UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

DISEÑO DE UNA HERRAMIENTA DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS UTILIZANDO ELEMENTOS HISTÓRICOS DE LO LOGARÍTMICO Y LO EXPONENCIAL

ISRAEL BOCANEGRA PARRA
OSCAR DAVID GALEANO ROMERO
HERMES VIANNEY HUERFANO CORREA

TRABAJO DE GRADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTA. D.C., 2013

DISEÑO DE UNA HERRAMIENTA DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS UTILIZANDO ELEMENTOS HISTÓRICOS DE LO LOGARÍTMICO Y LO EXPONENCIAL

ISRAEL BOCANEGRA PARRA
OSCAR DAVID GALEANO ROMERO
HERMES VIANNEY HUERFANO CORREA

ASESOR
EDGAR ALBERTO GUACANEME SUÁREZ

Trabajo de grado presentado para optar al título de Magister en Docencia de la Matemática

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTA. D.C., 2013

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"Diseño de una herramienta didáctica para la formación del profesor de Matemáticas utilizando elementos históricos de lo logarítmico y lo exponencial."** Presentado por los estudiantes:

Israel Bocanegra Parra – 2012185003
Óscar David Galeano Romero - 2012185008
Hermes Vianey Huérfano Correa - 2012185012

Como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado** con **45** Puntos.

Observaciones:

____

En constancia se firma a los 03 días del mes de diciembre de 2013.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) Edgar A Guacaneme S.
EDGAR ALBERTO GUACANEME

Jurados:

Profesor(a)
MARÍA TERESA GONZÁLEZ ESPAÑA

Profesor (a)
HERNÁN DÍAZ ROJAS

Dedicatoria:

A Dios, quien me ha dado todo lo que tengo. A mis padres, Numael Galeano y María Inés Romero, por darme una vida acompañada de buenos ejemplos. A mi esposa, Marcela Guevara y a mi hijo, David Santiago, quienes han embellecido mi vida.

OSCAR GALEANO R.

Dedicatoria:

Dedico este triunfo primeramente a Dios por permitirme conseguirlo, a mis padres Nepomuceno Huérfano y Arcelia Correa, quienes me enseñaron a salir adelante con esfuerzo y dedicación, a mi Esposa Diana Garzón a mi hija Jessika Andrea y a Bebe quienes son mi felicidad.

HERMES HUÉRFANO C.

Dedicatoria:

Dedico este logro tan importante a Dios quien siempre me ha guiado, a la memoria de mi padre Ramiro Bocanegra, y a mi madre Fanny Parra, quienes me apoyaron y brindaron lo mejor de sí, a mi Esposa Nubia, y a mis queridas hijas Alejandra y Sofía.

ISRAEL BOCANEGRA P.

Agradecimientos:

A nuestro asesor, el Profesor Edgar Alberto Guacaneme Suárez, por compartir con nosotros el fruto de su larga vida académica.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL	**FORMATO**
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

Código: FOR020GIB	**Versión: 01**
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	**Página 1 de 3**

- Información General

Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Diseño de una herramienta didáctica para la formación del profesor de matemáticas utilizando elementos históricos de lo logarítmico y exponencial
Autor(es)	Israel Bocanegra Parra Oscar David Galeano Romero Hermes Vianney Huérfano Correa
Director	Edgar Alberto Guacaneme Suárez
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional. 2013, 224 Páginas.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Función exponencial y logarítmica, P.C.K. (*Pedagogical Content Knowledge*), Conocimiento del Profesor de Matemáticas, Historia de las Matemáticas, Herramienta Didáctica, Hitos Históricos.

- Descripción

Este trabajo se inscribe en el campo de investigación Formación del Profesor de Matemáticas, con el objetivo de diseñar unas herramientas didácticas que posibiliten la apropiación de algunos elementos históricos por parte del profesor de matemáticas, en relación con los conceptos de lo logarítmico y lo exponencial, que potencie su conocimiento didáctico de contenido.

- Fuentes

- Para la realización del presente documento se consultaron 57 fuentes bibliográficas, de las cuales se señalan 5 de las más importantes. El lector interesado puede dirigirse a la bibliografía para consultar las demás fuentes.

Cajori, F. (1913). History of the Exponential and Logarithmic Concepts. (M. A. America, Ed.) *The American Mathematic Monthly, 20*(1-7), 1-210.

Martínez, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales*.Tésis, México, México: Cinvestav.

Maor, E. (1994). *e: The Story of a Number*. Princeton, New Jersey, E.E.U.U.: Princeton University Press.

Pinto, J. (2010). *Conocimiento Didáctico del Contenido sobre la representación de datos estadísticos: Estudios de Casos con Profesores de Estadística en carreras de Psicología y Educación*. Salamanca, España: Universidad de Salamanca.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research, 2*, 4-14.

- Contenido

El cuerpo de este documento consta de seis capítulos. En el primer capítulo, describimos el problema que abordamos en este estudio, los antecedentes investigativos, la justificación, y los objetivos que nos hemos propuesto. Así, mostramos las razones personales y profesionales que motivaron este estudio, reconocemos la existencia de otros trabajos sobre la misma temática (consistente en describir el proceso evolutivo de los conceptos la función logaritmo y exponencial, aunque con objetivos diferentes a los nuestros) y explicamos las razones que nos llevaron considerar importante la realización de este estudio.

En el segundo capítulo, presentamos los referentes teóricos que conducen la realización de nuestro estudio. El capítulo consta de cinco apartados. En el primero se define el concepto de *herramienta didáctica* en el campo de investigación Formación del Profesor de Matemáticas. Seguidamente, en el apartado dos, se hace una descripción de doce de las herramientas didácticas de mayor uso entre la comunidad de profesores de matemáticas, destacando las características que describen a cada una de ellas. En el apartado tres, se muestra la postura que asumimos sobre el concepto CDC del profesor de matemáticas, después de haber revisado los planteamientos de varios autores. En el apartado cuatro, mostramos cómo la historia evolutiva de los conceptos matemáticos se puede constituir en un mediador que facilita la comprensión y enseñanza de los mismos. En el último apartado se muestra la importancia de incluir el componente histórico como parte de los currículos tendientes a la formación de futuros profesores de matemáticas.

El tercer capítulo corresponde al diseño metodológico que hemos utilizado para el desarrollo de nuestro trabajo de grado, el cual es de tipo documental-cualitativo. Nuestra metodología no se inscribe dentro de un tipo particular de diseño metodológico, sino que goza de algunas características de los diseños metodológicos documental y cualitativo, de donde proviene el nombre que le hemos atribuido. Es documental, en cuanto a que nuestras fuentes de información y nuestros datos, corresponden a los diferentes documentos históricos sobre los conceptos de lo exponencial y lo logarítmico; y es cualitativo en cuanto a que nuestros datos no son cuantificables, sino que nuestras decisiones están mediadas por la subjetividad, que está ligada a nuestra parte humana, a nuestros gustos y creencias.

En el capítulo cuatro se muestran los resultados y discusiones finales. Este capítulo consta de tres apartados. El primer apartado consta de la construcción de nuestra versión de la interpretación de la historia de los conceptos de lo exponencial y lo logarítmico; allí decidimos conservar la estructura manejada en el documento original de Cajori (1913), con algunas ampliaciones con base en otros documentos. En el apartado dos se hace un reconocimiento de seis ideas transcendentales que guiaron el desarrollo evolutivo de los conceptos de lo exponencial y logarítmico y que hemos denominado como *hitos históricos*. Estas ideas que a nuestro juicio fueron transcendentales, son reconocidas de la misma forma por la mayoría de los historiadores en sus respectivos documentos. En el apartado tres mostramos la relación entre los asuntos del CDC definidos por Pinto (2010) y la historia de evolución de los conceptos de exponencial y logarítmico. Pinto (2010) define el CDC en tres componentes, los cuales a su vez los divide en tres categorías, cada una de los cuales consta de diferentes asuntos.

En el capítulo cinco se muestran el diseño de las tres *tareas (planteadas como ejemplos de estrategias instruccionales para el profesor de matemáticas)*, que corresponden a las herramientas didácticas. La primera tarea pretende promover la relación entre las sucesiones aritmética y geométrica desde la representación tabular. En la segunda tarea se plantea la relación geométrica del área bajo la curva de la hipérbola equilátera y el logaritmo natural de un número en un intervalo dado. En la tercera tarea se expone la notación como parte de la actividad matemática, en nuestro caso las notaciones de los conceptos logarítmico y exponencial. Finalmente se proponen las actividades correspondientes a cada tarea y se hace una reflexión acerca de la fuente de inspiración de *las tareas* y cuáles fueron los posibles aportes para el CDC del profesor de matemáticas.

En el capítulo sexto se dan las conclusiones finales con respecto a los objetivos trazados inicialmente, qué se logró hacer, qué aspectos quedaron pendientes por respuestas, y las nuevas preguntas que surgieron.

- Metodología

Nuestra metodología consta de cuatro etapas. La primera consiste en la organización y clasificación documental por temáticas. Aunque inicialmente los documentos se clasificaron en cuatro grupos diferentes, se verá que durante el desarrollo de nuestro trabajo, solo se hizo énfasis en el grupo de documentos históricos; los demás grupos documentales no fueron utilizados, debido a que la información brindada por el grupo seleccionado fue lo suficientemente amplia para permitirnos llevar a cabo el diseño final de cada una de las herramientas didácticas. Por lo general, estos documentos constan de algunos fragmentos originales, acompañados de la interpretación que de ellos hacen los autores. La segunda etapa muestra la postura que asumimos con respecto al CDC, ya que existen diferentes interpretaciones del mismo, que dependen principalmente de los autores.

La tercera etapa corresponde a la descripción de las características de cada una de las herramientas didácticas que son de uso común en la formación de futuros profesores de matemáticas. Para la elección de la herramienta didáctica tuvimos en cuenta que esta permitiera establecer una conexión entre la historia de los conceptos de exponencial y logaritmo, los hitos históricos y el CDC del profesor de matemáticas. La cuarta etapa consiste en el diseño final de las herramientas didácticas que surge como producto de las tres etapas anteriores. De acuerdo con las decisiones tomadas, realizamos el diseño de tres tareas, que corresponden a tres hitos históricos. La elección de estos tres hitos históricos en preferencia de los tres restantes, se debió a las siguientes razones: su mayor grado de afinidad con el CDC, a una cuestión de gusto de los investigadores, y a la imposibilidad de abordar cada uno de los hitos históricos dentro del tiempo señalado para la culminación de este estudio.

- Conclusiones

1. Como producto de nuestro reconocimiento hecho al desarrollo histórico de los conceptos de lo logarítmico y exponencial, podemos decir que la apropiación de dicho conocimiento aporta al CDC del profesor de matemáticas en sus tres componentes.

2. A raíz del proceso de apropiación de la historia del concepto exponencial, encontramos que su desarrollo no es independiente, sino que emerge ligado al desarrollo de otros conceptos al interior de las matemáticas, y fundamentalmente está ligado al desarrollo del concepto logarítmico, de manera que el uno no se

puede comprender sin el otro.

3. Una de nuestras hipótesis de trabajo plantea que el uso de la herramienta didáctica Tareas, a través de la secuencia didáctica, podría contribuir al CDC del profesor de matemáticas. Esta hipótesis la corroboramos mediante el diseño de las secuencias de las Tres Tareas, las cuales tienen la intención de aportar al conocimiento matemático del profesor de matemáticas al permitirle acceder a otras maneras de representar los conceptos logaritmo y exponencial.

4. La visión que obtuvimos sobre los conceptos exponencial y logarítmico está ligada a las características y documentos usados en esta historia, dado que la mayor parte de los textos consultados hacen un uso o interpretación de la historia, de ahí que reconozcamos la posibilidad de otras visiones, otros usos e interpretaciones de la historia de estos conceptos.

5. Las Tareas como herramienta didáctica tienen la ventaja de permitirnos ilustrar y potenciar hechos y principios matemáticos específicos dentro de la historia de los conceptos logaritmo y exponencial.

6. Dado que históricamente surgió primero el concepto de logaritmo y luego el de exponencial, se da la posibilidad de hacer una propuesta curricular en la que se haga la inversión en los contenidos ya que actualmente se presenta en el currículo primero la función exponencial y luego la logarítmica.

7. Dentro del reconocimiento histórico realizado sobre los conceptos logarítmico y exponencial, identificamos aspectos que hacen que se reconozca la actividad matemática como actividad social.

8. El reconocimiento de la inventiva y recursividad humana para dar solución a problemas matemáticos de gran complejidad le permite al profesor de matemáticas reconocer las matemáticas como producto humano.

9. Un aporte al conocimiento del profesor de matemáticas es el reconocimiento del potencial de motivación que pueden tener las paradojas en la evolución de los conceptos logarítmico y exponencial como promotoras del desarrollo matemático.

10. Con la elaboración de la Tarea sobre las notaciones de los conceptos logaritmo y exponencial se reconoce que la notación es parte fundamental de la actividad matemática, como mediadora de la misma. Se evidencia que un cierto tipo de notación, predispone, favorece, limita, condiciona la forma de pensar y determina la actividad matemática misma.

11. Durante la construcción de las Tareas que buscaban aportar al CDC del profesor de matemáticas, notamos que estas terminaron favoreciendo el conocimiento matemático antes que el conocimiento didáctico.

12. Los documentos y textos a los que tuvimos acceso no son de fácil comprensión debido a que están en otro idioma y el sólo hecho de traducirlos ya

se constituyen en una versión aproximada a la original; lo cual hace que la información contenida en estos documentos y textos no estén al alcance de la mayoría de los profesores de matemáticas.

13. En relación con nuestro proceso de profesionalización y el desarrollo de competencias investigativas, la realización de este trabajo nos aportó en los siguientes aspectos: primero, el fortalecimiento de habilidades relacionadas con la escritura y comunicación de textos académicos; segundo, el uso ágil y eficiente de diferentes fuentes y herramientas tecnológicas especializadas en el acopio, análisis y procesamiento de información documental, y tercero, la puesta en marcha de un procedimiento metodológico de investigación que permita la validación coherente de las hipótesis.

14. Finalmente ponemos en consideración del lector algunos aspectos que surgieron a lo largo del desarrollo del trabajo y que quedan abiertos a futuras investigaciones. Entre los principales aspectos podemos mencionar: el diseño de Tareas para los Hitos Históricos de: La Generalización, Las Discusiones e Intentos Fallidos, Los Factores Sociales. Otros aspectos a desarrollar que surgen de la historia de estos conceptos son: las paradojas, las diversas representaciones del número *e*, la relación del logaritmo con los números complejos y su representación gráfica.

Elaborado por:	Oscar David Galeano Romero, Hermes Vianney Huérfano Correa, Israel Bocanegra Parra.		
Revisado por:	Edgar Alberto Guacaneme Suárez		
Fecha de elaboración del Resumen:	4	12	2013

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Actualmente se reconoce la importancia del concepto matemático función exponencial, dentro de la comunidad matemática. Dicha importancia radica principalmente en que esta función permite modelar diferentes situaciones y fenómenos en varias disciplinas, como en la Física, la Biología, la Química, la Economía, entre otras. Pese a su importancia, desde nuestro sentir como profesores de matemáticas, encontramos que la enseñanza de este concepto, no goza del tiempo suficiente dentro del currículo de matemáticas; y que también, es poco lo que de ella se conoce, en cuanto a su génesis. En un sentido similar Bartlett (2004) lo ha expresado a través de su frase célebre: "La mayor debilidad de los seres humanos es su incapacidad para comprender la función exponencial". Por las razones anteriores, hemos querido desarrollar un estudio en torno al concepto matemático función exponencial, con la idea de brindar un medio que facilite la comprensión y reconocimiento de aquellos aspectos contenidos en la historia que consideramos deben ser del dominio y conocimiento de los profesores de matemáticas. También pretendemos con esto, que los aspectos sobre el conocimiento del proceso histórico de la función exponencial, no sean del dominio de unos pocos, sino que, mediante el diseño de herramientas didácticas, estén al alcance de los profesores de matemáticas, y esto redunde en el fortalecimiento de su Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC).

Igualmente reconocemos en la historia un escenario rico en ejemplos desde los cuales es factible dotar de significado los diferentes conceptos matemáticos que se quiere enseñar. De la misma forma, el conocimiento de cada uno de los procesos de razonamiento llevados a cabo por el hombre, en su inventiva por dar solución a problemas reales de su entorno, pueden ser aprovechados para dotar de significado cada concepto, en este sentido la historia se puede utilizar, como lo afirma Jones (1969, citado en National Council of Teachers of Mathematics, 1971, p.1): "como una herramienta para que los estudiantes comprendan los porqué detrás de las afirmaciones en matemáticas, para que vean y aprecien el sentido de hacer y construir las matemáticas". De esta manera, la historia contribuye a recobrar la imagen diluida por el tiempo de los conceptos, recordando con esto, que la actividad matemática no se da solo en un aula de clase, sino que son parte del entorno social en el que se desenvuelven las personas.

Nuestro objeto inicial era el estudio de la función exponencial, pero como producto de las dos primeras fases de análisis documental, advertimos que, históricamente, el nacimiento y evolución del concepto función exponencial, se encuentra íntimamente ligado al proceso de evolución y desarrollo de la función logaritmo. Por esta razón, pretender desconocer este hecho hubiese implicado abandonar nuestra idea inicial en el estudio; por lo tanto, decidimos continuar con el estudio tanto de la función logarítmica como de la función exponencial. Pese a esto, también reconocimos que el concepto de función es relativamente moderno, por lo cual, nuestra revisión documental se remonta al estudio del desarrollo histórico de los conceptos de lo exponencial y logarítmico; estos son los dos conceptos que, una vez desarrollados, vinieron a constituir las dos funciones anteriores. De igual forma, encontramos que el concepto de lo logarítmico precede al de lo exponencial, es decir, que la función exponencial emerge de la función logarítmica, lo que es contrario, a lo que comúnmente se enseña desde el aula y a las secuencias seguidas por la mayoría de textos.

De esta forma, nuestro trabajo de grado se inscribe dentro del campo de investigación Formación del Profesor de Matemáticas, con el objetivo de llevar a cabo el diseño de unas herramientas didácticas, que posibiliten la apropiación de algunos elementos históricos, por parte del profesor de matemáticas, en relación con los conceptos de lo exponencial y logarítmico, que potencie su CDC.

El cuerpo de este documento consta de seis capítulos. En el primer capítulo, describimos el problema que abordamos en este estudio, los antecedentes investigativos, la justificación, y los objetivos que nos hemos propuesto. Así, mostramos las razones personales y profesionales que motivaron este estudio, reconocemos la existencia de otros trabajos sobre la misma temática (consistente en describir el proceso evolutivo de los conceptos la función logaritmo y exponencial, aunque con objetivos diferentes a los nuestros) y explicamos las razones que nos llevaron a considerar importante la realización de este estudio.

En el segundo capítulo, presentamos los referentes teóricos que conducen la realización de nuestro estudio. El capítulo consta de cinco apartados. En el primero se define el concepto de *herramienta didáctica* en el campo de investigación Formación del Profesor de Matemáticas. Seguidamente, en el apartado dos, hicimos una descripción de doce de las herramientas didácticas de mayor uso entre la comunidad de profesores de matemáticas, destacando las características que describen a cada una de ellas. En el apartado tres, se describe nuestra postura sobre el concepto CDC del profesor de matemáticas, después de haber revisado los planteamientos de varios autores. En el apartado cuatro, mostramos cómo la historia evolutiva de los conceptos matemáticos se puede constituir en un mediador que facilite la comprensión y enseñanza de los mismos. En el último apartado se muestra la importancia de incluir el componente histórico como parte de los currículos tendientes a la formación de futuros profesores de matemáticas.

El tercer capítulo corresponde al diseño metodológico que hemos utilizado para el desarrollo de nuestro trabajo de grado, el cual es de tipo documental-cualitativo. Nuestra metodología no se inscribe dentro de un tipo particular de diseño metodológico, sino que goza de algunas características de los diseños metodológicos documental y cualitativo, de donde proviene el nombre que le hemos atribuido. Es documental, en cuanto a que nuestras fuentes de información y nuestros datos, corresponden a los diferentes documentos históricos sobre los conceptos de lo exponencial y lo logarítmico; y es cualitativo en cuanto a que nuestros datos no son cuantificables, sino que nuestras decisiones están mediadas por la subjetividad, que está ligada a nuestra parte humana, a nuestros gustos y creencias.

Nuestra metodología consta de cuatro etapas. La primera consiste en la organización y clasificación documental por temáticas. Aunque inicialmente los documentos se clasificaron en cuatro grupos diferentes, se verá que durante el desarrollo de nuestro trabajo, solo se hizo énfasis en el grupo de documentos históricos; los demás grupos documentales no fueron utilizados, debido a que la información brindada por el grupo seleccionado fue lo suficientemente amplia para permitirnos llevar a cabo el diseño final de cada una de las herramientas didácticas. Por lo general, estos documentos constan de algunos fragmentos originales, acompañados de la interpretación que de ellos hacen los autores. En nuestro caso consideramos conveniente tomar como referencia un documento base: *History of The Exponential and Logarithmic Concepts*, Cajori (1913) de tal forma, que los demás documentos contribuyeron a la ampliación de algunos aspectos que consideramos relevantes para el desarrollo de nuestro trabajo de grado. De esta forma, consideramos que la información brindada por los siete artículos de Cajori (1913) abarcaba muchos aspectos; si a esto le sumamos las ampliaciones de algunas ideas en base a los demás documentos, es entendible nuestra imposibilidad de poder abordar todos los aspectos y asuntos tratados a lo largo de los siete artículos.

La segunda etapa muestra la postura que asumimos con respecto al CDC, ya que existen diferentes interpretaciones del mismo, que dependen principalmente de los autores. Así, nuestro interés es dejar clara nuestra posición respecto a este concepto y cómo fue entendido y se debe entender a lo largo del trabajo. También, dejamos en claro que dentro de los objetivos trazados para nuestro estudio, no está el de teorizar sobre dicho concepto, por lo cual para nosotros no fue de relevancia detenernos en discusiones sobre similitudes y diferencias a la luz de los diferentes autores.

La tercera etapa corresponde a la descripción de las característica de cada una de las herramientas didácticas que son de uso común en la formación de futuros profesores de matemáticas. Para la elección de la herramienta didáctica tuvimos en cuenta que esta permitiera establecer una conexión entre la historia de los conceptos de exponencial y logaritmo, los hitos históricos y el CDC del profesor de matemáticas. De acuerdo con lo anterior, encontramos que varias de estas herramientas didácticas, reportadas por Tirosh & Wood (2008) son usadas como una forma de reflexionar sobre la práctica una vez esta ha tenido lugar, y como es de entender, estas no respondían a nuestras necesidades, pues las fases de aplicación y verificación, no hacen parte de los objetivos que nos hemos trazado para este estudio. Por lo tanto, una vez llevado a cabo el reconocimiento de las características de las herramientas didácticas, optamos por la herramienta “tareas”, por ser esta la que mejor se ajustó a nuestras necesidades y por su nivel de adaptabilidad a diferentes situaciones y contextos. Se encontrará que el diseño de dos de las tareas involucran el uso de *applets*, construidos con el apoyo del Programa Geogebra, esto con el objetivo de facilitar la visualización y reconocimiento de aquellos asuntos históricos que pretendemos promover con cada uno de ellos. En cuanto a las demás herramientas didácticas, encontramos que se enmarcan dentro de lineamientos mucho más fijos y específicos; así, nuestro objetivo de diseño no radicaba en destacar algún tipo especial de herramienta didáctica, sino que pretendimos favorecer las ventajas para lograr aportar al CDC del profesor de matemáticas.

La cuarta etapa consiste en el diseño final de las herramientas didácticas que surge como producto de las tres etapas anteriores. De acuerdo con las decisiones tomadas, realizamos el diseño de tres tareas, que corresponden a tres hitos históricos. La elección de estos tres hitos históricos en preferencia de los tres restantes, se debió a las siguientes razones: su mayor grado de afinidad con el CDC, a una cuestión de gusto de los investigadores, y a la imposibilidad de abordar cada uno de los hitos históricos dentro del tiempo señalado para la culminación de este estudio. De esta forma esperamos que los asuntos que quedaron por abordarse, se constituyan en objeto de futuras investigaciones, ya sea de parte nuestra, o de parte de otros investigadores.

En el capítulo cuatro se muestran los resultados y discusiones finales. Este capítulo consta de tres apartados. En el primer apartado explicamos el proceso de construcción de nuestra versión de la interpretación de la historia de los conceptos de lo exponencial y lo logarítmico, que corresponde al anexo 4 de este trabajo. En el apartado dos se hace un reconocimiento de seis ideas transcendentales que guiaron el desarrollo evolutivo de los conceptos de lo exponencial y logarítmico y que hemos denominado como *hitos históricos*. Estas ideas que a nuestro juicio fueron transcendentales, son reconocidas de la misma forma por la mayoría de los historiadores en sus respectivos documentos. También, somos conscientes de que a luz de otros lectores e investigadores, pudiesen haber surgido otras ideas transcendentales y por consiguiente haber reconocido otros hitos históricos; reconocemos así, que nuestro análisis está mediado por nuestra subjetividad, nuestros gustos, afinidad, forma de sentir e interpretar la historia.

En el apartado tres mostramos la relación entre los asuntos del CDC definidos por Pinto (2010) y la historia de evolución de los conceptos exponencial y logarítmico. Pinto (2010) define el CDC en tres componentes, los cuales a su vez los divide en tres categorías, cada una de los cuales consta de diferentes asuntos. En este apartado fue necesario el desarrollo de una matriz, que facilitara un reconocimiento global de la estructura del CDC definida por Pinto (2010). Encontramos que ciertos aspectos de la historia podían ser relacionados en diferentes componentes, categorías o asuntos del CDC, por lo tanto, este proceso obedeció a decisiones personales de mutuo acuerdo entre los autores del presente estudio; luego, es natural y entendible que otros investigadores tengan una percepción diferente, cuánto más, cuando la línea de separación entre algunos de estos asuntos, no es lo suficientemente transparente.

En el capítulo cinco se muestran el diseño de las tres *tareas (como ejemplos de estrategias instruccionales para el profesor de matemáticas)*, que corresponden a las herramientas didácticas. La primera tarea pretende promover la relación entre las sucesiones aritmética y geométrica desde la representación tabular. Esta tarea consta de cinco partes: la primera, consiste en verificar que la relación se conserva indistintamente de la razón o base y la deducción de las propiedades de las potencias y los logaritmos; la segunda, intenta encontrar la relación con las propiedades de los radicales y los exponentes fraccionarios; la tercera, hace referencia a las convenciones epistemológicas que determinaron la notación de los exponentes negativos y fraccionarios; la cuarta, hace referencia a la elección de una base adecuada para que la relación entre las sucesiones pueda ser usada en los cálculos prácticos. La quinta, muestra la aritmética general de co-variación entre estas dos sucesiones, y pretende mostrar la importancia de la comprensión de dicha co-variación en los problemas sociales actuales.

En la segunda tarea se plantea la relación geométrica del área bajo la curva de la hipérbola equilátera y el logaritmo natural de un número en un intervalo dado. La tarea se divide en tres partes principales: en una primera parte se propone la aproximación por polígonos rectangulares, luego en una segunda parte se desarrolla la aproximación por trapecios, y en la última parte se plantean algunas propiedades fundamentales de los logaritmos. Todo esto se propone con la ayuda de siete *applets* en el software de geometría dinámica *Geogebra*, con el fin de que el profesor de matemáticas, a través de estos métodos de aproximación geométrica y su relación con las propiedades, presente otro enfoque y gane mayor profundidad conceptual al presentar los conceptos logaritmo y exponencial en relación con el Cálculo.

En la tercera tarea se expone la notación como parte de la actividad matemática, en nuestro caso las notaciones de los conceptos logarítmico y exponencial. Inicialmente se presentan los dos tipos de notaciones recogidas a través de la revisión histórica-documental, de la cual encontramos dos tipos, las que fueron recogidas por Marco Aurel en 1552 y las presentadas en el documento de Cajori (1913); con este tipo de notaciones se hace una clasificación para desarrollar la tarea, organizándolas en cuatro grupos así: primero, notaciones para exponentes positivos; segundo, notaciones para exponentes enteros negativos; tercero, notaciones para exponentes fraccionarios y radicales; y cuarto, notaciones para logaritmos. Finalmente se proponen las actividades de la tarea y se hace una reflexión acerca de la fuente de inspiración de la tarea y cuáles fueron los posibles aportes para el CDC del profesor de matemáticas.

En el capítulo sexto se dan las conclusiones finales con respecto a los objetivos trazados inicialmente, qué se logró hacer, qué aspectos quedaron pendientes por solucionar, y las nuevas preguntas que surgieron.

1. GENERALIDADES DEL PROYECTO

En este capítulo inicial damos a conocer cuáles fueron nuestras motivaciones personales y profesionales que nos condujeron a afrontar este estudio con respecto a los conceptos de lo exponencial y logarítmico. De igual forma reconocer la historia del desarrollo de los conceptos matemáticos como un posible medio a través del cual favorecer el fortalecimiento del CDC del profesor de matemáticas.

Este capítulo consta de cuatro apartados. En el primero de ellos se define el problema que nos ocupa en este estudio, el cual fue identificado con apoyo de una encuesta aplicada a los profesores de matemáticas del nivel universitario y escolar (ver Anexo 1). En el segundo apartado, mostramos cómo el estudio de los conceptos de exponencial y logaritmo ha ocupado a otros investigadores, quienes igualmente reconocen la importancia de estos conceptos matemáticos. En el apartado tres, damos la justificación de por qué es necesario abordar este estudio y su importancia como aporte al campo de investigación de la Formación del Profesor de matemáticas. En el cuarto apartado damos a conocer los objetivos que nos hemos propuesto alcanzar durante el desarrollo del estudio.

1.1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Para la definición de nuestro problema tuvimos en cuenta tres aspectos principales. El primero de ellos es reconocer el papel que tiene la función logarítmica y exponencial en la modelación de diferentes fenómenos en varias disciplinas; el segundo aspecto es el desconocimiento por parte del profesor de matemáticas de elementos históricos de la función logarítmica y exponencial; y el tercero, la importancia del componente histórico como aporte al CDC del profesor de matemáticas.

En cuanto al primer aspecto, las funciones logarítmica y exponencial son dos conceptos matemáticos que modelan muchas situaciones y problemas cotidianos, debido a su forma especial de covariación. Dentro de los problemas cotidianos que son modelados por estas dos funciones están: crecimiento demográfico, el consumo de energía, el consumo de los recursos naturales, el crecimiento de una población de bacterias, la descomposición de núcleos radiactivos, el interés compuesto de un capital, entre otros. De lo anterior, podemos reconocer la transversalidad de estos dos conceptos en diferentes disciplinas como: la Economía, la Física, la Biología, la Música, las Artes, entre otras.

Pese a la importancia social de la función logaritmo y exponencial, es común encontrar que no se les ha dado la suficiente relevancia dentro del currículo de matemáticas, lo cual ha generado dificultades en la comprensión de estos conceptos por parte de los estudiantes. Lo anterior, se puede deber a que se desconoce, por parte de los profesores de matemáticas, o no existen herramientas didácticas que permitan un acercamiento a estos conceptos desde los elementos constitutivos que favorezca su enseñanza.

Esta importancia a la que nos referimos, tampoco es reconocida en algunos textos de bachillerato, donde por lo general se limitan a plantear su definición básica, su fórmula general y algunas aplicaciones en ciencias. Se dejan de lado aspectos importantes (como el estudio detallado de los diferentes tipos de exponentes, la relación entre sus variables, el estudio de sus diferentes representaciones gráficas, el tipo de variación y covariación) los cuales conducen a la mejor comprensión de los estudiantes de la función logarítmica y exponencial, Toro & Muñoz (2009, citado en Guacaneme , 2010).

En relación con el segundo aspecto, encontramos que existe un desconocimiento casi generalizado de los elementos históricos de la función logarítmica y exponencial por parte de los profesores de matemáticas. Así, desde nuestra propia experiencia como profesores de secundaria, tenemos que reconocer que antes del estudio no contábamos con dicho conocimiento. Además, mediante una encuesta aplicada a diferentes profesores de matemáticas en los niveles de primaria, bachillerato y universidad se encontró que los profesores no poseen dicho conocimiento. Las instituciones a las que pertenecen los profesores encuestados son: Institución Roberto Velandia de Mosquera y Universidad Pedagógica Nacional (para más detalles ver anexo 1).

De esta manera, es necesario tener en cuenta el componente histórico como parte de la formación de profesores de matemáticas. Este conocimiento histórico ofrece una visión de los problemas actuales, en relación con los de otra época. Igualmente, la historia aporta elementos relacionados con los procesos de construcción de los conceptos, que la gran mayoría de profesores de matemáticas como parte de su conocimiento profesional deberían tener (Lupiáñez, 2009).

Actualmente dentro de la línea de investigación "Conocimiento Profesional del Profesor", el componente histórico se considera esencial, entre las razones señaladas por varios autores podemos mencionar: ofrece al profesor de matemáticas "instrumentos" para el ejercicio docente (Guacaneme, XIII CIAEM-IACME, 2011); permite el desarrollo de actitudes y aptitudes para la docencia Arcavi & Isoda (2007, citado en Guacaneme , 2010); reorienta la perspectiva de lo que se mira y se observa (Furinghetti, 2007) y como último aspecto, promueve entre los profesores la discusión acerca de asuntos didácticos Winicki (2000, citado en Guacaneme, 2011). Lupiáñez (2009), señala que hace varias décadas, son más las voces que se han sumado a favor del valor que posee la historia en la enseñanza de las matemáticas; no obstante debido a una escasa formación de los docentes, en relación al aprovechamiento de materiales históricos, no se ha logrado consolidar. Por otro lado D'Amore (2007) señala que para usar la historia de la matemáticas en el aula, se requiere primero que el profesor conozca esa historia, de ahí que sea necesario implementar una preparación en historia para los futuros profesores desde las universidades.

