

TRANSFORMACIÓN DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO
SOBRE TAREAS DE ARGUMENTACIÓN EN GEOMETRÍA: EL CASO DE UN
COLECTIVO DE PROFESORES DE UN COLEGIO DE BOGOTÁ

Lizeth Andrea Ruiz Carranza

Universidad Pedagógica Nacional
Maestría en Docencia de la Matemática

Dr. Oscar Javier Molina Jaime

2022

Dedicatoria

A ti, Tomás, mi hijo querido. No te doy las gracias porque ser profesora fue mi sueño antes de saber que existirías, pero a ti te dedico el camino que ha tomado mi vida desde que llegaste a ella.

A mi padre, Luis Eduardo, a quien le debo la esperanza de ser mejor persona cada día y ver en el estudio una forma de lograrlo. Te llevo siempre conmigo.

Agradecimientos

En primera instancia, quiero agradecer a mi asesor, Dr. Oscar Javier Molina, por acompañarme en este largo proceso. Indudablemente, sin toda su orientación, paciencia, dedicación, pero, sobre todo, su calidad profesional y personal, no hubiera logrado que esta investigación fuera posible.

A mis profesores de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, Leonor Camargo, Edgar Guacaneme, Claudia Vargas y Carlos Pérez por compartir todo su conocimiento y ofrecernos, tanto a mí como a mis compañeros, espacios para reflexionar y repensarnos como profesores. Nada mejor que encontrarnos con excelentes ejemplos de profesionales para reencontrarnos con el amor a la academia.

A mi madre, Olga Carranza, y a mis hermanas, Johanna y Lina Ruiz, por brindarme su apoyo y respaldo, no solo en los años que cursé la maestría, sino en la vida. Fue crucial el contar con ustedes en los momentos más duros y desafiantes.

Finalmente, al Gimnasio Vermont, especialmente el grupo de investigación *La Preuve*, por creer en la idea de que solo entendiendo lo que somos es que lograremos cambios en lo que hacemos. Gracias por ofrecerme el espacio para poder llevar a cabo esta investigación y, junto con ella, alcanzar mi título como Magister.

Contenido

<u>INTRODUCCIÓN.....</u>	11
<u>Capítulo 1. Planteamiento del problema y justificación</u>	13
1.1. Problemática.....	13
1.2. Justificación	18
1.3. Objetivos.....	23
Objetivo general.....	23
Objetivos específicos	23
1.4. Antecedentes.....	24
<u>Capítulo 2. Referentes conceptuales.....</u>	29
2.1. Conocimiento y saber.....	29
2.2. Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor.....	30
<u>Capítulo 3. Metodología.....</u>	34
3.1. Perspectiva investigativa	34
3.2. Estrategia investigativa.....	35
3.3. Descripción de fases en cada ciclo.....	38
<u>Capítulo 4. Desarrollo de ciclos de Investigación- Acción</u>	48
Análisis de conocimiento del Estado Base individual.....	50
Conocimiento epistémico sobre argumentación.....	50
Conocimiento cognitivo y ecológico sobre argumentación.....	54
Conocimiento interaccional sobre argumentación.....	54
Conocimiento mediacional sobre argumentación	55
Conocimiento epistémico sobre tareas.....	56
Conocimiento mediacional y cognitivo sobre tareas.....	57
Conocimiento ecológico sobre tareas	58
Síntesis de Conocimiento Estado Base.....	59
4.1. Ciclo 1	61
Fase 1. Delimitación del problema	62
Fase 2. Diseño del plan de acción.....	62
Fase 3. Desarrollo del plan de acción	63
Fase 4. Análisis de conocimiento del Estado 1	64
Conocimiento epistémico sobre argumentación.....	65
Conocimiento interaccional sobre argumentación.....	68

Conocimiento mediacional sobre argumentación	70
Conocimiento epistémico sobre tareas.....	70
Conocimiento cognitivo sobre tareas.....	73
Conocimiento afectivo sobre tareas.....	73
Síntesis de conocimiento individual Estado 1.....	74
Análisis de transformación de conocimiento individual: estado base a estado 1 ...	76
Evolución de conceptos.....	76
Vínculos entre términos.....	77
Asimilación.....	78
Síntesis de transformación de conocimiento individual	79
Fase 5. Delimitación del nuevo problema.....	83
4.2. Inter-ciclo 1 La Preuve	83
Fase 1. Delimitación del problema	83
Fase 2. Diseño del plan de acción.....	84
Fase 3. Desarrollo del plan de acción	85
Fase 4. Análisis del conocimiento de La Preuve Estado Inicial 1.....	85
Conocimiento epistémico sobre argumentación.....	86
Síntesis de conocimiento de La Preuve Estado Inicial 1.....	89
Fase 5. Delimitación del nuevo problema.....	90
4.3. Ciclo 2 La Preuve	91
Fase 1. Delimitación del problema	91
Fase 2. Diseño del plan de acción.....	92
Fase 3. Desarrollo del plan de acción	93
Fase 4. Análisis del conocimiento Estado 2 La Preuve	96
Conocimiento epistémico sobre la argumentación.....	96
Conocimiento cognitivo sobre la argumentación.....	100
Conocimiento ecológico sobre argumentación.....	101
Síntesis de conocimiento Estado 2 La Preuve.....	101
Análisis de transformación de conocimiento La Preuve 1: Estado inicial 1 a Estado	
2.....	102
Evolución de conceptos.....	102
Vínculos entre términos.....	103
Asimilación.....	104
Síntesis de transformación de conocimiento 1 La Preuve.....	104
Fase 5. Delimitación del nuevo problema.....	105
4.4. Inter-ciclo 2 La Preuve	106

Fase 1. Delimitación del problema	106
Fase 2. Diseño del plan de acción.....	106
Fase 3. Desarrollo del plan de acción	106
Fase 4. Análisis del conocimiento Estado Inicial 2 La Preuve	109
Conocimiento epistémico sobre tarea	110
Síntesis de conocimiento Estado Inicial 2 La Preuve	114
Fase 5. Delimitación del nuevo problema.....	116
4.5. Ciclo 3 La Preuve	116
Fase 1. Delimitación del problema	116
Fase 2. Diseño del plan de acción.....	116
Fase 3. Desarrollo del plan de acción	117
Fase 4. Análisis del conocimiento Estado 3 La Preuve	119
Conocimiento epistémico sobre tarea	119
Síntesis de conocimiento Estado 3 La Preuve.....	124
Análisis de transformación de conocimiento La Preuve 2: Estado Inicial 2 a	
Estado 3.....	125
Evolución de conceptos.....	125
Vínculos entre términos	126
Asimilación.....	126
Síntesis de transformación de conocimiento La Preuve 2.....	127
Capítulo 5. Conclusiones	129
5.1. Con respecto a los objetivos del estudio.....	129
5.2. Principales resultados sobre el conocimiento y su transformación en La	
Preuve.....	131
5.3. Conclusiones respecto de formación profesional.....	132
Referencias	134
Anexos.....	141
Anexo 1. Insumos Estado Base	141
Propuesta de anteproyecto de trabajo de grado.....	141
Prueba de competencias escriturales.....	142
Prueba de conocimiento didáctico-matemático	143
Anexo 2. Tabla de datos Estado Base individual	147
Anexo 3. Tabla de datos Estado 1 individual.....	152
Anexo 4. Tabla de datos Estado Inicial 1 La Preuve.....	160
Anexo 5. Documento de cierre de Ciclo 2.....	165

Anexo 6. Tabla de datos Estado 2 La Preuve	167
Anexo 7. Tabla de datos Estado Inicial 2 La Preuve.....	170
Anexo 8. Análisis de tareas seleccionadas de libros de texto.....	173
Anexo 9. Documento de cierre de Ciclo 3.....	177
Anexo 10. Tabla de datos Estado 3 La Preuve.....	180

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Descripción de las dificultades y mejoras relacionadas con el concepto de tarea (Ramos, Gusmão, Font, & Lando, 2020).....	25
Tabla 2. Asociación entre preguntas propuestas y conocimiento que evocan para la faceta Epistémica (Pino-Fan, Assis, & Castro, 2015).....	26
Tabla 3. Preguntas propuestas para la faceta Epistémica.....	27
Tabla 4. Categorías de análisis de transformación de conocimiento (Camargo & Triana, 2022).....	28
Tabla 5. Categorías emergentes sobre Argumentación.....	43
Tabla 6. Aspectos para construcción de datos.....	43
Tabla 7. Ejemplo de dato.....	44
Tabla 8. Indicadores de categoría teóricas.....	45
Tabla 9. Categorías y subcategorías de transformación de conocimiento.....	47
Tabla 10. Relación de análisis de Estados y Transformación de conocimiento.....	49
Tabla 11. Conocimiento epistémico sobre argumentación Estado Base.....	51
Tabla 12. Conocimiento cognitivo sobre argumentación Estado Base.....	54
Tabla 13. Conocimiento interaccional sobre argumentación Estado Base.....	55
Tabla 14. Conocimiento mediacional sobre argumentación Estado Base.....	55
Tabla 15. Conocimiento epistémico sobre tareas estado base.....	56
Tabla 16. Conocimiento mediacional sobre tareas estado base.....	57
Tabla 17. Conocimiento ecológico sobre tareas Estado Base.....	58
Tabla 18. Síntesis de conocimiento de Argumentación Estado Base.....	59
Tabla 19. Síntesis de conocimiento de Tarea Estado Base.....	60
Tabla 20. Descripción de Seminarios.....	63
Tabla 21. Conocimiento epistémico sobre argumentación Estado 1.....	65
Tabla 22. Conocimiento interaccional sobre argumentación Estado 1.....	68
Tabla 23. Conocimiento Mediacional sobre Argumentación Estado 1.....	70

Tabla 24. Conocimiento Epistémico sobre Tareas Estado 1.....	70
Tabla 25. Conocimiento Cognitivo sobre Tareas Estado 1.....	73
Tabla 26. Conocimiento afectivo sobre Tareas Estado 1.....	73
Tabla 27. Síntesis de conocimiento de argumentación Estado 1	74
Tabla 28. Síntesis de conocimiento de Tareas Estado 1.....	75
Tabla 29. Comparación de síntesis de conocimiento de Argumentación Estado Base (EB) y Estado1 (E1).....	79
Tabla 30. Comparación de síntesis de conocimiento de Tarea Estado Base (EB) y Estado1 (E1)	81
Tabla 31. Transformación de conocimiento de Estado Base a Estado 1.....	82
Tabla 32. Conocimiento epistémico sobre argumentación Estado Inicial 1	86
Tabla 33. Lluvia de ideas delimitación del problema Ciclo 2.....	92
Tabla 34. Lluvia de ideas diseño del plan de trabajo Ciclo 2.....	92
Tabla 35. Concepciones sobre Argumentación y razonamiento posterior al plan de acción del ciclo 2.....	94
Tabla 36. Interpretaciones de primeras concepciones de argumentación y razonamiento .	95
Tabla 37. Conocimiento epistémico sobre argumentación Estado 2	96
Tabla 38. Conocimiento cognitivo sobre argumentación Estado 2	100
Tabla 39. Conocimiento ecológico sobre argumentación Estado 2	101
Tabla 40. Transformación de conocimiento de La Preuve de Estado Inicial 1 a Estado 2	104
Tabla 41. Conocimiento epistémico sobre tareas Estado Inicial 2.....	110
Tabla 42. Definiciones de conceptos asociados a tarea adoptados por La Preuve.....	117
Tabla 43. Características de una tarea de argumentación.....	118
Tabla 44. Conocimiento epistémico sobre tarea Estado 3 La Preuve.....	120
Tabla 45. Transformación de conocimiento de La Preuve de Estado Inicial 2 a Estado 3	127

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Ejemplo de tarea propuesta a estudiantes de grado octavo.....	14
Figura 2. Fases de Investigación-Acción.....	38
Figura 3. Adaptación de las fases de cada ciclo de IA.	39
Figura 4. Comparación de Estado Base y 1 de la Argumentación	80
Figura 5. Comparación de Estado Base y 1 de Tareas	81
Figura 6. Registro lluvia de ideas inicio de Ciclo 2.....	91
Figura 7. Registro definiciones de Argumentación o argumentar.....	93
Figura 8. Representación de los diferentes tipos de argumentos según La Preuve	100
Figura 9. Rutina "3, 2, 1 puente" para el elemento tarea.....	107
Figura 10. Concepciones sobre tarea	107
Figura 11. Analogías sobre tarea.....	108
Figura 12. Inquietudes sobre tareas.....	109

INTRODUCCIÓN

En este documento presento los resultados de una investigación realizada como trabajo de grado de Maestría en Docencia de la Matemática. El objeto de estudio fue el Conocimiento Didáctico-Matemático de un grupo de profesores de matemáticas; específicamente, mi interés se centró en dar cuenta y razón de la transformación de dicho conocimiento mientras este grupo realizaba un proceso investigativo relacionado con la práctica didáctica de diseñar tareas de argumentación en geometría.

Inicialmente, en el primer capítulo, presento el problema de investigación que identifiqué, así como los aspectos que considero que sustentan la importancia que tiene el abordarlo. En este capítulo se encuentran también la pregunta y objetivos, así como una reseña de las investigaciones realizadas por otros investigadores y cuyos resultados fueron empleados para la elaboración de este trabajo.

En el segundo capítulo se encuentra descrito el marco de referencia que elegí para realizar el análisis de los datos. Este está constituido por dos aspectos teóricos: El primero de ellos relacionado con el conocimiento, ya que, dada la naturaleza del estudio, era vital contar con una conceptualización de conocimiento que permitiera comprender y sustentar las decisiones metodológicas que tomé para caracterizarlo. El segundo, relacionado con el Modelo de Conocimiento Didáctico Matemático –CDM– (Pino-Fan & Godino, 2015) que permite decantar el conjunto de categorías que elegí para poder describir el conocimiento de los profesores.

En el capítulo número tres presento la metodología de la investigación, esto es, la perspectiva, enfoque y estrategia de la investigación. Adicionalmente, hago explícitos aspectos relevantes como la adecuación de la Investigación-Acción como estrategia, así como las herramientas analíticas que utilicé para la recolección y organización de insumos, la construcción de los datos, la caracterización de los diferentes estados de conocimiento y, finalmente, la identificación de su transformación.

Posteriormente, en el cuarto capítulo, realizo la descripción detallada de cada uno de los ciclos y fases de investigación. Dicha descripción incluye no solo el reporte de las acciones realizadas, sino también los resultados parciales encontrados en cada

ciclo, esto es, el análisis de conocimiento que llevó a la caracterización del estado de conocimiento y el análisis de transformación de conocimiento de un estado a otro.

Finalmente, se encuentran las conclusiones que obtuve a la luz de los resultados obtenidos tanto del análisis de conocimiento como del análisis de transformación. Dichas conclusiones incluyen el balance sobre el alcance los objetivos de la investigación, comentarios sobre los principales resultados y reflexiones sobre el proceso de investigación en general y su impacto en mí como persona y profesional.

Capítulo 1. Planteamiento del problema y justificación

1.1. Problemática

En el colegio Gimnasio Vermont la geometría ha cobrado un papel muy importante dentro del currículo de matemáticas desde hace algunos años. Hay de fondo una postura según la cual la demostración debe ser objeto de enseñanza en las clases de geometría de los grados octavo y noveno, y que esta se promueve de manera importante con el estudio de la geometría. Estas posturas se sustentan en dos ideas: (i) el reconocimiento de que la demostración es importante en el aprendizaje de las matemáticas debido, entre otras cosas, a que mediante ella el estudiante puede lograr un conocimiento sobre aspectos centrales relativos a cómo funcionan las matemáticas, entre estos, aspectos sobre la validez de proposiciones (Stylianides & Ball, 2008); (ii) el reconocimiento de que la geometría clásica sintética muestra un modelo de validación hipotético-deductivo que ilustra muy bien el funcionamiento de los procesos de argumentación en un contexto formal.

Entre los profesores del colegio hay un consenso según el cual los estudiantes de estos grados tienen dificultades al enfrentarse a la demostración; en general, se ha llegado a advertir que tienen dificultades al momento de argumentar. Por ejemplo, los estudiantes no logran deducir, a partir de datos y utilizando elementos del sistema teórico, la aseveración que permitiera, eventualmente, llegar a una conclusión esperada. En otras ocasiones hacen un mal uso de los enunciados de teoremas o postulados, lo que pone de manifiesto la falta de significado que tenía para ellos las estructuras condicionales o bicondicionales.

Para enfrentar esta problemática, algunos profesores trabajaron en la escritura de libros de texto para el uso de los estudiantes del colegio. El objetivo era ofrecer oportunidades de aprendizaje para que los estudiantes, por medio de la exploración de situaciones tipo problema desarrollaran competencia argumentativa, específicamente, lograsen hacer demostraciones.

Un ejemplo de las tareas propuestas en estos libros se presenta en la Figura 1. La tarea fue diseñada para abordar, con estudiantes de octavo grado, el Teorema de Lados desiguales-ángulos desiguales¹.



Haciendo uso de un EGD, como Geogebra, construya un triángulo, nombre los vértices A, B y C, y posteriormente, mida sus ángulos y sus lados.

Al terminar la tarea, arrastre cada uno de los vértices y complete la siguiente tabla teniendo en cuenta algunos de los triángulos resultantes.

ΔABC	$m\angle A$	$m\angle B$	$m\angle C$	AB	BC	AC
Primer triángulo						
Segundo triángulo						
Tercer triángulo						
Cuarto triángulo						
Quinto triángulo						
Sexto triángulo						
Séptimo triángulo						
Octavo triángulo						



Cuando termine de hacer la tabla y escribir aproximaciones de los datos responda:

¿Qué relación tienen el lado más largo y el ángulo de mayor medida?

CONJETURA 1:

CONJETURA 2:

Comentario...

*Evidentemente las conjeturas se pueden reformular en forma condicional, de esa manera se aclara lo que se afirma en una conjetura particular.
En el caso de la conjetura 1, su reformulación es:
Si se tiene un triángulo, entonces el lado de mayor longitud es opuesto al ángulo de mayor medida.*

Figura 1. Ejemplo de tarea propuesta a estudiantes de grado octavo

¹ Teorema de Lados desiguales-ángulos desiguales: En un ΔABC , (i) si $BC < AC$ entonces $m\angle A < m\angle B$; (ii) si $m\angle A < m\angle B$ entonces $BC < AC$.

Tal y como se puede apreciar en el enunciado, la solución de la tarea implica el uso de un Entorno de Geometría Dinámica, específicamente GeoGebra. Se espera que el estudiante explore en varios triángulos la relación que existe entre la medida del ángulo de mayor medida y el lado de mayor longitud. Se solicita explícitamente al estudiante elaborar dos conjeturas en las que reporte sus observaciones.

El resultado que se obtuvo de usar en las clases de geometría las tareas diseñadas para los libros se corresponde con un hallazgo reportado por Battista y Clements (2010). Esto es, aunque la tarea promovió una clase de matemáticas en la que los estudiantes participaron activamente en la exploración y comunicación de resultados, las discusiones suscitadas no condujeron al cumplimiento del objetivo de la clase (para nuestro caso, la producción autónoma de demostraciones o de argumentos deductivos claves para sustentar conjeturas). Hizo falta un “algo más” que promoviera el logro del objetivo.

Con el anterior escenario, los profesores de Geometría del Gimnasio Vermont decidieron optar por la conformación del grupo de investigación *La Preuve* mediante el cual buscaban, en términos muy generales, abordar la problemática que estaban manifestando los estudiantes de octavo y noveno, relacionados con la demostración. Las primeras reflexiones del grupo, centradas en su propia experiencia, los llevó a plantear que las dificultades de los estudiantes se debían a su propia incapacidad o a la complejidad de la actividad matemática implicada en los procesos de demostración (e.g., uso de lenguaje o formas de comunicación especializados, uso de elementos teóricos y de la lógica matemática para inferir información).

Poco después, esas creencias fueron complejizándose o cambiando producto de una primera revisión documental; en esta, *La Preuve* se encontró con la propuesta del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (AEG) de la Universidad Pedagógica Nacional. Específicamente, el constructo *actividad demostrativa* (Perry, Samper, Camargo, & Molina, 2013) llamó la atención de los profesores, quienes en ese momento orientaban las clases de geometría de grado octavo, por cuanto les hizo caer en la cuenta de la manera ingenua en que estaban concibiendo las dificultades planteadas.

En primera instancia, se percataron de la complejidad que implica la actividad demostrativa, la cual implica dos procesos: conjeturación y justificación; en segunda,

que para promover una actividad tal es menester una *aproximación metodológica* especial para promoverla, compuesta de tres aspectos: promover las interacciones en el aula, solucionar problemas abiertos de conjeturación y usar Entornos de Geometría Dinámica –EGD– para abordar los problemas.

El estudio de este referente hizo virar el interés investigativo de *La Preuve* hacia los procesos de enseñanza con mirar a promover de manera más afortunada el aprendizaje de sus estudiantes. En suma, la propuesta del grupo AEG permitió que los profesores de *La Preuve* reconocieran que sus procesos de enseñanza debían ser estudiados con el objetivo de determinar si sus prácticas profesoras involucraban o no los aspectos citados en aquella propuesta.

Ellos hipotetizaron que involucrar esos aspectos, en particular los de la aproximación metodológica, darían la posibilidad de incentivar en los estudiantes la discusión, o confrontación de posturas y descubrimientos; con ello, la conversión hacia una clase en la que todos, de manera colectiva, construyeran y validaran el conocimiento geométrico. Adicionalmente, el diseño de tareas (con ciertos rasgos característicos) posibilitaría una oportunidad para que los estudiantes hicieran actividad matemática (e.g., exploren, descubran propiedades, formulen conjeturas y argumenten), con lo cual, se promovería una exigencia intelectual rica por parte del estudiante. Finalmente, que el uso de los Entornos de Geometría Dinámica podría ser recurso que, de alguna manera, favorecería esa actividad matemática.

A la luz de este marco de referencia, *La Preuve* planteó un primer proyecto de investigación denominado “La actividad demostrativa en el marco de una cultura de pensamiento” con el que se pretendía indagar sobre las características que debe tener un ambiente de enseñanza y de aprendizaje de geometría en dónde se promueva el desarrollo de la actividad demostrativa y, con ello, el desarrollo de pensamiento científico. Para efectos de este objetivo, los profesores del equipo se concentraron en las prácticas de planeación, implementación y evaluación de clases; en ese contexto, procuraron diseñar tareas que involucraran los aspectos de la aproximación metodológica antes descrita.

A la vez que el anterior proceso investigativo iniciaba, me vinculé a *La Preuve* e inició mi proceso de formación en el programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Nacional de Colombia en la Universidad Pedagógica

Nacional. La temática central de la cohorte a la que ingresé versaba sobre el conocimiento del profesor de matemáticas relacionado con el diseño de tareas que promueven la argumentación en geometría. Coincidentalmente, el grupo de investigación que lideró esa cohorte fue el AEG. Este escenario académico implicó una motivación de mi parte por compartir con *La Preuve* los acercamientos conceptuales que los seminarios abordaban, dada la evidente relación entre las pretensiones de este grupo con la propuesta formativa del programa de maestría.

Esta acción cooperativa de compartir nos hizo darnos cuenta de varios aspectos que deberíamos considerar en nuestro desarrollo investigativo: la importancia de promover la argumentación matemática en general, no solo la demostración; la complejidad que esto implica en los procesos de instrucción (diseño, gestión y evaluación); y la complejidad conceptual de los objetos implicados (argumentación y diseño de tareas con EGD).

Al considerarlos, al interior de *La Preuve* se promovieron discusiones que han desvelado, de manera ostensiva para todos los profesores del equipo, algunas limitaciones que tenemos sobre los conocimientos necesarios para diseñar y gestionar tareas de exploración utilizando el EGD GeoGebra, entre estos: conceptualización especializada sobre argumentos y tipos de argumentos, maneras sobre cómo identificarlos en los discursos orales y escritos de estudiantes, conceptualización de tarea, criterios para diseñar tareas que promuevan la argumentación, entre otros. En resumen, nos percatamos de que esta falta de conocimiento es una razón clave por la cual, en nuestras clases de Geometría, aunque promovemos la participación de los estudiantes, no logramos promover un progreso en la capacidad de los estudiantes para producir argumentos, entre estos, demostraciones.

Problematizar nuestro conocimiento representó un cambio en el foco de investigación ya que, al comprender que no teníamos herramientas conceptuales suficientes para promover en los estudiantes el proceso de la argumentación, las dificultades asociadas al aprendizaje de la demostración eran reflejo, entre otras cosas, de prácticas pedagógicas no tan afortunadas producto de la carencia de conocimiento profesional especializado sobre la argumentación (Boero, Fenaroli, & Guala, 2018) o la demostración (Stylianides & Ball, 2008), y más específicamente, sobre el diseño de tareas que promuevan la argumentación. En concordancia con lo expuesto por

Sullivan, Knott y Yang (2015), como el aprendizaje ocurre en la participación de actividades matemáticas realizadas por el estudiante en el marco de tareas seleccionadas o diseñadas por el maestro, la falta de conocimiento suficiente sobre el diseño de tareas dificulta los procesos de enseñanza porque limita las oportunidades de aprendizaje que el profesor puede propiciar en su aula.

Con este nuevo foco, el Equipo *La Preuve* se dispuso a establecer estrategias para lograr transformar nuestro conocimiento en uno más especializado y apropiado para el favorecimiento de la argumentación. Esperamos, con esta iniciativa, que el cambio o transformación de nuestro conocimiento se vea reflejado en el cambio de nuestras prácticas y, adicionalmente, que el cambio de nuestras prácticas mejore el desempeño de los estudiantes.

Ahora bien, bajo estas nuevas condiciones y teniendo en cuenta el proyecto en el que se enmarca la propuesta formativa de la maestría en la que me involucré, cuyo tema central es el conocimiento del profesor de matemáticas relacionado con el diseño de tareas que promueven la argumentación en geometría, me percaté de que la actividad investigativa de *La Preuve* podría convertirse en el escenario de la investigación que propondría como trabajo de grado. Esto es, al estudiar a *La Preuve* como individuo, podría dar cuenta y razón, desde mi investigación, de cómo se transformó el conocimiento didáctico-matemático sobre argumentación en el marco de la práctica del diseño de tareas.

Esta pretensión se puede especificar o resumir en las siguientes preguntas de investigación: ¿De qué manera se transforma del conocimiento didáctico-matemático del grupo *La Preuve* sobre tareas de argumentación en Geometría? ¿Cuáles aspectos de ese conocimiento se transforman?

1.2. Justificación

En esta sección expongo algunas de las razones mediante las cuales sustento la importancia de realizar una investigación como la que presento. Inicialmente, expongo por qué es relevante a nivel escolar el promover la argumentación en las aulas. En segunda instancia, expongo el por qué el conocimiento del profesor de matemáticas es considerado un aspecto importante si se tiene el objetivo de promover la

argumentación. Finalmente expongo algunas relaciones entre el conocimiento del profesor y su posible transformación con el diseño de tareas.

Dentro de los aspectos que se reconocen como relevantes actualmente en el campo de la educación matemática están aspectos ligados a la argumentación matemática (Boero, Fenaroli, & Guala, 2018). La evidencia principal de esta afirmación se encuentra en el hecho de que cada vez es más usual que se tengan en cuenta en la formulación de normativas nacionales como un elemento que debe incluirse en los planes de estudio. Esto se debe principalmente a que se considera que una posible manera de abolir la autoridad del maestro y de los libros de texto en las aulas es dar sentido y profundidad a los aprendizajes matemáticos al privilegiar la investigación y la justificación, el razonamiento y la demostración (NCTM, 2000).

En el caso de Colombia encontramos que uno de los planteamientos principales de los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) es el hecho de articular la formación matemática en el marco de cinco procesos principales, uno de los cuales es el razonamiento. Pese a que no se encuentra dentro de este documento una definición formal de razonamiento, encontramos siguiente cita que refiere a este constructo:

Es conveniente que las situaciones de aprendizaje propicien el razonamiento [...]. [E]n esas situaciones pueden aprovecharse diversas ocasiones de reconocer y aplicar tanto el razonamiento lógico inductivo y abductivo, al formular hipótesis o conjeturas, como el deductivo, al intentar comprobar la coherencia de una proposición con otras aceptadas previamente como teoremas, axiomas, postulados o principios, o al intentar refutarla por su contradicción con otras o por la construcción de contraejemplos (MEN, 2006, p. 54).

Pese a que aparentemente nadie cuestiona la importancia del razonamiento y la demostración, diversos estudios muestran que los estudiantes, de todos los niveles de escolaridad, manifiestan claras dificultades para razonar y demostrar (Harel & Sowder, 2007). Según lo reportado por Stylianides, Stylianides y Shilling-Traina (2013) a pesar de que durante mucho tiempo dichas dificultades fueron atribuidas al desarrollo cognitivo de los estudiantes, diversos estudios han arrojado como resultado que más que al desarrollo cognitivo podrían atribuirse a que en las aulas se hace poco énfasis en el razonamiento y la demostración (en la argumentación en general).

En ambos documentos (lineamientos y estándares del MEN), se concibe la idea de profesor como responsable de generar ambientes de aula que favorezcan el

razonamiento y el surgimiento de argumentos matemáticos en la comunicación, labor que incluye crear tareas para desarrollar prácticas argumentativas en el aula e impulsar interacciones que promuevan la argumentación propia de la actividad matemática. Enfrentar como profesional el reto de enseñar a argumentar le exige al profesor un conocimiento –de tipo didáctico matemático– que le permita diferenciar la argumentación de cualquier tipo de razonamiento (McNeill & Knight, 2013), lo lleve a reconocer la ambigüedad del discurso cotidiano sobre la argumentación en contraste con la precisión del lenguaje matemático (Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, & Tanguay, 2012), y que le posibilite diseñar, proponer, gestionar y evaluar, de manera informada, tareas matemáticas que promuevan la argumentación y la explicitación de argumentos por parte de los estudiantes (Baker, 2009).

No obstante, en las directrices curriculares colombianas mencionadas no se hacen planteamientos explícitos que diferencien la argumentación del razonamiento ni que caractericen qué es un argumento matemático y cómo se diseñan tareas para promover su producción (Perry, Samper, Camargo, & Molina, 2013). Por ello, como señalan Zohar (2007), de Sá Ibraim y Justi (2016), Boero, Fenaroli y Guala (2018), y Ayalon (2019), los constructos razonamiento y argumento deberían ser objetos de estudio en los programas de formación de profesores. Consideramos que el conocimiento al que estamos aludiendo incluye, entre otras cosas, una definición de argumento desde el punto de vista discursivo, los elementos que conforman (o estructuran) un argumento, los rasgos que caracterizan un argumento matemático, tipos de argumento que se pueden distinguir según la inferencia hecha, y una manera para reconocer y reconstruir un argumento a partir de un intercambio verbal en el aula.

Adicionalmente, el proceso de instrucción tradicional no incluye oportunidades para que los estudiantes logren realizar actividad matemática relacionada con el razonamiento, la demostración o, de manera más general, la argumentación (Perry, Samper, Camargo, & Molina, 2013). Stylianides, Stylianides y Shilling-Traina (2013) resaltan que un factor que impide una óptima enseñanza al respecto es que muchos profesores consideran que esos objetos matemáticos se encuentran fuera del alcance de los estudiantes. Sin embargo, consideran que los profesores que pretenden enseñarlos usualmente tienen un conocimiento limitado sobre estos.

Alineado con este planteamiento y extendiéndolo a la enseñanza de la argumentación, se podría afirmar que los profesores usualmente tienen un conocimiento limitado sobre la argumentación, los argumentos, tipos de argumentos, entre otros aspectos que deberían conocer de manera más especializada.

De acuerdo con lo expuesto por varios autores (Stylianides y Ball, 2008; Stylianides, Stylianides y Shilling-Traina, 2013), existen al menos dos razones por las cuales el conocimiento del profesor sobre cómo involucrar a los estudiantes en actividad argumentativa es un asunto que vale la pena considerar. Una primera razón refiere a la importancia que puede tener la argumentación como vehículo para el aprendizaje. Según esta postura, apuntar al desarrollo de este proceso podría tener una influencia positiva en la cognición en cuanto a que se alcanza un nivel de profundidad y amplitud mayor.

En este sentido, se trasciende a abordar aspectos que lleven a comprender el porqué del funcionamiento de las matemáticas; incluso se podría llegar a superar errores y obstáculos de aprendizaje dando paso a una mayor comprensión de los conceptos. La segunda razón tiene relación con la importancia que ha cobrado aspectos relativos a la argumentación dentro de los currículos de matemáticas escolares; el asumir estos como objetos de interés para las matemáticas escolares implica que debe existir en los profesores un conocimiento especializado al respecto.

En relación con este segundo aspecto, Stylianides y Ball (2008) resaltan la importancia de generar dentro del campo de investigación de la educación matemática investigaciones que apunten a la identificación de elementos críticos del conocimiento del profesor. Puntualmente, hacen una invitación para investigar sobre el conocimiento que los profesores involucran en el momento de tomar decisiones sobre la transformación de una tarea regular en una tarea de argumentación (especialmente deductiva) o al momento de tomar decisiones sobre la secuenciación del trabajo de los estudiantes.

Una investigación como la que presento, en la que propongo momentos y herramientas analíticas que lleven a la identificación del conocimiento sobre la argumentación de profesores que se involucra durante la práctica didáctica del diseño de tareas, podría ser un paso inicial para lograr identificar esos elementos críticos del conocimiento en este aspecto particular.

Por otra parte, Sullivan, Knott y Yang (2015) afirman que el aprendizaje de los estudiantes ocurre cuando se enfrentan a tareas que son especialmente seleccionadas o diseñadas por el profesor, llevadas al aula con una intención clara y específica e implementadas de forma que promuevan las interacciones entre el maestro y los estudiantes. Sostienen, además, que parte importante del diseño de tareas es el conocimiento para la enseñanza que posee el profesor y la toma de decisiones pedagógicas anticipatorias. Por lo tanto, se podría afirmar que al ser el conocimiento especializado para la enseñanza un elemento central del diseño de tareas, el análisis del conocimiento que emerge en la práctica de diseñar tareas debería ser un asunto de alta relevancia para los profesores.

Relacionado con lo expuesto anteriormente, y de acuerdo con Godino (2013), la investigación sobre el diseño de tareas ha venido recibiendo mucha atención en las últimas décadas. En lo que respecta a este trabajo, el asunto de focalizarnos en el diseño de tareas por parte de los profesores tiene que ver con el rol importante que esta práctica tiene para construir su propio conocimiento o hacer resignificaciones de conocimientos adquiridos (Sousa, Gusmão, Font, & Lando, 2020).

De los dos párrafos anteriores es importante, en mi opinión, resaltar las siguientes ideas que justifican la importancia y necesidad de problematizar el conocimiento del profesor sobre el diseño de tareas que favorezcan la argumentación: (i) el llamado a la investigación que lleve a la decantación de criterios que orienten el diseño y análisis de tareas. Si bien el ejercicio de establecimiento de criterios podría pensarse como un ejercicio netamente teórico, el hecho de que se piense en criterios que puedan explicarse desde la teoría hace pensar que el enfoque que se pretende dar a este tipo de investigaciones parte de la práctica. (ii) La relación que se establece entre tipos de tareas y tipos de actividad matemática que provocan, para este caso, la actividad relativa a la argumentación. (iii) La importancia de la práctica de diseñar tareas para construir conocimiento o resignificarlo.

En síntesis, pese a que hay un reconocimiento generalizado dentro de la comunidad de educadores de matemáticas sobre la importancia de la argumentación, el acercar a los estudiantes a este proceso es un desafío para los profesores de matemáticas. Por otra parte, el reconocimiento del rol del profesor en el proceso de

enseñanza ha puesto en el centro de la discusión su conocimiento, en particular, el conocimiento relacionado con la argumentación y las tareas de argumentación.

Es un interés de la comunidad de educadores de matemáticas, que procuran mejorar el proceso de argumentación, adquirir o generar conocimiento especializado sobre cómo diseñar tareas que la promuevan. Una investigación como la que presento podría contribuir a identificar acciones que transforman el conocimiento y herramientas analíticas que describan dichas transformaciones.

1.3. Objetivos

Objetivo general

Caracterizar el conocimiento didáctico-matemático compartido de los integrantes del grupo de investigación *La Preuve* sobre tareas que favorezcan el proceso de Argumentación en Geometría, y determinar de qué manera este se transformó a lo largo de un proceso de investigación.

Objetivos específicos

- Adaptar la estrategia investigativa de Investigación-Acción de tal forma que se logre dar cuenta de estados de conocimiento y la transformación que se genera, esto incluye la descripción de los diferentes ciclos y fases de investigación detallando los planes de acción e insumos.
- Definir categorías que nos permitan caracterizar el conocimiento de equipo *La Preuve* y la transformación de ese conocimiento a lo largo de los ciclos de investigación.
- Describir los diferentes estados de conocimiento que manifiesten los integrantes de *La Preuve* por medio de los productos que se generen en los ciclos de la estrategia investigativa.
- Comparar dichos estados de conocimiento a la luz de categorías emergente y teóricas para lograr describir la transformación del conocimiento y analizar la naturaleza de dicha transformación.
- Reportar una experiencia formativa de un equipo de profesores de una institución educativa desde la cual se pretende identificar y caracterizar el conocimiento de

los profesores sobre argumentación y tareas de argumentación, y precisar sus efectos en la transformación de este conocimiento, con miras solucionar problemática particular relacionada con la práctica de diseñar tareas de argumentación en geometría.

1.4. Antecedentes

Como parte importante de la contextualización del estudio concibo como necesario presentar investigaciones previas que abordan uno o varios de los elementos relevantes del problema de investigación. En esta sección presento investigaciones que se han realizado y que funcionan como referente para comprender la problemática, proporcionan herramientas para abordarla u ofrecen insumos conceptuales o metodológicos para la investigación. Expongo investigaciones relacionadas con tres aspectos: i) conocimiento didáctico y matemático sobre la argumentación, ii) conocimiento didáctico y matemático sobre el diseño de tareas y iii) caracterización del conocimiento del profesor empleando como marco teórico-metodológico un modelo para el conocimiento didáctico y matemático del profesor CDM. La forma en la que presento los documentos involucra no solamente la descripción de las investigaciones y sus resultados; también se concentra en resaltar su aporte para este estudio.

En relación con el primer asunto, un estudio realizado por McNeill y Knight (2013) se enfocó en identificar el conocimiento del profesor sobre la argumentación científica. El objetivo de dicho estudio era examinar el impacto que tuvo en el conocimiento pedagógico PCK (Shulman, 1986) de un grupo de 70 profesores el desarrollo de tres talleres de formación profesional. Para el análisis, los autores se apoyaron en dos elementos clave que aparecían originalmente en el trabajo de Shulman (1986): i) Conocimiento de las concepciones de los estudiantes y ii) conocimiento de las estrategias de instrucción.

De los dos elementos, McNeill y Knight (2013) lograron depurar 4 temas por medio de los cuales generaron el análisis, uno de los cuales fue que, para la discusión en el aula, los maestros exhibieron una comprensión limitada de la argumentación tanto para los componentes estructurales como para las interacciones dialógicas.

Con respecto a este asunto, es decir, conocimiento didáctico y matemático sobre el diseño de tareas, autores como Gusmão (2014), Pochulu, Font y Rodríguez

(2013) y Serrazina (2015) han explorado en sus estudios la relación entre el diseño de tareas y la formación inicial del profesor de matemáticas (Ramos, Gusmão, Font, & Lando, 2020). Según lo reportado por Pochulu, Font y Rodríguez (2013) el diseño de tareas es un proceso en el que el profesor prepara, crea o elabora situaciones que serán aplicadas en el aula, mientras que el rediseño es la adecuación o ajuste de una tarea diseñada por otra persona.

De acuerdo con esta definición de rediseño presentada anteriormente, Ramos, Gusmão, Font y Lando (2020) realizan un estudio por medio del cual señalan los beneficios de adoptar la práctica de rediseño de tareas para potenciar el conocimiento didáctico-matemático de los profesores. Dicho estudio fue realizado en una escuela en Brasil con cuatro profesores de primaria a lo que se les solicitó realizar el rediseño de un proyecto escolar. Iniciando el proceso, los autores reportaron que los profesores tenían ciertas dificultades que, al final, por medio de la práctica de rediseño lograron superar. Como ejemplo, se presenta en la **Tabla 1** la descripción de las dificultades, sus características y los avances que presentaron los participantes en cuanto a las concepciones de tarea.

Tabla 1. Descripción de las dificultades y mejoras relacionadas con el concepto de tarea (Ramos, Gusmão, Font, & Lando, 2020)

Características	Indicadores de mejoras y avances descritos
✓ Ver las tareas como anticuadas, obligatorias o tradicionales;	✓ Cambios en la concepción de tareas y reflexiones sobre la necesidad de renovación en la enseñanza de las matemáticas;
✓ Visión de las tareas como sinónimo de ejercicio y actividad.	✓ Visión de las tareas como situaciones de aprendizaje, construcción de conceptos personales de tareas y rediseño.

El conjunto de indicadores de mejora y avance por cada categoría me aportó una visión general de cómo describir la transformación del conocimiento en el análisis de transformación.

Finalmente, sobre la caracterización del conocimiento del profesor empleando como marco teórico-metodológico un modelo para el conocimiento didáctico y matemático del profesor CDM, un estudio realizado por Pino-Fan, Assis y Castro (2015) exploró el uso de algunas de las herramientas analíticas generadas a partir de un modelo para el Conocimiento Didáctico - Matemático del profesor de matemáticas – CDM-. Este modelo se usa para analizar y caracterizar el conocimiento didáctico de

los profesores en su práctica por medio de la solución de una tarea. La tarea presentada fue diseñada de acuerdo con los planteamientos presentados por Pino-Fan y Godino (2015), según los cuales es posible, en el contexto de la solución de una tarea, realizar preguntas que contribuyan a visibilizar el conocimiento de determinada dimensión o faceta. A modo de ejemplo, la asociación que realizaron Pino-Fan, Assis y Castro (2015) entre la faceta de la Dimensión Didáctica del CDM y las preguntas propuestas en la tarea, así como una breve síntesis del conocimiento que de ellas se logró caracterizar, se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2. Asociación entre preguntas propuestas y conocimiento que evocan para la faceta Epistémica (Pino-Fan, Assis, & Castro, 2015)

Pregunta	Conocimiento que pretende evocar
¿Existe alguna otra forma de responder a las preguntas anteriores, además de la solución que brindaste?	Reflexión sobre otros procedimientos para resolver la tarea: procedimientos que involucran el uso de representaciones, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, diferentes a las esperadas.
¿Qué conocimientos entran en juego para resolver este problema?	Identificación de los saberes que se movilizan al resolver la tarea.
¿Cómo explicarías la solución de este problema a un alumno que no ha podido resolverlo?	Reflexión sobre las diversas explicaciones o argumentaciones a la solución brindada para la tarea

Otro estudio en el que se emplea el CDM, específicamente las facetas epistémica, cognitiva e instruccional (interaccional y mediacional), es el realizado por Godino y otros (2015). En él los autores presentan los resultados obtenidos del trabajo realizado para la elaboración de un cuestionario cuyo objetivo era determinar el conocimiento de maestros en formación sobre razonamiento matemático elemental.

