Marco Teórico.....	11
1.7 Antecedentes.....	14
2. Capítulo II.....	17
2.1 Geometría y Física.....	17
2.1.1 La relación geometría física.....	19
2.2 El campo eléctrico y el Potencial Eléctrico.....	21
2.2.1 La construcción del desarrollo del campo eléctrico y potencial eléctrico.....	21
2.3 La enseñanza del campo eléctrico y el potencial eléctrico.....	25
3. Capítulo III.....	27
3.1 Funciones complejas.....	27
3.2 Los fenómenos eléctricos desde una perspectiva geométrica.....	29
3.2.1 El campo eléctrico en la cercanía de dos cargas puntuales.....	29
3.2.2 Superficie cargada y función exponencial.....	34
3.2.3 Dipolo eléctrico y función racional $f(z) = \frac{1}{z}$	38
3.2.4 Disco cargado y función racional $f(z) = \frac{1}{z^2}$	42
3.3 Conclusiones.....	47

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Representación gráfica de una carga puntual en las cercanías de un campo eléctrico.....	12
Figura 2. Representación de las líneas de campo eléctrico de carga positiva y carga negativa.....	23
Figura 3. Gráfica de la ecuación (3).....	30
Figura 4. Gráfica de la ecuación (4).....	30
Figura 5. Acople gráfico de las figuras (3) y (4)	31
Figura 6. Líneas de campo eléctrico de dos cargas puntuales positivas	31
Figura 7. Modificación de la Figura (5) contextualizada al fenómeno planteado.....	32
Figura 8. Gráfica de la ecuación (7).....	35
Figura 9. Gráfica de la ecuación (8).....	35
Figura 10. Acople gráfico de las figuras (11) y (12).....	35
Figura 11. Líneas de campo eléctrico de una superficie cargada	36
Figura 12. Representación de la figura (10)	37
Figura 13. Modificación de la familia de funciones obtenidas en contextualización con la superficie cargada.....	37
Figura 14. Gráfico de la ecuación (9).....	39
Figura 15. Gráfico de la ecuación (10)	39
Figura 16. Acople gráfico de las figuras (14) y (15).....	39
Figura 17. Proyecto EMAG. Dipolo eléctrico.....	40

Figura 18. Contextualización de la figura (16) con las líneas de campo del dipolo eléctrico...	41
Figura 19. Gráfica de la ecuación (11).....	42
Figura 20. Gráfica de la ecuación (12).....	42
Figura 21. Acople gráfico de las figuras (19) y (20).....	43
Figura 22. Líneas de campo eléctrico de un disco cargado de radio r	43
Figura 23. Contextualizando la familia de funciones figura (21) con las líneas de campo de un disco cargado.....	44

INTRODUCCIÓN

El electromagnetismo ha jugado un papel esencial en nuestras vidas, ha cambiado no solo la forma en la que percibimos el mundo sino nuestros alrededores, los logros de esta rama ha influenciado la tecnología y la han llevado a un desarrollo tal que ha modificado la forma en la que vivimos, con la creación de objetos y herramientas que cambiaron la forma en la que nos comunicamos, trabajamos e incluso estudiamos. Ligada a estos desarrollos científicos y tecnológicos está la geometría, quien en conjunto con la física buscan describir y explicar el espacio y todo lo que nos rodea, podremos ver incluso que desde civilizaciones antiguas ya se hacía uso de ambas áreas para la solución de problemas cotidianos, por lo que a lo largo de esta investigación se buscará recalcar la importancia que hay en la relación geometría-física. Se analizarán las problemáticas en la educación actual y el gran reto que supone la enseñanza del electromagnetismo, donde surge la necesidad de buscar nuevas rutas, caminos que ayuden a mejorar no solo cómo los estudiantes aprenden sino cómo los maestros enseñan los fenómenos eléctricos. Se propone hacer uso de la relación física-geometría como metodología de abordamiento de los fenómenos eléctricos a propósito de la enseñanza-aprendizaje.

En el primer capítulo se realizará una contextualización sobre las problemáticas en la enseñanza-aprendizaje a la hora de abordar el campo eléctrico y el potencial eléctrico, donde las metodologías usadas en las aulas conducen a un desentendimiento y confusión en los estudiantes a la hora de tratar los fenómenos eléctricos. Se expondrán los autores que sustentan tanto la parte teórica como la parte pedagógica de la investigación. A su vez, se planteará de manera general como se pretende abordar la relación física-geometría como una estrategia para fortalecer los procesos de enseñanza de los fenómenos eléctricos.

En el segundo capítulo se hará una contextualización histórica de cómo los pensadores han hecho uso de la geometría para el desarrollo de las teorías, resaltando la importancia y la estrecha relación que hay entre la física y la geometría. Posteriormente se realizará un análisis de cómo Michael Faraday y James Maxwell, desarrollaron y moldearon los conceptos de campo eléctrico y potencial eléctrico, y cómo por la necesidad de lograr entender estos conceptos surge una geometría creada por Faraday alrededor de estos fenómenos. Para finalizar se analizará cómo se

aborda usualmente el campo eléctrico y el potencial eléctrico en colegios y universidades. Esto con el fin de crear dos perspectivas diferentes, cómo los físicos teóricos desarrollaron la idea de campo eléctrico y potencial eléctrico, y cómo se abordan estos conceptos en la educación actual, para así poder dar paso al tercer capítulo y proponer una nueva mirada desde un punto de vista geométrico.

En el tercer capítulo se realizará una breve descripción las funciones complejas, su definición y características, también se planteará una nueva forma de abordar los fenómenos eléctricos (campo eléctrico y potencial eléctrico) haciendo uso de la relación geometría-física, esto con la ayuda de las funciones de variable compleja. Se busca mostrar la relación que hay en la geometría que brindan las funciones complejas, asociando dicha geometría con los fenómenos del campo eléctrico y el potencial eléctrico, con el objetivo de encaminar la enseñanza-aprendizaje del electromagnetismo de una manera totalmente diferente a la usualmente utilizada en colegios y universidades, mostrando que la relación entre geometría y física es esencial y puede llevarnos a mejorar los procesos de aprendizaje en la educación actual.

1. Capítulo I

1.1 CONTEXTO PROBLEMÁTICO

El electromagnetismo ha sido sin duda uno de los campos de la física que más ha afectado nuestra vida diaria gracias a su inmensidad de aplicaciones. Los fenómenos electromagnéticos están presentes en muchas situaciones del diario vivir, como serían la luz, los microondas, motores eléctricos entre otros. Caracterizando los fenómenos eléctricos y magnéticos, el electromagnetismo da pie a nuevas investigaciones en diferentes áreas de la física, como lo es el caso de la relatividad y la mecánica cuántica.

Los estudiantes presentan dificultades a la hora de abordar conceptos como el campo eléctrico, ya que no es directamente perceptible a nuestra experiencia. En un estudio realizado en el 2001 por Furió C. y Guisasola J. se muestran las dificultades que tienen los estudiantes al momento de aprender temas como el potencial y el campo eléctrico. De la misma forma los trabajos que se refieren a las dificultades de aprendizaje sobre el campo eléctrico muestran que los estudiantes siguen una “receta”, la cual más allá de brindarles una comprensión conceptual, se limita a resolver fórmulas y despejar ecuaciones, como lo sugiere Furió y Guisasola:

A pesar de los esfuerzos y del tiempo que se invierten en este campo de la física, los resultados que se obtienen son poco satisfactorios, como lo muestra el alto índice de fracaso escolar que se produce y la bibliografía sobre dificultades de aprendizaje (Furió y Guisasola, 2001, p2).

...una parte importante de los estudiantes explican la situación utilizando el concepto de fuerza eléctrica, presentando una confusión entre este concepto y el de potencial eléctrico. El resultado de éxito obtenido es bajo si consideramos que esta pregunta es muy familiar a los estudiantes dentro del contexto académico. (Furió y Guisasola, 2001, p2)

Si bien es cierto que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje del campo eléctrico y el potencial eléctrico, es de aclarar que los docentes utilizan metodologías, que en muchas ocasiones no son adecuadas, metodologías que enfatizan los procesos matemáticos, que guían y

limitan al estudiante a resolver formulas y despejar ecuaciones. Debido a esto los estudiantes se alejan de los conceptos que les permitiría comprender más a fondo los fenómenos electromagnéticos como lo señala Furió y Guisasola:

Como profesores, también podemos preguntarnos: ¿qué tipo de enseñanza impartimos para que la mayoría de los estudiantes sea incapaz de aprender de forma significativa el concepto de campo eléctrico? No podemos olvidar que una de las variables que más influye en el aprendizaje de conceptos es la forma de enseñarlos. (Furió y Guisasola, 2001, p2)

Dada la problemática sobre la enseñanza-aprendizaje del campo eléctrico y el potencial eléctrico, mi propuesta se fundamenta en plantear los fenómenos eléctricos, en particular el campo eléctrico y potencial eléctrico, dentro de un contexto geométrico haciendo uso de funciones de variable compleja, con el fin de que el estudiante no solo aprenda la formalización, sino que por el contrario le permita hacer una comprensión del fenómeno eléctrico con una mirada geométrica.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La enseñanza del campo eléctrico y el potencial eléctrico tanto a nivel universitario como a nivel básica secundaria se aborda desde una perspectiva teórica enfatizando la formalización para dar razón del fenómeno eléctrico. Sin embargo, esta metodología, aunque valiosa, no ha dado resultados satisfactorios ya que estudios muestran que los estudiantes siguen presentando dificultades para hacer una comprensión de los fenómenos eléctricos y, en particular, sobre el campo eléctrico y el potencial eléctrico.

Desde los griegos ha existido una estrecha relación entre lo que es “geometría” y “física”, y como esta unión se ha ido fortaleciendo con el paso del tiempo, podemos observar esto en la Grecia antigua con el surgimiento de la geometría euclidiana y la física de Pitágoras, en la estrecha relación de los trabajos de Descartes y Fermat con la física de Galileo y la mecánica Newtoniana, y ni hablar del surgimiento de las geometrías curvas con autores como Gauss con su “*Disquisiciones generales circa superficies curvas*” o Bernhard Riemann con “*Sobre las*

hipótesis que sirven de fundamentos a la geometría” brindando fundamentos geométricos esenciales para trabajos futuros como los de Albert Einstein de relatividad y los aportes de Minkowski a esta teoría.

Por lo general existen dos posturas frente a lo que es física y geometría, por una parte, se piensa que la geometría y la física son cosas muy diferentes y apenas hay relación entre estas dos, y otra en la que se cree que la física usa a la geometría como lenguaje o como forma de expresar sus teorías, nada más lejos de la realidad. Como se mostrará más adelante esta relación entre la física y la geometría va más allá de ser una la herramienta de la otra, sino que por el contrario ha llegado a ser tan esencial la relación entre las dos que es difícil concebir la física sin la geometría. Con esto, uno de los objetivos adicionales de este trabajo es brindar al lector una amplia visión de esta relación desde una perspectiva constitutiva.