La formación del profesor de matemáticas es un asunto crucial que ante las demandas de una realidad global y compleja, exige de los educandos no solamente un manejo de las matemáticas como cuerpo de conocimientos sino también una comprensión más profunda del rol de las matemáticas en la vida y en la sociedad en general. De acuerdo con Shulman (1986b) el profesor de matemáticas contemporáneo debe tener una formación integral en las dimensiones: pedagógica, didáctica y disciplinar. Aunque de este último podemos decir que no solamente es el conocimiento matemático en sí, sino un conocimiento "enseñable" que llegue al estudiante, que lo motive, además que le permita construir e involucrarse en este proceso de adentrarse en el conocimiento matemático.

Es importante considerar el estudio de la función exponencial como contribución a la formación de los profesores, aspecto que se relaciona con la manera en que el profesor usa ese conocimiento, en la medida en que tanto su práctica en el aula (discurso matemático), como los problemas y los recursos que el profesor utiliza, facilita que los estudiantes doten de significado a las ideas matemáticas (Vargas, 2011).

El último aspecto, tiene que ver con el reconocimiento del componente histórico como aporte al CDC del profesor de matemáticas desde diferentes autores. Entre estos autores se destacan Katz & Fauvel, (1995) y Trompler, (2002), quienes consideran la historia como una herramienta para favorecer la enseñanza de las matemáticas; de la misma manera autores como Guacaneme (2010), Godino (2009), Maza (1994), Lupiáñez (2009), Arcavi (1991), citados en Guacaneme, (2011) se han pronunciado sobre el valor de la historia en la enseñanza de las matemáticas.

Otras investigaciones muestran las dificultades relacionadas con el aprendizaje de la función exponencial en aspectos como las restricciones sobre los valores de su base, los cálculos tanto si el exponente es natural o fraccionario, o el significado de su crecimiento (Vargas, 2011). Otro elemento a tener en cuenta es la inversión histórica que sobre el estudio de la función exponencial se ha hecho tomando primero el surgimiento de la función exponencial y luego el de la función logarítmica, cuando históricamente ocurrió al contrario, y con esto se pierde el significado de su génesis histórica y comprensión de aspectos como la relación entre la estructura aditiva de los exponentes y la multiplicativa de la variable dependiente, como también las aplicaciones de la función en ámbitos muy diversos como las ciencias naturales y la economía (Vargas, 2011).

A partir del análisis anterior surge la pregunta generadora de nuestro trabajo de grado, a saber. ¿Qué elementos de la historia de los conceptos logarítmico y exponencial permiten potenciar el Conocimiento Didáctico del Contenido del profesor de matemáticas?

Una posible respuesta a esta pregunta es la hipótesis que presenta Salazar (2005) en relación a que existen elementos históricos que forman parte de la función exponencial que pueden contribuir a orientar las ideas del profesor sobre el conocimiento de los contenidos, su proceso de construcción y la enseñanza de los mismos, según esto, podríamos llegar a identificar estos elementos en problemas y situaciones que permitieron su emergencia y desarrollo; también en los elementos matemáticos que accedieron a la construcción del concepto función.

Finalmente nuestro problema de investigación se ubica en el campo de investigación Formación del Profesor de matemáticas, y corresponde con elementos del diseño de una propuesta de innovación, donde uno de los objetivos centrales es contribuir con el diseño de una herramienta didáctica que amplíe el CDC del docente, incorporando elementos históricos que forman parte de los conceptos función logaritmo y exponencial, potenciando con esto el uso de recursos didácticos que ayuden a mejorar su práctica docente.

1.2. ANTECEDENTES INVESTIGATIVOS

Para el desarrollo de nuestro estudio hemos considerado algunos trabajos de investigación que se relacionan con la función exponencial y logarítmica; en estos se estudian las dificultades de la función exponencial en los cómputos cuando los exponentes son números naturales como cuando no lo son, Confrey & Smith (1995, citado en Vargas, 2011); las dificultades en el aprendizaje de la función exponencial que se originan de las restricciones sobre los valores de la base Davis (2010, citado en Vargas, 2011) y ; finalmente las dificultades que se derivan del crecimiento de la función exponencial y la gráfica de la misma Lezama (1999, citado en Ferrari, 2001). Además encontramos trabajos que hacen un análisis de la génesis y evolución del concepto de función logarítmica y exponencial, como los de: Davis (1969), Martínez (2000), Vargas (2011), también se encuentran propuestas de situaciones y secuencias didácticas, como las de Martínez (2006, citado en Vargas, 2011); Lezama (1999, citado en Ferrari, 2001).

En relación con la formación profesional del profesor de matemáticas en su componente histórico encontramos trabajos como el de D´Amore (2007, citado en Guacaneme, 2010) donde se plantea la necesidad de manejar un sentido de la evolución del pensamiento matemático, además del saber matemático mismo. También, allí se establece que el profesor debe estar revisando de manera constante el sentido y el significado de la matemática que él enseña. Como el papel del profesor no es solamente enseñar contenidos matemáticos sino hacer que sus alumnos aprendan a construir y usar competencias matemáticas, entonces debe hacer una trasposición desde el conocimiento que se encuentra en textos, libros, etc., hasta llevarlo al aula, y saberlo comunicar a sus estudiantes (D'Amore, 2007).

Otros autores como Maza (1994) están de acuerdo en que el conocimiento de la historia de las matemáticas forma parte de la historia del conocimiento científico en general y como tal también de la historia de la cultura humana. Según esto, el grado en que las matemáticas estén 'inmersas' dentro de esta historia depende de las creencias y conocimientos previos que tenga el historiador de matemáticas. A partir del momento en que se acepta que las matemáticas son producto de fuerzas sociales, políticas y culturales, hay que comenzar a pensar en otra relación distinta: la del matemático con las matemáticas, con su historia y simultáneamente, con los alumnos y el entorno escolar en forma de currículo. En este sentido según Maza (1994)

> … el profesor puede ser considerado historiador o no, puede hacer de la historia un objeto de estudio o puede tomar sus resultados para aplicarlos a la enseñanza sin más. Esta distinción no es de interés en nuestro análisis salvo por un motivo: conviene distinguir lo que es enseñar Historia de la Matemática […] o enseñar Matemáticas históricamente (por ejemplo lo que puede hacer un profesor en bachillerato). Si suponemos que hay transposición didáctica entre el saber matemático institucionalizado y el saber que el profesor enseña en el aula, por esto mismo el profesor desde el aula es el que selecciona y transforma aquello que quiere enseñar. Según esto el profesor en la historia de las matemáticas hace transposición didáctica, lo que le permite seleccionar que recursos históricos (biografías, anécdotas, planteamiento de problemas) utilizará con sus alumnos. (p. 18)

De acuerdo con estos antecedentes es importante a continuación responder la pregunta: ¿Qué tipo de historia debe ser apropiada por el profesor de matemáticas? En este sentido investigadores como Guacaneme (2010) refieren que no hay consenso sobre la respuesta que se pueda dar, aunque advierte ciertas tendencias entre las posibles respuestas, como lo son: Una primera tendencia que cuestiona una aproximación erudita a la historia, proponiendo aproximaciones alternas desde el contenido. Una segunda, que se identifica con el uso de fuentes originales que promuevan el conocimiento del profesor de matemáticas. Una tercera y cuarta tendencia que promueven el uso de aspectos historiográficos o el estudio de los análisis históricos. Mientras una última postura reseña la insuficiencia de materiales que puedan apoyar el conocimiento histórico relacionado con su trabajo docente.

A la luz de esta misma investigación en la búsqueda y organización cronológica sobre tipos de historia de las matemáticas que deben ser apropiadas por el profesor de matemáticas el autor concluye enunciando la hipótesis:

> En relación con la primera y última tendencias, si bien —de manera provisional e hipotética— consideramos necesario el estudio de la HM como parte de la formación del profesor de matemáticas, creemos que en la formación de profesores de matemáticas, éste debe complementarse con (o acompañarse de), por ejemplo: el estudio de experiencias del uso de ésta a favor de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (v.g., Helfgott, 1995; Kronfellner, 1996; Radford & Guérette, 2000); el estudio de prácticas investigativas que apoyadas en la HM han indagado sobre las concepciones, errores o dificultades de los estudiantes en torno a conceptos matemáticos esenciales o, de manera más general, han analizado comparativamente la filogénesis y la ontogénesis de objetos matemáticos (v.g., Bero, 1996; Sfard, 1995; Sierpinska, 1987); el estudio de la evolución histórica de un concepto y su evolución educativa en los currículos escolares (v.g., Chevallard & Joshua, 1982; Gagatsis & Thomaidis, 1993); o, el estudio de nociones metamatemáticas (v.g., rigor, verdad, demostración, lo obvio, axiomatización, formalización, solución de problemas) trabajadas con fundamentos históricos (v.g., Barbin, 2000; Kleiner, 1991; Swetz, 2000). Guacaneme (2010, pp. 9-10).

De acuerdo con estas investigaciones es fundamental entonces tomar posición sobre el tipo de historia de las matemáticas que requerimos y utilizamos para realizar esta investigación, y el aporte de las mismas al conocimiento profesional del profesor. Teniendo como referencia las tipologías históricas propuestas por Guacaneme (2010), abordaremos el estudio de la evolución de los conceptos logaritmo y exponencial, valiéndonos principalmente del uso tanto de fuentes originales (como por ejemplo, el documento central que utilizamos en nuestro trabajo, que propone una historia de tipo internalista de la evolución de los conceptos), aunque también utilizaremos análisis históricos en el mismo documento, y también en otros que referimos en la bibliografía, porque el autor o autores reflexionan sobre esta misma historia; y finalmente usaremos fuentes historiográficas que se refieren a aspectos de tipo social y cultural que se relacionan con los conceptos, y que se desarrollan en forma de comentarios de otros autores sobre éstos textos, y sobre los conceptos logaritmo y exponencial en general, realizados en artículos de libros, revistas, memorias de congresos, *Handbooks*, y otros textos. Esto para situarnos en la perspectiva de que es necesario que el profesor de matemáticas se apropie de elementos históricos que apoyen su trabajo en el aula.

1.3. JUSTIFICACIÓN

Desde nuestra experiencia personal hemos podido observar desde varios ámbitos, que los elementos históricos en la enseñanza de la función exponencial son muy poco utilizados. En primer lugar, en bachillerato el uso de estos elementos es muy limitado o casi nulo. En segundo lugar, como egresados de la Especialización en Educación Matemática (programa de postgrado de la Universidad Pedagógica Nacional) experimentamos que en el Seminario de Didáctica del Cálculo, tampoco observamos el uso de elementos históricos dentro del curso. Finalmente, en la encuesta realizada a los docentes en ejercicio de los niveles de Educación Básica y profesores recién egresados de la Licenciatura en Matemáticas pudimos evidenciar que los entrevistados no hacen uso de elementos históricos sobre la función exponencial dentro de sus prácticas de aula (ver Anexo 1).

Desde esta perspectiva nos apoyamos en opiniones de algunos autores como Lupiáñez (2009), quien señala que en la enseñanza de los conceptos matemáticos se deja de lado o poco se enfatiza sobre el proceso y evolución de los conceptos matemáticos a través de la historia, perdiéndose el profesor de paso de un gran potencial de motivación y de recursos pedagógicos que permiten una mejor apropiación de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes. En este sentido Grugnetti (2000) aboga por:

> … la necesidad y pertinencia de una Historia de la Matemática que refiera el análisis histórico y epistemológico de los conceptos y que permita a los profesores comprender por qué un cierto concepto es difícil para los estudiantes y puede ayudar en la aproximación y desarrollo didáctico". (p. 29)

A partir de las consideraciones anteriores, es clara la importancia de la historia en el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, más aún cuando este conocimiento no es apropiado por los profesores de matemáticas ni tampoco es utilizado para su difusión en la comunidad de profesores formadores y en formación. Otro aspecto importante es que la historia humaniza las matemáticas, es decir ayuda a superar la visión de las matemáticas y su práctica como un conocimiento cerrado y acumulativo, que se encuentra solamente en la mente del profesor y es validado por él mismo, Lupiáñez (2009).

En algunas instituciones a cargo de la formación de profesores se observa la disposición y respaldo para incluir dentro de sus currículos seminarios elementos históricos y epistemológicos para el estudio de los objetos matemáticos, concretamente en los seminarios de didácticas específicas. Además las condiciones institucionales son favorables a la implementación de herramientas de tipo histórico, pues se están brindando los espacios para el desarrollo e incorporación de éstas dentro del currículo.

De ahí, que sea necesaria la inclusión de la historia de las matemáticas en la formación de los profesores, para que con esto acceda a nuevos recursos didácticos, como mediadores de los procesos de enseñanza. Como lo afirma Sullivan & Watson, (2008) el docente debe poner en juego en el aula nuevos recursos didácticos, creando un ambiente de aprendizaje adecuado para la apropiación de los contenidos, que no se remita exclusivamente a la enseñanza de métodos, procesos y algoritmos matemáticos, sino que relacione este conocimiento con la realidad. En este aspecto autores como Ball (1991) y Shulman (1986b) coinciden en que el conocimiento profesional del profesor se debe enfocar al logro de una enseñanza eficaz de las matemáticas, que se relaciona entre otros aspectos con: un profundo conocimiento disciplinar, un conocimiento pedagógico, y un conocimiento matemático para enseñar (este tiene que ver con el uso adecuado del lenguaje por parte de los profesores: que sea relevante para describir adecuadamente los contenidos, aclarando siempre metas y propósitos de la clase, para hacer de una pregunta una actividad que propicie aprendizaje, también para apreciar las dificultades e intervenciones de los estudiantes).

Por otra parte como lo reporta la comunidad en investigación sobre Educación Matemática en torno a los procesos de aprendizaje de los estudiantes y en relación a los conceptos logaritmo y función logarítmica, ha habido un incremento de los estudios sobre este tema ya que son muy pocos los realizados a pesar de la importancia que tienen para la modelación de una gran cantidad de fenómenos y del reporte de muchos profesores de educación superior que manifiestan la existencia, en sus grupos, de estudiantes que tiene dificultades relacionadas con la notación y el significado de la palabra logaritmo (Toumasis, 1993).

Teniendo en cuenta los argumentos expuestos anteriormente por diferentes autores se puede notar que existe la necesidad de desarrollar e implementar herramientas que permitan la difusión de estos aspectos relacionados con el conocimiento histórico de los conceptos logarítmico y exponencial, y su apropiación por parte de los profesores de matemáticas.

1.4. OBJETIVOS

Desde una perspectiva general con el estudio se intenta:

Diseñar unas herramientas didácticas utilizando elementos históricos de los conceptos logarítmico y exponencial que amplíe el Conocimiento Didáctico de Contenido del profesor de matemáticas.

Y específicamente se pretende:

- Realizar una revisión, organización y clasificación documental de textos históricos sobre los conceptos logarítmico y exponencial que aporte elementos para el diseño de las herramientas didácticas.
- Caracterizar las herramientas didácticas utilizadas en la formación del profesor de las matemáticas.
- Elaborar unas herramientas didácticas para que el profesor de matemáticas se apropie de elementos históricos de los conceptos logarítmico y exponencial, de manera que fortalezca su Conocimiento Didáctico del Contenido.
- Enriquecer nuestro conocimiento profesional y personal a través del desarrollo de competencias investigativas.

2. REFERENTES TEÓRICOS

En este capítulo damos a conocer los fundamentos conceptuales y teóricos que soportan nuestro actuar a lo largo del estudio. De esta forma consideramos que son tres los aspectos fundamentales en los que se basa nuestro referente teórico. El primero de ellos es el relacionado con las herramientas didácticas utilizadas en la formación de profesores de matemáticas, de lo cual damos una definición, para poner en claro qué se debe entender como una herramienta didáctica desde el campo de investigación de Formación del Profesor de Matemáticas. El segundo aspecto se refiere al campo de investigación Formación del Profesor de Matemáticas, donde pretendemos hacer una descripción del mismo con el objetivo de ubicar en él nuestro estudio. Una vez hecho este reconocimiento pasamos a definir nuestra postura conceptual sobre el concepto de Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) del profesor de matemáticas, pues allí es donde aporta nuestro estudio. El tercer aspecto está relacionado con el reconocimiento por parte de la comunidad académica del componente histórico como un mediador y facilitador de los procesos de enseñanza de los conceptos matemáticos, en donde radica la importancia que sean tenidos en cuenta a nivel curricular dentro del plan de formación de los futuros profesores de matemáticas.

2.1. HERRAMIENTAS DIDÁCTICAS

2.1.1. ¿Qué es una herramienta didáctica?

En lo reportado por Tirosh & Wood (2008) es reconocido el papel que han jugado las herramientas en el desarrollo de la humanidad. Una herramienta se concibe como un mecanismo a través de cual se obtiene una ventaja en la realización de un trabajo dado, que no es posible efectuar de forma natural, debido a las limitaciones físicas de quienes lo realizan.

De esta forma las herramientas han sido reconocidas como un paso importante para la evolución de la humanidad, el caso de la formación del profesor de matemáticas las herramientas, igualmente facilitan el desarrollo de diversas competencias necesarias para la enseñanza de las matemáticas. Así como en la vida cotidiana la elección de una herramienta para un fin determinado es una decisión crucial; en el caso del profesor de matemáticas la forma particular de utilizar dicha herramienta es muy importante, aunque tampoco se espera que la herramienta realice el trabajo por sí misma, sino que los resultados dependen del uso adecuado que se les dé a estas (Tirosh & Wood, 2008).

En la actualidad, la comunidad de profesores de matemáticas reconoce la importancia del uso de las herramientas didácticas como parte de su labor docente, donde es necesario que el profesor de matemáticas conozca cada una de sus ventajas, desventajas, así como estar actualizado sobre las investigaciones que se vienen dando y cómo estas pueden aportar al mejoramiento de sus prácticas docentes. (Tirosh & Wood, 2008).

2.1.2. Descripción de las herramientas

A continuación mostramos un panorama de las diferentes herramientas didácticas que son utilizadas para la formación de profesores, de acuerdo con lo reportado por Tirosh & Wood (2008) en el volumen dos. En ese volumen se muestran las herramientas didácticas, doce en total, que están siendo utilizadas en la investigación para la formación del profesor de matemáticas. La descripción de cada una de las herramientas corresponde a lo reportado en el *Handbook*, por tal motivo, los autores que citamos a lo largo de la descripción de cada una de las herramientas son referencias textuales del *Handbook*. De igual forma, dejamos en claro que dicha descripción es una aproximación textual de las ideas de los autores, como producto de nuestra traducción hecha al español.

2.1.2.1 Las narrativas

Para Chapman (2008, p.17) la narrativa "es un medio a través del cual los individuos pueden llegar a conocerse a sí mismos, construir sus vidas y dar sentido a sus experiencias". La autora afirma que las narrativas también pueden verse como "relatos propios, historias escritas u orales, que permiten a los profesores presentar o sentir su enseñanza o las experiencias de aprendizaje desde su punto de vista, entrelazar sus pensamientos, sentimientos, actitudes y todo aquello que hace parte de sus experiencias" (ibíd).

Chapman (2008, p.16) deja en claro que son varias las definiciones que se le han dado a las narrativas: Desde la perspectiva de la literatura, "la narrativa es una historia que contiene una secuencia de eventos que son significativos para sus autores e investigadores, donde existe una lógica y estructura interna que permite que sea comprendida; tiene un comienzo, trama, y un final". Desde una perspectiva humanística, la narrativa es "una forma de experiencia específica, un modo de pensar, una manera de sentir las acciones humanas o una manera de conocimiento", Denzin (1989, citado en Chapman, 2008, p.16). Para Scholes (1981, citado en Chapman, 2008, p. 16) la narrativa, como una representación simbólica "consiste en una secuencia de eventos conectados por un asunto y relacionados en el tiempo". Para Bruner (1986, citado en Chapman, 2008, p.16) la narrativa "es una explicación de las intenciones humanas en el contexto de la acción", mientras que para Polkinghorne (1998, p.16), la narrativa "es un esquema cognitivo, por medio del cual los seres humanos dan significado a sus experiencias de acciones temporales y personales, para entender los eventos pasados de la vida que a su vez permite la planeación de acciones futuras"; también, se puede ver como "el esquema primario por medio del cual la existencia humana es significativa, organiza los eventos y las acciones en un todo"(p.16).

2.1.2.2 Los casos

Para Herried (1997, citado en Markovits & Smith, 2008) la herramienta *caso* captura el elemento central que hace de algún acontecimiento un caso: "Los casos son historias con un mensaje, no son simples narraciones de entretenimiento, son historias para educar" (p.92). En el campo de la educación del profesor un caso es definido como: "cualquier descripción de un episodio o incidente que puede ser conectado con el conocimiento base para que la enseñanza pueda ser interpretada…" Carter (1999, citado en Markovits & Smith, 2008, p.40). Mientras que para Merseth (2003, citado en Markovits & Smith, 2008, p.40), los casos son "una parte de la realidad del salón de clases que necesita ser examinada, explorada, y utilizada como una ventana de práctica".

De acuerdo con Markovits & Smith (2008) los casos brindan a los futuros profesores y a los profesores en ejercicio la oportunidad de desarrollar conocimiento para llevar a cabo la enseñanza; esta es una capacidad que consiste en saber cuándo y cómo aplicar el conocimiento, poder relacionarlo con una situación particular, en el momento de la práctica y dentro del contexto en el que se encuentra. De esta forma, el profesor cuando hace uso de las ideas que tiene sobre las matemáticas, sobre su enseñanza y aprendizaje, puede elegir maneras particulares de acción y actuación, haciendo que estas acciones sean el resultado de una reflexión previa (Shulman, 1996). Shulman (1992, p. 28, citado en Markovits & Smith, (2008) define el caso en los siguientes términos: "es una estrategia para superar las más serias deficiencias en la educación de los profesores de matemáticas".

2.1.2.3 Las grabaciones de videos

De acuerdo con Maher (2008) los videos brindan la oportunidad de observar los procesos emergentes de aprendizaje de los estudiantes. De igual forma, los videos y grabaciones permiten capturar en detalle los episodios de enseñanza dentro de las condiciones particulares de un aula, la forma cómo se emerge el aprendizaje en los estudiantes, permite la reflexión por parte del profesor sobre su propia prácticas en cuanto a las metodologías de enseñanza y aprendizaje, todo esto gracias a que las grabaciones de vídeo logran capturar los movimientos y detalles sutiles durante la evolución del aprendizaje de los estudiantes.

De igual forma, Maher (2008) sugiere que las grabaciones de videos como herramienta pedagógica mejora el aprendizaje del profesor de matemáticas, mediante el estudio de su propia práctica y la de otros profesores. Lo anterior, debido a que se puede suscitar en torno a las grabaciones y videos conversaciones sobre el aprendizaje de los estudiantes y las acciones del profesor Mediante el estudio de videos, se puede observar el aprendizaje del estudiante en diferentes situaciones –individual, pequeños grupos y clases completas– y ganar conocimiento detallado a través del ambiente en el cual ocurre la educación. "Los videos pueden revelar cómo la comprensión de los estudiantes es construida por aprendices individuales y colaborativamente, y demuestra cómo ese conocimiento es compartido, y cómo este transita dentro del salón de clases" (Maher, 2008,p.66).

2.1.2.4 Las lecciones de estudio

De acuerdo con Yoshida (2008) la Lesson Study es un proceso de aprendizaje profesional, que utilizan constantemente los docentes japoneses para examinar sistemáticamente sus métodos de enseñanza, los contenidos, el currículo, así como el proceso de aprendizaje y comprensión de los estudiantes. Una de las características claves de la Lesson Study es que los profesores pueden estudiar colaborativamente el material instruccional y participar en el diseño de cortas lecciones de investigación para luego ser implementadas en los salones con los estudiantes Yoshida (2008). Luego, estas lecciones de investigación son observadas y discutidas con profesores colegas y otros educadores para determinar los efectos de las lecciones sobre el aprendizaje y comprensión de los estudiantes.

Según lo reporta Yoshida (2008), existen diferentes formas de Lesson Study y cada una de estas tiene sus propias características y propósitos. Algunas características comunes a todas ellas son: buscar que todos los miembros involucrados posean metas comunes y que todos se identifiquen con ellas, concretar un plan de acción hacia el logro de las metas, definir las formas de trabajo que puede ser individual o en sub-grupos y finalmente se debe hacer un trabajo de consolidación y evaluación de todo el proceso.

2.1.2.5 Las tareas y lecciones

El estudio sobre las tareas que se desarrollan en el aula y sobre el desarrollo mismo de las clases de matemáticas, pueden ser utilizadas para mejorar el aprendizaje de los futuros docentes. Los formadores de profesores de matemáticas pueden utilizar la planificación y las instrucciones utilizadas en las clases de los profesores en ejercicio, para identificar aspectos relevantes sobre el aprendizaje de los estudiantes. Según Sullivan & Watson, (2008) el término tareas se puede utilizar de dos maneras: una para referirse a las preguntas, situaciones e instrucciones que los maestros utilizan para enseñar a los estudiantes, y la otra, para referirse específicamente a las tareas que los profesores incluyen en las instrucciones matemáticas.

En el desarrollo de las clases de matemáticas se identifica que cada tarea tiene un propósito diferente, según Sullivan & Watson, (2008), se identifican cuatro tipos de tareas: las que fomentan la comprensión conceptual, las que desarrollan la fluidez matemática, las que crean oportunidades en una competencia estratégica y las que crean oportunidades en el razonamiento adaptativo. En este sentido, las tareas en la formación docente se puede utilizar con varias intenciones, entre las se pueden nombrar, orientar acerca del alcance y los propósitos de las tareas en el aula, proporcionar oportunidades para aprender más acerca de las matemáticas, tener una idea sobre la naturaleza de la actividad matemática, y estimular e informar a los profesores respecto a la teorización del aprendizaje de los estudiantes.

2.1.2.6 Los ejemplos

Los ejemplos como herramientas en la formación del profesorado de matemáticas ha sido un asunto bastante complejo, ya que todo lo que se encuentra dentro de la actividad educativa tiene la posibilidad de convertirse en un ejemplo del proceso de enseñanza-aprendizaje. La misma actividad educativa puede convertirse en un ejemplo de las actividades de instrucción, una paradoja se convierte en un ejemplo de paradojas, y un conflicto cognitivo se convierte en un ejemplo de conflictos cognitivos; de hecho, dice Zazkis (2008) cualquier cosa que se venga a la mente como un ejemplo de algo, puede ser utilizada como una herramienta en la formación del profesorado.

2.1.2.6.1 ¿Qué es un ejemplo?

La palabra ejemplo en la enseñanza de las matemáticas es utilizada en diferentes formas y con diferentes significados. Según Watson & Mason (2005, citado en Zazkis, 2008), la palabra ejemplo se puede utilizar como una manera de simbolizar cualquier cosa desde la cual un estudiante puede generalizar, incluyendo ilustraciones de conceptos y principios matemáticos. Con el diseño de ejemplos se pueden mostrar técnicas específicas, concretas y presentar ejercicios como medios para la aplicación de estas; también se pueden utilizar para presentar situaciones contextuales específicas, transformándolas en casos de motivación hacia las matemáticas, entre otras.

2.1.2.6.2 Los ejemplos como herramientas

Casi cualquier actividad matemática es o puede estar acompañada de ejemplos, ya que estos se pueden convertir en herramientas para la introducción de las ideas, técnicas de modelación, herramientas para verificar o refutar conjeturas, para la generación de investigación y experimentación, y para desafiar nuestras propias intuiciones o perspectivas.

Rowland (2008, citado en Zazkis, 2008), reconoce la importancia de los ejemplos y hace referencia al papel de ellos en la enseñanza de las matemáticas, así como su significado pedagógico; él encontró que curiosamente el papel de los ejemplos en la enseñanza de las matemáticas y su importancia pedagógica, han estado ausentes en la literatura de la formación del profesorado. Rowland se centra en dos usos específicos: primero, reproducir conceptos abstractos y representar los procedimientos generales, en este sentido los ejemplos son vistos como herramientas para provocar o facilitar la abstracción; segundo, para ilustrar ejercicios orientados hacia la práctica, esto último se conoce también como "ejemplos trabajados".

Los ejemplos en la investigación en la educación del profesor de matemáticas pueden ser interpretados de dos maneras: una está centrada en la práctica docente, examinando ejemplos instruccionales usados por los profesores y guiándolos hacia lecciones más apropiadas desde el punto de vista matemático o pedagógico; la otra forma es centrarse en los profesores como aprendices y examinar qué ejemplos instruccionales utilizados por los educadores matemáticos puede ser benéficos para su desarrollo profesional, Zazkis (2008).

Algunos investigadores como Zazkis (2008), se han centrado en los ejemplos que aumentan la comprensión matemática de los profesores y su sensibilidad pedagógica; ella alude a los ejemplos que tratan de persuadir a los maestros para reconsiderar los supuestos básicos empleados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, o para que lleguen a ser explícitamente conscientes de estos supuestos. Un ejemplo de un supuesto es la convención utilizada para representar el mapa del mundo en un rectángulo, el cual ha sido cubierto por una hoja blanca, luego se le pide al estudiante que ubique un país importante, entonces como él está mentalizado con el mapa de siempre, si se le pide ubicar a Canadá lo hará en la parte superior izquierda, para este ejemplo, el mapa se encontraba al revés, de arriba hacia abajo, a esto es lo que se le llama una convención desde esta perspectiva.

2.1.2.7 Los manipulativos

De acuerdo con Nührenböeger & Steinbring, (2008) se entiende como manipulativos a los materiales físicos que se utilizan comúnmente en primaria como objetos manipulables, pero también se reconocen a los gráficos y diagramas visuales como manipulables, los cuales son considerados como un medio para representar el conocimiento matemático. Sin embargo, los manipulativos son más que herramientas que funcionan de forma automática en la enseñanza - aprendizaje del conocimiento matemático abstracto, es necesario comprender el carácter simbólico y estructural de manipulativos para desarrollar conocimiento matemático.

El carácter epistemológico de los manipulativos tiene implicaciones para la formación del profesorado de matemáticas. En primer lugar, los futuros profesores pueden ser vistos como los alumnos que tienen que desarrollar una comprensión cuidadosa y crítica del carácter epistemológico de manipulativos en el aprendizaje matemático. En segundo lugar, es necesario que los futuros profesores se conviertan en expertos en la evaluación de la comprensión y aprendizaje de los estudiantes, y sobre el conocimiento matemático generado con la ayuda de manipulativos, no solo mecánicos, sino también como dispositivos simbólicos.

Se reconoce que manipulables y matemáticas están inicialmente separados y que estos últimos no son simplemente elementos de un extenso conjunto de herramientas, con los que se puede construir directamente el conocimiento matemático con ayuda de un sistema de preguntas sujetas a un conjunto de las reglas dadas.

Los objetos o materiales que provocan el desarrollo del pensamiento matemático, deben hacerlo por sus propiedades internas específicas. A menudo se tiene la creencia y la suposición de que la utilización de manipulativos en la práctica instruccional y en el uso de materiales concretos fomenta la adquisición del conocimiento y un entendimiento profundo de la matemática de una manera fácil y directa. Sin embargo el manipulable por sí solo no produce resultados, depende del uso correcto y apropiado que se les dé; así mismo el valor de los manipulativos depende de la relación del objeto con las relaciones y estructuras matemáticas que representa. En este sentido los manipulativos se convierten en objetos de aprendizaje para los futuros docentes, de los cuales los deben conocer el su objetivo didáctico y desarrollar habilidades de diagnóstico con el fin de analizar adecuadamente los procesos de aprendizaje de los alumnos al utilizar objetos manipulables.

2.1.2.8 Las máquinas como herramientas

Una definición geométrica de una máquina, es dada por Bartolini & Maschietto (2008) quienes afirman que una maquina es algo que hace que un punto siga una trayectoria o que la transforme de acuerdo con una ley dada, un ejemplo de ello es el compás, que fuerza al punto a seguir una trayectoria circular. En el desarrollo de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas se reconocen diferentes tipos de máquinas entre los que se encuentran las calculadoras, computadores, software dinámicos; estos se toman como instrumentos que apoyan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; sin embargo no se limitan a esta clase de instrumentos, sino también a los artefactos, que debido a su origen y su forma de construcción desde una perspectiva histórica cultural promueven el desarrollo matemático.

El uso eficaz de artefactos en el aula de matemáticas es un verdadero desafío para los maestros en cuanto a competencias profesionales y específicas se refiere, ya que estas no se pueden ser fijadas para todos, se reconocer la complejidad del desarrollo estas competencias y ser conscientes de la característica multidimensional del conocimiento matemático para su enseñanza.

Investigaciones llevadas a cabo por un equipo del Laboratorio de Máquinas Matemáticas de la Universidad de Módena y Reggio Emilia, tiene en cuenta al menos tres componentes analíticos que están relacionados con los artefactos; un componente epistemológico, relacionado con el significado matemático, un componente didáctico, con especial atención en los procesos en el aula y por último un componente cognitivo, con especial atención en los procesos de aprendizaje.

2.1.2.9 Las teorías como herramientas

En las últimas décadas en la comunidad de educadores matemáticos se ha reflexionado sobre la utilidad de las teorías como un medio para la educación del profesor de matemáticas y para el desarrollo de la investigación. De ahí que sea importante indagar si estas teorías se pueden utilizar para promover tanto en los actuales como en los futuros profesores aspectos como: El conocimiento específico de la materia, el conocimiento sobre el razonamiento matemático de los estudiantes y también el conocimiento sobre la formulación y secuenciación de las tareas que se proponen.