Para la construcción del cuestionario se incluyeron tareas en las que se incluían preguntas enfocadas tanto a identificar conocimiento matemático, como a identificar conocimiento didáctico relacionado con las facetas nombradas anteriormente. Por ejemplo, para la identificación del conocimiento relacionado con la faceta Epistémica se centraron en el reconocimiento de objetos y procesos algebraicos (representaciones, conceptos, procedimientos, propiedades; generalización, modelización) y reconocimiento de niveles de algebrización.

Adicional a las categorías que proveían las facetas del CDM, los autores incluyeron una diferenciación de acuerdo con el contenido algebraico, sin embargo, ya que no es relevante para esta investigación, solo reportaré en la Tabla 3 , como un

ejemplo, las preguntas asociadas a la faceta Epistémica sin tener en cuenta el contenido algebraico.

Tabla 3. Preguntas propuestas para la faceta Epistémica

Faceta	Preguntas
Epistémica	¿Qué propiedades de la adición moviliza el alumno que justifica su respuesta?
	¿Se puede resolver la tarea usando algún procedimiento algebraico? ¿Cómo sería esa solución y qué nociones algebraicas se usarían?
	¿Qué conocimientos matemáticos o de otro tipo se usan para resolver esta tarea?

Los resultados descritos en las tres tablas anteriores fueron empleados en esta investigación de dos formas: i) se usaron adaptaciones de algunas de las preguntas propuestas en la tarea como parte de una tarea de formación profesional presentada a los profesores de *La Preuve* con el objetivo de movilizar y visibilizar el conocimiento asociado con el diseño de tareas de argumentación; y ii) se emplearon las preguntas y la descripción del conocimiento que pretendía evocar para orientar la construcción de indicadores en la etapa de elaboración de la herramienta analítica que permitió caracterizar el conocimiento.

Finalmente, el último antecedente que tomé como referencia para mi investigación fue el trabajo realizado por Camargo y Triana (2022). En su investigación, los autores describieron la transformación de su conocimiento didáctico-matemático sobre argumentación por medio de dos categorías: i) vínculos entre términos en la que categorizaron la transformación de conocimiento que se manifestaba por la forma en la que los autores empleaban términos asociados a la argumentación y las relaciones que establecían entre ellos y ii) asimilación, en la que categorizaron la transformación de conocimiento relacionada con el nivel de apropiación de ideas, es decir, qué tanto se incorporó en su forma de pensar y actuar.

Para cada una de las categorías descritas anteriormente, Camargo y Triana (2022) construyeron subcategorías que emplearon para caracterizar la transformación de su conocimiento. Presento en la Tabla 4 las descripciones de cada subcategoría construida. Como se verá en la sección de metodología, estas fueron tomadas de base para hacer una adaptación y usarla en mi análisis.

Tabla 4. Categorías de análisis de transformación de conocimiento (Camargo & Triana, 2022)

Categoría	Subcategoría	Descripción
Vínculos entre términos	Sinonimia	Relación de igualdad entre el significado de varios términos
	Contenencia	Relación que establece a un término como caso particular de otro
	Intersección	Relación que establece aspectos comunes entre dos términos
	Consecuencia	Relación de dependencia entre dos términos
	Diferenciación	Relación que establece diferencias entre dos términos
Asimilación	Repetición	Hace referencia a cuando se parafrasean las ideas por una fuente de autoridad (profesor, artículos especializados, etc.)
	Conexiones	Hace referencia a establecer nexos entre las ideas de más de dos fuentes de autoridad
	Posesión	Hace referencia a la expresión de ideas propias del profesor, soportadas en las ideas de otros

Capítulo 2. Referentes conceptuales

En este capítulo presento el marco de referencia que fundamenta teórica y metodológicamente del estudio; esto es modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor de matemáticas (CDM) propuesto por el Enfoque Onto-Semiótico – EOS– (Pino-Fan & Godino, 2015). Inicialmente presento una pequeña discusión sobre lo que se entiende como conocimiento y su diferencia con el saber. Luego, expongo las dimensiones en las que el modelo propone caracterizar el conocimiento del profesor de matemáticas, haciendo especial énfasis en la dimensión didáctica y sus facetas, ya que de estas últimas se originan las categorías que se emplearán durante uno de los momentos analíticos del estudio: el análisis de conocimiento.

2.1. Conocimiento y saber

Antes de comenzar a exponer los constructos teóricos relacionados con esta investigación es necesario precisar qué se entiende en ella por conocimiento. La postura que asumí sobre conocimiento proviene de la Teoría de la objetivación (Radford, 2006) en la que hay una diferenciación entre conocimiento y saber. Radford (2006) expresa por medio de la siguiente frase su concepción del saber y del conocimiento desde un enfoque socio cultural:

En una sola frase, la idea es considerar el saber no como objeto que se construye o se transmite, sino como posibilidad, es decir, algo potencial que emerge de la actividad humana y que se imbrica en un proceso de movimiento —de devenir, para ser más precisos— para materializarse o expresarse en conocimiento. (p. 99)

Para precisar de mejor manera la idea del saber cómo potencialidad, se define el saber cómo un sistema codificado de procesos constituidos histórica y culturalmente. Dichos procesos pueden ser, según Radford (2006), corpóreos, sensibles y materiales haciendo referencia a que son acciones que realizan las personas a través del cuerpo mientras interactúan con su entorno. Al concebir el saber cómo construcción cultural, este adquiere un carácter dinámico.

La relación entre saber y conocimiento es que el conocimiento es la actualización o materialización del saber (Radford, 2006). Para comprender esta afirmación

es necesario hacer dos distinciones: i) El saber es la potencialidad y, por lo tanto, es una entidad que no existe. Para que el saber exista debe materializarse a través de un proceso (de actualización o materialización) y ii) el actualizar el saber hace referencia al aparecer, hacerse actual. Es una noción de temporalidad en la que el saber manifiesta por medio de la actividad y, a su vez, la actividad deja su marca de actualización en el saber. La actualización del saber es el conocimiento. En palabras de Radford (2006):

El conocimiento es un modo del saber: una de sus formas singulares desarrolladas. Esta forma desarrollada que la actividad mediadora hace posible pone al saber en movimiento y lo actualiza o materializa. El saber (algebraico, geométrico, etc.) no es un ente sensible en sí. ¿Podemos acaso sentir, percibir o pensar el álgebra en sí? No. No podemos. Pensar algebraicamente es ya algo que ocurre en ese proceso que hemos llamado hace un momento actividad. Y lo que se está revelando a la conciencia en el curso de esa actividad no es el saber algebraico entero, sino una forma singular desarrollada: su materialización o actualización, esto es, el conocimiento. Solamente como tal, como conocimiento, el saber puede ser un objeto sensible de pensamiento y como tal ser modificado y ampliado. (p. 109)

Extendiendo esta noción, para el caso de los profesores de matemáticas, asumiré que el conocimiento es la materialización de un saber en el marco de una práctica didáctica. Por lo tanto, los productos que se generan como resultado de la actividad que realiza un profesor en medio de una práctica didáctica como la es el diseño de tareas son las huellas por medio de las cuales es posible identificar el conocimiento que se movilizó, esto es, el saber que se hizo acto.

2.2. Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor

Desde finales del siglo pasado se ha venido problematizando el rol del conocimiento del profesor dentro de su ejercicio. Tal como reporta Shulman (1986), eran casi inexistentes análisis de las actuaciones de profesores en el aula que fueran más allá de describir la gestión que pudiera tener el profesor de los estudiantes y se centraran en su manejo del contenido y las ideas que se presentaban en el aula.

Caracterizar el conocimiento que debería tener un profesor de matemáticas para poder enseñarlas se ha convertido en un objeto de estudio importante dentro del campo de la Didáctica de las Matemáticas. Los esfuerzos de diversos investigadores al tratar de caracterizar dicho conocimiento se han materializado en modelos que, a través de sistemas de categorías y subcategorías, han contribuido

significativamente a identificar y definir aspectos relevantes del conocimiento del profesor de matemáticas.

Entre los modelos encontramos el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) de Shulman (1986), que contaba con siete categorías; el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) de Ball, Thames y Phelps (2008), que se basó en el modelo de Ball, pero redujo a dos las categorías, cada una con tres subcategorías; el modelo del Cuarteto del conocimiento propuesto por Rowland, Huckstep y Thwaites (2005) que, tal como su nombre lo indica, cataloga el conocimiento en cuatro categorías. Todos estos modelos, junto con otros que no mencionaré, tienen como aspecto en común la visión multifacética del conocimiento que hace que sea necesario categorizarlo para poder describirlo e identificar todos los aspectos que intervienen en la enseñanza (Pino-Fan, Assis, & Castro, 2015).

El Enfoque Onto-Semiótico propone un modelo de conocimiento que denomina Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino J. D., 2009). Este modelo reorganiza y complementa modelos propuestos con anterioridad y propone un sistema compuesto por dimensiones y facetas (para describir el conocimiento) así como niveles de análisis. Las tres dimensiones son *Matemática* (en la que se diferencian las categorías *conocimiento común del contenido* y el *conocimiento ampliado del contenido*), *Didáctica* (en la que se incluyeron las facetas epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional), y *Meta Didáctico-Matemática*.

Dado que este estudio se concentra en una práctica de índole didáctico principalmente, como lo es el diseño de tareas, expongo una descripción detallada de la dimensión Didáctica. Para la caracterización tomo de referencia a Pino-Fan & Godino (2015)

En la *Dimensión Didáctica* se clasifica el conocimiento especializado sobre todos los factores que están involucrados durante el proceso de enseñanza, es decir, cuando se planea e implementan tareas a propósito del aprendizaje de un contenido matemático. En esta se incluyen seis facetas: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional.

En la *faceta epistémica* se ubica el conocimiento especializado sobre las matemáticas. Este es un conocimiento que incluye el conocimiento que le permite al

profesor resolver una tarea de distintas maneras, movilizandoo distintas formas de representación y aludiendo a otros objetos matemáticos de distintos niveles escolares. Este tipo de conocimiento le permite al profesor generar diversas argumentaciones en torno a la solución de la tarea e identificar todos los conocimientos que los estudiantes deben poner en juego para solucionarla. Además, este conocimiento está relacionado con interpretar y analizar el trabajo de los estudiantes; proporcionar una explicación matemática y forjar vínculos entre los símbolos matemáticos y las representaciones pictóricas.

Las *facetas cognitiva y afectiva*, íntimamente relacionadas, delimitan el conocimiento del profesor sobre las formas de pensar, conocer, actuar y sentirse de los estudiantes. En la *faceta cognitiva* se ubica el conocimiento que debe tener el docente sobre la forma de pensar y conocer de los estudiantes. El profesor debe ser capaz de identificar los significados personales y analizar su proximidad con los significados institucionales. Esto implica que debe ser capaz de prever posibles respuestas, obstáculos y errores de los estudiantes durante la etapa de planificación, así como debe ser capaz de manejarlos durante la etapa de implementación. Por otra parte, se ubican en la *faceta afectiva* los conocimientos del docente relacionados con el sentir de los estudiantes. Aspectos como los estados de ánimo y la motivación de los estudiantes en el momento de enfrentarse a una tarea propuesta están involucrados son los que el profesor debe conocer para lograr describir y manejar las situaciones que puedan presentarse en un aula de clase de un nivel escolar determinado.

En la *faceta interaccional* se encuentran los conocimientos necesarios para gestionar las interacciones que se presentan entre el docente y los estudiantes, los estudiantes con el conocimiento matemático que se pone en juego durante la clase, los estudiantes entre ellos, los estudiantes y los recursos de los que disponen, etc. En esta faceta cobran protagonismo las normas socio-matemáticas, sin ser un objeto exclusivo de la misma. Dado que un aspecto que está involucrado en esta faceta son las posibles interacciones con los recursos, esta guarda una estrecha relación con la *faceta mediacional* en la que se encuentran los conocimientos que debe tener el docente para poder seleccionar el recurso más apropiado, evaluar la pertinencia e impacto del uso de este en el aula y establecer los tiempos de las actividades que los estudiantes ejecutarán con él.

Finalmente, en la *faceta ecológica* se encuentra todo el conocimiento relacionado con el currículo en todos los niveles, es decir, sobre el currículo dispuesto para el nivel escolar, pero también sobre los objetivos y fines de la educación a nivel institucional y nacional. Es el conocimiento que debe tener el profesor sobre su marco legal y normativo para la enseñanza.

Las caracterizaciones de las *facetas epistémica, cognitiva y afectiva* presentadas por Pino-Fan y Godino (2015) venían acompañadas por algunas preguntas que, según los autores, podrían ser respondidas a partir de la movilización de saberes con el fin de evidenciar el conocimiento asociado a dicha faceta. Adaptaciones/modificaciones de estas preguntas fueron utilizadas como parte de secuencias de tareas de formación profesional que fueron empleadas para recolectar insumos que posteriormente se convirtieron en datos de la investigación.

De acuerdo con todo lo planteado anteriormente y teniendo en cuenta que el propósito de este trabajo es caracterizar el conocimiento de profesores en la práctica didáctica de diseñar tareas, el uso del CDM, específicamente las facetas de la dimensión didáctica, como herramienta analítica resulta ser evidente. Específicamente, ubicaría mi análisis en el nivel de práctica en la fase de diseño.

Capítulo 3. Metodología

En esta sección expongo la perspectiva investigativa asumida para el estudio. En ese marco, establezco relaciones entre el enfoque y la aproximación asumidas junto con la fundamentación teórica que las describe y valida. Adicionalmente, describo la estrategia investigativa que adopto junto con las herramientas o procedimientos mediante las cuales recabé información, escogí los datos e hice el respectivo análisis.

3.1. Perspectiva investigativa

En esta sección profundizaré sobre el *enfoque* y la *aproximación* de la investigación. El *enfoque de investigación* puede ser entendido como el conjunto de supuestos, personales o colectivos, que se tenga en una investigación sobre el conocimiento y sobre cómo se llega a conocer un fenómeno o problema; en suma, es la postura que finalmente permite definir las prácticas de investigación que se adopten; la *aproximación* hace referencia al tipo de acercamiento más adecuado en relación con el enfoque, las características del problema y los objetivos de la investigación (Camargo, 2018).

Asumiendo esta conceptualización, el enfoque de mi investigación es fenomenológico. Este concibe que los fenómenos sobre los que se investiga pueden ser descritos, explicados, interpretados y cuestionados para construir conocimiento sobre las acciones y pensamientos de las personas y buscar alternativas de solución a una situación (Camargo, 2018). Esta descripción encaja con el objetivo central del estudio (caracterizar el conocimiento de los profesores de *La Preuve*, y su transformación a propósito de un proceso investigativo, involucrado en la práctica de diseñar tarea).

Como consecuencia de asumir un enfoque fenomenológico, opté por una *aproximación colaborativa social* con tintes hermenéuticos (Camargo, 2018). Esta aproximación se corresponde con estudios en los que se pretende analizar acciones colaborativas en escenarios sociales. Estas acciones colaborativas usualmente son motivadas por un interés genuino, por parte de los participantes, de búsqueda de cambio

o transformación del escenario. Es usual que se cuente con el apoyo de un investigador externo que orienta el proceso y acompaña a los investigadores en tiempo real. Por su parte, el acercamiento hermenéutico, también llamado interpretativo, pretende no formular leyes generales sino realizar interpretaciones sobre los significados que puedan los participantes sobre algo en particular. Se trata de identificar, describir e interpretar los significados que se manifiestan a través de las acciones y discursos sin entrar a juzgar su validez.

En esta investigación adopté esta aproximación por cuanto se estudian acciones colaborativas que los profesores del grupo *La Preuve* llevaron a cabo para solucionar un problema relativo a su práctica profesional (diseño de tareas que promuevan la argumentación en geometría). En ese marco, mi interés fue precisar cómo el conocimiento didáctico-matemático del equipo *La Preuve*, involucrado en dicha práctica, se fue transformando como resultado de las acciones implementadas durante el desarrollo del estudio investigativo; para ello, se hizo un rastreo de diferentes estados de conocimiento por medio del análisis de los diferentes datos.

A continuación, presento la estrategia investigativa que utilicé para desarrollar la investigación. Expongo las características y supuestos que me llevaron a elegirla, así como la forma en la que los adapté para ajustarlos a mis intereses investigativos. Finalmente, realizo una descripción genérica de los diferentes ciclos de investigación especificando los aspectos metodológicos más relevantes: insumos, recolección de datos y herramientas de análisis.

3.2. Estrategia investigativa

La estrategia investigativa adoptada para el estudio tiene algunos rasgos de la Investigación Acción (IA). En los párrafos que siguen expondré los rasgos principales de la IA, cuáles de estos adopté y cuáles adapté.

La IA es descrita por Kurt Lewin como una forma de investigación que, en sus orígenes, pretendía conectar el enfoque experimental propio de las ciencias con programas de acción social (Martínez, 2000). Lewin consideraba que este nexo podría ayudar a que ambos aspectos (enfoque científico y social), de manera conjunta, contribuyeran a la solución de algunos de los principales problemas de la época. Según Martínez (2000), Lewin afirmaba que por medio de la IA se podían generar

conocimientos teóricos y cambios reales de manera simultánea. Adicionalmente, la estrategia en sí misma, al emplear de manera cíclica la dupla acción - reflexión sobre un problema específico, favorece que el investigador desarrolle, a partir de un conocimiento general, conocimientos cada vez más específicos que provocarían una intervención más completa al problema que redunde en su solución.

La estrategia investigativa IA se reconoce como pertinente para estudios en los que se busca generar una transformación o mejora de una problemática asociada a un contexto muy particular, procurando documentar dicho proceso. Esto se debe a que la estrategia busca armonizar el rigor de la investigación científica con los fenómenos sociales presentes en comunidades específicas. La corriente de la IA denominada *IA Pedagógica* tiene como presupuesto principal que existen tensiones entre la teoría pedagógica y la realidad social del profesor en ejercicio, que pueden ser solventadas a través de la investigación. Esta brecha entre la teoría y la práctica hace que el profesor esté llamado a investigar su propia práctica de enseñanza para poder, por un lado, mejorar su enseñanza para mejorar el aprendizaje de los estudiantes y, por otro lado, generar conocimiento teórico a partir de la comprensión de su propia situación educativa (Feldman & Minstrell, 2000). En correspondencia con la idea anterior, es posible concluir que la producción de conocimiento, al emplear la IA, se logra por medio de la teorización sobre cómo se lograron mejoras en la práctica pedagógica (Martínez, 2000).

La intención última se puede entender como dar cuenta y razón de la transformación de las prácticas del profesor a la luz de las acciones planeadas y ejecutadas por el mismo. Un segundo rasgo característico de la IA es el relacionado con su estructura. La estrategia contempla como procedimiento la ejecución de ciclos sucesivos, cada uno de ellos compuesto por fases. Esta estructura cíclica se corresponde con la idea de la continua búsqueda de la profesionalización (Denscombe, 2010). Con respecto a esto último, Denscombe (2010) resalta que hay dos ideas que sustentan la estructura cíclica de la IA: en primer lugar, la investigación debe retroalimentarse así misma a partir de la práctica; en segundo lugar, se reconoce la investigación como un proceso en curso y dinámico.

Para este estudio hice una adaptación de estos dos presupuestos las cuales describo a continuación. En primera instancia, si bien la fuente de la problemática

investigativa es una práctica profesional (diseño de tareas de argumentación) y se tiene el fin último de mejorarla, mediante este estudio tenemos la intención de describir el conocimiento involucrado en dicha práctica y dar cuenta y razón de la transformación de ese por parte de *La Preuve*, a la luz de las acciones planeadas y ejecutadas por los profesores que conforman el grupo. Esta modificación tiene sentido en mi investigación ya que no busco generar conocimiento a partir de la deconstrucción de la práctica, sino más bien analizar algunos insumos producidos en el marco de la actividad investigativa para describir el conocimiento didáctico-matemático implicado en la misma y caracterizar cómo este se transforma a lo largo de tal práctica. Adicionalmente, este presupuesto se ampara en la hipótesis de que un cambio en el conocimiento didáctico-matemático del profesor necesariamente generará un cambio en su práctica. Por lo tanto, reportar el proceso de transformación del conocimiento podría constituirse como una base para comprender el efecto que tiene la investigación sobre la práctica.

En segunda instancia, si bien el estudio contempló un procedimiento basado en ciclos sucesivos –cada uno de los cuales se constituye de las fases expuestas en la Figura 2– decidí hacer una adaptación de dichas fases de forma tal que haya una mejor correspondencia con los intereses del estudio; es decir, dado que requiero poder identificar estados de conocimiento en cada uno de los ciclos y precisar, si la hubo, transformación en el mismo, realicé una modificación a las fases que componen los ciclos de investigación.

En síntesis, la estrategia investigativa que adopté tiene rasgos de la IA, sin embargo, no es propiamente IA. Reconozco dos aspectos específicos que interactúan entre sí y que, aunque guarda relación con la IA original, difieren de esta para este estudio: i) asumí un procedimiento conformado de varios ciclos compuestos de varias fases; no obstante, respecto de la propuesta original tomé en cuenta fases diferentes tendientes al estado de conocimiento asociado al ciclo respectivo y su transformación con respecto a un ciclo previo y ii) La intención de procurar informar sobre una transformación, esta vez no sobre una práctica específica, sino sobre el conocimiento involucrado y su transformación (si ello ocurre) durante una práctica didáctica específica (el diseño de tareas de argumentación).

A continuación, describo detalladamente cuáles son las fases de IA original, cuáles son las fases que decidí implementar en los ciclos de investigación que se llevaron a cabo a propósito de este trabajo de grado y finalmente cuáles fueron las adecuaciones realizadas en cada una de estas.

3.3. Descripción de fases en cada ciclo

Las fases que componen cada ciclo de IA, según lo planteado por Elliott (1991), se presentan en la Figura 2. En la fase inicial se hace una delimitación de la “idea general”, es decir, la identificación de un estado o situación que se desea cambiar o mejorar (Elliott, 1991). En la fase siguiente, de reconocimiento, se pretende describir y explicar los factores que han generado o condicionado la idea general. En esta fase se genera una reflexión crítica por medio de la cual se busca generar hipótesis que justifique el problema. Como resultado de dicha reflexión, en la Fase 3 se construye el plan de acción y en la Fase 4 este se desarrolla. Finalmente, en la Fase 5, después de haber ejecutado el plan de acción, se revisa el estado del problema y se procede a delimitar una nueva idea general.

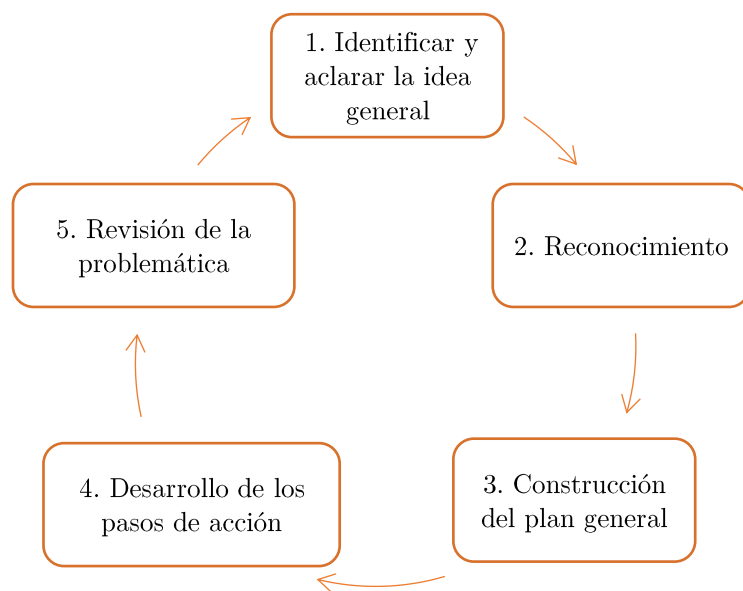


Figura 2. Fases de Investigación-Acción

Tal y como se expuso anteriormente, producto de la adaptación de uno de los rasgos principales de la IA, se generaron modificaciones a las fases que se contemplan en cada ciclo (ver Figura 3). A continuación, presento la descripción de cada una de las fases de los ciclos que procuré llevar a cabo durante el desarrollo del estudio.

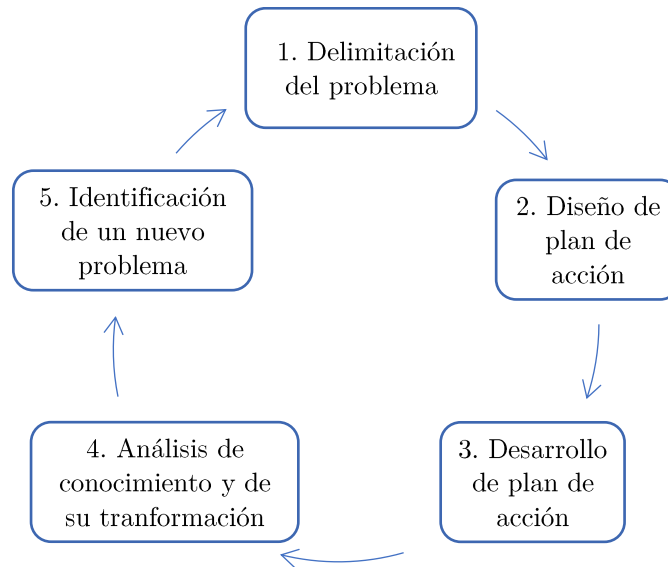


Figura 3. Adaptación de las fases de cada ciclo de IA.

Fase 1: Delimitación del problema. En esta primera fase, a partir de inquietudes profesionales encontradas en la práctica, fue delimitado el problema genuino de investigación (Martínez, 2000). Dicho problema debe ser un problema general, amplio, del cual se establecen diversos problemas específicos (subproblemas), a medida que avanzan los ciclos de investigación, cuya solución aporta soluciones parciales al gran problema original. Vale indicar que para este estudio fueron generados 3 ciclos de investigación. El primer ciclo de investigación fue motivado por una problemática identificada por el grupo de Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional. Esta problemática estaba relacionada con la falta, que se evidenciaba en los profesores de Matemáticas, de conocimiento especializado para la enseñanza de la Argumentación.

Los dos ciclos posteriores fueron subproblemas que, pese a estar asociados, ya fueron específicos del contexto del colegio Gimnasio Vermont y su grupo de investigación *La Preuve*. Adicionalmente, fue requerido un ciclo especial al que denominé inter-ciclo (entre el primer y segundo ciclo), cuyo objetivo fue lograr alinear los intereses investigativos de *La Preuve* con la problemática inicial propuesta. En el siguiente capítulo se precisa cada problema, su emergencia y el desarrollo del ciclo que corresponde a cada uno.

Fase 2: Diseño de un plan de acción. En esta fase se generaron propuestas y estrategias con el objetivo de solucionar el subproblema encontrado en la Fase anterior.

Para este estudio en particular, dados los problemas delimitados y los rasgos propios del estudio (trabajo de investigación en el que se involucra Equipo *La Preuve*), los planes de acción diseñados fueron generados no solamente por mí; este proceso contó con la participación de todos los profesores del Equipo, bajo un liderazgo de parte mía; ese liderazgo básicamente consistió en planear la agenda de las primeras sesiones de reunión, diseñar los recursos sobre los cuales trabajaríamos (por ejemplo, las tareas de formación profesional que abordábamos, los formatos para registro de discusiones y acuerdos, etc.) y moderar la reunión. Dicho proceso de planeación fue realizado bajo la supervisión de mi asesor de trabajo de grado. Sus aportes me ayudaron a precisar detalles importantes sobre la gestión de los planes de acción; así mismo, se enriquecieron y diversificaron las propuestas que inicialmente tenía.

Fase 3: Desarrollo del plan de acción. Durante esta fase se implementó el plan de acción trazado en la Fase 2. En esta fase se hizo la captura de información. Para el presente estudio, la información recolectada provino de la actividad de *La Preuve*, conforme el desarrollo de cada plan formulado.

Como recurso de recolección y registro de información se utilizaron grabaciones de audio y video de las reuniones del Equipo de investigación que tuvieron ocasión para abordar tareas de desarrollo profesional propuestas en el marco de los planes de acción, producciones escritas resultado del desarrollo de tales tareas y productos generados a partir de las acciones adelantadas en la Fase Final del ciclo de investigación. Para la organización de la información registrada se requirió del establecimiento de mecanismos específicos para ello (Camargo, 2018). Para este caso, los insumos recolectados se organizaron en archivos digitales, ubicados en carpetas divididas por el tipo de insumo (videos de reuniones, actas escritas de reuniones, diarios personales de los profesores, producciones de tareas de formación profesional y reflexiones finales a manera de conclusión); cada archivo incluyó la fecha de recolección.

Fase 4: Análisis de conocimiento. En esta fase se hizo un análisis de la producción surgida de la ejecución del plan de acción desarrollado en la Fase 3. En nuestro caso, ese análisis tuvo dos fines: identificar y describir el estado de conocimiento del Equipo *La Preuve* para el ciclo correspondientes y describir, si la hubo, la transformación del conocimiento con respecto a ciclos previos. Este análisis fue realizado solamente por mí. La razón principal es que no es objeto de interés para el grupo el identificar

los estados de conocimiento al cabo de cada ciclo y el tipo transformación de conocimiento que tuvo ocasión, como si lo es para mí a propósito de mi trabajo de grado. Sin embargo, los resultados del análisis sí fueron expuestos al equipo con la finalidad de que fueran tenidos en cuenta como un factor de evaluación del estado del problema al finalizar cada ciclo de investigación. Al grupo le interesaba los aspectos que se aprendían o los consensos que se obtenían, más no hacer comparaciones de estados de conocimiento, por ejemplo. Para llevar a cabo el análisis fue necesario establecer un proceso que desembocó en la diferenciación de diferentes subfases. A continuación, presento una breve descripción de cada una de ellas.

- Reducción de información: Una vez organizada la información, el proceso subsecuente fue su reducción; para ello, se generaron filtros para determinar la información relevante y, por ende, la información descartada. Debido a que el foco de estudio de este trabajo de grado es describir el conocimiento de los profesores sobre la argumentación y el diseño de tareas, y su posible transformación, de la información recolectadas fueron seleccionados los insumos que contenían discursos verbales o escritos relacionados con estos asuntos.
- Construcción de datos. Reducida la información, se construyeron los datos o unidades de análisis del estudio. Estos datos son los fragmentos de la información que se desprenden o están constituidos por porciones de información que tienen sentido completo para los investigadores y de las cuales se puede hacer un análisis (Camargo, 2018). En esta investigación, las unidades de análisis o datos de investigación son: las afirmaciones que se depuraron de los discursos de los participantes o de sus registros escritos frente al diseño de tareas y a la argumentación, la interpretación realizada sobre dicha afirmación, y la categoría emergente por medio de la cual se rotuló el fragmento durante el proceso de análisis microscópico (microanálisis) de insumos.

El microanálisis de los insumos ya reducidos se trata de un análisis detallado de los insumos, que se realiza por medio de la lectura e interpretación línea por línea e incluso palabra por palabra (Strauss & Corbin, 1998). El objetivo principal del microanálisis es el de construir los datos de la investigación y generar unas categorías iniciales por medio de un ejercicio de codificación abierta o axial, es decir, generar de

manera espontánea las categorías y sus códigos de acuerdo con lo encontrado en la revisión de los insumos.

Este tipo de análisis se constituye en un ejercicio muy importante en las etapas iniciales de una investigación cualitativa debido a que por medio de este se logran establecer unas primeras relaciones entre conceptos que aparecen de manera recurrente y que permiten agrupar los datos en categorías. En el caso particular de esta investigación, se lograron seleccionar fragmentos de discurso en los cuales el objeto central era la Argumentación o las tareas y determinar en ellos el asunto central sobre el que versa el fragmento. Para ello, fue necesario realizar un ejercicio de lectura reflexiva e interpretativa con ayuda de mi asesor.

Durante las asesorías de trabajo de grado nos dedicamos a discutir la intencionalidad del discurso plasmado en el fragmento, al punto de reescribirlo con el objetivo de parafrasear la idea central que se quiso decir en el mismo. Para este caso, se precisaron dos elementos de interés para el estudio: argumentación y tareas. Así mismo, se produjo una reescritura del fragmento, que nos permitió decantar el sentido y lo que se pretendía decir de cada uno de tales objetos. Para ilustrar al lector, presento un ejemplo de microanálisis realizado. El fragmento escogido como insumo es el siguiente:

[...] los hallazgos de diversos investigadores en didáctica de la geometría han permitido identificar como elementos básicos tres aspectos: proponer a los estudiantes tareas desafiantes, utilizar entornos de geometría dinámica y generar ambientes de clase en dónde el profesor sea un mediador de las discusiones para lograr la consolidación del conocimiento.

Para este caso, el ejercicio de lectura reflexiva nos llevó a precisar una idea central sobre uno de los objetos de interés para el estudio (*tareas de argumentación*) y qué es lo que se quiere decir este (su “sentido”). Así las cosas, el fragmento se reescribió de la siguiente manera:

Proponer a los estudiantes tareas desafiantes, que impliquen el uso de entornos de geometría dinámica es un elemento básico para favorecer la actividad demostrativa.

Se identificó que el *sentido* de esta frase es el de exponer un *propósito* de las tareas: favorecer la actividad demostrativa. Ejemplos como este este, nos permitieron generar un sistema de categorías que denominamos categorías emergentes relativo al sentido de lo dicho para cada elemento central (objeto de estudio) de esta

investigación: tarea y argumentación. Así, por ejemplo, el sentido *Propósito* quedó ubicado en la categoría *Acepción*. En suma, el ejercicio de microanálisis llevó a la consolidación de las categorías emergentes presentadas que presento en la Tabla 5.

Tabla 5. Categorías emergentes sobre Argumentación

Elemento	Categoría emergente	Código	Descripción
Argumentación	Acepciones	AA	Conocimiento relacionado con definiciones de argumento aludiendo a características, elementos constitutivos o propósito.
	Términos afines	ATA	Conocimiento relacionado con términos que se relacionan con la argumentación y/o los argumentos.
	Tipos de argumentos	AT	Conocimiento relacionado a tipos específicos de argumentos.
	Aspectos metodológicos	AM	Conocimiento relacionado con metodologías, recursos, interacciones entre colegas o en el aula de clase.
Tarea	Acepciones	TA	Conocimiento relacionado con definiciones de tarea aludiendo a características, elementos constitutivos o propósito.
	Tipos de tareas	TT	Conocimiento relacionado a tipos específicos de tareas.
	Elementos de una tarea	TE	Conocimiento de elementos que constituyen una tarea, por ejemplo, enunciado, indicaciones, etc.
	Criterios de diseño	TCD	Conocimiento relacionado con condiciones que deben tenerse en cuenta para el diseño de una tarea.

Por medio de estas categorías emergentes se realizó una primera organización de los insumos que permitieron decantar los datos del estudio. Se construyó una tabla mediante la cual las afirmaciones que fueron seleccionadas y el resultado del microanálisis fueron organizadas (ver Tabla 6).

Tabla 6. Aspectos para construcción de datos

Aspecto	Descripción
Fecha	Fecha de creación del documento
Insumo	Detalle del contexto del cual se extrae el insumo, por ejemplo, si es un documento en el que se soluciona una tarea de un seminario o es una afirmación extraída de la grabación de alguna reunión
Documento	Nombre del documento del cual se extrajo el fragmento
Afirmación	Cita textual extraída del insumo
Interpretación	Interpretación del conocimiento que devela la afirmación
Elemento	Especificación del objeto central de la afirmación. Por ejemplo, tarea o argumentación.

Categoría emergente	Especificación de la categoría emergente asociada a la afirmación después de la codificación.
Categoría Teórica	Clasificación de la afirmación en una de las categorías teóricas, es decir, en una faceta de la dimensión didáctica del CDM

La Tabla 7 muestra un ejemplo de diligenciamiento de la tabla para el ejemplo que nos ha servido para ilustrar el dato correspondiente.

Tabla 7. Ejemplo de dato

Aspecto	Descripción
Fecha	14/03/2020
Insumo	Tareas curso Diseño y Desarrollo Curricular
Documento	DDC1
Afirmación	Los hallazgos de diversos investigadores en didáctica de la geometría han permitido identificar como elementos básicos tres aspectos: proponer a los estudiantes tareas desafiantes, utilizar entornos de geometría dinámica y generar ambientes de clase en donde el profesor sea un mediador de las discusiones para lograr la consolidación del conocimiento.
Interpretación	1) Proponer tareas desafiantes es un elemento básico para ... 2) Usar EGD es un elemento básico para...
Elemento	1) Tareas 2) Tareas
Categoría emergente	1) Acepcciones 2) Elementos
Categoría Teórica	1) Epistémica 2) Mediacional

En resumen, en esta subfase se llevó a cabo la construcción de los datos de investigación a partir de los insumos recolectados. El proceso de organización de datos toma algunas herramientas del microanálisis, sin embargo, no es un proceso analítico en sí mismo. Con el microanálisis se realizó la codificación que llevó a la construcción de categorías emergentes que, junto a la interpretación de las afirmaciones, finalmente proporcionó los datos analizados. Los datos en esta investigación son la tripla conformada por la afirmación, su interpretación y la categoría emergente asociada después de la codificación.

- **Análisis de datos.** En esta fase se llevaron a cabo dos procesos analíticos. Un primer proceso consistió en la asociación del conocimiento con las categorías teóricas que brinda el marco teórico del conocimiento didáctico-matemático de la EOS, específicamente, las facetas de la dimensión didáctica del conocimiento.

De acuerdo con lo expuesto en el 0 con respecto al conocimiento asociado a cada faceta de la dimensión didáctica, junto con los aportes de las investigaciones reportadas en los antecedentes, construí la Tabla 8 en la que se presentan los indicadores por medio de los cuales se realizó la asociación de las categorías teóricas a cada dato de investigación.

Tabla 8. Indicadores de categoría teóricas

Elemento	Categoría Teórica	Indicador
Argumentación	Epistémica	<ul style="list-style-type: none"> Definición (o aproximación a definición) de argumentación Definición (o aproximación a definición) de términos afines a argumentación. Alusión tipos de argumentos o aproximación a definición de tipos de argumentos Alusión a elementos que conforman un argumento o aproximación a definición de elementos que conforman un argumento
	Cognitiva	<ul style="list-style-type: none"> Formas de aprender a argumentar Errores, dificultades u obstáculos de los estudiantes relacionados con la Argumentación
	Afectiva	<ul style="list-style-type: none"> Motivación o expectativas de aprendizaje de los estudiantes con respecto a la Argumentación
	Interaccional	<ul style="list-style-type: none"> Aspectos metodológicos de la clase que favorecen la argumentación Interacciones que favorecen la argumentación
	Mediacional	<ul style="list-style-type: none"> Recursos que favorecen la argumentación
	Ecológica	<ul style="list-style-type: none"> Relaciones entre el currículo y la argumentación
Tareas	Epistémica	<ul style="list-style-type: none"> Definición (o aproximación a definición) de tarea Definición (o aproximación a definición) de tipos de tarea Alusión a elementos que conforman una tarea o aproximación a definición de elementos que conforman una tarea
	Cognitiva	<ul style="list-style-type: none"> Habilidades, competencias, capacidades o conocimientos que pone en juego un estudiante al resolver una tarea
	Afectiva	<ul style="list-style-type: none"> Motivaciones o expectativas de los estudiantes al resolver una tarea
	Interaccional	<ul style="list-style-type: none"> Aspectos metodológicos que se deben tener en cuenta para diseñar una tarea Formas en las que se van a dar las interacciones en el marco de la solución de una tarea
	Mediacional	<ul style="list-style-type: none"> Relaciones entre el recurso con el que se soluciona la tarea y otros aspectos o elementos de la tarea
	Ecológica	<ul style="list-style-type: none"> Relaciones entre el currículo y las tareas

Sobre los indicadores debo hacer las siguientes precisiones: i) Para el establecimiento de definiciones consideré que podría haber una mención o alusión a características del objeto (cómo es o no es), elementos que lo conforman (qué tiene o no tiene) o a propósitos (para qué sirve); ii) para el elemento *argumentación* algunos términos afines que surgieron son razonamiento, argumento, validación, justificación, demostración, etc.; iii) los aspectos metodológicos podrían incluir descripciones sobre cuál debe ser el rol del profesor, las normas de la clase, cómo se deben manejar los recursos, el tiempo, etc.; y iv) las interacciones pueden ser estudiante-estudiante, estudiante-profesor o estudiante-recurso.

Posterior al análisis, generé un texto de síntesis de análisis por medio del cual describí, teniendo en cuenta cada elemento y categoría teórica, el conocimiento didáctico-matemático.

El segundo análisis es la identificación de una transformación de conocimiento. Para este análisis también fue necesario generar categorías e indicadores que permitieran describir la naturaleza de la transformación al comparar el estado de conocimiento de un ciclo a otro. Tomé como base las categorías y subcategorías propuestas por Camargo y Triana (2022), e hice algunos ajustes y modificaciones tanto en las categorías como en las subcategorías.

En esencia el ajuste importante surge al vincular una categoría nueva llamada evolución de conceptos desde la cual se analizan las transformaciones relacionadas en los términos, es decir, cómo cambiaba el uso de una misma palabra en diferentes momentos. Otros cambios menos relevantes se realizaron en las descripciones de las subcategorías Repetición y Conexiones. También se cambió el nombre de la subcategoría Posesión por Apropiación.

Finalmente, las tres categorías que contemplé para el análisis de transformación son: i) *Evolución de conceptos* en la cual caracterizo la transformación de conocimiento asociada a modificaciones en la conceptualización de un término de un estado a otro, ii) *Vínculos entre términos* en la que se da cuenta de la transformación al analizar la forma en la que emplean términos específicos dentro del discurso y iii) *Asimilación* en la que se caracteriza la forma en la que se hace propio el conocimiento.