Feynman en su libro “Radiación y materia” expone una relación entre Geometría y Física a propósito del campo eléctrico y el potencial escalar que permite hacer una representación geométrica conjuntamente con una solución analítica. Bajo este contexto, se pretende hacer uso de la relación entre Geometría y Física en la que no se asume una jerarquía entre ellas, es decir ambas son elementos constitutivos que permiten hacer una descripción de la naturaleza y, por lo tanto, permiten mostrar el carácter geométrico del campo eléctrico y el potencial eléctrico haciendo uso de funciones de variable compleja. Esta perspectiva se propone como una estrategia de enseñanza en cursos de electromagnetismo a nivel universitario con el fin de mejorar el aprendizaje de los estudiantes. Ya que se harán uso de funciones complejas este trabajo está orientado a una población universitaria.

1.3 PREGUNTA PROBLEMA

¿Cómo desde una perspectiva geométrica se puede abordar el campo eléctrico y el potencial eléctrico haciendo uso de funciones de variable compleja para el desarrollo de una metodología de enseñanza?

1.4. OBJETIVO GENERAL

Realizar un análisis sobre el carácter geométrico del campo eléctrico y potencial eléctrico a partir de funciones de variable compleja para la construcción de una ruta metodológica para el proceso de enseñanza-aprendizaje.

1.5. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analizar artículos y/o textos referentes al carácter geométrico del campo eléctrico y potencial eléctrico.
- Realizar una caracterización geométrica del campo eléctrico y potencial eléctrico a propósito de la geometría euclidiana haciendo uso de funciones de variable compleja.
- Abordar fenómenos eléctricos que permitan generar la perspectiva geométrica del campo eléctrico y potencial eléctrico para la enseñanza-aprendizaje

1.6. MARCO TEÓRICO

En este trabajo se abordarán los autores *Faraday* y *Maxwell*, quienes formalizaron en el siglo el siglo *XIX* el concepto de campo eléctrico y potencial eléctrico haciendo uso de una representación geométrica para la explicación de los fenómenos eléctricos.

El concepto de Campo Eléctrico fue propuesto por Michael Faraday para construir una explicación de la inducción electromagnética en su experimento “Aro de Hierro”, mostrando así que un campo magnético variable produciría un campo eléctrico. Sin embargo, fue James C. Maxwell quien formalizó todos los alcances obtenidos hasta la época en cuanto al electromagnetismo, hoy conocidas como “ecuaciones de Maxwell”; ecuaciones que sintetizan y describen los fenómenos eléctricos y magnéticos que se habían formulado en el siglo *XIX*.

Maxwell describía el campo eléctrico como una porción del espacio que ha sido modificada en sus alrededores por cuerpo electrificados, así:

The Electric Field is the portion of space in the neighborhood of electrified bodies, considered with reference to electric phenomena. It may be occupied by air or other bodies, or it may be also called Vacuum, from which we have withdrawn, every substance which we can act upon with the means at our disposal. (Maxwell, James C. 1881, p44)

El potencial eléctrico en un punto B está definido como el trabajo (por unidad de carga) que tiene que realizar el campo eléctrico para mover una carga q , desde una distancia A hasta el punto B.

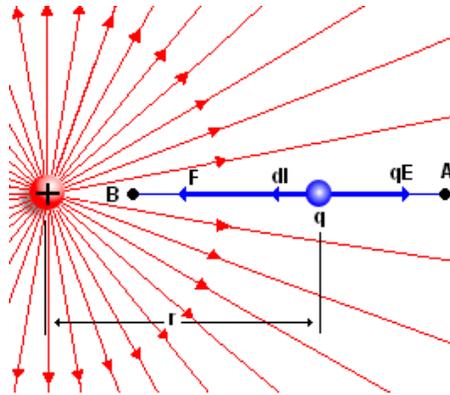


Figura 1. Representación gráfica de una carga puntual en las cercanías de un campo eléctrico
Cuba. M. (2017).

If the small body carrying the small charge e be moved from the given point to an indefinite distance from the electrified bodies, it will experience at each point of its course a force R_e , where R varies from point to point of course. Let the whole work done on the body by these electric forces be V , then V is the potential at the point of the field from which the body started. A body electrified positively tends to move from places of greater positive potential to places of smaller positive, or of negative potential, and a body negatively electrified tends to move in the opposite direction. (Maxwell, James C. 1881, p45)

A su vez, como cualquier campo físico, el campo eléctrico funciona bajo el inverso cuadrado de la distancia, es decir que, a mayor distancia del campo, la fuerza de este mismo irá disminuyendo y su fuerza aumentará si se está más cerca del campo.

Having established the law of force at a fixed distance, we may measure the force between bodies charged in a constant manner and placed at different distances. It is found by direct measurement that the force; whether of attraction or repulsion, varies inversely as the square of the distance, so that if f is the repulsion between two units at unit distance, the repulsion at distance r will be fr^{-2} , and the general expression for the repulsion between e units and e' units at distance r will be: $fee' r^{-2}$. (Maxwell, James C., p42)

Faraday y Maxwell brindan una geometría al campo eléctrico, estableciendo que al colocar un cuerpo electrificado en las cercanías del campo actuará una fuerza sobre ese cuerpo, y esta fuerza va a depender de la forma del cuerpo electrificado. La fuerza que ejerce un cuerpo electrificado sobre otro se representará por medio de unas líneas de fuerza, las cuales como estableció Maxwell dependerán de la geometría del cuerpo. Estas líneas serán perpendiculares a la superficie del cuerpo, de igual forma estas líneas representan la cantidad de fuerza que ejerce un campo y la dirección en la que el campo actúa, así:

It is in this sense that Faraday uses his conception of lines of force to indicate not only the direction but the amount of the force at any place in the field (Maxwell, James C. 1855, p85)

Por otra parte, para el contexto pedagógico se abordarán los autores Carlos Furió, Guisasola Aranzábal entre otros. Quienes han dedicado investigaciones a la enseñanza de las ciencias en colegios y en universidades, abordando problemáticas tanto de enseñanza como de aprendizaje, como lo establecen:

Muchos especialistas en didáctica de las ciencias se han cuestionado cuáles son las causas por las que los alumnos piensan que aprender ciencias es difícil y por qué enfrentan dicha

dificultad. Algunos se han enfocado, en primer lugar, no al cómo se enseña ciencias, sino cómo aprenden los sujetos; encontrando que aprenden construyendo su propio conocimiento.(García Pedro A. 2009, p1.)

Resulta difícil para un maestro impartir cualquier clase de tema cuando es una constante en los estudiantes tener una predisposición negativa hacia las ciencias, creer que estas se limitan a números y ecuaciones, y por muy adecuada que sea la metodología que el maestro aplique es difícil que los estudiantes comprendan temas que no les llame la atención, por tal razón este trabajo busca suplir esas falencias mediante una estrategia de enseñanza. Uno de los trabajos que tiene un maestro es comprender como sus estudiantes aprenden y con base a esto moldear las estrategias que usa en sus clases, por ejemplo, se facilitará la enseñanza de cualquier fenómeno físico haciendo uso de situaciones que los estudiantes vivan en su día a día, en lugar de abordar fenómenos por medio de ecuaciones y fórmulas que al final no significarán nada para ellos si no pueden dar cuenta de lo que está pasando realmente. Por lo tanto, como estrategia didáctica, para este trabajo, se plantearán diversos ejemplos de potenciales y campos eléctricos en situaciones cotidianas, los cuales se abordarán geoméricamente con ayuda de las funciones de variable compleja, ejemplos que ayudarán al estudiante a comprender estos fenómenos mediante procesos dinámicos.

1.7. ANTECEDENTES

Análisis conceptual del tratado de J.C Maxwell desde la perspectiva de campos para la enseñanza de la electrostática

Paola Andrea Albornoz Villalobos (2019)

Universidad Pedagógica Nacional

En este trabajo se analizan los problemas que tienen los estudiantes a la hora de abordar temas como el electromagnetismo, y con el tratado de Maxwell proponer nuevas estrategias para abordar la electrostática desde una perspectiva de campos. De este trabajo se tomarán las estrategias desarrolladas para la enseñanza del campo eléctrico, pertinente para el análisis desde una perspectiva pedagógica. A su vez se analizarán cuáles son las problemáticas que propone el autor alrededor de la enseñanza y aprendizaje del campo eléctrico y cuál será su método para abordar esta problemática.

La enseñanza del concepto de campo eléctrico basada en un modelo de aprendizaje como investigación orientada.

Furió C y Guisola J (2001)

Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales. Universidad de Valencia.

Trabajo en el que se estudian las dificultades que expresan los maestros en bachillerato relacionado a la enseñanza de temas como el potencial y el campo eléctrico. Así mismo se desarrolla una estrategia para suplir estas falencias. De este trabajo se usarán los datos obtenidos en la investigación, datos que muestra la deficiencia en los estudiantes a la hora de comprender ciertos temas de la física, y en particular sobre el campo eléctrico. También se tendrá en cuenta las estrategias usadas por el autor para abordar la problemática y lograr mejores resultados a la hora de enseñar estos temas.

Análisis complejo aplicado a la Teoría del Potencial Eléctrico

Mauricio W. Arce (2013)

Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina

En este artículo se busca dar resolución a la ecuación de Laplace por medio del análisis complejo orientado al estudio de campos electrostáticos. De este trabajo se tomará el desarrollo complejo de las ecuaciones de Laplace, brindando información adicional acerca de la relación del análisis

complejo del campo eléctrico. Pese a que Feynman diese un desarrollo acerca de esta relación, no se dio un alcance mayor a esta idea, por eso surge la necesidad de usar autores que complementen y ayuden a la construcción y formalización de esta.

Se han expuesto las diferentes dificultades y problemáticas que existen en la educación actual, a su vez, se expuso de manera breve una posible solución para suplir estas falencias, una estrategia que hace uso de la relación física y geometría para el abordamiento de los fenómenos eléctricos, pues como se ha visto a lo largo de la historia estas dos áreas han trabajado conjuntamente para dar explicación del mundo que nos rodea, por lo que se hará uso de las funciones complejas para modelar la geometría generada por el campo y el potencial eléctrico, generando una nueva perspectiva a la hora de abordar estos fenómenos.

2. Capítulo II

Física, geometría y pedagogía

Se analizará como a lo largo de la historia los físicos han implementado la geometría a la hora de abordar los fenómenos, con el pasar del tiempo se evidenciaron las falencias que poseía la física al momento de dar explicación de ciertos fenómenos, de alguna forma la física se quedaba corta y con falta de elementos. Con la implementación de la geometría se abrió la posibilidad de dar un desarrollo más amplio a las teorías en ese entonces, no solo eso, sino que a su vez facilitaba la forma en la que se entendía la naturaleza y el comportamiento de los fenómenos. Se verá como con el surgimiento de nuevas geometrías se abren puertas a teorías que no funcionaban bajo la geometría euclidiana.