Aunque diversas teorías han sido planteadas y utilizadas en la educación matemática consideramos que sólo algunas son importantes en la medida en que contribuyen a los aspectos planteados anteriormente. Por esto entre la diversidad de modelos teóricos existentes, haremos referencia a los dos modelos propuestos por Tsamir (2008): El modelo de Fischbein y el de Stavy & Tirosh. Estos modelos cumplen los objetivos enunciados anteriormente porque: Primero, van dirigidos a los futuros profesores de matemáticas y a los profesores de matemáticas en general. Segundo, porque cumplen con un conjunto de criterios de evaluación que deben tener las teorías, que fueron planteados por Schoenfeld (2002, citado en Tsamir , 2008) , entre los cuales están: ambas teorías proporcionan poder descriptivo para capturar qué es lo que cuenta como un modelo teórico válido; tienen amplio poder explicativo para dar cuenta de cómo y por qué trabajar con algunos elementos teóricos; tienen alcance para cubrir un amplio rango de fenómenos; tienen poder predictivo para poder comprobar la exactitud de las reclamaciones que se tengan sobre ellas, es decir se pueden comprobar empíricamente; poseen diversas fuentes de evidencia, o se pueden triangular fácilmente; además de que son rigurosas y específicas. Tercero, ambas teorías proponen interesantes perspectivas de análisis de las actuaciones matemáticas de los estudiantes: una primer perspectiva de contenido orientada frente a la influencia del conocimiento previo de los estudiantes; luego plantea otra perspectiva de la orientación sobre las tareas de los estudiantes, abordando la influencia que tienen ciertas tareas sobre las tendencias de los estudiantes para responder de formas específicas ante las mismas.

El enfoque teórico de Fischbein (1987; 1993, citado en Tsamir, 2008, p.214) plantea: “tres componentes del conocimiento: *el conocimiento formal*, que está basado en el pensamiento proposicional, caracterizado por el rigor y la consistencia en la construcción deductiva, estando libre de límites impuestos por características concretas o prácticas. *El conocimiento algorítmico*, es la habilidad para usar teóricamente procedimientos justificados; y *el conocimiento intuitivo*, es una clase de cognición persistente, que es aceptada directa y confiadamente como obvia, impartiendo la sensación de que no se requiere ninguna justificación para la misma”.

Según plantea Tsamir (2008) aunque cada uno de estos componentes planteados son claves en el desempeño matemático de los estudiantes, no menos importantes son las interrelaciones que se establecen entre ellos. En este sentido explica que: “algunas veces los conocimientos intuitivos que traen los estudiantes manipulan y obstaculizan la interpretación formal o el uso de procedimientos algorítmicos”, Fischbein (1987, citado en Tsamir, 2008, p.214). De la misma manera él y sus colegas identifican e investigan un conjunto de procedimientos algorítmicos usados por los estudiantes, los cuales denominan *modelos algorítmicos*, que se refieren a los métodos de reducción y prototipos de procedimientos que los estudiantes usan en procesos de simplificación algebraica o de expresiones trigonométricas. Además: “pone especial atención a las *intuiciones primarias* de los aprendices, las cuales se desarrollan en los individuos de manera independiente a cualquier instrucción sistemática, esto como consecuencia de su experiencia personal. Él explica que las intuiciones correctas no simplemente reemplazan a las primitivas, que son incorrectas, porque las intuiciones primarias usualmente son extremadamente resistentes, y pueden muchas veces coexistir con las nuevas, que son las aceptadas científicamente. Esto es lo que muchas veces generan inconsistencias en las respuestas de los estudiantes. En conclusión Fischbein establece que cada actividad de enseñanza siempre tiene que enfrentar a las tendencias intuitivas y adicionalmente recomienda a los profesores que construyan ´mecanismos de alarma´ los cuales podrían alertar a los estudiantes cada vez que lleguen a constituirse en una trampa potencial en su razonamiento", Fischbein (1987, citado en Tsamir, 2008, p.38).

De otra parte la teoría de las reglas intuitivas de Stavy y Tirosh (2000) sostiene que los estudiantes tienden a reaccionar de una forma similar y predecible a diversas tareas diarias de tipo matemático o científico, que presentan algunas características externas, aunque no siempre estén relacionadas. Esta teoría propone tres reglas consideradas como intuitivas, puesto que implican las principales características del "conocimiento intuitivo" de Fischbein (1987): la inmediatez, la auto-evidencia y la confianza. En este sentido: "estas reglas intuitivas pueden servir como medio para explicar y predecir las respuestas de los estudiantes a diferentes tareas; de manera que la familiaridad de los profesores con ésta teoría puede mejorar la enseñanza de las matemáticas y las ciencias", Stavy y Tirosh (2000, citado en Tsamir, 2008, p.215).

2.1.2.10 El enfoque de los puntos crecientes

Según Clarke (2008), este planteamiento se basa en el pensamiento matemático que los niños pueden construir, y a su vez da cuenta de las prácticas de enseñanza que han contribuido a mejorar significativamente el aprendizaje de los estudiantes en distintos contextos como: Australia, Nueva Zelanda y Estados Unidos. Se basa en el enfoque del Proyecto de Instrucción Cognitiva Guiada llevada a cabo en EEUU, y reporta que el conocimiento del pensamiento de los niños es una poderosa herramienta que permite a los profesores transformar este conocimiento y usarlo para cambiar la enseñanza. Estos hallazgos, cuando los vemos en relación con los resultados de otros estudios, permiten concluir que un camino importante para mejorar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es ayudar a los profesores a comprender los procesos de pensamiento matemático de sus estudiantes.

En el marco de este enfoque y proyecto de investigación se utilizan los términos numerosidad y matemáticas en el mismo sentido, además existen en el mismo tres componentes principales que forman parte del proyecto: un marco de referencia sobre puntos crecientes que proporciona un medio de comprensión del pensamiento matemático de los niños más pequeños, una entrevista que se utiliza como una herramienta para evaluar a individuos particulares y a grupos, y un programa de desarrollo profesional que se orienta hacia un mayor desarrollo de los tipos de pensamiento.

La expresión "puntos crecientes" fue acuñada por Pengelly (1985, citado en Clarke, 2008), y se define como niveles que miden el aprendizaje de las matemáticas en los niños, para lo cual se utilizan descriptores en los proyectos de aprendizaje de las matemáticas. Este enfoque de los "puntos crecientes" se analizó a través de su uso en las operaciones de adición y sustracción, dada la estrecha relación entre ambas operaciones y aprovechando que muchos niños pueden resolver problemas de sustracción usando la suma. Algunos ejemplos que se pueden mostrar son: contar todos los elementos (en dos colecciones de objetos) para encontrar el total de objetos; contar uno por uno los objetos (hasta encontrar el total de las dos colecciones); contar los objetos hacia atrás, contarlos hacia abajo, contar desde arriba (dada una situación de sustracción, escoger apropiadamente algunas de estas estrategias); dado un problema de adición o sustracción, permitir que los estudiantes utilicen estrategias básicas para resolverlo, como: duplicar, la conmutatividad, sumar 10, etc.; también dado un problema de adición o sustracción, usar estrategias como acercar al doble, sumar 9, acercar a la decena próxima, y en general utilizar estrategias intuitivas o familiares; finalmente la extensión y aplicación de la sustracción y adición utilizando estrategias básicas, derivadas e intuitivas, esto se refiere a que dado un rango de tareas, que los niños puedan resolverlas mentalmente usando estrategias apropiadas y un entendimiento claro de conceptos claves.

2.1.2.11 Aprendiendo a escuchar las matemáticas de los niños

Algunos investigadores como Empson & Jacobs (2008) se refieren a que en las aulas la mayoría de profesores no son conscientes del grado de validez del pensamiento matemático de los niños y por lo tanto no consideran cómo enseñar de manera que reconozcan a este como una forma válida de aprendizaje. Es importante entonces analizar lo que implica en el aprendizaje de los maestros escuchar las matemáticas de los niños, y además incluir este aspecto en los programas de formación y en su desarrollo profesional. También se proponen unos puntos de referencia para que los profesores formadores escuchen las matemáticas de sus estudiantes profesores, y para que las utilicen apoyándolos mientras están aprendiendo a escuchar estrecha y activamente las matemáticas de los niños.

Es fundamental entonces que los profesores den sentido a lo que escuchan de sus estudiantes y utilicen lo que están escuchando en la enseñanza. Sin embargo es necesario precisar que cuando los profesores preguntan muchas veces lo hacen para averiguar si los estudiantes saben lo que se ha explicado o si pueden realizar lo que se ha mostrado, pero es muy pequeño el porcentaje de profesores que solicita información adicional de sus estudiantes. De tal manera que muchos profesores no se dan cuenta que los niños tienen sus propias ideas matemáticas y sus propias estrategias, las cuales pueden ser diferentes del propio pensamiento de los profesores sobre las matemáticas, de manera que ellos no esperan escuchar estas ideas y estrategias. Aun cuando los profesores les piden a sus estudiantes que expresen su pensamiento, escucharlos efectivamente es un trabajo difícil. Además algunas investigaciones sobre las matemáticas de los niños más pequeños muestran que los niños utilizan su conocimiento intuitivo o informal para generar estrategias conceptuales en la solución de una variedad de problemas. Aunque el razonamiento de los estudiantes no siempre es exacto, es poderoso y productivo que muchos profesores lo reconozcan. Esto porque utilizar el pensamiento matemático de los estudiantes en la enseñanza como habilidad especializada requiere para los profesores un cambio significativo en cómo conceptualizan su papel en el proceso enseñanza-aprendizaje. Por esto aprender a escuchar es la base de la capacidad del profesor para utilizar el pensamiento matemático de los niños de manera productiva.

2.1.2.12 La Teoría RME (Educación Matemática Realista)

De acuerdo a Gravemeijer (2008) el objetivo de este capítulo es investigar las implicaciones de la enseñanza de contenidos específicos para la Educación Matemática Realista (RME), teniendo en cuenta que el punto de partida de esta teoría es que a los estudiantes se les debe dar la oportunidad de reinventar las matemáticas, según lo afirmado por Freudenthal (1973, citado en Gravemeijer, 2008). Además plantea las dificultades de entender el aprendizaje de manera constructivista: haciendo conexiones entre lo que uno sabe y lo que uno necesita aprender. De acuerdo con esta perspectiva se pretende responder a la pregunta: ¿qué es lo que hace a las matemáticas tan difícil? En este sentido desarrolla la noción alternativa de aprendizaje como un proceso de construcción o reconstrucción, ofreciendo una mejor posibilidad de ayudar a los estudiantes a aprender matemáticas. Esto se lleva a cabo por medio de tres diseños instruccionales heurísticos: La reinvención guiada, la fenomenología didáctica, y la modelación emergente. En este sentido considera los requerimientos que se necesitan satisfacer para construir una teoría de la enseñanza acorde con los principios del enfoque RME.

Para cumplir con este último objetivo es necesario desarrollar una forma de educación matemática en el aula acorde con la teoría RME. Aquí es donde surge la necesidad de una teoría que asuma el aprendizaje como un proceso de construcción por parte de los estudiantes. En este sentido Freudenthal (1973, citado en Gravemeijer, 2008) en los años setenta se centra en el tema de qué son las matemáticas, o qué queremos que sean para nuestros estudiantes, desde un enfoque diferente. Según esta perspectiva: “las matemáticas son una ´actividad humana´, en el que lo importante es la matematización de la materia misma desde la realidad”, Freudenthal (1973, citado en Gravemeijer, 2008, p.285), en este sentido: “la principal actividad de los matemáticos es matematizar, y el resultado de esta actividad es la formalización vía la axiomatización” (ibid). El resultado de esta actividad en muchas ocasiones en la escuela secundaria se toma, según plantea Freudenthal (1973, citado en Gravemeijer, 2008) como : “el punto de partida en la enseñanza tradicional de las matemáticas. El llama a esto la inversión anti-didáctica, donde el punto final del trabajo de varias generaciones de matemáticas es el punto de partida de la tradicional enseñanza a los estudiantes. Como alternativa, él propone dar a los estudiantes la oportunidad de hacer lo que hacen los matemáticos. En lugar de presentarla como un producto acabado, el principal objetivo de la educación matemática debería ser involucrar a los estudiantes en las matemáticas como actividad. En este enfoque los estudiantes deben ser guiados en la invención de las matemáticas”, Freudenthal (1973, citado en Gravemeijer, 2008, p. 285), en este sentido se habla de *reinvención guiada*. El papel de los profesores es entonces ayudar a los estudiantes en su proceso de aprendizaje para que se presente como un proceso de “invención” matemática.

2.2. FORMACIÓN DEL PROFESOR COMO CAMPO DE INVESTIGACIÓN

La formación del profesor como campo de investigación en educación matemática es relativamente nuevo, pues data de la época de los años ochenta; según Gómez (2002), la investigación sobre el conocimiento del profesor y su relación con la enseñanza de las matemáticas ha pasado por tres fases según autores como Ball (1991) y Thomas (1994). Una primera fase llamada “la enseñanza eficiente”, donde se buscaba identificar, de acuerdo con las opiniones de los alumnos, las características de los buenos profesores; en una segunda fase se buscó relacionar las características del profesor con el aprendizaje de sus alumnos, y se encontró que el conocimiento matemático del profesor, medido por ejemplo “por el número de cursos que ha tomado o títulos obtenidos”, no es un buen indicador del rendimiento de los alumnos; la tercera fase se llamó “del pensamiento del profesor", se parte del supuesto que el trabajo del profesor en el aula depende de lo que el profesor sabe y piensa, con esto se enfatiza en el conocimiento matemático relacionado con algunos aspectos generales de la pedagogía.

El campo de investigación del profesorado de matemáticas ha crecido sustancialmente, según lo reporta Chapman (2011). Este crecimiento ha sido significativo, como es reportado y promovido por el *Journal of Mathematics Teacher Education,* cuyas ediciones iniciales estuvieron a cargo de Thomas Cooney, seguidamente Barbara Jaworsky y Peter Sullivan. Esta revista se ha dedicado a facilitar recursos académicos para los formadores de docentes e investigadores en educación matemática de todo el mundo. El campo de investigación se centra en aspectos como: las creencias de los profesores de matemáticas, la identidad, los conocimientos de matemáticas, los conocimientos de matemáticas para la enseñanza, los conocimientos pedagógicos, las herramientas y procesos, las reflexiones del profesor, las formas de aprendizaje, el currículo y la práctica entre otros. Este tipo de estudios han sido de gran importancia ya que han brindado información para la formación del profesorado.

En este sentido, una clasificación que resultó muy útil y que ayudó a describir el conocimiento que los profesores necesitan, fue propuesto por Shulman (1986b), quien plantea un modelo de conocimiento que ha sido ampliado por otros autores pero manteniendo sus bases teóricas. Shulman introdujo las nociones de Conocimiento Didáctico de Contenido (CDC) o bien PCK, *Pedagogical Content Knowledge*, por sus siglas en inglés, que se constituye como la base de conocimiento para la enseñanza, y está formado por varios componentes, que se explicaran más adelante.

2.3. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO

En este apartado del marco teórico hacemos referencia al Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) y la caracterización que se tuvo en cuenta para nuestro trabajo. Inicialmente hacemos una presentación del desarrollo del conocimiento del profesor como campo de investigación; seguidamente se hace una reseña histórica sobre el surgimiento del CDC; a continuación se expone el significado y los componentes que integran el CDC; finalmente presentamos la caracterización que Pinto (2010) hace sobre el CDC, teniendo en cuenta los componentes planteados por Shulman (1986b) junto con las categorías planteadas por él.

2.3.1. Reseña del surgimiento del CDC

Para hacer un reconocimiento y conceptualización del CDC, nos centramos en algunos documentos que recogen de una manera concreta lo que significa el CDC, estos son: Primero, un artículo de la revista *Relime*, 2008, volumen 20 número 3, titulado: El CDC en el Profesor de Matemáticas: ¿una cuestión ignorada?, autores: Pinto y González (2008); Segundo, un artículo de la revista *Educación Química*, volumen 15, número 2, titulado: El Conocimiento Pedagógico de Contenido, autores: Garritz y Trinidad (2004); y Tercero, la tesis doctoral titulada: Conocimiento Didáctico de Contenido sobre la representación de datos estadísticos: Estudios de Casos con Profesores de Estadística en Carreras de Psicología y Educación, autor: Pinto (2010). En este último documento se hace una amplia descripción del CDC y nos aporta las categorías del CDC propuestas por Shulman (1987), ampliadas por Pinto (2010), las cuales se constituyeron como base fundamental para nuestro trabajo.

En el verano de 1983 Lee Shulman (1999) dictó una conferencia en la Universidad de Texas, en Austin, titulada ‘‘El paradigma perdido en la investigación sobre la enseñanza’’. En ella se discutió sobre este paradigma considerado perdido y planteó al final de su presentación que ese paradigma consistía en la materia de estudio y su interacción con la pedagogía que es llevada a cabo por los profesores. Esta propuesta sorprendió a todo mundo ya que hasta entonces los estudios sobre la enseñanza se habían enfocado en las formas de comportamiento del profesor más que en las de su pensamiento. Shulman mismo, en sus enfoques más cognitivos de estudio de la enseñanza, había tratado a los profesores de una manera muy genérica como pensadores. Por otro lado, el enfoque de la psicología cognitiva del aprendizaje se había dado estrictamente desde la perspectiva de los aprendices y la investigación sobre la enseñanza había tendido a ignorar los puntos con relación a los profesores (Garritz & Trinidad, 2004).

Para abordar el tema, Shulman planteó algunas preguntas como las siguientes: ¿Cómo el estudiante universitario exitoso que se convierte en profesor novato transforma su pericia en la materia en una forma que los estudiantes de bachillerato puedan comprender?, ¿Cuáles son las fuentes de las analogías, metáforas, ejemplos, demostraciones y reformulaciones que el profesor usa en el aula?, ¿Cómo los profesores toman una parte de un texto y transforman su entendimiento en instrucción que sus estudiantes puedan comprender?, (Garritz & Trinidad, 2004).

De acuerdo con Pinto (2010) la teoría de la enseñanza propuesta por Shulman, se pone de manifiesto por primera vez en la publicación de dos de sus artículos. El primero, “*Those who understand: knowledge growth in teaching* (1986b) y posteriormente, “*Knowledge and teaching: foundations of new reform*” (1987). A partir de estos artículos surge su propuesta teórica y la noción del CDC, que entre las diferentes razones se encuentran (hechos, reflexiones, estudios o exploraciones) que se fueron conjugando para su surgimiento, entre las que se encuentran:

1. La imperante necesidad de profesionalizar la enseñanza.

2. Los resultados desfavorables en el desarrollo de habilidades cognitivas de los estudiantes de nivel secundaria (principalmente) en los exámenes nacionales e internacionales.

3. Las críticas recibidas a las corrientes imperantes sobre la didáctica del profesor denominadas proceso-producto y pensamiento del profesor, que favorecieron un mayor énfasis en los procesos de evaluación y acreditación y selección de profesores basado en lo pedagógico (casi exclusivamente), asumiendo que el contenido está cubierto por el hecho de tener una licenciatura en la disciplina correspondiente.

4. La ineludible necesidad de recuperar y asignarle el justo valor al conocimiento del contenido como elemento igualmente importante en el perfil del profesor y crear un modelo que integrara el conocimiento del contenido con el conocimiento pedagógico.

5. La reforma de la enseñanza en Estados Unidos, en la que se manifestó de manera recurrente (en sus diferentes textos y estudios) la necesidad de elevar la enseñanza a la categoría de una ocupación más respetada partiendo de un supuesto básico y esencial: que existe una base de conocimiento para enseñar.

Una reflexión interesante de resaltar en la reseña es que en la publicación de sus trabajos, Shulman (1986b) se burla de la frase que un siglo atrás propusiera George Bernard Shaw: ‘‘El que puede, hace. El que no puede, enseña’’ (Garritz & Trinidad, 2004) y la reescribe al final de su artículo como ‘‘Aquellos que pueden, hacen. Aquellos que entienden, enseñan’’. De este modo surge la corriente de investigación que Shulman denominó “conocimiento base para la enseñanza”, cuya finalidad básica es el análisis del conocimiento profesional del profesor, Pinto & González (2008).

2.3.2. Significado y componentes del CDC

Inicialmente Shulman (1986b) plantea que para ubicar el conocimiento que se desarrolla en las mentes de los profesores, habría que distinguir tres tipos de conocimiento:

a. Conocimiento del contenido temático de la materia.

b. Conocimiento didáctico del contenido (CDC), ‘‘el tema de la materia *para la enseñanza*’’, y

c. Conocimiento curricular.

En un segundo momento, Shulman (1987) extiende la noción del conocimiento básico con que el profesor debe contar, incluyendo al menos los siguientes siete tipos de conocimiento:

a. Conocimiento del contenido temático de la materia o asignatura (CA).

b. Conocimiento pedagógico general.

c. Conocimiento curricular.

d. Conocimiento didáctico del contenido (CDC).

e. Conocimiento de los aprendices y sus características.

f. Conocimiento del contexto educativo.

g. Conocimiento de los fines, propósitos y valores educacionales y sus bases filosóficas e históricas

De estos tipos de conocimiento, el (CDC) es el que ha recibido más atención, tanto en el campo de la investigación, como en el de la práctica. Sobre el CDC, Shulman nos dice ‘‘es el conocimiento que va más allá del tema de la materia *per se* y que llega a la dimensión del conocimiento del tema de la materia *para la enseñanza*’’ (Shulman, 1999, pág. 9). Hay que diferenciar el CDC del Conocimiento Pedagógico General para la enseñanza, el cual es el conocimiento de principios genéricos de organización y dirección en el salón de clases; el conocimiento de las teorías y métodos de enseñanza.

En el tipo CDC, se incluye, los tópicos más regularmente enseñados en el área temática del profesor, ‘‘las formas más útiles de representación de estas ideas; las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más poderosos; en pocas palabras, las formas de representación y formulación del tema que lo hace comprensible a otros’’ (Shulman, 1987, pág. 9), es decir, todo el esfuerzo que hace el profesor para hacer comprensible su tema en particular. El CDC también incluye un entendimiento de lo que hace fácil o difícil el aprendizaje de tópicos específicos: ‘‘las concepciones y preconcepciones que los estudiantes de diferentes edades y antecedentes traen al aprendizaje de los tópicos y lecciones más frecuentemente enseñados’’ (Garritz & Trinidad, 2004, p. 3).

El CDC es especialmente interesante porque identifica los diferentes bagajes de conocimientos para la enseñanza, como señala Shulman (1987):

“Representa la mezcla entre materia y pedagogía por la que se llega a una comprensión de cómo determinados temas y problemas se organizan, se representan y se adaptan a los diversos intereses y capacidades de los alumnos, y se exponen para su enseñanza. El conocimiento didáctico de la materia es la categoría que con mayor probabilidad permite distinguir entre la comprensión del especialista en un área del saber y la comprensión del pedagogo” (Shulman, 1987, pág. 8).

El CDC representa la intersección entre conocimiento de la materia *per se*, los principios generales de pedagogía y el contexto; sin embargo, no es únicamente una mera conjunción (Shulman, 1993) o integración (Gess Newsome & Lederman, 1999) de elementos, sino una transformación del conocimiento del contenido a contenido enseñable, lo que implica, según Glatthron, (1990), saber cómo adaptar el material representado a las características de los alumnos. Si bien el conocimiento de la materia es necesario como uno de los componentes del conocimiento, hay que incorporar elementos adicionales (por ejemplo conocimiento curricular del contenido; repertorio de estrategias instruccionales; selección, diseño y uso diverso de materiales de apoyo; conocimiento de los procesos de aprendizaje del alumno sobre el contenido), que marcan la diferencia de ser matemático a ser profesor de matemáticas (Pinto & González, 2008).

Más tarde, Shulman (1993) desarrolló tres particularidades y concepciones importantes (interrelacionadas) que hay que considerar en el estudio e implementación del CDC en programas de investigación o de formación de profesores:

1. *El CDC es una forma de comprender o conocer* lo que los profesores poseen (o deberían poseer) que distingue su pensamiento y razonamiento de las meras características de un experto en la materia en cuestión, siendo éste un ejemplo de “sabiduría de los practicantes”, con lo cual diferencia al matemático y al educador, del profesor de matemáticas.

2. *El CDC es una parte del conocimiento base* para *la enseñanza*, un cuerpo de conocimientos, habilidades y - para algunos- una disposición, que distingue a la enseñanza como una profesión y que incluye aspectos como técnicas racionales y capacidades de juicio, improvisación e intuición; lo que Schön (1983) denominó como “reflexión-en-la-acción” y “reflexión-sobre-la-acción”, con lo cual justifica su

naturaleza, su interrelación con otros dominios de conocimiento y su metodología para la formación, y

3. *El CDC es un proceso de razonamiento pedagógico y acción* a través del cual los profesores crean sus conocimientos cuando se enfrentan a problemas de enseñanza en contextos particulares, expresando sus planes y corrigiendo espontáneamente incluso improvisando ante los inevitables momentos impredecibles que surgen de la enseñanza, con lo cual estos profesores desarrollan nuevos conocimientos, intuiciones y disposiciones (Shulman, 1987).

2.3.3. Caracterización del CDC realizada por Pinto

Según Pinto & González (2008), el CDC es caracterizado como un modelo cíclico, sinérgico, integral, flexible, incluyente e investigable: El CDC no se puede examinar a partir del estudio de uno de sus componentes sin considerar la inclusión de los otros. Evaluar un solo componente, separado de los otros, conlleva a un riesgo sustancial de distorsionar su significado, caracterización e interpretación Baxter y Lederman (1999, citado en Pinto & González, 2008). Como modelo, el CDC está compuesto de elementos esenciales que se interrelacionan y se transforman en representaciones ideales que pueden facilitar su comprensión, desarrollo e investigación, dentro de un continuo de modelos que van de integrativos a transformativos acerca del conocimiento del profesor, Gess-Newsome & Lederman (1999, citado en Pinto & González, 2008).

La revisión y el análisis de la perspectiva teórica que sustenta los componentes del CDC ofrece un panorama amplio sobre los elementos que subyacen a la teoría propuesta por Shulman y colaboradores y que es realizado por investigadores como Chinnappan & Lawson (2005); Chen (2004); An, Kulm & Wu (2004); Sánchez & Llinares (2002, 2003); Llinares (2000); Baxter & Lederman (1999, citados en Pinto, 2010). Esta revisión permitió tener una visión más clara sobre el conocimiento de la didáctica del contenido específico que incorpora según Shulman (1986b) & Grossman (1989), por lo menos tres componentes básicos: el conocimiento del contenido de la disciplina por enseñar, el conocimiento de la didáctica específica (representaciones o estrategias instruccionales para la enseñanza del tópico) y el conocimiento del estudiante, Pinto & González (2008).

A continuación se describirán las características y la naturaleza conceptual de cada uno de estos componentes del CDC que contribuyen a comprender la correlación de conocimiento que debe tener y desarrollar el profesor en su práctica docente.

2.3.3.1 Conocimiento del contenido de la disciplina por enseñar

Shulman (1986b) define este primer nivel de conocimiento como la "cantidad y organización de conocimiento *per se* en la mente del profesor" (p. 9). Como elemento esencial y previo a su labor de enseñar, el profesor deber tener un nivel mínimo de dominio del contenido que se propone enseñar: "el profesor necesita no sólo conocer o comprender qué, sino además saber también por qué esto es así, sobre qué supuestos pueden ser ciertas estas justificaciones y bajo qué circunstancias nuestras creencias en estas justificaciones pueden ser débiles y aún denegadas" (Shulman, 1986b, p. 9).

Muchos son los expertos que opinan que los profesores necesitan tener un sólido conocimiento matemático para la enseñanza (por ejemplo, Shulman, 1986; Even, 1990;

Llinares, 1993; García, 1997; López, 1999, citados en Pinto y González, 2008). “Conocer bien el contenido de una lección incrementa la capacidad del profesor para realizar actividades diferentes en el aula, coordinar y dirigir las intervenciones y preguntas de los estudiantes, generar un cúmulo de estrategias de enseñanza vinculadas con el contenido y profundizar en el porqué y el para qué de la asignatura. No conocer bien el contenido es limitativo para desarrollar muchas de estas capacidades o habilidades”, (Pinto & González, 2008, p. 88)

El estudio del conocimiento del contenido matemático del profesor es una línea de investigación que se orienta a analizar su naturaleza conceptual y epistemológica, sus componentes, características y el grado de conocimiento matemático (genérico o específico) que tienen los profesores; así como sus relaciones con la enseñanza y el aprendizaje y con otros dominios de conocimiento.

2.3.3.2. Conocimiento de la didáctica específica (representaciones o estrategias instruccionales para la enseñanza del tema)

Shulman (1986, 1987) y Barnett y Hodson (2001), afirman que los profesores además de conocer y comprender el significado de la materia, también deben saber cómo enseñar ese contenido de una manera efectiva, reconociendo lo que es fácil y lo que es difícil para los estudiantes, en aspectos como la organización, secuenciación, entre otros, de manera que se presente el contenido aprovechando al máximo la habilidades e intereses de los estudiantes. Por tanto es indispensable tener buenos métodos de enseñanza-aprendizaje, en otras palabras, conocimiento pedagógico. Además este conocimiento debe estar adaptado al contexto específico de la materia, que es lo que se conoce como el conocimiento de la didáctica específica la cual es definida como: “las formas más útiles de representación de estas ideas, las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más poderosas, en una palabra, las formas de representación y formulación de la materia que hacen a ésta comprensible a otros” Shulman, (1986b, citado en Pinto & González, 2008, p. 89).

En el conocimiento de la didáctica específica se relacionan dos elementos centrales del CDC: a) el conocimiento del profesor acerca de las representaciones de la materia y b) el conocimiento del profesor de las estrategias instruccionales asociadas al contenido específico que se enseña, según Van Driel, De Jong & Verloop, (2002, citado en Pinto & González, 2008). En este sentido la atención se centra en el conocimiento del profesor sobre diferentes representaciones instruccionales relacionadas a un tópico determinado y la forma como las interpreta y utiliza en el aula, poniendo también en juego el conocimiento y uso de los otros componentes del CDC.

2.3.3.3 Conocimiento del estudiante

El tercer componente del CDC es “el conocimiento de los procesos de aprendizaje del alumno sobre el contenido que desea enseñar”. Hawkins en Smith y Neale (1989, citado en Pinto & González, 2008) definen este dominio de conocimiento como la habilidad de hacer “penetrable” el contenido a los estudiantes. Consiste entonces en necesidad de que el profesor debe agregar a su bagaje de conocimientos los diferentes errores, concepciones y preconcepciones de los estudiantes, así mismo como y las condiciones instruccionales necesarias para lograr transformar estas concepciones de manera adecuada y correcta

(Shulman, 1986). Para Shulman y sus colaboradores, este conocimiento ayudaría eficientemente a una mejor comprensión del tópico específico.

Diferentes autores, por ejemplo: Shulman, 1986; Marks, 1989; McDiarmid, Ball & Anderson, 1989; López, (1999, citados en Pinto & González, 2008) insisten en la necesidad de que el profesor además de conocer los procesos psicológicos de aprendizaje, debe también conocer cómo aprende un alumno a estudiar un tópico específico. En este sentido es necesario que el docente reconozca el proceso cognitivo del estudiante, es decir, su edad, grado, experiencia y escolaridad, así como sus motivaciones, expectativas e intereses. Gran parte de este cuerpo de conocimientos se ha ido adquiriendo como consecuencia de las dos últimas décadas de amplia investigación cognitiva sobre el aprendizaje del estudiante, lo cual ha producido muchos datos útiles sobre concepciones, errores, obstáculos y dificultades de los estudiantes y de su pensamiento matemático Even & Tirosh, (1995, citado en Pinto & González, 2008, p. 90).

A continuación se hace una descripción del proceso seguido por Pinto para plantear las categorías que conforman cada uno de los tres componentes descritos anteriores.

2.3.4. Categorías propuestas por Pinto

Pinto (2010) recoge gran parte los estudios realizados por otros autores sobre la propuesta de Shulman (1986) del CDC, realizando una clasificación y categorización de todas estas propuestas, llegando finalmente a complementar las tres categorías propuestas por Shulman y presentándolas en tres tablas que se mostrarán más adelante. A continuación presentamos la propuesta de Shulman y la síntesis que Pinto realizó sobre los aportes de otros autores.

Al analizar la definición de Shulman (1986, p. 9) se identifican ciertas expresiones de las cuales se derivan las siguientes categorías del CDC:

1. "de un tópico específico" y "aprender estos tópicos y lecciones".

2. "las formas más útiles de representación de estas ideas", y

3. "las concepciones y creencias que los estudiantes de diferentes edades y experiencias"

En el inciso (1) hace referencia al contenido o al tópico específico que se trate, es decir, el contenido a enseñar. En el inciso (2) a las formas de representación, es decir, a las estrategias específicas para enseñar dicho contenido. Finalmente, en el inciso (3) a las concepciones y creencias de los estudiantes, es decir, a los conocimientos sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes respecto del contenido que enseña. Así, Shulman (1986b) estableció y propuso tres componentes esenciales como parte del CDC.

1. El *conocimiento del* contenido enseñable (más relevante a ser enseñado según el sistema escolar), es decir, el conocimiento de la materia específica para enseñar.

2. Formas de representación (estrategias) para enseñar el área específica.

3. Conocimiento del aprendizaje del estudiante (que incluye las estrategias con las que los profesores ayudan al alumno).

Shulman (1986) deja entrever (y reconoce) el conocimiento pedagógico de la enseñanza como parte inmersa dentro del constructo, pero no lo hace de manera explícita como los tres componentes antes mencionados. No obstante, Shulman y colaboradores incluyen el conocimiento de la pedagogía general dentro de la perspectiva teórica de la base del conocimiento para la enseñanza.

Muchos son los autores que han estudiado, analizado, complementado, propuesto o modificado las categorías del CDC de Shulman (Tsamir, 1988; Smith & Neale, 1989; Grossman, 1990; Cooney, 1994; Fernández-Balboa & Stiehl, 1995; Graeber, 1999; An, Kulm & Wu, 2004; entre otros, citados en Pinto & González, 2008).