A cada una de estas categorías le asocié una serie de subcategorías con sus correspondientes indicadores. Presento las subcategorías y sus indicadores en la Tabla 9.

Tabla 9. Categorías y subcategorías de transformación de conocimiento

Categoría de transformación	Subcategoría	Indicador
Evolución de conceptos	Amplitud	Ampliación del significado de un término involucrando otros elementos diferentes a los explicitados anteriormente.
	Profundidad	Cambio en el significado de un término involucrando una caracterización detallada de un término al cual antes se aludía de manera escueta.
	Resignificación	Cambio radical en el significado que previamente se había dado a un término.
Vínculos entre términos	Sinonimia	Igualdad de significado entre términos
	Contenencia	Identificación de un término como caso particular de otro
	Intersección	Reconocimiento de aspectos comunes entre términos
	Consecuencia	Identificación de dependencia entre dos términos
	Diferenciación	Reconocimiento de aspectos diferenciales entre términos
Asimilación	Repetición	Conocimiento referencial aislado. Parafraseo de conocimiento proveniente de alguna fuente de autoridad.
	Conexiones	Conocimiento referencial de más de una fuente. Establecimiento de vínculos entre diversas fuentes de autoridad.
	Apropiación	Expresión de ideas propias soportadas en ideas de otros.

Fase 5: Identificación de un nuevo problema. Por medio de la reflexión sobre los resultados obtenidos en cada ciclo de investigación, se identificó un nuevo problema que generó un nuevo ciclo de investigación.

Capítulo 4. Desarrollo de ciclos de Investigación- Acción

En esta sección presento una descripción completa de cada uno de los ciclos y fases que se desarrollaron en el marco de esta investigación; con ello, los análisis de los datos, correspondientes a la Fase 4 de cada ciclo. Para ello, me valgo del reporte de las acciones desarrolladas en cada una de las fases y la descripción de los eventos relevantes que dieron origen a los datos de investigación. Adicionalmente, describo el estado de conocimiento correspondiente a cada ciclo y la transformación del conocimiento, sin la hay, entre un ciclo y otro.

Para iniciar el Capítulo, describo el estado de conocimiento base, es decir, el conocimiento que tenía al iniciar mis estudios de maestría. Este estado es importante ya que brinda un punto de referencia para poder determinar la transformación del conocimiento luego del primer ciclo de investigación, si la hubo. La caracterización de este estado de conocimiento se realizó usando como insumos los documentos producidos por mí durante el proceso de admisión a la maestría –propuesta de anteproyecto, prueba de competencia escritural, prueba de conocimiento didáctico-matemático– (Anexo 1. Insumos Estado Base).

Es necesario aclarar que, debido a las dinámicas particulares que se dieron en el desarrollo del proceso de investigación, fue necesario hacer ajustes en la forma en la que se esperaba realizar el análisis de transformación. Dado que el Ciclo 1 fue desarrollado de manera previa a mi vinculación al grupo *La Preuve*, el estado de conocimiento 1 describe mi conocimiento individual. Por lo tanto, un primer análisis de transformación (Transformación de conocimiento 1) detallará los cambios de conocimiento que se evidencian al comparar el Estado de Conocimiento Base y el Estado 1.

Por otra parte, los Ciclos 2 y 3 en los que ya me he vinculado al grupo, reportan conocimiento compartido, esto es, el conocimiento del grupo *La Preuve*. Por

esta razón la comparación de transformación entre el Estado 1 y los Estados 2 y 3 no resulta pertinente.

Adicionalmente, para lograr hacer delimitación del problema de los Ciclos 2 y 3 fue necesario realizar dos pseudo ciclos de investigación que denominé inter-ciclos. El inter-ciclo 1 tuvo como objetivo hacer virar los intereses investigativos de *La Preuve* que llevaron a delimitar un subproblema relacionado con la argumentación. El inter-ciclo 2, por otro lado, tuvo como objetivo problematizar el diseño de tareas. Debido a que los problemas fueron relacionados a solo uno de los elementos de interés, la depuración de los estados de conocimiento solamente se relacionó con la argumentación, para el estado 2, y con las tareas para el estado 3.

Un beneficio adicional que obtuve de implementar estos inter-ciclos fue el de poder determinar un estado de conocimiento referencial al que permitiera llevar a cabo el análisis de transformación. Del inter-ciclo 1 logré obtener la descripción del estado de conocimiento inicial sobre la argumentación (Estado inicial 1), mientras que en el inter-ciclo 2 sobre tareas (Estado inicial 2).

Dicho lo anterior, en la **Tabla 10** presento la manera en la que se llevó a cabo el análisis de transformación con relación a los Estados de conocimiento que se generaron en cada ciclo de investigación.

Tabla 10. Relación de análisis de Estados y Transformación de conocimiento

Ciclo	Estado de conocimiento	Transformación de conocimiento
No aplica.	Estado Base: Conocimiento individual inicial sobre argumentación y tareas	Transformación individual: Comparación entre Estado Base y Estado 1 individuales
Ciclo 1	Estado 1: Conocimiento individual sobre argumentación y tareas al finalizar Ciclo 1	
Inter-ciclo 1	Estado Inicial 1: Conocimiento inicial de <i>La Preuve</i> sobre argumentación	Transformación La Preuve 1: Comparación entre Estado inicial 1 y Estado 2 sobre argumentación
Ciclo 2	Estado 2: Conocimiento de <i>La Preuve</i> sobre argumentación al finalizar Ciclo 2	
Inter-ciclo 2	Estado inicial 2: Conocimiento inicial de <i>La Preuve</i> sobre tareas	Transformación La Preuve 2: Comparación entre Estado inicial 2 y Estado 3 sobre tarea
Ciclo 3	Estado 3: Conocimiento de <i>La Preuve</i> sobre tareas al finalizar Ciclo 3	

Análisis de conocimiento del Estado Base individual

Como se dijo antes, los datos para dar cuenta de mi conocimiento base se recabaron de tres insumos principalmente –propuesta de anteproyecto, prueba de competencia escritural, prueba de conocimiento didáctico-matemático– (Anexo 1. Insumos Estado Base). A continuación, presento el análisis que permite indicar el conocimiento base que yo tenía sobre los objetos argumentación (y términos afines) y tarea. Para ello, por cada una de las facetas del conocimiento didáctico, presento una tabla que presenta las afirmaciones, sus interpretaciones y breve descripción que deja ver el asunto clave sobre el que dicha afirmación versa. Luego de cada tabla, presento unos comentarios que dejan ver mi conocimiento al respecto de los objetos presentes en las tablas. Al final, expongo una síntesis de lo encontrado para resumir lo encontrado en relación con mi conocimiento sobre tales objetos.

Conocimiento epistémico sobre argumentación

De acuerdo con los indicadores establecidos para esta categoría, se encuentra aquí descrito el conocimiento asociado a acepciones del objeto que se focalizan en características, propósitos o elementos que constituyen al objeto *argumentación* o a términos asociados. La Tabla 11 muestra un resumen de las conceptualizaciones y propósitos de los términos presentes en los insumos que se recapitularon para decantar el estado de conocimiento y que se expusieron en los párrafos previos.

Así mismo exhibe una codificación que enriquece aquella expuesta en la Metodología (que permitió fragmentar la información para construir los datos) en tres sentidos: por un lado, mediante un primer subíndice que acompaña a una A (de argumentación) o T (de tarea) se indica la faceta del conocimiento didáctico en la que fue ubicada la afirmación –E: Epistémica, C: Cognitiva, A: Afectiva, I: Interaccional, M: Mediacional, Ec: Ecológica–; por otro, mediante el segundo subíndice, se indica a qué hace referencia la acepción del objeto sobre el que se quiere decir algo –El: Elementos que conforman al objeto, C: Característica del objeto, P: Propósito del objeto); finalmente, luego del guion, se indica con letras una palabra clave de la descripción o del objeto sobre el que versa la descripción –AD: Actividad Demostrativa, Co: Conjetura/Conjeturación, R: Representación, Ex: Exploración, V: Visualización, D: Demostración, entre otros–.

Por ejemplo, el código $A_E TA_{EI}$ -AD indica que la afirmación se relaciona con Argumentación desde un punto de Epistémico (por ello el A_E), específicamente con elementos de un Término Afin² (por ello el TA_{EI}) relativo a la Actividad Demostrativa (por ello el AD luego del guion). Entendemos que para el lector pueda ser difícil seguir la lectura de los códigos. Por ello dejamos presente en las tablas la columna descripción o acepción.

Los códigos son importantes para el trabajo desde un punto de vista metodológico, porque nos facilita hacer el seguimiento del conocimiento sobre ciertos términos con miras a determinar si hay transformación o no; claro, dos afirmaciones de momentos (ciclos) diferentes codificadas de una manera análoga serían dignas de comparación para determinar si hubo cambios o no.

Tabla 11. Conocimiento epistémico sobre argumentación Estado Base

Término	Interpretación	Acepción	Código
Actividad demostrativa	La actividad demostrativa se constituye de procesos como la visualización, razonamiento, conjeturación, etc. Procesos que componen la actividad demostrativa.	Elementos/procesos que constituyen la actividad demostrativa	$A_E TA_{EI}$ -AD
Conjetura	Una conjetura reporta la respuesta de una tarea	Característica en relación con tarea	$A_E TA_C$ -Co
	Una conjetura no necesariamente debe reportarse utilizando el formato condicional	Característica en relación con estructura	$A_E TA_C$ -Co
Representación	La representación es un proceso principal de la actividad matemática.	Característica en relación con proceso	$A_E TA_C$ -R
	La representación de situaciones implica el uso de una herramienta como un software de geometría dinámica	Característica en relación con recurso	$A_E TA_C$ -R
	Una representación dinámica permite identificar valores que pueden variar y las condiciones iniciales.	Propósito en relación con recurso	$A_E TA_P$ -R
Exploración	La exploración es un proceso principal de la actividad matemática.	Característica en relación con proceso	$A_E TA_C$ -Ex

² Si fuera Acepciones sobre argumento, Tipo de argumento, o Aspectos Metodológicos, se sustituye la TA por A, T o M, respectivamente.

	La exploración es la interacción que se realiza con la construcción para poder solucionar una tarea y conjeturar.	Propósito en relación con tarea Propósito en relación con conjetura	$A_E TA_P$ -Ex
Conjeturación	La conjeturación es un proceso principal de la actividad matemática.	Característica en relación con proceso	$A_E TA_C$ -Co
	La conjeturación es la producción de la hipótesis sobre las condiciones necesarias para dar solución a la tarea.	Característica en relación con condiciones necesarias Propósito en relación con Tarea	$A_E TA_C$ -Co $A_E TA_P$ -Co
Visualización	La visualización es requerida en la exploración y conjeturación	Característica en relación con elemento de otro proceso	$A_E TA_V$ -Co
	La visualización permite identificar relaciones no explícitas entre objetos geométricos de la representación	Propósito con respecto a relación entre objetos	$A_E TA_P$ -Co
Demostración	La producción de demostraciones requiere de herramientas especiales	Características en relación con cómo se produce	$A_E TA_C$ -D

La Tabla 11 sistematiza de mejor manera el conocimiento de carácter epistémico que yo tenía como base, presentado una suerte de codificación relativa a algunas acepciones (propósitos y características) de los términos afines con argumentación. Hacer esta Tabla me permitió darme cuenta de que en las caracterizaciones o propósitos de tales términos afines con argumentación (al momento de hacer este documento sé que se relacionan con este constructo) no hay alguna alusión con este, lo cual no solo ratifica lo dicho antes (en mi discurso tal constructo no estaba presente) sino que plantea un referente de comparación para determinar si en el desarrollo de los demás ciclos hubo alguna transformación que hiciera ostensible la afinidad o relación entre tales términos y argumentación. Si ello fuera así, podríamos caracterizar un cambio en el conocimiento tanto sobre argumentación como de los términos afines, tomando en cuenta asuntos como los puestos en la columna *acepción*. De hecho, esos elementos pueden ser una idea primera de categorías emergentes para caracterizar el conocimiento en los ciclos ulteriores.

Ahora, en cuanto al conocimiento que develan los datos presentados en la Tabla 11 en relación con el término argumentación, este ni siquiera se menciona en

alguna de las evidencias recolectadas para este estadio, lo que lleva a pensar que no era algo de lo que fuera consciente o que tuviera presente como elemento para tener en cuenta dentro de mi ejercicio docente. De hecho, llama la atención que, al responder sobre los procesos de la actividad matemática involucrados en la solución de un problema abierto de conjeturación, menciono constructos que podrían guardar alguna relación con argumentación como representación, exploración, conjeturación, demostración, actividad demostrativa y visualización, pero no argumentación en sí mismo.

Con respecto al término demostración, no hago una mayor precisión de qué es o por qué es importante, pero reconozco que se requieren herramientas especiales para lograr producirlas, sin llegar a decir a qué herramientas algo referencia. Algo similar ocurre con el término actividad demostrativa, al cual solamente le atribuyo que está constituido por procesos como la visualización y el razonamiento.

Para el término conjeturación menciono como características que se trata de la producción de elaboración de la hipótesis sobre las condiciones necesarias para dar solución a un problema; en ese sentido, identifico el constructo como un proceso. Siguiendo esta idea, menciono que la conjetura reporta la solución de una tarea y la identifico como resultado de la conjeturación, que no debe ser reportado en formato condicional; esto es, indico tal término como un producto.

Para los términos de representación, visualización y exploración hago un tratamiento similar de la conjeturación, esto es, hago una breve descripción de en qué consisten o su propósito.

Para mí la representación es el proceso que permite identificar valores y propiedades que se desprenden de una situación inicial. Resalto como una característica que debe existir un recurso o herramienta que medie, por ejemplo, un EGD como GeoGebra. Asociado con los EGD, hablo también de la exploración, no como proceso del mismo nivel que la representación o la conjeturación, sino como la acción que se desprende del uso de un EGD. En este sentido, caracterizar la exploración como la interacción que se realiza con el recurso que genera la representación con el propósito de solucionar una tarea. Debido a que para mí el solucionar una tarea es equivalente a proveer una conjetura, el propósito de la exploración termina siendo el poder producir la conjetura.

Finalmente, en cuanto a la visualización, menciono que permite identificar relaciones no explícitas entre objetos geométricos de la representación. De esta conceptualización es importante resaltar que, hasta este momento, no hay diferencias relevantes entre el proceso de representación y el de la visualización. Sin embargo, si tengo conocimiento de que la visualización es requerida en la exploración y conjeturación.

Conocimiento cognitivo y ecológico sobre argumentación

El conocimiento cognitivo es el asociado a las formas de aprender de los estudiantes o de posibles errores, dificultades u obstáculos que se manifiestan en el aprendizaje de la argumentación o de algún término afín. Los datos que permitieron caracterizar el conocimiento cognitivo sobre la argumentación en el Estado Base se presentan en la Tabla 12

Tabla 12. Conocimiento cognitivo sobre argumentación Estado Base

Afirmación	Interpretación	Descripción	Código
Los profesores del área [de geometría] se percataron de que, al llegar al nivel de octavo, en el que se espera que los estudiantes sean capaces de construir demostraciones formales, estos no tienen las herramientas necesarias para lograrlo.	Los estudiantes de grado octavo no tienen herramientas necesarias para producir demostraciones.	Dificultades relacionadas con la argumentación	A_cTA -Di

Como se refleja de la tabla, el conocimiento de carácter cognitivo, que inclusive alude a asuntos de orden ecológico (por cuanto refiere al conocimiento de una competencia por desarrollar en estudiantes de un nivel escolar específico), tiene que ver con el conocimiento que tengo sobre estudiantes de grado octavo del colegio donde laboro. Esto es, que ellos no tienen herramientas para elaborar o producir demostraciones. Sin embargo, no hay información sobre cuáles son tales herramientas o en qué consisten. Este hecho se convierte en un asunto de seguimiento para los demás ciclos; es decir, pondré principal atención para reconocer si mi discurso o el del grupo de profesores estas herramientas son precisadas.

Conocimiento interaccional sobre argumentación

Se encuentra en esta categoría el conocimiento relacionado con aspectos metodológicos o interacciones que favorecen la argumentación. Los datos que

permitieron caracterizar el conocimiento interaccional sobre la argumentación en el Estado Base se presentan en la Tabla 13.

Tabla 13. Conocimiento interaccional sobre argumentación Estado Base

Afirmación	Interpretación	Descripción	Código
Plazas (2013): En este trabajo se resaltan algunas acciones y posturas adoptadas por el docente y que favorecieron la actividad demostrativa en estudiantes de sexto grado.	Referencia sobre algunas acciones y posturas adoptadas por el docente y que favorecieron la actividad demostrativa: Hay acciones del profesor para favorecer actividad demostrativa	Acciones del profesor para favorecer la actividad demostrativa	$A_I TA-AD$

En este respecto, mi conocimiento se limita a un conocimiento referencial (conocimiento que hace referencia a algo o alguien sin mayor detalle) sobre un estudio que alude a acciones y posturas adoptadas por el docente y que favorecieron la actividad demostrativa en estudiantes de sexto grado; sin embargo, al igual que lo sucedido con mi conocimiento de orden cognitivo, no hay una descripción que dé cuenta de cuáles son esas acciones y por qué favorecen la actividad demostrativa y, por ende, la argumentación. Este se convierte en otro asunto para seguir y decantar transformación de conocimiento al respecto: acciones de gestión del profesor para favorecer la argumentación.

Conocimiento mediacional sobre argumentación

En esta categoría se encuentra clasificado el conocimiento sobre los recursos y sus relaciones con el aprendizaje de la argumentación. Los datos que permitieron caracterizar el conocimiento mediacional sobre la argumentación en el Estado Base se presentan en la Tabla 14

Tabla 14. Conocimiento mediacional sobre argumentación Estado Base

Afirmación	Interpretación	Descripción	Código
Mejía y Molina (2013): Se describe una experiencia de aula en la que se busca favorecer la actividad demostrativa utilizando como mediador del conocimiento al software GeoGebra	Referencia sobre EGD como mediador para favorecer actividad demostrativa.	Características de los EGD para favorecer la actividad demostrativa	$A_M TA-AD$

Nuevamente, en esta faceta de conocimiento se encuentra solo un conocimiento referencial de un documento en el que hay información de que el usar EGD como recurso para favorecer la actividad demostrativa. Sin embargo, no hago explícitas cómo dicho

recurso es un mediador ni, de manera general, cómo favorece la argumentación o el abordaje de tareas de argumentación. Este, como ha sucedido antes con aspectos de otras facetas, se convierte en un asunto al que haré seguimiento.

Conocimiento epistémico sobre tareas

En esta categoría se encuentra descrito el conocimiento correspondiente a características, propósitos o elementos de una tarea. Los datos que permitieron caracterizar el conocimiento epistémico sobre las tareas en el Estado Base se presentan en la Tabla 15

Tabla 15. Conocimiento epistémico sobre tareas estado base

Afirmación	Interpretación	Descripción	Código
El tipo de actividades que se desarrollan en los cursos de geometría en los grados de sexto y séptimo no está alineado con lo que se espera que los estudiantes sean capaces de hacer en octavo y noveno [demostraciones].	Tarea se entiende como actividad que se desarrolla en los cursos.	Característica de una tarea como actividad	$T_E A_C$
	Las tareas deben favorecer a que los estudiantes sean capaces de hacer demostraciones.	Propósito de una tarea en relación con demostración	$T_E A_P-D$
[Discusión con el asesor producto de la afirmación anterior]: Esas actividades son tanto para la clase como de tarea.	Las tareas son actividades que los estudiantes deben hacer fuera de clase.	Característica de una tarea como actividad extra-clase	$T_E A_C$
El grupo Le Preuve, ha trabajado desde la planeación de las clases, procurando llevar actividades innovadoras en las que se evidencien la vivencia de las ocho fuerzas culturales y también que privilegien la visualización, razonamiento, conjeturación y demás procesos propios de la actividad demostrativa.	Las tareas deben favorecer procesos de la actividad demostrativa como la visualización, razonamiento, conjeturación.	Propósito de una tarea en relación con demostración	$T_E T_P-D$
	Se hace uso de la expresión tarea innovadora. Tarea innovadora implica el uso de EGD [dicho en la discusión de la tabla como ejercicio retrospectivo].	Acepción: Característica de una tarea innovadora	$T_E A_C$

Con respecto al elemento tarea, es necesario decir que mi conceptualización de tarea no se distingue de actividad de clase. En otras palabras, uso de manera indistinta los términos tarea y actividad. De los ejercicios de comparación que se adelantaron durante el Ciclo 1 de investigación, se logra depurar que algunas de las características que debe tener una tarea es que son propuestas que genera el docente

para que el estudiante desarrolle de manera extra-clase. La tarea, en este sentido, era visto como algo natural dentro de la rutina de planeación de la clase, pero no hay evidencia de que haya existido un conocimiento especializado relacionado con el diseño y la implementación de estas.

Pese a lo descrito anteriormente, si hay un reconocimiento de que las tareas deben favorecer la elaboración de la demostración, aunque no menciono cuáles deben ser sus características para ello. Asociada con esta concepción hay una visión de que el propósito de una tarea debe ser el de favorecer la actividad demostrativa al promover los procesos como visualización, razonamiento, conjeturación, etc.

Conocimiento mediacional y cognitivo sobre tareas

En esta categoría se encuentra relacionado el conocimiento sobre los recursos en relación con las tareas, elementos de las tareas o formas de solucionar, diseñar o gestionar tareas. Los datos que permitieron caracterizar el conocimiento mediacional relativo a tareas en el Estado Base se presentan en la Tabla 16.

Tabla 16. Conocimiento mediacional sobre tareas estado base

Afirmación	Interpretación	Descripción	Código
Se espera que las tareas que requieren el uso de herramientas tecnológicas generen una serie de dinámicas diferentes en las que se explore y potencie habilidades y capacidades de una forma distinta, y que se logre impactar de manera positiva la forma en la que los estudiantes aprenden	Las tareas que requieren el uso de herramientas tecnológicas - EGD- impactan de manera positiva en la forma de aprender de los estudiantes.	Propósito de tarea en relación con recurso digital	$T_M A_P - G^3$
[continuación de lo anterior] Específicamente utilizando el software de geometría dinámica GeoGebra, se realizó una construcción que permitió, además de visualizar la situación, explorar cambiando las longitudes de los lados de los polígonos involucrados, mediante el movimiento de sus extremos, y observando cómo variaba el área de cada uno.	Específicamente, una tarea en el que se exige el uso de GeoGebra permite visualizar situaciones, construcciones y explorarlas y medir longitudes de segmentos y áreas de polígonos		$T_M A_P - G$

³ La letra G en la parte final del código indica que la interpretación se asocia con el recurso EGD

[continuación de lo anterior] Finalmente, se estableció una conjetura sobre las condiciones de las alturas de los polígonos para cada uno de los casos y se procedió a verificarla utilizando el software como herramienta.	Una tarea en el que se exige el uso de GeoGebra puede ser utilizado como herramienta para la verificación de conjeturas	$T_M A_P-G$
---	---	-------------

En el fragmento que sirvió de insumo (partido entre párrafos) se hace referencia a tareas que requieren el uso de herramientas tecnológicas. En el primero de tales párrafos se alude a mi conocimiento sobre el propósito general que yo tendría al exigir el uso de tal tipo de recurso en el abordaje de una tarea.

Luego, en los párrafos siguientes, continuación del primero, detallo o desmenuzo aquel propósito general indicado los procesos o actividades matemáticas se pueden potenciar con el uso de tal tipo de artefacto (GeoGebra en especial). Sin embargo, se echa en falta alguna alusión a cómo tareas con tal rasgo característico puede potenciar la argumentación o a cómo, al favorecer otras actividades o procesos, puede potenciar a aquella. Este, sin duda, se convierte en un asunto por seguir, con miras a precisar si en ciclos posteriores hay alguna alusión al respecto.

Conocimiento ecológico sobre tareas

En esta categoría se reportan los conocimientos sobre las tareas que evocan de alguna manera elementos curriculares. Los datos que permitieron caracterizar el conocimiento ecológico sobre las tareas en el Estado Base se presentan en la Tabla 17

Tabla 17. Conocimiento ecológico sobre tareas Estado Base

Afirmación	Interpretación	Descripción	Código
El tipo de actividades [tareas] que se desarrollan en los cursos de geometría en los grados de sexto y séptimo no está alineado con lo que se espera que los estudiantes sean capaces de hacer en octavo y noveno [demostraciones].	Las tareas de los cursos de geometría de sexto y séptimo no aportan elementos suficientes para que en octavo y noveno los estudiantes generen demostraciones	Aspecto curricular	$T_{Ec} T A_C-D$

Con relación a las tareas, reconozco que debe existir una relación entre las tareas que se proponen en los grados sexto y séptimo para que los estudiantes en grados de octavo y noveno logran producir demostraciones. Sin embargo, no menciono cuáles son los elementos que debe aportar una tarea para que los estudiantes adquieran los prerrequisitos necesarios previo al trabajo demostrativo.

Síntesis de Conocimiento Estado Base

A continuación, presento dos tablas en las que expongo, para cada objeto central del estudio (argumentación o términos afines, y tarea), la cantidad de códigos por categoría (Acepciones, Términos afines, Tipos de argumentos, Aspectos metodológicos) presentes por cada una de las facetas de conocimiento. Ello lo hago con dos objetivos: el primero, tener un panorama a partir del cual pueda apoyar algunos comentarios relativos a los resultados del análisis hecho; el segundo, tener un referente para luego realizar el análisis de transformación de conocimiento (cambios en los datos de frecuencia en tablas análogas relativas al estado del Ciclo 1, indicarían alguna suerte de transformación).

Tabla 18. Síntesis de conocimiento de Argumentación Estado Base

Argumentación		Categorías emergentes			
		Acepciones	Términos afines	Tipos de argumentos	Aspectos metodológicos
Categorías teóricas	Epistémica	0	9	0	0
	Cognitiva	0	1	0	0
	Afectiva	0	0	0	0
	Interaccional	0	1	0	0
	Mediacional	0	1	0	0
	Ecológica	0	1	0	0

Tal como se aprecia en la Tabla 18, mi conocimiento sobre la argumentación en este estado estaba centrado más en la categoría de *términos afines*. De acuerdo con lo presentado en el análisis (y que se ve reflejado en la Tabla 18) de conocimiento sobre la argumentación hay varios asuntos importantes que resaltar. En primera instancia, en mi discurso no encontré evidencia de un conocimiento sobre la argumentación. De los datos analizados se puede identificar que hay referencias y alusiones a conceptos que, en este momento, puedo indicar que son términos afines a la argumentación. De dichos términos logro indicar algunas características o propósitos, sin embargo, desde los datos no se logra establecer de qué manera relaciono estos términos con la argumentación.

Por otro lado, a lo largo del análisis respecto a los términos afines a argumentación, hubo asuntos que pueden ser susceptibles de seguimiento para ver si hay transformación de conocimiento. El primero de ellos, generado a partir del análisis del conocimiento epistémico, tiene que ver con cómo se relacionan los términos

actividad demostrativa, conjetura, representación, exploración, conjeturación, visualización y demostración con la argumentación; en ciclos posteriores sería afortunado ver si explícito alguna de tales relaciones –si es el caso, ello daría cuenta de una transformación de conocimiento sobre argumentación–. Otros asuntos que se desprenden del análisis del conocimiento de las otras categorías, y que valdría la pena seguir para ver potenciales transformaciones tienen que ver con, por ejemplo, preguntas como las siguientes: ¿qué herramientas necesitan los estudiantes para poder producir demostraciones? (conocimiento cognitivo), ¿qué acciones debe tomar el profesor para favorecer la actividad demostrativa? (conocimiento interaccional) o ¿cómo GeoGebra favorece la argumentación o el abordaje de tareas de argumentación?

Presento ahora una tabla análoga a la Tabla 18, pero en relación con el objeto *tarea* (Tabla 19).

Tabla 19. Síntesis de conocimiento de Tarea Estado Base

Tareas		Categorías emergentes			
		Acepciones	Tipos de tarea	Elementos de tareas	Criterios de diseño
Categorías teóricas	Epistémica	3	1	0	0
	Cognitiva	3	0	0	0
	Afectiva	0	0	0	0
	Interaccional	0	0	0	0
	Mediacional	3	0	0	0
	Ecológica	1	0	0	0

En relación con el conocimiento del objeto tarea se logra inferir que la conceptualización que tenía estaba relacionada con actividades que los estudiantes debían llevar a cabo extra-clase. De ahí que la palabra *tarea* no apareciera dentro de mi discurso, sino que se usaba el término *actividad* para referirme a lo que con mi conocimiento actual puedo asociar a una *tarea*.

De la Tabla, resalto que mi conocimiento está más relacionado con la faceta mediacional debido a que, en ese momento, un asunto que llamaba fuertemente mi atención era el uso del EGD GeoGebra como característica de innovación, ya fuera para el diseño o solución de tareas o como recurso para la enseñanza durante las clases.

Relacionando esta característica de mi conocimiento de tarea con el de argumentación, evidencio que no se menciona ni se evoca alguna aproximación a cómo se relacionan la argumentación y las tareas; por consiguiente, no está presente en mi discurso un conocimiento relativo algo sobre tareas que favorezcan la argumentación.

Al igual que con el conocimiento asociado a la argumentación, el análisis del conocimiento sobre *tareas* deja ver unos asuntos que podría ser interesante revisar en estados posteriores, para establecer potenciales transformaciones. Inicialmente, cuál es la relación entre las tareas y la argumentación, específicamente, para establecer algún conocimiento sobre tareas que favorecen la argumentación.

Otros cuestionamientos relacionados a las diferentes facetas podrían ser de interés para hacer seguimiento son: ¿qué características debe tener una tarea que favorezca la producción de demostraciones? (conocimiento epistémico), ¿cuáles son los beneficios de proponer una tarea que exija el uso de los EGD para los estudiantes?, puntualmente ¿cómo puede el uso de un EGD en el marco de la solución de una tarea favorecer la argumentación o algún otro proceso? (conocimiento mediacional) y ¿cuáles son los elementos que debe aportar una tarea para que los estudiantes adquieran los prerrequisitos necesarios previo al trabajo demostrativo? (conocimiento ecológico).

4.1. Ciclo 1

Este ciclo de investigación tuvo como escenario el primer semestre del programa de Maestría en Docencia de la Matemática ofertado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Este ciclo se diferencia de los demás ciclos de investigación en dos sentidos: primero, el problema inicial fue delimitado por el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, por lo tanto, las acciones fueron planeadas y ejecutadas por sus integrantes; el segundo, es que está concentrado en mi conocimiento y no el equipo *Le Preuve*.

Al finalizar este ciclo, se caracterizó mi estado de conocimiento, al cual denominé *estado de conocimiento 1*. Ambos, el *estado de conocimiento base* y el *estado de conocimiento 1* se refieren solo a mí, dadas las connotaciones mismas que tuvo el inicio del proceso investigativo. A continuación, se presenta la descripción correspondiente a cada una de las fases de desarrollo del ciclo.

Fase 1. Delimitación del problema

El problema identificado por el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría es que hay dificultades en las prácticas de los profesores de geometría asociadas al diseño e implementación de tareas mediadas por tecnologías digitales. Consideran que estas dificultades son manifestación o están causadas por falencias en el conocimiento didáctico matemático sobre argumentación y tareas.

Fase 2. Diseño del plan de acción

Como plan de acción, se genera la propuesta del énfasis de la MDM para la cohorte 2020-I denominada “Conocimiento del profesor de matemáticas para el diseño de tareas de Argumentación mediadas por la tecnología digital”. Con la propuesta de énfasis, se tuvo la intención de que los trabajos de grado de los estudiantes de maestría que se vincularan estuvieran enfocados en describir el conocimiento didáctico-matemático de los profesores (vinculados a la cohorte 2020) relacionado con el diseño y gestión de tareas que favorezcan la Argumentación en geometría con mediación de Entornos de Geometría Dinámica (EGD).

Debido a que los estudiantes adscritos al programa de Maestría no teníamos conocimiento de esta problemática, realizamos propuestas de anteproyecto que no necesariamente tenían como foco de interés nuestro conocimiento didáctico matemático. Por lo tanto, el plan de acción debía generar que nuestros intereses investigativos viraran y se alinearan con los intereses investigativos de los profesores del programa.

Los investigadores del grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría se convirtieron en los profesores encargados de la cohorte y desde este rol generaron la planeación completa de los seminarios que cursamos los profesores que nos vinculamos a la maestría. Los seminarios que cursamos durante el primer semestre fueron pensados para que se generara una reflexión que llevara a problematizar nuestro conocimiento didáctico-matemático sobre argumentación y diseño de tareas que la promovieran.

La Tabla 20 muestra una breve descripción de los seminarios del primer semestre, sus propósitos y las tareas que, desde nuestro punto de vista (del asesor de

este trabajo de grado y mío) suscitaron los principales insumos para el ciclo. Concebimos estas tareas como la concreción del plan de acción para este ciclo.

Tabla 20. Descripción de Seminarios

Seminario	Descripción	Tareas que generaron los insumos
Innovación / Investigación	Se concibe para aportar a la construcción del anteproyecto de trabajo de grado. Principalmente, se trabajó la caracterización del campo de estudio que enmarca el problema de investigación, es decir, el Conocimiento Didáctico Matemático para el diseño y gestión de tareas mediadas por un EGD que favorezcan la producción de argumentos geométricos	Hacer avances de diversos apartados del anteproyecto de trabajo de grado: delimitación del problema, justificación y antecedentes.
Diseño y desarrollo curricular	Se abordan aspectos relacionados con el diseño de tareas, particularmente, Elementos teóricos y prácticas sobre el diseño de tareas (modelo para la descripción, análisis y modificación de secuencias de tareas); caracterización de tareas que se diseñan usando como recursos elementos con EGD (dominio epistemológico de validez y realimentación del programa); principios para el diseño de tareas que promuevan la Argumentación.	Diseñar una tarea de argumentación siguiendo la propuesta de análisis de instrucción de tareas propuesta por Gómez et al. (2018).
Profundización en matemáticas elementales	Se abordan aspectos relacionados con la Argumentación. Conocimiento especializado sobre el proceso de Argumentación en matemáticas (y términos relacionados como teorema, sistema teórico, conjetura, argumento, tipos de argumentos, etc.) mediante la experimentación de una actividad matemática que toma lugar cuando se abordan problemas de conjeturación y demostración con el uso de Entornos de Geometría Dinámica (EGD). Elementos del EOS (e.g., configuración de objetos Primarios) para analizar el conocimiento involucrado en la resolución de tareas propuestas en el curso o que puede estar involucrado en tareas que los estudiantes diseñan.	Solucionar tareas de geometría para, posteriormente, identificar argumentos y tipificarlos. Diseñar una tarea de argumentación advirtiendo un análisis <i>a priori</i> de actividad matemática focalizada en la argumentación.

Fase 3. Desarrollo del plan de acción

Durante el desarrollo de los seminarios someramente descritos en la Tabla 20 se dio de manera presencial durante el primer mes, posteriormente cambiamos a la modalidad virtual. La mayoría de las producciones de los seminarios de Diseño y Desarrollo Curricular (DDC) y de Profundización en Matemáticas Elementales (PME) resultaba de trabajo en equipos de dos o tres personas, mientras que para el

seminario de Innovación/Investigación (II) la mayoría de los documentos fueron elaborados en los equipos de trabajo de grado, por lo cual trabajé sola en su escritura.

De las tareas descritas en la Tabla 20 elegí insumos principales i) la versión final del anteproyecto de trabajo de grado producido en el seminario II, especialmente la sección de delimitación del problema, justificación y antecedentes, y ii) la solución a la tarea final propuesta para los seminarios de DDC y PME. La elección de estos documentos se debe, principalmente, a que fueron generados a partir de las soluciones de tareas que propusieron los profesores con el objetivo de evaluar los conocimientos adquiridos a lo largo del semestre. Por lo tanto, los textos dan cuenta del conocimiento al final el proceso formativo del primer semestre.

Fase 4. Análisis de conocimiento del Estado 1

Para el periodo intersemestral nos fue propuesta una guía con la cuál pudimos iniciar el proceso analítico que llevó, en mi caso particular, a la consolidación de los datos necesarios para caracterizar y describir mi conocimiento didáctico-matemático que tenía al finalizar el primer semestre del programa de maestría (Estado 1 individual).

Los documentos producidos a la luz de las tareas que solucionamos mientras cursábamos los seminarios de primer semestre, junto con el diario personal, fueron organizados digitalmente (de acuerdo con la sugerencia de procedimiento contenida en la guía intersemestral). Se ubicaron los archivos en una carpeta y se organizaron especificando el tipo de documento; por ejemplo, si correspondía a una tarea de seminario, a una versión del nuevo anteproyecto o a un diario personal. Debido a que son dos los elementos de interés, se realizó un proceso de fragmentación y depuración en el que se leyeron todos los registros generados en los documentos y se seleccionaron afirmaciones en las que aparecieran las palabras “tarea”, “argumentación” o términos asociados (explicación, argumento, justificación, razonamiento, tipos de argumento, etc.). Las afirmaciones que fueron seleccionadas de la depuración fueron organizadas en las filas de una tabla (Anexo 3. Tabla de datos Estado 1) y se constituyeron como los datos que se analizaron para generar la descripción de conocimiento.

Una vez se terminó la tabla con los datos correspondientes, se generó un texto descriptivo en el que se sintetizan los hallazgos del análisis, es decir, se hace explícita

la caracterización del estado de conocimiento. De manera similar a lo hecho con el estado de conocimiento base, este texto incluye la caracterización del conocimiento de acuerdo con las categorías teóricas (i.e., facetas de la dimensión didáctica del conocimiento del profesor).

Conocimiento epistémico sobre argumentación

La Tabla 21 presenta los datos que permitieron caracterizar el conocimiento epistémico de la argumentación de los objetos involucrados y una descripción que pretende “tipificar” la conceptualización que se logra inferir de la interpretación.

Tabla 21. Conocimiento epistémico sobre argumentación Estado 1

Término	Afirmación	Interpretación	Descripción	Código
Argumentación	Hasta el momento, lo que se ha concluido después de fase de revisión documental, es que el proceso articulador de estos dos marcos es el proceso de argumentación entendido como el proceso por medio del cual se hace visible el pensamiento/razonamiento.	La argumentación es el proceso por medio del cual se hace visible el pensamiento/razonamiento.	Rasgo característico	$A_E A_C$
Garantía	[Durante la solución de la tarea] la exploración realizada en cada situación fue distinta, por lo que las garantías que sustentaban cada argumento podían cambiar.	La garantía es algo que sustenta un argumento.	Elemento de argumento	$A_E A_E$ -Ga ⁴
Garantía		Garantías diferentes implican tipos de argumentos diferentes.	Elemento de argumento	$A_E T_C$ -Ga
Argumento	Diversos tipos de argumentos pueden ser generados por diversas formas de exploración.	Diversos tipos de argumentos pueden ser generados por diversas formas de exploración.	Tipo de argumento	$A_E T_C$ -Ex
Argumento deductivo	[Se encontraron argumentos deductivos] en la demostración de la segunda construcción.	Los argumentos deductivos aparecen en demostraciones	Tipos de argumentos según momento	$A_E T_C$ -Dd ⁵

⁴ Las letras Ga al finalizar el código indican que el término al que está asociada la afirmación es Garantía

⁵ Las Letras Dd al finalizar el código indican que el término que está asociado a la afirmación es argumento deductivo

Argu- mento ab- ductivo	[Se encontraron argumentos abductivos] cuando al solucionar problemas en donde ya se conoce la asección dada en el enunciado, y se busca realizar una construcción para buscar los datos que justifiquen el resultado al que se quiere llegar, es decir, a esa asección.	En los argumentos abductivos se buscan datos para justificar una asección	Tipos de argumentos – propósito	$A_E T_P$ -Ad ⁶
Argu- mento in- ductivo	[Se encontraron argumentos inductivos] en el paso final de la primera construcción: al activar la herramienta “rastros”, se están generando un sinnúmero de datos particulares para llegar a la asección que en la construcción corresponde a la de una parábola.	Los argumentos inductivos surgen cuando se estudian varios datos particulares y se llega a una asección.	Tipos de argumentos según momento	$A_E T_C$ -Id ⁷
Actividad demostra- tiva	El constructo "Actividad Demostrativa" propuesto por el grupo AEG de la Universidad Pedagógica, es entendido por el grupo La Preuve como una perspectiva sociocultural del aprendizaje de la geometría que permite potenciar la comprensión de los hechos geométricos y sus justificaciones al apuntar a la validación de dichos hechos geométricos en un sistema teórico	La actividad demostrativa es una perspectiva sociocultural del aprendizaje de la geometría.	Característica de la actividad demostrativa – aprendizaje	$A_E T A_C$ -AD
Actividad demostra- tiva	Sobre justificación del trabajo de grado aludiendo a lineamientos curriculares: Con el trabajo de grado [...] se pretende ser más	La actividad demostrativa potencia la comprensión de hechos geométricos y sus justificaciones al apuntar a la validación de dichos hechos en un sistema teórico.	Característica de la actividad demostrativa – validación	$A_E T A_C$ -AD
Razona- miento	Sobre justificación del trabajo de grado aludiendo a lineamientos curriculares: Con el trabajo de grado [...] se pretende ser más	Promover el desarrollo de competencia de razonamiento por parte de los	Característica del razonamiento	$A_E T A_C$ -Ra ⁸

⁶ Las letras Ad al finalizar el código indican que el término que está asociado a la afirmación es argumento abductivo

⁷ Las letras Id al finalizar el código indican que el término que está asociado a la afirmación es argumento inductivo

⁸ Las letras Ra al finalizar el código indican que el término que está asociado a la afirmación es razonamiento

consciente de aspectos que influyen en el desarrollo de competencia de razonamiento.	estudiantes implica una toma de conciencia, por parte del profesor, de los aspectos que influyen para ello.
--	---

La Tabla 21, al igual que la Tabla 11 presentada en el Estado Base sistematiza de mejor manera el conocimiento de carácter epistémico en el Estado 1. Aparecen en esta tabla términos que, no solo no aparecieron anteriormente en la Tabla 11, sino que están relacionados directa o indirectamente con la argumentación. La evidencia de esto se encuentra en que tanto las afirmaciones como las interpretaciones de palabras como razonamiento se hace una mención explícita de la argumentación, mientras que en otras como garantía, se encuentra la palabra argumento que, como se describió en el estado anterior, concibo como producto de la argumentación.