Se tratará como los físicos Michael Faraday y James Maxwell construyeron y desarrollaron los conceptos de campo eléctrico y potencial eléctrico. A su vez, se evidenciará como Faraday dota de una geometría a estos fenómenos eléctricos, y propone el concepto de “líneas de fuerza”, dando cuenta de los efectos del campo eléctrico en el espacio y la fuerza que este ejerce.

Con la perspectiva teórica de Faraday y Maxwell alrededor de los fenómenos eléctrico se analizará como se abordan estos fenómenos en la escuela, así como las debilidades y falencias que existen en la enseñanza-aprendizaje.

2.1 Geometría y Física

La geometría es una de las áreas de la ciencia más antiguas, se sabe cómo civilizaciones como la babilónica, los egipcios e incluso en la antigua Grecia se estudiaban diferentes aspectos de la naturaleza. La palabra “geometría” viene del latín “*geometrĭa*” (“*geo*”, tierra, “*metrĭa*”, medir) y esto hace referencia a la “*medición de la tierra*”, por lo que se cree que el nacimiento de la geometría se debe a los egipcios, pues tenían la constante necesidad de medir sus tierras, debido a que el río Nilo constantemente inundaba el terreno causando que sus fronteras se borraran (CHINEA Domingo, p2). A medida que la geometría evolucionó y fue tomando fuerza, adquirió

el rango de ciencia, ya que esta buscaba explicar y así mismo aplicar conceptos en pro del entendimiento de lo que nos rodea. Pero si revisamos detenidamente esta evolución, nos daremos cuenta que la geometría euclidiana tuvo un gran impacto tanto en la geometría como en la ciencia, y estos postulados rigieron la lógica o el entendimiento del universo por muchos años, de hecho si revisamos el surgimiento de estos postulados fue alrededor de los 300-200 a.C, y no fue hasta el surgimiento de otro tipo de geometrías que se empezó a ampliar esta idea (hablamos de los 1600-1700), como lo expresa Domingo en su artículo “*Sobre Geometría y Física*”;

La evolución de la geometría a través de los tiempos ha sido lenta, quizás debido a que la geometría de Euclides fue obtenida a partir de unos postulados que a priori eran ciertos sin discusión alguna y que reflejaban la propia geometría de nuestro espacio, y por ello durante muchos siglos esta geometría ha dominado los estudios matemáticos.
(CHINEA Domingo, p1)

Cuando hablamos de Física es inevitable dejar de lado a la filosofía o filosofía natural, antiguamente en la época de los griegos surgió la necesidad (natural) de explicar la naturaleza y la formación del mundo, se estudiaba entonces, todo aquello que nos rodeaba. Poco tiempo después fue que esta filosofía se dividió en las ramas que conocemos hoy en día como lo son, la química, la biología y la física por nombrar algunas. Si analizamos la evolución de la física a lo largo de la historia desde sus inicios como filosofía natural hasta la física moderna como la conocemos hoy en día, podremos observar como con el transcurrir del tiempo se vio en la necesidad de implementar la matemática y la geometría, pues, estas fueron mucho más que herramientas para la física, ya que complementaban y añadían un formalismo a los razonamientos obtenidos por la física y nos permitieron formalizar y facilitar el entendimiento de estos por medio de estas ramas. Es difícil pensar en la física sin la geometría hoy en día, y este trabajo también busca recalcar la importancia que hay en la relación geometría y física

Podremos ver como estas dos ramas se complementan entre sí, por lo que es erróneo a su vez pensar, que la física y la geometría apuntan en direcciones distintas. Analizaremos como ambas ciencias vienen ligadas desde siglos atrás, y como en diferentes ámbitos de la física evolucionan en conjunto para poder dar razón, explicar la naturaleza y todo lo que nos rodea.

2.1.1 Relación geometría y física

A lo largo de la historia grandes científicos han recurrido a la geometría para dar un desarrollo más amplio y solido a sus teorías, incluso hace mucho tiempo atrás cuando áreas como la física y la geometría no estaban tan desarrolladas, podemos incluso pensar que es algo natural el tratar de relacionar la geometría con los fenómenos físicos. Esta investigación recurre a esta relación física-geometría, para dar un desarrollo más amplio y detallado a los efectos de los fenómenos eléctricos, en específico el campo eléctrico y el potencial eléctrico.

Nótese como en la época de Aristóteles ya la física estaba fuertemente influenciada por la geometría, aunque no había una relación estrictamente directa, para aquel entonces en la física surgían preguntas del “por qué” y el “cómo” del movimiento, por lo que el uso de una geometría para describir las diferentes trayectorias que se estudiaban en ese entonces parecía la opción más acertada. Es entonces donde aparece la geometría de Euclides, el cual es considerado el padre de la geometría, y el que con su libro “*Los Elementos*” construyó con principios y postulados una geometría más formal, un paso enorme para la “comunidad científica” de ese entonces, incluso podemos ver cómo fue la base de muchos estudios matemáticos por bastante tiempo, incluso hoy en día seguimos haciendo uso de estos principios. China Domingo expresa como en ese momento, con la geometría creada por Euclides donde nace la física clásica, así

“...desde su concepción original a su formulación analítica, destacando como principal aportación de la primera el llamado método axiomático, y de la segunda el concepto de sistema de referencia, con lo que se consigue por primera vez una caracterización teórica de la idea de observación en geometría. En este escenario es, precisamente, donde se desarrolla la física clásica.” (CHINEA, Domingo, p.3)

Aristóteles, aunque no haya usado explícitamente esta geometría, se puede ver una gran influencia de la geometría Euclidiana en sus trabajos. De hecho, al analizar el modelo del universo planteado por Aristóteles (modelo geocéntrico), aparecen conceptos como “línea recta”,

y afirmaba que los planetas describen un movimiento circular perfecto alrededor de la tierra. Pese a no hacer un uso explícito de esta geometría, es evidente que estos principios ya estaban interiorizados en la comunidad de los físicos (o filósofos de la naturaleza como se les denominaba en aquella época), donde las investigaciones y trabajos se regían bajo esta geometría.

Con el desarrollo de la ciencia y el mundo en general, vemos cómo ambas ramas evolucionaron y ampliaron sus áreas de estudio, de la física surgieron ramas como lo es la astronomía, un estudio macro de lo que nos rodea, pero a su vez también se quiere entender el mundo microscópico, con lo que surge la física cuántica. Al abordar ambos conceptos surgió la necesidad de buscar nuevas geometrías, pues el mundo macroscópico y microscópico funciona de una manera totalmente diferente, teorías y conceptos que no pueden ser desarrollados con geometrías planas. Aquí es donde Gauss y Riemann dan un desarrollo a geometrías curvas, geometrías que facilitaban el estudio de diferentes sistemas físicos, que si se analizaban con geometrías planas podía llegar a ser algo extremadamente difícil o imposible. Una geometría que utiliza Albert Einstein en su trabajo de la relatividad general, pues al observar el espacio exterior, se dio cuenta de que dadas ciertas condiciones en el espacio este se curvaba, por lo que se obligado a abandonar las geometrías planas y adoptar geometrías curvas para poder dar una explicación, y a su vez un desarrollo matemático a lo observado.

A continuación, abordaremos dos puntos de vista, donde se evidenciará cómo los físicos Faraday y Maxwell definieron y desarrollaron el concepto de campo eléctrico y potencial eléctrico, a su vez se analizará las problemáticas que existen en la educación actual al momento de abordar los fenómenos eléctricos, resaltando así las debilidades que existen en las metodologías aplicadas en las aulas, para así proponer el abordamiento de estos fenómenos desde una perspectiva geométrica con el fin de mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje.

2.2 El Campo eléctrico y el potencial eléctrico

2.2.1 La construcción y desarrollo del concepto de campo eléctrico y el potencial eléctrico

La idea de campo eléctrico, así como el potencial eléctrico son conceptos que se han ido formando a lo largo de la historia, varios científicos aportaron a la construcción y explicación de este concepto. Se tendrá como base los aportes realizados por Michael Faraday y James Maxwell, quienes dieron un desarrollo más amplio y una descripción exacta de estos conceptos. Es importante aclarar que Faraday es quien brinda un desarrollo teórico y experimental a los fenómenos eléctricos, pues, es bien sabido que Michael Faraday no dominaba del todo las matemáticas, se le dificultaba bastante esta área, por lo que gran parte de su aporte a los fenómenos eléctricos son trabajos meramente experimentales. Maxwell por otra parte era un gran matemático, pues fue él quién dotó de una formalidad a la teoría electromagnética, pues retoma los trabajos realizados por Faraday (así como Orsted, Coulomb entre otros) y condensa en 20 ecuaciones la explicación de los fenómenos eléctricos y magnéticos. Véase a continuación como Faraday y especialmente Maxwell (quien es el que recoge los trabajos de Faraday para elaborar una idea más concreta) definen y abordan los conceptos de campo eléctrico y potencial eléctrico.

- *Líneas de fuerza*

Se abordará el ejemplo de una partícula cargada positivamente, y colocamos otra partícula cargada en las cercanías de su campo, esta va a experimentar una fuerza ya sea de repulsión o de atracción dependiendo de la carga de la segunda partícula, si está cargada positivamente la partícula experimentará una fuerza de repulsión pues posee la misma carga que el campo generado por la otra carga, pero, si posee una carga negativa esta se verá atraída por el campo, y Maxwell lo expresa así

In this way we might find a line passing through any point of space, such that it represents the direction of the force acting on a positively electrified particle or an elementary south pole. (MAXWELL, James C. 1855. p,158)

Teniendo en cuenta lo anterior, se evidencia cómo las líneas de fuerza son aquellas líneas imaginarias que surcan el espacio, y nos ayudan a visualizar las fuerzas que están ejerciendo los campos, ya sean campos eléctricos, magnéticos e incluso gravitacionales así

We should thus obtain a geometrical model of the physical phenomena, which would tell us the direction of the force, but we should still require some method of indicating the intensity of the force at any point. (MAXWELL, James C. 1855. P,158)

Muchos de los fenómenos físicos que son analizados son difícilmente visibles, en la mayor parte de estos se necesita de algún tipo de herramienta que nos permita visualizar o incluso dar cuenta de lo que está sucediendo, pues hay muchas cosas que se escapan de nuestros sentidos. En el caso del electromagnetismo es incluso más difícil dar cuenta de dichos fenómenos, pues no son tan evidentes o visuales como lo pueden ser otros, por lo que Faraday al realizar diferentes experimentos se vio en la necesidad de expresar de alguna forma, el modo en el que el campo eléctrico y el campo magnético actuaban, y por medio de las líneas de fuerza podemos expresar geoméricamente la forma en la que el campo electromagnético actúa. La representación de las líneas de fuerza la elaboró con líneas salientes (si es una carga positiva) y líneas entrantes (si es una carga negativa) como se puede observar en la ilustración de la figura (2)

The lines are imaginary, and the force in any part of them is of course the resultant of compound forces, every molecule being related to every other molecule in all directions by the tension and reaction of those which are contiguous. (FARADAY, Michael. p. 411)

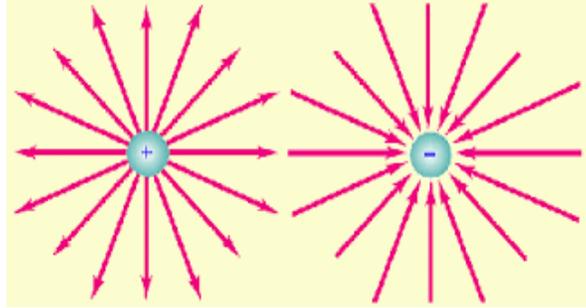


Figura 2. Representación de las líneas de campo eléctrico de carga positiva y carga negativa. (AGUILAR Y CANO). Campo eléctrico.