Las categorías del CDC tienen su origen en las principales publicaciones de Shulman y colaboradores; algunas de ellas citadas cronológicamente en diferentes momentos, como es el caso de Shulman (1986, 1987), Wilson, Shulman & Richert (1987, citado en Pinto, 2010). No se contraponen, pero sí se complementan. Probablemente esto se debe a que algunos autores asuman ciertas categorías y el resto otras; o bien, otros las incorporan dentro de alguna otra. Otra razón es que algunos elementos del CDC están íntimamente relacionados con la base del conocimiento para la enseñanza; por ejemplo: Grossman ,1990; López, 1999, citados en Pinto, 2010, proponen como elementos: el conocimiento de la materia, el conocimiento pedagógico general, el CDC y el conocimiento del contexto; e incluye en el CDC otros tres: conocimiento de los propósitos de enseñanza, conocimiento curricular y conocimiento de las estrategias de enseñanza y aprendizaje. Para su trabajo doctoral, Pinto (2010) asumió, como punto de partida, las categorías presentadas por Shulman (1986b). Estas categorías además de apoyarse en la concepción original de Shulman muestran el mayor número de coincidencias entre los diferentes autores que han estudiado el CDC. Para este trabajo, las tres categorías identificadas por Shulman del CDC se denominarán: *conocimiento del contenido a enseñar* (para referirse al conocimiento del contenido enseñable), *conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales* (para referirse a las formas de representación del contenido a enseñar) y *conocimiento de los procesos de aprendizaje del alumno sobre el contenido a enseñar* (para referirse al conocimiento de las creencias y concepciones de los estudiantes).

A continuación se presentan las tablas con las categorizaciones hechas por Pinto (2010) donde él hace una breve descripción de cada *asunto*. Estas tablas son la base para el desarrollo de nuestro trabajo.

Las tres categorías propuestas por Shulman (1986b) son ampliadas por Pinto (2010) quien les da el nombre de componentes; los cuales a su vez se dividen en tres categorías, estas a su vez están compuestas por diferentes asuntos. Los componentes corresponden a cada tabla, las categorías están identificadas por las letras a, b y c, y los asuntos por viñetas. Como se presentan a continuación:

Tabla 1. Componentes del conocimiento del contenido matemático a enseñar.

a. Conocimientos sobre la actividad matemática general.
• *Conocimiento de la historia de la disciplina*, evolución, principales problemas y cambios en las nociones o conceptos, *la naturaleza de las explicaciones, de la heurística y de los valores histórico-filosóficos.* • *Conocimiento de las diferentes posturas o escuelas filosóficas* en relación a cómo

se crea y se construye el saber científico básico.

- *Comprensión de aquellos conceptos, principios, hechos y teorías* principales de la disciplina en cuestión, así como las posibles interrelaciones que pueden establecerse entre los mismos.
- *Conocimiento del conjunto de procedimientos que sirven de base para que el conocimiento de los mismos progrese y avance*, principales perspectivas o escuelas en el campo, cómo el campo se ha desarrollado a través del tiempo y quiénes han contribuido a ese desarrollo.
- *Conocimiento de la disciplina para enseñar a otras personas*, desde una perspectiva sociocultural, de las diferentes materias que componen el currículo escolar.
- *Conocimientos de la ética y valores morales y estéticos del contenido a enseñar, acerca de la cultura matemática y sociedad.*

b. Conocimientos por tópico específico matemático.

- *Características esenciales* (correspondencia entre idea mental y concepto matemático, imagen del concepto, atributos críticos del concepto, ejemplos prototipos, distinción entre ejemplos concretos y no-ejemplos, actualización del cambio en el concepto)
- *Diferentes representaciones* (comprender los conceptos en diferentes representaciones, trasladar y formar conexiones entre éstos)
- *Formas alternativas de aproximación* (familiarización con las principales alternativas de aproximación del concepto, sus usos en las diferentes ramas de la matemática, en otras disciplinas y en la vida diaria, así como el estudio de las posibles adecuaciones de estas aproximaciones a ciertas situaciones)
- *La fuerza del concepto* (nuevas oportunidades que originan nuevos conceptos, características únicas y propiedades relevantes del concepto, relación con otros conceptos, sub-tópicos o subcomponentes, visto desde una manera multidireccional e integral)
- *Repertorio básico* (conocer y tener fácil acceso a familias de ejemplos específicos, ejemplos potentes que ilustran principios importantes, propiedades, teoremas, etc., aspectos prácticos en la escuela que se incluyen en el currículo)
- *Conocimiento y comprensión del concepto*, (conocimiento conceptual y procedimental del concepto, y las relaciones de éstos)
- *Conocimiento acerca de las matemáticas* (conocimiento acerca de la naturaleza de las matemáticas, formas del significado y procesos)

c. Conocimientos sobre el currículo matemático.

- *Conocimiento de los propósitos de la instrucción matemática en general*, para referirse principalmente a tres aspectos: la importancia de las matemáticas en la escuela, el significado de aprenderla y el valor de cada uno de los contenidos dentro del ámbito escolar.
- *Conocimiento de las justificaciones para aprender un tópico dado*, que consiste en conocer y utilizar una variedad de formas específicas para la materia, para justificar los tópicos específicos y con ello motivar a los estudiantes para aprender
- *Conocimiento de las ideas importantes para enseñar un tópico dado*, que son aquellas que los alumnos necesitan aprender acerca de estos tópicos, como son los

procesos, conceptos del currículo, la capacidad y esfuerzo del estudiante, formas intuitivas de representación y otros. • *Conocimiento de los prerrequisitos de conocimiento para un tópico dado*, en los diferentes momentos del ciclo didáctico y estudio del tópico (ej. tópico dentro del mismo currículo, tópico y herramientas conceptuales y procedimentales previas, experiencia en el manejo del tópico o concepto y experiencia en procesos de pensamiento similares) • *Conocimiento de los problemas típicos de la "escuela matemática*", que muestre una familiaridad con problemas típicamente encontrados en la instrucción matemática.

Tabla 2. Componentes del conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales de las matemáticas.

a. Conocimientos sobre las representaciones instruccionales.
• *Comprender el contenido específico que subyace en las representaciones*, las relaciones con otras representaciones o conceptos de la misma disciplina y con otros campos de conocimiento, conocer el origen y fundamento de las representaciones, así como las relaciones que subyacen y los procedimientos de verificación y su relación con el conocimiento del proceso de aprendizaje del alumno. • *Criterios para desarrollar, evaluar, seleccionar y usar apropiadas representaciones* instruccionales; que implica el conocimiento de los estándares de calidad que evalúan las adecuaciones de las representaciones de la materia en cuestión. • *Amplio repertorio de representaciones* de la materia que enseñan; que incluye, el estudio de la relación entre las representaciones y recursos instruccionales específicos para la disciplina; así como de analogías, ilustraciones, modelos, metáforas, ejemplos, explicaciones, demostraciones, dibujos, preguntas, actividades, discusiones, exposiciones verbales, diagramas, simulaciones, dramatizaciones y análisis de contenido, así como representaciones verbales, simbólicas, gráficas o concretas, etc. • *Conocimiento sobre las rutinas instruccionales, que implica, estrategias, métodos o técnicas específicas al contenido matemático vinculado con los materiales de instrucción y el* conocimiento de las características de las interacciones didácticas, así como de las dificultades cognitivas que implica para su enseñanza y aprendizaje y las alternativas para afrontarlas.
b. Conocimientos los materiales curriculares.
• *De los materiales para la instrucción del contenido matemático o para una determinación noción*, sus características, los textos y materiales básicos y alternativos, software, calculadoras, programas específicos, problemas, ejercicios, guías, proyectos, ilustraciones, casos, materiales visuales, películas de y sobre conceptos o tópicos, demostraciones en laboratorios, programas o simuladores *on-line*, recursos en Internet, etc., y de los materiales curriculares que los estudiantes tienen en otras materias. • *Del tratamiento y evaluación de los textos y materiales de la materia en cuestión*, su organización razonada de tópicos, las actividades y problemas que presentan, sus efectos en el aprendizaje del estudiante, de la relación con el contenido y las

estrategias instruccionales que proponen y sobre los criterios de uso, selección y adecuación para la enseñanza o aprendizaje de un tópico matemático.
c. Conocimiento sobre el currículo matemático
• *Conocimiento sobre la planificación de la enseñanza del contenido matemático*, que incluye el conocimiento del diseño, evaluación y modificación del programa escolar, de las características del currículo matemático (según el grado y nivel de enseñanza), de las relaciones con otros contenidos matemáticos y de las tendencias curriculares específicas de la educación matemática. • *Conocimiento del currículo de otras disciplinas escolares*, que incluye la revisión de programas, textos, materiales y recursos con el objeto de establecer con éstas una mayor vinculación con la matemática y el tópico específico que se trate. • *Del diseño e implementación de nuevos materiales de la materia en cuestión*, que implica el conocimiento teórico y práctico del estudio del diseño y evaluación de materiales curriculares de contenido matemático.

Tabla 3. Componentes del conocimiento de los procesos de aprendizaje del estudiante sobre el contenido matemático.

a. Conocimiento del proceso cognitivo del estudiante en matemáticas.
• *Conocer las necesidades y conocimientos particulares de los estudiantes*, a partir del estudio y observación de su desarrollo (edad, experiencia, antecedentes y escolaridad) y desempeño en el aula, sobre el contenido matemático que aprende, y reconocer la importancia del estudio de las concepciones y dificultades del estudiante como parte inherente e indispensable para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; conocer sus intereses, motivaciones y expectativas relacionados con las matemáticas y con los diferentes tópicos específicos. • *Conocer los procesos de aprendizaje de los estudiantes en matemáticas*, enfatizando los procesos de comprensión del concepto y las formas de justificación, partiendo de objetos concretos que representen ideas matemáticas, conociendo las diferencias individuales que puede haber en la forma de aprender de los alumnos, el conocimiento de las características del aprendizaje de tópicos concretos (más y menos comunes) y según niveles cognitivos de desarrollo (procesal o conceptual), las formas de conectar las ideas concretas con las abstractas de las matemáticas y de las formas de ir de lo simple a lo complejo; del conocimiento de las intuiciones y heurísticas de los estudiantes; formas de conectar unas ideas con otras; formas en que la mayoría comprende un tópico dado; es decir, algunos aplicados a las matemáticas en general (ej. terminología), a los tópicos y procedimientos específicos de la matemáticas (ej. simplificar), y otros a su concepción o forma de aprender (ej. memorizar reglas sin comprenderlas) y el porqué de estos aspectos; los fundamentos de razonamiento del estudiante. • *Conocer las creencias y concepciones inadecuadas comunes de los estudiantes*, así como sus interpretaciones, dificultades (o facilidades), obstáculos y errores de los estudiantes del contenido matemático o del tópico específico, como son, por ejemplo, la falta de juicio para utilizar un procedimiento en una situación y que es diferente para otra (especialmente cuando parecen similares); y conocer las atribuciones o causas de éstas.
b. Conocimiento del diagnóstico del proceso cognitivo del estudiante.

• *Conocimiento de técnicas para medir y diagnosticar sus concepciones inadecuadas*, que incluye, el análisis de los criterios de selección, uso y adecuación de instrumentos o materiales (genéricos o específicos de la didáctica de las matemáticas) para el diagnóstico de las necesidades, formas de aprender, creencias, errores y dificultades en el aprendizaje del tópico matemático
c. Conocimiento de estrategias instruccionales
• *Conocer las estrategias instruccionales específicas para corregir las creencias y concepciones inadecuadas, errores y dificultades*, así como conocer las estrategias instruccionales específicas que pueden ser usadas para permitir que los estudiantes conecten lo que ellos aprenden al conocimiento que ellos ya poseen. • *Conocer las estrategias de aprendizaje de los estudiantes* para promover la adquisición, organización y almacenamiento del contenido matemático, que implica, conocer estrategias para promover el recuerdo, la memorización y la comprensión; y conocer los contextos significativos de aprendizaje de los estudiantes, desde los más primitivos hasta los más sofisticados. • *Conocer los materiales curriculares*, utilizados como parte de las estrategias instruccionales para corregir las dificultades y concepciones inadecuadas de los estudiantes.

Con las tablas presentadas anteriormente, mostraremos en el apartado 4.3 la relación existente entre la historia de la función logarítmica y exponencial y sus posibles aportes al CDC del profesor de matemáticas.

2.4 LA HISTORIA COMO UN MEDIADOR DEL CDC

Para comprender el papel que tiene la historia como parte del Conocimiento Pedagógico de Contenido es necesario remitirse a la propuesta de Shulman (1986b), que destaca el papel primordial que en el proceso de enseñanza tiene la comprensión de los contenidos curriculares, tanto por parte del profesor como de los estudiantes, teniendo siempre en mente la perspectiva del avance en la formación profesional del docente. Es por esto que plantea un conjunto de conocimientos mínimos que debe tener el profesor, los que agrupa en tres categorías: conocimiento del contenido de la materia específica, conocimiento didáctico de contenido (o CDC), y conocimiento curricular.

Entonces surge la pregunta: ¿cuál es el papel de la historia de las matemáticas (HM) en la constitución y desarrollo de estos conocimientos?

En la medida en que el profesor comprenda lo que se ha de aprender, cómo se debe enseñar el contenido a partir de la práctica docente, que comprenda cómo el alumno aprende y comprende, resolviendo problemas y desarrollando su pensamiento crítico sobre ese contenido Shulman (1987); la historia se constituye en una herramienta propicia para lograr este cometido, porque el objeto de estudio de la historia de las matemáticas es la evolución de conceptos e ideas matemáticas, también según Bruckheimer & Arcavi (2000, citado en Guacaneme, 2010), la HM se encarga de estudiar las diversas maneras en que los matemáticos se aproximaron a éstas ideas, así como los procesos de formalización y simbolización. De esta manera con la historia el profesor gana una visión tanto epistemológica como evolutiva de los conceptos e ideas matemáticas y, en esta medida como lo señala (Grugnetti, 2000), le brinda al profesor elementos para entender porque algunos conceptos son difíciles para los estudiantes, de modo que este conocimiento contribuye para que el profesor pueda proponer mejores enfoques y aproximaciones en la enseñanza de los conceptos, desde la historia.

2.4.1 La historia como herramienta en la formación de profesores de matemáticas

Cuando se piensa en la historia como medio de formación para los profesores de matemáticas, la pregunta en cuestión es: ¿De qué forma la Historia de las Matemáticas aporta en este cometido? y ¿qué objetivos se pueden perseguir con esta incorporación de la HM en la educación del profesor?

Investigadores como Guacaneme (2011), sostienen que la HM es una fuente de "herramientas" para los profesores de matemáticas, en tanto que favorecen el conocimiento del profesor de matemáticas, y su utilización en su quehacer docente. De esta manera le proporciona elementos como: una visión de la actividad matemática que subyace a la creación y comunicación de resultados matemáticos, además de la habilidad para reconocer las razones que guían la actividad matemática, como la influencia de factores sociales y culturales en este proceso; también le proporciona una habilidad para reconocer los problemas, las formas de representación y pensamiento, pero también las interrelaciones entre dominios numéricos que están relacionados con los objetos matemáticos que visualiza.

De acuerdo con esto, y como proponen investigadores como: Jones (1969) y Furinghetti (2007) la Historia de las Matemáticas como parte de la formación de profesores le permite a ellos una transformación de la visión y las creencias que sobre las matemáticas tienen, porque a través de ella se modifica la apreciación del mundo de las matemáticas y se desarrolla una apreciación de la importancia cultural de las matemáticas.

Finalmente el estudio de la HM promueve el desarrollo de competencias personales y profesionales que van más allá del propio conocimiento matemático, como lo son: el desarrollo de la sensibilidad, la tolerancia, y el respeto hacia formas no convencionales de expresar ideas o resolver problemas.

3. DISEÑO METODOLÓGICO

La metodología en la que se enmarca nuestro trabajo de tesis es de tipo documental-cualitativo; lo que quiere decir que tiene aspectos relacionados con estos dos tipos de metodologías. En cuanto a lo documental es debido al hecho que nuestras fuentes de información, y nuestros datos corresponden a los diferentes artículos de revistas, tesis, cartas y libros relacionados con la historia de los conceptos exponencial y logarítmico. Es cualitativa en cuanto a que nuestros datos no son cuantificables, sino que nuestras decisiones están mediadas por la subjetividad, que está ligada a nuestra parte humana, a nuestros gustos y creencias.

El diseño metodológico que orienta el desarrollo de nuestra propuesta de innovación consta de cuatro etapas, en las que se muestra el proceso seguido para concluir con la elaboración de tres herramientas didácticas, pensadas como un posible aporte al Conocimiento Pedagógico de Contenido del Profesor de Matemáticas. Las cuatro etapas se describen a continuación:

3.1 ETAPA 1: ORGANIZACIÓN Y CLASIFICACIÓN DOCUMENTAL

El objetivo de esta primera etapa consistió en la realización de una búsqueda documental sobre la historia de la función exponencial, que nos permitiera identificar momentos, etapas o hitos de su desarrollo histórico. La búsqueda fue realizada desde diferentes bases de datos especializadas en la historia de las matemáticas; como son: las revistas *Suma*, la revista *Journal of Mathematics Teacher Educatión*, la revista *Relime*, entre otras.

De esta forma la revista española *Suma* nos ofreció más de diez artículos en español relacionados con la función exponencial. Los artículos encontrados nos ofrecieron diferentes perspectivas; algunas relacionadas con situaciones cotidianas, desde sus aplicaciones, y el uso que se le da al componente histórico como un facilitador de la enseñanza de dicho concepto. Por su lado, la revista *Journal of Mathematics Teacher Education*, nos ofreció una variada gama de documentos relacionados principalmente con la Educación Matemática y a las características del concepto. La revista *Relime* se ocupa de la didáctica de las matemáticas, desde el enfoque socio-epistemológico donde se reconoce la influencia del contexto cultural dentro la constitución de los objetos matemáticos.

Debido a la gran cantidad de documentos encontrados en relación con la función exponencial, se hizo necesaria una primera fase de clasificación documental, en cuatro grandes grupos. En el primero grupo se ubicaron los documentos relacionados con la Didáctica (D); en el segundo, los documentos relacionados con la Historia y sus usos didácticos (H y D); en el tercero, los documentos Históricos (H); y en el último grupo, los relacionados con el campo de investigación: Formación del Profesor de Matemáticas (FP).

Después de la clasificación documental anterior, nos centramos en la identificación de aquellos posibles aportes de cada uno de los documentos a la elaboración de nuestra herramienta didáctica. Para lo cual hicimos un reconocimiento de la macro-estructura de cada documento, mediante la observación de sus tablas de contenido, los niveles de título, la introducción, el prólogo, las conclusiones finales, y en algunos casos el resumen ofrecido desde las diferentes revistas especializadas, donde fueron ubicados.

A continuación, presentamos un ejemplo de la primera fase de clasificación documental:

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA	D	H y D	H	F P	UBICACIÓN	OBSERVACIONES
Sirvent J. (2003). *Sonidos, fracciones, medias, potencias y funciones exponenciales*, Suma pág 44.	X	X			Revista Suma	Se utilizan inicialmente potencias naturales, racionales y proporciones para explicar la construcción de la escala musical pitagórica.

Tabla 4. Organización y clasificación documental.

Este instrumento nos ofrece: el referente bibliográfico, la fuente de donde se obtuvo el documento, su respectiva clasificación en cada uno de los cuatro grupos documentales, y una breve descripción del contenido del documento, como posible potencial a la elaboración de nuestra herramienta didáctica.

A partir de este momento, iniciamos una segunda fase del análisis documental. En esta fase consideramos esencial la apropiación de la historia de la función exponencial, por parte de los investigadores; por lo cual, decidimos centrar nuestra atención en el siguiente grupo de doce documentos: *Exponental functions, rates of change, and the multiplicative unit*, Confrey & Smith,1994; *la sensibilité à la contradiction : logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe*, Cantoral & Farfán, 2004; *Epistemología del concepto de función logarítmica*, Cantoral, Farfán, Hitt & Rigo,1987; *Investigating teachers' experiences with the history of logarithms: a collection of five case studies*, Clark, 2006; *The Story of a number e*, Maor, 1994; *Descomposición genética de la función exponencial: Mecanismos de construcción*, Vargas, 2011; *Historia de los logaritmos*, Tapia, 2003; *Revisiting the History of Logarithms*, Fauvel, 1995; *Napier´s Logarithms Adapted for Today Classroom*, Katz, 1995; *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logarítmo*, Ferrari, 2001; *L´histoire des Logarithmes*, Trompler, 2002; *Segmentos de la Historia: La Función Logarítmica*, Gonzalez & Vargas, 2007. El potencial de los demás grupos documentales, posiblemente nos aportará en el proceso del diseño final de la herramienta didáctica, por lo cual en esta etapa no se consideraron en detalle.

Desde nuestra revisión y análisis completo de cada uno de los documentos que pertenecen al grupo de documentos Históricos, percibimos que los diferentes autores coinciden en que el desarrollo histórico de la función exponencial está íntimamente ligado al desarrollo histórico de la función logarítmica, de tal forma que no es posible considerarlos de forma independiente. Por lo cual, de aquí en adelante, decidimos llevar a cabo el estudio de ambas funciones, siendo consecuentes con el proceso evolutivo de dichos conceptos. Es más, consideramos pertinente abordar el estudio desde el desarrollo histórico de los conceptos de lo exponencial y logarítmico, que son anteriores al mismo concepto de función; es decir, que de ellos surge posteriormente los conceptos de función logarítmica y exponencial.

En esta fase de análisis, nos propusimos la construcción de una versión de nuestra interpretación de la historia de los conceptos de lo logarítmico y exponencial. Para esto, tomamos como referente el documento de Cajori (1913), *History of the Exponential and*

Logarithmic Concepts, por el seguimiento minucioso y detallado que hace sobre la evolución de estos dos conceptos. Como hemos dicho anteriormente, este documento está compuesto por siete artículos, que tratan de la historia de los conceptos de lo exponencial y logaritmo, el cual fue publicado en la revista: *The American Mathematic Monthly*, editada por Mathematical Association of America. El motivo que nos impulsó a considerar este documento como base de nuestra revisión documental, es que además de mostrar de forma detallada los diferentes momentos de evolución de los conceptos, Cajori es reconocido por la seriedad y confiabilidad de sus trabajos, dentro de la comunidad matemática. De esta forma, los demás documentos considerados dentro del grupo Históricos aportaron a la ampliación de algunos aspectos e ideas referidos en el documento base.

Durante la elaboración de nuestra versión de la interpretación de la historia de los conceptos de exponencial y logarítmico, apreciamos cómo diferentes autores concuerdan en el proceso que se dio en la evolución y desarrollo de los conceptos. Igualmente percibimos algunas ideas trascendentales que marcaron el proceso evolutivo de dichos conceptos, las cuales nos permitieron definir seis Hitos Históricos que son: Relación entre conceptos, Sistemas de representación de los logaritmos, Factores sociales, Discusiones e Intentos Fallidos, Formas de notación de lo exponencial y lo logarítmico, y Refinamientos y Generalizaciones. Entendemos como Hitos Históricos aquellas ideas transcendentales que se dieron durante la evolución y el desarrollo de los conceptos de exponencial y logaritmo; estos a su vez sean constituido en nuestras unidades de análisis.

3.2 ETAPA 2: DESCRIPCIÓN DEL CAMPO CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

En esta etapa iniciamos con una caracterización de lo que actualmente se conoce como el campo de investigación Formación del Profesor de Matemáticas, con el objetivo de ubicar nuestro trabajo de investigación en dicho campo. Como resultado de esta caracterización encontramos que las investigaciones giran en torno a los siguientes aspectos: conocimiento de la disciplina, conocimiento didáctico, conocimiento pedagógico, conocimiento del currículo, conocimiento de las herramientas, conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores institucionales.

De acuerdo con lo anterior, ubicamos nuestro trabajo de grado en el componente de Conocimiento Didáctico de Contenido, CDC, del profesor de matemáticas, que recoge fundamentalmente el conocimiento disciplinar, el didáctico y el pedagógico. Posteriormente, para caracterizar el CDC recurrimos al trabajo doctoral de Pinto (2010), en el cual él hace un seguimiento detallado de la evolución que ha tenido este concepto, desde que fue enunciado por primera vez por Shulman en 1986. A partir de este momento, el mismo Shulman junto con sus colaboradores y otros autores, han venido introduciendo modificaciones que han propendido en su ampliación del CDC; de lo cual Pinto, en su tesis doctoral, hace un reporte de dicho proceso. Finalmente, Pinto (2010) hace su propia descripción del CDC, identificando tres componentes principales, los cuales a su vez constan de tres categorías, y cada una de estas categorías es descrita por diferentes asuntos que la caracterizan. Esta versión del CDC ofrecida por Pinto (2010) se constituye en nuestro referente para el análisis de la historia de lo exponencial y logarítmico en relación con los componentes, categorías y asuntos propuestos en él. Debido a que consideramos que la descripción del CDC propuesta por Pinto (2010) corresponde a una versión actualizada, con un alto grado de fineza en cuanto a la descripción; por lo cual, la hemos asumido como nuestro referente teórico para el análisis de los diferentes documentos históricos, determinando cómo estos aportan al CDC del profesor de matemáticas

Inicialmente, hicimos una aproximación intuitiva sobre los posibles aportes de la historia, de los conceptos exponencial y logarítmico, al CDC del profesor de matemáticas desde los componentes, categorías y asuntos sugeridas por Pinto (2010). Posteriormente, fue necesario realizar una segunda revisión más minuciosa, debido a que cada asunto recogía más de una idea; por lo cual, en esta primera aproximación se cae en la reiteración de las mismas ideas en correspondencia con diferentes asuntos. Esta situación surgió en principio debido a que no nos percatamos de que la diferencia entre algunos asuntos es muy sutil y algunos de ellos se traslapan.

Para dar solución a esta situación fue necesario llevar a cabo un desglose de cada uno de los asuntos en sus diferentes ideas, con el objetivo de ubicar de la forma más precisa posible, el aporte de la historia a cada uno de los asuntos. A continuación mostramos una matriz hecha en Excel, que contribuyó a la organización y mejor visualización de la información.

En la primera columna hacemos referencia a la numeración del componente, las categorías y asuntos. En la segunda columna se identifica con color azul cada uno de los tres componentes del CDC propuestos por Pinto (2010); en rojo se identifican cada una de las categorías que conforman dicho componente, con viñetas, de punto, cada uno de los asuntos que conforma las diferentes categorías; en la tercera columna se muestra el desglose de cada asunto en sus diferentes ideas y en la cuarta la relación atribuida entre cada uno de los asuntos con la historia de los conceptos de lo exponencial y logarítmico.

1.	**COMPONENTES DEL CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARITMICA A ENSEÑAR**	**IDEAS DEL ASUNTO**	**APORTES DE FORMA GENERAL**
a	CONOCIMIENTO SOBRE LA ACTIVIDAD MATEMATICA GENERAL		
1.	**_Conocimiento de la historia de la función exponencial y logarítmica_**, evolución, principales problemas y cambios en las nociones o conceptos, *la naturaleza de las explicaciones, de la heurística y de los valores histórico-filosóficos,*	Evolución	La evolución de los conceptos de logaritmo y exponencial fue un proceso de muchos años y que vinculó el trabajo de muchos matemáticos, lo que indica que no se dio de la noche a la mañana. *Aunque se observó un trabajo en comunidad, este no fue necesariamente colectivo y articulado.
1.2		Principales problemas	La actividad matemática basó su desarrollo inicialmente en los problemas sociales, más tarde se enfoca hacia la necesidad de buscar sustento teórico a las afirmaciones conceptuales y la extensión del concepto a otros dominios numéricos. Igualmente, se evidencia problemas que dificultaron la

			actividad matemática como: la carencia de una comunicación adecuada, en cuanto a la definición de los conceptos.
13		Cambios en las nociones o conceptos	.* La actividad matemática produce cambios de significado en las nociones y conceptos.* Un concepto no tiene una linealidad en tiempo de construcción, además esta construcción no es única de la matemática(exclusiva de los matemáticos), trabajos que en su momentos no fueron valorados, tiempo después fueron retomados con gran ventaja.* La historia muestra que los concepto matemáticos no son estáticos, sino que evolucionan, tampoco están determinados a un solo contexto.* Un caso especial fue Grave se retractó una definición que había publicado, por considerarlo como erronea.* Discusiones
14		La naturaleza de las explicaciones y Heurística de la función logarítmica y exponencial	*La naturaleza de las explicaciones: eran en el sentido geométrico, mediante la creación de diferentes sistemas de representaciones, lo numérico, Arquímedes, Stifel, Chuquet; lo analítico, Euler, Cauchy, Riemann *Heurística: diferentes formas de abordar los problemas (Napier, pragmático, intuitivo, empírico; Euler, racional).* Las explicaciones tenía que responder a la solución de problemas reales y a su aplicación.
1. 5		Valores históricos filosóficos	* Los valores históricos reflejados en la tenacidad de las matemáticos en la continuación de sus trabajos tanto de forma individual como en comunidad.*La nacionalidad influyó en la actividad matemática misma, porque marcar líneas y parámetros de trabajo acordes al grupo del país * El no reconocimiento por parte de la comunidad matemática de aquellos trabajos que no dan un resultado positivo, pero que fueron la base de aporte de algunos elementos que fueron considerados para el desarrollo de teorías posteriores.

Tabla 5. Matriz que permite ver la relación entre el CDC y la historia.

Este mismo proceso fue llevado a cabo para cada uno de los tres componentes del CDC, para cada una de sus categorías y asuntos. El resultado final de esta matriz se muestra en el anexo 3.

3.3 ETAPA 3: DESCRIPCIÓN DE LAS HERRAMIENTAS

Para la descripción de las diferentes Herramientas Didácticas, que son de uso común entre los profesores de matemáticas, recurrimos a lo reportado en *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*, en su segundo volumen titulado: Herramientas y Procesos en la Educación de Profesores de Matemáticas (*Tools and Processes in Mathematics Teacher Education*) publicado por Tirosh y Wood (2008).

En el *Handbook* se reportan doce de las herramientas que actualmente son de uso común en la formación de profesores de matemáticas. Estas herramientas didácticas son un medio a través de cual circula parte del conocimiento didáctico conducente a la formación de los futuros profesores de matemáticas. Nuestro objetivo inicialmente fue hacer un reconocimiento de las diferentes características de cada una de las herramientas didácticas, para luego poder hacer una la elección de aquella que respondiera de la mejor manera a nuestros intereses de diseño de unas herramientas didácticas que integraran los Hitos Históricos y el CDC.

De acuerdo con la descripción realizada de las Herramientas Didácticas (ver apartado 2.2) seleccionamos la herramienta conocida como "Tareas", por permitirnos, a nuestro juicio, una mejor conexión entre el Conocimiento Pedagógico de Contenido referido por Pinto (2010) y los Hitos Históricos. Esta Herramienta conocida como Tareas nos ofrece gran versatilidad; además la herramienta didáctica Ejemplos se constituye en un ejemplo de Tareas. Esto quiere decir que la herramienta Tareas es más general que la herramienta ejemplos; en este sentido las herramientas que hemos diseñado se constituyen también en ejemplos. La primera tarea ejemplifica las posibles relaciones que se pueden establecer entre los conceptos de potenciación, radicación, logaritmación, a través de la relación entre las sucesiones aritmética y geométrica. La segunda tarea ejemplifica la relación del área bajo la curva de la hipérbola equilátera con el logaritmo natural. La tercera tarea ejemplifica la actividad matemática alrededor de las notaciones de los conceptos de exponencial y logarítmico.

3.4 ETAPA 4: DISEÑO DE LAS HERRAMIENTAS DIDÁCTICAS

Esta última etapa se estructura como producto de las tres etapas anteriores. Así, el diseño de las **Herramientas Didácticas** se llevó a cabo mediante el diseño de tareas que permitieron relacionar la historia de los conceptos de lo exponencial y logaritmo, con los componentes, categorías y asuntos del CDC, sugeridos por Pinto (2010) y los Hitos Históricos.

Por lo anterior, llegamos a la decisión de elaborar tres tareas, propuestas como ejemplos de estrategias instruccionales que pueden aportar al conocimiento del profesor de matemáticas, estas tienen que ver principalmente con los primeros dos componentes del CDC, en los cuales se ubican los Hitos Históricos: Relación entre Conceptos, Sistemas de Representación de los logaritmos y Formas de Notación de lo Exponencial y Logarítmico. Esta decisión obedeció principalmente a la existencia de una mayor afinidad entre la historia de los conceptos de lo exponencial y logarítmico, con los dos primeros componentes del CDC (ver apartado 4.4).

El proceso de elaboración de cada uno de las tareas se inició con una propuesta inicial que fue desarrollada de forma independiente por cada uno de los investigadores. Después dicha propuesta fue evaluada por los demás investigadores que no participaron en su elaboración, con el propósito de aportar ideas conducentes a afinar cada uno de las tareas. Con esto se pretendió comprobar que las secuencias utilizadas en la elaboración de las tareas fuera lo suficientemente claras, y respondieran a su finalidad de permitir la apropiación de las mismas, por parte del profesor de matemáticas. Una vez terminada este proceso obtuvimos una segunda versión mejorada de cada una de las Tareas.

Después de contar con una segunda versión de las Tareas, se llevó a cabo la socialización de estas, con la presencia de los investigadores que contribuyeron en su elaboración. En este momento se inquirió con mayor precisión sobre la intención que tenía cada secuencia, cotejando de esta forma sí ésta correspondía con la idea inicial para la cual fue diseñada, o por el contrario, se prestaba para segundas interpretaciones. Este proceso permitió que surgieran nuevos aportes tendientes a afinar cada una de las Tareas. Seguidamente se hizo la socialización de cada una de estas Tareas con nuestro asesor; quien dio sugerencias y recomendaciones importantes sobre el potencial de cada una de las mismas, y las ventajas que ofrecería la futura implementación de estas herramientas didácticas en la educación de los profesores de matemáticas.