Con respecto a *argumentación*, identifico que al finalizar mi primer semestre de maestría logré afianzar una primera definición sobre este constructo. Para mí, (en ese momento) lo concibo como el proceso por medio del cual se hace visible el razonamiento. Adicionalmente, encontré aproximaciones a definiciones, menciones de características o elementos de algunos términos afines como lo son el razonamiento y argumento.

Sobre el *razonamiento* aún no se constituye dentro de mi discurso elementos suficientes que den cuenta de una definición, pero sí un rasgo característico: es una “competencia”, y planteo que esta debe ser promovida en los estudiantes. En este momento de la investigación, para mí, una condición que se requiere si se busca promover el razonamiento es una toma de conciencia sobre los aspectos que influyen en ello. No menciono qué aspectos son los involucrados y tampoco es claro a qué me refiero con la toma de conciencia.

En cuanto a *argumento*, las menciones que realicé aluden principalmente a sus elementos, es decir, la terna compuesta por dato, aserción y garantía, y algunas relaciones entre estos. No hay una definición relativa a este constructo. Principalmente, se reconoce que *garantía* es lo que sustenta un argumento, sin indicar qué puede ser aquello que sustenta o su naturaleza. Preciso, también, que el elemento *garantía* permite identificar diferentes argumentos (“el uso de diferentes garantías genera

diferentes argumentos); sin embargo, no advierto de manera explícita cómo es la relación o cómo el tipo de garantías define el tipo de argumento. Pese a esto último, caracterizo tipos de argumentos de la siguiente manera:

Los argumentos *deductivos* aparecen en demostraciones.

Los argumentos *inductivos* surgen cuando se estudian varios datos particulares y se llega a una aserción.

En los argumentos *abductivos* se buscan datos para justificar una aserción.

En estas caracterizaciones, las dos primeras se basan en el momento o circunstancia en el que estos surgen; para el caso último, la caracterización se fundamenta en indicar un propósito.

Como último aspecto relevante del conocimiento asociado a los términos afines de la argumentación, está el conocimiento del constructo de la actividad demostrativa como marco de referencia teórico. La forma en la que empleo este término dentro de mi discurso permite afirmar que identifico que mediante ese tipo de actividad se potencia la comprensión de hechos geométricos y sus justificaciones al apuntar a la validación de dichos hechos geométricos en un sistema teórico. Adicionalmente, caracterizo la actividad demostrativa como una perspectiva sociocultural del aprendizaje de la geometría.

Conocimiento interaccional sobre argumentación

Los datos que permitieron caracterizar el conocimiento interaccional sobre la argumentación en el Estado 1 se presentan en la Tabla 22.

Tabla 22. Conocimiento interaccional sobre argumentación Estado 1

Afirmación	Interpretación	Descripción	Código
[El propósito de mi TG es hacer una] reflexión conjunta sobre el ejercicio docente para el replanteamiento de las dinámicas de aula (rutinas de clase, tipos de tarea, rol del docente, el papel de las herramientas tecnológicas, etc.) de la asignatura de geometría para favorecer el proceso de argumentación.	El proceso de argumentación en el aula se puede favorecer a partir de replantear las dinámicas de aula tales como rutinas de clase, tipos de tarea, rol del docente y el papel de las herramientas tecnológicas.	Aspectos metodológicos que favorecen la argumentación	<i>A_IM-A</i>

[Es necesario] indagar sobre las características que debe tener un ambiente de enseñanza y de geometría en dónde se promueva el desarrollo de la actividad demostrativa.	Promover "Actividad Demostrativa" en el aula implica considerar unas características especiales del ambiente de enseñanza.	Aspectos metodológicos para promover la actividad demostrativa	$A_I T A_{AD}$
En [mis] clases de Geometría, aunque se promueve la participación de los estudiantes, no se logra evidenciar un progreso en la capacidad de los estudiantes para producir argumentos.	Promover Argumentación en el aula implica algo más que promover la participación de los estudiantes	Aspectos metodológicos que favorecen la argumentación	$A_I M-A$
Otro aporte importante que podría tener este trabajo de grado es el de visibilizar la experiencia de la construcción de acuerdos sobre metodologías de clase cuando se debe favorecer un proceso en particular, en este caso, el de la Argumentación.	Promover Argumentación en el aula implica acuerdos entre profesores sobre metodologías de clase.	Aspectos metodológicos que favorecen la argumentación	$A_I M-A$
Sobre justificación del trabajo de grado aludiendo a lineamientos curriculares: Con el trabajo de grado [...] se pretende ser más consciente de aspectos que influyen en el desarrollo de competencia de razonamiento.	El profesor debe ser más consciente de aspectos que influyen en el desarrollo de competencia de razonamiento.	Aspectos metodológicos que favorecen la argumentación	$A_I M-A$

Un aspecto que sobresale para mí sobre *argumentación* es que se requieren aspectos particulares en las dinámicas de la clase, por lo cual, una característica importante que le otorgo a este constructo es que implica metodologías de enseñanza particulares. Dentro de estos aspectos resalto las interacciones entre estudiantes y con el profesor. De acuerdo con lo reportado en mi discurso, considero que no es suficiente garantizar que los estudiantes participen, sin embargo, no profundizo ni explícito entonces qué debe pasar adicionalmente para que las interacciones entre estudiantes y el profesor lleven a la producción de argumentos.

Con respecto a la actividad demostrativa afirmo que el promoverla en el aula implica considerar que esas características especiales que debe tener un aula de clase de geometría son: promover las interacciones en el aula, solucionar problemas abiertos de conjeturación y usar un EGD para abordar los problemas. Esto es un conocimiento que adquirí, ya que, pese a que conocía referencialmente la actividad demostrativa, este conocimiento no era tan amplio y profundo como para identificar que incluía o implicaba aspectos metodológicos.

Conocimiento mediacional sobre argumentación

Los datos que permitieron caracterizar el conocimiento mediacional sobre la argumentación en el Estado 1 se presentan en la Tabla 23

Tabla 23. Conocimiento Mediacional sobre Argumentación Estado 1

Afirmación	Interpretación	Descripción	Código
[Interesa caracterizar] el rol del conocimiento profesional docente en la construcción conjunta de lineamientos curriculares para la mediación de la dinámica de clase en el aula de geometría que favorezca el proceso de argumentación por medio del uso de geometría dinámica.	El proceso de argumentación se favorece con el uso de geometría dinámica	Beneficios del uso del recuento	$A_M M-G$
Es enriquecedor para el docente tener en mente las posibilidades en cuanto al aprendizaje que posibilita la aparición de construcciones suaves y cómo podría aprovecharlas para enriquecer el proceso de conjeturación y argumentación	El proceso de conjeturación y argumentación puede enriquecerse por las construcciones blandas	Beneficios del uso del recuento	$A_M M-G$

Dado que el recurso con el que de manera privilegiada trabajamos tanto en la maestría como en *La Preuve* es GeoGebra, el conocimiento mediacional que puedo describir está asociado con este EGD. Sobre GeoGebra logré especificar que el proceso de argumentación puede ser enriquecido por el trabajo de construcción y exploración que puede realizarse.

Conocimiento epistémico sobre tareas

Los datos que permitieron caracterizar el conocimiento epistémico sobre las tareas en el Estado 1 se presentan en la Tabla 24

Tabla 24. Conocimiento Epistémico sobre Tareas Estado 1

Afirmación	Interpretación	Descripción	Código
Replanteamiento de las dinámicas de aula (rutinas de clase, tipos de tarea, rol del docente, el papel de las herramientas tecnológicas, etc.) de la asignatura de geometría para favorecer el proceso de Argumentación.	Replantear tipos de tareas favorece el proceso de Argumentación	Características de tipos de tareas	$T_E T_C$
Sería interesante entender cómo estos conocimientos condicionan o	Tareas es una propuesta pedagógica que llevo a la clase.	Características de las tareas	$T_E A_C$

limitan las propuestas pedagógicas de los docentes [tareas y su gestión].	El diseño y gestión de tareas implica poner en juego los conocimientos del profesor.	Características del diseño y gestión de una tarea	T_ECD_C
Esto [búsqueda de innovación pedagógica] se hace evidente al notar que muchos colegas buscan cada vez proponer tareas distintas y desafiantes a los estudiantes	Proponer tareas desafiantes y distintas es una evidencia de la búsqueda de innovación pedagógica	Característica de tareas	T_EA_C
Se ha trabajado desde la planeación de las clases, procurando llevar tareas innovadoras en las que se evidencien la vivencia de las ocho fuerzas culturales y también que privilegien el proceso de Argumentación	Las tareas innovadoras hacen parte de la planeación de clase.	Características de tarea	T_EA_C
	Las tareas innovadoras deben favorecer el proceso de argumentación.	Propósito de una tarea	T_EA_P-A
Los hallazgos de diversos investigadores han permitido identificar como elemento básico proponer a los estudiantes tareas desafiantes	Proponer tareas desafiantes es un elemento básico para promover la argumentación	Característica de una tarea de argumentación	T_ET_C-A
La actividad propuesta durante la clase es efectivamente una tarea de aprendizaje	Una tarea es una actividad que se propone tanto en la clase como fuera de ella.	Característica de una tarea	T_EA_C
Se esperaba del estudiante que realizara el proceso de construcción, exploración y conjeturación, por lo cual se cumple la premisa principal de la tarea y es generar la oportunidad para que el estudiante, por medio de acciones intencionadas, ponga en juego sus conocimientos para la solución del problema planteado.	Una tarea de argumentación debe promover procesos como construcción, exploración y conjeturación.	Propósito de una tarea de argumentación	T_ET_C-A
	Una tarea pretende generar oportunidades para que el estudiante, por medio de acciones intencionadas, ponga en juego sus conocimientos para su solución.	Propósito de una tarea	T_EA_P
Siempre procuré que las secuencias de tareas permitieran hacer un tránsito entre lo concreto y lo abstracto	Una secuencia de tareas debe favorecer el tránsito de lo concreto a lo abstracto	Característica de una secuencia de tareas	$T_EA_C-ST^9$
Las tareas que propongo siempre siguen la misma estructura en la que se busca encontrar un patrón o	La tarea que favorezca la argumentación debe solicitar un patrón o invariante	Característica de una tarea de argumentación	T_ET_C-A

⁹ Las Letras ST al finalizar el código indican que el término que está asociado a la afirmación es secuencia de tareas

invariantes y luego se busca llegar a una generalización o conjetura.	y llegar una generalización o conjetura.	
Las tareas [que propongo] son más bien secuencias de tareas en las que se alternan recursos distintos y se proponen a los estudiantes actividades muy puntuales con esos recursos.	Una secuencia de tareas es un conjunto de tareas.	Característica de una secuencia de tareas $T_E A_C$ -ST
[Se encontraron argumentos abductivos] cuando al solucionar problemas en donde ya se conoce la aserción dada en el enunciado, y se busca realizar una construcción para buscar los datos que justifiquen el resultado al que se quiere llegar, es decir, a esa aserción.	Tareas cuyo enunciado dan la aserción y pretenden que se busque el dato favorecen la producción de argumentos abductivos	Característica de una tarea que favorece la producción de argumentos abductivos $T_E T_C$ -Ad

Sobre las tareas logré identificar varios y nuevos aspectos que caracterizan mi conocimiento sobre ello. Inicialmente, defino como tareas aquellas propuestas pedagógicas que un profesor lleva a sus estudiantes con el objetivo de ofrecerles oportunidades para que, por medio de acciones intencionadas, ellos pongan en juego sus conocimientos. Una tarea puede proponerse para ser abordada tanto en clase como fuera de ella.

Aparecen dentro de mi discurso alusiones a características que debe tener una tarea para favorecer la argumentación. Puntualmente, para mí en este momento una tarea que favorezca la argumentación debe solicitar un patrón o invariante y llegar a una generalización o conjetura. Por otra parte, reconozco que una secuencia de tareas, es decir, un conjunto de tareas, que promuevan la argumentación debe tener la particularidad de favorecer el tránsito entre lo concreto y lo abstracto ya que implica procesos como la construcción, exploración y la conjeturación.

Adicionalmente, manifiesto dentro de mi conocimiento de tipos de tareas que pueden existir características en el enunciado que genere que el estudiante produzca distintos tipos de argumentos. En particular, tareas cuyo enunciado dan la aserción y pretenden que se busque el dato favorecen la producción de argumentos abductivos.

Como una consecuencia de reconocer características especiales que debe cumplir una tarea de argumentación, también comienzo a mencionar que se requieren conocimientos especializados por parte del profesor para poder diseñar y gestionar

tareas de ese tipo. Sin embargo, no especifico qué conocimiento es el involucrado en estas dos acciones.

Conocimiento cognitivo sobre tareas

Los datos que permitieron caracterizar el conocimiento cognitivo sobre las en el Estado 1 se presentan en la Tabla 25

Tabla 25. Conocimiento Cognitivo sobre Tareas Estado 1

Afirmación	Interpretación	Descripción	Código
[Pensando en el diseño de tareas] Para establecer las posibles soluciones de la tarea utilizamos como estrategia el “obligarnos” a encontrar la forma de realizar una construcción y explorarla utilizando solamente las herramientas de GeoGebra conocidas por los estudiantes	Un recurso para diseñar tareas es establecer posibles soluciones de la tarea utilizando las herramientas de GeoGebra conocidas por los estudiantes.	Conocimientos que pone en juego un estudiante para resolver una tarea	T_CCD

En la afirmación y su interpretación se evidencia un conocimiento de tipo cognitivo sobre tarea que tiene que ver con un aspecto que se debe tener en cuenta en la práctica de diseñar: establecer posibles soluciones que los estudiantes podrían generar de la tarea, así como el identificar el conjunto de requerimientos en cuanto a conocimientos previos y al manejo del recurso con el que se espera que generen la actividad. En el caso de GeoGebra, es necesario tener claridad sobre qué herramientas son conocidas por los estudiantes, cuál es el nivel de manejo que tienen del entorno, etc.

Conocimiento afectivo sobre tareas

Los datos que permitieron caracterizar el conocimiento afectivo sobre las en el Estado 1 se presentan en la Tabla 26

Tabla 26. Conocimiento afectivo sobre Tareas Estado 1

Afirmación	Interpretación	Descripción	Código
Adicionalmente, el buscar que las tareas ofrezcan la posibilidad de tener actividades en clase que sean memorable para que, de alguna manera, sea significativo para los estudiantes	Las tareas deben generar actividades que sean recordables para los estudiantes.	Motivaciones o expectativas de los estudiantes al resolver una tarea	$T_A A-M^{10}$

¹⁰ La letra M al finalizar el código indica que el término que está asociado a la afirmación es motivación

Relacionado con mi concepción de que el propósito de una tarea es ofrecer oportunidades a los estudiantes para movilizar sus conocimientos, reconozco que es importante que la actividad que deban realizar los estudiantes deba ser significativa para ellos. Una experiencia que sea memorable para el estudiante es importante para garantizar que exista aprendizaje.

Síntesis de conocimiento individual Estado 1

Al igual que en la síntesis de conocimiento del Estado Base, me valdré de dos tablas para mostrar el comportamiento de los datos con relación a las categorías teóricas y emergentes. En la Tabla 27 presento el conteo de los datos de acuerdo con las categorías Acepciones, Términos afines, Tipos de argumentos y Aspectos metodológicos.

Tabla 27. Síntesis de conocimiento de argumentación Estado 1

Argumentación		Categorías emergentes			
		Acepciones	Términos afines	Tipos de argumentos	Aspectos metodológicos
Categorías teóricas	Epistémica	3	3	4	0
	Cognitiva	0	0	0	0
	Afectiva	0	0	0	0
	Interaccional	1	1	0	4
	Mediacional	0	0	0	2
	Ecológica	0	0	0	0

Se puede inferir que en este estado de conocimiento sigue existiendo una predominancia del conocimiento epistémico de términos afines a la argumentación; sin embargo, a diferencia del Estado Base, en este Estado 1 hay acepciones de la argumentación. Así mismo, se encuentran datos relacionados con categorías que antes no reportaban evidencias, por ejemplo, conocimiento interaccional sobre aspectos metodológicos.

Del análisis de conocimiento del Estado 1 resalta, como aspecto principal, la identificación de acepciones de la argumentación como la característica de ser el proceso por medio del cual se hace visible el razonamiento (conocimiento epistémico) y que considero que requiere un ambiente de clase en el que se promueva la argumentación resalto las interacciones entre estudiantes y con el profesor (conocimiento interaccional).

Sigue existiendo presencia en mi discurso de algunos de los términos afines que se mencionaron en el Estado Base, sin embargo, la naturaleza de las afirmaciones en las que se encuentran permite dilucidar nuevas características, por ejemplo, para la actividad demostrativa aludo a que es una perspectiva sociocultural del aprendizaje de la geometría (conocimiento epistémico). En el caso de términos como el razonamiento, relaciones directas o indirectas con la argumentación. Las diferencias correspondientes en la conceptualización se verán de mejor manera en la sección siguiente (Análisis de transformación de conocimiento).

Asuntos que se desprenden del análisis de conocimiento del Estado 1 que quedan como interrogantes que pueden ser resueltos eventualmente: ¿Qué aspectos son los que debe tener en mente el profesor para favorecer el razonamiento?, ¿qué relaciones hay entre tipos de garantías y tipos de argumentos? (conocimiento epistémico) y ¿qué aspectos adicionales deben existir, a parte de la participación en clase, para que los estudiantes produzcan argumentos? (conocimiento interaccional)

Por otra parte, en la Tabla 28 se puede observar que hay una mayor presencia de conocimiento epistémico relacionado con las acepciones de tarea, pero adicionalmente, se encuentra información nueva en categorías como conocimiento mediacional de criterios de diseño de tareas.

Tabla 28. Síntesis de conocimiento de Tareas Estado 1

		Categorías emergentes			
		Acepciones	Tipos de tarea	Elementos de tareas	Criterios de diseño
Categorías teóricas	Epistémica	9	4	0	1
	Cognitiva	0	0	0	1
	Afectiva	1	0	0	0
	Interaccional	1	0	0	0
	Mediacional	0	2	0	0
	Ecológica	0	0	0	0

Del análisis del conocimiento relativo al constructo tarea es relevante resaltar que hay una mayor riqueza en las acepciones de tarea y tipos de tarea, en especial, de tareas de argumentación (tareas que favorecen la producción de argumentos por parte de los estudiantes), que permite ver una ganancia en conocimiento importante (esto se expondrá con detalle en la sección siguiente). Esta ganancia implica un

avance en el uno de los aspectos que se identificaron como problemáticos del estado anterior y era la explicitación de la relación entre las tareas y la argumentación.

Con respecto a los demás asuntos que quedaron planteados el estado anterior, resalto que, pese a que no se hacen avances en su explicitación, si se generan cuestionamientos que particularizan los temas. Por ejemplo, como ¿qué características debe tener una tarea de argumentación? (conocimiento epistémico) y ¿cuáles son los beneficios de diseñar y gestionar tareas de argumentación usando EGD? (conocimiento mediacional).

Análisis de transformación de conocimiento individual: estado base a estado 1

Evolución de conceptos

La primera clara muestra de transformación de conocimiento relacionada con el constructo *argumentación* está en que en el Estado de conocimiento 1 se logra identificar una aproximación a una definición como el proceso por medio del cual se hace visible el pensamiento. Dado que no era un término que existiera antes en mi discurso, la categoría de transformación a la que asocio este cambio es a la de *amplitud*.

Otra ganancia dentro de mi conocimiento relacionado con argumentación fue la identificación de sus elementos constitutivos, es decir, el reconocer los argumentos como conjuntos de tres elementos (datos-aseción-garantía) fue un conocimiento nuevo. De nuevo, esta transformación da cuenta de una *profundidad* de conocimiento del cual apenas había dicho su definición.

Relacionado con los tipos de argumentos, logré identificar dentro de mi conocimiento una conceptualización de tres tipos de argumento que, no solo es algo novedoso dentro de mi discurso, sino que a diferencia de otras formas de definición está expresada de acuerdo con el momento en el que surgen. Este cambio se cataloga en la categoría de *amplitud*.

Finalmente, mi conocimiento relacionado con la actividad demostrativa se amplió y logré encontrar relaciones entre dicho constructo y aspectos metodológicos (favorecer interacciones, proponer tareas desafiantes y usar EGD). Inicialmente, el conocimiento que tenía sobre la actividad demostrativa era limitado y no conocía

que, el promover la actividad demostrativa tenía implicaciones metodológicas. El adquirir este conocimiento implicó reconocer que, lo que yo entendía como dinámicas y metodologías de aula tenía aspectos comunes con lo propuesta por el grupo de AEG, por ejemplo, el uso de EGD como un aspecto que favorece el aprendizaje (conocimiento mediacional).

En cuanto a las tareas, la concepción inicial que tenía como actividad extra-clase cambió drásticamente. La concepción de tarea ahora está relacionada con la propuesta que lleva el profesor a sus estudiantes con el propósito de que tengan que usar su conocimiento para resolverla. La transformación de conocimiento sobre este constructo está asociada con la *resignificación*.

Con respecto a la actividad demostrativa, el caracterizarla empleando términos más especializados dentro del campo de la investigación en educación matemática (e.g., perspectiva sociocultural) permite identificar un conocimiento un poco más enriquecido de dicho constructo. Este tipo de transformación corresponde a la subcategoría *profundidad*.

Una característica importante que cambió en mi conocimiento sobre las tareas está relacionada con en el momento en el que el estudiante las realiza. Inicialmente asociaba las tareas a las asignaciones extractase, sin embargo, este pensamiento cambió. Al reconocer la diferencia entre tarea y actividad, este aspecto resultaba ser irrelevante. Si lo importante de una tarea es brindar oportunidades para que el estudiante logre hacer actividad matemática, el espacio físico en el que asocio este suceso es tanto el aula de clase como un espacio fuera de ella. Esta transformación de conocimiento se corresponde con la subcategoría de *resignificación*.

Vínculos entre términos

La relación que logro establecer entre las tareas y las tareas de Argumentación implicó que dentro de mi conocimiento lograra identificar características especiales que debe tener una tarea para ser considerada una tarea que favorece la Argumentación. Este tipo de transformación, en la que claramente estoy asociando las tareas de argumentación como un tipo especial de tareas, es de *contenencia*.

Con respecto a las tareas, un gran cambio de conocimiento está relacionada con la diferenciación de tarea y actividad. Inicialmente, usaba de manera indistinta

los dos términos para referirme a lo mismo. Esta diferenciación, sin embargo, no se centra en reconocer las diferencias entre la tarea y la actividad como conceptos sino en establecer la relación de *dependencia*: La tarea es la propuesta que hace el profesor con el propósito de que los estudiantes la resuelvan y la actividad es lo que realiza el estudiante en la búsqueda de la solución de la tarea. La transformación de conocimiento en relación con el cambio citado se corresponde con la categoría de *diferenciación* pues se está indicando aspectos que distinguen a constructos que previamente se consideraban como lo mismo.

Otro cambio significativo resultó de identificar la importancia que tiene, dentro de la práctica del diseño de tareas, el conocimiento del profesor asociado a las formas de aprender, los posibles errores, las posibles soluciones que podrían proveer y, en general, los aspectos relacionados con los estudiantes (esto es, aspectos de índole cognitivo). Para mí, hasta ese momento no había una relación entre la posible actividad del estudiante al realizar la tarea y el proceso que realiza el profesor para escribir el enunciado. Esta transformación de conocimiento la asocio con la subcategoría de *consecuencia*. Ya que el conocimiento que tenga un profesor sobre las formas en las que un estudiante podría abordar la tarea impacta en el proceso de diseño.

Asimilación

Logré identificar dentro de mi discurso aludir a un conocimiento mediante el cual identifiqué argumentos diversos en distintos momentos y actividades realizadas en el marco de la solución de un problema. Esta identificación de argumentos resulta ser evidencia de conocimiento que, no solo adquirí, sino que logré hacerlo operativo dentro de mi práctica. Evidencia de esto es que las afirmaciones en las que se logró identificar conocimiento asociado a argumentos y tipos de argumentos surgieron de discursos en los cuales estaba caracterizando un argumento que emergió de la solución de una tarea de conjeturación. Por lo tanto, esta transformación de conocimiento la asocio con la subcategoría de *posesión*.

El conocimiento que adquirí sobre los aspectos metodológicos de la actividad demostrativa solo se manifestó como un nuevo conocimiento referencial proveniente del grupo AEG, al igual que la asociación entre tipos de enunciados de tareas y los diferentes tipos de argumentos, por lo cual hay una *amplitud* de conocimiento, pero enmarcada en la categoría de *repetición*.

Relacionado con la subcategoría de *asimilación* hay una transformación de conocimiento se manifestó por medio de la identificación de la relación del conocimiento del profesor, y el diseño y gestión de tareas de argumentación. Fue el contacto con diversos autores que me permitió afirmar que un profesor de matemáticas requiere de conocimiento didáctico matemático especializado sobre argumentación para poder diseñar y gestión tareas que tengan como propósito que los estudiantes generen argumentos.

Adicionalmente, afirmaciones relacionadas con la importancia que tiene, dentro del proceso de diseñar una tarea, aspectos relacionados con las formas de aprender, posibles soluciones, errores, dificultades, así como expectativas de los estudiantes permiten concluir que he *apropiado* dentro de mi discurso ideas nuevas provenientes de referentes teóricos; debo admitir que estas ideas fueron fuertemente influenciadas por mis profesores de la maestría.

Síntesis de transformación de conocimiento individual

Adicionalmente, de las tablas de síntesis del elemento argumentación del Estado Base (ver Tabla 18) y del Estado 1 (ver Tabla 27) se genera una comparación de los datos a la luz de las categorías teóricas y emergentes de presentan en Tabla 29. De esta tabla se genera la gráfica que se presenta en la Figura 4.

Tabla 29. Comparación de síntesis de conocimiento de Argumentación Estado Base (EB) y Estado1 (E1)

Argumentación		Categorías emergentes							
		Acepciones		Términos afines		Tipos de argumentos		Aspectos metodológicos	
		EB	E1	EB	E1	EB	E1	EB	E1
Categorías teóricas	Epistémica	0	3	9	3	0	4	0	0
	Cognitiva	0	0	1	0	0	0	0	0
	Afectiva	0	0	0	0	0	0	0	0
	Interaccional	0	1	1	1	0	0	0	4
	Mediacional	0	0	1	0	0	0	0	2
	Ecológica	0	0	1	0	0	0	0	0

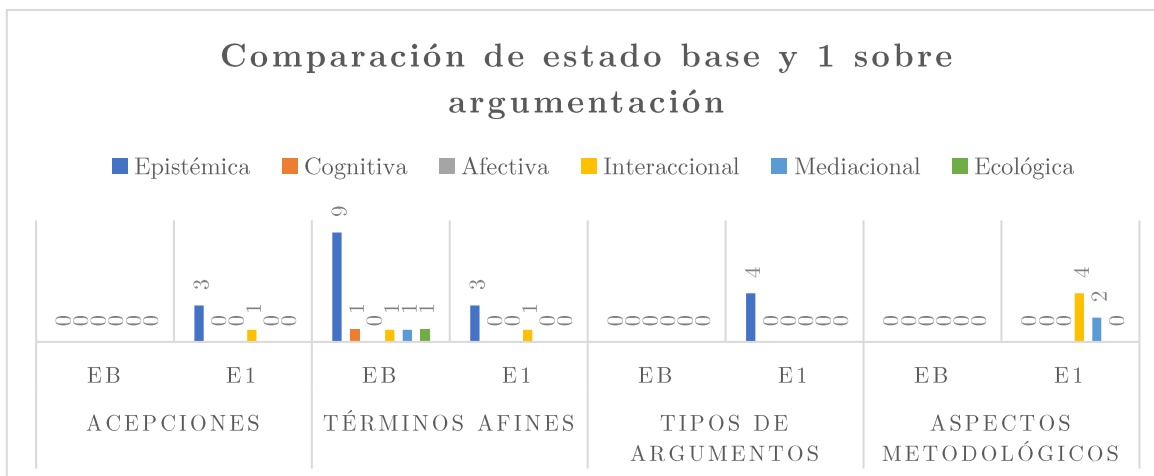


Figura 4. Comparación de Estado Base y 1 de la Argumentación

De la representación de los datos que se muestra en la Figura 4 se puede observar que, con respecto a la categoría de acepciones, hubo una ganancia de conocimiento en cuanto a que se registra en el Estado 1 conocimiento epistémico, interaccional y mediacional que no aparecía en el Estado Base. De igual manera, un comportamiento similar se observa para las categorías de tipos de argumentos y de aspectos metodológicos, en las que se registran datos que evidencian conocimiento nuevo epistémico, en el caso de los tipos de argumentos, y conocimiento interaccional y mediacional para los aspectos metodológicos.

Por otra parte, en la categoría de términos afines se presenta un comportamiento distinto: la categoría predominante sigue siendo la epistémica, pero en el Estado de conocimiento 1 se presenta una disminución en el número de datos relacionados. Esto puede deberse principalmente a que en el Estado Base se menciona más términos afines y sus características que en el Estado 1.

Cambios adicionales importantes que se resaltan después de realizar el ejercicio de comparación es que se avanzó parcialmente en uno de los asuntos que se plantearon en el análisis de conocimiento del Estado Base. Este asunto estaba asociado con la ausencia de relaciones entre los términos afines y la argumentación. Tal y como se describió en la síntesis de conocimiento del Estado 1, hay evidencias de la identificación de relaciones que antes no se consideraban. Este asunto es relevante dado que era un aspecto que identifiqué que podría dar indicios de transformación, por lo que puedo concluir que, al menos en este asunto hay una mejora. Sin embargo, los cuestionamientos asociados con las herramientas que requieren los estudiantes

para producir demostraciones, las acciones del profesor para favorecer la actividad demostrativa y la forma en la que GeoGebra contribuye al desarrollo de la argumentación siguen siendo temas abiertos.

En cuanto al elemento tarea, se hace un ejercicio similar de comparación entre el Estado Base (ver Tabla 19) y el Estado 1 (ver Tabla 28) por medio de la presentación de la Tabla 30 y su gráfica presentada en la Figura 5

Tabla 30. Comparación de síntesis de conocimiento de Tarea Estado Base (EB) y Estado1 (E1)

Tareas		Categorías emergentes							
		Acepciones		Tipos de tarea		Elementos de tareas		Criterios de diseño	
		EB	E1	EB	E1	EB	E1	EB	E1
Categorías teóricas	Epistémica	3	9	1	4	0	0	0	1
	Cognitiva	3	0	0	0	0	0	1	1
	Afectiva	0	1	0	0	0	0	0	0
	Interaccional	0	1	0	0	0	0	0	0
	Mediacional	3	0	0	2	0	0	1	0
	Ecológica	1	0	0	0	0	0	0	0

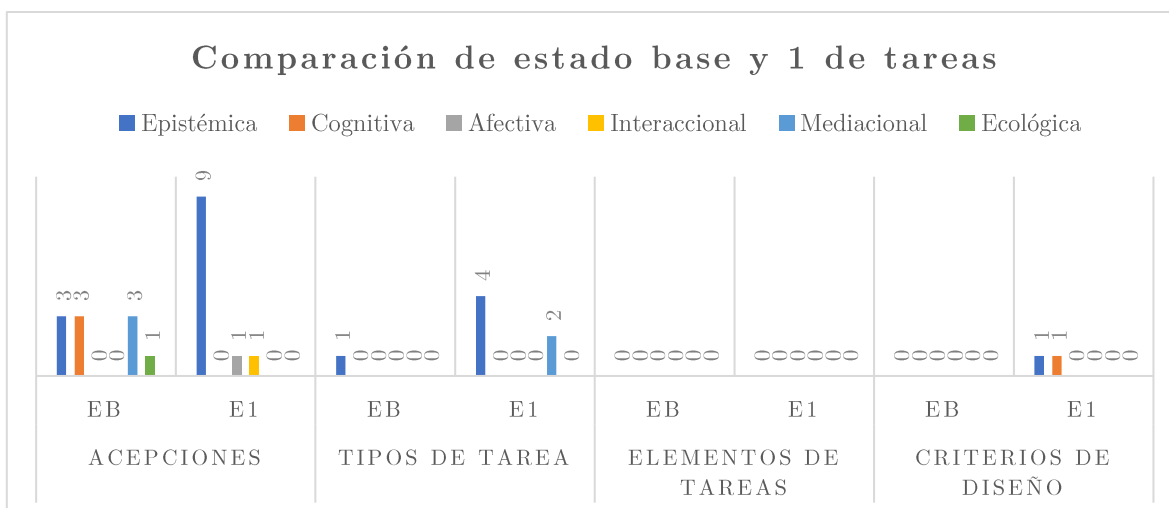


Figura 5. Comparación de Estado Base y 1 de Tareas

Al igual que con el elemento argumentación, es posible observar cambios en las categorías emergentes del elemento tareas exceptuando a la categoría Elementos de Tareas. Con relación a la categoría de acepciones hay adquisición de conocimiento epistémico que se evidencia en el aumento de los datos en esta categoría teórica y adicionalmente aparece información asociada a las categorías afectiva e interaccional en el Estado 1 que no estaba en el Estado Base.

En cuanto a la categoría de tipos de tareas aparecen datos de conocimiento mediacional y un incremento en los datos de conocimiento epistémico. Finalmente, para la categoría de diseño de tareas, en Estado de conocimiento 1, se evidencia ganancia en conocimiento ecológico y mediacional.

Con relación al avance de temas de seguimiento, la ganancia principal es que aparecen las tareas de argumentación como el término que permite explicitar la relación que encuentro entre la argumentación y las tareas.

A modo de resumen, las transformaciones de conocimiento identificadas entre el Estado Base y el Estado 1 de conocimiento se presentan en la Tabla 31.

Tabla 31. Transformación de conocimiento de Estado Base a Estado 1

Categoría de transformación	Subcategoría	Descripción de transformación
Evolución de conceptos	Amplitud	<ul style="list-style-type: none"> • Argumentación como proceso que hace visible el razonamiento • Datos, aserción y garantía son los elementos constitutivos de un argumento • Existen tres tipos de argumentos: Abductivos, inductivos y deductivos
	Profundidad	<ul style="list-style-type: none"> • La actividad demostrativa es una perspectiva sociocultural del aprendizaje de la Geometría
	Resignificación	<ul style="list-style-type: none"> • La tarea no es una asignación extractase; es la propuesta pedagógica que el profesor propone a los estudiantes para que ellos hagan actividad matemática.
	Sinonimia	No aplica
Vínculos entre términos	Contenencia	<ul style="list-style-type: none"> • Las tareas de argumentación son un tipo especial de tarea.
	Intersección	No aplica
	Consecuencia	<ul style="list-style-type: none"> • Si se contemplan las distintas soluciones que puede proveer un estudiante, entonces el proceso de diseño de una tarea se enriquece
	Diferenciación	<ul style="list-style-type: none"> • La tarea es la propuesta pedagógica del profesor para que el estudiante haga actividad y la actividad es la que realiza el estudiante con el propósito de solucionar la tarea.
Asimilación	Repetición	<ul style="list-style-type: none"> • La actividad demostrativa implica aspectos metodológicos
	Conexiones	<ul style="list-style-type: none"> • Tipos de enunciados de tarea promueven la generación de distintos tipos de argumentos

-
- | | |
|-------------|---|
| | <ul style="list-style-type: none">• Identificación de distintos tipos de argumentos (abductivos, inductivos o deductivos) en el marco de la solución de una tarea. |
| Apropiación | <ul style="list-style-type: none">• El profesor necesita conocimiento especializado para diseñar y gestionar tareas de argumentación.• Para el diseño de tareas es importante dar relevancia de aspectos cognitivos y afectivos. |
-

Fase 5. Delimitación del nuevo problema

Una vez se identificó y caracterizó el conocimiento del Estado base y Estado 1, junto con mi asesor nos percatamos que era necesario, si pretendía usar como escenario de investigación el grupo *La Preuve* al cual me acababa de vincular, llevar a cabo un proceso similar al que se realizó durante el primer semestre de la maestría para lograr acoplar los intereses investigativos de *La Preuve* de forma que el foco de investigación se convirtiera también en el conocimiento didáctico-matemático sobre tareas que promuevan la Argumentación. Para lograr cumplir este propósito fue necesario implementar acciones previas al ciclo de investigación 2.

4.2. Inter-ciclo 1 La Preuve

Este ciclo, que sucedió posterior al ciclo 1 (individual), pero previo al ciclo 2 (grupar), fue un periodo de transición en el cual buscamos alinear los intereses investigativos de *La Preuve* con la propuesta formativa planteada desde la UPN en el programa de MDM.

Fase 1. Delimitación del problema

El inter-ciclo tuvo una motivación especial: procurar que el grupo *La Preuve* virara sus intereses investigativos a aquel sobre el cual yo me había sensibilizado producto de mis estudios de maestría, el conocimiento del profesor sobre argumentación y diseño de tareas que la favorecieran. Así las cosas, el problema que orientó este inter-ciclo consistió en la posible no concientización de la importancia de contar con un conocimiento especializado por parte de los profesores de *La Preuve* sobre argumentación y diseño de tareas de argumentación, para promover en sus estudiantes el desarrollo de este proceso. Por consiguiente, fue necesario construir un plan de acción que apuntara a que los profesores del grupo adquirieran una sensibilización

análoga –pero de una manera acelerada– a la que yo desarrollé en el Ciclo 1 previamente descrito.

Fase 2. Diseño del plan de acción

Para poder lograr que los intereses del grupo de investigación viraran hacia la necesidad de construir conocimiento especializado sobre argumentación en geometría y el diseño de tareas que la promueven era necesario generar en los profesores un proceso de reflexión por medio del cual logaran identificar que este asunto estaba fuertemente relacionado con el problema que tenían delimitado hasta ese momento.

Este proceso de reflexión estuvo mediado principalmente por una secuencia de tareas de formación profesional propuesta por mí y por mi asesor. Esta secuencia de tareas se propuso a los profesores en un espacio de reunión liderado en la que, bajo mi liderazgo, se discutieron asuntos relacionados al conocimiento que evocaban las soluciones de las tareas propuestas.

La secuencia de tareas que finalmente se propuso al equipo de *La Preuve* se presenta a continuación.

PARTE 1.

Dados A, B y C no colineales y X, Y, Z puntos en $\overline{AC}, \overline{BC}$ y \overline{AB} respectivamente ¿Qué condición deben cumplir X, Y y Z para que se dé la igualdad $BY \cdot CX \cdot AZ = CY \cdot AX \cdot BZ$?

- A. Realice y reporte una construcción que represente la situación.
- B. Describa su proceso de exploración especificando las herramientas utilizadas, su intención al usarlas y lo que descubrió.
- C. Formule una conjetura que dé solución al problema.
- D. Provea una justificación a la conjetura formulada.

PARTE 2.

1. ¿Qué se te ocurre que debe considerar un estudiante cuando se le pide reportar una exploración?
2. En la pregunta C se pide “formular una conjetura” y en la pregunta B se pide “explicitar lo que se descubrió”. ¿Son las dos acciones equivalentes?
3. Si en la pregunta D se cambia “justificación” por “validación” o por “explicación”, ¿la respuesta que se puede dar es igual?

La parte I de la secuencia de tareas tenía como objetivo que los profesores asumieran el rol de estudiantes y tuvieran que realizar actividad matemática distinta a la que usualmente hacen. Adicionalmente, queríamos explorar qué conocimiento implícito lográbamos inferir a partir de la forma en la que respondieran, por ejemplo, al requerimiento “elaborar una conjetura”. Por otro lado, la parte II de la secuencia tenía cuestionamientos de índole meta-didáctico pensados para que los profesores tuvieran que analizar, ahora desde su rol como expertos en matemáticas y didáctica, la actividad matemática que habían realizado.

Fase 3. Desarrollo del plan de acción

Para solucionar la parte I de la tarea los profesores tuvieron oportunidad de conformar grupos de dos o tres personas. Dispusieron de todo el tiempo de una reunión para producir un documento o presentación en la que se registrara la solución de la tarea.

Luego, en la siguiente reunión, compartimos las soluciones y discutimos entre todos las respuestas de la parte II. Previo a la discusión, nos tomamos unos minutos para pensar de manera individual las respuestas. La discusión que se dio en el marco de intentar responder las preguntas anteriores se convirtió en el insumo principal para la construcción de datos y el análisis de conocimiento base de *La Preuve*.

Fase 4. Análisis del conocimiento de La Preuve Estado Inicial ***1***

A partir del estudio de la grabación de la reunión en la que se discutió sobre la Parte II de la secuencia de tareas se identificaron las afirmaciones que aludían a los elementos de interés. Se encontró que todas las afirmaciones estaban asociadas al elemento *argumentación*. Dichas afirmaciones y su interpretación fueron los datos por medio de los cuales logré caracterizar el conocimiento de *La Preuve* relacionado con tal constructo (ver Anexo 4. Tabla de datos Estado Inicial), particularmente, con términos afines.

Los términos que generaron discordia en la discusión fueron conjetura, justificación, validación y explicación; por lo tanto, la identificación de conocimiento de

este estado estuvo relacionada principalmente con la faceta epistémica en la categoría términos afines a argumentación.

Conocimiento epistémico sobre argumentación

Con el propósito de mostrar de manera más clara y ordenada los datos que describen el conocimiento epistémico sobre la argumentación, presento la Tabla 32. Los términos que se identificaron y que son objeto de análisis son conjetura, exploración y justificación. Adicionalmente, agrupé como términos de instrucción a los términos validación, explicación, descripción, etc. Lo anterior teniendo en cuenta que fueron términos que encontramos como las palabras que pueden indicar al estudiante en un enunciado el tipo de acción o producción que se espera que generen.