Además, podemos ver como las líneas de fuerza no son más que una representación geométrica de las fuerzas ejercidas por los campos, y dan cuenta simplemente de la dirección en la que estas fuerzas están actuando, más no dan cuenta de la magnitud de esta.

- ***Campo y Potencial Eléctrico***

Se expresa el campo eléctrico como aquella porción del espacio que se ve modificada por un cuerpo electrificado, y tal porción del espacio podía consistir de aire e incluso como se consideraba en aquella época el vacío. La intensidad del campo eléctrico va a depender de la carga que está generando dicho campo, es decir son proporcionales, si la carga es pequeña, el campo generado por esta será pequeño, pero, por el contrario, si poseemos una carga grande el campo será grande, y Maxwell lo expresaba de la siguiente manera

But if the body is very small and its charge also very small, the electrification of the other bodies will not be sensibly disturbed, and we may consider the body as indicating by its center of gravity a certain point of the field. The force acting on the body will then be proportional to its charge and will be reversed when the charge is reversed. (Maxwell, James C. 1881, p44)

En lo que concierne al potencial eléctrico Maxwell lo expresa como el trabajo por unidad de carga necesaria para mover una carga en dicho campo eléctrico, desde un punto A hasta un punto B. Considerando partículas cargadas positivamente, estas tenderán a moverse de un punto con mayor potencial positivo a lugares con un potencial positivo menor, o básicamente a un potencial negativo, y para una partícula cargada negativamente funciona de la misma forma solo que en la dirección opuesta.

A body electrified positively tends to move from places of greater positive potential to places of smaller positive, or of negative potential, and a body negatively electrified tends to move in the opposite direction. (Maxwell, James C. 1881, p45)

Sin embargo, pese a todos los descubrimientos que pudo haber realizado Faraday a lo largo de su vida, había algo que él no controlaba ni conocía del todo, las matemáticas. Al revisar sus escritos podemos ver que predomina la física experimental y hay muy pocas formalizaciones matemáticas, de hecho, son afirmaciones y postulados que se derivan de experimentos realizados por él. Es en este punto donde entraría el físico escocés James C. Maxwell quién con sus habilidades en las matemáticas lograría formalizar muchos de los logros de Michael Faraday, como lo menciona Lienhard

Faraday in fact more than made up for his lack of mathematical abilities by his powerful visual sense (both traits of people affected by his powerful visual sense. He forged a finished image in his mind's eye, and then broke that image down into parts that people could understand. Maxwell converted Faraday's vision of force fields into mathematical language. (LIENHARD, John H)

2.3 La enseñanza del campo eléctrico y el potencial eléctrico

No podemos desviar nuestra mirada del impacto que ha tenido el electromagnetismo en nuestra sociedad, y los grandes aportes que ha tenido a lo largo de la historia. Podemos nombrar la gran

cantidad de aportes que ha tenido a nivel tecnológico que ha logrado cambiar la forma en la que vivimos y en la que nos relacionamos. Y si realizamos un breve repaso histórico nos encontraremos que una de las etapas más importantes en la historia (la revolución industrial) está fuertemente marcada por los avances y descubrimientos en varias ramas de la física, como lo puede ser la mecánica, la termodinámica y el electromagnetismo. Como se mencionó anteriormente los físicos Michel Faraday y James C. Maxwell construyeron y solidificaron en su momento lo que conocemos hoy en día como electromagnetismo, y como todo este largo proceso comenzó con los experimentos de Faraday (el cual retomó así mismo los experimentos realizados por Orsted) y “concluyó” con la formalización de los fenómenos electromagnéticos con James C. Maxwell.

Con el advenimiento de las revoluciones industriales (S. XVIII y S.XIX), la educación principalmente en Europa sufrió un gran impacto y un cambio drástico, pues, la educación paso de ser algo privilegiado y para ciertos sectores a algo para todo el mundo. El hecho de que las máquinas facilitarán nuestro trabajo y nos ayudaran a progresar, obligo a los países a tomar medidas y extender la educación a un nivel más amplio y de fácil acceso, pues así habría un mayor número de personas calificadas para manejar este tipo de maquinaria, y aún mejor, personas que pudieran llegar con nuevas ideas e invenciones para aportar a la economía de los países.

Al necesitar mayor mano de obra, se implementó rápidamente en los colegios y universidades toda estas ciencias y conocimientos necesarios para esto, por lo que áreas como la física, la química y las matemáticas fueron agregadas a estos contenidos, y esto inevitablemente llevó la implementación de la enseñanza del electromagnetismo en las aulas.

La problemática aquí radica en las metodologías utilizadas por los maestros para abordar este tipo de conceptos, pues tanto por estudios realizados y mis prácticas pedagógicas realizadas como estudiante se puede evidenciar que son metodologías que pueden llegar a confundir al estudiante y no llevarlo a una comprensión clara de los conceptos físicos que se llevan al aula. Al impartir estos conceptos en la educación media se abordan desde su forma matemática, con problemas en los que el estudiante tiene que hacer uso de una formula y remplazarla para encontrar un determinado valor, algo que crea un proceso de mecanización en el estudiante, pues, realmente no se está abordando ni comprendiendo el fenómeno en sí. Recientes

investigaciones muestran que la mayoría de los estudiantes no relacionan conceptos estudiados en electrostática, en concreto la diferencia de potencial y el campo eléctrico. (GUISASOLA, Jenaro. p. 178)

Respecto a esta hipótesis, los resultados parecen confirmar que los estudiantes no establecen una diferenciación entre los conceptos de intensidad de campo y fuerza eléctrica, incluso en situaciones familiares dentro de un contexto escolar. Es más, cuando se presentan situaciones de conflicto cognitivo que requieran una aplicación significativa del concepto de campo eléctrico, se eleva aún más el porcentaje de respuestas erróneas. (FURIÓ, C. GUISASOLA, J. p. 143)

Ya localizada la problemática principal de la enseñanza de estos conceptos se pueden empezar a abordar diferentes estrategias o metodologías para suplir estas falencias, y ya que la principal problemática está en cómo se enseña se puede plantear una nueva metodología para abordar el potencial y el campo eléctrico.

Como vimos anteriormente el papel que juega la geometría en la física es esencial, y podemos ver como esta ha sido más que una herramienta para los físicos, pues con esta se han podido demostrar y explicar una gran cantidad de fenómenos y teorías, de la misma forma la geometría nos brinda muchas opciones a la hora de enseñar física, pues dándole ciertos caracteres geométricos a los fenómenos que podemos observar en nuestro día a día el estudiante puede ir más allá de una ecuación o de un simple número, se podrá tener una visión más general del fenómeno y habrá una mayor comprensión de lo que se esté abordando.

3. Capítulo III

Relación entre la función de variable compleja, el campo eléctrico y el potencial eléctrico

Se hará un desarrollo a la propuesta planteada en el capítulo I, donde se resaltó la relación existente entre las funciones complejas y los fenómenos eléctricos (campo eléctrico y potencial eléctrico), y cómo esta relación surge como una propuesta de enseñanza-aprendizaje, donde se plantea abordar estos conceptos desde una perspectiva geométrica, brindando al estudiante herramientas que le permitan dar cuenta del fenómeno y los efectos que el campo eléctrico y el potencial tienen en el espacio. Ya que se hará uso de las funciones de variable compleja se realizará una breve descripción de estas funciones, en el que se abordará su definición y diferentes características. Seguido a esto, se mostrarán 4 ejemplos que permitan al lector dar cuenta de esta relación física-geometría, conjunto con un análisis desarrollado de las posibilidades que nos ofrecen las funciones complejas a propósito de los fenómenos eléctricos.

3.1 Funciones complejas

Las funciones complejas son similares en cierto punto a las funciones reales con las que normalmente trabajamos en las aulas, una función real es aquella función que toma valores en los números reales y a su vez como resultado produce números reales. Al momento de abordar las funciones complejas podremos observar que el dominio y el rango de estas funciones no son los reales, sino los números complejos.

Por definición una función de variable compleja $f(z)$ consta de una parte real y una parte imaginaria, y se puede expresar de la siguiente manera

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Se evidencia que tanto de la parte real como de la parte imaginaria obtuvimos dos funciones reales ($u(x,y)$ y $v(x,y)$), al igualar dichas funciones a una constante A, y dar múltiples valores a

dicha constante, se obtendrá una familia de funciones que se usarán para modelar un caso en particular de campo eléctrico (o potencial eléctrico). Bastará entonces encontrar un fenómeno de campo eléctrico (así como de potencial eléctrico) que nos pueda reproducir la geometría brindada por el espacio geométrico en el que las funciones u y v existen.

Para efectos de este trabajo se hará uso de un espacio bidimensional, donde se manejarán las variables x y y , y se trabajará en el “plano complejo”, donde el eje horizontal es denominado “eje real” y el eje vertical es denominado “eje imaginario”. Adicional a esto dadas las propiedades de las funciones complejas como la de la suma, e incluso propiedades como la conmutativa, distributiva entre otras se puede afirmar que se tiene un espacio vectorial, el cual se crea en base a un conjunto “no vacío” y se definen dos operaciones fundamentales; la suma y la multiplicación por escalar, que a su vez satisfacen 8 propiedades. Sin embargo, al abordar funciones complejas ya no se trabaja en un espacio vectorial real, sino en un espacio vectorial complejo. Este espacio vectorial complejo cumple con las mismas propiedades que un espacio vectorial real (usual), con la diferencia de que se está trabajando con números complejos (z).