Después de este proceso de mejoramiento de cada una de las Tareas, decidimos introducir un análisis de cada uno de ellos, con el propósito de poner en evidencia las diferentes relaciones halladas a lo largo de este trabajo de investigación, y que permiten vincular la historia de los conceptos exponencial y logaritmo con el CDC del profesor de matemáticas.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La revisión documental, en sus inicios, persiguió el acopio de documentos históricos de la función exponencial y logarítmica en diversas fuentes virtuales, que nos permitió el acceso a diferentes revistas, artículos, libros, tesis, entre otros.

Posteriormente, se hizo una descripción de cada uno de los documentos, para determinar los elementos que aportaban a la construcción de la herramienta didáctica. Con base en la descripción anterior, encontramos que los documentos se podían clasificar en cuatro grupos, de acuerdo al enfoque de la historia, la forma de presentarla, o el sentido de uso que se le da; así, los clasificamos en documentos históricos, documentos que mezclan la historia y la didáctica, documentos didácticos y los relacionados con el campo de investigación de formación del profesor. Finalmente, para nuestra versión de la interpretación de la historia nos enfocamos principalmente en los libros con contenido histórico de la función exponencial y logarítmica.

4.1 CONSTRUCCIÓN DE NUESTRA INTERPRETACIÓN DE LA HISTORIA DE LOS CONCEPTOS DE LO LOGARÍTMICO Y EXPONENCIAL CON BASE EN LA REVISIÓN DOCUMENTAL

El proceso de apropiación de la historia de lo logarítmico y exponencial surge como producto de nuestra revisión documental hecha al grupo de documentos históricos. Al decir nuestra interpretación de la historia, no queremos significar que hayamos llevado a cabo la escritura de un documento histórico sobre los conceptos en cuestión, si más bien, queremos mostrar al lector, la versión de la historia sobre la cual se fundamenta la escritura de los Hitos Históricos, y que es nuestra por motivos de elección, y en preferencia de las demás.

En el anexo 4, mostramos la traducción de los siete artículos de Cajori (1913) sobre la historia de los conceptos de lo exponencial y logarítmico; la cual, en cierto momento hizo parte del cuerpo de este trabajo. Decidimos colocarla como anexo para facilitar la consulta de los colegas que se interesen en esta información. De igual forma, queremos dejar en claro, que esta traducción es una aproximación a las ideas del autor, como producto de nuestra interpretación hecha al documento original en inglés, no es publicable y no persigue ningún interés comercial.

Como lo hemos expresado antes nuestra construcción de la interpretación de la historia de los conceptos de exponencial y logarítmico tuvo como eje guía los siete documentos de Cajori (1913). Para la organización del desarrollo evolutivo de los conceptos se mantuvo la estructura utilizada por Cajori (1913). Esta estructura consiste en siete documentos, organizados en cinco momentos históricos distribuidos en el siguiente orden: (1) Desde Napier (1550-1617) hasta Leibniz (1646-1716) y John Bernoulli I (1667-1748), comprendido entre los años 1614-1712, donde se dan los trabajos referentes a los logaritmos de números positivos, y la notación moderna de exponencial. (2) Desde Leibniz y John Bernoulli I hasta Euler (1707-1783), comprendido entre 1712-1747, donde se muestran los intentos fallidos por encontrar una teoría de logaritmos para números negativos, igualmente cómo se produjo la unión entre el concepto de exponencial y logaritmo. (3)La creación de una teoría de logaritmos para los números complejos lleva a cabo por Euler, entre 1747-1749. (4) Desde Euler hasta Wessel y Argand, entre 1749 hasta cerca de 1800, donde se muestra las discusiones estériles que se dieron sobre los logaritmos, durante medio siglo; igualmente cómo se produce en esta época la unión entre los conceptos de exponencial y logaritmo. (5) Refinamientos y generalizaciones que se dieron durante el siglo XIX, los cuales fueron motivados por los siguientes hechos: la representación gráfica, la potencia general y el logaritmo, la uniformización, la clasificación de los sistemas logarítmicos, y los logaritmos como funciones directas.

Para la ampliación de algunas de las ideas de los documentos de Cajori (1913), en especial aquellas que hacen referencia a cada uno de los Hitos Históricos, fue necesario el uso de los otros documentos correspondientes al grupo de históricos (ver apartado 4.3). Las ideas constitutivas de los Hitos Históricos, son ideas relevantes o fundamentales, y comunes a la mayoría de los autores estudiados; y que desde nuestra perspectiva de trabajo de tesis consideramos como importantes por aportar elementos al diseño de nuestras herramientas didácticas, y al CDC del profesor de matemáticas.

4.2 RECONOCIMIENTO DE HITOS EN LA HISTORIA DE LOS CONCEPTOS LOGARITMO Y EXPONENCIAL

Este apartado consiste en el análisis e identificación de los Hitos Históricos relacionados con la evolución de los conceptos de logaritmo y exponencial, con base en el texto de Cajori (1913). Estos Hitos están constituidos por ideas trascendentales, que marcaron el proceso evolutivo de los conceptos logaritmo y exponencial. Se encontrará que algunas de estas ideas se refuerzan en algunos casos y en otros se contraponen, ayudando a precisar aspectos relevantes de esta historia. Finalmente estos Hitos aportarán al diseño de unas herramientas didácticas que posiblemente aporten al fortalecimiento del CDC de los profesores de matemáticas.

Como hipótesis de nuestro trabajo, consideramos que el desarrollo histórico de los conceptos de logaritmo y exponencial, aportan y fortalecen el CDC del profesor de matemáticas. Para el desarrollo de la hipótesis hemos considerado los siguientes Hitos Históricos: (1) Relación entre conceptos. (2) Sistemas de representación de los logaritmos (3) Factores sociales (4) Discusiones e intentos fallidos (5) Formas de notación exponencial y (6) Refinamientos y generalizaciones. La línea de separación entre estos hitos no es muy clara, ya que estos se traslapan unos con otros.

A continuación describimos cada uno de estos Hitos Históricos, destacando las ideas principales en relación con la historia de los conceptos logaritmo y exponencial. Una descripción de los posibles aportes de cada uno de estos Hitos Históricos al CDC del profesor de matemáticas es llevada a cabo en el apartado 4.2, utilizando la estructura del CDC planteada por Pinto (2010).

4.2.1. Relación entre conceptos

La revisión de los documentos históricos nos permitió identificar el vínculo existente entre varios conceptos matemáticos; aspecto que generalmente durante su enseñanza no es reconocido claramente, en este sentido consideramos que la apropiación de estos elementos históricos podría cambiar la forma como el profesor de matemáticas lleva a cabo la actividad matemática.

En el desarrollo histórico de los conceptos de logaritmo y exponencial, podemos observar que existe una estrecha relación en la forma como se desarrollan los siguientes conceptos matemáticos: sucesiones aritméticas y geométricas; las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y radicación; teoría de potencias, teoría de logaritmos, e integración. Estas relaciones mencionadas anteriormente, no se dieron todas al mismo tiempo, sino que fueron surgiendo a medida que las teorías sobre logaritmos y exponentes y se consolidaban con el pasar del tiempo.

En primer lugar, hablaremos de la relación existente entre las sucesiones aritméticas y geométricas, con respecto a las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación. Al parecer los precursores de esta idea fueron Arquímedes (287-212 A.C.) y Stifel (1487-1567) y más tarde Napier en 1614 citado en Tapia (2003). Aunque los dos primeros establecieron una relación entre los términos de las sucesiones, es Napier, quien finalmente le encuentra un uso, consistente en facilitar los cálculos con números grandes. Para comprender mejor su utilidad, expondremos un ejemplo para explicar su forma de operar:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Tabla 6. Progresión aritmética y geométrica

Las relaciones que queremos presentar son explicadas por Tapia (2003) como sigue:

> “La adición en la sucesión aritmética corresponde a la multiplicación en la geométrica, lo mismo que la sustracción en aquélla corresponde a la división en ésta. La simple multiplicación en la sucesión aritmética, corresponde a la multiplicación por sí mismo, potenciación, en la geométrica; y la división en la primera corresponde a la extracción de la raíz en la segunda, algo así como la división por dos, corresponde a la extracción de la raíz cuadrada". Por ejemplo, si se tuviera que multiplicar 2 por 16, sólo se tendría que sumar los números de la sucesión aritmética que se hallan encima de éstos, es decir, 1 y 4, obteniéndose 5. Debajo de éste encontramos el número 32 de la sucesión geométrica, que es el resultado de la multiplicación. Para efectuar una división se realiza una sustracción. Así, 256 dividido 32, se hace $8 - 5 = 3$, debajo del cual se ve el número 8, que es el resultado de la división. La potenciación, llamada por Stifel "multiplicación por sí mismo", se efectúa por la suma "consigo mismo" del correspondiente número aritmético. Es decir, para hacer 64 se suma tres veces el número 2, que es el correspondiente en la sucesión aritmética al número 4. O sea, $2 + 2 + 2 = 6$ o, debajo del cual encontramos el 64, lo que significa que este número es el cubo de 4. La radicación se obtiene mediante la división. Así, la raíz cúbica de 64, se obtiene dividiendo al número 6, que es el correspondiente número aritmético de 64, por 3. Es decir, $6 \div 3 = 2$, debajo del cual encontramos el 4.” (Tapia, 2003, p. 7)

De este primer sistema de representación Napier da una primera definición de logaritmo: “son números que corresponden a números proporcionales que tienen iguales diferencias. Los números proporcionales son los términos de la progresión geométrica; los números que tienen diferencias iguales son los términos de la progresión aritmética” (Cajori, 1913, p. 7).

Ahora bien, ¿cómo se puede reconocer el concepto de logaritmo desde la relación antes mostrada, entre las sucesiones aritméticas y geométricas?

Actualmente el logaritmo de un número, en una base determinada, consiste en el exponente al cual se debe elevar la base para obtener dicho número. Como sabemos la progresión geométrica es aquella cuya razón entre los términos sucesivos de esta permanece constante, de tal forma que se obtiene el siguiente término multiplicando por dicha razón. Mientras que una progresión aritmética es aquella cuya diferencia entre dos términos sucesivos es siempre constante; este valor constante se conoce como la diferencia de la sucesión.

Si observamos la sucesión geométrica usada como ejemplo podemos ver que la razón corresponde al número dos, de tal forma que los términos de la sucesión aritmética corresponden a los logaritmos de los términos de la sucesión geométrica. Veámoslo de forma general:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$

Tabla 7. Visualización de exponentes de la sucesión geométrica

Como ya lo mencionamos antes, fue Napier quien vio la construcción de los logaritmos como un ahorro de trabajo que facilitaría los cálculos tediosos con números muy grandes, mediante la relación existente entre los términos de la progresión aritmética y geométrica. La historia nos muestra que ésta relación ya había sido encontrada, por Arquímedes y Stifel, aunque era vista como una “curiosidad”, sin uso general. Para explicar lo anterior, supongamos que necesitamos calcular 3×5 con el uso de la tabla 1; entonces, inmediatamente evidenciamos que no es posible en esta tabla, puesto que los números que vamos a multiplicar deben pertenecer a la sucesión geométrica; de igual forma, podemos advertir que son más los números que quedan por fuera de la sucesión geométrica, que los que pertenecen a esta; por lo tanto, su uso como herramienta para facilitar los cálculos era débil. Napier observó que este problema tenía solución, en la medida que pudiera encontrar una base adecuada para la progresión geométrica, de tal forma que los saltos entre término y término no fueran tan grandes, lo que al final permitiría los cálculos con la mayoría de los números usados en ese momento en problemas de astronomía, navegación y economía. Otro problema que tuvo que solucionar Napier, fue el relacionado con la continuidad de la función logaritmo; lo que resolvió mediante una representación basada en puntos en movimiento.

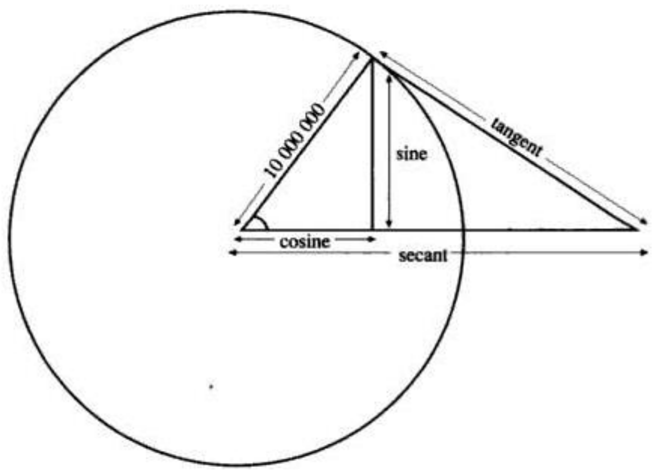
Clark (2006) por su lado afirma que las primeras técnicas utilizadas fueron de tipo trigonométrico; las cuales consistían en transformar las multiplicaciones entre funciones trigonométricas en sumas y restas. Un proceso que no solo permitía reducir el trabajo asociado con los cálculos astronómicos, sino que también reducía el error. Por su lado Martínez (2000) afirma que la idea de la relación entre la sucesión aritmética y la geométrica para efectuar la multiplicación entre monomios fue utilizada, de acuerdo con Meavilla, 1993, citado en Martínez (2000), por diversos algebristas del siglo XVI: Esteban de la Roche (1520), Christoph Rudolff (1526), Petrus Apianus (1527), Gemma Frisius (1540) y Michel Stifel (1544).

Henry Briggs(1561-1630) fue el primero en construir las tablas logarítmicas en base 10, en el año 1631, en su obra *Logarithmall Arithmetike*, donde también explica el objetivo de la invención de los logaritmos: "*Los logaritmos son números inventados para resolver más fácilmente los problemas de aritmética y geometría... Con ellos se evitan todas las molestias de las multiplicaciones y de las divisiones; de manera que, en lugar de multiplicaciones, se hacen solamente adiciones, y en lugar de divisiones se hacen sustracciones. La laboriosa operación de extraer raíces, tan poco grata, se efectúa con suma facilidad... En una palabra, con los logaritmos se resuelven con la mayor sencillez y comodidad todos los problemas, no sólo de aritmética y geometría, sino también de astronomía*." (Tapia, 2003, p. 6).

Otro ejemplo que permite ver cómo las multiplicaciones son cambiadas por sumas y resta, es referido por Clark (2006) y se le conoce como el método de Ibn Yunus, el cual establece que:

$$2cosxcosy = cos\,(x + y) + cos\,(x - y).$$

A este método también se le conoció con el nombre de *Prosthaphaeresis*, una palabra griega que significa "adición y sustracción". En la segunda mitad del S. XVI, Francois Viéte (1540-1603) utilizando la misma idea obtuvo:



Gráfica 1. Prosthaphaeresis. Tomado de Fauvel, 1995, p. 43

$$2sinxcosy = sin(x + y) + sin(x - y)$$
$$2cosxsiny = sin(x + y) - sin(x - y)$$
$$2sinxsiny = cos(x - y) - cos(x + y).$$

Otras fórmulas equivalentes que involucran cocientes, fueron también desarrolladas usando las funciones secante y cosecante.

Estas ideas y relaciones expuestas anteriormente, entre los términos de las sucesiones aritmética y geométrica, vienen a contribuir al desarrollo de la teoría de potencias. Así, ahora es más fácil encontrar sentido a las propiedades para la potenciación y logaritmación:

$$log\ a + log\ b = log\ ab$$

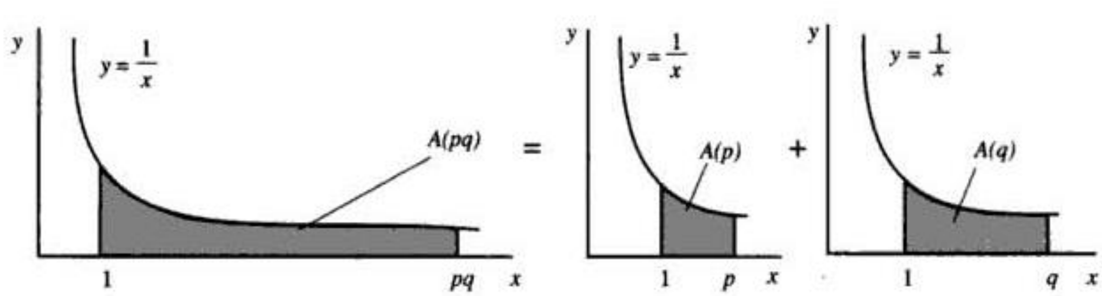
$$log\ a - log\ b = log\ a/b$$

$$log\ a^m = m\ log\ a$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n/_{a^m} = a^{n-m}$$

Otra relación importante en la historia es la que se presenta entre la función $A(x)$ definida como el área bajo la curva $y = 1/x$, desde 1 hasta x, la cual satisface la propiedad básica logarítmica: $A(pq) = A(p) + A(q)$, aproximando al área bajo la curva de A usando sumas apropiadas de rectángulos Katz & Fauvel (1995). Este enfoque geométrico de la relación entre el área bajo esta curva y el logaritmo natural de un número se desarrolla a partir de estudios iniciales hechos al problema por Euler en 1640, y posteriormente por Saint-Vincent (1584-1667) y Sarasa (1618-1667) hacia mediados del mismo S. XVII (ver detalles más adelante en apartado 5.2). Esta relación nos permite vincular los conceptos de las series aritmética y geométrica con el cálculo infinitesimal, desde una perspectiva geométrica basada en el cálculo del área bajo la curva de la hipérbola equilátera en un intervalo dado, como se muestra inicialmente en esta gráfica, pero también establece una nueva aproximación al concepto de logaritmo, dando otros significados al concepto y otras conexiones del mismo con diversas ramas de las matemáticas como por ejemplo: la geometría, la teoría de números y el cálculo infinitesimal.



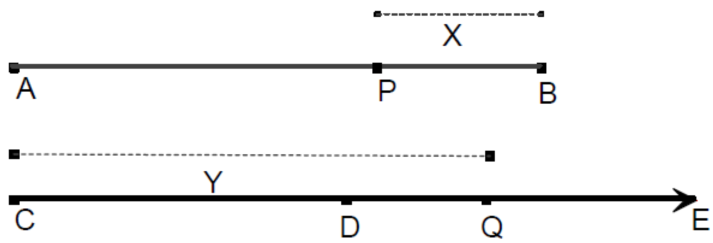
Gráfica 2. Integral del área Hiperbólica. Tomado de Fauvel, 1995, p. 45.

4.2.2. Sistemas de representación de los logaritmos

El desarrollo histórico de los conceptos logaritmo y exponencial fue fortalecido gracias a los diferentes sistemas de representación que de ellos se hicieron. Entre los sistemas de representación llevados a cabo, podemos mencionar en primer lugar los de sus inventores Napier y Bürgi(1552-1632): (1) consistente en puntos en movimiento. (2) la relación entre sucesiones aritméticas y geométricas. También están los sistemas de representación que surgieron a raíz del desarrollo del concepto de logaritmo de un número negativo, los cuales consistieron en construcciones geométricas en coordenadas rectangulares, polares y plano complejo. Entre estos encontramos el desarrollado por Bernoulli, la espiral logarítmica y el diagrama de Wessel (1745-1818) y Argand (1768-1822).

La historia nos muestra que Napier utilizó dos formas diferentes para representar un logaritmo. El primero se basó en puntos en movimiento, que tuvo el gran acierto de mostrar la continuidad de los logaritmos como función. El segundo sistema consistente en la relación existente entre los términos de la sucesión aritmética y geométrica, expuesto anteriormente dentro del Hito de Relación entre Conceptos; y cuya idea principal de representación es muy cercano a la utilizada por Bürgi, por lo cual aquí solo haremos referencia la primera representación, como sigue:

Sea el segmento AB y una semirecta CDE dados en la figura 1. Sea un punto P que parte de A y se mueve a lo largo de AB con velocidad variable que decrece en proporción a su distancia B; supongamos que un punto Q parte al mismo tiempo de C y se mueve a lo largo de la semirrecta CDE con velocidad uniforme igual a la velocidad inicial del punto P; entonces Napier llama a la distancia variable CQ el logaritmo de la distancia PB. (Vargas, 2011, p. 134)

- 

Gráfica 3.

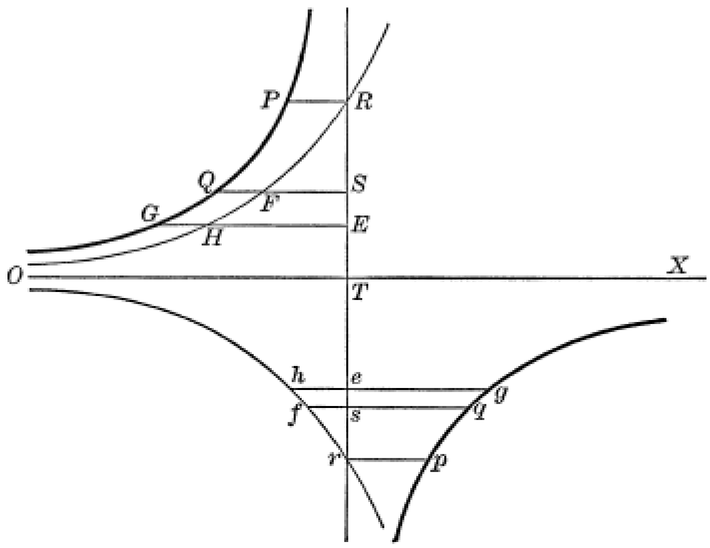
Representación del logaritmo dada por Napier, sobre puntos en movimiento. Tomado de Vargas, 2007, p. 134

Con base en la representación anterior Napier da la siguiente definición de logaritmo:

"El logaritmo de un seno dado es el número que se ha incrementado aritméticamente de forma constante con la misma velocidad como aquella con la cual el radio comenzó a decrecer geométricamente, y al mismo tiempo como el radio ha decrecido al seno dado" (Cajori, 1913, pág. 7)

Otra representación fue planteada por Bernoulli en 1712, quien desarrolla una representación geométrica, mediante la que explica el logaritmo de un número negativo. La representación es como sigue:

Sea la hipérbola rectangular $PQGpqg$ y sea SF y EH proporcionales a las áreas de la hipérbola $RSQP$ y $REGP$. Sea PR y GE constantes y FS una variable. Así S toca T, FS es infinito y el área infinita. Ahora manteniendo la misma ley de generalización de la curva RFH, donde el punto S procedente de e.

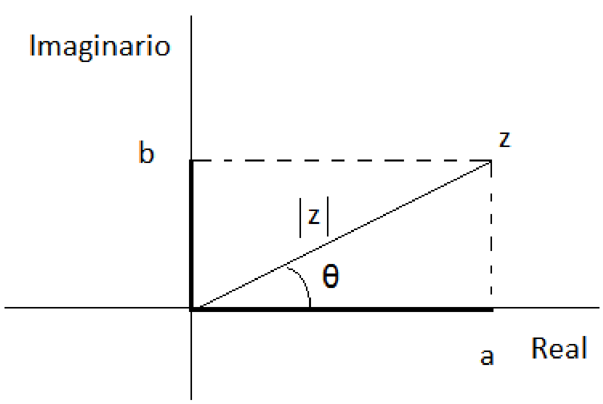


Gráfica 4.

Representación del logaritmo de número negativos, dada por Bernoulli. Tomado de Cajori, 1913, p. 41.

El área sobre Re es parcialmente $+$ y parcialmente $-$ e igual a EP, cuando $TE = Te$. Tenemos entonces $EH = eh$. Similarmente, si $Ts = TS$, entonces $sf = SF$. Así surge la rama hfr que, con HFR, constituye una curva logarítmica, así las dos ramas de la hipérbola constituye una curva. *Si* $TR = +1, Tr = -1, TS = +n, Ts = -n$, entonces $SF = log\, n$, $sf = log\,(-n)$. Como $SF = sf$, debemos obtener que $log\, n = log\,(-n)$ (Cajori, 1913, p. 41).

En cuanto a los sistemas de representación gráfica relacionados con los logaritmos de números negativos y complejos se destaca el diagrama de Wessel y Argand que permitió la representación de los imaginarios. Este diagrama consiste en un plano cartesiano, donde en el eje horizontal se ubican los números reales, y en el eje vertical se ubican las cantidades imaginarias.



Gráfica 5. Representación del Plano complejo de Wessel y Argand.

Este diagrama es utilizado por diferentes matemáticos para desarrollar sus ideas referentes al desarrollo de los logaritmos y los exponentes: John Warren (1753-1815) y H. Durege, intentaron representar los diferentes valores de una misma potencia; Karsten W.J.G.(1732-1787) concentró sus esfuerzos en la representación gráfica de los logaritmos imaginarios; por su parte John Wallis propuso diferentes esquemas en la representación de los logaritmos, ninguno de los cuales visualizaba la suma de vectores. Un matemático que lo utilizó acertadamente fue Bernhard Riemann (1826-1866), quien utiliza el esquema de Wessel y Argand para hacer una representación geométrica que le permitiera evitar la multiplicidad de valores de una función de variable compleja, este diagrama se constituyó en una herramienta que le permitió tratar a las funciones como si fueran uniformes; con ayuda de esta representación, Holzmüller también ilustró el significado geométrico de los múltiples valores del logaritmo, y la periodicidad de la función logarítmica, y conectó sus resultados con las superficies de Riemann, permitiéndole elaborar las propiedades de lo que él llamó "maravillosa espiral logarítmica". En este sentido, la representación gráfica de Wessel y Argand marcó un hecho importante hacia la comprensión de los números imaginarios, y permitió la representación gráfica de las curvas logarítmicas y exponenciales con base compleja. Este diagrama que inicialmente no fuera aceptado por la comunidad matemática, se constituyó en una herramienta fundamental para la matemática y específicamente para la teoría de números complejos.

La representación gráfica de Wessel y Argand marcó un hecho importante hacia la comprensión de los números imaginarios, puesto que permitió la representación gráfica de las curvas logarítmicas y exponenciales con base compleja. Finalmente el diagrama de Wessel y Argand es aceptado por la comunidad matemática que en su momento estaba dirigida por C.F. Gauss.

4.2.3. Factores sociales

Pudimos notar que el desarrollo de los logaritmos se dio en parte por factores sociales como la necesidad de facilitar los cálculos con números muy grandes que pudieran apoyar las tareas de navegación y astronomía. De igual forma, la construcción de las tablas logarítmicas apoyó el desarrollo del capitalismo financiero, por cuanto facilitó el cálculo de tasas de interés simple y compuesto de los préstamos realizados. Otro factor social que jugó un papel importante en la consolidación del concepto de logaritmo y exponencial fue la nacionalidad de los matemáticos, como una forma de identificarse con unos valores y unas costumbres propias. Estos factores sociales mediaron la producción matemática y el reconocimiento de la misma. Un ejemplo de lo anterior es la discusión entre los matemáticos Ingleses y los de la Europa Continental sobre la invención del Cálculo; lo que ocasionó que no existiera un trabajo conjunto que facilitara el desarrollo de las teorías en torno a los logaritmos.

Otro aspecto que se reconoce como factor social, es que la comunidad matemática no siempre fue abierta y receptiva a nuevas ideas. Un ejemplo se contempla cuando, el documento propuesto por Euler en 1749 no impacto en la comunidad de la época, entre algunos motivos por los que no fue aceptado fue el desconocimiento de los números imaginarios por parte de la comunidad.

De igual forma, el contexto cultural se constituyó en un factor importante que incidió en la manera en la cual se formaron las diferentes definiciones de los logaritmos y las herramientas utilizadas para estas definiciones. En el caso de Napier y Bürgi, quienes eran de profesión terrateniente y relojero respectivamente, buscaron darle una aplicación práctica a los conceptos; mientras que Euler, como profesor universitario le dio más importancia al desarrollo matemático y teórico de los conceptos.

Los procesos y las formas de validación que se dieron al interior de la comunidad matemática en relación con los términos y conceptos de logaritmo y exponencial, son factores que median la actividad matemática. Por ejemplo, en el proceso que se vivió con los logaritmos de números complejos y negativos, se puede reconocer los términos y conceptos utilizados para su definición, al igual que los elementos que hicieron parte de las nociones y conceptos, se identificó que existen procesos rigurosos de validación y otros que son más intuitivos, como en el caso de Euler, que se daba la oportunidad de producir argumentos sin la rigurosidad exigida por la comunidad, pero con grandes aportes para el avance matemático.

En este sentido, el desarrollo de las matemáticas es visto como un producto construido socialmente, que en parte responde a necesidades del entorno en el cual se originan los conceptos. Así una vez más, se confirma que la actividad matemática es una actividad social realizada en comunidad, en la cual el conocimiento es construido constantemente, y no es algo estático y acabado, si no que puede ser refutado o ampliado a través del desarrollo del conocimiento.

4.2.4. Discusiones e intentos fallidos

En la historia se evidencia el papel que juegan las discusiones e intentos fallidos sobre la teoría logarítmica y exponencial, realizados por muchos matemáticos de la época. En estas discusiones se observa un trabajo de crítica, que en algunos casos favoreció el desarrollo y en otros casos lo obscureció; de la misma manera los errores y dificultades contribuyeron al desarrollo de la actividad matemática, indicando los caminos que no conducían a la construcción de la teoría. Las discusiones y dificultades que se presentaron en la historia del desarrollo de los conceptos de logaritmo y exponencial permiten ver que dentro de la actividad matemática es normal que surjan trabajos que aportan al desarrollo de las teorías, y otros que no aportan o los retrasan. Un ejemplo son las controversias que se dieron entre Leibniz y Bernoulli, referente a la existencia de los logaritmos de números negativos, y más tarde retomados por D´Alembert y Euler. Estas discusiones impulsaron la investigación y el desarrollo matemático, debido a que la comunidad se involucró en el hallazgo de nuevas posibilidades, representaciones, conexiones entre objetos, y campos de investigación antes no contemplados.

A continuación presentamos algunos aspectos sobre los que se centraban las discusiones que se dieron en la comunidad matemática de la época, referentes a la comprensión de los números complejos, y a la teoría logarítmica y exponencial. Hemos elegido algunos asuntos de discusión que consideramos relevantes dentro de este Hito, que son los siguientes: (1) La dificultad para la comprensión del significado del logaritmo de números negativos y la naturaleza de la curva logarítmica y exponencial cuando tenía varias ramas, estas discusiones fueron dadas desde la época de Bernoulli, Lebniz, Euler hasta la época de Argand, Riemann y Cantor (1845-1918), en algunos caso se decía que real y en otro que significaba no existencia. (2) Las discusiones acerca del significado de los números imaginarios, su operatividad y representación gráfica al igual que su naturaleza fue un asunto que tuvo gran relevancia en la evolución de la teoría logarítmica y exponencial. (3) La dificultad particular, para comprender expresiones como $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$; esta dificultad para entender este tipo de expresiones generaba que matemáticos como Argand (1813) se aventuraran a expresar conjeturas sin demostraciones suficientes, como en este caso en la que él afirmaba que la expresión era irreducible a la forma $a + bi$, a pesar de que Euler había demostrado lo contrario. (4) La derivación de la fórmula de Euler para $log\, x$ y $\log(-x)$, en la que en 1823, Bouvier encontró que tanto el logaritmo como el anti-logaritmo tenía muchos valores; consideraciones que condujeron a terminar una de las grandes discusiones entre Euler y D´Alembert(1717-1783) acerca de la naturaleza de los logaritmos de cantidades negativas. (5) Las aparentes inconsistencias en las fórmulas de Euler. En 1823, algunos matemáticos como J.P.W. Stein (1796-1831) buscaban tratar de mostrar que las fórmulas de Euler eran incorrectas, lo que promovía el inicio de caminos inexplorados matemáticamente, sin embargo las nuevas propuestas no proporcionaban una teoría de logaritmos general, coherente y útil. (6) El problema sin resolver de la definición de ecuación completa e incompleta. Estas ecuaciones las trabajó Euler en su momento en un documento de 1749, pero al parecer no tuvo muy en cuenta la diferencia entre ecuación completa e incompleta, definición que finalmente es considerada por Martín Ohm (1792-1872), profesor en Berlín 1811. (7) La consideración de que en la expresión general de los logaritmos existían dos enteros arbitrarios e independientes, expuesta por Jhon Graves, él decía que no se limitaban a un entero como lo decía Euler. (8) Los progresos sobre las aplicaciones de los Logaritmos Eulerianos en ciertas ramas del análisis. En 1833 George Peacock (1791-1858), presentó su argumento de que los números negativos podrían tener logaritmos reales, hecho que contradecía la teoría de Euler. (9) Estudios independientes sobre la discusiones de la potencia general, $a^b = c$; en 1837 G.M. Pagani toma $A = \mu e^{\theta i}$, donde θ lo llama el argumento del determinante de A; en este estudio Pagani llegó a una conclusión errónea, por asumir que sus fórmulas eran más generales y precisas que las de Euler. También se presentaron discusiones acerca del tipo de notación que debía ser usado, como por ejemplo: (10) En la generalización de los logaritmos para bases periódicas y complejas, se produjo una fórmula de tal complejidad que no fue aprobada por la comunidad matemática, ya que su forma era demasiado complicada para la utilización general de las potencias. (11) En argumentos como el de De Morgan (1806-1871), en referencia a la nueva algebra, sobre la que se decía no debería tener símbolos de valores absolutos dobles o múltiples, es decir que cada símbolo no debía ser considerado como general, a menos que éste expresara la cantidad de revoluciones e indicara su dirección.

De acuerdo con lo anterior, se puede ver que existieron múltiples discusiones alrededor de la teoría logarítmica y exponencial. Algunas de estas produjeron avances, mientras que otras produjeron demoras y estancamiento del desarrollo; lo anterior, debido a la dificultad en la comprensión de la naturaleza de la teoría logarítmica. Estas discusiones generaron otros trabajos sobre los sistemas logarítmicos como los de Ohm, Graves, Vincent, Warren, De Morgan, Hamilton y Pagani; los cuales no se reconocieron como inventos matemáticos que aportaran a la teoría de los exponentes. Estas discusiones condujeron a desarrollar argumentos matemáticos falsos que obstaculizaron el desarrollo matemático.