Tabla 32. Conocimiento epistémico sobre argumentación Estado Inicial 1

Término	Interpretación	Descripción	Código
Conjetura	La conjetura se deduce de la exploración	Característica de la conjetura en relación con la exploración	$A_E T A_C - Co$
	La conjetura es resultado de la exploración	Característica de la conjetura en relación con la exploración	$A_E T A_C - Co$
	Deducir una conjetura es establecerla como resultado de una exploración	Característica de la conjetura en relación con la exploración	$A_E T A_C - Co$
	La conjetura debe ser reportada utilizando la forma condicional "si..., entonces..."	Característica de la conjetura con respecto a su estructura	$A_E T A_C - Co$
	La conjetura y la conjeturación son términos relacionados pero distintos	Característica de la conjetura en relación con la conjeturación	$A_E T A_C - Co$
	La conjetura no necesariamente debe ser reportada utilizando la forma condicional "si..., entonces..."	Característica de la conjetura con respecto a su estructura	$A_E T A_C - Co$
	La conjetura es una oración que puede tener cierto grado de certeza, pero cuya validez no se ha establecido.	Característica de la conjetura	$A_E T A_C - Co$
	Una conjetura es un enunciado condicional que responde una tarea de conjeturación	Característica de la conjetura con respecto a su estructura	$A_E T A_C - Co$
	Toda conjetura puede/requiere ser demostrada	Característica de conjetura con relación a la demostración	$A_E T A_C - Co$
	La conjetura y el reporte de una exploración son distintos.	Característica de la conjetura en relación con la exploración	$A_E T A_C - Co$

	La conjetura y la exploración deben ser escritas de manera distinta porque son diferentes	Característica de la conjetura en relación con la exploración	$A_E T A_C$ -Co
	La conjetura y el reporte de exploración contienen la misma información, pero escrito de manera distinta.	Característica de la conjetura en relación con la exploración	$A_E T A_C$ -Co
	La conjetura toma elementos de la exploración, sin embargo, contiene más información	Característica de la conjetura en relación con la exploración	$A_E T A_C$ -Co
	La conjetura requiere de exploración	Característica de la conjetura en relación con la exploración	$A_E T A_C$ -Co
	La rigurosidad está dada por la forma de escritura	Característica de la rigurosidad	$A_E T A_C$ -Co
Exploración	La conjetura tiene indicios de la exploración	Característica de la conjetura en relación con la exploración	$A_E T A_C$ -Ex
	La exploración o reporte de exploración no es rigurosa.	Característica de la exploración con respecto a la rigurosidad	$A_E T A_C$ -Ex
	La exploración puede ser rigurosa si se escribe de manera formal	Característica de la exploración con respecto a la rigurosidad	$A_E T A_C$ -Ex
	La exploración y lo encontrado en la exploración producen la conjetura	Característica de la exploración en relación con la conjetura	$A_E T A_C$ -Ex
Justificación	La justificación es un proceso que incluye la explicación, validación y demostración	Característica de la justificación con respecto a sus elementos	$A_E T A_C$ -J ¹¹
	La prueba por inducción es una justificación	Característica de la justificación en relación con la prueba por inducción	$A_E T A_C$ -J
	Los argumentos surgen en la justificación	Relación entre justificación y argumentos	$A_E T A_C$ -J
Términos de instrucción	Las palabras "explicación", "justificación" y "validación" hacen referencia a cosas diferentes	Característica de explicación, justificación y validación	$A_E T A_C$ -TI ¹²
	La diferencia entre la validación, explicación y justificación está en el número de casos a los que responden	Característica de explicación, justificación y validación con relación al número de casos que se estudian	$A_E T A_C$ -TI
	La diferencia entre la validación, explicación y justificación está es su nivel de rigurosidad. La menos	Característica de explicación, justificación y validación con respecto al nivel de rigurosidad	$A_E T A_C$ -TI

¹¹ La letra J al finalizar el código indica que el término que está asociado a la afirmación es justificación

¹² Las letras TI al finalizar el código indican que el término que está asociado a la afirmación es términos de instrucción

rigurosa es la validación y la más rigurosa la justificación		
La validación, explicación y justificación se diferencian en que cada uno surge de un proceso de razonamiento diferente	Característica de explicación, justificación y validación en relación con tipos de razonamiento	$A_E T A_C - T I$
La diferencia entre la validación, explicación y justificación está es su nivel de rigurosidad. La menos rigurosa es la explicación y la más rigurosa la demostración	Característica de explicación, justificación y validación con respecto al nivel de rigurosidad	$A_E T A_C - T I$
La diferencia entre explicación, validación u justificación son los elementos involucrados en ellas. En una explicación está involucrada una descripción, en la validación hay comprobación por medio de ejemplos y en la justificación hay argumentos.	Característica de explicación, justificación y validación en cuanto a la información que contiene	$A_E T A_C - T I$

De la Tabla 35 es posible decir los siguientes con respecto a las características de la *conjetura*: Con relación a *conjetura* emerge una acepción según la cual conjetura es el *resultado* o se *deduce* de un proceso de exploración; con lo cual, exploración es la actividad por medio de la cual se generan los indicios que llevarían a la formulación de una conjetura. Esta relación de dependencia que se identifica entre conjetura y exploración lleva a concluir que para este grupo de profesores la conjeturación y exploración son procesos distintos. Al ser diferentes deben ser tratados y reportados de manera diferente, por lo cual, en un proceso de diseño de tarea, solicitar a un estudiante un reporte de exploración sería diferente que solicitar la producción de una conjetura. La diferencia que identifican, principalmente, es que una conjetura debe ser reportada utilizando el formato condicional “Si..., entonces...” mientras que la exploración no, pero no se explicita algo sobre cómo debe ser reportada.

Por otra parte, y en contraposición, surge una segunda postura por medio de la cual *conjetura* trata de una afirmación que va más allá que la exploración. Se identifica, al igual que la postura anterior, que la exploración brinda los insumos para la conjetura, sin embargo, la conjetura tiene más información, es decir, no solo reporta la exploración ya que podría contener inferencias o deducciones por parte de los estudiantes que provengan de ideas que no se relacionen directamente con la

interacción con GeoGebra. Adicionalmente, para este grupo de profesores la conjetura no requiere una estructura condicional.

En cuanto a justificación, explicación y validación una primera postura identifica que son términos distintos. Sin embargo, cuando se intenta precisar la diferencia entre los tres términos surgen contradicciones entre los profesores. Algunos afirmaron que la diferencia entre estos términos radica en su nivel de rigurosidad: La validación está asociada con cierta flexibilidad, más parecido a una descripción de un resultado; la justificación tiene el nivel más alto de rigurosidad en cuanto a que emplean elementos de un sistema teórico y finalmente, la explicación es una transición entre la validación y la justificación. Otros consideraban que la diferencia está asociada al número de casos que el estudiante observa: Si el estudiante solo pudo observar un caso y a partir de ese caso identificó una invariante, entonces ese estudio de caso es una validación de ese descubrimiento; si se estudian varios casos, el reporte de descubrimiento de lo que sucede en cada uno se constituye en una explicación; finalmente, si el estudiante logra establecer una generalidad está produciendo una justificación.

Una última postura relacionaba los términos validación, explicación y justificación con tipos de razonamiento; sin embargo, a diferencia de las posturas anteriores, no se explicita qué tipo de razonamiento está asociada a cada término.

Síntesis de conocimiento de La Preuve Estado Inicial 1

Del ejercicio que llevó a la caracterización del Estado Inicial 1 de La Preuve hay varios aspectos que es importante resaltar. En primera instancia, fue muy difícil el que la discusión de los profesores se centrara en la secuencia de tareas que indagaban sobre el conocimiento sobre la argumentación. Al igual que sucedió con mi Estado Base de conocimiento, no se encontraron menciones explícitas de la palabra argumentación dentro del discurso de mis compañeros.

Como resultado de esto, la caracterización de términos afines que se generó respondió, por una parte, a palabras que estaban involucradas en las preguntas que les propuse y, por otra parte, a la identificación que logré hacer desde mi Estado 1 de conocimiento de que efectivamente esos términos tenían relación con la

argumentación. Ninguno de los profesores expresó que los términos en discusión se relacionaran con la argumentación.

Adicionalmente, se encontró que, pese a que todos estaban hablando y caracterizando los mismos términos, había manifestaciones diferentes incluso opuestas. Lo que develó una falencia muy grande que, como grupo, teníamos y es la falta de un discurso común que oriente acciones tan cotidianas para nuestro quehacer como el solicitar a un estudiante una justificación.

Surgieron, como resultado de esta diferencia de posturas, asuntos que quedaron pendientes y que pueden ser susceptibles de hacer seguimiento –al igual que con el caso de mi conocimiento individual–, para poder hablar sobre transformación de conocimiento compartido. Por ejemplo, cuando se intentó hablar de la relación entre conjetura y exploración todos los profesores coincidían en que son diferentes. Sin embargo, en algunas afirmaciones se encontraron intentos de diferenciar estos dos términos utilizando relaciones de consecuencia, es decir, que una se infiere o deduce de la otra sin precisar en qué consiste el inferir o deducir.

De manera similar ocurrió con el adjetivo “riguroso” que intentó ser empleado para diferencias una conjetura de una exploración/reporte de exploración y también algunos términos de instrucción como lo son la validación, explicación y descripción. No se encontró evidencia que permitiera dilucidar en qué consiste la rigurosidad.

Del ejercicio de interpretación de las afirmaciones que involucraban la palabra “rigurosidad” o “riguroso” se podría hipotetizar que la rigurosidad, al menos para algunos de los profesores, está relacionada con el lenguaje, la forma de escritura o la estructura en la que se presenta la información, por ejemplo, la forma condicional para reportar una conjetura.

Fase 5. Delimitación del nuevo problema

Como resultado de la descripción de las acepciones que se develaron en la discusión sobre los términos asociados a *argumentación* logramos concluir que, como equipo, no teníamos un conocimiento común que nos permitiera manejar un discurso coherente sobre qué esperábamos que los estudiantes produjeran ante requerimientos como presentar una conjetura, proponer una justificación o un argumento. Adicionalmente, nos dimos cuenta de que no solo carecíamos de significados compartidos

sobre tales constructos, sino que el conocimiento de cada uno no era lo suficientemente profundo o especializado.

4.3. Ciclo 2 La Preuve

Después del diagnóstico sobre nuestro conocimiento como equipo surgido del inter-ciclo descrito antes, iniciamos nuestro primer ciclo de Investigación-Acción como *La Preuve* bajo este nuevo foco de investigación.

Fase 1. Delimitación del problema

Para llegar a delimitar el problema empleamos el resultado producto del análisis del conocimiento base de *La Preuve* y, por medio de la aplicación Jamboard (ver Figura 6) de Google realizamos una lluvia de ideas en torno a dos preguntas que se respondieron de manera individual:

¿Cuál consideras que es el problema que tenemos como equipo? Y ¿cómo consideras que podemos solucionarlo?

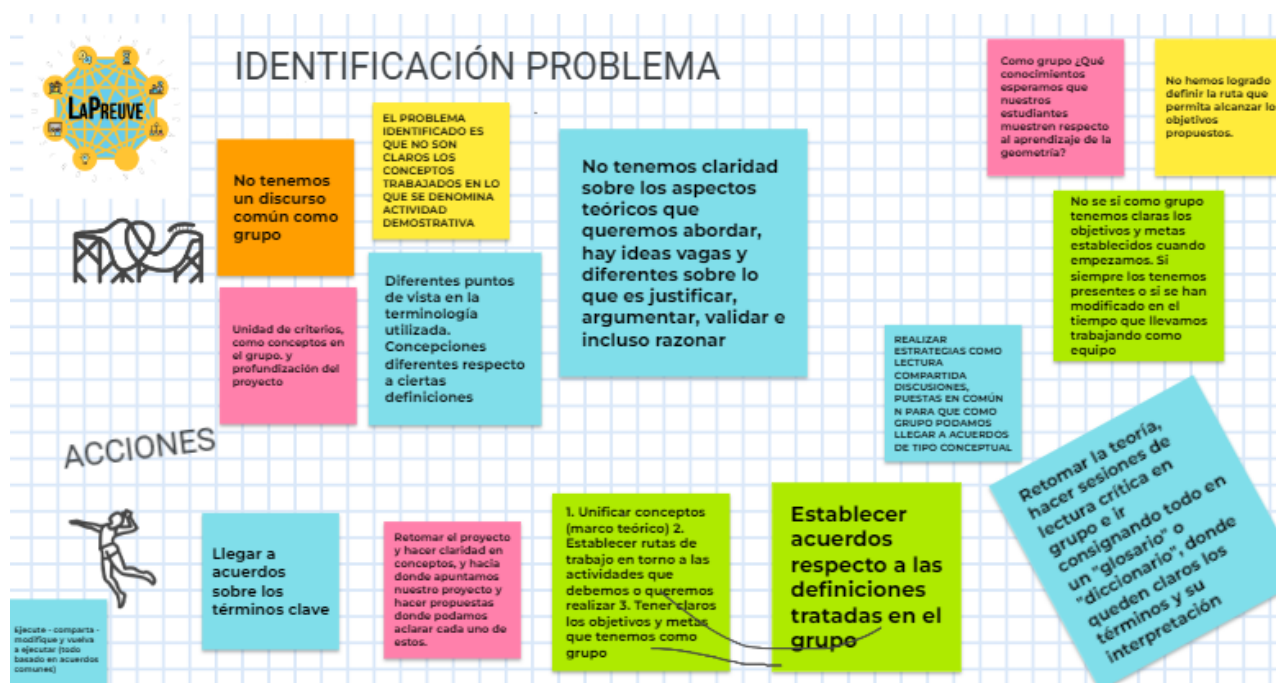


Figura 6. Registro lluvia de ideas inicio de Ciclo 2.

Algunas de las respuestas al primer interrogante se presentan en la Tabla 33.

Tabla 33. Lluvia de ideas delimitación del problema Ciclo 2.

Pregunta	Aporte
¿Cuál consideras que es el problema que tenemos como equipo?	<ul style="list-style-type: none"> • No tenemos un discurso común como grupo. • Nos hace falta unidad de criterios como conceptos en el grupo y profundización del proyecto. • El problema identificado es que no son claros los conceptos trabajados en lo que se denomina actividad demostrativa. • Tenemos diferentes puntos de vista en la terminología utilizada y concepciones respecto a ciertas definiciones. • No tenemos claridad sobre los aspectos teóricos que queremos abordar, hay ideas vagas y diferentes sobre lo que es justificar, argumentar, validar e incluso razonar. • Como grupo ¿Qué conocimientos esperamos que nuestros estudiantes muestren respecto al aprendizaje de la geometría?

El problema que identificamos al finalizar el inter-ciclo es que, como equipo, no teníamos un conocimiento común sobre *argumentación* que nos permitiera manejar un discurso coherente sobre qué esperábamos que los estudiantes produjeran ante las indicaciones que se les brindan en el marco de una tarea.

Fase 2. Diseño del plan de acción

La segunda pregunta antes presentada apuntaba a diseñar, de manera conjunta, el plan que se desarrollaría durante el ciclo investigativo, con miras a abordar la problemática antes mencionada. En relación con tal pregunta, algunos de los aportes realizados por los profesores de *La Preuve* se presentan en la Tabla 34.

Tabla 34. Lluvia de ideas diseño del plan de trabajo Ciclo 2

Pregunta	Aporte
¿Cómo consideras que podemos solucionarlo?	<ul style="list-style-type: none"> • Ejecute - comparta - modifique y vuelva a ejecutar (todo basado en acuerdos comunes) • Llegar a acuerdos sobre los términos clave • Retomar el proyecto [el planteado por el Equipo ante el colegio] y hacer claridad en conceptos, y hacia donde apuntamos nuestro proyecto y hacer propuestas donde podamos aclarar cada uno de estos. • 1. Unificar conceptos (replantear el marco teórico); 2. Establecer rutas de trabajo en torno a las actividades que debemos o queremos realizar; 3. Tener claros los objetivos y metas que tenemos como grupo • Establecer acuerdos respecto a las definiciones tratadas en el grupo • Realizar estrategias como lectura compartida y discusiones, puestas en común para que, como grupo, podamos llegar a acuerdos

- Retomar la teoría, hacer sesiones de lectura crítica en grupo e ir consignando todo en un "glosario" o "diccionario", donde queden claros los términos y su interpretación

De las ideas planteadas, inferimos que hay ideas comunes susceptibles de concretarse mediante un plan de acción que nos propusimos conformar; esta se conformó por una secuencia de acciones que expongo a continuación:

- Buscar de autores/investigadores que han abordado el constructo *argumentación* en geometría o alguno de los términos afines que generaron las discusiones del anterior ciclo, es decir, razonamiento, justificación, validación, etc.
- Seleccionar algunos documentos para compartir con el equipo por medio de una carpeta en Google Drive.
- Realizar una lectura crítica de dichos documentos por equipos.
- Seleccionar definiciones de términos clave a partir de la lectura realizada.
- Compartir con los demás miembros del equipo las definiciones seleccionadas en una puesta en común para, finalmente, comenzar a construir una postura en torno a ellas.

Fase 3. Desarrollo del plan de acción

Para realizar los cuatro primeros pasos del plan de acción dispusimos de tres sesiones de trabajo. El producto generado fue, al igual que en la Fase 1, un tablero en la aplicación de Jamboard en el que cada grupo de trabajo fue consignando las definiciones que identificó de la lectura de los documentos seleccionados (ver Figura 7).

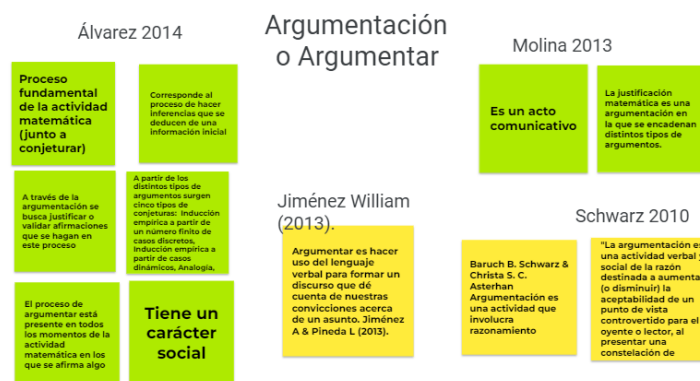


Figura 7. Registro definiciones de Argumentación o argumentar.

Cuando iniciamos el paso cinco del plan de acción, identificamos que, después de la lectura de los documentos teníamos muchos interrogantes e inquietudes (ver Tabla 35). Adicionalmente, no logramos llegar a un acuerdo sobre cómo íbamos a definir *argumentación* dada la diversidad de posturas que se encontraron en la literatura.

Ante estas dificultades y, aprovechando la cercanía que tenía con el grupo AEG gracias a mi vinculación en la Maestría, decidí proponer al equipo de trabajo que invitáramos a mi asesor de trabajo de grado, Dr. Oscar Molina, para que nos ayudara a solucionar esas inquietudes que surgieron a partir del estudio de los referentes teóricos que seleccionamos.

Como insumo para preparar esa charla, el Dr. Molina nos solicitó que compartiéramos con él, de manera individual, cuál era nuestra concepción sobre las palabras argumentación y razonamiento, adicionalmente, qué preguntas tenían relacionadas con esos dos términos. Las respuestas de algunos miembros del equipo se presentan en la Tabla 35.

Tabla 35. Concepciones sobre Argumentación y razonamiento posterior al plan de acción del ciclo 2.

Aspecto	Respuestas de los profesores
Argumentación	Es el proceso de construir argumentos. Y un argumento es un enunciado que está constituido por tres partes: datos- asección -garantía. Las variaciones en cada uno de estos elementos determinan un tipo de argumento. Estos pueden ser: inductivo, deductivo, abductivo y analógico.
	Es el acto comunicativo del razonamiento, por medio de cual es posible tener alguna evidencia de cómo se está razonando
	Es el proceso social de generar argumentos; un argumento es un enunciado que relaciona proposiciones particulares (datos- conclusión) a través de una proposición general (garantía). Una argumentación tiene como función garantizar la validez de alguna afirmación hecha.
	Actividad Social. Subyace en el corazón del pensamiento humano. Pensar "es una forma de argumento interno, inspirado en el diálogo externo". Un argumento se produce a partir de afirmaciones denominadas premisas. Una conclusión es soportada a partir de dichas premisas
Razonamiento	Es el producto del pensamiento, este producto surge cuando han existido procesos como: sintetizar, analizar, refutar, ejemplificar.
	Es un proceso mental individual, en el cual se realizan conexiones con saberes ya adquiridos, con el entorno y el contexto
	Un razonamiento es un esquema organizativo que conecta experiencias, reglas y saberes adquiridos, con el propósito de comunicar la fuerza de un argumento.

Inquietudes que emergieron	Razonamiento es una actividad que involucra Argumentación.
	¿Hay formas de ver en términos de evidencias el razonamiento?
	Desde el marco teórico de la actividad demostrativa, teniendo en cuenta la importancia del enunciado condicional, cuando se construye una definición mediante una exploración ¿Se considera este como un proceso de conjeturación?
	¿Para qué razonar?
	Dado que la actividad de pensar es una actividad inherente de cada ser, ¿cómo orientar la desigualdad de pensamiento en la sistematización de la información, orientada por la razón, para llegar a un argumento que satisfaga algunas condiciones iniciales?

Con el diagnóstico basado en las concepciones de argumentación y razonamiento, el Dr. Molina realizó una charla por medio de la cual no solo nos presentó la interpretación que como experto pudo realizar de nuestro discurso (ver Tabla 36), sino también la postura actual del grupo AEG frente al constructo argumentación. Adicionalmente, en este espacio pudimos resolver algunas de nuestras inquietudes.

Tabla 36. Interpretaciones de primeras concepciones de argumentación y razonamiento

	Término	Concepción	Interpretación
Argumentación		Es el acto comunicativo de un tipo de razonamiento, por medio de cual es posible tener alguna evidencia de cómo se está razonando.	Como acto comunicativo del razonamiento.
		Actividad social. Subyace en el corazón del pensamiento humano. Pensar "es una forma de argumento interno, inspirado en el diálogo externo". Un argumento se produce a partir de afirmaciones denominadas premisas. Una conclusión es soportada a partir de dichas premisas.	Como actividad social, pero ¿sobre qué?
		Es el proceso de construir argumentos. Un argumento es un enunciado que está constituido por tres partes: datos- aserción -garantía. Las variaciones en cada uno de estos elementos determinan un tipo de argumento. Estos pueden ser: inductivo, deductivo, abductivo y analógico	Como proceso de construir argumentos, pero... ¿qué es argumento?
		Es el proceso social de generar argumentos, un argumento es un enunciado que relaciona proposiciones particulares (datos-conclusión) a través de una proposición general (garantía), la Argumentación tiene como función garantizar la validez de alguna afirmación hecha.	Como proceso social para generar argumentos. Argumento como enunciado Función de Argumentación: Garantizar validez
Razonamiento		Es el producto del pensamiento, este producto surge cuando han existido procesos como: sintetizar, analizar, refutar, ejemplificar.	Producto de pensamiento
		Es un proceso mental individual, en el cual se realizan conexiones con saberes ya adquiridos, con el entorno y el contexto	Proceso mental

Un razonamiento es un esquema organizativo que conecta experiencias, reglas y saberes adquiridos, con el propósito de comunicar la fuerza de un argumento.	Esquema organizativo
Razonamiento es una actividad que involucra Argumentación.	Actividad que involucra Argumentación.

Uno de los grandes aportes de esta charla fue comenzar a puntualizar aspectos que teníamos que unificar para poder llegar a la selección o construcción de las definiciones que adoptaríamos para argumentación, razonamiento y los demás términos asociados a ellos que la investigación requiriera. Algunos de los interrogantes que nos planteó el Dr. Molina sobre argumentación fueron: ¿Es un proceso? ¿es un proceso social? ¿es un acto comunicativo? ¿es una actividad social? Y ¿qué es un argumento? En cuanto a razonamiento: ¿es un producto? ¿es un proceso mental? ¿es un esquema organizativo? ¿es una actividad que involucra argumentación?

Al finalizar las discusiones que surgieron a partir de intentar responder las preguntas anteriores (el profesor Molina expuso solo la postura que al respecto el grupo AEG había conformado para ese momento) logramos consolidar nuestros acuerdos en un documento (ver Anexo 5. Documento de cierre de Ciclo 2) que se convirtió en el insumo principal para realizar el análisis de conocimiento del Ciclo 2.

Fase 4. Análisis del conocimiento Estado 2 La Preuve

A partir del estudio del documento de cierre del Ciclo 2 se identificaron las afirmaciones que aludían a los elementos de interés. Se encontró, al igual que en la caracterización del estado de conocimiento inicial, que todas las afirmaciones estaban asociadas al elemento *argumentación* y en relación con aspectos epistémicos principalmente (ver Anexo 6. Tabla de datos Estado 2).

Conocimiento epistémico sobre la argumentación

En la Tabla 37 presento los datos que permitieron caracterizar el conocimiento epistémico sobre argumentación para el Estado 2 ordenados de acuerdo con el término de interés.

Tabla 37. Conocimiento epistémico sobre argumentación Estado 2

Termino	Afirmación	Interpretación	Descripción	Código
Argu- men- tación	La argumentación en el Gimnasio Vermont se	La argumentación es un proceso social (se da en grupos	Característica	<i>A_EA_C</i>

	entiende como un proceso social y comunicativo	de personas) y comunicativo (está mediado por el discurso)		
	[La argumentación es] preferiblemente de carácter escrito	La argumentación no requiere que exista un registro escrito, pero hay una preferencia por parte del colegio para que el producto sea escrito.	Característica con respecto al tipo de registro	$A_E A_C$
	En la argumentación encontramos las evidencias que nos permiten reconocer y validar los razonamientos de cada estudiante	La argumentación permite evidenciar el razonamiento	Característica con relación al razonamiento	$A_E A_C$
Argumento	Los estudiantes construyen argumentos apoyados en garantías del sistema teórico construido colectivamente	Los argumentos son construidos por los estudiantes	Característica con relación a quien los produce	$A_E A_C$
		Los argumentos están apoyados por garantías del sistema teórico construido colectivamente	Característica en relación con las garantías	$A_E A_C$
	Esperamos que los estudiantes sean capaces de construir distintos tipos de argumentos (deductivos, abductivos, analógicos e inductivos)	Hay distintos tipos de argumentos: deductivos, abductivos, analógicos e inductivos	Tipos de argumentos	$A_E T_C$
		El argumento es el producto de la argumentación	Característica con relación a la argumentación	$A_E A_C$
	Un argumento es una terna de orden escrito	Un argumento es un conjunto de tres elementos	Característica con relación a sus elementos	$A_E A_C$
	Un argumento tiene como propósito exponer razones, sustentar o persuadir.	Un argumento tiene como propósito exponer razones, sustentar o persuadir.	Propósito de un argumento	$A_E A_P$
Datos	Los datos son la información que da fundamento a la aserción o afirmación	Los datos son la información que da fundamento a la aserción o afirmación	Elementos de un argumento	$A_E A_E$

Garantía	La garantía es un elemento del sistema teórico que permite conectar los datos con la aserción	La garantía es un elemento del sistema teórico que permite conectar los datos con la aserción	Elementos de un argumento	$A_E A_E$
Aserción	La aserción corresponde a una proposición que plantea una postura	La aserción corresponde a una proposición que plantea una postura	Elementos de un argumento	$A_E A_E$
Datos y garantía	Datos y garantías conforman una justificación	Datos y garantías conforman una justificación	Elementos de una justificación	$A_E A_E$
Conjeturación	Esperamos que los estudiantes sean capaces de construir distintos tipos de argumentos (deductivos, abductivos, analógicos e inductivos) promoviendo así la conjeturación	La conjeturación se promueve por medio de la construcción de diversos tipos de argumentos.	Característica con relación a los tipos de argumentos	$A_E T A_C$ Co

Con respecto a las características del término *argumentación*, *La Preuve* reconoce que es un proceso social -en cuanto a que se genera en grupos de personas- y comunicativo -ya se encuentra mediado por el discurso-. Con relación con el discurso, se resalta que este debe ser preferiblemente escrito, aunque no se especifica el por qué esta preferencia. Finalmente, se le atribuye a la argumentación el poder proveer, mediante los argumentos, las evidencias de los razonamientos de los estudiantes. La afirmación anterior habla de una concepción de razonamiento que está íntimamente ligada a la argumentación, implícitamente se detecta una relación de dependencia en cuanto a que, al contener evidencias del razonamiento, el razonamiento genera la argumentación.

Por otra parte, y complementando la definición de *argumentación*, se encuentra una conceptualización de los argumentos por medio de sus elementos y se advierte cuál es su propósito. Para *La Preuve* un *argumento* es un conjunto de tres elementos: *dato*, *aserción* y *garantía*, y tiene el propósito de exponer razones, sustentar o persuadir (aunque no se advierte qué se sustenta o a quién se busca persuadir). Cada uno de estos elementos tiene asociada una característica a saber: *Dato* es la información que da fundamento a la aserción o afirmación; *garantía* es un elemento del

sistema teórico que permite conectar los datos con la aserción; *aserción* corresponde a una proposición que plantea una postura.

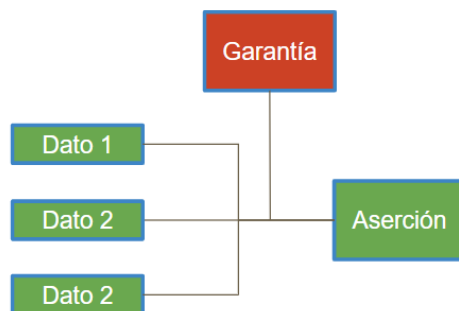
En cuanto a la forma en la que está caracterizado el término *dato*, de nuevo, se presenta una ambigüedad en cuanto al uso del término “fundamento” en cuanto a que no es claro si se quiere referir al dato como el objeto que da consistencia y valida o si es simplemente un punto de partida. De cualquier forma, no hay precisión sobre qué información reporta o contiene.

La caracterización de *garantía* es un poco más específica, ya que se alude a que es un elemento de un sistema teórico. En este sentido, un asunto que podría explorarse es si la existencia de un sistema teórico es la única forma de proveer garantías para lograr construir argumentos. Por otra parte, se afirma que la garantía tiene el propósito de conectar los datos con la aserción, sin embargo, no se advierte en de qué manera hace la conexión y cómo conecta el dato y la garantía.

La *aserción*, por su parte, es una proposición que plantea una postura. Sin embargo, no se advierte de manera explícita si con el argumento se pretende plantear razones para sustentar dicha postura; tampoco se advierte el carácter de dicha postura (¿es una proposición, una acción, una decisión?).

De manera adicional, resalto que hay conocimiento sobre que hay cuatro tipos de argumentos: inductivos, deductivos, analógicos y abductivos. Estos tipos de argumentos no fueron caracterizados de manera explícita en el documento que usé como insumo. En cambio, fueron representados usando los diagramas presentados en la Figura 8. Por esta razón, no aparecen afirmaciones dentro de los datos que permitan describir las acepciones que tiene el equipo en relación con estos términos, más allá de la explicación que se puede inferir de la imagen.





Argumento inductivo

Figura 8. Representación de los diferentes tipos de argumentos según La Preuve

Resalto que las imágenes presentadas para ejemplificar los diversos tipos de argumentos que tienen una fuerte influencia, por no decir que son similares, a las imágenes presentadas por el Dr. Molina en su charla. Esto permite concluir que La Preuve decide adoptar las definiciones presentadas por el Dr. Molina para los tipos de argumentos, aunque estas no se exponen en el documento tomado como insumo. Hay acá un conocimiento referencial carente, quizá, de una apropiación por parte del Equipo.

Conocimiento cognitivo sobre la argumentación

Los datos que permitieron caracterizar el conocimiento cognitivo sobre la argumentación se presentan en la Tabla 38. Conocimiento cognitivo sobre argumentación Estado 2

Tabla 38. Conocimiento cognitivo sobre argumentación Estado 2

Afirmación	Interpretación	Descripción	Código
[La argumentación es el proceso] donde se busca que los estudiantes construyan argumentos	La argumentación es el proceso que se debe promover para lograr que los estudiantes construyan argumentos	Expectativa de aprendizaje	A_cA_c

En el colegio, hay una expectativa sobre los estudiantes en cuanto a que se espera que logren argumentar. Se reconoce que para lograr que los estudiantes construyan argumentos es necesario favorecer la argumentación, sin hacer precisiones sobre cómo se puede favorecer dicho proceso.

Conocimiento ecológico sobre argumentación

Los datos que permitieron caracterizar el conocimiento ecológico sobre la argumentación se presentan en la Tabla 39

Tabla 39. Conocimiento ecológico sobre argumentación Estado 2

Afirmación	Interpretación	Descripción	Código
En la geometría de 6° y 7°, y a través de actividades de exploración teórica y dinámica, esperamos que los estudiantes sean capaces de construir distintos tipos de argumentos (deductivos, abductivos, analógicos e inductivos) promoviendo así la conjeturación, etapa previa y fundamental de la actividad demostrativa que se abordará en los cursos de 8° y 9°	La conjeturación es la etapa previa y fundamental de la actividad demostrativa. La actividad demostrativa se aborda en 8° y 9° y la conjeturación en 6° y 7°	Característica del currículo	A_{EcTA}

Se menciona la conjeturación como etapa previa y fundamental de la actividad demostrativa. No hay una definición más allá de esta característica, pero se podría interpretar que *La Preuve* concibe la conjeturación como eslabón inicial de un proceso que continúa con la actividad demostrativa. Tampoco hay insumos suficientes para lograr especificar qué se entiende como actividad demostrativa.

Síntesis de conocimiento Estado 2 La Preuve

De acuerdo con lo descrito anteriormente sobre el Estado 2 de conocimiento hay asuntos que resaltar. El primero de ellos es la producción de las definiciones de argumentación y argumento como base para seguir construyendo un conocimiento compartido, asunto que fue el problema de investigación que generó el Ciclo 2. Es un avance bastante importante para La Preuve como colectivo iniciar la consolidación de constructos que, no solo den un discurso común, sino que, eventualmente orienten la práctica de los docentes de geometría. Sin embargo, hay temas que generan nuevas inquietudes al realizar el análisis de fragmentos y la interpretación de algunas afirmaciones involucradas en el discurso.

Al igual que sucedió con mi conocimiento individual, el encontrar en el Estado de conocimiento acepciones de la argumentación indica un cambio importante de conocimiento ya que, en el Estado inicial 1 no se mencionaba la argumentación. Sin embargo, una diferencia importante entre lo que sucedió con mi conocimiento es que los términos afines que se mencionaban en el Estado inicial 1, es decir, exploración,

conjeturación, conjetura, justificación, etc. no aparecen en este Estado de conocimiento. Solo hay un par de referencias a la conjeturación, pero no develan conceptualizaciones nuevas en cuanto a establecer relaciones entre ella y la argumentación.

Aparece el término argumento y junto con él acepciones de sus elementos constitutivos. Pese a que se reconoce la terna datos-asepción-garantía como un argumento, las características que se les otorgan a cada uno de estos elementos no resulta ser dicente o aclaradora sobre cómo se relacionan entre ellos para generar el argumento. La naturaleza de la característica provista para cada una es diferente, por ejemplo, se asumen los datos como “información”, las garantías como “conectores” y las asepciones como “proposiciones”.

Algunos de los asuntos que podríamos denominar problemáticos y que pueden ser susceptibles de realizar seguimiento están relacionados con la ausencia de definiciones de palabras involucradas en la caracterización de la argumentación y los argumentos, por ejemplo, el razonamiento.

Análisis de transformación de conocimiento La Preuve 1: Estado inicial 1 a Estado 2

A continuación, presento la transformación de conocimiento compartido de *La Preuve* con relación al elemento argumentación. Me valgo de la comparación de los estados de conocimiento que surgieron del inter-ciclo 1 (Estado Inicial 1) y el Ciclo 2 (Estado 2).

Evolución de conceptos

Un primer cambio importante que tuvo lugar al finalizar el Ciclo 2 de investigación tiene que ver con el conocimiento sobre la definición de argumentación y de argumento (conocimiento epistémico). Para *La Preuve* la argumentación es un proceso social y comunicativo, preferiblemente de carácter escrito, donde se busca que los estudiantes construyan argumentos apoyados en garantías propias del sistema teórico construido colectivamente, mientras que los argumentos son el producto de la argumentación. Como ninguno de estos dos términos apareció en los datos que permitieron decantar el Estado de conocimiento Inicial 1, este cambio se catalogaría dentro de la categoría de *amplitud*.

Otro cambio que logré identificar en el conocimiento de La Preuve fue el relacionado con el término *conjeturación*. En el estado inicial 1 de conocimiento de La Preuve la única mención que se hace a la conjeturación es como término asociado a la conjetura y la única característica que se le otorga es que la conjetura y la conjeturación son diferentes. En el estado 2 de conocimiento se encuentran dos referencias a la conjeturación que le asocian características nuevas en relación con la actividad demostrativa y con los tipos de argumentos. Gracias a estas dos afirmaciones se logró interpretar que la conjeturación, para La Preuve, es una parte previa a la actividad demostrativa y que puede ser promovido por medio de la producción de distintos tipos de argumentos. Dado que se establece con un grado más de detalle ciertas características sobre conjetura, este conocimiento nuevo se cataloga como *profundidad*.

Vínculos entre términos

Con relación al término conjeturación se establecen dos relaciones nuevas: i) relación entre la conjeturación y la actividad demostrativa y ii) la conjeturación con los tipos de argumentos. Con respecto a la actividad demostrativa, La Preuve sostiene que la conjeturación es un eslabón anterior a la actividad demostrativa, por lo tanto, la conjeturación puede abordarse en los grados de sexto y séptimo dejando reservada la actividad demostrativa en los grados de octavo y noveno. Esta visión de los términos conjeturación y actividad demostrativa como pasos de una secuencia, en cuanto a que se aborda primero la conjeturación y luego la actividad demostrativa) permite clasificar esta transformación en la categoría de *consecuencia*.

La segunda relación entre la conjeturación y tipos de argumentos establece que una forma de favorecer la conjeturación es promover que los estudiantes construyan diferentes tipos de argumentos. El uso del término conjeturación podría interpretarse como un sinónimo de argumentación en cuanto a que hay un conocimiento sobre la argumentación en el que se evoca a que es un proceso en el cual se producen argumentos, por lo cual, podría estarse incurriendo en usar conjeturación y argumentación como palabras diferentes que aluden a lo mismo. Lo anterior se corresponde a la categoría de *sinonimia* entre conjeturación y argumentación. Este es un asunto que es susceptible a hacer seguimiento en estados de conocimiento posteriores.

Finalmente, en cuanto a los tipos de argumentos, la definición que se adopta es la proveniente del grupo AEG. En esta conceptualización, los tipos de argumentos están asociados al elemento de la terna que fue producido, encontrado o inferido: en los argumentos de tipo deductivo se deduce la aserción a partir del dato y usando una garantía; en los argumentos inductivos se infiere una regla general por medio del estudio de varios casos y se usa dicha regla como garantía para poder concluir la aserción; y en los argumentos abductivos se propone el dato que hacen que, bajo cierta garantía, se pueda obtener una aserción con la que se cuenta. Esta transformación se corresponde con la subcategoría *diferenciación*.

Asimilación

El único indicio que logré evidenciar que transformación en esta categoría es el proveniente de la conceptualización de los tipos de argumentos. Así como lo mencioné anteriormente, dichas definiciones fueron adoptadas por La Preuve de la charla del Dr. Molina, por lo tanto, es un conocimiento referencial proveniente del grupo AEG como fuente de autoridad, por lo cual se enmarca en la categoría de *repetición*. Hace falta mayor evidencia para decantar si las definiciones provistas en las interacciones son verdaderamente apropiadas por parte del Equipo en sus prácticas profesionales, por ejemplo.

Síntesis de transformación de conocimiento 1 La Preuve

En síntesis, las transformaciones de conocimiento de La Preuve identificadas entre el Estado Inicial 1 y el Estado 2 de conocimiento se presentan en la **Tabla 40**.

Tabla 40. Transformación de conocimiento de La Preuve de Estado Inicial 1 a Estado 2

Categoría de transformación	Subcategoría	Descripción de transformación
Evolución de conceptos	Amplitud	<ul style="list-style-type: none"> • La argumentación es un proceso social y comunicativo, preferiblemente de carácter escrito, en el que se busca que los estudiantes construyan argumentos apoyados en garantías propias del sistema teórico construido colectivamente. • El argumento es el producto de la argumentación. Es una terna de orden escrito que tiene por propósito exponer razones, sustentar o persuadir.
	Profundidad	<ul style="list-style-type: none"> • La conjeturación es una etapa previa a la actividad demostrativa

		<ul style="list-style-type: none"> • La conjeturación puede ser promovida por medio de la producción de distintos tipos de argumentos
	Resignificación	No aplica
Vínculos entre términos	Sinonimia	<ul style="list-style-type: none"> • La conjeturación/argumentación se favorece al promover la producción de diferentes tipos de argumentos
	Contenencia	No aplica
	Intersección	No aplica
	Consecuencia	<ul style="list-style-type: none"> • La conjeturación es la etapa previa a la actividad demostrativa • La producción de distintos tipos de argumentos favorece la conjeturación
	Diferenciación	<ul style="list-style-type: none"> • Los diferentes tipos de argumentos responden al elemento de la terna del argumento que fue producido, encontrado o inferido
Asimilación	Repetición	<ul style="list-style-type: none"> • En los argumentos de tipo deductivo se deduce la aserción a partir de los datos y usando una garantía • En los argumentos inductivos se infiere una regla general por medio del estudio de varios casos y se usa dicha regla como garantía para poder concluir la aserción
		<ul style="list-style-type: none"> • En los argumentos abductivos se proponen los datos que hacen que, bajo cierta garantía, se pueda obtener la aserción
		No aplica
	Apropiación	No aplica

Fase 5. Delimitación del nuevo problema

Una vez finalizó el ciclo de investigación nos encontramos con que el producto del Ciclo de la investigación, es decir, el documento de cierre de ciclo (Anexo 5. Documento de cierre de Ciclo 2) no proveía suficiente información que permitiera aclarar todos los aspectos e interrogantes que dejó abierta la discusión que generó el ciclo en sí mismo. Esto es, las diferencias entre los términos de la instrucción (validación, justificación, explicación, etc.) que reconocimos que estaban asociados a la argumentación y que se encontraban involucrados como términos de instrucción en el enunciado de una tarea abierta de conjeturación a la que nos enfrentamos.

Al percatarnos de que aún no nos acercábamos a la solución de esas preguntas nos pareció natural que el siguiente ciclo de investigación nos llevara a aproximarnos a entender la relación entre la argumentación y las formas en las que podíamos indicar o preguntar a los estudiantes con el objetivo de provocar que ellos generen

argumentos. Por lo tanto, no pudimos llegar a una delimitación de un nuevo problema, pero sí seleccionamos como asunto de interés la relación entre la argumentación y las tareas.

4.4. Inter-ciclo 2 La Preuve

Este ciclo tuvo momento justo después de cerrar el Ciclo 2 con el propósito de ayudar a precisar el problema que se iba a abordar una vez que, como grupo, tuvimos claridad sobre que queríamos investigar las relaciones entre la argumentación y las tareas.

Fase 1. Delimitación del problema

Para poder abordar a futuro un problema asociado con las tareas en relación con la argumentación, decidimos que era importante reconocer o explicitar cuál era nuestro conocimiento relacionado con las tareas.

Fase 2. Diseño del plan de acción

Para contribuir a la visibilización del estado de conocimiento relacionado con las tareas, se me ocurrió usar como herramienta una rutina de pensamiento durante una reunión.