Bajo este contexto de una función compleja arbitraria cualquiera, obtendremos dos funciones u y v , estas son denominadas funciones armónicas, dichas ecuaciones son ambas soluciones de la ecuación de Laplace. Al ser ambas soluciones de la ecuación de Laplace implica físicamente que estamos hablando de un potencial, y como se abordará más adelante dependiendo de la función que se tome representará un potencial eléctrico (la otra función nos representará las líneas de campo eléctrico), y Feynman lo expresa así

Así pues, partiendo de una función ordinaria cualquiera podemos llegar a dos funciones $U(x,y)$ y $V(x,y)$ que son soluciones de la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Cada función representa un posible potencial electrostático. (FEYNMAN, Richard. p.7-4)

3.2 Los fenómenos eléctricos desde una perspectiva geométrica

3.2.1 El Campo Eléctrico en las cercanías de dos cargas puntuales

Se analizará en detalle la relación que hay entre el campo eléctrico en las cercanías de dos cargas puntuales y la función de variable compleja $f(z) = z^2$, buscando abordar los fenómenos eléctricos desde una perspectiva distinta a la usualmente aplicada en colegios y universidades. Se evidenciará la relación que hay entre la geometría que brindan las funciones complejas, y como esta geometría nos permitirá modelar un fenómeno de campo eléctrico en específico, y a su vez, se analizará geoméricamente lo obtenido a partir de dichas funciones.

Para efectos de este ejemplo se abordará la función $f(z) = z^2$, la cual podemos expresar de la siguiente manera

$$f(z) = (x + iy)^2 \quad (1)$$

o,

$$f(z) = x^2 + 2ixy - y^2 \quad (2)$$

Naturalmente de la función $f(z)$ se obtuvo una función dependiente de (x,y) , y por definición cualquier función $f(z)$ puede ser expresada de la forma $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$. Esto quiere decir que de la función compleja $f(z) = z^2$ se obtuvieron dos funciones reales, u y v , v representando la parte imaginaria de la función y u representando la parte real, así:

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \quad (3)$$

$$v(x,y) = 2xy \quad (4)$$

El siguiente paso es encontrar el lugar geométrico en el que las funciones u y v existen, por lo que se igualarán las ecuaciones (3) y (4) a una constante A , donde asignaremos diferentes valores, obteniendo así una familia de funciones. Se observa en la ilustración de la figura (3) el lugar geométrico de la ecuación (3)

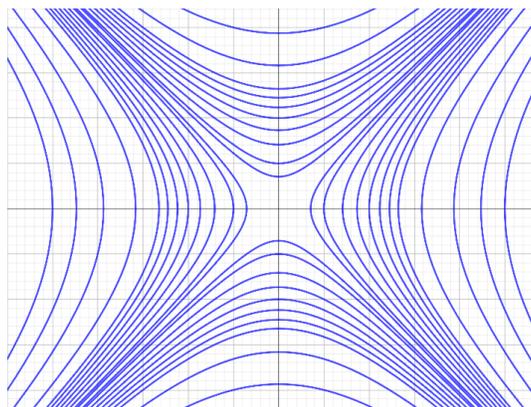


Figura 3. Gráfica de la ecuación (3). Ilustración propia realizada en Geogebra.

De la misma forma se puede observar el lugar geométrico de la ecuación (4) en la ilustración de la figura (4)

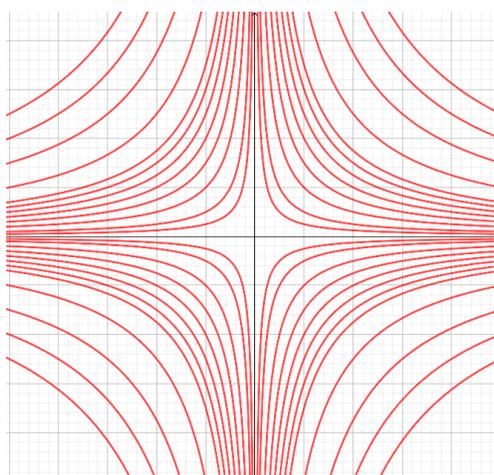


Figura 4. Gráfica de la ecuación (4). Ilustración Propia realizada en Geogebra.

A continuación, se acoplarán las figuras (3) y (4) en un solo plano para tener una visión más general de la geometría que obtuvimos a partir de las ecuaciones (3) y (4). En la ilustración de la figura (5) se puede observar las dos familias de funciones juntas

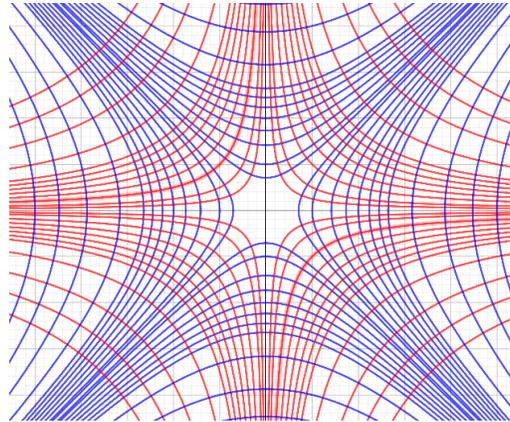


Figura 5. Acople gráfico de las figuras (3) y (4). Ilustración propia realizada en Geogebra.

Con base en la geometría que se ha obtenido por medio de la función $f(z) = z^2$ se buscará un fenómeno que pueda reproducir dicha geometría. Para este caso, se abordará el campo eléctrico generado en las cercanías de dos partículas cargadas positivamente. Según Faraday una carga positiva por naturaleza presentaría sus líneas de campo saliendo de esta, pero al tener una carga positiva en sus cercanía cambia la geometría y como estas líneas se comportan. Ambas al ser partículas cargadas están modificando el espacio a su alrededor constantemente (campo eléctrico), por lo que, si observamos detalladamente la cercanía de estas dos, veremos que el espacio se adapta a los efectos del campo eléctrico que están ejerciendo ambas cargas, y obtendremos líneas convergentes en el punto en el que estas líneas se cruzan, como se observa en la ilustración de la figura (6)

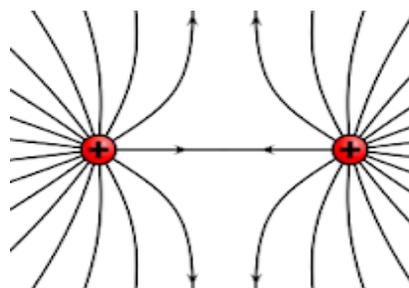


Figura 6. Líneas de campo eléctrico de dos cargas puntuales positivas.

Departamento de Física Aplicada III. (2020). Dos cargas iguales.

La figura (5) muestra una geometría bastante similar a las dos partículas cargadas positivamente (en sus cercanías), sin embargo, se podrá reducir el número de constantes y orientar nuestra familia de hipérbolas de tal forma que nuestra función pueda representar geoméricamente el fenómeno planteado. Se puede observar en la ilustración de la figura (7) como se adaptaron las gráficas obtenidas tanto de la función u como de la función v , contextualizada al fenómeno planteado

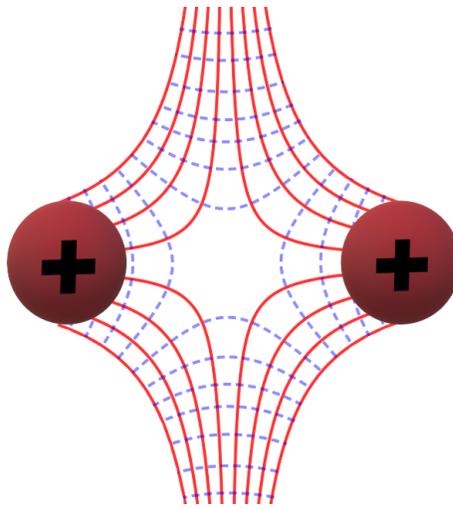


Figura 7. Modificación de la Figura (5) contextualizada al fenómeno planteado. Ilustración propia realizada en Geogebra.

Se evidencia cómo en la figura (7) cómo las líneas rojas graficadas a partir de nuestra ecuación (3), representan las líneas de fuerza del campo eléctrico en las cercanías de estas dos partículas. A su vez, la ecuación (4) está representada por las líneas azules punteadas las cuales representaran las líneas equipotenciales.

Obtuvimos por medio de la función de variable compleja $f(z) = z^2$, dos funciones de variable real las cuales representan una familia de hipérbolas al momento de graficarlas, dicha familia de funciones posee una geometría que nos permitió modelar un problema físico (localmente), la geometría de las líneas de fuerza del campo eléctrico en las cercanías de dos cargas puntuales positivas (así como las líneas equipotenciales representadas por la función v). Es esencial abordar este punto, ya que en la figura 7 se modeló el punto en el que las líneas de fuerza se repelen debido a que ambos campos eléctricos son positivos, en este fenómeno las líneas de fuerza

restantes siguen su dirección natural pues no están siendo afectadas por ningún otro campo o efecto. Las gráficas que podemos encontrar en libros o internet ilustran este fenómeno con las líneas de fuerza (y en algunas imágenes también son representadas las líneas equipotenciales) necesarias para darnos una idea simple de las fuerzas de dicho campo, sin embargo, al realizar la representación geométrica de este fenómeno por medio de la función $f(z) = z^2$ se obtuvo una representación de líneas de fuerza y líneas equipotenciales más detallada y precisa, dándonos razón de las líneas de campo en cada punto así como las líneas equipotenciales. De hecho, la mayor parte de las representaciones que se encuentran acerca de este fenómeno, dejan a un lado las líneas equipotenciales y se centran en las líneas de campo eléctrico, por lo que, al hacer uso de este método, se obtienen dos funciones armónicas, donde una representará las líneas de campo eléctrico y la otra función representará las líneas equipotenciales.

Se podría pensar como es una simple coincidencia, que la geometría de la familia de hipérbolas y las líneas de fuerza de dos cargas positivas en sus cercanías, representan no más que una mera casualidad en la naturaleza. Las ecuaciones (3) y (4) a parte de representar de una forma más exacta y detallada de lo que ocurre en las cercanías de dos partículas cargadas positivamente, también puede representar el campo eléctrico generado en las cercanías del vértice de un conductor, e incluso, sin ir más lejos podemos representar de la misma forma las líneas de campo de dos partículas cargadas negativamente. Como este y muchos otros ejemplos podemos encontrar y asimilar a la geometría que nos es dada por la función $f(z) = z^2$, sin embargo, se dejará este punto abierto, en el que se abre la posibilidad al lector de pensar fenómenos que puedan ser representados por medio de no solo la geometría de esta función, sino también las funciones que se abordarán más adelante. En el siguiente apartado se abordarán diferentes ejemplos de funciones y su respectiva relación con un fenómeno de campo eléctrico y potencial eléctrico en específico, con el fin de mostrar la relación tan interesante que hay entre las funciones de variable compleja, el campo eléctrico y el potencial eléctrico, y que esta relación física-geometría va mucho más allá de una coincidencia.

3.2.2 Superficie cargada y función exponencial

Para este segundo ejemplo se analizará la función exponencial, donde se buscará el lugar geométrico de las funciones u y v , y a su vez se abordará un fenómeno que nos pueda reproducir dicha geometría.