4.2.5. Formas de notación de lo logarítmico y exponencial

Consideramos que un Hito importante en el desarrollo de los conceptos logarítmico y exponencial fue la representación simbólica o notación, la cual fue evolucionando de acuerdo con la teoría. Con respecto a las notaciones es necesario tener en cuenta algunos aspectos que explican su surgimiento, como: el gusto del autor, la urgencia de una representación inicial, la exigencia de un sistema de notación matemático de fácil manipulación e impresión, que representara de forma adecuada los objetos matemáticos y sus significados.

Para los exponentes positivos se usaron dos tipos de notaciones que sobresalieron en dos épocas distintas. La primera fue propuesta por los algebristas del siglo XVI, hacia el año 1520, la cual fue utilizada en el *Libro Primero de la Arithemetica Algebraica* de Marco Aurel, publicado en Valencia en 1552. Este trabajo es retomado por Meavilla en 1993, con la idea de utilizar la relación entre la progresión aritmética y geométrica para la operatividad multiplicativa entre monomios, citado en Martínez (2000). Este tipo de notación tiene como característica que los exponentes están representados por figuras poco usuales, utilizando los símbolos matemáticos de una manera gráfica. Un segundo tipo de notación se da a partir del siglo XVII hacia el año 1620 con el desarrollo de la teoría logarítmica, la cual se reporta en el documento *History of the Exponential and Logarithmic Concepts* de Cajori, publicado en 1913; en el cual se reconoce un tipo de notación que utiliza principalmente símbolos alfanuméricos.

A continuación presentamos los tipos de notación en tres partes: en la primera, la representación de exponentes positivos; en la segunda, la representación de exponentes negativos; en la tercera, la representación de los exponentes fraccionarios, radicales y racionales; y por último, las notaciones propuestas para logaritmo.

4.2.5.1. Notaciones propuestas para exponentes enteros positivos

Una propuesta muy novedosa es la recogida por Marco Aurel, él ofrece el nombre, símbolo y descripción de cada uno de los diez caracteres llamados “cósicos”, estos se ejemplificaron utilizando la multiplicación entre monomios.

Nombre	Símbolo utilizado por Marco Aurel	Símbolo actual
Dragma o número	φ	x^0
Rayz o cosa	χ	x
Censo	ξ	x^2
Cubo	ζ	x^3
Censo de censo	ξξ	x^4
Sursolidum o primo relato	β	x^5
Censo de cubo	ξζ	x^6
Bissursolidum o segundo relato	*b*β	x^7
Censo de censo de censo	ξξξ	x^8
Cubo de cubo	ζζ	x^9

Tabla 8. Simbología exponentes positivos según Aurel (1552, Tomado de Martínez, 2000, p. 18)

Para la multiplicación, la regla de Aurel se basa en el comportamiento especial de las sucesiones (La relación entre la progresión aritmética y la progresión geométrica), Martínez (2000).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ	χ	ξ	ζ	ξξ	β	ξζ	*b*β	ξξξ	ζζ

Tabla 9. Relación sucesión aritmética y geométrica con simbología Aurel (1552). Tomado de Martínez (2000, p.19)

Cuando se quiere multiplicar un carácter con otro, se miran los grados en la fila de encima, estos se suman, luego en el resultado de esta suma se observa el carácter que está debajo, el cual es el resultado de la multiplicación. A continuación se presentan dos ejemplos formulados por Marco Aurel.

Notación de Aurel	Notación actual
8ξ 2χ ------ 16ζ	$(8x^2)*(2x)=16x^3$
13ξξ 2ξξ -------- 26ξξξ	$(13x^4)*(2x^4)=26x^8$

Tabla10.Operaciones con simbologías Aurel (1552, Tomado de Martínez, 2000, p.19)

Luego presentamos en la tabla 8 las notaciones expuestas en el documento de Cajori (1913), en referencia a los exponentes positivos.

Notación propuesta	Significado	Notación moderna	Ejemplo	Autor
aa	Cuadrado de a.	a^2	$5aa = 5a^2$	René Descartes
A^3	Cubo de a.	a^3	$4A^3 = 4a^3$	Vieta

Ac	a a al cubo	a^3	$7Ac = 7a^3$	Mr. Oughtred
$a\ Ɔ3$	a a al cubo	a^3	$5a\ Ɔ3 = 5a^3$	J.H. Rahn´n
$aaaa$	a Exponente cuatro.	a^4	$8aaaa = 8a^4$	Thomas Harriot
a③	Equis al cubo.	ax^3	6 ③ $= 6x^3$	Stevin
12^3	Doce equis a la tres.	$12x^3$	$5^3 = 5x^3$	Chuquet
16^{II}	Dieciséis equis al cuadrado.	$16x^2$	$5^{II} = 5x^2$	Burgui, Reymar y Kepler

Tabla 11. Notaciones de exponentes positivos.

4.2.5.2. Notaciones propuestas para exponentes enteros negativos

Para las notaciones de los exponentes en números negativos y fraccionarios tuvimos en cuenta lo expuesto por Cajori, ya que según la historia solo hasta mediados del siglo XVII son sugeridos los exponentes negativos por autores como Chuquet y Stevin. A continuación una notación propuesta para exponente entero negativo.

Notación propuesta	Significado	Notación moderna	Ejemplo	Autor
7^{1m}	Siete equis a la menos uno.	$7x^{-1}$	$6^{4m} = 6x^{-4}$	Chuquet

Tabla 11. Notaciones de exponentes positivos Cajori (1913)

4.2.5.3. Notaciones propuestas para exponentes fraccionarios y radicales

En relación con los exponentes fraccionarios propuestos en el documento Marco Aurel (1552), citado Martínez (2000), se señala que dentro del pensamiento algebraico se utilizaron para denotar la raíz cuadrada y la raíz cúbica.

Kline (1972) citado en Martínez (2000), señala "que en 1585 Stevin escribe la expresión $1 + 3x + 6x^2 + x^3$ como:

$$1^{0} + 3^{1} + 6^{2} + {}^{3}$$

Tabla 12. Representación de exponentes fraccionarios, Kline 1972, Martínez (2000)

Así mismo utiliza los exponentes fraccionarios para la raíz cuadrada $1/2$ y para la raíz cúbica" $1/3$ Martínez (2000).

Notación propuesta	Significado	Notación moderna	Ejemplo	Autor
$a^{3/2}$	Raíz cuadrada de a exponente dos	$\sqrt[2]{a^3}$	$20^{3/2} = \sqrt[2]{20^3}$	Stevin

Tabla 13. Notaciones de exponentes fraccionarios, Martínez (2000)

Ahora, teniendo en cuenta el reporte de Cajori (1913), encontramos las siguientes notaciones para exponentes fraccionarios positivos, negativos y radicales. Estas notaciones están muy ligadas debido a su representación y significado ya que las raíces, los logaritmos y los exponentes se representan de la misma manera y a veces pueden significar lo mismo.

Notación propuesta	Significado	Notación moderna	Ejemplo	Autor
$\sqrt[2]{a^3}$	a exponente tres medios	$a^{3/2}$	$\sqrt[2]{64} = 4^{3/2}$	Wallis
$\frac{1}{\sqrt{a}}$	a exponente $-1/2$	$a^{-1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = 3^{-1/2}$	Wallis
qa	Primera raíz de a	$\sqrt{a}$	$q9 = \sqrt{9}$	Newton
$\sqrt{a}: b$	Raíz a de b	$\sqrt[a]{b}$	$\sqrt{3}: 64 = \sqrt[3]{64}$	Newton
ca	Raíz cúbica de a	$\sqrt[3]{a}$	$c8 = \sqrt[3]{8}$	Newton

Tabla 14. Notaciones de exponentes fraccionarios y radicales, Cajori (1913)

4.2.5.4. Notaciones propuestas para logaritmo

Las notaciones aquí presentadas son las reportadas por Cajori en su documento *History of the Exponential and Logarithmic Concepts* publicado en el año 1913.

Notación propuesta	Significado	Notación moderna	Ejemplo	Autor
$b?\, a = x$	Logaritmo de b en base a igual a x	$log_a b = x$	$8?\, 2 = 3$ $log_2 8 = 3$	Martín Ohm
$b?\, (a \| \alpha)$	Logaritmo de b en base a igual a α	$log_a b = \alpha$	$8?\, (2 \| 3)$	Martín Ohm
$\begin{matrix} b \\ = = x \\ a \end{matrix}$	Logaritmo de b en base a igual a x	$log_a b = \alpha$	$\begin{matrix} 8 \\ = = 3 \\ 2 \end{matrix}$	Abel Biirja

Tabla 15. Notaciones para logaritmo, Cajori (1913)

Finalmente, en el desarrollo de esta teoría logarítmica y exponencial se presentaron algunas notaciones que no fueron aceptadas por la comunidad matemática. Un ejemplo es la notación de Descartían, de la cual se decía que era excelente para su escritura e impresión, pero insatisfactoria para la representación de exponentes complicados.

4.2.6. La Generalización

Otro Hito reconocido en la historia fue la generalización de la teoría logarítmica y exponencial, la cual solo fue posible con el desarrollo de la teoría de números complejos. Con respecto a lo anterior Cajori (1913) deja claro que en la historia temprana de los logaritmos de números positivos, los logaritmos se inventaron de forma independiente de los exponentes; pero hoy se sabemos que la teoría general de potencias depende de la teoría de los logaritmos; así, históricamente el concepto logarítmico es el más primitivo.

Para el refinamiento y generalización de la teoría de exponencial es necesario considerar varios aportes sin los cuales la misma no se hubiera consolidado. Entre estos aportes podemos mencionar: (1) La propuesta de Martín Ohm, quien introdujo la definición de ecuación completa e incompleta: "*Una ecuación es completa cuando los dos lados de la misma tienen el mismo número de valores que representan exactamente las mismas expresiones, es incompleta cuando solo uno o varios (pero no todos) los valores de las expresiones de la derecha y la izquierda son los mismos*" (Cajori, 1913, pág. 176) estos aspectos habían sido considerados por Euler, pero no se les dio la suficiente importancia. (2) La introducción de la expresión valor principal por Cauchy (1789-1857), para que la función pudiera tratarse como continúa, toma los límites del dominio entre $-\pi$ y π; lo anterior, brindó mayor claridad acerca de la teoría exponencial.

Los primeros vestigios de unificación se produjeron en el siglo XVIII, pero solo hasta el siglo XIX es introducido formalmente en el análisis como un método facilitador. Fue Cauchy quien procedió a unificar la teoría de la potencia general, y lo hace teniendo en cuenta que tanto la base como el exponente pueden ser complejos, y plantea que sí z y u son ambos complejos, entonces z^u necesita una definición más exacta; para lo cual utiliza la ecuación $z^u = z^{u\, l(z)}$.

Un hecho importante para entender la unificación es que sin la función logaritmo no es posible comprender la función exponencial, "*ya que sin el uso de la función logarítmica, la interpretación de la potencia $z^y = w$ se complica en el caso más simple, cuando z es negativo y y es real*" (Cajori, 1913, pág. 205). Un ejemplo sencillo de este caso es $(-2)^y = z$, con y en los enteros positivos, esta expresión no produce una función continúa, ya que $z = \{-2, 4, -8, 16...\}$, claramente se ve que produce cantidades negativas y positivas. Otro ejemplo es $(-2)^{\frac{1}{2}} = z$, donde el problema es el cálculo de la raíz cuadrada de un número negativo. En esta etapa la función logarítmica se introduce como la solución a través de la relación $z^{m/n} = e^{\frac{m}{n}\log z}$. En este sentido la expresión $z^{m/n}$, con $n \neq 0$, se convirtió en una función importante del $log\, z$, con lo cual $z^y = w$ fue unificada.

La unificación es evidente cuando en la expresión $z^y = w$, y es una constante real, pero se hace más notoria si analizamos la expresión $w = z^y = e^{y \log z}$, ya que w proviene de un número infinito de valores en función de z para llegar a ser un solo valor en función de $log\, z$.

4.3. POSTURA TEÓRICA DEL CDC USADO EN LA ELABORACIÓN DE LA HERRAMIENTA DIDÁCTICA

El término CDC es introducido en la literatura por Shulman (1986b), quien es el primero en llamar la atención de la comunidad de investigación educativa sobre la importancia de considerar el conocimiento del profesor como un factor determinante en el aprendizaje de los estudiantes. Pinto (2010) realiza un estado del arte sobre el CDC, donde expone de forma detallada cómo ha sido el proceso evolutivo y de consolidación de este concepto; proceso que fue emprendido por el mismo Shulman y por sus colaboradores y seguido por otros hasta la época actual, que consiste en una versión mucho más robusta generada principalmente por los resultados las investigaciones. Así, de esta forma consideramos que la descripción del CDC propuesta por Pinto (2010) es una versión actualizada, que brinda un alto grado de fineza en cuanto a la descripción del mismo; por lo cual, la hemos tomado como nuestro referente teórico para el análisis de los diferentes documentos históricos de la función logaritmo y exponencial.

Para Pinto (2010) el CDC está compuesto por tres componentes. El primero corresponde al conocimiento del contenido matemático para enseñar; el cual a su vez se divide en tres categorías que son: conocimiento sobre la actividad matemática general, conocimientos por tópico específico matemático, y conocimientos sobre el currículo matemático. El segundo componente es conocimiento de las estrategias y las representaciones instruccionales de las matemáticas; el cual igualmente se divide en tres categorías: conocimiento sobre las representaciones instruccionales, conocimiento de los materiales curriculares, y conocimiento sobre el currículo de matemáticas. Y el tercer componente es referente al conocimiento de los procesos de aprendizaje del estudiante sobre el contenido matemático, el cual se divide en las categorías de: conocimiento del proceso cognitivo del estudiante en matemáticas, conocimiento del diagnóstico del proceso cognitivo del estudiante, y conocimiento de estrategias instruccionales. Cada una de esta categorías, para los tres componentes, esta descrita por unos asuntos específicos que permiten reconocerla y establecer diferencia con las demás.

Para nuestro caso particular, estos asuntos no darán cuenta de la disciplina en general, como es propuesto originalmente por Pinto; sino que lo hemos particularizado al objeto matemático específico que nos ocupa, la función exponencial y logarítmica, guardando la estructura del CDC propuesta por Pinto. A continuación buscamos establecer los nexos entre la historia de la función exponencial y logarítmica con cada uno de los asuntos que describen a cada categoría que conforman los tres componentes de CDC, fundamentados en nuestra hipótesis que hasta ahora hemos seguido, referente a que el conocimiento de la historia le aportará al CDC del profesor de matemáticas.

4.3.1. Conocimiento del contenido para enseñar la función exponencial y logarítmica

4.3.1.1. Conocimientos sobre la actividad matemática general

- Conocimiento de la historia de la función exponencial y logarítmica, su evolución, principales problemas y cambios en las nociones o conceptos, la naturaleza de las explicaciones, de la heurística y de los valores histórico-filosóficos.

La historia de la función logaritmo y exponencial nos permite reconocer cómo fue la actividad matemática de aquella época. En cuanto a su evolución reconocemos que fue un proceso de muchos años y que vinculó el trabajo de muchos matemáticos durante varias generaciones; lo que indica que el desarrollo del concepto de logaritmo no fue algo que se dio de la noche a la mañana, ni fue producto de un genio. Igualmente, en los inicios del desarrollo del logaritmo se nota la existencia de un trabajo en comunidad, aunque este no fue necesariamente colectivo y articulado, sí permeó el pensamiento de los matemáticos, que fue definitivo para la construcción de su visión e ideas. También, observamos que la actividad matemática basó su desarrollo inicialmente en problemas o motivaciones sociales, pero más tarde se ve la necesidad de recurrir a la rigurosidad, a las demostraciones, a la extensión de los conceptos, entre ellos el de logaritmo, a otros dominios numéricos; dando lugar a la construcción de diferentes representaciones y trabajos matemáticos. De igual forma, se reconoce en la historia la existencia de problemas que dificultaron y atrasaron la actividad matemática, entre ellos están: las dificultades en la comunicación, lo que retardó la divulgación de los progresos matemáticos, haciendo que algunos matemáticos trabajaran en asuntos que ya habían sido solucionados. Otra dificultad fue la notación personalizada con la que se trabajaba en la época, que dificultó la comprensión de los trabajos que fueron publicados.

Igualmente observamos desde la historia, que la actividad matemática siempre produjo cambios en el significado del concepto de logaritmo, de sus nociones, mostrando con esto que los conceptos no son algo estático, sino en continua evolución. La historia también nos muestra que la construcción del concepto de logaritmo no se dio de forma lineal, sino que en ocasiones hubo la necesidad de retomar ideas que habían sido dejadas en el pasado; por ejemplo, trabajos que en un principio no fueron aceptados, más tarde son retomados con éxito para la producción y desarrollo matemático. También está el caso, de los matemáticos que se retractaron de sus publicaciones por considerarlas erróneas. Otro aspecto a reconocer es que la actividad matemática no se dio únicamente desde las matemáticas (exclusiva de los matemáticos), sino que involucró a filósofos y físicos; cuyas visiones fueron determinantes en sus explicaciones. De otra parte, las discusiones que se dieron entre los matemáticos, también favorecieron la actividad matemática, no solo en su momento, sino que fue inspiración para otros matemáticos que vieron en ellas muchos elementos que aportaron a sus razonamientos. Un ejemplo de lo anterior, es el caso de Euler, quien retoma las discusiones entre Leibniz y Bernoulli referente a lo que sería el logaritmo de un número negativo.

Acerca de la naturaleza de las explicaciones, la historia nos muestra que en sus inicios se recurría preferiblemente a la geometría, lo que dio lugar a la construcción de diferentes sistemas de representación para un mismo concepto, como fue el caso de Bernoulli y sus seguidores. Otros matemáticos como: Arquímedes, Napier, Stifel, Chuquet (1445-1488) basaron sus explicaciones en lo numérico; mientras que Euler, Cauchy, Riemann lo hicieron en lo analítico. De lo anterior, podemos reconocer diferentes heurísticas, que se corresponden con diferentes formas de abordar los problemas para darles solución; como ejemplo, podemos decir que los contemporáneos a Napier fueron pragmáticos, guiados por la intuición y las observaciones empíricas, donde las explicaciones tenían que responder a la solución de problemas reales. Más tarde, hacia la época de Euler, el pensamiento fue más racional, donde las explicaciones debían ser comprobadas, determinando las formas de proceder matemáticamente.

Podemos ver los valores históricos que hicieron posible el desarrollo del concepto de logaritmo, reflejados en la tenacidad de los matemáticos de aquella época, que les permitió llevar a cabo sus trabajos de forma continuada, tanto en forma individual, como en comunidad. Otro valor histórico que influyó en la actividad matemática fue el referente a la nacionalidad, que vino a constituirse en una motivación de fidelidad a una línea de trabajo, y a ciertos asuntos o temas; lo anterior, también produjo el rechazo de trabajos que no fueran de su comunidad. Como ejemplo podemos mencionar la disputa entre ingleses y los alemanes, quienes se atribuían el derecho de ser los inventores del cálculo; en cabeza de Newton y Leibniz respectivamente. De lo anterior, se puede entender el hecho de que los ingleses no se interesaran por el tema que demandaba la atención de Europa Continental (incluida Alemania): los logaritmos de números negativos.

• Conocimiento de las diferentes posturas o escuelas filosóficas en relación a cómo se crea y se construye el saber científico básico.

Durante el desarrollo de los logaritmos observamos tres posturas o escuelas filosóficas en las cuales se da el desarrollo y construcción de las matemáticas. La primera posturas corresponde a la de Napier, Bürgi y Briggs, quienes creían que las matemáticas tenían que tener un fin práctico o una utilidad; una segunda postura es la de Bernoulli, Leibniz y Euler, quienes no se interesaron por la utilidad que tuvieran sus desarrollos matemáticos, sino que correspondían a las matemáticas por las matemáticas; finalmente la postura de Riemann, Graves, Ohm, Hamilton, Cauchy, entre otros, quienes sostenían la importancia de la rigurosidad de las matemáticas, así todo lo usado debía haberse demostrado previamente.

• Comprensión de aquellos conceptos, principios, hechos y teorías principales de la función exponencial y logarítmica, así como las posibles interrelaciones que pueden establecerse entre los mismos.

La historia no muestra que la comprensión de los conceptos dentro de la comunidad matemática de la época no fue algo trivial, pues no bastaba con ser matemáticos para comprender las diferentes expresiones matemáticas utilizadas. Como un primer ejemplo de lo anterior, podemos mencionar el significado que se le atribuyó a lo que sería el logaritmo de un número negativo; otro ejemplo es la comprensión del concepto de infinito, así cuando Euler presentó su teorema sobre los infinitos logaritmos de un número, debido a lo novedoso y complejo del lenguaje utilizado, no fue entendido, ni reconocido. Un tercer ejemplo fue la resistencia por parte de los matemáticos para aceptar los números imaginarios, por las diferentes comprensiones que de ellos se tenía.

Para la comunidad de la época de Euler, la actividad matemática debía obedecer a principios de validación, rigurosidad y generalidad construidos por la misma comunidad matemática. Así, dentro de la actividad matemática existía la tendencia a hacer válidas las propiedades, los procesos y operaciones en otros dominios numéricos, con el objetivo de alcanzar un mayor grado de generalidad. Un ejemplo de lo anterior fue el concepto de logaritmo, que en un primer momento se dio exclusivamente para los números positivos, más tarde fue ampliado al conjunto de los números negativos y complejos, lo que trajo consigo, el desarrollo de teorías generales para la potenciación y la logaritmación.

• Conocimiento del conjunto de procedimientos que sirven de base para que el conocimiento de la función exponencial y logarítmica avance, principales perspectivas o escuelas en el campo, cómo el concepto se ha desarrollado a través del tiempo y quiénes han contribuido a ese desarrollo.

Los procedimientos seguidos por la comunidad matemática consistían en que una vez se producía un desarrollo matemático, éste debía ser argumentado plenamente por su autor, luego demostrado y comprobado por la comunidad, para que tuviera validez. El desarrollo de un concepto matemático no fue generalmente una actividad solitaria, sino que vinculó a muchos matemáticos, quienes aportaron a su construcción y consolidación. Un ejemplo de lo anterior es la construcción de la teoría logarítmica, donde por lo general son reconocidos Arquímedes, Stifel, Napier, Bürgi, Briggs, Bernoulli, Leibniz, Newton, Euler, Riemann, Cauchy, por haber contribuido a su desarrollo y consolidación; pero otros como Chuquet, Karsten, Graves, Ohm, Warren, Durege, Holzmuller, DeMorgan, Wesell, Argand, Irving, Sant Vincent, Salmon, Peacock, Bouvier, D´Alembert, Gregorio, Pagani, Cerquero, Clausen, Hamilton, Bjorling, Cayley, Weiestrass, Wittstein, Peano, Descartian, Biirja, Koop, Stadnickq, Hessel, Kleein, Bradshaw, Cotes, Oughtred, Halley, Mercantor, Stringham, Huygens, Sarasa, Wallis entre otros, no son tan conocidos en el desarrollo de las funciones logaritmo y exponencial, siendo así que sin sus aportes no se hubiera logrado su consolidación teórica final.

- Conocimiento de la función exponencial y logarítmica para enseñar a otras personas, desde una perspectiva sociocultural, de las diferentes materias que componen el currículo escolar.

La historia muestra una relación entre el desarrollo de los conceptos y los factores socioculturales que actuaron como acicate para impulsar la actividad matemática. Esta visión muestra un vínculo entre la actividad matemática y las condiciones particulares del entorno en el cual se dio la construcción de las matemáticas, que permite reconocer la importancia de los ambientes en los cuales se encuentran inmersas las personas.

La introducción el concepto de logaritmo en la sociedad se sintió por la gran acogida que tuvo por parte de la comunidad matemática, como un instrumento útil que respondía a necesidades sociales del momento. Debido a la importancia antes mencionada, el logaritmo es introducido como parte de la enseñanza, por Briggs, como una forma de responder a las demandas sociales. Como ya se dijo antes, el concepto de logaritmo no fue desarrollado exclusivamente por matemáticos, sino que los desarrollos se dieron también desde otras disciplinas. Es necesario notar que para esta época era común que los hombres cultivaran y estudiaran diferentes disciplinas y se ocuparan de diferentes ramas de las matemáticas; como ejemplo de lo anterior está el caso de Newton, quien era matemático y físico, de ahí su visión de las cosas en movimiento, utiliza para ello el término de "fluxiones", mientras que Leibniz era filósofo y matemático. Estas tendencias dieron lugar a diferentes enfoques y visiones de los desarrollos matemáticos, o lo que es igual, se puede reconocer que la formación académica dio un tinte distintivo a la producción de las matemáticas.

- Conocimientos de la ética y valores morales y estéticos del concepto de función exponencial y logarítmica, acerca de la cultura matemática y sociedad.

Muchos de los avances alrededor de la función logaritmo y exponencial dieron lugar a diferentes controversias sobre la autoría y por el respeto de los derechos de autor. En esta época se usaba de la frase célebre "publique o perezca". De aquí que algunos nombres de matemáticos no sean reconocidos históricamente por no haber realizado sus publicaciones a tiempo. También, se hablan de ideas que fueron robadas y patentadas, pero como la historia no brinda total claridad sobre estos asuntos todo queda en especulaciones. Estos comportamientos éticos obligaron a algunos matemáticos a publicar sus trabajos de forma incompleta y a utilizar un lenguaje que no ofreciera muchos detalles para poder mantener la ventaja sobre los demás. Aunque también se evidenció el caso contrario, donde dentro de la actividad matemática se muestra el respeto por las ideas de los demás; una evidencia de esto es que las discusiones sobre la naturaleza de la función logarítmica y exponencial siempre se dieron en términos de cordialidad. También, se reconoce el hecho de que

Bernoulli haya permitido que su alumno, Euler, fuera el primero en publicar los resultados, aun cuando él ya los tenía, para permitir que su discípulo se llevara el crédito.

Otro hecho a tener en cuenta dentro de la actividad matemática es el poder y recursividad de la mente humana para proponer y dar soluciones a problemas de gran complejidad. Tal es el caso del desarrollo de la teoría logarítmica y exponencial, donde se necesitó de gran imaginación, en relación a la representación gráfica de los infinitos logaritmos de un número. También está la necesidad del uso de una notación que se ajustara a los requerimientos de simplicidad y espacio, en preferencia a la conservación del significado de los símbolos usados en la notación. La historia muestra que predominó la simpleza antes que el significado de la notación. Este asunto ha sido tratado con mayor detalle en el hito de las formas de notación de lo logarítmico y lo exponencial (apartado 4.2.5).

Otro factor a destacar es el estímulo que brindó el capitalismo comercial, mediante los préstamos de dinero, propios de esta sociedad; igualmente, la conquista y expansión del territorio, que se lograba a través de la navegación, recibieron un impulso al mejorar los métodos para efectuar los cálculos y disminuir el error en los mismos.

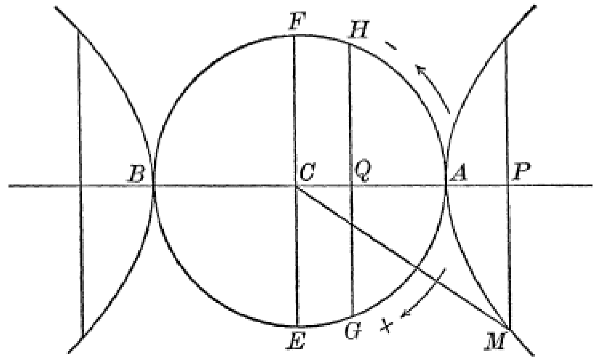
4.3.1.2.Conocimiento específico de la función exponencial y logarítmica.

- Características esenciales (correspondencia entre idea mental y concepto matemático, imagen del concepto, atributos críticos del concepto, ejemplos, prototipos, distinción entre ejemplos concretos y no-ejemplos, actualización del cambio en el concepto).

La historia nos muestra que las ideas mentales que tuvieron los matemáticos sobre el concepto de logaritmo, aunque diferentes, siempre estuvieron ligadas a sus representaciones y al dominio numérico. La imagen del concepto de logaritmo que se presenta en la historia, trata de los diferentes procesos que se tuvieron que dar para su generalización, que fue posible con la extensión de su dominio a los números reales y su posterior delimitación. Sin embargo, en el momento de la invención por Napier, este concepto tuvo mucha acogida debido a su utilidad para facilitar muchos de los cálculos que se realizaban en el momento. A continuación presentamos algunas ideas del concepto de logaritmo a través de la historia.

En la época de Napier, la noción que se tenía sobre el concepto de logaritmo se basaba en el de número de razones, "cuántas veces se había repetido una constante" para obtener un término de la progresión geométrica. Generalmente, esta constante o factor que se repetía representaba la longitud de un segmento, (ver gráfica 3) además para validar su continuidad Napier se apoya en otra disciplina, la física, a través de la noción de puntos en movimiento.

Para la época de Bernoulli y Leibniz, se introduce la representación gráfica, la noción de logaritmo de un número negativo se restringía a una representación gráfica en el plano cartesiano. Un ejemplo es la propuesta de Bernoulli (ver gráfica 4), basada en un razonamiento geométrico, donde el logaritmo de un numero negativo correspondía a una rama simétrica al eje y de la curva logarítmica de los números positivos, esto lo proponía teniendo en cuenta que se deberían dar las mismas propiedades de los logaritmos de los números positivos. Mientras que Leibniz consideraba los logaritmos de los números negativos como no existentes; es decir que no pertenecían a los números reales, pero si a los imaginarios.



Grafica 6.

Diagrama de Karsten, representación geométrica de los infinitos logaritmos de un número.

Tomado de Cajori, 1913, p. 111

Posteriormente, en el S. XVIII, a diferencia de la idea que se tenía, de que un número solo podía tener un logaritmo, Euler establece que cada número tiene un número infinito de logaritmos; de éstos solo uno es real en el caso de los números reales positivos, y ninguno es real para el caso de los números reales negativos y los números imaginarios. Con este teorema abre la posibilidad de poderlos estudiar y representar en relación con otras ramas de las matemáticas antes impensables: las series infinitas, el cálculo infinitesimal, el plano complejo y la variable compleja. El teorema de Euler sobre los infinitos logaritmos de un número también posibilita su representación geométrica en el plano complejo (ver la propuesta de Karsten sobre la representación de los logaritmos tomando la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ y el círculo $x^2 + y^2 = 1$ tomando $y = z\sqrt{-1}$, donde el círculo es una parte imaginaria de la hipérbola y viceversa); esta representación es antagónica a la idea mental que tenían varios matemáticos de la época, como por ejemplo: Leibniz para quién era imposible representar geométricamente dichos números.

En relación con los atributos críticos del concepto de logaritmo se llega a la preferencia de dos bases para facilitar los cálculos, la base diez (10) y la base euleriana (e).También, se reconoce como una característica de toda función logarítmica su punto de corte con el eje x, que corresponde a (1,0) independientemente de la base y sin tener en cuenta las constantes; por su lado la función exponencial corta al eje y siempre en el punto $(0,1)$ para cualquier base y sin tener en cuenta la constante.

En cuanto a los prototipos de la función logaritmo y exponencial que se reconocen en la historia están: los relacionados con la notación, de lo cual se conoce muy poco por no haber trascendido como se reconoce en el hito de las notaciones. Otros prototipos corresponden a las expresiones de tipo logarítmico y exponencial que fueron representativas ya fuera por su complejidad o por la dificultad para su comprensión.

A continuación presentamos algunas notaciones sobre el logaritmo y la exponencial, entre las que sobresalen la propuesta por Martín Ohm, quien representó el logaritmo general como $b?\,a$, que significa logaritmo de b en base a; otra representación propuesta por él fue $b?\,(a\|\alpha)$, que significa el logaritmo de b para la base a cuando $log\,a\ =\ \alpha$. Otro autor, Augustus De Morgan propuso λx para notar $log\,x$. Otras novedosas e interesantes notaciones fueron hechas por Abel Biirja de Alemania, quien presentó el logaritmo inverso $2^3 = 8$, por medio de la notación $\frac{8}{2} = 3$. Por su lado Koop defendió la notación $8?2$. Finalmente Stadnicka no estuvo de acuerdo con dicha notación, y argumento que para satisfacer necesidades comunes se podía utilizar la expresión que hoy conocemos $Log_2 8$.

Algunas notaciones propuestas para la función exponencial se presentaron por matemáticos como J.W.L. Glaisher quien sugirió el uso de flechas para la notación exponencial, luego propuso escribir a^u como $a\,Exp.u$; esta última notación tuvo gran aceptación en la teoría de funciones de Cayley en 1879. G.M. Pagani usó la notación exponencial $(a)^{m/n}$ para indicar todos los valores de $a^{m/n}$.

De acuerdo con lo mostrado anteriormente, se evidencia números esfuerzos en cuanto a la notación, como muestra de la actividad matemática y como un reflejo de las notaciones representativas que existieron en diferentes épocas. Para ampliar la información sobre estos aportes el lector se puede dirigir al Hito de las Notaciones en el apartado 4.3.5.

A continuación mostramos algunas expresiones, ecuaciones y paradojas representativas de la función logaritmo y exponencial:

- $log\,(-x)$, $(-2)^x; e^x$, estas expresiones donde x puede ser real o compleja, son representativas ya que no eran comprensibles para los matemáticos de la época, tampoco se reconocían los logaritmos de números negativos ni se comprendían las cantidades imaginarias, puesto que en el momento no se contaba con una teoría sobre números complejos.

- Dificultad para establecer cuáles expresiones representaban cantidades imaginarias, como se muestra a continuación. En la comprensión de la expresión $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, Euler llegó al resultado $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = e^{-2\lambda\pi-\pi/2} = 0{,}2078795763507$ ... para $\lambda = 0$, Argand se aventuró a decir que $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$era el ejemplo más claro de una cantidad reductible a la forma $a + bi$. Por su lado J. F. Francais demostró $(c\sqrt{-1})^{d\sqrt{-2}}$ es reductible a la forma $a + bi$

- Otra expresión que es importante por su representación gráfica y que contribuyó significativamente al desarrollo de la teoría exponencial y logarítmica es: U^v donde $U = a(cos\alpha + i\; sen\alpha)$ y $v = x + iy$.