Fase 3. Desarrollo del plan de acción

La rutina de pensamiento que finalmente se propuso al equipo de *La Preuve* fue una adaptación de la rutina “3, 2, 1 puente”. En ella, se solicitaba que cada profesor escribiera 3 ideas o certezas, 2 inquietudes y 1 analogía sobre tarea. En la Figura 9 presento el enunciado presentado a los profesores.

Las respuestas generadas por cada uno de los profesores fueron compartidas, analizadas y discutidas durante dos reuniones. Como insumo para presentar las respuestas a la rutina generé: i) Una nube de palabras que permitiera visibilizar nuestras concepciones empleando la frecuencia de las palabras empleadas por los profesores cuando expresaron sus tres ideas sobre las tareas, ii) un listado con las preguntas que reportaron los profesores sobre las tareas y iii) el listado de las analogías que escribieron sobre las tareas en relación con la enseñanza, al aprendizaje, la pedagogía o las matemáticas.

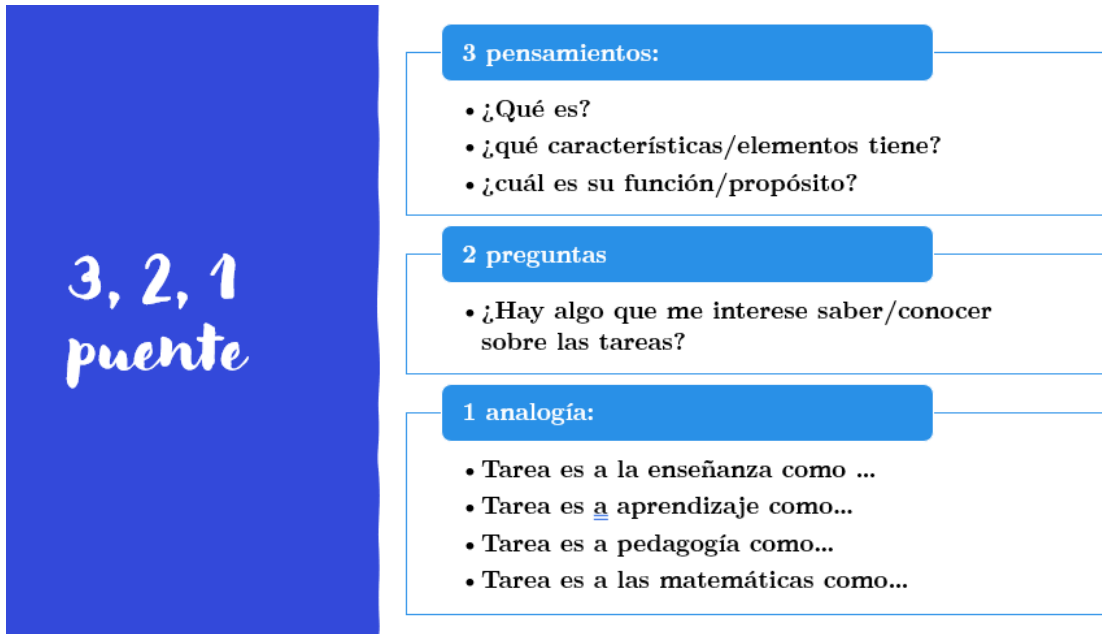


Figura 9. Rutina "3, 2, 1 puente" para el elemento tarea



Figura 10. Concepciones sobre tarea

En la Figura 10 presento la nube de palabras que muestra la relación entre las palabras involucradas en las definiciones preliminares que compartieron los profesores sobre el elemento tarea y la frecuencia con la que se mencionan. De la nube de palabras se resalta la gran diversidad de términos que asociamos con una tarea.

Pese a que las analogías eran lo último que se solicitó en la rutina de pensamiento, fue el segundo aspecto que decidimos analizar. De las analogías presentadas se seleccionaron las que se presentan en la Figura 11 por ser las más interesantes. Estas analogías fueron más dicentes que la nube de palabras en cuanto que dejaron ver propósitos de la tarea en cuanto a la ejercitación, la práctica o la construcción de conocimiento. Nuevamente, hubo diversidad de acepciones.



Figura 11. Analogías sobre tarea

Finalmente, el registro de preguntas fue el que generó un insumo de discusión más rico, no solo por la cantidad de preguntas que se reportaron que develaban una necesidad colectiva de adquirir conocimiento relacionado con las tareas, sino que también una diversidad de aspectos que se desbordaban de la capacidad investigativa que teníamos debido a lo limitado que es el tiempo y que en un ciclo de investigación solo podemos atender una o dos preguntas puntuales. El consolidado de preguntas se presenta la Figura 12.



Figura 12. Inquietudes sobre tareas

Como resultado de la discusión, sobre todo de las inquietudes, concluimos que las que nos competían más como grupo de investigación eran las relacionadas con la argumentación, es decir, ¿Cómo diseñar tareas para cumplir el objetivo de enseñar a argumentar?, ¿hay un modelo/guía para el diseño de tareas enfocadas en favorecimiento de argumentación? Y ¿hay diferentes tipos de tareas en relación con procesos como la argumentación?

Sin embargo, reconocimos, gracias al estudio de nuestras concepciones (ver Figura 10 y Figura 11) que, al igual que sucedió con el elemento argumentación, no teníamos un conocimiento compartido sobre las tareas que nos permitiera, por una parte, tener un discurso unificado que se manifestara con tomas de decisiones más consientes y articuladas, y por otra parte, un constructo teórico desde el cual abordar el problema sobre las tareas de argumentación.

Fase 4. Análisis del conocimiento Estado Inicial 2 La Preuve

Para depurar el conocimiento de La Preuve y poder caracterizarlo tomé como insumo principal las respuestas que los profesores generaron en el marco de la rutina de pensamiento propuesta durante la Fase 1 del Inter-ciclo 2. Dado a que la rutina estuvo pensada para obtener acepciones de la tarea en términos de características, propósitos, elementos constitutivos y su rol dentro de la enseñanza de las

matemáticas, las afirmaciones permitieron decantar solamente conocimiento epistémico de las tareas.

Conocimiento epistémico sobre tarea

Con el propósito de lograr una mejor organización y descripción de los datos que permitieron la caracterización del conocimiento epistémico sobre las tareas del Estado Inicial 2, generé la Tabla 41 en la que se agrupan los datos de acuerdo con el tipo de acepción.

Tabla 41. Conocimiento epistémico sobre tareas Estado Inicial 2

Acep- ción	Afirmación	Interpretación	Descripción ¹³	Código
Característica	Grupo de ejercicios o de acciones que buscan reforzar una habilidad y/o una teoría vista en clase	La tarea es un grupo de ejercicios	Rasgo característico	T_EA_C -RC
	La tarea no debe ser demasiado compleja	La tarea no debe ser demasiado compleja	Complejidad	T_EA_C -Cm
	Ha de ser concreta y debe ser de fácil verificación (revisión)	La tarea debe ser concreta	Rasgo característico	T_EA_C -RC
		La tarea debe ser fácil de revisar	Complejidad	T_EA_C -Cm
	Es un ejercicio que el estudiante realiza con el fin de practicar y consolidar lo aprendido en clase	La tarea es un ejercicio que debe realizar el estudiante	Responsable	T_EA_C -Rs
	Debe ser oportuna y pertinente, no debe ser traída de la nada	La tarea debe ser oportuna y pertinente	Rasgo característico	T_EA_C -RC
	Trabajo que el estudiante debe desarrollar a partir de una noción	La tarea es un trabajo del estudiante	Responsable	T_EA_C -Rs
	Los lineamientos son dados por el profesor.	La tarea es orientada por el profesor	Rasgo característico	T_EA_C -RC
	Actividad en la que se debe demostrar los conocimientos que se tiene de algo.	La tarea es una actividad	Rasgo característico	T_EA_C -RC
	Una tarea se pone a los estudiantes para que tengan tiempo fuera	La tarea se asigna a los estudiantes	Responsable	T_EA_C -Rs

¹³ Palabra que define el tipo de característica (raso característico -RC-, complejidad -Cm-, responsable -Rs-) o propósito (si está relacionado con el aprendizaje, es decir, con el estudiante -Es- o si está relacionado con la enseñanza, es decir, con el profesor -Pr-)

	del transcurrir de la clase, para llevar a la práctica los procedimientos matemáticos vistos en clase, y que cada estudiante se pueda tomar el tiempo que considere necesario para interiorizar lo visto.	La tarea implica que se genere un producto como evidencia del cumplimiento de las acciones	Rasgo característico	$T_E A_C$ -RC
	Herramienta diagnóstica	La tarea es una herramienta diagnóstica	Rasgo característico	$T_E A_C$ -RC
	Oportunidad para el estudiante	La tarea es una oportunidad para el estudiante	Responsable	$T_E A_C$ -Rs
	Herramienta de medición	La tarea es una herramienta de medición	Rasgo característico	$T_E A_C$ -RC
Propósito	Grupo de ejercicios o de acciones que buscan reforzar una habilidad y/o una teoría vista en clase	La tarea busca reforzar una habilidad y/o una teoría vista en clase	Estudiante	$T_E A_P$ -Es
	Es un ejercicio que el estudiante realiza con el fin de practicar y consolidar lo aprendido en clase.	La tarea sirve para practicar y consolidar lo visto en clase	Estudiante	$T_E A_P$ -Es
	La tarea debe tener un objetivo claro.	La tarea debe tener un objetivo claro.	Profesor	$T_E A_P$ -Pr
	Trabajo que el estudiante debe desarrollar a partir de una noción	La tarea debe procurar que el estudiante use una noción	Estudiante	$T_E A_P$ -Es
	Actividad en la que se debe demostrar los conocimientos que se tiene de algo.	La tarea sirve para que el estudiante demuestre sus conocimientos	Estudiante	$T_E A_P$ -Es
	Una tarea se pone a los estudiantes para que afiancen los conocimientos vistos en clase	La tarea sirve para que los estudiantes afiancen el conocimiento	Estudiante	$T_E A_P$ -Es
	Una tarea se pone a los estudiantes para que tengan tiempo fuera del transcurrir de la clase, para llevar a la práctica los procedimientos matemáticos vistos en clase, y que cada estudiante se pueda tomar el tiempo que considere necesario para interiorizar lo visto.	La tarea se asigna para que los estudiantes dediquen tiempo extra-clase	Estudiante	$T_E A_P$ -Es
		La tarea se asigna para que los estudiantes lleven a la práctica su conocimiento	Estudiante	$T_E A_P$ -Es

	La tarea promueve que el estudiante tome el tiempo necesario para interiorizar lo visto	Estudiante	$T_E A_P$ -Es	
Una tarea es una reflexión individual	La tarea es una reflexión individual	Estudiante	$T_E A_P$ -Es	
Es un ejercicio metacognitivo donde el estudiante se hace consciente de su proceso de aprendizaje	La tarea es un ejercicio metacognitivo en el que el estudiante se hace consciente de su aprendizaje	Estudiante	$T_E A_P$ -Es	
Aplicar lo aprendido	La tarea sirve para que el estudiante aplique lo aprendido	Estudiante	$T_E A_P$ -Es	
Su propósito es afianzar un conocimiento e identificar dudas	La tarea sirve para afianzar conocimiento e identificar dudas	Estudiante	$T_E A_P$ -Es	
Actividad que estipula una serie de acciones a llevar a cabo, en la que se espera un producto como entrega que evidencia el cumplimiento de las acciones	La tarea es una actividad en la que se estipulan acciones a llevar a cabo	Profesor	$T_E A_P$ -Pr	
La tarea sirve para comprobar el aprendizaje de los estudiantes	La tarea sirve para comprobar el aprendizaje de los estudiantes	Profesor	$T_E A_P$ -Pr	
La tarea sirve para retroalimentar a los estudiantes	La tarea sirve para retroalimentar a los estudiantes	Profesor	$T_E A_P$ -Pr	
La tarea es una herramienta que se utiliza para que el estudiante profundice en algún tema	La tarea es una herramienta que se utiliza para que el estudiante profundice en algún tema	Estudiante	$T_E A_P$ -Es	
Elementos	Debe tener instrucciones	La tarea debe tener instrucciones	Enunciado	$T_E A_E$
	Se evidencia mediante un producto final (escrito u oral)	La tarea tiene un producto final que puede ser oral o escrito	Producto	$T_E A_E$

Con respecto a las acepciones de tareas que logré identificar puedo advertir varios aspectos. Sobre las características, que es el tipo de acepción que tiene más datos, identifiqué varios adjetivos con los cuales los profesores generan sus

descripciones. Los profesores que realizaron apreciaciones sobre la estructura de una tarea la asocian con agrupaciones de ejercicios o actividades. Pese a que no hay precisión sobre a qué se refieren con la palabra ejercicios o actividades sí coinciden en que debe existir claridad para el estudiante sobre qué debe resolver.

En cuanto a la complejidad de una tarea, todos los profesores coinciden en que la tarea, al ser una propuesta para el estudiante, debe ser alcanzable para él. El estudiante es quien debe proveer una solución a la tarea por sus propios medios. Adicionalmente, la complejidad de la tarea también la asocian con la acción que debe realizar el profesor posterior a que el estudiante solucione la tarea que es la revisión y calificación. La tarea, por lo tanto, no solo debe ser fácil de hacer sino también fácil de evaluar.

El tiempo en el que ubican que un estudiante debe realizar una tarea es en tiempo extra-clase, sin embargo, también hay afirmaciones que declaran que la tarea debe ser pertinente y oportuna. Estas categorizaciones aluden principalmente a momentos de desarrollo del curso, por ejemplo, que la tarea se asigne después de una explicación para afianzar conocimiento o antes de un momento de evaluación para repasar y practicar.

Las acepciones que contenían información sobre los propósitos de una tarea las pude diferenciar con respecto al individuo que se encontraba involucrado, es decir, si aludían al profesor o al estudiante. La gran mayoría de profesores aludieron a propósitos en cuanto al aprendizaje del estudiante. Fue muy usual que usaran verbos como afianzar, ejercitar o practicar para referirse a que la tarea permitía al estudiante poner en juego conocimientos previamente vistos en clase. Otra postura que encontré estuvo más relacionada con la tarea como oportunidad para que el estudiante reflexionara sobre su conocimiento, es decir, que permitiera en el estudiante hacer una verificación de si había comprendido lo visto en clase, que pudiera explicitar dudas e inquietudes de los temas o incluso profundizar. En cuanto al profesor, evidentemente fue asociado con el origen de la tarea, esto es, es el profesor la persona que determina el objetivo de la tarea, le asigna la tarea al estudiante y le da las indicaciones generales (lineamientos) para resolverla. Adicionalmente, logré identificar dentro del discurso que el diseño de tarea implica que el profesor no solo prevea las acciones que debe hacer estudiante para resolverla, sino que las indicaciones que le brinda, ya sea

orales o escritas, deben ir en procura de que el estudiante efectivamente realice dichas acciones.

Finalmente, se identifican como elementos de la tarea las indicaciones o instrucciones que brinda el profesor y también el producto que genera el estudiante y que reporta la solución de la tarea. Para la mayoría de los profesores que menciona la producción de los estudiantes, hay una fuerte inclinación a pensar que la importancia de la producción radica en la evidencia de que el estudiante realizó la tarea más allá de que se lograra el objetivo de la tarea.

Síntesis de conocimiento Estado Inicial 2 La Preuve

Sobre el Inter-ciclo 2 de La Preuve quiero mencionar, en primera instancia, que las decisiones tomadas sobre las Fases 1 y 2 reflejaron un aprendizaje más allá de ellos elementos argumento y tarea. El aprendizaje mayor está relacionado con una sensibilidad relacionada con la problematización del conocimiento como objeto de estudio que no se tenía iniciando la investigación.

Es necesario recordar que en el inter-ciclo 1 fue mi orientación de la discusión la que dio origen a los datos para determinar el estado de conocimiento inicial 1 fue la que permitió que los demás profesores identificaran la falta de conocimiento compartido sobre la argumentación como un problema relevante que debíamos abordar. Sin embargo, en este segundo inter-ciclo la detección del problema se realizó ya sin la necesidad de mi mediación. Esto quiere decir que sí hay interiorización por parte del equipo de profesores de la necesidad de partir de la construcción de acuerdos y la consolidación de conocimiento si queremos llegar a un cambio real en términos de una problemática del aula.

De la caracterización del conocimiento inicial 2 de la Preuve sobre las tareas hay aspectos también relevantes. A diferencia del estado inicial 1 sobre la argumentación, no se encontraron puntos de vista tan diversos en términos de posturas que se contraponen. Tal vez, debido a esto, fue relativamente sencillo encontrar, ante el problema de la falta de unicidad en las definiciones de tarea, secuencia de tareas y elementos de una tarea, una solución que no implicó invertir tanto tiempo, como si lo implicó el primer inter-ciclo.

Las tareas, según sus características, son vistas por algunos como herramientas para lograr afianzar y ejercitar conocimientos sobre objetos matemáticos trabajados en clase. No se hace alguna precisión sobre tipos de objetos matemáticos. Se mencionan palabras como “nociones” o “habilidades”, pero de manera estricta no se consolida una explicación sobre qué es lo que se busca afianzar o ejercitar, mucho menos por qué es relevante esto en el aprendizaje del estudiante. La otra postura, relacionada con las tareas como oportunidades de reflexión se queda corta en términos de especificar en qué consisten esas oportunidades y cómo el estudiante logra efectuar de verdad una introspección sobre el conocimiento. Estos asuntos podrían retomarse y puntualizarse en el ciclo de investigación posterior; por el momento, son cuestionamientos que quedan abiertos a la interpretación.

Llamó mi atención que la complejidad de la tarea fuera un aspecto que los profesores tuvieran tan presente. Las tareas, para la mayoría, deben ser solicitudes sencillas, fáciles de solucionar para el estudiante y fáciles de revisar para el profesor. Hay que ver cómo esta postura puede armonizar con la idea de que las tareas propicien oportunidades para que el estudiante afiance conocimientos o cómo desde una tarea sencilla, de solución evidente, se logra la motivación del estudiante y la reflexión sobre sus conocimientos. Nuevamente, son asuntos que quedan pendientes para pensar y discutir. Por otra parte, se podría pensar que el concebir que las tareas deben ser de fácil revisión impacta el proceso de diseño, casi como si se tratara de un criterio para la escritura del enunciado.

En la misma línea del rol del profesor con relación a la tarea, evidentemente todos identifican al profesor como el origen de la tarea. Es decir, el profesor es responsable de diseñar, asignar la tarea a los estudiantes, delimitar el objetivo, identificar el momento en el que debe realizarse, entre otros aspectos. Sin embargo, no se identifica que los profesores realicen alguna acción mientras el estudiante soluciona la tarea; de hecho, el discurso tiende a responsabilizar al estudiante sobre la producción de la respuesta. Hay una mención que ubica al profesor como guía de las acciones del estudiante por medio de las indicaciones que se brinda en la tarea, pero esto más bien evoca a que el profesor plantea las preguntas pensando en indicar al estudiante que acción debe realizar o qué respuesta debe generar.

Fase 5. Delimitación del nuevo problema

Con las definiciones de tarea, secuencia de tareas y los elementos de una tarea acordados por el equipo, decidimos que el último ciclo de investigación iba a estar encaminado a identificar cómo debe ser una tarea que promueva la argumentación.

4.5. Ciclo 3 La Preuve

Este es el ciclo final con el que se pretendía dar cierre al proyecto de investigación de La Preuve.

Fase 1. Delimitación del problema

El problema que decidimos abordar fue el identificar cómo debe ser una tarea que promueva la argumentación. Puntualizamos dicha inquietud en la pregunta ¿qué criterios de diseño vamos a adoptar para generar tareas que favorezca el proceso de argumentación en el Gimnasio Vermont?

Fase 2. Diseño del plan de acción

El plan de acción que planteamos, inicialmente, fue muy sencillo en comparación con los de los demás ciclos. Teniendo en mente la cercanía y afinidad que sentíamos ante los conocimientos que nos compartió el Dr. Molina con relación a la postura que tiene el grupo AEG en cuanto a la argumentación, decidimos optar por buscar un referente teórico para tarea que fuera cercano. Optamos por estudiar el constructo denominado Análisis Didáctico propuesto por Gómez, Mora y Velasco (2018).

Debido a que yo había realizado un estudio de algunos apartados del libro, en particular, lo referente al Análisis de Instrucción, los demás profesores me solicitaron que compartiera con ellos las definiciones más relevantes para poder decidir si eran apropiadas para nuestros objetivos de investigación.

Posteriormente, decidimos que era importante que antes de lograr depurar una lista de criterios analizáramos tareas de libros de texto que según nuestra percepción promueven la argumentación.

La hipótesis que teníamos era que, al analizar tareas de libros de texto, iba a ser más sencillo identificar características, estructura, tipos de enunciados y otros

aspectos que finalmente nos llevarán a establecer unos lineamientos que nos permitan que las tareas que diseñemos tengan las características que encontramos.

Por lo tanto, las acciones que nos propusimos realizar como un segundo plan de acción fueron las siguientes

1. Por equipos de dos o tres profesores seleccionar de algún libro de texto una tarea que favorezca la argumentación.
2. Preparar un documento en el que se presente el enunciado de la tarea acompañado por una posible solución y una justificación breve de por qué considera el grupo que la tarea es una tarea de argumentación
3. Realizar una presentación en la que cada equipo expondría su tarea
4. Discutir los elementos que encontramos comunes entre todas las tareas para seleccionar las características que debe tener una tarea de argumentación
5. Redactar los criterios de diseño a la luz del listado de características de una tarea de argumentación.

Fase 3. Desarrollo del plan de acción

Producto de la socialización que realicé sobre las definiciones de algunos términos asociados con el constructo tarea propuestos por Gómez, Mora y Velasco (2018) las definiciones que elegimos adoptar de tarea, tarea matemática, secuencia de tareas y elementos de una tarea se presentan en la Tabla 42.

Tabla 42. Definiciones de conceptos asociados a tarea adoptados por La Preuve

Término	Definición (Gómez, Mora, & Velasco, 2018)
Tarea	Es una propuesta didáctica que lleva al aula el docente con la intención de brindar oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y afectivas que ha establecido, y superen las limitaciones que ha conjeturado que ellos tendrán.
Tarea matemática	Una demanda estructurada, con un contenido matemático y un propósito de aprendizaje, que el profesor propone a los estudiantes con carácter intencional. Con motivo de una tarea, profesor y estudiantes realizan actividades, que los estudiantes pueden desarrollar de manera individual o en grupo
Secuencia de tareas	Una tarea solicita la solución de un solo requerimiento (pregunta) con base en una información dada. Por consiguiente, aun si tienen el mismo contexto y la misma

	información de partida, dos preguntas en relación con ese contexto y esa información pueden determinar dos tareas diferentes.
Elementos de una tarea	Una tarea tiene 7 elementos a saber: requisitos, meta, formulación, recursos, agrupamientos, interacciones y temporalidad

Se conformaron cuatro equipos de trabajo de dos o tres profesores a los que nombraremos con las letras A, B, C y D. Las tareas seleccionadas junto con la explicación de por qué son tareas de argumentación se presentan en el Anexo 8. Análisis de tareas seleccionadas de libros de texto, sin embargo, en la Tabla 43 expongo las características que surgieron del estudio de los documentos que se generaron cuando los profesores expusieron razones que sustentaran que la tarea elegida era una tarea de argumentación

Tabla 43. Características de una tarea de argumentación

Equipo	Aporte
A	<ul style="list-style-type: none"> • La tarea permite que el estudiante acuda a un hecho geométrico conocido • La tarea permite que los estudiantes recurran a GeoGebra o a representaciones a mano alzada para convencerse de sus descubrimientos • La tarea solicita que los estudiantes generen un discurso • La tarea permite el uso de propiedades geométricas y aritméticas para hacer deducciones
B	<ul style="list-style-type: none"> • La tarea tiene un enunciado dentro de un contexto • La tarea exige que el estudiante ponga en juego habilidades cognitivas, conceptos, algoritmos y representaciones.
C	<ul style="list-style-type: none"> • La tarea requiere el uso de elementos de un sistema teórico • La tarea incluye como solicitud la elaboración de una construcción • La tarea requiere que el estudiante haga una buena lectura e interpretación de lenguaje y terminología matemática. • La tarea genera necesidad de buscar relaciones entre los objetos involucrados • La tarea promueve que el estudiante se interrogue sobre propiedades invariantes • La tarea permite la exploración
D	<ul style="list-style-type: none"> • La tarea tiene un enunciado abierto • La tarea solicita que se establezca/produzca una conjetura • La tarea permite la exploración no planificada por el docente con un EGD • La tarea no incluye preguntas que limiten las respuestas de los estudiantes • La tarea solicita que se demuestre la conjetura

De acuerdo con las características que se propusieron de la presentación de cada equipo, como grupo de investigación planteamos los siguientes criterios de diseño para tareas de argumentación:

1. El enunciado de la tarea debe ser abierto, las respuestas no deben ser limitadas o sesgadas por las preguntas.
2. El enunciado debe incluir como requerimiento que el estudiante escriba reportes de la actividad que realiza
3. La tarea debe incluir que el estudiante acuda a algún tipo de representación, ya sea dinámica o no.
4. La tarea, preferiblemente, debe solicitar a un estudiante una conjetura y su demostración
5. Las preguntas formuladas en la tarea deben ser preguntas de indagación y brindar al estudiante la oportunidad de explorar, descubrir y conjeturar.
6. La tarea debe promover el pensamiento crítico y reflexivo. Los estudiantes deben sostener con argumentos sus puntos de vista.

Al finalizar la ejecución del plan de acción, el equipo de profesores produjo en documento de Cierre de Ciclo 3 (ver Anexo 9. Documento de cierre de Ciclo 3). Dicho documento se convirtió en el insumo principal para caracterizar el Estado 3 de conocimiento de La Preuve

Fase 4. Análisis del conocimiento Estado 3 La Preuve

Tal como lo mencioné anteriormente, el insumo principal para depurar el Estado 3 de conocimiento fue el documento de cierre del Ciclo 3. Dado que este documento recopila los acuerdos a los que se llegó sobre las tareas, incluyendo las definiciones adoptadas durante el inter-ciclo 2 y los criterios de diseño de tareas de argumentación, los datos se concentraron mayoritariamente en la faceta epistémica.

Conocimiento epistémico sobre tarea

Al igual que en el estado anterior, me valí de una tabla en la que, adicional a las afirmaciones y sus interpretaciones, se presenta una descripción que particulariza dentro de la categoría emergente a la afirmación (en este caso, tipos de acepción) y un código que se corresponde con dicha particularización. Los datos organizados de acuerdo con el tipo de acepción se presentan en la Tabla 44

Tabla 44. Conocimiento epistémico sobre tarea Estado 3 La Preuve

Acep- ción	Afirmación	Interpretación	Descripción	Código
Característica	Del Modelo de Análisis didáctico (Gómez, 2016) se ha acogido que una definición de tarea	La definición que adopta La Preuve para tarea es la que provee Gómez (2016)	Rasgo característico	$T_E A_C$ -RC
	Una tarea es una propuesta didáctica que lleva al aula el docente	Una tarea es una propuesta didáctica que lleva al aula el docente	Rasgo característico	$T_E A_C$ -RC
	Una tarea matemática, de acuerdo con Gómez (2016), como una demanda estructurada	Una tarea matemática, de acuerdo con Gómez (2016), como una demanda estructurada	Rasgo característico	$T_E A_C$ -RC
Propósito	[Una tarea tiene] la intención de brindar oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y afectivas que ha establecido el docente	[Una tarea tiene] la intención de brindar oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y afectivas que ha establecido el docente	Estudiantes	$T_E A_P$ -Es
	Con motivo de una tarea, profesor y estudiantes realizan actividades	Una tarea provoca que profesor y estudiantes realicen actividad.	Profesor	$T_E A_P$ -Pr
Elementos ¹⁴	[Una tarea tiene] la intención de brindar oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y afectivas que ha establecido el docente	Para diseñar una tarea el profesor tiene en cuenta las expectativas de aprendizaje y afectivas de los estudiantes	Requisitos	$T_E A_E$ -Rq
	[Una tarea tiene] la intención que los estudiantes superen las limitaciones que [el profesor] ha conjeturado que ellos tendrán.	Para diseñar una tarea el profesor tiene en cuenta las limitaciones que podrían tener los estudiantes	Requisitos	$T_E A_E$ -Rq
	Una tarea matemática cuenta con un contenido matemático y un propósito de aprendizaje	Una tarea matemática cuenta con un contenido matemático y un propósito de aprendizaje	Meta	$T_E A_E$ -Me

¹⁴ Se incluyen códigos para los elementos de una tarea: requisitos -Rq-, meta -Me-, formulación -Fo-, materiales y recursos -Rc-, agrupamiento -Ag-, interacción-In- y temporalidad -Te-

los estudiantes pueden desarrollar [la actividad para solucionar una tarea] de manera individual o en grupo.	los estudiantes pueden desarrollar [la actividad para solucionar una tarea] de manera individual o en grupo.	Agrupamiento	$T_E A_E - Ag$
Una tarea contará con determinados elementos que, en conjunto con los verbos de instrucción, favorecerán el proceso de argumentación en Geometría	Una tarea contará con determinados elementos que, en conjunto con los verbos de instrucción, favorecerán el proceso de argumentación en Geometría	Formulación	$T_E A_E - Fo$
Los elementos de una tarea son: Requisitos, meta, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad	Los elementos de una tarea son: Requisitos, meta, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad	Elementos	$T_E A_E$
De los propuestos por el programa (IB), se listan los verbos de interés para La Preuve	De los propuestos por el programa (IB), se listan los verbos de interés para La Preuve	Formulación	$T_E A_E - Fo$
Deducir: Establecer una conclusión a partir de la información suministrada	[Si el enunciado de la tarea incluye la palabra] Deducir [se espera que el estudiante logre] Establecer una conclusión a partir de la información suministrada	Formulación	$T_E A_E - Fo$
Justificar: Proporcionar razones o pruebas válidas que respalden una respuesta o conclusión.	[Si el enunciado de la tarea incluye la palabra] Justificar [se espera que el estudiante logre] Proporcionar razones o pruebas válidas que respalden una respuesta o conclusión.	Formulación	$T_E A_E - Fo$
Mostrar: Indicar los pasos realizados en un cálculo o deducción.	[Si el enunciado de la tarea incluye la palabra] Mostrar [se espera que el estudiante logre] Indicar los pasos realizados en un cálculo o deducción.	Formulación	Fo
Mostrar que: Obtener el resultado requerido (posiblemente, utilizando la información dada) sin necesidad de una prueba. En este tipo de preguntas, por lo	[Si el enunciado de la tarea incluye la palabra] Mostrar que [se espera que el estudiante logre] Obtener el resultado requerido (posiblemente, utilizando la	Formulación	Fo

general, no es necesario el uso de la calculadora.	información dada) sin necesidad de una prueba. En este tipo de preguntas, por lo general, no es necesario el uso de la calculadora.		
Probar: Aclarar mediante razonamientos o datos, ilustrando con ejemplos o aplicaciones prácticas	[Si el enunciado de la tarea incluye la palabra] Probar [se espera que el estudiante logre] Aclarar mediante razonamientos o datos, ilustrando con ejemplos o aplicaciones prácticas	Formulación	$T_E A_E - F_o$
Demostrar: Utilizar una secuencia de pasos lógicos para obtener el resultado requerido de un modo formal.	[Si el enunciado de la tarea incluye la palabra] Demostrar [se espera que el estudiante logre] Utilizar una secuencia de pasos lógicos para obtener el resultado requerido de un modo formal.	Formulación	$T_E A_E - F_o$

El conocimiento que reporta *La Preuve* con respecto al constructo *tareas* está fuertemente influenciado por la postura de Gómez, Mora y Velasco (2018) que se desprende de su constructo Análisis Didáctico. En este estado conocimiento se reconoce que una característica principal de las tareas es que son propuestas didácticas que son llevadas al aula por el docente como una demanda estructurada que permite al estudiante realizar actividad en pro de resolverlas.

Por otra parte, la tarea tiene un propósito muy específico y es brindar a los estudiantes oportunidades para que logren expectativas de aprendizaje y afectivas que previamente ha establecido el docente. Dichas expectativas están relacionadas con el conocimiento matemático que el profesor espera que adquieran o apliquen. Es importante resaltar que un propósito adicional es que los participantes, tanto profesores como estudiantes, realicen actividad matemática interesante. La tarea debe implicar un reto.

Con respecto a los elementos que tiene una tarea se menciona en varias cosas importantes. El primer aspecto en el que quiero centrar la atención es en la explicación de que la tarea cuenta con un propósito aprendizaje, asimismo, este propósito de aprendizaje está asociado, no solamente con el contenido matemático, sino

también con conocimiento que tiene el profesor sobre las habilidades y conocimientos previos del estudiante. Lo anterior se constituye como conocimiento asociado a aspectos que el profesor debe tener en mente para diseñar.

En contraparte se entiende del discurso que sumen como elementos de una tarea los que contemplan Gómez, Mora y Velasco (2018) desde su constructo. Estos elementos son: requisitos, meta, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad. Se hace fuerte alusión sobre todo al elemento de formulación por medio de la explicitación de los términos de instrucción provenientes del programa del bachillerato internacional -IB- y que, hipotéticamente, pueden estar involucrados en la relación entre el enunciado de una tarea y la intención de provocar que los estudiantes produzcan argumentos.

Los términos de instrucción seleccionados por los profesores son los siguientes

- **Deducir:** Establecer una conclusión a partir de la información suministrada.
- **Mostrar:** Aclarar mediante razonamientos o datos, ilustrando con ejemplos o aplicaciones prácticas.
- **Justificar:** Proporcionar razones o pruebas válidas que respalden una respuesta o conclusión.
- **Mostrar:** Indicar los pasos realizados en un cálculo o deducción.
- **Mostrar que:** Obtener el resultado requerido (posiblemente, utilizando la información dada) sin necesidad de una prueba. En este tipo de preguntas, por lo general, no es necesario el uso de la calculadora.
- **Probar:** Utilizar una secuencia de pasos lógicos para obtener el resultado requerido de un modo formal.

El grupo de investigación hace la aclaración que, aunque el programa IB hace una distinción para cada verbo de instrucción, para el Programa de Matemáticas del Colegio Gimnasio Vermont se entiende e implementa que:

- **Probar:** Aclarar mediante explicaciones o datos, ilustrando con ejemplos o aplicaciones prácticas.
- **Mostrar:** Utilizar una secuencia de argumentos deductivos para obtener el resultado requerido de un modo formal.

Este cambio en las definiciones de los verbos de instrucción Probar y demostrar se debe a que no son coherentes con la postura que hemos asumido sobre los términos afines a la argumentación, puntualmente, los argumentos y tipos de argumentos

Síntesis de conocimiento Estado 3 La Preuve

A la luz de la reorganización de datos (ver Tabla 44) surgen varias cosas que vale la pena mencionar como relevantes sobre el conocimiento epistémico de las tareas. En primera instancia, se reducen considerablemente la cantidad de datos asociados a características y propósitos de una tarea de una tarea. Esto se debe, principalmente, a que al adoptar la definición de tarea proveniente del constructo análisis didáctico, las características y propósitos que se identifican en relación con las tareas son las que se desprenden de dichas definiciones.

Adicionalmente, se observa que, a diferencia del estado anterior de conocimiento, incrementa la cantidad de datos asociados a elementos de una tarea. Sobre este incremento de datos es importante resaltar que las afirmaciones encontradas están asociadas a los elementos que Gómez, Mora y Velasco (2018) concibe como los elementos que constituyen el diseño de una tarea. Esto da cuenta de una apropiación en el discurso por parte de los profesores que hace que piensen y evoquen estos elementos a la hora de esbozar o generar afirmaciones con el objetivo de tratar de explicar relaciones entre tarea y argumentación

Mi atención se centra en el elemento formulación, ya que las afirmaciones que logre asociar con esta subcategoría de los elementos de las tareas están relacionadas directamente con lo que se denominó en el ciclo 1 términos de instrucción. Esto es, los términos que pueden estar involucrados en el enunciado de una tarea y que tienen como propósito indicar al estudiante el tipo de acción que se espera que realicen o el tipo de producto que se espera que generen.

Pese a que los términos de instrucción que se identificaron en el inter-ciclo 1 (validación, explicación, descripción, etc.) no son los mismos que aparecen en este ciclo, sí podemos afirmar que podrían ser eventualmente términos afines con el constructo argumentación. Estos términos son: demostrar, justificar, mostrar, probar, entre otros. Sin embargo, no se catalogaron dentro de conocimiento sobre

argumentación debido a que aparecen en el discurso de los profesores como explicaciones de la actividad que se espera que realice el estudiante.

Análisis de transformación de conocimiento La Preuve 2: Estado Inicial 2 a Estado 3

A continuación, presento la transformación de conocimiento compartido de *La Preuve* con relación al elemento tarea. Me valgo de la comparación de los estados de conocimiento que surgieron del inter-ciclo 2 (Estado Inicial 2) y el Ciclo 3 (Estado 3).

Evolución de conceptos

Al igual que en la transformación de conocimiento 2, el cambio principal fue en la elección de una definición para tarea, tarea matemática y secuencia de tareas. Decidimos adoptar, para dichos términos, las definiciones provenientes del constructo Análisis de Didáctico (Gómez, Mora, & Velasco, 2018) (ver Tabla 42). La adquisición de la definición de tarea y tarea matemática se constituyen en evidencia de profundidad, mientras que la adquisición de la definición de secuencia de tarea se constituye como una ampliación de conocimiento, ya que no teníamos en nuestro discurso presencia de dicho término.

Hay dos características que tuvieron un cambio importante. Inicialmente, en el estado de conocimiento anterior, la mayoría de los profesores sostenían que la responsabilidad de la solución de la tarea era del estudiante, sin embargo, se identifica que en este estado de conocimiento esta postura cambia. Ahora, se reconoce que una característica de una tarea es que, con motivo de solución, tanto profesores como estudiantes realicen actividad matemática. Este cambio es una *resignificación*.

Otra transformación de conocimiento asociada a la categoría de resignificación está relacionada con la complejidad de las tareas. Anteriormente, los profesores consideraban relevante que la tarea fuera sencilla de tal forma que fuera fácil de realizar por parte del estudiante, pero también fácil de revisar o calificar por parte del profesor. Dicha postura también cambia, ya que se reconoce que, para que la actividad matemática que pueda realizar el estudiante sea suficientemente rica, la tarea debe implicar un reto.

Otro cambio de conocimiento que da cuenta de la evolución de conceptos es la adopción de las definiciones que hace IB de lo que nosotros conocemos como términos de instrucción. Nuevamente, se trata de una ampliación de conocimiento en cuanto a que estos términos hasta el momento los habíamos concebido como términos afines a la argumentación sin embargo logramos establecer definiciones a partir del uso que se le da a cada una de las palabras en el marco del enunciado de una tarea.

Vínculos entre términos

Tal como lo expuse en la sección anterior, considero que un cambio importante que hubo estuvo relacionado con la identificación de los términos de instrucción que habíamos definido en el inter-ciclo 1 y que, inicialmente para nosotros, tenían relación con el constructo argumentación. Aparecen de nuevo en este estado de conocimiento los términos de instrucción, pero esta vez asociados al elemento formulación de las tareas. Esto da cuenta de que, implícitamente, encontramos una relación entre la argumentación y las tareas que nos permitió caracterizar los enunciados de lo que nosotros consideramos tareas que promueven la argumentación. Esta transformación la caracterizó como *intersección* ya que se reconoce que los términos de instrucción son ese elemento común que permite articular el discurso entre el constructo argumentación y cómo favorecer la argumentación con el diseño de tareas, específicamente, como formular un enunciado de tal forma que se genere la necesidad del estudiante producir argumentos

Asimilación

Finalmente, es importante reconocer que la transformación de conocimiento que está involucrada en la adopción de las definiciones de tarea, secuencia de tareas, tarea matemática y elementos de una tarea provenientes del constructo análisis didáctico (Gómez, Mora, & Velasco, 2018) es una transformación de *repetición* ya que aceptamos a este referente teórica como una fuente de autoridad en el tema, adicionalmente, es lo suficientemente cercana y contextualizada para poder asumir de manera total la postura en cuanto a estas definiciones.

Sin embargo, sí es importante reconocer que la elección de dicho constructo también estuvo alineada con la percepción que tenemos de la cercanía que tiene está con nuestro referente didáctico de la geometría que es la propuesta del grupo AEG

de la UPN. Por lo tanto, la elección del constructo Análisis Didáctico (Gómez, Mora, & Velasco, 2018) pone de manifiesto que existe una transformación en cuanto a nuestro conocimiento referencial, ya que logramos hacer vínculos explícitos entre dos fuentes de autoridad. Esta transformación se cataloga en la categoría de *conexiones*.

De manera similar, al tomar como referente de las definiciones de los términos de instrucción a la organización IB, tenemos una nueva evidencia de conexiones entre fuentes de autoridad. Sin embargo, debido a que de esas definiciones propuestas reconocimos que las de los términos *demostrar* y *probar* no se correspondían con las con los acuerdos a los que habíamos llegado en cuanto a nuestro conocimiento de argumentación, se puede inferir que hay un nivel de apropiación importante de los referentes teóricos que hemos seleccionado que nos permite, no solo parafrasear y hacer conexiones, sino también adecuar y adaptar de forma que sea coherente el constructo que estamos intentando consolidar. Esta es una clara manifestación de transformación de conocimiento en el nivel de *asimilación*

Síntesis de transformación de conocimiento La Preuve 2

En síntesis, las transformaciones de conocimiento de La Preuve identificadas entre el Estado Inicial 1 y el Estado 2 de conocimiento se presentan en la **Tabla 45**

Tabla 45. Transformación de conocimiento de La Preuve de Estado Inicial 2 a Estado 3

Categoría de transformación	Subcategoría	Descripción de transformación
Evolución de conceptos	Amplitud	<ul style="list-style-type: none"> • Una tarea solicita la solución de un solo requerimiento (pregunta) con base en una información dada. Por consiguiente, aun si tienen el mismo contexto y la misma información de partida, dos preguntas en relación con ese contexto y esa información pueden determinar dos tareas diferentes. • Deducir es establecer una conclusión a partir de la información suministrada. • Justificar es proporcionar razones o pruebas válidas que respalden una respuesta o conclusión. • Mostrar es indicar los pasos realizados en un cálculo o deducción. • Mostrar que es obtener el resultado requerido (posiblemente, utilizando la información dada) sin necesidad de una prueba. En este tipo de preguntas, por lo general, no es necesario el uso de la calculadora.