Se tiene que $f(z) = e^z$, que también puede ser expresada de la siguiente forma

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (5)$$

o,

$$f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y \quad (6)$$

De la misma forma de la función $f(z) = e^z$ se obtienen las siguientes funciones armónicas

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad (7)$$

$$v(x, y) = e^x \sin y \quad (8)$$

De la misma forma en la que se procedió en el ejemplo anterior, se igualarán las ecuaciones (7) y (8) a una constante A , y se asignaran diferentes valores para obtener una familia de funciones que nos permitirá a su vez encontrar un fenómeno que se adapte a dicha geometría. Se observa en la ilustración de la figura (8) el lugar geométrico al cual pertenece la función de la ecuación (7) (función $u(x, y)$)

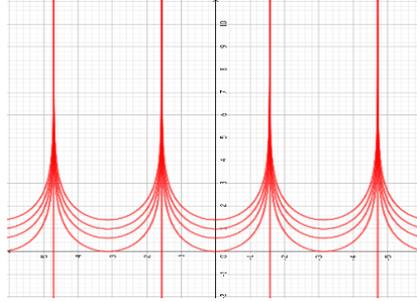


Figura 8. Gráfica de la ecuación (7). Ilustración propia realizada en Geogebra.

En la ilustración de la figura (9) se tiene la representación de la familia de funciones de la ecuación (8) (función $v(x, y)$)

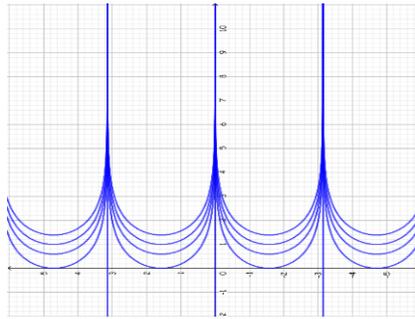


Figura 9. Gráfica de la ecuación (8). Ilustración propia realizada en Geogebra.

En la figura (10) se puede observar las figuras (8) y (9) acopladas dando un vistazo general de la geometría obtenida por las funciones u y v

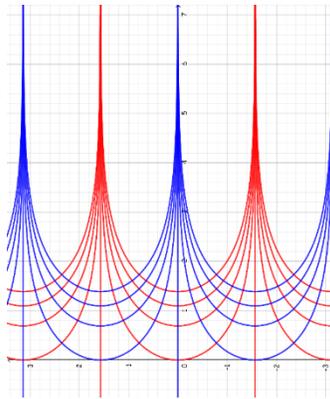


Figura 10. Acople gráfico de las figuras (8) y (9)

A partir de la función $f(z) = e^z$ se encontró el lugar geométrico en el que las ecuaciones (7) y (8) yacen, es aquí donde se busca un fenómeno que pueda reproducir esta geometría y sea posible modelarlo por medio de las funciones u y v .

El fin de las líneas de fuerza es describir la fuerza que está ejerciendo el campo eléctrico a su alrededor debido a una carga, estas líneas pueden variar en su dirección dependiendo si es una carga positiva o una carga negativa. Sin embargo, estas líneas también varían dependiendo del objeto que este cargado, se puede observar en la ilustración de la figura (11) el caso de una superficie cargada

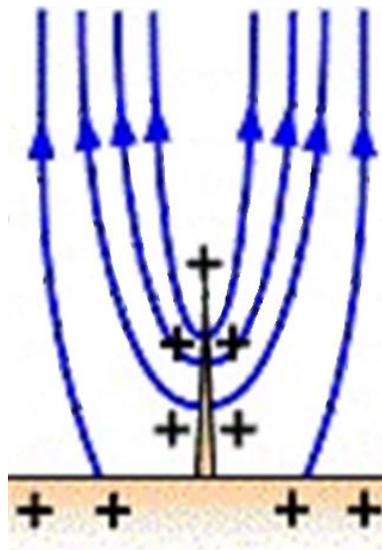


Figura 11. Líneas de campo eléctrico de una superficie cargada.
Villalobos, J.A. (2011).

En dicha superficie cargada se encuentra un saliente parecido a una aguja. En estos casos y en las protuberancias el campo eléctrico tiende a ser mayor, mientras que por el contrario en huecos y muescas tiende a disminuir la intensidad del campo eléctrico. Véase como esta “punta” puede modificar por completo el comportamiento de las líneas de fuerza del conductor, aunque estas líneas siguen siendo salientes de la superficie, adoptan una curvatura que brindan de una geometría bastante interesante al campo eléctrico.

Se puede evidenciar en la ilustración de la figura (10) la similitud que existe entre las funciones graficadas y el fenómeno de una superficie cargada con una punta, sin embargo, se modificará la figura (10) reduciendo el número de constantes y ampliando la gráfica con el fin de contextualizar la figura a propósito del fenómeno planteado. Se observa en la figura (12) la contextualización de la figura (10)

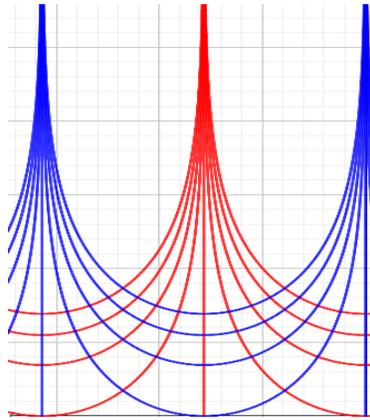


Figura 12. Ampliación de la Figura (10). Ilustración propia realizada en Geogebra.

Para finalizar y realizar un análisis detallado de la relación entre la función y el fenómeno planteado, se añadirá por medio de un programa de edición de imagen la superficie cargada, adicional a esto las líneas rojas que representan la función u se presentarán de manera punteada de forma que den cuenta de las líneas equipotenciales como se puede ver en la ilustración de la figura (13)

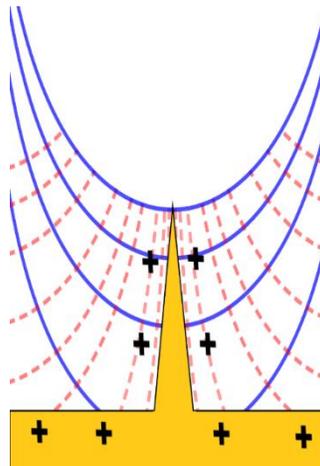


Figura 13. Modificación de la familia de funciones obtenidas en contextualización con la superficie cargada. Ilustración propia.

Véase como en la figura (13) es posible modelar por medio de las gráficas obtenidas de las ecuaciones (7) y (8) las líneas de fuerza del campo eléctrico de una superficie cargada positivamente con una punta. En la ilustración las líneas azules representan las líneas de campo eléctrico, y las líneas rojas punteadas representan las líneas equipotenciales. Este es un caso bastante interesante, pues de ser una superficie conductora plana, obtendríamos simplemente líneas salientes perpendiculares a esta, sin embargo, al haber una punta o una “protuberancia” como se describe en libros de física, las líneas de campo describen una geometría totalmente diferente. Lo realmente interesante de este fenómeno yace en las cercanías de la punta, donde los efectos del campo eléctrico cambian debido a la geometría de la superficie, geometría que pudimos modelar por medio de la función de variable compleja $f(z) = e^z$. A parte de poder describir esta geometría, obtuvimos las líneas equipotenciales de este fenómeno, algo que en internet o en ilustraciones que encontramos en libros no vemos frecuentemente, además de ser una modelación más detallada y precisa de las líneas del campo eléctrico y líneas equipotenciales en cada uno de los segmentos de dicha superficie.

3.2.3 Dipolo eléctrico y función racional $f(z) = \frac{1}{z}$

La función por abordar en esta sección es la función racional $f(z) = \frac{1}{z}$, con la que obtendremos las siguientes funciones armónicas

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (9)$$

$$v(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (10)$$

Se muestra en las figuras (14) y (15) el lugar geométrico en el que yacen las ecuaciones (9) y (10) tal que

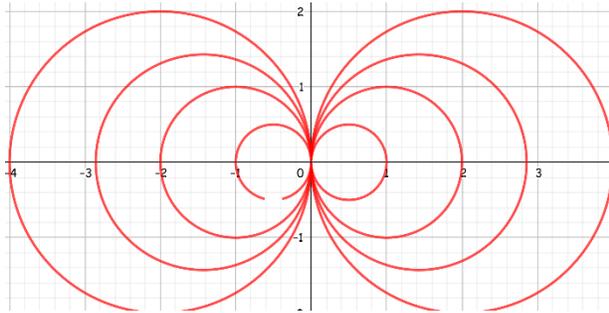


Figura 14. Gráfica de la ecuación (9).
Ilustración propia realizada en Geogebra.

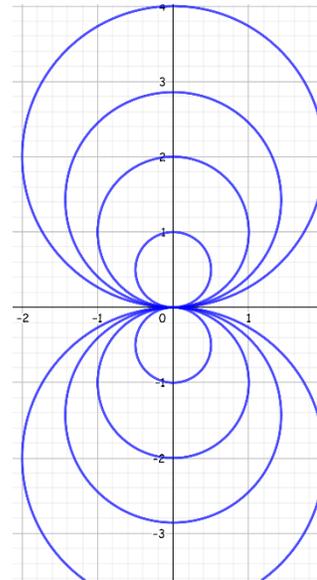


Figura 15. Gráfica de la ecuación (10).
Ilustración propia realizada en Geogebra.

Al acoplar las figuras (14) y (15) se obtiene un vistazo general de la geometría obtenida por la función de variable compleja $f(z) = \frac{1}{z}$ tal que

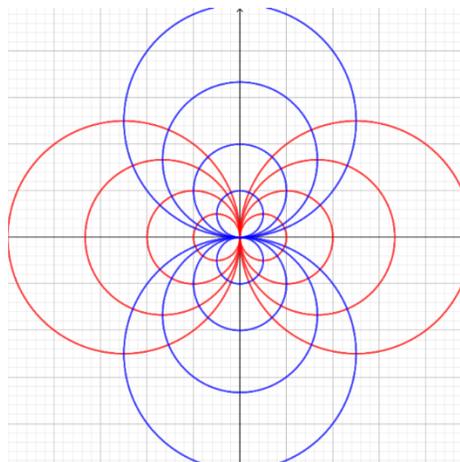


Figura 16. Acople gráfico de las figuras (14) y (15).
Ilustración propia realizada en Geogebra

Al momento de analizar la geometría obtenida por las funciones u y v se pueden ver circunferencias debido a la forma de las ecuaciones, más específicamente su denominador ($x^2 + y^2$), por lo que el fenómeno que puede describir perfectamente este comportamiento circular es el dipolo eléctrico, fenómeno donde se tienen dos partículas cargadas de diferente signo (una carga positiva y otra carga negativa).