Las siguientes son algunas ecuaciones en las que se centraban las discusiones matemáticas en la época debido a su complejidad:

- ✓ $log\,x = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$
- ✓ $e^{x-(\frac{2\rho\pi}{k})} = y$
- ✓ $a^x = e^{x\log a}$; $a^x = (p + qi)^{(\alpha+\beta i)}$ a y b son números complejos.

- ✓ Una ecuación representativa es la encontrada por Euler para definir los logaritmos de forma general incluyendo los números complejos, conocida como Formula Euleriana $\log x = r + 2m\pi\sqrt{-1}$ para x positiva y para x negativa se presenta $\log x = r + (2m+1)\pi\sqrt{-1}$.

También se reconocen a través de la historia de la teoría exponencial y logarítmica algunas fórmulas interesantes que involucran al número e, estas fueron tomadas del documento de Maor (1994).

- ✓ Esta fórmula fue descubierta por Newton en 1665, y relaciona al número e con las series infinitas $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$
- ✓ Esta fórmula es una de las más famosas en matemáticas, ya que conecta a las cinco constantes fundamentales de las matemáticas, ($i = \sqrt{-1}$, $0, 1, e,$ y π). La fórmula es $e^{\pi i} + 1 = 0$.
- ✓ Otra fórmula es una fracción infinita que también implica al número e, fue descubierta por Euler en 1737 y es: $e = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\cdots}}}}}$. Euler demostró que cada número racional puede ser escrito como una fracción continua finita y a la inversa.
- ✓ Otra fracción infinita inventada por Euler y que implican el número e es la siguiente: $\frac{e+1}{e-1} = 2 + \cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{\cdots}}}}$
- ✓ El numero e en la expresión del número dos como un producto infinito así: $2 = \frac{e^1}{e^{1/2}} \cdot \frac{e^{1/3}}{e^{1/4}} \cdot \frac{e^{1/5}}{e^{1/6}} \cdot \ldots$
- ✓ También se encuentran algunas fórmulas en matemáticas aplicadas que involucran el número e y que se reconocen en los documentos históricos como: $\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$; esta integral definida aparece en la teoría de la probabilidad.

En el documentó de Cajori (1913), se encuentra la correspondencia llevada a cabo entre los matemáticos de la época, como: Leibniz y Bernoulli, Euler y D'Alembert, Euler y Bernoulli, entre otras. Allí se hacen visibles las discusiones acerca de algunas paradojas matemáticas que para su época no tenían solución. Otras paradojas representativas se presentan en otros momentos de la historia, que revisten importancia para el conocimiento del profesor y que pueden ser propuestas en el aula para su discusión. A continuación presentamos varios prototipos de paradojas matemáticas:

- Una paradoja matemática se da en el tema de las proporciones como lo expresa Cajori analizando la discusión entre Leibniz y J. Bernoulli. Un imaginario a menudo significaba no existencia, "¿Son los números negativos menos que nada? Sí lo son, entonces en una proporción 1:: $-1 - 1$ :: 1 el número mayor es al menor, como el menor es al mayor, es imposible”, (Cajori, 1913, p. 39).

- En la correspondencia de agosto 13, 1712. J. Bernoulli para Leibniz se encuentra una sobre el logaritmo de números negativos como se expone a continuación: “el argumento que $log\,(-2)$ no existe, porque $log\,\sqrt{-2}$ no existe, no es válido. Niego que $log\,\sqrt{-2}$ sea la mitad de $log\,(-2)$, aunque es cierto que $log\,\sqrt{2} =$ ½ $log\,2$, por tanto $1/2\,log(-2) \neq log\sqrt{(-2)}$", (Cajori, 1913, p. 40). Se nota aquí un intento de los matemáticos por extender el dominio de los logaritmos a los números negativos.

- La siguiente paradoja está relacionada con las sucesiones, según Bernoulli. “…los números negativos determinan su propia sucesión particular comenzando con -1, en lugar de $+1$. Así las mismas propiedades logarítmicas se dan para $-n$ como para $+n$. Él reitera que, $log\,n = \log(-n)$… ” (Cajori, 1913, p. 41)

- Las expresiones matemáticas con paradojas se extendieron a la comprensión de los números imaginarios, en la correspondencia del 15 de abril 1747. Euler a D'Alembert: “…si bien, $l\sqrt{-1}$ es imaginario, ¿por qué no $2l\sqrt{-1} = l\,(-1)$ debería serlo también?, $l\,(+1)$ debe ser imaginario, ya que para $l\,(+1) = 2l(-1) = 4l\sqrt{-1} = 3\,\frac{l(-1+\sqrt{-3})}{2} =$… y así sucesivamente. …..” y continúa diciendo “…esto es exactamente lo que pretendo, para l (+ 1) que tiene un número infinito de valores distintos, de los cuales todos son imaginarios excepto 0…” (Cajori, 1913, p. 76).

- En la representación gráfica también se pueden encontrar algunas paradojas, como en la siguiente correspondencia: 15 de febrero 1748, Euler a D'Alembert: “La ecuación $y = 2^x$ da una curva continua por encima del eje x, pero si $x = \frac{1}{2}$, entonces $y = -\sqrt{2}$ y $y = +\sqrt{2}$ ... hay una infinidad de dichos puntos por debajo del eje x, que están aislados unos de otros”, (Cajori, 1913, p. 78).

- Otra paradoja en la representación gráfica “…la ecuación $y = (-2)^x$ ofrece una infinidad de puntos aislados y no cualquier curva continua, $y = e^x$ representa una curva continua por encima del eje x, y puntos aislados por debajo”, (Cajori, 1913, p. 78).

- En el Cálculo también se encuentran paradojas con referencia al tema de logaritmo, en las discusiones reportadas por Cajori, cuando Euler revisa los argumentos de Leibniz y Jean Bernoulli I, Euler señala que no está de acuerdo con Leibniz en la expresión de que $l\,(+x) = l\,(-x)$ desde la expresión $d\,lx = d\,l(-x) = \frac{dx}{x}$, esto lo hace sobre la base de que la regla para encontrar lx es válida sólo cuando x es positivo, dice el autor, que este tipo de reflexiones sacude los cimientos mismos del análisis, (Cajori, 1913, p. 78).

- Sobre exponentes negativos: Si y es negativo, ningún valor real de x satisface $y = e^x$. Para estar seguro, cuando $x = \frac{1}{2}$, $y = \sqrt{e}$, pero cuando $x = 2$, no es cierto que $y =$

$\pm ee$ y que $x = l \pm ee$. Por lo tanto, la afirmación de que los logaritmos de los números negativos son reales, no es ciertamente una verdad general. (Cajori, 1913, p. 78).

- Con exponente cero: Si alguien afirma que $e^0 = e^{0/2} = \sqrt{e^0} = \sqrt{1} = \pm 1$, entonces, por el mismo argumento $x^1 = x^{2/2} =, \pm x$ " y además que $a + x$ será la misma cosa que $a - x$", (Cajori, 1913, p. 79)

- Las discusiones acerca de las expresiones imaginarias estuvieron a la orden del día, como lo presenta Cajori a continuación: se sigue que $l\sqrt{-1}$ debe ser imaginario y que $l\sqrt{-1} = 0$ no puede ser cierto; pero si dejamos que $l\,(-1) = p$, siendo p imaginario, nos encontramos con $l\,(-1)^2 = l\,(+1) = 2\text{p} = 0$, lo cual es contrario a la hipótesis y nos lleva a que $l\sqrt{-1} = 0$, (Cajori, 1913, p. 79).

- A continuación se presenta otra discusión de las paradojas con números complejos "…Caldani se opuso, como Riccati había hecho antes que él, a la escritura de Pessuti de que: $z\sqrt{-1} = 0$, cuando $z = 0$. Caldani escribe: $0 : 0\sqrt{-1} :: a : a\sqrt{-1}$; ahora, si $0 = 0\sqrt{-1}$, se sigue $a = a\sqrt{-1}$, una imposibilidad..". (Cajori, 1913, p. 113)

- Este es un ejemplo de las paradojas que representaban los infinitos logaritmos de un número "…Cuando Euler escribe $l(1 + w) = w$, donde w es un infinitesimal, y entonces obtiene $l1 = 0$ cuando $w = 0$, no puede al mismo tiempo argumentar, según los críticos, que $log1 = 2\pi\sqrt{-1}$, $4\pi\sqrt{-1}$, etc. En 1766 el jesuita español Juan Andrés estaba dispuesto a aceptar las conclusiones de Euler, pero pensaba que si: $1 = e^0 = e^{2n\pi\sqrt{-1}}$ entonces se debía tener $0 = 2\pi\sqrt{-1} = 4\pi\sqrt{-1}$,…" etc. (Cajori, 1913, p. 114)

- A Paolo Frisi, muchos de los resultados le parecen absurdos, como por ejemplo, $log\,(-1) : \sqrt{-1} : \pi : 1$. También critica la expresión: $0 \cdot \sqrt{(-1\,)} = 0$, y afirma que un cero imaginario representa una magnitud real diferente de cero. (Cajori, 1913, p. 115)

- Una paradoja clásica en la historia la reproduce nuevamente en 1803 L.N.M. Carnot, dijo que en el largo debate no ha logrado aclarar la paradoja de que, mientras que $log(-2)^2 = \log(2)^2$, no podemos escribir $2log(-2) = 2\,log\,2$, (Cajori, 1913, p. 116).

- Diferentes representaciones (comprender las funciones logarítmica y exponencial en sus diferentes representaciones, trasladar y formar conexiones entre éstas).

Inicialmente cuando Napier hace el descubrimiento de los logaritmos lo hace basándose en dos nociones, la primera es la relación entre la sucesiones aritmética y geométrica y la segunda de puntos en movimiento con lo cual muestra la continuidad de los logaritmos en todos los números positivos. La primera representación fue de tipo tabular, mientras que la segunda fue mediante segmentos y punto en movimiento, desde una perspectiva física; ambas representaciones tienen en común la relación existente entre los términos de la sucesión aritmética y geométrica. En la tabla una de las filas representa los términos de una sucesión aritmética y la otra representa los términos de una sucesión geométrica; mientras en los puntos en movimiento un segmento de distancia infinita representa la sucesión aritmética y el segmento de radio 10^7 representa la sucesión geométrica decreciente. Otro tipo de representaciones fueron las verbales dadas por Napier sobre logaritmo, como producto de lo expuesto anteriormente: "…*El logaritmo de un seno dado es el número que se ha incrementado aritméticamente de forma constante con la misma velocidad como aquella con la cual el radio comenzó a decrecer geométricamente, y al mismo tiempo como el radio ha decrecido al seno dado*." (Cajori, 1913, p. 7)

Posteriormente, se plantean las construcciones geométricas (o representaciones gráficas) de los logaritmos, como por ejemplo la curva logarítmica, la espiral logarítmica y la hipérbola equilátera. A partir de la exploración de las áreas bajo las curvas y la cuadratura de las mismas se llegó a determinar que las bases de los cuadriláteros mixtilíneos corresponden a una sucesión aritmética, mientras que las alturas corresponden a la sucesión geométrica, en este sentido la representación del logaritmo por medio de razones también involucra las sucesiones aritmética y geométrica.

Luego, se proponen las representaciones analíticas de la función logarítmica que permiten conectarla con la función exponencial. Un ejemplo de esta es la propuesta por Euler, donde se evidencia la conexión existente entre la representación gráfica de la función logarítmica y la integral del área bajo la curva, que conlleva a relacionarla con las series de potencias y su relación con el cálculo infinitesimal; este proceso permite ampliar el fundamento teórico del logaritmo. Finalmente, se presenta la formalización del concepto logarítmico y exponencial, gracias al trabajo de Cauchy, quien define las funciones logarítmica y exponencial desde un enfoque analítico y estructural. Igualmente, es importante la construcción del plano complejo por Wessel y Argand, partiendo de esta representación se llega a la representación logarítmica, en el plano complejo, utilizando el esquema de Riemann; ésta última representación permite visualizar la superficie a que da lugar la función logarítmica. Una descripción más amplia se puede ver en el hito de representaciones en el apartado 4.3.2.

- Formas alternativas de aproximación (familiarización con las principales alternativas de aproximación del concepto, sus usos en las diferentes ramas de la matemática, en otras disciplinas y en la vida diaria, así como el estudio de las posibles adecuaciones de estas aproximaciones a ciertas situaciones)

Históricamente las aproximaciones al concepto de función logarítmica y exponencial se dieron desde diferentes disciplinas, ramas de las matemáticas y desde los usos en la vida diaria. En cuanto a otras disciplinas podemos reconocer la aproximación al concepto mediante su uso en la economía, en los préstamos de dinero. En la física con los puntos en movimiento y en la astronomía, para cálculo de distancias.

Otra aproximación al concepto de función logaritmo y exponencial se puede hacer a través de algunas ramas de las matemáticas, como son: el cálculo, la trigonometría y el álgebra. En cuanto al cálculo se reconocen varios acercamientos: uno de ellos es el realizado en del siglo XVIII con John Bernoulli I, en la correspondencia con Leibniz, el cual se da a partir de la ecuación diferencial $dx/x = -dx/-x$, de donde se deduce $log\, x = log\,(-x)$; otra forma es la utilización de áreas bajo la curva, proceso que fue seguido por Riemann; también, la propuesta por Cauchy, que es la aproximación a través del límite de sucesiones, un ejemplo es la sucesión $(1 + (z/m))^m$, en este caso se analiza su convergencia para los valores crecientes de enteros positivos de la variable m, donde z puede ser un número complejo, Cauchy asegura, que de existir el valor límite, este permite hacer la definición de la función exponencial e^z. Por otro lado, el acercamiento a través de la trigonometría se realiza mediante el método Prosthaphaeresis y las identidades trigonométricas. En el álgebra hay un acercamiento más familiar con el desarrollo de la teoría de exponentes y logaritmos, sus propiedades y significados en su notación.

Con respecto a la aproximación desde la vida diaria de los conceptos de función logaritmo y exponencial se dio a través de las actividades de navegación y el cobro de interés sobre los préstamos de dinero.

Varias propuestas de aproximación al concepto de función logaritmo y exponencial se hacen después del desarrollo de la teoría logarítmica y exponencial, aunque no se reconocen como aportes a la teoría. Una de ellas es a través de las funciones inversas propuesta por Cayley (1821-1895) en 1869, según su artículo, en los logaritmos de cantidades imaginarias, el logaritmo se define como una integral definida y la potencia general a^b se define como la inversa de la función logarítmica. Otro acercamiento lo expone Félix Klein (1849-1925), quien recomienda que para los fines de la instrucción escolar, el logaritmo se debe definir como una integral, que está conectado con las áreas asintóticas de la hipérbola equilátera. Una propuesta similar es realizada por Meray de Dijon, quien propone hallar la función logarítmica como resultado de la integración y llegar a la función exponencial resolviendo la ecuación $log\, u = x$.

- La fuerza del concepto función logarítmica y exponencial (nuevas oportunidades que originan nuevos conceptos, características únicas y propiedades relevantes del concepto, relación con otros conceptos, sub-tópicos o subcomponentes, visto desde una manera multidireccional e integral).

El desarrollo de la teoría logarítmica y exponencial fue de gran relevancia dentro de la matemática misma, ya que permitió el desarrollo y origen de nuevos conceptos. También, mostraremos que la función exponencial tiene unas características propias que la hacen diferente a las demás funciones.

En cuanto a la relevancia en las matemáticas de la teoría exponencial y logarítmica, vemos que permitió el desarrollo de los números complejos, ya que fue necesario desarrollar el álgebra de los números imaginarios para a si mismo consolidar la teoría. Por otro lado, el trabajo con los imaginarios permitió la invención de los cuaterniones. También se reconoce que en la búsqueda de una representación de los números complejos se da origen al diagrama de Wessel y Argand y a los esquemas de Karsten y Riemann (esto es expuesto con mayor detalle en el hito de relaciones entre conceptos). Otro concepto importante desarrollado a través de esta teoría y que es muy reconocido hoy en día en diferentes ámbitos es la espiral logarítmica. Es evidente que la teoría logarítmica y exponencial contribuyó de una manera determinante en la evolución de las matemáticas.

Dentro de las características específicas del concepto de función logarítmica y exponencial se encuentran las siguientes: la relación particular que se puede establecer entre las dos sucesiones, la aritmética y la geométrica; la forma especial de variación de la función exponencial; en estrecha relación con la anterior, se encuentra que la derivada de la función exponencial corresponde a la misma función; y por último se distingue que la función logaritmo no se puede generalizar sin la función exponencial y viceversa, además dicha generalización solo es posible utilizando el conjunto de los números complejos. Un panorama más amplio sobre la fuerza del concepto se puede reconocer en el hito de relaciones entre conceptos en el apartado 4.3.1.

- Repertorio básico (conocer y tener fácil acceso a familias de ejemplos específicos, ejemplos potentes que ilustran principios importantes, propiedades, teoremas, etc., aspectos prácticos en la escuela que se incluyen en el currículo)

La historia nos brinda algunas familias de ejemplos que nos muestran ciertas características de cada uno de los conceptos y que podemos utilizar para su comprensión. Entre los que podemos encontrar:

Ejemplos específicos como las tablas realizadas por Napier Bürgi y Briggs que pueden ser utilizadas para explorar y deducir patrones numéricos. Otro ejemplo es la utilización del método *Prosthaphaeresis* para facilitar el proceso de los cálculos de distancias, la forma de calcular el área bajo la curva de la hipérbola cuadrática la cual se aproxima a una integral.

Un ejemplo potente que se muestra en la historia se da en la representación tabular, con la relación de las sucesiones aritméticas y geométricas donde se puede mostrar cómo surge la idea de logaritmo y como se hacen evidentes algunas de sus propiedades como $\log(ab) = \log a + \log\ b$, $\log\left(\frac{a}{b}\right) = loga - \log b$, entre otras. También podemos encontrar ejemplos de cómo surgen y se establecen las propiedades de la función exponencial. (A) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$); (B) $a^x \div a^y = a^{x-y}$; (C) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$; (D) $a^x \div b^x = (a \div b)^x$; (E) $a^{x^y} = a^{x \cdot y}$

Por otra parte, en el estudio de la evolución del concepto de logaritmo se distingue el surgimiento de algunos teoremas como el enunciado por Euler, donde establece que: $log\ n$ tiene un número infinito de logaritmos que son todos imaginarios, excepto cuando n es un número positivo. También aparecen de algunos axiomas como el mostrado a continuación: si se toma la igualdad $l(-a)^2 \neq l(a)^2$, entonces se puede deducir que $2\ l(-\text{a}) = 2\ l(+\text{a})$, pero como se ha visto, $l(a)$ no es igual a $l(-a)$, este es un ejemplo de una contradicción, que, contradice el postulado de que igual dividido por igual da igual, (Cajori, 1913, p. 78).

- Conocimiento y comprensión del concepto función exponencial y logarítmica, (conocimiento conceptual y procedimental del concepto, y las relaciones de éstos).

En relación con el conocimiento conceptual del concepto es claro que todo lo expuesto anteriormente, que se encuentra en la historia aporta a este conocimiento sobre la función logarítmica y exponencial. En cuanto al conocimiento procedimental se distingue que inicialmente se da la idea de logaritmo y a continuación se desarrolla la teoría logarítmica y exponencial, y por último las funciones se constituyen como funciones inversas.

Por otro lado la historia nos muestra el proceso de consolidación de las nociones principales que forman parte del concepto de logaritmo y exponente; entre estas están la variación y covariación, crecimiento, decrecimiento, teoría de potencias, series, las diferentes relaciones que se pueden establecer entre las nociones que forman parte del concepto.

- Conocimiento acerca de la función exponencial y logarítmica (conocimiento acerca de su naturaleza, formas de significado y procesos).

Desde la matemática se reconoce que estas dos funciones son de naturaleza transcendente, es decir que no satisfacen las ecuaciones polinómicas, o que no pueden ser expresadas por una secuencia infinita de operaciones algebraicas.

4.3.1.3.Conocimientos sobre el currículo matemático

- Conocimiento de los propósitos de la instrucción matemática en general, para referirse principalmente a tres aspectos: la importancia de la función exponencial y logarítmica en la escuela, el significado de aprenderla y el valor de cada uno de los contenidos dentro del ámbito escolar.

Desde la historia se corrobora que el concepto de logaritmo es transversal a las diferentes ramas de las matemáticas y a otras disciplinas, lo que indica que a través de este el profesor puede presentar otros conceptos matemáticos, transformando los contenidos curriculares, su pensamiento y los procesos matemáticos en sus prácticas de enseñanza

El profesor entonces podrá hacer emerger los conceptos función logaritmo y exponencial desde diferentes perspectivas, o al menos de forma inusual a como lo venía haciendo, para desarrollar una visión holística y secuencial de los mismos. En este sentido la presentación de su representación analítica y algorítmica, que suele hacerse en la escuela de manera exclusiva, debe ceder el paso a la aproximación conceptual de la misma, de manera que el profesor de más fuerza al proceso de construcción y a la aproximación a sus formas específicas de variación para llegar al concepto de función logaritmo y exponencial.

- Conocimiento de las justificaciones para aprender la función exponencial y logarítmica, que consiste en conocer y utilizar una variedad de formas específicas para la materia, para justificar los tópicos específicos y con ello motivar a los estudiantes para aprender.

Es necesario considerar los esfuerzos que puede realizar el profesor para incidir positivamente en el aprendizaje de los estudiantes, ya sea desde una perspectiva constructivista, que considera el aprendizaje como la transformación de las concepciones de los estudiantes (Simons et al, 2000), o desde los enfoques socioculturales (Lerman, 2001; Llinares, 2000) que analiza las situaciones que crea el profesor en el aula, que pueden favorecer la modificación de las formas de participación de los estudiantes en el desarrollo de la actividad matemática, dotando de significado las nociones matemáticas a partir de una perspectiva individual.

En este sentido, el conocimiento profesional sobre las funciones exponencial y logarítmica no se reduce exclusivamente a lo que el profesor hace en el aula para enseñarlas, sino su comprensión de los recursos que utiliza para realizar las tareas que las definen. Se pueden considerar aquí los materiales didácticos, los instrumentos conceptuales como conceptos y construcciones teóricas generadas a partir de investigaciones históricas en relación con la enseñanza de las funciones exponencial y logarítmica, también el conocimiento generado desde la práctica, con los sistemas de representación, y las tareas-problema planteados por el profesor.

En este proceso es necesario comprender las situaciones que desde la historia son modeladas por la función logaritmo y exponencial, que le sirvan de referente para modelar otras similares. (p.ej. cobro de intereses), como también las ideas subyacentes al concepto logaritmo y exponencial, como lo son la covariación, la variación proporcional, etc. También es fundamental que el profesor tenga una visión de los posibles y variados escenarios, ambientes de aprendizaje desde los que se pueda promover la construcción de éstas funciones, propiciando en los estudiantes la construcción de representaciones propias y de actividades de aprendizaje.

- Conocimiento de las ideas importantes para enseñar la función exponencial y logarítmica, que son aquellas que los alumnos necesitan aprender acerca de estos tópicos, como son los procesos, conceptos del currículo, la capacidad y esfuerzo del estudiante, formas intuitivas de representación y otros.

Se hace necesario que el profesor enseñe la función logaritmo en relación con la función exponencial, ya que históricamente no se puede comprender el surgimiento de la una sin la otra, además guardan ideas que de manera conjunta favorecen la comprensión de los conceptos que la forman. Igualmente, es clave considerar su transversalidad para la construcción de otras nociones y conceptos. Por ejemplo desde las sucesiones aritmética y geométrica se puede llegar a la definición de logaritmo neperiana, como también a las gráficas en el plano cartesiano, y a su representación analítica.

En cuanto a los procesos identificamos los siguientes: la relación numérica entre cantidades y la inferencia de patrones numéricos, de la representación tabular a la representación geométrica-mecánica de puntos en movimiento, la relación covariacional entre cantidades, los procesos de interpretación, representación, y transformación de gráficas, notaciones y modelos a tablas y a otras representaciones analíticas o gráficas.

El desarrollo de estos procesos, basándose en su desarrollo histórico, pueden acercar al profesor al cómo, para qué, a quienes, de la enseñanza de la funciones logarítmica y exponencial, preparando la evaluación de las comprensiones, y rompiendo el paradigma de tener una única respuesta correcta, valorando los esfuerzos y las diversas posibilidades de argumentaciones. Por otra parte le ofrece al profesor formas intuitivas de representación que propicien procesos de comprensión de sus estudiantes, valorando otros prototipos que se puedan dar como respuesta a un asunto propuesto, sin descalificar otros acercamientos a la solución, por tratarse de perspectivas que no encajen dentro de lo común o usual.

- Conocimiento de los prerrequisitos de conocimiento para la función logarítmica y exponencial, en los diferentes momentos del ciclo didáctico y estudio del tópico (ej. tópico dentro del mismo currículo, tópico y herramientas conceptuales y procedimentales previas, experiencia en el manejo del tópico o concepto y experiencia en procesos de pensamiento similares).

La evolución de los conceptos de función logarítmica y exponencial, brinda al profesor una secuencia natural de cómo se dio el desarrollo de estos conceptos, desde la cual se puede construir el desarrollo natural del mismo. De este modo en el currículo, aprovechando los desarrollos que se dieron en la historia, deben estar los significados de variación y covariación, sucesiones aritmética y geométrica, representación de funciones en el plano, teoría de exponentes. Es necesario desde el reconocimiento histórico del logaritmo en los números positivos, hacer la extensión de aquí a los números negativos.

Igualmente es pertinente reconocer y aprovechar que los procesos de pensamientos que se dieron en la historia se pueden reproducir dentro del aula, ya sean aquellos que conllevaron a dificultades o aquellos que permitieron desarrollos.

- Conocimiento de los problemas típicos de la "escuela matemática", que muestre una familiaridad con problemas típicamente encontrados en la instrucción matemática.

El conocimiento de las diferentes paradojas, las discusiones, los intentos fallidos, los errores de representación, que se dieron en el desarrollo y evolución histórica del concepto, le brindan al docente un panorama que le lleve a ser consciente que esto hace parte del desarrollo cotidiano de los procesos de enseñanza, por lo cual es normal que en la escuela se presenten problemas típicos, para que igualmente pueda identificarlos y afrontarlos.

4.3.2. Conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales para enseñar la función logarítmica y exponencial.

4.3.2.1. Conocimientos sobre las representaciones instruccionales

- Comprender el contenido específico que subyace en las representaciones, las relaciones con otras representaciones o conceptos de la misma disciplina y con otros campos de conocimiento, conocer el origen y fundamento de las representaciones, así como las relaciones que subyacen y los procedimientos de verificación y su relación con el conocimiento del proceso de aprendizaje del alumno.

Con respecto a las representaciones instruccionales que pueden ser utilizadas por el profesor encontramos que la historia le aporta a las mismas de la siguiente forma:

La historia nos muestra que las discusiones podrían constituirse en una forma de representación instruccional a través de la cual se puede generar conocimiento matemático. Un ejemplo de lo anterior son las controversias entre grandes matemáticos en torno a la definición del logaritmo de un número negativo. De esta manera el profesor de matemáticas puede reconocer las discusiones como un medio de aprendizaje, donde no necesariamente todos los estudiantes deben estar siempre de acuerdo en torno a una idea. Además con las discusiones el profesor podría reconocer que se generan habilidades comunicativas en sus estudiantes como: argumentar, proponer, justificar, y al mismo tiempo el profesor mejora sus explicaciones, aprende a valorar los argumentos de sus estudiantes, y se retroalimenta del ejercicio.

Otro ejemplo de representación instruccional que nos brinda la historia son las ilustraciones, las cuales actúan como medio a través del cual lograr la motivación y atención de los estudiantes. Estas ilustraciones permiten la visualización de algunas características de los conceptos que no es posible desde otros tipos de representación. Un ejemplo de lo anterior es la representación físico geométrico del logaritmo a través de puntos en movimiento. Con este tipo de ilustración se fomenta además el uso de otros conocimientos como el manejo de escalas, trazado de curvas, o uso de artefactos como la regla y el compás.

- Criterios para desarrollar, evaluar, seleccionar y usar apropiadas representaciones instruccionales; que implica el conocimiento de los estándares de calidad que evalúan las adecuaciones de las representaciones de la función exponencial y logarítmica.

La historia nos brinda criterios para considerar las discusiones como una posible representación instruccional. Lo anterior porque a través de ellas fue posible el desarrollo de los conceptos logarítmico y exponencial, lo que nos lleva a pensar que pueden ser utilizadas para favorecer el desarrollo y producción de matemáticas. Desde la perspectiva de los estándares las discusiones permiten que el estudiante se involucre activamente en el desarrollo de su conocimiento y pensamiento matemático, superando su posición de simple receptor. En cuanto al desarrollo de las representaciones instruccionales la historia brinda al profesor diversas ideas para hacer emerger los conceptos de formas no convencionales, reconstruyendo los conceptos a través de su evolución, brindándonos el criterio de la secuenciación original de los conceptos y facilitando la comunicación de los mismos. Además le permite sugerir nuevas tareas, ideas, ejercicios, y plantear problemas interesantes que desde la historia movilizaron el pensamiento matemático y se pueden constituir en una fuente de investigación y motivación para que los profesores generen otras estrategias y representaciones instruccionales. Un ejemplo de lo anterior es el diseño de las tres tareas planteadas en el desarrollo de este trabajo**.**

- Amplio repertorio de representaciones de la materia que enseñan; que incluye, el estudio de la relación entre las representaciones y recursos instruccionales específicos para la disciplina; así como de analogías, ilustraciones, modelos, metáforas, ejemplos, explicaciones, demostraciones, dibujos, preguntas, actividades, discusiones, exposiciones verbales, diagramas, simulaciones, dramatizaciones y análisis de contenido, así como representaciones verbales, simbólicas, gráficas o concretas , etc.

Las discusiones que se dieron pueden mediar como una estrategia instruccional que sirve para enseñar los conceptos, otra forma es utilizar las paradojas para a partir de la contradicción posibilitar un contexto de participación en la construcción de los conceptos. De la misma forma se pueden usar las situaciones- problema como una estrategia para producir un estado de desequilibrio cognitivo de los estudiantes. También la historia ofrece ideas para la construcción de material didáctico que apoye la enseñanza de conceptos. Además utilizar las explicaciones como parte de su Conocimiento Didáctico de Contenido como habilidad suya para enseñar las funciones. Las ilustraciones se pueden utilizar a través de dibujos o representaciones que posibilitan la comprensión de ideas y conceptos.

- Conocimiento sobre las rutinas instruccionales, que implica estrategias, métodos o técnicas específicas al contenido matemático vinculado con los materiales de instrucción y el conocimiento de las características de las interacciones didácticas, así como de las dificultades cognitivas que implica para su enseñanza y aprendizaje y las alternativas para afrontarlas.

Desde la historia reconocemos que por ejemplo las discusiones entre los pensadores matemáticos se observan ciertas características alrededor de estas interacciones que se replican en el aula de clase, como por ejemplo: la complejidad en dar a entender y comunicar una idea matemática, lo difícil de llegar a acuerdos sobre las posibles soluciones de un problema, el esfuerzo de encontrar el sentido y el significado de un concepto matemático. Este conocimiento le brinda al profesor elementos didácticos para orientar eficazmente las intervenciones en clase y el trabajo de los estudiantes hacia la comprensión de los conceptos.

De otra parte en la historia se puede observar que el uso de ilustraciones para representar conceptos matemáticos permite comprender mejor ciertos aspectos que lo constituyen, en este sentido las ilustraciones se constituyen en un apoyo fundamental de las rutinas instruccionales para la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos. Un caso específico se muestra en la construcción de la segunda tarea de este trabajo en el que las ilustraciones sirven como medio de instrucción para alcanzar uno de los objetivos de la tarea: relacionar el área bajo la curva hipérbola equilátera con el concepto de logaritmo natural.

4.3.2.2.Conocimientos de los materiales curriculares

- De los materiales para la instrucción del contenido matemático o para una determinación, noción, sus características, los textos y materiales básicos y alternativos, software, calculadoras, programas específicos, problemas, ejercicios, guías, proyectos, ilustraciones, casos, materiales visuales, películas de y sobre conceptos o tópicos, demostraciones en laboratorios, programas o simuladores *on-line*, recursos en Internet, etc., y de los materiales curriculares que los estudiantes tienen en otras materias.

La historia de los conceptos de logaritmo y exponencial nos ha permitido conocer el uso de las tablas logarítmicas, que fueron desarrolladas a través de la historia desde Napier, hasta Oughtred (1575-1660), quienes trabajaron en el desarrollo de las tablas logarítmicas incluyendo cada vez más números y aumentando la exactitud de con un mayor número de decimales. Los documentos históricos también nos ofrecen una visión sobre las diferentes notaciones que han existido a través de la evolución de los conceptos, proveyendo de un significado de los conceptos a través de dichas notaciones. También consideramos importante el conocimiento de la existencia de estos textos y documentos históricos, para ser analizados y estudiados.

El conocimiento de la historia le permite al docente emitir juicios de validez sobre los diferentes materiales que se integran al currículo como parte de la instrucción para enseñar la función logaritmo y exponencial, pues mediante el conocimiento histórico reconocerá elementos esenciales relativos al concepto, que debe ser potenciado de alguna forma por los diferentes materiales.

- Del tratamiento y evaluación de los textos y materiales de la materia en cuestión, su organización razonada de tópicos, las actividades y problemas que presentan, sus efectos en el aprendizaje del estudiante, de la relación con el contenido y las estrategias instruccionales que proponen y sobre los criterios de uso, selección y adecuación para la enseñanza o aprendizaje de un tópico matemático.