		<ul style="list-style-type: none"> • Probar es aclarar mediante explicaciones o datos, ilustrando con ejemplos o aplicaciones prácticas. • Demostrar es utilizar una secuencia de argumentos para obtener el resultado requerido de un modo formal.
	Profundidad	<ul style="list-style-type: none"> • Una tarea es una propuesta didáctica que lleva al aula el docente con la intención de brindar oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y afectivas que ha establecido, y superen las limitaciones que ha conjeturado que ellos tendrán. • Una tarea matemática es una demanda estructurada, con un contenido matemático y un propósito de aprendizaje, que el profesor propone a los estudiantes con carácter intencional.
	Resignificación	<ul style="list-style-type: none"> • Con motivo de una tarea, profesor y estudiantes realizan actividades, que los estudiantes pueden desarrollar de manera individual o en grupo • La tarea debe implicar un reto.
Vínculos entre términos	Sinonimia	No aplica
	Contenencia	No aplica
	Intersección	<ul style="list-style-type: none"> • Los términos de instrucción que pueden estar involucrados en el enunciado de una tarea tienen como propósito indicar al estudiante el tipo de acción que se espera que realicen o el tipo de producto que se espera que generen, por lo tanto, pueden ayudar a cumplir el objetivo de promover la producción de argumentos.
	Consecuencia	No aplica
	Diferenciación	No aplica
Asimilación	Repetición	<ul style="list-style-type: none"> • Adopción de las definiciones de tarea, secuencia de tareas, tarea matemática y elementos de una tarea provenientes del constructo análisis didáctico (Gómez, Mora, & Velasco, 2018)
	Conexiones	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocimiento de la cercanía entre los constructos Análisis didáctico y Actividad Demostrativa
	Apropiación	<ul style="list-style-type: none"> • Adaptación de las definiciones de demostrar y probar provenientes del IB a la luz de los referentes de Análisis Didáctico y Actividad Demostrativa.

Capítulo 5. Conclusiones

En esta sección presento las conclusiones de mi trabajo de grado. Inicialmente analizaré el cumplimiento de los objetivos y hablaré de los resultados más relevantes de los análisis para, al final, mencionar algunas de las reflexiones que como profesional de la educación me dejó el proceso de investigación

5.1. Con respecto a los objetivos del estudio

En relación con el objetivo general de la investigación, considero que con el estudio realizado este es cumplido de una manera satisfactoria por cuanto, por un lado, logré caracterizar el conocimiento didáctico-matemático compartido de los integrantes del grupo de investigación *La Preuve* sobre tareas que favorezcan el proceso de Argumentación en Geometría, y por otro, logré determinar que el proceso investigativo generó cambios en el conocimiento didáctico-matemático de los profesores.

Asociado con el objetivo, es importante resaltar que para lograr dicha caracterización fue necesario i) hacer una adaptación de la estrategia investigativa investigación - acción y ii) desarrollar varios momentos analíticos con sus respectivas herramientas que me permitieron categorizar y describir los aspectos más relevantes del conocimiento en diversos momentos. La combinación de estos dos factores podría, ser una contribución a un modelo de análisis de conocimiento que se puede observar con detalle en el Capítulo 3 de este documento.

Retomando el primer aspecto expuesto en el párrafo anterior, la adaptación de la estrategia investigativa respondió a las necesidades que tenía como investigadora por las particularidades del problema que me propuse. Junto con la adaptación de la estrategia investigativa, realicé un reporte detallado de cada uno de los ciclos y fases de cada ciclo que llevamos a cabo como grupo, con lo que se cumple mi primer objetivo específico.

En cuanto al segundo aspecto, el establecimiento de varios momentos analíticos respondió a los objetivos específicos: El primer momento analítico, en el que se construyeron los datos por medio del proceso de microanálisis de los insumos,

permitió generar las categorías emergentes por medio de las cuales fue caracterizado el conocimiento. El segundo momento, en el que se emplearon las categorías teóricas provenientes del CDM, permitió diferenciar el conocimiento en categorías que permitieran realizar comparaciones de un estado a otro. Finalmente, en el último momento, se establecieron indicadores de transformación con los que se logró describir la naturaleza del cambio identificado al comparar el conocimiento por categorías. Todo lo anterior se corresponde con el segundo objetivo específico.

Con relación al tercer objetivo específico, puedo decir que logré describir los diferentes estados de conocimiento que manifestaron los integrantes de *La Preuve* por medio de los productos que se generaron en los ciclos de la estrategia investigativa. Al finalizar el proceso, logré reportar por medio de las categorías teóricas y emergentes el conocimiento asociado a los elementos argumentación y tareas en seis momentos diferentes, dando origen a la explicitación de seis estados de conocimiento: Estado Base y Estado 1, que fueron caracterizaciones de mi conocimiento; estado Inicial 1, estado 2, estado inicial 2 y estado 3, que resultaron del análisis de *La Preuve* como individuo.

Logré cumplir, de igual manera, el objetivo de comparar dichos estados de conocimiento para lograr describir la transformación del conocimiento y analizar la naturaleza de dicha transformación; sin embargo, por la naturaleza del conocimiento que describió cada estado, en análisis de transformación solo se empleó para comparar los dos estados de conocimiento individuales (transformación individual), el estado inicial 1 con el estado 2 (transformación 1 *La Preuve*) y el estado inicial 2 con el estado 3 (transformación 2 *La Preuve*).

Finalmente, con relación al último objetivo específico, efectivamente logré reportar una experiencia formativa de una comunidad de profesores de matemáticas cuyo objetivo final es solucionar una problemática institucional relacionada con la argumentación. Considero que el escribir este documento, más allá de compartir los detalles del proceso que vivimos como equipo, me permitió reflexionar sobre los alcances que tiene sobre la profesionalización de un profesor el disponer de tiempo, recursos y apoyo institucional para poder investigar. La realidad laboral para la gran mayoría de profesores del país no permite que nos podamos ver y entender como profesionales de la educación que deben mantenerse informados y dinámicos en

nuestro quehacer. Por lo tanto, espacios como el que tenemos en La Preuve podrían ser escenarios en los que, a medida de las posibilidades de los profesores y las instituciones, puedan mantenerse en contacto con la vida académica y mantenerse aprendiendo y creciendo profesionalmente.

Como consecuencia de lo que expongo en el párrafo anterior y en contraste con los resultados de análisis de transformación de conocimiento, pude concluir que el construir programas de formación podría ser una ruta adecuada para que desde la cotidianidad de la escuela se pueda contribuir a la formación continua de los profesores.

En la siguiente sección presento los principales resultados del estudio en relación con mi conocimiento personal y el de La Preuve sobre argumentación y tareas de argumentación, y la transformación de este luego de los sucesivos ciclos investigativos.

5.2. Principales resultados sobre el conocimiento y su transformación en La Preuve

Con respecto a la transformación de conocimiento de La Preuve, considero que hay evidencia suficiente para poder afirmar que el involucrarse en un proceso de investigación, efectivamente, tiene un impacto positivo en el conocimiento didáctico-matemático.

La transformación de conocimiento 1, que surge al comparar los estados de conocimiento inicial 1 y estado 2, y que reporta el cambio del conocimiento del grupo con relación al elemento *argumentación*, permite concluir que al finalizar el ciclo 2 La Preuve logró su objetivo de consolidar conocimiento compartido construido colectivamente.

De los aspectos más relevantes que hay que resaltar como característica de este conocimiento es que se concentró mayoritariamente en la faceta epistémica y el tipo de transformación que se presentó con mayor frecuencia fue relacionada con la evolución de los conceptos. Esto se debió, principalmente, a que el problema que decidimos abordar en el segundo ciclo fue precisamente relacionado con conceptualización de argumentación y algunos términos afines. Un ejemplo de esta

transformación es la caracterización de argumentación como proceso comunicativo y social (decimos, faceta comunicativa del razonamiento) que busca soportar una postura, más que indicar que la argumentación solo permite deducir información para validar o que la argumentación es de carácter deductivo solamente.

Por otra parte, la transformación de conocimiento 2, que surge al comparar los estados de conocimiento inicial 2 y estado 3, y que reporta el cambio de conocimiento del grupo con relación al elemento tarea, permite concluir que al finalizar el ciclo 3 La Preuve logró, al igual que al finalizar el ciclo 2, consolidar conocimiento compartido construido colectivamente sobre las tareas, pero relacionándolas con la argumentación. Pese a que este conocimiento también estuvo fuertemente asociado con la faceta epistémica, al final, la transformación pudo relacionarse más con la categoría de transformación de asimilación, puntualmente, la subcategoría de apropiación.

El más claro ejemplo de esta transformación ocurrió con las adaptaciones de las definiciones de tarea entendida como aquel recurso que usamos los profesores para que los estudiantes alcancen las expectativas de aprendizaje que tenemos. En ese marco, vimos la necesidad de aclarar el uso de términos como justificar, argumentar demostrar o probar que les dábamos en los enunciados de las tareas de argumentación (los cuales usábamos de una manera bastante referencial –porque aparecen en textos que hemos estudiado– sin mayor una mayor apropiación de los mismo). Haber ganado cierta claridad en la conceptualización de estos términos entre los ciclos 1 y 2 de La Preuve, nos permitió usar estos términos con un poco más de sentido cuando planteamos criterios para diseñar tareas de argumentación. En la exposición del Fase 4 de la sección 4.5 se puede ver con detalle este asunto.

5.3. Conclusiones respecto de formación profesional

Debo decir que, al finalizar todo este proceso, tanto en el programa de formación de Maestría en Docencia de la Matemáticas, como en el grupo de investigación de La Preuve obtuve aprendizajes importantes que de manera definitiva me transformaron como profesional.

El problematizar mi conocimiento sobre tareas que favorezcan la argumentación me permitió, por una parte, deconstruir mi conocimiento para entender mi

práctica a la luz de la información que deleva mi discurso. Este tipo de ejercicio resulta particularmente útil para poder llevar esas reflexiones aisladas a un cambio real en las aulas. Indiscutiblemente, mi paso por la maestría me brindó herramientas que me permitieron profesionalizarme y ofrecer a mis estudiantes experiencias de aula mucho más pensadas, ya que gané mucho conocimiento relacionado con el diseño de tareas. Asimismo, adquirí herramientas para continuar con la transformación de mi práctica

Por otra parte, como investigadora, siento que adquirí una mayor sensibilidad analítica en el momento de interpretar información proveniente de los discursos tanto propios como de mis colegas. Aprendí a identificar conocimiento, sin juzgarlo ni a categorizarlo, simplemente entendiendo las manifestaciones que tiene y, con base en esas interpretaciones, poder tomar decisiones que orienten la elaboración de planes de acción en el marco de un proceso investigativo como el que adelantó La Preuve.

Adicionalmente, tuve que sortear diversas dificultades personales que me impidieron terminar el trabajo en el tiempo establecido. Esta, sin duda, fue la más grande falencia que presentó la investigación. Sin embargo, al final, este tiempo extra permitió que se lograra el cierre y sistematización del Ciclo 3.

Referencias

- Ayalon, M. (2019). Exploring changes in mathematics teachers' envisioning of potential argumentation situations in the classroom. *Teaching and teacher education*, 190-203.
- Baker, M. (2009). Argumentative interactions and the social construction of knowledge. In N. M. Mirza, & A.-N. Perret-Clermont, *Argumentation and education* (pp. 127-144). Berlín: Springer.
- Ball, D., & Bass, H. (2009). With an eye on the Mathematical Horizon: Knowing Mathematics for Teaching to Learners's Mathematical Futures. *43rd Jahrestagung für Didaktik der Mathematik held*. Oldenburg, Alemania.
- Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 389-407.
- Battista, M. T., & Clements, D. H. (2010). Linking research and curriculum development. In A. E. Kelly, & R. A. Lesh, *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 603-639). New York: Routledge.
- Beltrám-Pellicer, P. (2016). *Evaluación de la Idoneidad Didáctica de una experiencia de enseñanza de azar y probabilidad en tercer curso de ESO*. Trabajo fin de Máster. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Boero, P., Fenaroli, G., & Guala, E. (2018). Mathematical argumentation in elementary teacher Education: The key role of the cultural analysis of the content. In A. Stylianides, & G. Harel, *Education research on proof and proving. ICME-13. Monographs* (pp. 49-67). Genoa, Italy.: Springer International Publishing.
- Boero, P., Fenaroli, G., & Guala, E. (2018). Mathematical argumentation in elementary teacher education: The key role of the cultural analysis of the content. In A. J. Stylianides, & G. Harel, *Advances in mathematics education research on proof and proving* (pp. 49-67). Cham: Springer.

- Breda, A., Pino-Fan, L. R., & Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 1893-1918.
- Camargo, C. F., & Triana, S. A. (2022). *Transformación del conocimiento del profesor para enseñar a argumentar*. Bogotá.
- Camargo, L. (2018). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática*. Bogotá D.C.: Universidad Pedagógica Nacional. En evaluación.
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, XXVIII, 49-77.
- de Sá Ibrahim, S., & Justi, R. (2016). Teachers' knowledge in argumentation: Contributions from an explicit teaching in an initial teacher education programme. *International Journal of Science Education*, 1996-2025.
- Denscombe, M. (2010). *The good research guide. For small-scale social research projects*. NY, USA: Mc Graw Hill Open University Press.
- Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2012). Argumentation and proof in the mathematics classroom. In G. Hanna, & M. De Villiers, *Proof and proving in mathematics Education* (pp. 349-368). New York: Springer.
- Elliot, J. (2005). *La investigación-acción en educación*. Madrid: Ediciones Morata.
- Elliott, J. (1991). *Action research for educational change*. Philadelphia, USA.: Open University Press.
- Feldman, A., & Minstrell, J. (2000). Action research as a research methodology for the study of the teaching and learning of science. In A. E. Kelly, & R. A. Lesh, *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 429-455). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.
- Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 9-25.

- Font, V. (s.f.). Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje . *Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática, Universitat de Barcelona*, Unpublished manuscript.
- Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 67-98.
- Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 89-105.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 13-31.
- Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. In A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. Penalva, F. García, & L. Ordóñez , *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49-68). España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística*, 1-15.
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*, 111-132.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 325-355.
- Godino, J. D., Aké, L., Contreras, Á., Díaz, C., Estepa, A., Blanco, T., . . . Wilhelmi, M. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las ciencias*, 1(33), 127-150.

- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM: the international journal on mathematics education*, 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., & Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: El modelo CCDM. In J. Macías, A. Jiménez, J. González, T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, . . . A. Berciano, *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). Málaga: SEIEM.
- Godino, J. D., Contreras, Á., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26, 39-88.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 90-113.
- Gómez, P., Mora, M. F., & Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. In P. Gómez, *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 197-268). Bogotá: Ediciones Uniandes.
- Gusmão, T. R. (2014). Desenho de tarefas para o desenvolvimento da cognição e metacognição matemática. *I Colóquio Internacional sobre Ensino e didática das Ciências*, (pp. 175-180). Universidade Estadual de Feira de Santana.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In NCTM, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805-842).
- Martínez, M. (2000). La investigación-acción en el aula. *Agenda académica*, 27-39.
- McNeill, K. L., & Knight, A. M. (2013). Teachers' pedagogical content knowledge of scientific argumentation: The impact of professional development on K-12 teachers. *Science Education*, 97(6), 936-972.
- MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático ¡un reto escolar! In MEN, *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre*

lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden (pp. 46-95).

Molina, O. (2019). *Sistema de normas que influyen en procesos de argumentación: un curso de geometría del espacio como escenario de investigación*. [Tesis de doctorado, Universidad de los Lagos].

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., & Molina, O. (2013). Contextualización y fundamentación del curso. In C. Samper, & O. Molina, *Geometría plana. Un espacio de aprendizaje*. (pp. 11-56). Bogotá D.C.: Universidad Pedagógica Nacional.

Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). PERSPECTIVA AMPLIADA DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DEL PROFESOR. *Paradigma, XXXVI*, 87-109.

Pino-Fan, L., Assis, A., & Castro, W. (2015). Towards a Methodology for the Characterization of Teachers' Didactic-Mathematical Knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 1429-1456.

Pochulu, M., Font, V., & Rodríguez, M. (2013). Criterios de diseño de tareas para favorecer el análisis didáctico en la formación de profesores. *Actas del VII CIBEM*, (pp. 4999-5009). Montevideo, Uruguay.

Pochulu, M., Font, V., & Rodríguez, M. (2013). Criterios de diseño de tareas para favorecer el análisis didáctico en la formación de profesores. *VII CIBEM*, (pp. 4999-5009). Montevideo, Uruguay.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa RELIME*, 103-129.

Ramos, J., Gusmão, T. C., Font, V., & Lando, J. C. (2020). Task (re)design to enhance the didactic-mathematical knowledge of teachers. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 98-120.

Ritchhart, R. (2015). *Creating cultures thinking. The 8 forces we must master to truly transform our schools*. San Francisco, CA.: Jossey-Bass.

- Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teacher's mathematics subject knowledge: The Knowledge Quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 255-281.
- Serrazina, M. L. (2015). A formação contínua de professores em matemática: o conhecimento e a supervisão em sala de aula e a sua influência na alteração das práticas. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 1-23.
- Sherin, M. G., & Russ, R. S. (2010). Accessing mathematics teachers' in-the-moment noticing. In M. Sherin, V. Jacobs, & R. Philipp, *Mathematics Teacher Noticing* (pp. 79-94). New York: Routledge.
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 4-14.
- Sousa, J. R., Gusmão, T. C., Font, V., & Lando, J. C. (2020). Task (Re)Design to Enhance the Didactic-Mathematical. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 22(4), 98-120.
- Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research. Techniques and procedures for developing grounded theory*. Sage Publications, Inc.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 3, 289-321.
- Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008, Marzo 12). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Springer Science+Business Media*, 307-332.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Shilling-Traina, L. N. (2013). Prospective Teachers' challenges in teaching reasoning-and-proving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1463-1490.
- Sullivan, P., Knott, L., & Yang, Y. (2015). The relationships between task design, anticipated pedagogies and student learning. In A. Watson, & M. Ohtani, *Task design in mathematics education* (pp. 83-114). Springer.

- Sullivan, P., Knott, L., & Yang, Y. (2015). The relationships between task design, anticipated pedagogies and student learning. In A. Watson, & M. Ohtani, *Task design in Mathematics Education* (pp. 83-114). Springer.
- Zohar, A. (2007). Science teacher education and professional development in argumentation. In S. Erduran, & M. P. Jiménez-Aleixandre, *Argumentation in science education* (pp. 245-268). Dordrecht: Springer.

Anexos

Anexo 1. Insumos Estado Base

Propuesta de anteproyecto de trabajo de grado

La enseñanza de la geometría en el Gimnasio Vermont, en los últimos años, ha cobrado un papel importante dentro de los objetivos del departamento de Matemáticas. Lo que existe actualmente con respecto a esto son cuatro cursos de formación exclusiva en geometría (de sexto a noveno). Sin embargo, como parte del ejercicio de autoevaluación continuo que se adelanta en la institución, los docentes del área se percataron de que, al llegar al nivel de octavo, en el que se espera que los estudiantes sean capaces de construir demostraciones formales, estos no tienen las herramientas necesarias para lograrlo. Se percataron, no solo de que el tipo de actividades que se desarrollan en los cursos de geometría en los grados de sexto y séptimo no está alineado con lo que se espera que los estudiantes sean capaces de hacer en octavo y noveno, sino de que el currículo necesitaba ajustes muy fuertes.

Ante esta necesidad, surge como opción un grupo de investigación cuyo objetivo final es estructurar los cursos de geometría (desde el currículo hasta las dinámicas de aula) para lograr que los estudiantes adquieran de forma más exitosa las capacidades, habilidades y conocimientos específicos de esa disciplina. Este grupo de investigación, denominado "La Preuve", inicia actividades en el año 2018 y adopta como referentes teóricos dos Marcos principales: el primero es el propuesto por Ron Ritchhart en el proyecto Zero sobre las ocho fuerzas culturales, el segundo es el propuesto por el grupo de Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional sobre la actividad demostrativa.

A la luz de estos dos Marcos de referencia, se plantea un primer proyecto denominado "la actividad demostrativa en el marco de una cultura de pensamiento" con el que se pretende indagar sobre las características que debe tener un aula de geometría en dónde se armonicen los dos Marcos teóricos propuestos anteriormente. Para efectos de este objetivo, se ha trabajado desde la planeación de las clases, procurando llevar actividades innovadoras en las que se evidencien la vivencia de las

ocho fuerzas culturales y también que privilegien la visualización, razonamiento, conjeturación y demás procesos propios de la actividad demostrativa.

Se reconoce, dentro de esta búsqueda de la innovación pedagógica en las aulas, que el uso de la tecnología es indispensable. En este sentido, se ha realizado esfuerzos importantes por vincular el uso de GeoGebra como software de geometría dinámica. Estos esfuerzos, sin embargo, no han sido lo suficientemente fructíferos debido a que la mayoría de los docentes del grupo de investigación que dictan clases de geometría no tiene un dominio adecuado del software. El no manejar adecuadamente el software es un impedimento importante a la hora de potenciar su uso como herramienta pedagógica. Lo que se ha evidenciado es, que después de las primeras sesiones, los docentes volvieron al trabajo tradicional con el libro guía.

Lo que se pretende lograr con este proyecto es aportar con el diseño de las actividades y el material didáctico que ayude a la exitosa implementación del currículo que será producido en el marco del grupo de investigación en geometría del colegio Gimnasio Vermont. Se espera que este producto ayude a terminar el ciclo de innovación curricular que se inició.

Prueba de competencias escriturales

El desarrollo de nuevas tecnologías ha sido visto, al menos desde los últimos años, como una oportunidad importante de innovación en la enseñanza. Se espera que el uso de herramientas tecnológicas genere una serie de dinámicas diferentes en las que se explore y potencie habilidades y capacidades de una forma distinta, y que se logre impactar de manera positiva la forma en la que los estudiantes aprenden. Sin embargo, como profesionales de la educación, nuestro principal reto no es solo implementar nuevas herramientas tecnológicas en nuestro día a día, sino reflexionar sobre las implicaciones que el uso de las TIC en las aulas.

La evaluación, como proceso esencial de la enseñanza y el aprendizaje, brinda insumos esenciales al profesor, en cuanto a que es por medio de la evaluación que se realiza una reflexión constante del ejercicio docente, muchas veces a la luz de la teoría, y se logran tomar decisiones de mejora o dar continuidad a las buenas prácticas. Este proceso, que se realiza de manera individual, institucional e incluso estatal,

debe comenzar a cobijar la implementación de estas nuevas técnicas y metodologías que surgen a partir de la implementación de las TIC en las aulas.

Es de vital importancia que se logre dar respuesta a las muchas interrogantes que existen en torno a los resultados que se obtienen al utilizar la tecnología como mediadora de conocimiento en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

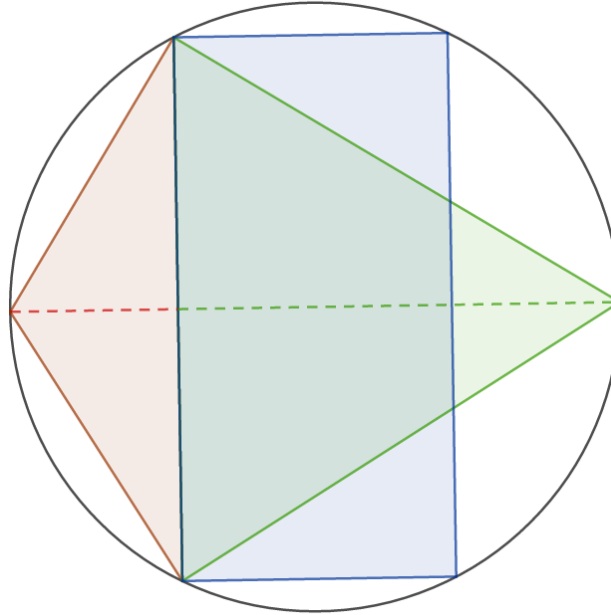
Actualmente, se han realizado muchas propuestas de articulación de la tecnología con diferentes conceptos y procesos matemáticos, hay que dar un paso atrás y reflexionar sobre los resultados obtenidos. Este se convierte en un nuevo y gran desafío para profesores e instituciones educativas, pero es a la vez una oportunidad de crecimiento y mejora para poder terminar el ciclo reflexión-acción tan propio del quehacer pedagógico.

Prueba de conocimiento didáctico-matemático

1. Procedimiento de solución:

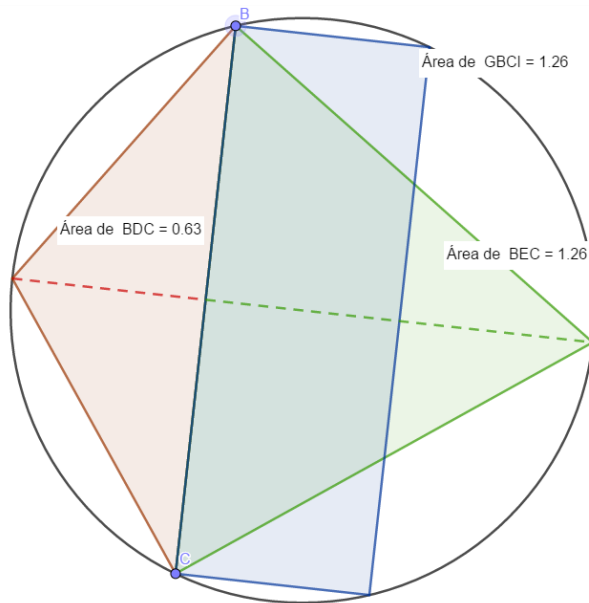
Inicialmente, el primer paso para abordar la tarea planteada fue determinar si era posible que las áreas del rectángulo y del triángulo podían llegar a ser iguales. Utilizando el software de geometría dinámica GeoGebra se realizó una construcción que permitió, además de visualizar la situación, explorar cambiando las longitudes de los lados de los polígonos involucrados y observando cómo variaba el área de cada uno.

Gracias a la construcción realizada, se pudo observar que, al tener un rectángulo inscrito en la circunferencia, se podían construir, de hecho, dos triángulos isósceles de tal manera que su lado no congruente coincidiera con uno de los lados del rectángulo.

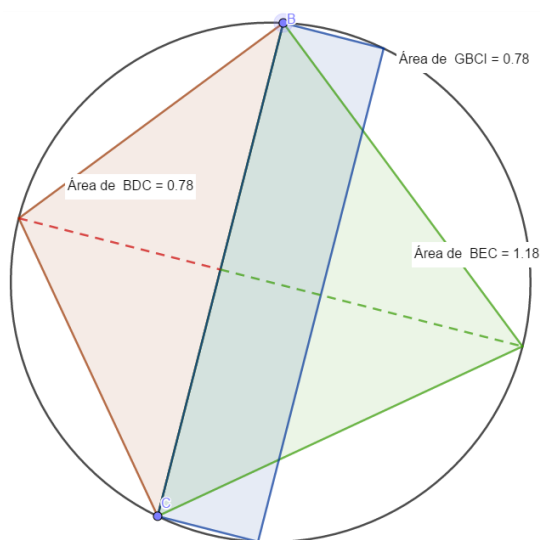


El siguiente paso fue la exploración. Se movieron los puntos B y C (extremos del segmento de la base) para cambiar el tamaño del segmento y de los polígonos. Adicionalmente, se utilizó la herramienta de área para obtener el valor del área de cada figura y poder compararlas en tiempo real. Se observó que se podía obtener un área igual para los dos triángulos.

Primera situación:



Segunda situación:



Finalmente, se estableció una conjetura sobre las condiciones de las alturas de los polígonos para cada uno de los casos y se procedió a verificarla utilizando el software como herramienta. Debido a que había dos posibles respuestas, se realizó una conjetura para cada una. Las conjeturas establecidas fueron las siguientes:

- Primera situación: la altura del rectángulo debe ser igual a la mitad de la altura del triángulo mayor para que sus áreas sean iguales.
- Segunda situación: la altura del rectángulo y del triángulo menor deben ser igual a $1/3$ y $2/3$ de la altura del triángulo mayor respectivamente. En este caso, las áreas del rectángulo y del triángulo menor, son iguales.

Se utiliza la herramienta segmento para señalar las alturas de los triángulos y se hace visible su longitud para comprarlas. Al realizar este proceso, se observa que, al parecer, la conjetura es verdadera.

2. Procedimiento alternativo: El problema habría podido abordarse utilizando solamente lenguaje algebraico, planteando ecuaciones y resolviéndolas.

Conocimiento didáctico:

3. Objetos matemáticos involucrados:
 - a. Rectángulos y sus propiedades
 - b. Triángulos isósceles y sus propiedades
 - c. Área
 - d. Igualdad

4. Principales procesos de la actividad matemática involucrados:
 - a. Representación: Se necesitó representar la situación descrita en un software de geometría dinámica para poder identificar qué valores podían variar y cuáles no dadas las condiciones iniciales.
 - b. Exploración: Fue necesario interactuar con la construcción realizada para poder establecer si había una solución y conjeturar en qué casos esta se daba.
 - c. Conjeturación: Fue necesario establecer una hipótesis sobre las condiciones necesarias para que se diera la solución.
 - d. Visualización: Durante el proceso de exploración y conjeturación fue necesario poder identificar relaciones que no estaban explícitas entre los objetos geométricos que se encontraban allí representados.

5. Currículo escolar colombiano:

De acuerdo con la normatividad vigente, se sabe que la educación matemática en Colombia se trabaja desde un enfoque de procesos y pensamientos. Esta tarea tiene como contexto una situación geométrica, por lo cual lo más natural es relacionarla con el pensamiento espacial. Al realizar la lectura de las competencias esperadas para cada ciclo escolar, esta situación no corresponde de manera directa con ninguna, pero de forma indirecta con todas.

Por las características de la actividad matemática que se requirió y teniendo en cuenta las características cognitivas asociadas a la edad, podría proponerse este mismo ejercicio a estudiantes de sexto o séptimo, sin embargo, considero que es una tarea fácilmente adaptable para estudiantes de otros grados.

Aludiendo a la segunda propuesta de resolución, si utilizáramos solamente lenguaje algebraico para representarla y solucionarla, esta actividad estaría enmarcada en el pensamiento variacional.

Anexo 2. Tabla de datos Estado Base individual

Fecha	Insumo	Documento	Afirmación	Interpretación	Elemento	CE	CT
13/11/2019	Pruebas de ingreso MDM	Propuesta Anteproyecto	Los profesores del área [de geometría] se percataron de que, al llegar al nivel de octavo, en el que se espera que los estudiantes sean capaces de construir demostraciones formales, estos no tienen las herramientas necesarias para lograrlo.	La producción de demostraciones requiere de herramientas especiales	Argumentación	ATA	E
				Los estudiantes no tienen herramientas para producir demostraciones.	Argumentación	ATA	C
				Se espera que los estudiantes sean capaces de construir demostraciones en grado octavo.	Argumentación	ATA	Ec
13/11/2019	Pruebas de ingreso MDM	Propuesta Anteproyecto	El tipo de actividades [tareas] que se desarrollan en los cursos de geometría en los grados de sexto y séptimo no está alineado con lo que se espera que los estudiantes sean capaces de hacer en octavo y noveno [demostraciones].	Las tareas propuestas por los profesores no son idóneas en relación con el propósito de que los estudiantes produzcan demostraciones.	Tareas	AA	E
				Las tareas deben favorecer a que los estudiantes sean capaces de hacer demostraciones.	Tareas	AA	E
				Las tareas de los cursos de geometría de sexto y séptimo no aportan elementos suficientes para que en octavo y noveno los estudiantes generen demostraciones	Tareas	AA	Ec
13/11/2019	Pruebas de ingreso MDM	Propuesta Anteproyecto	El grupo Le Preuve, ha trabajado desde la planeación de las clases, procurando llevar actividades [tareas] innovadoras en las que se evidencien la vivencia de las ocho fuerzas	La actividad demostrativa se constituye de procesos como la visualización, razonamiento, conjeturación, etc. Procesos que componen la actividad demostrativa.	Argumentación	ATA	E

			culturales y también que privilegien la visualización, razonamiento, conjeturación y demás procesos propios de la actividad demostrativa.	Las tareas deben favorecer procesos como la visualización, razonamiento, conjeturación. Función de una tarea que busca favorecer la actividad demostrativa.	Tareas	TT	E
				Se hace uso de la expresión tarea innovadora. Tarea innovadora implica el uso de EGD [dicho en la discusión de la tabla como ejercicio retrospectivo].	Tareas	TCD	M
13/11/2019	Pruebas de ingreso MDM	Prueba de competencias escriturales	Se espera que el uso de herramientas tecnológicas genere una serie de dinámicas diferentes en las que se explore y potencie habilidades y capacidades de una forma distinta, y que se logre impactar de manera positiva la forma en la que los estudiantes aprenden	El uso de Herramientas tecnológicas potencia habilidades y capacidades en los estudiantes de una forma diferente.	Tareas	TCD	C
				El uso de herramientas tecnológicas impacta de manera positiva en la forma de aprender de los estudiantes.	Tareas	TA	M
13/11/2019	Pruebas de ingreso MDM	Prueba conocimiento didáctico-matemático	Utilizando el software de geometría dinámica GeoGebra se realizó una construcción que permitió, además de visualizar la situación, explorar cambiando las longitudes de los lados de los polígonos involucrados, mediante el movimiento de sus extremos, y observando cómo variaba el área de cada uno.	GeoGebra permite visualizar situaciones	Tareas	TA	M
				GeoGebra permite hacer construcciones y explorarlas	Tareas	TA	M
				GeoGebra permite medir longitudes de segmentos y áreas de polígonos	Tareas	TA	M
13/11/2019	Pruebas de ingreso MDM	Prueba conocimiento didáctico-matemático	Finalmente, se estableció una conjetura sobre las condiciones de las alturas de los polígonos para cada uno de los casos y se procedió a verificarla	GeoGebra puede ser utilizado como herramienta para la verificación de conjeturas	Tareas	TA	M

			utilizando el software como herramienta.				
13/11/2019	Pruebas de ingreso MDM	Prueba conocimiento didáctico-matemático	Debido a que había dos posibles respuestas, se realizó una conjetura para cada una.	La respuesta a una tarea puede ser una conjetura.	Tareas	TA	E
				Una conjetura reporta la respuesta de una tarea	Argumentación	ATA	E
13/11/2019	Pruebas de ingreso MDM	Prueba conocimiento didáctico-matemático	La altura del rectángulo debe ser igual a la mitad de la altura del triángulo mayor para que sus áreas sean iguales.	Una conjetura no necesariamente debe reportarse utilizando el formato condicional	Argumentación	ATA	E
13/11/2019	Pruebas de ingreso MDM	Prueba conocimiento didáctico-matemático	La altura del rectángulo y del triángulo menor deben ser igual a 1/3 y 2/3 de la altura del triángulo mayor respectivamente. En este caso, las áreas del rectángulo y del triángulo menor, son iguales.				
13/11/2019	Pruebas de ingreso MDM	Prueba conocimiento didáctico-matemático	Principales procesos de la actividad matemática involucrados: Representación, Exploración, Conjeturación, Visualización	La Argumentación no está involucrada en la solución de la tarea [problema abierto de conjeturación]	Argumentación	ATA	E
				La representación implica el uso de una herramienta para representar situaciones	Argumentación	ATA	E
13/11/2019	Pruebas de ingreso MDM	Prueba conocimiento didáctico-matemático	Representación: Se necesitó representar la situación descrita en un software de geometría dinámica para poder identificar qué valores podían variar y cuáles no dadas las condiciones iniciales.	Una representación permite identificar valores que pueden variar y las condiciones iniciales.	Argumentación	ATA	E

13/11/2019	Pruebas de ingreso MDM	Prueba conocimiento didáctico-matemático	Exploración: Fue necesario interactuar con la construcción realizada para poder establecer si había una solución y conjeturar en qué casos esta se daba.	La exploración es la interacción que se realiza con la construcción para poder solucionar una tarea	Argumentación	ATA	E
				La exploración es la interacción que se realiza con la construcción para poder conjeturar	Argumentación	ATA	E
13/11/2019	Pruebas de ingreso MDM	Prueba conocimiento didáctico-matemático	Conjeturación: Fue necesario establecer una hipótesis sobre las condiciones necesarias para que se diera la solución	La conjeturación es la producción de la hipótesis sobre las condiciones necesarias para dar solución a la tarea.	Argumentación	ATA	E
13/11/2019	Pruebas de ingreso MDM	Prueba conocimiento didáctico-matemático	Visualización: Durante el proceso de exploración y conjeturación fue necesario poder identificar relaciones que no estaban explícitas entre los objetos geométricos que se encontraban allí representados.	La visualización es requerida en la exploración y conjeturación	Argumentación	ATA	E
				La visualización permite identificar relaciones no explícitas entre objetos geométricos de la representación	Argumentación	ATA	E
13/11/2019	Pruebas de ingreso MDM	Propuesta Anteproyecto	Fonseca, Quintero y Fernando (2013): En este trabajo de grado se analizan las intervenciones, participación y comportamientos de tres estudiantes de noveno grado de un colegio público	Referencia sobre comportamiento racional y argumental de estudiantes. Hay acciones de estudiantes cuando argumentan	Argumentación	AA	C
13/11/2019	Pruebas de ingreso MDM	Propuesta Anteproyecto	Plazas (2013): En este trabajo se resaltan algunas acciones y posturas adoptadas por el docente y que favorecieron la actividad demostrativa en estudiantes de sexto grado.	Referencia sobre algunas acciones y posturas adoptadas por el docente y que favorecieron la actividad demostrativa. Hay acciones del profesor para favorecer actividad demostrativa	Argumentación	ATA	I

13/11/2019	Pruebas de ingreso MDM	Propuesta Anteproyecto	Mejía y Molina (2013): Se describe una experiencia de aula en la que se busca favorecer la actividad demostrativa utilizando como mediador del conocimiento al software GeoGebra.	Referencia sobre EGD como mediador para favorecer actividad demostrativa.	Argumentación	ATA	M
------------	------------------------	------------------------	---	---	---------------	-----	---

Anexo 3. Tabla de datos Estado 1 individual

Fecha	Insumo	Documento	Afirmación	Interpretación	Elemento	CE	CT
3/03/2020	Versiones del Anteproyecto	Correos sobre título, tema y problema	[El propósito de mi TG es hacer una] reflexión conjunta sobre el ejercicio docente para el replanteamiento de las dinámicas de aula (rutinas de clase, tipos de tarea, rol del docente, el papel de las herramientas tecnológicas, etc.) de la asignatura de geometría para favorecer el proceso de Argumentación.	Replantear tipos de tareas favorece el proceso de Argumentación	Tarea	TT	E
				El proceso de Argumentación en el aula se puede favorecer a partir de replantear las dinámicas de aula tales como rutinas de clase, tipos de tarea, rol del docente y el papel de las herramientas tecnológicas.	Argumentación	AM	I
11/03/2020	Versiones del Anteproyecto	Correos sobre título, tema y problema	Sería interesante entender cómo estos conocimientos condicionan o limitan las propuestas pedagógicas de los docentes [tareas y su gestión].	Tareas es la propuesta pedagógica que llevo a la clase.	Tarea	TA	E
				El diseño y gestión de tareas implica poner en juego los conocimientos del profesor.	Tarea	TA	E
11/03/2020	Versiones del Anteproyecto	Correos sobre título, tema y problema	La parte inicial de estas reformas curriculares tienen lugar en las aulas de clase y se ven reflejadas en las dinámicas que promueven los docentes en ellas. Ahí entrarían a jugar el tipo de tareas que se diseñan (que es uno de los ejes que debe tener el trabajo de grado) y las formas en las que el docente orienta las actividades que adelantan los estudiantes para resolverlas	El tipo de tareas, su diseño y su gestión entran en juego en las reformas curriculares.	Tarea	TCD	EC

16/03/2020	Versiones del Anteproyecto	Correos sobre título, tema y problema	No sé bien como modificar la frase, pero a lo que me refiero con "producción conjunta de dinámicas de aula" es el proceso de búsqueda de acuerdos entre los profesores sobre las formas en las que se va a realizar la mediación del conocimiento en el aula de geometría. Qué tipo de tareas se van a diseñar para favorecer el proceso de Argumentación (tal vez un tipo de Argumentación específica), el rol de las herramientas tecnológicas y el profesor como gestor de un ambiente de aula que armonice los dos elementos anteriores.	Se establece una relación entre el tipo de tareas que se pueden diseñar y la posibilidad de estas contribuyan al desarrollo del proceso de Argumentación. Se menciona que existen distintos tipos de argumentos y que tal vez el trabajo de grado se pueda enfocar en alguno en particular. El profesor debe gestionar las interacciones entre el recurso tecnológico y las tareas que se diseñan para favorecer la Argumentación	Tarea	TT	M
16/03/2020	Versiones del Anteproyecto	V00. Título, tema, resumen, problema	[Interesa caracterizar] el rol del conocimiento profesional docente en la construcción conjunta de lineamientos curriculares para la mediación de la dinámica de clase en el aula de geometría que favorezca el proceso de Argumentación por medio del uso de Geometría dinámica.	El uso Geometría Dinámica es un medio para favorecer el proceso de Argumentación / El proceso de Argumentación se favorece con el uso de Geometría Dinámica	Argumentación	AM	M
27/03/2020	Versiones del Anteproyecto	V 01. Delimitación del problema	Esto [búsqueda de innovación pedagógica] se hace evidente al notar que muchos colegas buscan cada vez proponer tareas distintas y desafiantes a los estudiantes	Proponer tareas desafiantes y distintas es una evidencia de la búsqueda de innovación pedagógica	Tarea	AA	E