Debido a la naturaleza del campo eléctrico y como una partícula cargada modifica el espacio en el que se encuentra, veremos que las líneas de fuerza generadas por dos partículas cargadas de diferente signo puede ser diferente al caso que vimos anteriormente, la geometría que adoptan estas líneas se evidencia en la figura (17) tal que

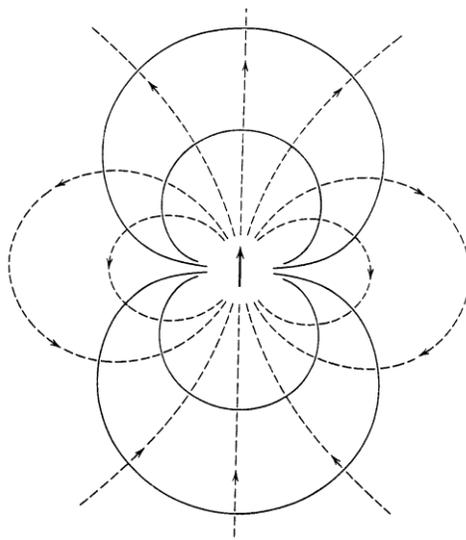


Figura 17. Proyecto EMAG.
Dipolo eléctrico

Se puede evidenciar que las líneas no punteadas representan las líneas de campo eléctrico generado por las dos partículas, y las líneas punteadas nos están dando cuenta de las líneas equipotenciales, y la flecha que vemos en el centro representa la fuerza de atracción que se está generado debido a la diferencia de cargas en ambas partículas.

Al retomar la geometría abordada en la figura (16) se evidencia la gran similitud que hay en las líneas de campo eléctrico (así como las líneas equipotenciales) y la geometría obtenida por la función compleja. En la figura (18) se puede observar la contextualización de la figura (16) a propósito del dipolo eléctrico.

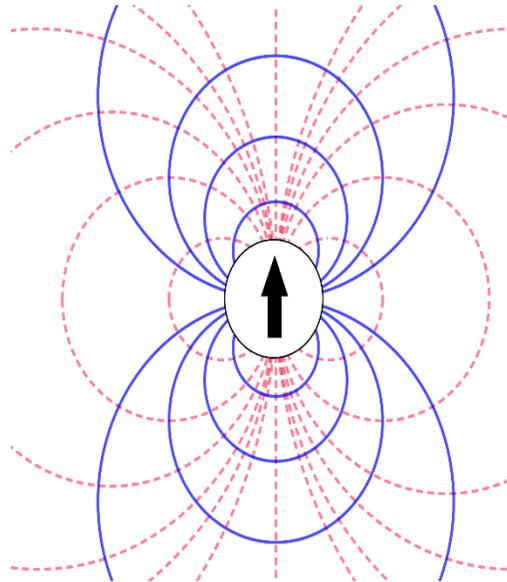


Figura 18. Contextualización de la figura (16) con las líneas de campo del dipolo eléctrico. Ilustración propia.

Al usar la función de variable compleja $f(z) = \frac{1}{z}$, modelamos la geometría de las líneas de campo representadas por las líneas azules, y las líneas equipotenciales representadas por las líneas rojas punteadas. A su vez, como se ha mencionado anteriormente, como al añadir más valores a esta familia de funciones se va con mayor exactitud y precisión las líneas de campo (y a su vez las líneas equipotenciales).

A pesar de que anteriormente se abordó un fenómeno similar (dos partículas cargadas positivamente), se evidencia que la geometría de dos partículas cargadas con signos opuestos es bastante diferente, ya que, al ser de diferente carga, las líneas no se repelen, sino que en un dipolo eléctrico estas líneas se encuentran.

3.3.4 Disco cargado y función racional $f(z) = \frac{1}{z^2}$

Para el cuarto y último ejemplo se abordará la función racional $f(z) = \frac{1}{z^2}$ donde obtendremos las siguientes funciones armónicas

$$u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (11)$$

$$v(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (12)$$

El lugar geométrico de dichas funciones está representado en las ilustraciones de las figuras (18) y (19)

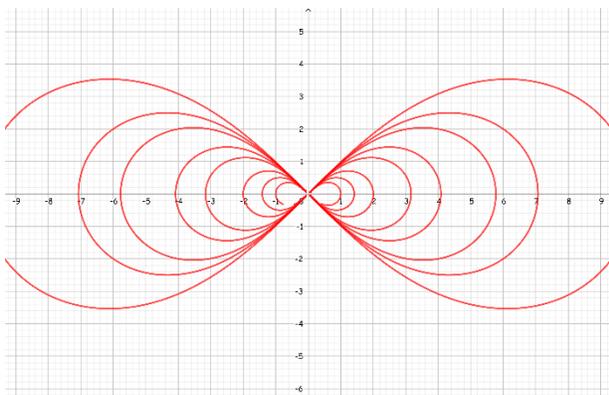


Figura 19. Gráfica de la familia de funciones ecuación (11). Ilustración propia realizada en geogebra.

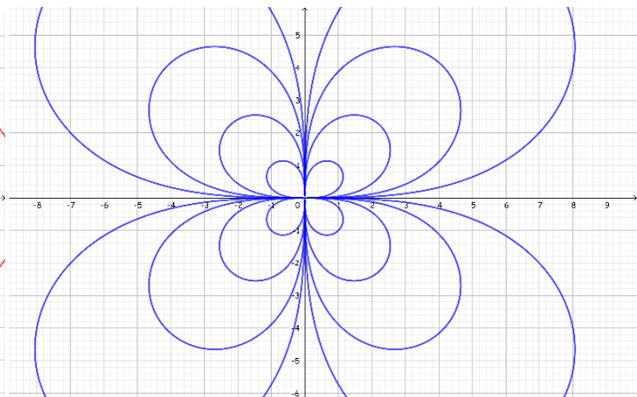


Figura 20. Gráfica de la familia de funciones ecuación (12). Ilustración propia realizada en geogebra.

Obsérvese en la figura (21) la geometría obtenida gracias a la función de variable compleja $f(z) = \frac{1}{z^2}$ al acoplar las figuras (19) y (20)

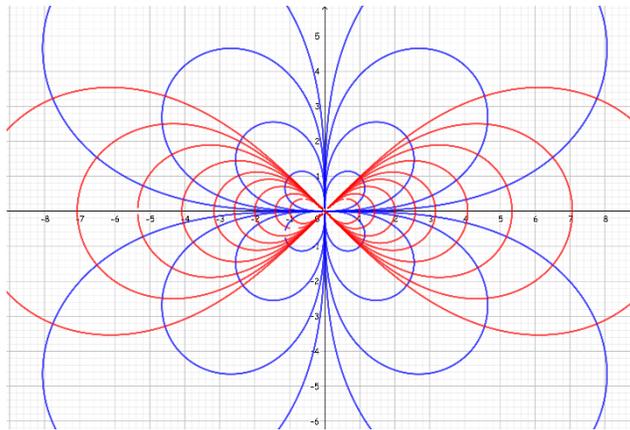


Figura 21. Acople gráfico de las figuras (19) y (20).
Ilustración propia.

Se puede ver como en la función u figura (21) las líneas de cierta forman parten de un punto inicial y trazan una trayectoria curva y vuelven al punto de origen, este razonamiento nos puede llevar a pensar un fenómeno en el que las líneas de campo tracen una geometría similar. El ejemplo que puede llegar a describir esta geometría es el de un disco cargado (aunque no el único, podríamos buscar otros fenómenos que puedan reproducir dicha geometría de la misma forma), en la ilustración de la figura (22) se ve las líneas de fuerza de campo de un disco cargado

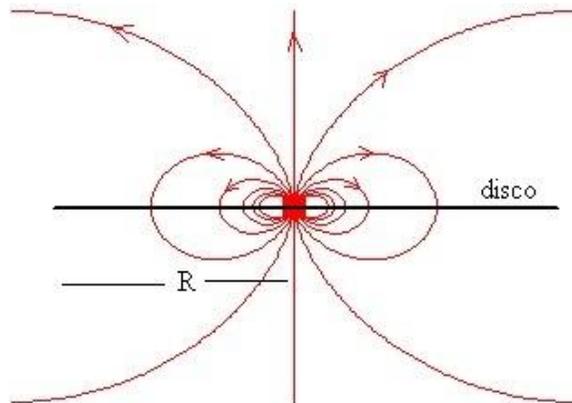


Figura 22. Líneas de campo eléctrico de un disco cargado de radio r
Brainly. (2018).

Es interesante ver el comportamiento del campo eléctrico en sus diferentes formas, como este cambia y se adapta dependiendo de la naturaleza de lo que lo esté provocando, desde la forma de

una placa conductora a una simple partícula puntual cargada. Estos son ideas que el estudiante puede pasar por alto si se aborda desde una perspectiva matemática (ecuaciones), y se verá como la función $f(z) = \frac{1}{z^2}$ nos brinda la posibilidad de abordar las líneas de campo eléctrico de un disco cargado, adicional a esto se obtendrá por medio de la función v , las líneas equipotenciales. Se puede evidenciar la relación que hay entre un disco cargado y la función $f(z) = \frac{1}{z^2}$ en la figura (22), donde se contextualiza la geometría obtenida en la figura (20) a propósito del fenómeno abordado, así

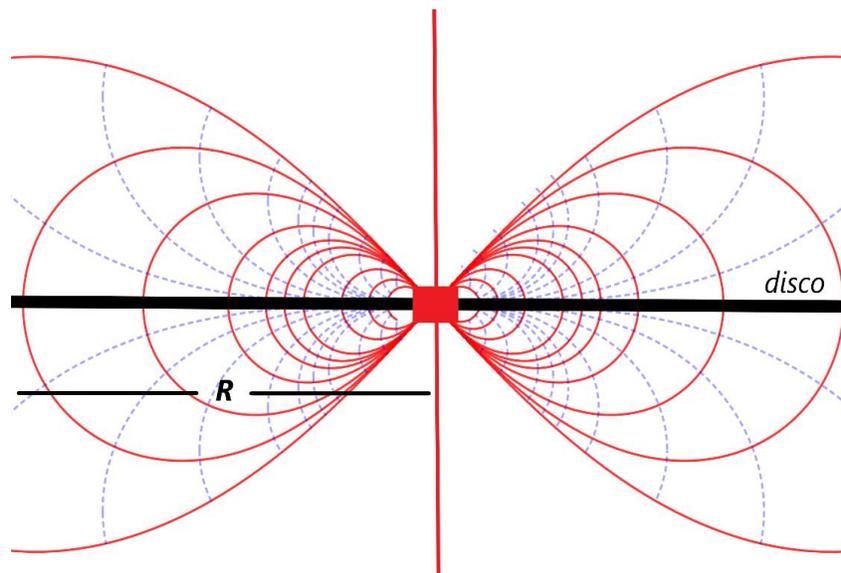


Figura 23. Contextualizando la familia de funciones figura (21) con las líneas de campo de un disco cargado. Ilustración propia.

En la figura (23) se observa la familia de funciones contextualizada al fenómeno del disco cargado, donde R representa el radio del disco, el cuadrado rojo representa el centro de dicho disco, las líneas rojas representan las líneas de campo eléctrico y las líneas azules punteadas las líneas equipotenciales. Es evidente que, al el radio del disco, este presentará menor número de líneas de fuerza ya que los efectos del campo serán menores, sin embargo, se puede reducir el número de constantes usadas en las funciones armónicas para así poder representar con mayor exactitud la geometría del fenómeno.