3/04/2020	Versiones del Anteproyecto	V 02. Delimitación del problema	Se ha trabajado desde la planeación de las clases, procurando llevar tareas innovadoras en las que se evidencien la vivencia de las ocho fuerzas culturales y también que privilegien el proceso de Argumentación	Las tareas innovadoras hacen parte de la planeación de clase	Tarea	AA	E
				Las tareas innovadoras deben favorecer el proceso de Argumentación.	Tarea	AA	E
3/04/2020	Versiones del Anteproyecto	V 02. Delimitación del problema	Dentro de este proceso de construcción de tareas innovadoras se determinó que se utilizaría como herramienta el software GeoGebra.	El uso de herramientas tecnológicas es un criterio para el diseño de tareas innovadoras.	Tarea	TCD	M
3/04/2020	Versiones del Anteproyecto	V 02. Delimitación del problema	El constructo "Actividad Demostrativa" propuesto por el grupo AEG de la Universidad Pedagógica, es entendido por el grupo <i>La Preuve</i> como una perspectiva sociocultural del aprendizaje de la geometría que permite potenciar la comprensión de los hechos geométricos y sus justificaciones al apuntar a la validación de dichos hechos geométricos en un sistema teórico	La actividad demostrativa es una perspectiva sociocultural del aprendizaje de la geometría.	Argumentación	ATA	E
				La actividad demostrativa potencia la comprensión de hechos geométricos y sus justificaciones al apuntar a la validación de dichos hechos en un sistema teórico.	Argumentación	ATA	E
18/04/2020	Versiones del Anteproyecto	V 03. Delimitación del problema	[Es necesario] indagar sobre las características que debe tener un ambiente de enseñanza y de geometría en dónde se promueva el desarrollo de la actividad demostrativa.	Promover "Actividad Demostrativa" en el aula implica considerar unas características especiales del ambiente de enseñanza.	Argumentación	ATA	I

18/04/2020	Versiones del Anteproyecto	V 03. Delimitación del problema	Algunos de los docentes han reportado carecer de los conocimientos necesarios para gestionar de manera adecuada una clase de geometría en la que se propongan tareas de exploración utilizando GeoGebra	Profesores de <i>La Preuve</i> no tiene conocimientos para gestionar de manera adecuada una clase de geometría en la que se propongan tareas de exploración utilizando GeoGebra/La gestión de tareas de exploración en las que se utiliza GeoGebra requieren de conocimientos especializados	Tarea	TT	M
18/04/2020	Versiones del Anteproyecto	V 03. Delimitación del problema	En [mis] clases de Geometría, aunque se promueve la participación de los estudiantes, no se logra evidenciar un progreso en la capacidad de los estudiantes para producir argumentos.	Promover Argumentación en el aula implica algo más que promover la participación de los estudiantes	Argumentación	AM	I
25/04/2020	Versiones del Anteproyecto	Notas de clase Justificación-objetivos-antecedentes	Sobre justificación del trabajo de grado aludiendo a lineamientos curriculares: Con el trabajo de grado [...] se pretende ser más consciente de aspectos que influyen en el desarrollo de competencia de razonamiento.	Promover el desarrollo de competencia de razonamiento por parte de los estudiantes implica una toma de conciencia, por parte del profesor, de los aspectos que influyen para ello.	Argumentación	ATA	E
10/05/2020	Versiones del Anteproyecto	V 05. Justificación	Otro aporte importante que podría tener este trabajo de grado es el de visibilizar la experiencia de la construcción de acuerdos sobre metodologías de clase cuando se debe favorecer un proceso en particular, en este caso, el de la Argumentación.	Promover Argumentación en el aula implica acuerdos entre profesores sobre metodologías de clase.	Argumentación	AA	I

23/05/2020	Versiones del Anteproyecto	V 08. Marco conceptual y EI	Los hallazgos de diversos investigadores en didáctica de la geometría han permitido identificar como elementos básicos [¿para qué?] tres aspectos: proponer a los estudiantes tareas desafiantes, utilizar entornos de geometría dinámica y generar ambientes de clase en donde el profesor sea un mediador de las discusiones para lograr la consolidación del conocimiento.	Proponer tareas desafiantes es un elemento básico para promover la Argumentación	Tarea	TA	E
23/05/2020	Versiones del Anteproyecto	V 08. Marco conceptual y EI	Hasta el momento, lo que se ha concluido después de fase de revisión documental, es que el proceso articulador de estos dos marcos es el proceso de Argumentación entendido como el proceso por medio del cual se hace visible el pensamiento/razonamiento.	La Argumentación es el proceso por medio del cual se hace visible el pensamiento/razonamiento.	Argumentación	AA	E
14/03/2020	Tareas curso DDC	DDC Tarea 1	La actividad propuesta durante la clase es efectivamente una tarea de aprendizaje	Una tarea es una actividad que se propone tanto en la clase como fuera de ella.	Tarea	TA	E
14/03/2020	Tareas curso DDC	DDC Tarea 1	Se esperaba del estudiante que realizara el proceso de construcción, exploración y conjeturación, por lo cual se cumple la premisa principal	Una tarea de Argumentación implica procesos como construcción, exploración y conjeturación.	Tarea	TT	E

			de la tarea y es generar la oportunidad para que el estudiante, por medio de acciones intencionadas, ponga en juego sus conocimientos para la solución del problema planteado.	Una tarea pretende generar oportunidades para que el estudiante, por medio de acciones intencionadas, ponga en juego sus conocimientos para su solución.	Tarea	TA	E
14/03/2020	Tareas curso DDC	DDC Tarea 1	Es enriquecedor para el docente tener en mente las posibilidades en cuanto al aprendizaje que posibilita la aparición de construcciones suaves y cómo podría aprovecharlas para enriquecer el proceso de conjeturación y Argumentación	Las construcciones blandas pueden enriquecer el proceso de conjeturación y Argumentación/ El proceso de conjeturación y Argumentación puede enriquecerse por las construcciones blandas	Argumentación	AA	M
25/04/2020	Tareas curso DDC	DDC Tarea 6	En mi formación de pregrado se hacía énfasis, sobre todo en las prácticas, en que las tareas propuestas debían favorecer la exploración.	Las tareas deben favorecer la exploración	Tarea	TA	I
25/04/2020	Tareas curso DDC	DDC Tarea 6	Adicionalmente, el buscar que las tareas ofrezcan la posibilidad de tener actividades en clase que sean memorable para que, de alguna manera, sea significativo para los estudiantes	Las tareas deben generar actividades que sean recordables para los estudiantes.	Tarea	TA	A
25/04/2020	Tareas curso DDC	DDC Tarea 6	Siempre procuré que las secuencias de tareas permitieran hacer un tránsito entre lo concreto y lo abstracto	Una secuencia de tareas debe favorecer el tránsito de lo concreto a lo abstracto	Tarea	TA	E

25/04/2020	Tareas curso DDC	DDC Tarea 6	Las tareas que propongo siempre siguen la misma estructura en la que se busca encontrar un patrón o invariantes y luego se busca llegar a una generalización o conjetura.	La tarea que favorezca la Argumentación debe solicitar un patrón o invariante y llegar una generalización o conjetura.	Tarea	TA	E
25/04/2020	Tareas curso DDC	DDC Tarea 6	Las tareas [que propongo] son más bien secuencias de tareas en las que se alternan recursos distintos y se proponen a los estudiantes actividades muy puntuales con esos recursos.	Una secuencia de tareas es un conjunto de tareas.	Tarea	TA	E
				En una secuencia de tareas se alternan distintos recursos y proponen la realización de distintas actividades que deben realizarse con tales recursos.	Tarea	TCD	M
25/04/2020	Tareas curso DDC	DDC Tarea 6	[Pensando en el diseño de tareas] Para establecer las posibles soluciones de la tarea utilizamos como estrategia el “obligarnos” a encontrar la forma de realizar una construcción y explorarla utilizando solamente las herramientas de GeoGebra conocidas por los estudiantes	Un recurso para diseñar tareas es establecer posibles soluciones de la tarea utilizando las herramientas de GeoGebra conocidas por los estudiantes.	Tarea	TCD	C
12/06/2020	Tareas curso DDC	DDC-PME Tarea final	[Durante la solución de la tarea] la exploración realizada en cada situación fue distinta, por lo que las garantías que sustentaban cada argumento podían cambiar.	Diversos argumentos pueden ser generados por diversas formas de exploración.	Argumentación	ATA	E
				La garantía es algo que sustenta un argumento.	Argumentación	ATA	E
				Garantías diferentes implican argumentos diferentes.	Argumentación	ATA	E

23/03/2020	Tareas curso PME	PME Tarea 4	[Se encontraron argumentos deductivos] en la demostración de la segunda construcción.	Los argumentos deductivos aparecen en demostraciones	Argumentación	AT	E
23/03/2020	Tareas curso PME	PME Tarea 4	[Se encontraron argumentos abductivos] cuando al solucionar problemas en donde ya se conoce la aserción dada en el enunciado, y se busca realizar una construcción para buscar los datos que justifiquen el resultado al que se quiere llegar, es decir, a esa aserción.	Tareas cuyo enunciado dan la aserción y pretenden que se busque el dato favorecen la producción de argumentos abductivos	Tareas	TT	E
				Con los argumentos abductivos se buscan datos para justificar una aserción	Argumentación	AT	E
23/03/2020	Tareas curso PME	PME Tarea 4	[Se encontraron argumentos inductivos] en el paso final de la primera construcción: al activar la herramienta “rastros”, se están generando un sinnúmero de datos particulares para llegar a la aserción que en la construcción corresponde a la de una parábola.	Los argumentos inductivos surgen cuando se estudian varios datos particulares y se llega a una aserción.	Argumentación	AT	E

Anexo 4. Tabla de datos Estado Inicial 1 La Preuve

Fecha	Insumo	Documento	Afirmación	Interpretación	Elemento	CA	CT
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	La conjetura se deduce/es el resultado de la exploración	La conjetura se deduce de la exploración (Hay una ambigüedad inferencia vs. deducción)	Argumentación	ATA	E
				La conjetura es el resultado de la exploración	Argumentación	ATA	E
				Deducir una conjetura es establecerla como resultado de una exploración	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	La conjetura tiene que ser escrita de forma condicional	La conjetura debe ser reportada utilizando la forma condicional "si..., entonces..."	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	La conjetura y la conjeturación son términos relacionados pero distintos.	La conjetura y la conjeturación son términos relacionados pero distintos	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	La exploración contiene los indicios de la conjetura	La conjetura tiene indicios de la exploración	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	La exploración o reporte de exploración no es rigurosa.	La exploración o reporte de exploración no es rigurosa.	Argumentación	ATA	E

27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	La exploración puede ser rigurosa si se escribe de manera formal	La exploración puede ser rigurosa si se escribe de manera formal	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	La exploración y lo encontrado en la exploración producen la conjetura	La exploración y lo encontrado en la exploración producen la conjetura	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	La conjetura debe tener una estructura distinta a la exploración	La conjetura y el reporte de una exploración son distintos.	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	La conjetura y la exploración deben ser escritas de manera distinta porque son diferentes	La conjetura y la exploración deben ser escritas de manera distinta porque son diferentes	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	La conjetura y la exploración son lo mismo, pero escrito de manera distinta	La conjetura y el reporte de exploración contienen la misma información, pero escrito de manera distinta.	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	La conjetura no necesariamente debe ser una sentencia condicional	La conjetura no necesariamente debe ser reportada utilizando la forma condicional "si..., entonces..."	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	La conjetura es algo que va más allá... la exploración es la base de la conjetura	La conjetura toma elementos de la exploración, sin embargo, contiene más información	Argumentación	ATA	E

27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	La conjetura es algo que parece verdadero, pero no se ha demostrado	La conjetura es una oración que puede tener cierto grado de certeza, pero cuya validez no se ha establecido.	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	Existe conjetura y conjeturación y no son lo mismo.	La conjetura y la conjeturación son términos relacionados pero distintos	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	La explicación, justificación y validación son distintas.	Las palabras "explicación", "justificación" y "validación" hacen referencia a cosas diferentes	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	La validación ocurre cuando se estudia un caso particular, luego se logra la explicación cuando se analiza más de un caso y se justifica de manera general	La diferencia entre la validación, explicación y justificación está en el número de casos a los que responden	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	La validación es lo más flexible, lo más riguroso es la justificación y como transición está la explicación	La diferencia entre la validación, explicación y justificación está es su nivel de rigurosidad. La menos rigurosa es la validación y la más rigurosa la justificación	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	La validación, explicación y justificación están asociados a los diferentes tipos de razonamiento	La validación, explicación y justificación se diferencian en que cada uno surge de un proceso de razonamiento diferente	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	En verdad el proceso general es la justificación, que tiene tres acciones: explicación, validación y demostración	La justificación es un proceso que incluye la explicación, validación y demostración	Argumentación	ATA	E

27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	La prueba por inducción es un ejemplo de justificación	La prueba por inducción es una justificación	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	La explicación es lo más flexible, lo más riguroso es la demostración y como transición está la validación	La diferencia entre la validación, explicación y justificación está es su nivel de rigurosidad. La menos rigurosa es la explicación y la más rigurosa la demostración	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	Una explicación es simplemente una descripción, la validación se trata de una comprobación por medio de ejemplos y la justificación se da con argumentos.	La diferencia entre explicación, validación u justificación son los elementos involucrados en ellas. En una explicación está involucrada una descripción, en la validación hay comprobación por medio de ejemplos y en la justificación hay argumentos.	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	Si no hay exploración no hay conjetura	La conjetura requiere de exploración	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	Cualquier enunciado condicional podría ser la conjetura que responde una tarea de conjeturación	Una conjetura es un enunciado condicional que responde una tarea de conjeturación	Argumentación	ATA	E
27/10/2020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	La rigurosidad está dada por la forma de escritura	La rigurosidad está dada por la forma de escritura	Argumentación	ATA	E

27/10/2 020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	Toda conjetura puede/requiere ser demostrada	Toda conjetura puede/requiere ser demostrada	Argumenta- ción	ATA	E
27/10/2 020	Reunión	Lluvia de ideas reunión	Es en la justificación donde surgen argumentos	Los argumentos surgen en la justificación	Argumenta- ción	ATA	E

Anexo 5. Documento de cierre de Ciclo 2

Luego de diversas socializaciones entre los miembros de La Preuve, se ha establecido una postura en cuanto a:

Argumentación

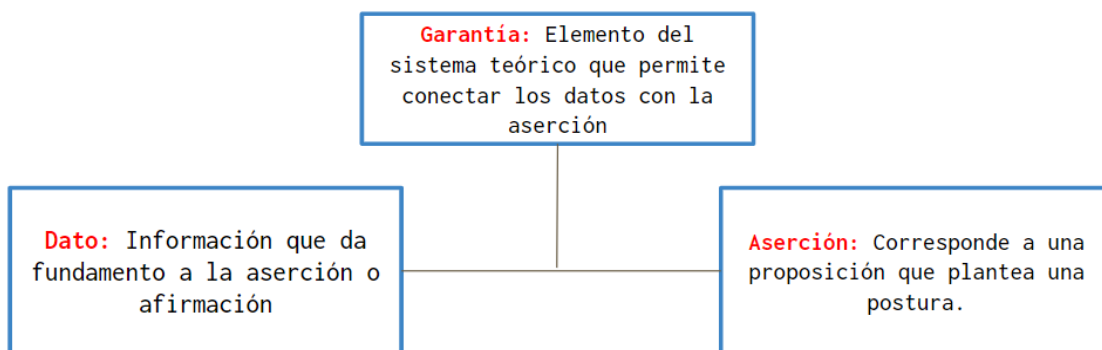
La Argumentación en el Gimnasio Vermont se entiende como un proceso social y comunicativo, preferiblemente de carácter escrito, donde se busca que los estudiantes construyan argumentos apoyados en garantías propias del sistema teórico construido colectivamente.

En la Argumentación encontramos las evidencias que nos permiten reconocer y validar los razonamientos de cada estudiante

En la geometría de 6º y 7º, y a través de actividades de exploración teórica y dinámica, esperamos que los estudiantes sean capaces de construir distintos tipos de argumentos (deductivos, abductivos, analógicos e inductivos) promoviendo así la conjeturación, etapa previa y fundamental de la actividad demostrativa que se abordará en los cursos de 8º y 9º

Argumento

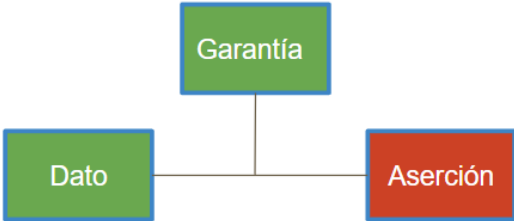
El argumento es el producto de la Argumentación. Es una terna de orden escrito que tiene por propósito exponer razones, sustentar o persuadir



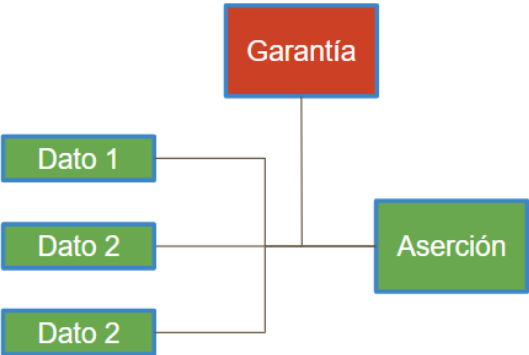
Datos y garantías conforman una justificación

Tipos de argumentos:

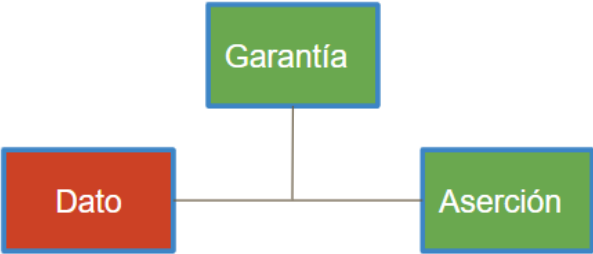
- Argumento deductivo:



- Argumento inductivo:



- Argumento abductivo:



Anexo 6. Tabla de datos Estado 2 La Preuve

Fecha	Insumo	Documento	Afirmación	Interpretación	Elemento	CE	CT
3/02/2021	Documento de cierre Ciclo 2	Consolidado proyecto	La argumentación en el Gimnasio Vermont se entiende como un proceso social y comunicativo	La argumentación es un proceso social (se da en grupos de personas) y comunicativo (está mediado por el discurso)	Argumentación	AA	E
3/02/2021	Documento de cierre Ciclo 2	Consolidado proyecto	[La argumentación es] preferiblemente de carácter escrito	La argumentación no requiere que exista un registro escrito, pero hay una preferencia por parte del colegio para que el producto sea escrito.	Argumentación	AA	E
3/02/2021	Documento de cierre Ciclo 2	Consolidado proyecto	[La argumentación es el proceso] donde se busca que los estudiantes construyan argumentos	La argumentación es el proceso que se debe promover para lograr que los estudiantes construyan argumentos	Argumentación	AA	E
3/02/2021	Documento de cierre Ciclo 2	Consolidado proyecto	Los estudiantes construyen argumentos apoyados en garantías del sistema teórico construido colectivamente	Los argumentos son construidos por los estudiantes	Argumentación	AA	E
				Los argumentos están apoyados por garantías del sistema teórico construido colectivamente	Argumentación	AA	E
3/02/2021	Documento de cierre Ciclo 2	Consolidado proyecto	En la argumentación encontramos las evidencias que nos permiten reconocer y validar los razonamientos de cada estudiante	La argumentación permite evidenciar el razonamiento	Argumentación	AA	E
3/02/2021	Documento de cierre Ciclo 2	Consolidado proyecto	En la geometría de 6° y 7°, y a través de actividades de exploración teórica y dinámica, esperamos que los	La construcción de diferentes tipos de argumentos por parte de los estudiantes puede darse a través de actividades/tareas de exploración teórica y dinámica	Argumentación	AT	C

			estudiantes sean capaces de construir distintos tipos de argumentos (deductivos, abductivos, analógicos e inductivos) promoviendo así la conjeturación, etapa previa y fundamental de la actividad demostrativa que se abordará en los cursos de 8° y 9°	La conjeturación se promueve por medio de la construcción de diversos tipos de argumentos.	Argumentación	ATA	E
				La conjeturación es la etapa previa y fundamental de la actividad demostrativa	Argumentación	ATA	E
				La actividad demostrativa se aborda en 8° y 9° y la conjeturación en 6° y 7°	Argumentación	ATA	E
3/02/2021	Documento de cierre Ciclo 2	Consolidado proyecto	El argumento es el producto de la argumentación	El argumento es el producto de la argumentación	Argumentación	AT	E
3/02/2021	Documento de cierre Ciclo 2	Consolidado proyecto	Un argumento es una terna de orden escrito	Un argumento es un conjunto de tres elementos	Argumentación	AT	E
				Un argumento es de orden escrito	Argumentación	AT	E
3/02/2021	Documento de cierre Ciclo 2	Consolidado proyecto	Un argumento tiene como propósito exponer razones, sustentar o persuadir.	Un argumento tiene como propósito exponer razones, sustentar o persuadir.	Argumentación	AT	E
3/02/2021	Documento de cierre Ciclo 2	Consolidado proyecto	Los datos son la información que da fundamento a la aserción o afirmación	Los datos son la información que da fundamento a la aserción o afirmación	Argumentación	AT	E
3/02/2021	Documento de cierre Ciclo 2	Consolidado proyecto	La garantía es un elemento del sistema teórico que permite conectar los datos con la aserción	La garantía es un elemento del sistema teórico que permite conectar los datos con la aserción	Argumentación	AT	E

3/02/2021	Documento de cierre Ciclo 2	Consolidado proyecto	La asección corresponde a una proposición que plantea una postura	La asección corresponde a una proposición que plantea una postura	Argumentación	AT	E
3/02/2021	Documento de cierre Ciclo 2	Consolidado proyecto	Datos y garantías conforman una justificación	Datos y garantías conforman una justificación	Argumentación	AT	E

Anexo 7. Tabla de datos Estado Inicial 2 La Preuve

Fecha	Insumo	Documento	Afirmación	Interpretación	Elemento	CE	CT
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	Grupo de ejercicios o de acciones que buscan reforzar una habilidad y/o una teoría vista en clase	La tarea es un grupo de ejercicios	Tarea	TA	E
				La tarea busca reforzar una habilidad y/o una teoría vista en clase	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	La tarea no debe ser demasiado compleja	La tarea no debe ser demasiado compleja	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	Ha de ser concreta y debe ser de fácil verificación (revisión)	La tarea debe ser concreta	Tarea	TA	E
				La tarea debe ser fácil de revisión	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	Es un ejercicio que el estudiante realiza con el fin de practicar y consolidar lo aprendido en clase.	La tarea es un ejercicio que debe realizar el estudiante	Tarea	TA	E
				La tarea sirve para practicar y consolidar lo visto en clase	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	La tarea debe tener un objetivo claro.	La tarea debe tener un objetivo claro.	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	Debe ser oportuna y pertinente, no debe ser traída de la nada	La tarea debe ser oportuna y pertinente	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	Trabajo que el estudiante debe desarrollar a partir de una noción	La tarea es un trabajo del estudiante	Tarea	TA	E
				La tarea debe procurar que el estudiante use una noción	Tarea	TA	E

28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	Los lineamientos son dados por el profesor.	La tarea es orientada por el profesor. Es el profesor quien da los lineamientos de la tarea	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	Actividad en la que se debe demostrar los conocimientos que se tiene de algo.	La tarea es una actividad	Tarea	TA	E
				La tarea sirve para que el estudiante demuestre sus conocimientos	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	Una tarea se pone a los estudiantes para que afiancen los conocimientos vistos en clase	La tarea sirve para que los estudiantes afiancen el conocimiento	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	Una tarea se pone a los estudiantes para que tengan tiempo fuera del transcurrir de la clase, para llevar a la práctica los procedimientos matemáticos vistos en clase, y que cada estudiante se pueda tomar el tiempo que considere necesario para interiorizar lo visto.	La tarea se asigna a los estudiantes	Tarea	TA	E
				La tarea se asigna para que los estudiantes dediquen tiempo extra-clase	Tarea	TA	E
				La tarea se asigna para que los estudiantes lleven a la práctica su conocimiento	Tarea	TA	E
				La tarea promueve que el estudiante tome el tiempo necesario para interiorizar lo visto	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	Una tarea es una reflexión individual	La tarea es una reflexión individual	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	Es un ejercicio metacognitivo donde el estudiante se hace consciente de su proceso de aprendizaje	La tarea es un ejercicio metacognitivo en el que el estudiante se hace consciente de su aprendizaje	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	Aplicar lo aprendido	La tarea sirve para que el estudiante aplique lo aprendido	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	Su propósito es afianzar un conocimiento e identificar dudas	La tarea sirve para afianzar conocimiento e identificar dudas	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	Actividad que estipula una serie de acciones a llevar a cabo,	La tarea es una actividad en la que se estipulan acciones a llevar a cabo	Tarea	TA	E

			en la que se espera un producto como entrega que evidencia el cumplimiento de las acciones	La tarea implica que se genere un producto como evidencia del cumplimiento de las acciones	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	Debe tener instrucciones	La tarea debe tener instrucciones	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	Se evidencia mediante un producto final (escrito u oral)	La tarea tiene un producto final que puede ser oral o escrito	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	Herramienta diagnóstica	La tarea es una herramienta diagnóstica	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	Oportunidad para el estudiante	La tarea es una oportunidad para el estudiante	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	Herramienta de medición	La tarea es una herramienta de medición	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	La tarea sirve para comprobar el aprendizaje de los estudiantes	La tarea sirve para comprobar el aprendizaje de los estudiantes	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	La tarea sirve para retroalimentar a los estudiantes	La tarea sirve para retroalimentar a los estudiantes	Tarea	TA	E
28/02/2022	Rutina de pensamiento 3, 2, 1	Concepciones de tarea	La tarea es una herramienta que se utiliza para que el estudiante profundice en algún tema	La tarea es una herramienta que se utiliza para que el estudiante profundice en algún tema	Tarea	TA	E

Anexo 8. Análisis de tareas seleccionadas de libros de texto

EQUIPO A

Ejercicios tomados de la página 165. Bautista, M., Chizner, J., Joya, A. Salgado, d., Romero, j. & Torres, W. (2007). *Nuevas Matemáticas*. Santillana S.A.

8. Si $\triangle PQR$ es un triángulo obtusángulo y $\sphericalangle PQR$ es el ángulo obtuso, ¿qué tipo de ángulos son $\sphericalangle QPR$ y $\sphericalangle PRQ$?

9. Si $\triangle RST$ es un triángulo escaleno y $\sphericalangle RST$ es el doble de $\sphericalangle TRS$ y $\sphericalangle RTS$ es el triple de $\sphericalangle TRS$, ¿qué medidas tienen los ángulos del triángulo?

REFORMULACIÓN

- 8) Si $\triangle PQR$ es un triángulo obtusángulo con $\sphericalangle PQR$ obtuso ¿qué tipo de ángulos son $\sphericalangle QPR$ y $\sphericalangle PRQ$?
- 9) Si $\triangle PQR$ es un triángulo escaleno y $m\angle RST$ es el doble de $m\angle TRS$ Y $m\angle RST$ es el triple de $m\angle TRS$ ¿qué medidas tienen los ángulos del triángulo?

COMENTARIOS

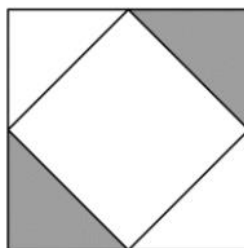
8) La situación permite que el estudiante recurra al hecho geométrico de la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180. (T. 180), esta situación le permitirá establecer relaciones entre las medidas de los ángulos teniendo como dato inicial y como antecedente de la afirmación, que uno de dichos ángulos es obtuso, podrá establecer algunas igualdades y propiedades en el conjunto de los reales que le permitirán sustentar que los ángulos son agudos. Cabe mencionar que los estudiantes pueden recurrir a un gran número de recursos desde entornos de geometría dinámica y construcciones a mano alzada que los convenza de que las medidas de dichos ángulos son menores a 90.

9) Los estudiantes deben iniciar su discurso con el hecho geométrico que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180. Permitiendo que el estudiante relacione las medidas de los ángulos con el hecho geométrico, logrando establecer una cadena deductiva a partir de una ecuación y el hecho geométrico. El resultado numérico le permitirá comprobar la veracidad de este.

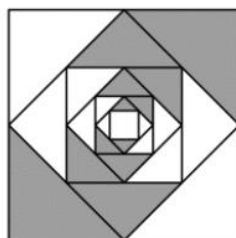
EQUIPO B

PLANTEAMIENTO

Dado un cuadrado de lado a . Un segundo cuadrado se obtiene uniendo los puntos medios de cada uno de los lados del cuadrado original. Adicionalmente se somborean dos de los triángulos resultantes como se muestra en la figura.



Si este proceso se repite cinco veces más como se muestra en la figura



Establecer cada uno de los resultados de las áreas en los seis procedimientos.

- ¿Encuentras algún patrón? cuál
- Si realizaras la suma de las áreas ¿qué podrías afirmar?
- ¿Si el proceso es indefinido que podrías afirmar sobre la suma infinita de las áreas?

RAZONES DE PORQUE ES UNA TAREA

Es una tarea porque es un enunciado dentro de un contexto relativo al marco disciplinar de las matemáticas, que exige poner en juego habilidades cognitivas, conceptos, algoritmos y representaciones.

EQUIPO C

Tarea que promueva la argumentación:

¿Por qué cree que la fórmula para calcular el área de un triángulo es el semi-producto de una base y una altura? (Taller de Geometría tomo II séptimo grado)

¿Por qué esta tarea favorece la argumentación?

Se cree que esta tarea favorece la argumentación dado que el estudiante debe basarse en un sistema teórico tanto geométrico como aritmético, el primero, tener conocimiento de los elementos geométricos inmersos en una construcción genérica de un cuadrilátero y la relación con los triángulos al trazar un segmento adecuado; el segundo, tener conocimiento e interpretación respecto al área de un cuadrilátero y cómo a partir de ella se logra determinar el área de un triángulo. Así mismo la buena interpretación y el uso adecuado de la terminología matemática.

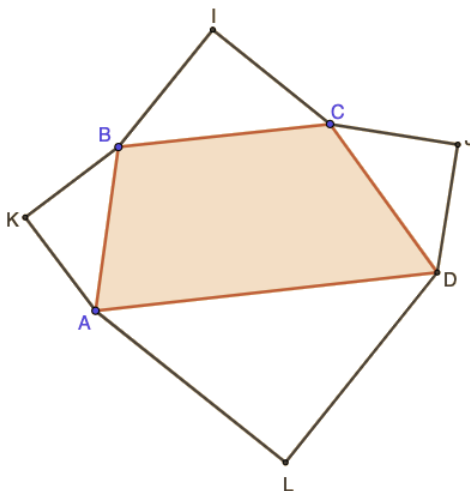
¿De qué manera un estudiante podría asumir la tarea planteada?

El estudiante debe partir de la comprensión en la instrucción de la tarea y asumir la necesidad de relacionar un triángulo con objetos que involucren medidas de bases y alturas; generando preguntas sobre el significado del área como el producto de la base con la altura, dando paso a una exploración geométrica.

EQUIPO D

ENUNCIADO

Sea el cuadrilátero ABCD. Sobre cada uno de los lados, tomados como hipotenusa, se construyen triángulos rectángulos isósceles externos al cuadrilátero, como se muestra en la figura.



¿Qué condiciones debe cumplir el cuadrilátero ABCD para que el cuadrilátero IJLK sea un rectángulo? Formule una conjetura que responda a la pregunta y provea una demostración a la conjetura.

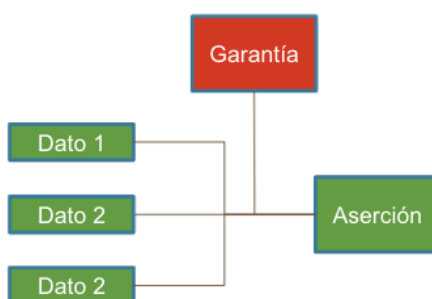
EXPLICACIÓN

A través de este enunciado abierto los estudiantes deben establecer una conjetura. Creemos que, para enunciar la conjetura, los estudiantes, en su mayoría, optarían por realizar una actividad de exploración dinámica.

Los estudiantes podrían proponer inicialmente una actividad de exploración dinámica no planificada, la cual facilitaría la formulación de los primeros argumentos, los cuales creemos serían de orden abductivo. Aquí los estudiantes procurarían identificar las condiciones necesarias (datos) para que se cumpla que IJLK sea un rectángulo (Aserción).



Luego, planificando mejor la exploración dinámica a partir de los datos iniciales, y teniendo en cuenta la clasificación de cuadriláteros, podrían formular argumentos inductivos y de esta manera construir una garantía.



Una vez enuncien y corroboren la conjetura, los estudiantes deben proveer una demostración. Aquí por supuesto prevalecen los argumentos deductivos.

Anexo 9. Documento de cierre de Ciclo 3

A partir de los referentes teóricos del grupo de investigación La Preuve como lo son La actividad demostrativa propuesta por el Grupo AEG de la UPN, el desarrollo del pensamiento con las ocho culturas de pensamiento propuestas por Ritchhart (2015) y de los lineamientos propuestos por el programa IB; se han logrado establecer algunos criterios de diseño de tareas que permiten caracterizarlas favoreciendo la argumentación en geometría entre los grados sexto y noveno del Colegio Gimnasio Vermont.

Haciendo una exploración de nociones y acercamiento al marco de referencia: Modelo de Análisis didáctico (Gómez, 2016) se ha acogido que una tarea es: Una propuesta didáctica que lleva al aula el docente con la intención de brindar oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y afectivas que ha establecido, y superen las limitaciones que ha conjeturado que ellos tendrán.

Y se concibe que una tarea matemática, de acuerdo con Gómez (2016), como una demanda estructurada, con un contenido matemático y un propósito de aprendizaje, que el profesor propone a los estudiantes con carácter intencional. Con motivo de una tarea, profesor y estudiantes realizan actividades, que los estudiantes pueden desarrollar de manera individual o en grupo.

Además, dicha tarea contará con determinados elementos que en conjunto con los verbos de instrucción favorecerán el proceso de argumentación en Geometría:

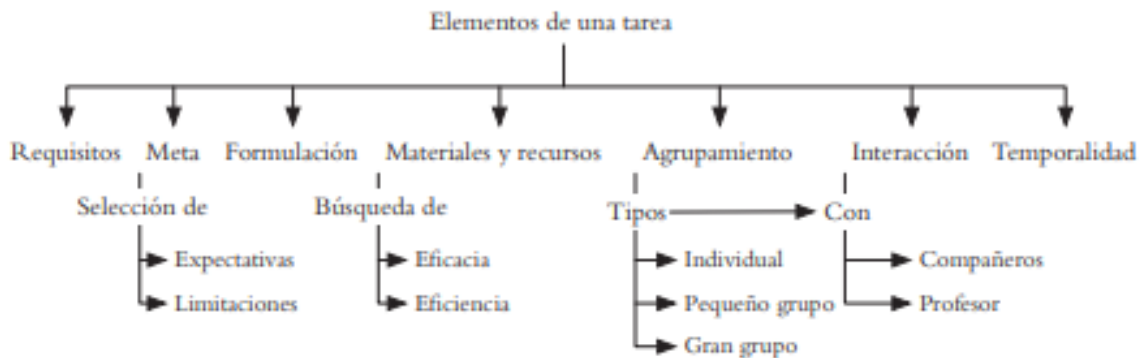


Figura 9. Elementos para describir una tarea matemática escolar

Términos de instrucción del programa IB: De los propuestos por el programa, se listan los verbos de interés para LaPreuve:

- Deducir: Establecer una conclusión a partir de la información suministrada.
- Demostrar: Aclarar mediante razonamientos o datos, ilustrando con ejemplos o aplicaciones prácticas.
- Justificar: Proporcionar razones o pruebas válidas que respalden una respuesta o conclusión.
- Mostrar: Indicar los pasos realizados en un cálculo o deducción.
- Mostrar que: Obtener el resultado requerido (posiblemente, utilizando la información dada) sin necesidad de una prueba. En este tipo de preguntas, por lo general, no es necesario el uso de la calculadora.
- Probar: Utilizar una secuencia de pasos lógicos para obtener el resultado requerido de un modo formal.

El grupo de investigación hace la aclaración que, aunque el programa IB hace una distinción para cada verbo de instrucción, para el Programa de Matemáticas del Colegio Gimnasio Vermont se entiende e implementa que:

- Probar: Aclarar mediante razonamientos o datos, ilustrando con ejemplos o aplicaciones prácticas.
- Demostrar: Utilizar una secuencia de pasos lógicos para obtener el resultado requerido de un modo formal.

Finalmente, luego de recopilar la información, analizarla y discutirla, se establecen los criterios de tareas que promueven la argumentación en Geometría:

1. El enunciado de la tarea debe ser abierto, las respuestas no deben ser limitadas o sesgadas por las preguntas.
2. El enunciado debe incluir como requerimiento que el estudiante escriba reportes de la actividad que realiza
3. La tarea debe incluir que el estudiante acuda a algún tipo de representación, ya sea dinámica o no.
4. La tarea, preferiblemente, debe solicitar a un estudiante una conjetura y su demostración

5. Las preguntas formuladas en la tarea deben ser preguntas de indagación y brindar al estudiante la oportunidad de explorar, descubrir y conjeturar.
6. La tarea debe promover el pensamiento crítico y reflexivo. Los estudiantes deben sostener con argumentos sus puntos de vista.

Anexo 10. Tabla de datos Estado 3 La Preuve

Fecha	Insumo	Documento	Afirmación	Interpretación	Elemento	CE	CE
21/11/2022	Documento de cierre Ciclo 3	Consolidado proyecto	Haciendo una exploración de nociones y acercamiento al marco de referencia: Modelo de Análisis didáctico (Gómez, 2016) se ha acogido que una definición de tarea	La definición que adopta La Preuve para tarea es la que provee Gómez (2016)	Tarea	TA	E
21/11/2022	Documento de cierre Ciclo 3	Consolidado proyecto	Una tarea es una propuesta didáctica que lleva al aula el docente	Una tarea es una propuesta didáctica que lleva al aula el docente	Tarea	TA	E
21/11/2022	Documento de cierre Ciclo 3	Consolidado proyecto	[Una tarea tiene] la intención de brindar oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y afectivas que ha establecido el docente	[Una tarea tiene] la intención de brindar oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y afectivas que ha establecido el docente	Tarea	TA	E
				Para diseñar una tarea el profesor tiene en cuenta las expectativas de aprendizaje y afectivas de los estudiantes	Tarea	TCD	C
				Para diseñar una tarea el profesor tiene en cuenta las limitaciones de los estudiantes	Tarea	TCD	A
21/11/2022	Documento de cierre Ciclo 3	Consolidado proyecto	[Una tarea tiene] la intención que los estudiantes superen las limitaciones que [el profesor] ha conjeturado que ellos tendrán.	Para diseñar una tarea el profesor tiene en cuenta las limitaciones que podrían tener los estudiantes	Tarea	TCD	C
21/11/2022	Documento de cierre Ciclo 3	Consolidado proyecto	Una tarea matemática, de acuerdo con Gómez (2016), como una demanda estructurada	Una tarea matemática, de acuerdo con Gómez (2016), como una demanda estructurada	Tarea	TA	E

21/11/2 022	Documento de cierre Ciclo 3	Consolidado proyecto	Una tarea matemática cuenta con un contenido matemático y un propósito de aprendizaje	Una tarea matemática cuenta con un contenido matemático y un propósito de aprendizaje	Tarea	TA	E
21/11/2 022	Documento de cierre Ciclo 3	Consolidado proyecto	Con motivo de una tarea, profesor y estudiantes realizan actividades	Una tarea provoca que profesor y estudiantes realicen actividad.	Tarea	TA	E
21/11/2 022	Documento de cierre Ciclo 3	Consolidado proyecto	los estudiantes pueden desarrollar [la actividad para solucionar una tarea] de manera individual o en grupo.	los estudiantes pueden desarrollar [la actividad para solucionar una tarea] de manera individual o en grupo.	Tarea	TA	I
21/11/2022	Documento de cierre Ciclo 3	Consolidado proyecto	Una tarea contará con determinados elementos que, en conjunto con los verbos de instrucción, favorecerán el proceso de argumentación en Geometría	Una tarea contará con determinados elementos que, en conjunto con los verbos de instrucción, favorecerán el proceso de argumentación en Geometría	Tarea	TA	E
21/11/2022	Documento de cierre Ciclo 3	Consolidado proyecto	Los elementos de una tarea son: Requisitos, meta, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad	Los elementos de una tarea son: Requisitos, meta, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad	Tarea	TA	E
21/11/2 022	Documento de cierre Ciclo 3	Consolidado proyecto	De los propuestos por el programa (IB), se listan los verbos de interés para La Preuve	De los propuestos por el programa (IB), se listan los verbos de interés para La Preuve	Tarea	TA	E
21/11/2 022	Documento de cierre Ciclo 3	Consolidado proyecto	Deducir: Establecer una conclusión a partir de la información suministrada	[Si el enunciado de la tarea incluye la palabra] Deducir [se espera que el estudiante logre] Establecer una conclusión a	Tarea	TA	E

				partir de la información suministrada			
21/11/2022	Documento de cierre Ciclo 3	Consolidado proyecto	Justificar: Proporcionar razones o pruebas válidas que respalden una respuesta o conclusión.	[Si el enunciado de la tarea incluye la palabra] Justificar [se espera que el estudiante logre] Proporcionar razones o pruebas válidas que respalden una respuesta o conclusión.	Tarea	TA	E
21/11/2022	Documento de cierre Ciclo 3	Consolidado proyecto	Mostrar: Indicar los pasos realizados en un cálculo o deducción.	[Si el enunciado de la tarea incluye la palabra] Mostrar [se espera que el estudiante logre] Indicar los pasos realizados en un cálculo o deducción.	Tarea	TA	E
21/11/2022	Documento de cierre Ciclo 3	Consolidado proyecto	Mostrar que: Obtener el resultado requerido (posiblemente, utilizando la información dada) sin necesidad de una prueba. En este tipo de preguntas, por lo general, no es necesario el uso de la calculadora.	[Si el enunciado de la tarea incluye la palabra] Mostrar que [se espera que el estudiante logre] Obtener el resultado requerido (posiblemente, utilizando la información dada) sin necesidad de una prueba. En este tipo de preguntas, por lo general, no es necesario el uso de la calculadora.	Tarea	TA	E
21/11/2022	Documento de cierre Ciclo 3	Consolidado proyecto	Probar: Aclarar mediante razonamientos o datos, ilustrando con ejemplos o aplicaciones prácticas	[Si el enunciado de la tarea incluye la palabra] Probar [se espera que el estudiante logre] Aclarar mediante razonamientos o datos, ilustrando con	Tarea	TA	E

ejemplos o aplicaciones prácticas							
21/11/2022	Documento de cierre Ciclo 3	Consolidado proyecto	Demostrar: Utilizar una secuencia de pasos lógicos para obtener el resultado requerido de un modo formal.	[Si el enunciado de la tarea incluye la palabra] Demostrar [se espera que el estudiante logre] Utilizar una secuencia de pasos lógicos para obtener el resultado requerido de un modo formal.	Tarea	TA	E