Es importante aclarar que, si bien se abordó un ejemplo por función, esto no quiere decir que una función $f(z)$ nos puede representar únicamente un fenómeno en específico. Se mostraron

diferentes ejemplos para poder dar cuenta de la relación entre funciones complejas y los fenómenos eléctricos, sin embargo, se puede buscar muchos más ejemplos en la naturaleza que puedan representar esta geometría obtenida por las funciones de variable compleja, lo que vuelve a esta relación aún más interesante y amplía para seguir desarrollando esta propuesta de abordamiento. Se puede dar cuenta que a partir de una función $f(z)$ se obtuvo una geometría gracias a las funciones u y v , por lo que desde este punto se busca un fenómeno que pueda ser representado a partir de estas funciones, lo que abre múltiples caminos para poder explicar y abordar el comportamiento de los fenómenos eléctricos, y Feynman lo expresa así

Podemos tomar una función $f(z)$ cualquiera y ella deberá representar un caso particular de campo eléctrico -en realidad dos problemas, puesto que U y V representan ambas una solución del problema-. (FEYNMAN, Richard. p.7-4)

Se vio como a lo largo de diferentes ejemplos como lo es el campo eléctrico en la cercanía de dos partículas cargadas positivamente (también con carga distinta), el campo de un dipolo, superficies cargadas con agujas e incluso un disco, la estrecha relación que hay entre la física y la geometría se hacía más evidente. A su vez, se abordó como una de las problemáticas en la enseñanza-aprendizaje de los fenómenos eléctricos en general es la dificultad de percibir con nuestros sentidos lo que realmente está ocurriendo, y a pesar de que físicos como Faraday trataron de generar una geometría alrededor de estos conceptos, el hecho de entender como el campo eléctrico modifica sus alrededores puede llegar a ser un gran reto para los estudiantes y maestros.

Se analizó también como a lo largo de la historia se ha implementado esta relación física-geometría para el entendimiento y desarrollos de diferentes trabajos e investigaciones en la física, y este es un punto que se quiere mostrar con este trabajo, como a partir de la geometría generada por las funciones complejas se puede llegar a ver detalladamente la geometría implícita que hay en los efectos del campo eléctrico. Por lo que, se propone el abordamiento de estos conceptos desde una perspectiva geométrica, como una nueva metodología de enseñanza-aprendizaje en universidades.

A su vez se podría aplicar esta metodología haciendo que los estudiantes propongan diferentes funciones de variable compleja, donde tendrán que encontrar sus respectivas funciones armónicas y graficarlas. Al graficar y acoplar ambas funciones u y v , el estudiante tendrá que buscar un fenómeno que pueda replicar esta geometría, al modificar las funciones armónicas obtenidas (cambiando el número de constantes u orientando las funciones) se contextualizará con el fenómeno que el estudiante haya encontrado. De este modo el estudiante tendrá una vista amplificada y más detallada de las líneas de fuerza de campo eléctrico, a su vez como las líneas equipotenciales, brindando una perspectiva diferente, una perspectiva geométrica que mejora tanto los procesos de aprendizaje en el estudiante como los procesos de enseñanza en los maestros.

Esta propuesta no tiene como fin simplemente cambiar de perspectiva, sino incentivar en los estudiantes una búsqueda y generar de cierta forma una curiosidad. Donde el estudiante pueda evidenciar que de esta forma también se puede llegar al concepto de líneas de campo eléctrico y líneas equipotenciales, algo diferente a lo usual. El estudiante tendrá que pensar y abordar los diferentes fenómenos eléctricos para llegar a una “modelación” por medio de las funciones complejas, generando así una “curiosidad científica” que los lleve a pensarse diferentes ejemplos.

3.3 Conclusiones

Se logró evidenciar la relación geométrica que existe entre las funciones de variable compleja y los fenómenos electrostáticos tales como el campo eléctrico y el potencial eléctrico, una relación meramente geométrica. Como bien se explicó en el apartado de “Geometría y Física” estas dos ramas poseen una relación bastante estrecha, ya que la geometría va más allá de ser una herramienta para la física, con este trabajo se logra resaltar nuevamente la importancia de la relación entre estas dos, permitiendo abrir rutas para nuevas posibilidades en cuanto a la educación, puesto que abordar el campo eléctrico y el potencial eléctrico desde un punto de vista geométrico nos podrá facilitar la enseñanza y aprendizaje de estos conceptos, dando así pie para nuevas metodologías de enseñanza que giren alrededor de esta relación.

Se analizó como Faraday y Maxwell crean una geometría alrededor del campo eléctrico y el potencial eléctrico, como surge el concepto de líneas de fuerza para visualizar geoméricamente la fuerza que esta generando el campo eléctrico. De la misma forma, como las líneas equipotenciales son una representación geométrica del potencial eléctrico. Evidenciando así la relación constitutiva entre la física y la geometría a propósito de los fenómenos eléctricos, donde Faraday y Maxwell dotan de una geometría estos fenómenos con el fin de generar un entendimiento más amplio y desarrollado del campo eléctrico y el potencial eléctrico.

Con las problemáticas en la educación actual y en la comprensión de fenómenos físicos en colegios y universidades, los maestros (así como maestros en formación) se ven en la obligación de buscar nuevas metodologías y estrategias que puedan llevar a los estudiantes a una mejor comprensión de los temas que se imparten en las aulas, es por eso que en este trabajo se planteó una forma diferente de abordar el campo eléctrico y el potencial a lo que usualmente se realiza en las aulas, dejando de lado los procedimientos matemáticos y fortaleciendo la relación física-geometría. Es aquí donde las funciones complejas abren la puerta a nuevas opciones.

Se evidenció como por medio de la geometría obtenida a partir de las funciones armónicas u y v es posible modelar la geometría de las líneas de fuerza (así como las líneas equipotenciales) de ejemplos concretos. Se pudo ver como partiendo de una función $f(z)$ cualquiera era posible buscar un fenómeno que pudiera reproducir la geometría obtenida por las funciones armónicas,

pese a que en esta investigación se abordó un fenómeno por función, la geometría que nos brinda las funciones u y v nos permite buscar diferentes fenómenos en la naturaleza que podamos relacionar a estas funciones. A partir de los ejemplos se evidenció la relación que hay entre las funciones de variable compleja y los fenómenos eléctricos (campo eléctrico y potencial eléctrico), donde se propuso a su vez esta relación como metodología de abordamiento en las aulas.

BIBLIOGRAFÍA

- FEYNMAN, Richard. LEIGHTON, Robert. The Feynman Lectures on Physics, Volume II: Mainly Electromagnetism and Matter. Massachusetts. E.U.A, 1964.
- FARADAY, Michael. Experimental researches in electricity Vol. I. Royal Society. United Kingdom. 1832
- ALBORNOZ, Paola. Análisis Conceptual de J.C Maxwell desde la perspectiva de Campos para la Enseñanza de la electrostática. Bogotá, Colombia 2019.
- ARCE W, Mauricio. Análisis complejo a la teoría del potencial eléctrico. Bahía Blanca, Argentina 2013.
- FURIÓ C. GUI SOLA J. La enseñanza del Concepto del Campo Eléctrico basada en un modelo de Aprendizaje como Investigación orientada. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales. Universidad de Valencia 2001.
- GUI SASOLA, Jenaro. ZUMBIMENDI, José Luis. ALMUDÍ, José Manuel. CEBERIO, Mikel. Dificultades persistentes en el aprendizaje de la electricidad: estrategias de razonamiento de los estudiantes al explicar fenómenos de carga eléctrica. Departamento de física aplicada I. Universidad del país vasco. España. 2008
- QUINTERO GARCÍA, María de los Ángeles. Estrategia de Enseñanza de las líneas de Campo Eléctrico de una partícula cargada en movimiento. Bogotá, Colombia 2016.
- MAXWELL, James C. A treatise on Electricity and Magnetism. Oxford University, United Kingdom (1881).
- MAXWELL, James C. On Faraday's Line of Force. Cambridge University, United Kingdom (1855).
- BELÉNDEZ, Augusto. Mi clásico favorito. Universidad de Alicante, España (2016)
- ACEVEDO, Bernardo. Variable Compleja. Universidad Nacional De Colombia Sede Manizales, Colombia (2006)
- RODRIGUEZ, José del Carmen. Electromagnetismo y Geometría. Bogotá, Colombia (2008)
- CHINEA, Domingo. Sobre Geometría y Física. Tenerife, España (2021)
- GARCÍA PÉREZ, Pedro Luis. Geometría y Física ¿Cara y Cruz de una Misma Moneda?. Real Academia de Ciencias y Universidad de Salamanca. España

- Villalobos, J.A. (2011). Líneas de Campo de una Superficie Cargada. [jpg]. Física 1011 (Tutor Virtual). <http://fisica1011tutor.blogspot.com/2011/02/carga-electrica-y-campo-electrico.html>
- LIENHARD, John H. Maxwell and Faraday. (1997)
- Aguilar y Cano. Campo eléctrico. [jpg]. Interacción Electromagnética. http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/41008970/helvia/sitio/upload/campo_electrico_2.pdf
- Departamento de Física Aplicada III. (2020). Dos cargas iguales. [jpg]. Principios de la electrostática. [http://laplace.us.es/wiki/index.php/Principios_de_la_electrostatica_\(GIE\)](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Principios_de_la_electrostatica_(GIE)).
- Physics Assignment. (2022). Mutual Induction, Faraday's iron ring experiment. [jpg]. PhysicsMax. <https://physicsmax.com/mutual-induction-faradays-iron-ring-experiment-8068>.
- Lucio Naranjo. J.F. (2022). Subdivisión geodésica del icosaedro. [jpg]. Optimización de Coeficientes de Absorción para Simulación Numérica Acústica. https://www.researchgate.net/figure/Figura-1-Subdivision-geodesica-del-icosaedro_fig1_319939949
- Blogodisea. (2010). La curvatura del espacio-tiempo. [jpg]. La Relatividad General. <https://www.blogodisea.com/relatividad-general.html>.
- Grant. E. (1987). Representación del modelo cosmológico geocéntrico. [jpg]. Celestial orbs in the Latin Middle Ages, vol.78, pp.152-173.
- Cuba. M. (2017). Potencial por carga puntual. [jpg]. Potencial Eléctrico. <https://silo.tips/download/potencial-electrico-w-q-b-o>
- Proyecto EMAG. Dipolo eléctrico. [jpg]. <http://www5.uva.es/emag/proyectoEMAG/html/dipolos/dipolo.html>
- Brainly. (2018). Las líneas de campo de un disco delgado radial cargado. [jpg]. <https://brainly.lat/tarea/10220170>
- Chena, Aguilar, Cano. J.M.L.C. Líneas de fuerza de carga positiva y carga negativa. [jpg]. http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/41008970/helvia/sitio/upload/campo_electrico_2.pdf