Como se dijo en el asunto anterior, consideramos que la historia le da al profesor algunos criterios de organización y evaluación de las diferentes propuestas didácticas presentadas en los libros de texto, en lo referente a la presentación de ciertos elementos fundamentales de la función logarítmica y exponencial.

4.3.2.3.Conocimiento sobre el currículo matemático

- Conocimiento sobre la planificación de la enseñanza del contenido matemático, que incluye el conocimiento del diseño, evaluación y modificación del programa escolar, de las características del currículo matemático (según el grado y nivel de enseñanza), de las relaciones con otros contenidos matemáticos y de las tendencias curriculares específicas de la educación matemática.

En cuanto al conocimiento del currículo, diseño, evaluación y modificación del programa escolar, y de encontrar las características de un currículo que se apropiado para cada nivel, la historia de la función exponencial y logarítmica no nos ofrece conocimientos sobre tipos de currículo.

- Conocimiento del currículo de otras disciplinas escolares, que incluye la revisión de programas, textos, materiales y recursos con el objeto de establecer con éstas una mayor vinculación con la matemática y el tópico específico que se trate.

En este asunto, la historia no aporta elementos para el CDC, ya que se limita a reconocer los currículos de otras disciplinas que son específicos en cada una de ellas y por lo tanto no aparece en la historia cómo se organiza el currículo de las otras áreas.

- El diseño e implementación de nuevos materiales de la materia en cuestión, que implica el conocimiento teórico y práctico del estudio del diseño y evaluación de materiales curriculares de contenido matemático.

En este sentido consideramos que la historia no es fundamental, ya que la misma nos aporta los elementos para la elaboración de la herramienta didáctica que va a aportar al CDC del profesor de matemáticas.

4.3.3. Conocimiento de los procesos de aprendizaje de los estudiantes

4.3.3.1.Conocimiento del proceso cognitivo del estudiante en matemáticas

- Conocer las necesidades y conocimientos particulares de los estudiantes, a partir del estudio y observación de su desarrollo (edad, experiencia, antecedentes y escolaridad) y desempeño en el aula, sobre el contenido matemático que aprende, y reconocer la importancia del estudio de las concepciones y dificultades del estudiante como parte inherente e indispensable para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; conocer sus intereses, motivaciones y expectativas relacionados con las matemáticas y con los diferentes tópicos específicos.

Si bien la historia brinda elementos y herramientas para que el profesor de matemáticas construya unas “condiciones instruccionales” que ayuden a transformar y encauzar las concepciones erradas de los estudiantes y también para apoyar la construcción de los conceptos relacionados con la función logarítmica y exponencial, directamente no le permite conocer los aspectos relacionados con el pensamiento del estudiante, con su forma de aprender, o con sus necesidades y conocimientos particulares que pueden tener sobre estos conceptos. Desde esta perspectiva consideramos que en este punto la perspectiva histórica de los conceptos logaritmo y exponencial no nos aporta para este asunto específico.

- Conocer los procesos de aprendizaje de los estudiantes en matemáticas, enfatizando los procesos de comprensión del concepto y las formas de justificación, partiendo de objetos concretos que representen ideas matemáticas, conociendo las diferencias individuales que puede haber en la forma de aprender de los alumnos, el conocimiento de las características del aprendizaje de tópicos concretos (más y menos comunes) y según niveles cognitivos de desarrollo (procesal o conceptual), las formas de conectar las ideas concretas con las abstractas de las matemáticas y de las formas de ir de lo simple a lo complejo; del conocimiento de las intuiciones y heurísticas de los estudiantes; formas de conectar unas ideas con otras; formas en que la mayoría comprende un tópico dado; es decir, algunos aplicados a las matemáticas en general (ej. terminología), a los tópicos y procedimientos específicos de la matemáticas (ej. simplificar), y otros a su concepción o forma de aprender (ej. memorizar reglas sin comprenderlas) y el porqué de estos aspectos; los fundamentos de razonamiento del estudiante.

Conocer la evolución histórica de los conceptos logaritmo y exponencial, le brinda al profesor herramientas didácticas para desarrollar la enseñanza de éstos conceptos, como por ejemplo el conocimiento de ejemplos potentes desde la historia, relacionados directamente con la constitución de los conceptos, o conocer los enfoques matemáticos, o la heurística con que se abordaron éstas nociones por los mismos matemáticos; pero este conocimiento no está relacionado directamente con vislumbrar los procesos de aprendizaje de los estudiantes y los aspectos relacionados: sus formas de aprender, la forma en que conectan sus ideas, o las intuiciones que tienen en un momento dado. Por esto consideramos que en este asunto la historia de los conceptos logarítmico y exponencial no aportan en este aspecto específico

- Conocer las creencias y concepciones inadecuadas comunes de los estudiantes, así como sus interpretaciones, dificultades (o facilidades), obstáculos y errores de los estudiantes del contenido matemático o del tópico específico, como son, por ejemplo, la falta de juicio para utilizar un procedimiento en una situación y que es diferente para otra (especialmente cuando parecen similares); y conocer las atribuciones o causas de éstas.

En el desarrollo histórico de los conceptos podemos reconocer las dificultades y obstáculos que debieron superar los matemáticos para consolidar las ideas sobre los mismos; en este sentido, reconocerlas permite de la misma manera identificarlas en el proceso de comprensión de los estudiantes; es decir, las dificultades históricas en la identificación y elaboración de los conceptos ser reconocen generalmente en las dificultades de aprendizaje que tienen los estudiantes sobre estos conceptos (ver asunto: Conocimiento de los prerrequisitos de un tópico dado, en la categoría: Conocimiento acerca del currículo matemático).

4.3.3.2.Conocimiento del diagnóstico del proceso cognitivo del estudiante

- Conocimiento de técnicas para medir y diagnosticar sus concepciones inadecuadas, que incluye, el análisis de los criterios de selección, uso y adecuación de instrumentos o materiales (genéricos o específicos de la didáctica de las matemáticas) para el diagnóstico de las necesidades, formas de aprender, creencias, errores y dificultades en el aprendizaje del tópico matemático.

En el sentido de reconocer las concepciones de los estudiantes la historia no aporta elementos, ya que se refiere a los procesos cognitivos de los estudiantes, los cuales son reconocidos en el aula a través de la interacción con el estudiante y el análisis de su desempeño y comportamiento frente a los temas en cuestión.

Se podría reconocer un aporte como ya se dijo anteriormente, en el sentido de que en la historia se reconocen algunas dificultades que se presentaron en la evolución del concepto logaritmo y exponencial, y que podrían replicarse en el aula. Esto le permitirá al docente anticiparse y contribuir a superar las posibles concepciones inadecuadas del estudiante, así planear búsqueda de materiales y estrategias que soporten esta dinámica.

4.3.3.3.Conocimiento de estrategias instruccionales

- Conocer las estrategias instruccionales específicas para corregir las creencias y concepciones inadecuadas, errores y dificultades, así como conocer las estrategias instruccionales específicas que pueden ser usadas para permitir que los estudiantes conecten lo que ellos aprenden al conocimiento que ellos ya poseen;

- Conocer las estrategias de aprendizaje de los estudiantes para promover la adquisición, organización y almacenamiento del contenido matemático, que implica, conocer estrategias para promover el recuerdo, la memorización y la comprensión; y conocer los contextos significativos de aprendizaje de los estudiantes, desde los más primitivos hasta los más sofisticados;

- Conocer los materiales curriculares, utilizados como parte de las estrategias instruccionales para corregir las dificultades y concepciones inadecuadas de los estudiantes.

Consideramos que la historia no aporta al diagnóstico del proceso cognitivo de los estudiantes, en los tres asuntos referidos por Pinto (2010) para esta categoría. Lo anterior, por considerar que los desarrollos matemáticos que se dieron en esta época no fueron a nivel de la escuela, sino en un comunidad de practica que corresponde a un momento histórico diferente, con personajes diferentes, de los cuales podemos inferir algunas de sus actitudes y formas de pensamiento, lo cual no es suficiente para conocer los estudiantes de una época totalmente diferente a la nuestra, con otros problemas sociales, otras herramientas de comunicación y con una visión global. Como se ha dicho antes, los problemas registrados en la historia alrededor del concepto de función logaritmo y exponencial, respecto a sus concepciones inadecuadas, errores y dificultades podrían en algún grado llegar a corresponderse con los que actualmente se presentan en los estudiantes durante su proceso de comprensión.

5. ELABORACIÓN DE LAS HERRAMIENTAS DIDÁCTICAS

A continuación se muestran tres Tareas como Herramientas Didácticas. Cada uno de estas tareas en tanto que son planteadas como ejemplos de estrategias instruccionales que pueden formar parte del conocimiento del profesor de matemáticas, tiene una relación con el desarrollo histórico de los conceptos de exponencial y logaritmo, el CDC del profesor de matemáticas y los Hitos Históricos. La primera tarea ejemplifica las posibles relaciones que se pueden establecer entre los conceptos de potenciación, radicación, logaritmación, a través de la relación entre las sucesiones aritmética y geométrica. Esta tarea consta de cinco partes, cada una de las cuales pretende resaltar ideas claves sobre cada uno de estos conceptos, que esperamos sean apropiadas por el profesor de matemáticas. La segunda tarea ejemplifica la relación del área bajo la curva de la hipérbola equilátera con el logaritmo natural. Esta consta de tres partes; en las dos primeras se muestran dos formas diferentes de aproximación al área bajo la curva y la tercera permite la deducción de las propiedades de los logaritmos. La tercera tarea ejemplifica la actividad matemática alrededor de las notaciones de los conceptos de exponencial y logarítmico. La tarea consta de cuatro partes; en la primera se trabaja con exponentes naturales; en la segunda con exponentes negativos; en la tercera con exponentes fraccionarios y radicales; y en la última, con diferentes notaciones logarítmicas.

Además de esto, cada una de estas tareas muestra los objetivos que fueron trazados en relación con su aporte al CDC del profesor de matemáticas. Igualmente, después de cada una de ellas se hace un análisis de la misma, con el objetivo de identificar la relación entre la historia, desde los Hitos Históricos, y su aporte al CDC.

5.1. TAREA 1: RELACIÓN ENTRE LA SUCESIÓN ARITMÉTICA Y GEOMÉTRICA DESDE LA REPRESENTACIÓN TABULAR

Antes de iniciar con la presentación de nuestra primera tarea queremos señalar que una vez esta fue finalizada, conocimos la propuesta hecha por Toumasis (1993), quien utiliza el mismo fundamento histórico referente a la relación entre las sucesiones aritmética y geométrica. Pero, mientras que la propuesta de Toumasis (1993) fue diseñada para estudiantes de bachillerato, la nuestra está dirigida a la formación de profesores de matemáticas, pensando en el impacto que esta pueda tener en la actividad como docente. Su propuesta, al igual que la nuestra, busca deducir las propiedades de la potenciación y logaritmación y la relación entre los exponentes fraccionarios con la radicación. Toumasis (1993) incluye en su propuesta un procedimiento con el cual guía a sus estudiantes para que comprendan por qué la búsqueda de una base adecuada para la sucesión geométrica conduce al valor e, que corresponde en la actualidad a la base de los logaritmos naturales.

Consideramos que la tarea que presentaremos a continuación se constituye en una herramienta didáctica a través de la cual le brindamos al profesor de matemáticas la posibilidad de nuevas rutas para hacer emerger el concepto de logaritmo, y su relación con las sucesiones y potencias.

OBJETIVO GENERAL: Ofrecer al profesor de matemáticas una herramienta didáctica que le permita reconocer la relación entre los términos de una sucesión aritmética y geométrica como un insumo fundamental a través del cual se apropie de nuevas comprensiones que redunden en el mejoramiento de su práctica docente.

5.1.1. Partes del Ejemplo

5.1.1.1. Parte 1: Cambio de razón

Objetivo: Deducir las propiedades para la potenciación desde la relación existente entre los términos de una sucesión aritmética y geométrica cualquiera.

¿El inventor del ajedrez se hizo rico?

Cuenta la leyenda que el juego de ajedrez fue inventado por un matemático que trabajaba para un rey. Dicho rey estaba muy contento con él, le dijo: "quiero recompensarte." El matemático respondió "mis necesidades son modestas, por favor toma mi tablero de ajedrez y en la primera casilla pon dos granos de trigo, en la siguiente duplica ése dos y pon cuatro, en la siguiente duplica los cuatro y pon ocho y continúa duplicando en cada casilla, éste sería un pago adecuado." Podríamos imaginar que el rey pensó que el matemático era un tonto. "Estaba listo para darle una recompensa de verdad y todo lo que él pidió fueron unos cuantos granos de trigo."

De acuerdo con la leyenda, escribe el número de granos de trigo que correspondió a cada cuadro del tablero de ajedrez (utiliza notación de potencias).

1 2^1	2 2^2	3 2^3	4 2^4	5 2^5	6 2^6	7 2^7	8 2^8
9 2^9	10 2^{10}	11 2^{11}	12 2^{12}	13 2^{13}	14 2^{14}	15 2^{15}	16 2^{16}
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56

57	58	59	60	61	62	63	64

Tabla 1. Cuadro de ajedrez numerado y su relación con el número de granos de trigo

Con la información contenida en la tabla 1 de respuesta a los siguientes interrogantes:

- ¿Cuál es el número de granos de trigo que debe contener el cuadro número 5?
- ¿Cuál es el número de granos de trigo que debe contener el cuadro número 35?
- ¿Cuál es el número de granos de trigo que debe contener el cuadro número n?
- ¿Qué valor obtengo al multiplicar el número de granos de trigo del cuadro 4, por el número de granos de trigo del cuadro 8? Busque la correspondencia con algún cuadro del tablero.
- Multiplique las cantidades de granos de trigo para dos cuadros ubicados en las cuatro primeras filas del tablero ¿Para qué cuadros del tablero el resultado de la cantidad de granos de trigo se corresponde?
- Repita el procedimiento anterior, pero ahora para dos cuadros ubicados en las últimas cuatro filas ¿Qué encuentra?
- ¿Qué concluye respecto al resultado de multiplicar entre las cantidades de trigo de los cuadros del tablero?
- ¿Cuál podría ser la **fórmula general** para hallar el producto entre dos cantidades de granos de trigo de dos cuadros del tablero?
- ¿Qué encuentra cuando divide el número de granos de trigo para dos cuadros consecutivos?
- Divida el número de granos de trigo entre dos cuadros del tablero (cuide que el dividendo sea mayor al divisor) ¿Encuentra algún resultado que no corresponda a alguna de las cantidades del tablero?
- ¿Qué concluye del resultado de dividir entre dos cantidades de trigo del tablero?
- ¿Cuál sería la forma más rápida para llegar al resultado de la división entre las cantidades de granos de trigo de dos cuadros sin necesidad de desarrollar las potencias?
- ¿Cuál podría ser la **fórmula general** para efectuar la división entre dos cuadros del tablero?

Utilizando la información dada en el cuadro de ajedrez complete la tabla 2, donde S representa el número de cuadro del tablero, y S_1 representa el número de granos de trigo que debe contener cada cuadrado.

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n
S_1											

Tabla 2. Representa la relación entre el número del cuadro y el número de granos de trigo.

- Verifique que las fórmulas generales halladas para encontrar el producto y la división entre el número de granos de trigo de dos cuadros del tablero, son aplicables a la a los términos de la secuencia S y S_1, de la tabla 2.

- Complete la tabla 3 suponiendo que la paga exigida por el matemático consistió en la triplicación de tres granos de trigo, que fueron puesto en el cuadro número uno del tablero; es decir, el número de granos de trigo que debe contener cada cuadro con respecto a su anterior es tres veces mayor.

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n
S_1											

Tabla 3. Muestra un incremento de tres veces con respecto al cuadro anterior.

- Verifique que las fórmulas generales para multiplicar y dividir la cantidad de granos de trigo entre dos cuadros del tablero se cumplen en la tabla 3.

- Complete la tabla 4 suponiendo que el primer cuadro tiene medio grano de trigo, el siguiente la mitad y así sucesivamente.

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n
S_1											

Tabla 4. Decremento producido por la multiplicación de 1/2

- Verifique que las fórmulas generales para la multiplicación y división de potencias se siguen cumpliendo para la tabla 4.

Hasta aquí, con el proceso que hemos llevado a cabo, esperamos haberte conducido al hallazgo de dos fórmulas generales que faciliten multiplicar y dividir entre las cantidades de granos de trigo de dos cuadros del tablero. También esperamos que estas fórmulas generales hayan sido relacionadas, con las formular utilizadas, actualidad, para la multiplicación y división entre potencias de igual base. Aclarado lo anterior continuamos…

- Complete la tabla 5 y 6 utilizando -2 como base, donde M representa el número de veces que se debe multiplicar por sí misma la base, y T los respectivos resultados.

M	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	n
T													

Tabla 5. Comportamiento obtenido con la base -2

- Verifique que las fórmulas generales para la multiplicación y división de potencias se siguen cumpliendo para la tabla 4.

M	-14/3	-11/3	-8/3	-5/3	-2/3	1/3	4/3	7/3	10/3	13/3	16/3	19/3	n
T													

Tabla 6. Sucesión aritmética con términos fraccionarios

- Verifique que las fórmulas generales para multiplicar y dividir la cantidad de granos de trigo entre dos cuadros del tablero se sigue cumplen.

- ¿Tiene sentido la idea de multiplicar la base, -2, por el número de veces que indica los términos de la sucesión M?

- ¿Qué dificultades se presentan al tratar de verificar las fórmulas generales para la multiplicación y la división en la tabla 6?

Nota: Un proceso hacia la solución de estas dificultades, se desarrollará en la segunda parte)

- Complete la tabla 7 usando como base $e \approx 2.71828$

M	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	n
T													

Tabla 7. Sucesión geométrica con una razón irracional.

- Verifique que las fórmulas generales para la multiplicación y división de potencias se cumplen en la tabla 7.

Supongamos que N es una sucesión aritmética cuya diferencian entre términos es d y sea H una sucesión geométrica cuya razón es r

N	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	$\dots$	a_{n-2}	a_{n-1}	$\dots$	a_n
H	r^{a_1}	r^{a_2}	r^{a_3}	r^{a_4}	r^{a_5}	r^{a_6}	r^{a_7}	r^{a_8}	$\dots$	$r^{a_{n-2}}$	$r^{a_{n-1}}$	$\dots$	r^{a_n}

Tabla 8. Generalización de la relación entre las sucesiones aritmética y geométrica.

- Verifique que las fórmulas generales para la multiplicación y la división de potencias se cumplen.

5.1.1.2. Parte 2: Uso de la relación entre las sucesiones para la extracción de raíces

Objetivo: Brindar al profesor de matemáticas una forma diferente de comprender cómo la relación entre los términos de las sucesiones aritmética y geométrica se constituye en un medio para entender la extracción de raíces e interpretación de las potencias con exponentes fraccionarios.

Recordemos que el proceso de extracción de raíz de un número consiste en encontrar un número que multiplicado por sí mismo, tantas veces como lo indique el índice de la raíz, sea igual al radicando. Por su lado, la potenciación consiste en multiplicar una razón por sí misma cuantas veces lo indique el exponente; de tal forma que podríamos ver la extracción de una raíz como el proceso de hallar aquella razón que ha sido multiplicada por sí misma un número de veces igual al indicado por el índice de la raíz; no obstante, para la situación donde el número de veces que se ha multiplicado por sí misma la razón sea mayor al indicado en el índice, se procederá a dividir dicho número entre el índice.

De esta forma, en la tabla 9 la serie S indica el número de veces que se ha multiplicado la razón 2 por sí misma, y S_1 el resultado de dicha multiplicación. Como se vio en la parte uno de esta secuencia, la suma de dos los términos de S, corresponde a la multiplicación de los respectivos términos de S_1 y la resta de dos términos de S, corresponde a la división en los términos de S_1.

S	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	n
S_1	1/16	1/8	¼	½	1	2	4	8	16	32	64	128	

Tabla 9. Muestra la relación entre la sucesión aritmética y geométrica

- De acuerdo con la tabla 9 indique ¿Qué operación se obtiene en S_1 cuando se dividen los dos términos de S, que corresponden con los anteriores? (Busque que la división sea exacta)
- ¿Qué condiciones se deben dar para que el resultado de dividir dos términos de S, sea otro término de S?
- Tomando como ejemplo alguno de los casos del punto anterior, encuentre la relación que existe entre los términos de la sucesión S_1 ¿Qué operación identifica?
- Haga corresponder los términos de S, en las incógnitas, de tal forma que sea válida la expresión $\sqrt[n]{a^b} = a^{b/n}$
- Con respecto al punto anterior responda: ¿con qué términos de las sucesiones S y S_1 se pueden hacer corresponder en la ecuación $a, b\ y\ n$ para que la igualdad sea verdadera?

Sea $a = 2$, re-escriba los términos de la sucesión S_1 que sea posible, de acuerdo al patrón mostrado en la tabla 10.

S	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	n
S_1	1/16	1/8	¼	½	1	2	4	8	16	32	64	128	
S_1								$2^{(6/2)}$					
S_1								$\sqrt{2^6}$					

Tabla 10. Relación que permite encontrar el patrón entre los términos de las sucesiones.

- ¿Cuál es la **fórmula general** que permite relacionar una potencia con exponente fraccionario y una raíz?

Para discutir…

Utilizando la fórmula anterior, verifique si se cumplen o no, para los siguientes términos de S y sus correspondientes en S_1:

- a) 0 ÷ -1 = 0 b) 3 ÷ 0 = ¿? c) 3 ÷ 1 = 3 d) 6 ÷ - 3 = 2
- Complete la tabla 11.

S	$-\frac{14}{3}$	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{19}{3}$	n
M						$(-2)^{1/3}$							
M						$\sqrt[3]{-2^1}$							

M						≈-1.26							

Tabla 11. Exponentes fraccionarios y su relación con las raíces.

- Explique la razón por la cual los términos de S corresponden a la extracción de la raíz cúbica de los términos de M.

Sea, $\sqrt[x]{a^n}$, el término de una sucesión geométrica. Escriba:

- El décimo término de la sucesión geométrica.
- El reciproco de la razón.
- El término anterior y el término siguiente. Use el proceso multiplicación por el recíproco.
- Encuentre la diferencia entre los términos en la sucesión aritmética
- Escriba el término de la sucesión geométrica a que corresponde cada uno de los siguientes términos: $-2/5$, $9/7$, $\pi/2$, $7/-5$, h/g. (son términos de diferentes sucesiones).

5.1.1.3. Parte 3: Convenciones en torno a la relación entre los términos de las sucesiones aritmética y geométrica

Objetivo: Brindar un panorama diferente a través del cual el profesor de matemáticas conozca las convenciones en torno a las sucesiones aritmética y geométrica que permiten una posible interpretación de las notaciones para potencias con exponentes negativos, fraccionarios, el uno y el cero; todo lo anterior, como resultado de la relación entre los términos de la sucesión aritmética y geométrica.

Es común que una potencia, a^n, se interprete como la multiplicación reiterada del factor a tantas veces como lo indica n.

M	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	n
T	-1/32	1/16	-1/8	¼	-1/2	1	-2	4	-8	16	-32	64	

Tabla 12. Establece la interpretación de potencias con exponentes no comunes.

De acuerdo con la interpretación anterior de potencia y utilizando la tabla 12 conteste:

- ¿Qué interpretación le merece la potencia 2^0?
- ¿Qué interpretación le da a la potencia 2^{-1}, y en general a cualquier potencia con exponente negativo?
- Verifique que las fórmulas generales para la multiplicación y división de potencias, y la extracción de raíces, definidas en la parte uno y dos de esta secuencia, son consistentes con la ley de los signos ¿qué explicación se le puede atribuir a este hecho? (considere las sucesiones que incluyan términos negativos)
- Dé una posible explicación a la imposibilidad de extraer raíz, de índice par, a un número negativo, desde la relación entre las sucesiones M y T.

De acuerdo con lo que venimos mostrando, para obtener el siguiente término de una sucesión geométrica debemos multiplicarlo por un valor constante, llamado razón o base. Ahora, si lo que queremos es obtener el término anterior de la progresión geométrica, debemos multiplicar el término por el reciproco de la razón, que es equivalente a dividir por dicha razón. Usando lo expuesto anteriormente, complete la tabla 13.

S, representa una sucesión aritmética; mientras que S_1 representa una sucesión geométrica.

S	⋯	-3	-2	-1	0	1	2	3	⋯
S_1	⋯	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	⋯
S_1							2×2		⋯

Tabla 13. Proceso para obtener los términos de una sucesión geométrica mediante la multiplicación de la razón o su reciproco.

- Utilizando la relación entre las series S y S_1, mostrado en la tabla 13, justifique el hecho de que: todo número elevado a uno sea igual al él mismo, y todo número elevado a la cero sea igual a la unidad.

- ¿Qué interpretación se puede dar desde la tabla 13, para cualquier potencia con exponente negativo, manteniendo la idea que el exponente indica el número de veces que se debe multiplicar por sí misma la base 2?

- ¿Qué explicación le merece el hecho que una base deba multiplicarse por sí misma un número de veces igual a 1/3, o un número de veces igual a un fraccionario? (Ver tabla 6 y 11).

5.1.1.4. Parte 4. Uso para los cálculos

Objetivo: Rescatar el procedimiento que condujo hacia una aplicación práctica en los cálculos de la relación entre los términos de las sucesiones aritmética y geométrica, y su vínculo con los logaritmos.

- Ahora, utilizando la sucesión aritmética que se muestra en la tabla 13, encuentre los términos para las sucesiones geométricas S_1, S_2 y S_3, cuyas bases son 4, -3 y 0.9, respectivamente.

S	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12	n
S_1											
S_2											
S_3											

Tabla 14. Cambio de base de la sucesi geométrica.

- ¿Qué diferencia percibe en el comportamiento de los términos de las sucesiones geométricas? ¿Cómo afecta el valor de la base dicho comportamiento?

- ¿Qué procedimiento resultaría útil para lograr que los términos de la sucesión geométrica no crezcan tan rápidamente, o para que la diferencia entre término y término disminuya?

- ¿Qué ventajas tiene la elección de una base pequeña?

- ¿Qué ventajas tiene la elección de una base cercana a la unidad?

- ¿Qué base es adecuada por permitir los cálculos prácticos mediante la aplicación de las propiedades para la multiplicación y la división?

De acuerdo con lo reportado por los historiadores y con base en el procedimiento que venimos desarrollando, es conocido que la sucesión aritmética, S, fue considerada como los logaritmos de los términos de la sucesión geométrica.

Para nuestro caso el logaritmo de un término de la sucesión geométrica corresponde al número de veces que se ha multiplicado por sí misma la razón o base de dicha sucesión, y que es fácilmente visualizado por el término de la sucesión aritmética correspondiente. Esto quiere decir, que los términos de la sucesión aritmética corresponden a los logaritmos de los términos de la sucesión geométrica; que hasta ahora, los hemos relacionado con los exponentes de las potencias.

Cuando pretendemos calcular el logaritmo de un número, necesitamos conocer primero en qué base hacerlo, luego multiplicamos dicha base por sí misma, donde el resultado de la multiplicación indica el número al que corresponde el logaritmo.

De acuerdo con lo anterior, y utilizando las fórmula generales para la multiplicación y la división de las potencias, reescríbalas en términos de logaritmos. Apóyese en la tabla 15 y en la siguiente relación mostrada como ejemplo:

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n
S_1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2^n

Tabla 15.Relación entre la sucesión aritmética y el logaritmo

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $2^7 \cdot 2^2 = 2^{7+2}$; $\log_2 2^{7+2} = 9$; $\log_2 2^7 \cdot 2^2 = \log_2 2^7 + \log_2 2^2$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $\frac{2^7}{2^2} = 2^{7-2}$; $\log_2 2^{7-2} = 5$; $\log_2 \frac{2^7}{2^2} = \log_2 2^7 - \log_2 2^2$

- Observando la relación que muestra entre la potencia y la escritura de los logaritmos, determine la ubicación adecuada para las variables $a, m\ y\ n$ de tal forma que la ecuación sea verdadera

- $a^m \cdot a^n = \log \qquad + \log$

- $\frac{a^m}{a^n} = \log \qquad - \log \qquad -\log$

5.1.1.5. Parte 5: Representación geométrica de la relación entre los términos de las sucesiones

Objetivo: identificar el tipo de co-variación que se presenta entre los términos de la serie aritmética y geométrica.

Para el desarrollo de esta cuarta parte usaremos la tabla 16 y el *applet* 1 cuya explicación se ofrece a continuación.

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n

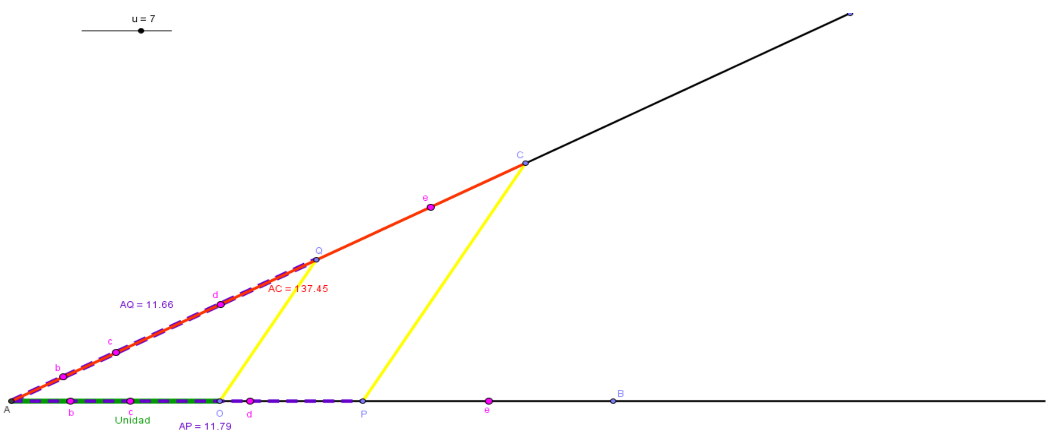
S_1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2^n

Tabla 16. Relación de covariación entre las series.

El ***applet* 1** permite la multiplicación y división entre dos segmentos (Método desarrollado por Descartes en 1637). Así, en azul se muestra las magnitudes de los segmentos que serán multiplicados, y en rojo el segmento que corresponde al resultado de dicha multiplicación, $\overline{AQ} \times \overline{AP} = AC$. Mientras que la división corresponde a la relación entre los siguientes segmentos $\overline{AP} =: \overline{AC} \div AQ$. Las distancias Ab, Ac, Ad, y Ae corresponde a la magnitud de los cuatro primeros términos de la sucesión S_1, los cuales están ubicados sobre las dos semi-rectas que forman el ángulo $<BAN$.

Para el uso del ***applet* 1** tenga en cuenta que: los puntos Q, P y N son móviles. Los dos primeros permiten cambiar la longitud de los segmentos que se quieren multiplicar, y el último permite variar el ángulo de inclinación entre dichos segmentos. El deslizador, u, permite variar la unidad. Una representación real de la longitud de los segmentos, se obtiene para $u = 1$, los demás valores de u solo facilitan visualizar la longitud de los segmentos.

Nota: Es recomendable durante el desarrollo de esta secuencia contar con la visualización



***Applet* 1. Multiplicación y División de segmentos, por el método de Descartes.**

interactiva del *applet* 1, para lo cual es necesario que su equipo de cómputo tenga instalado el software Geogebra. Los *applets* los puede encontrar dentro de la carpeta que ha sido adjuntada al documento actual.

- Multiplique la magnitud de dos segmentos cuyas longitudes pertenezcan a la sucesión S_1 ¿Qué concluye con respecto al segmento obtenido como resultado de la multiplicación?

- Realice la división entre dos términos consecutivos de la sucesión S_1 ¿Qué concluye con respecto al segmento encontrado como resultado?

- Encuentre el punto medio para cada uno de los segmentos Ab, Ac, Ad, y Ae ¿A qué corresponden cada uno de estos puntos?

- ¿Qué implicaciones tiene el comportamiento de los términos de S_1, en el punto anterior, en la co-variación de las sucesiones?

- Usando el *applet* 1 complete en la tabla 16 las sucesiones geométricas para las razones $5/2, 10/3, 7/2$

S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
S_1											
S_2											
S_3											

Tabla 17. Uso del *applet* 1 para encontrar los términos alguna sucesión geométrica.

- ¿Cuál sería el proceso general para hallar los términos de alguna sucesión geométrica de base a

- ¿Qué procedimiento permite hallar el término anterior y el posterior de un término dado?

- ¿Qué procedimiento permite identificar los términos de la sucesión aritmética?

- ¿Qué fórmula o procedimiento permite obtener la suma de todos los términos anteriores a un término dado para la sucesión S_1?

Para reflexionar…

- ¿Cómo lo anterior, permite reflexionar sobre el crecimiento exponencial de una población de bacterias, sobre el consumo de energía, la divulgación de una noticia, el re-envío de mensajes en el correo electrónico, el interés compuesto, entre otros fenómenos, que tienen una co-variación semejante a la mostrada por la relación entre los términos de la sucesión aritmética y geométrica?

- ¿Qué implica la afirmación que en últimos dos mil años se haya consumido la mitad de reservas de energía del planeta? ¿Cuánto tiempo resta para que se agoten por completo las reservas?

5.1.2. Análisis de la tarea: relación entre las series aritméticas y geométricas desde la representación tabular

A continuación se ofrecen una descripción de la tarea haciendo énfasis en dos aspectos importantes. El primero, consiste en mostrar cómo la historia se vincula con este Ejemplo, y cómo se convirtió en nuestra fuente de inspiración. En el segundo, mostramos cómo esta tarea aporta al CDC del profesor de matemáticas.

5.1.2.1. La historia como fuente de inspiración

A través de nuestra revisión documental sobre los conceptos de exponencial y logaritmo, encontramos que la relación entre los términos de la serie aritmética y geométrica fue una de las ideas fundamentales que usó Napier para el desarrollo de la idea de logaritmo. Pese a esto, se encuentra con curiosidad, que esta relación tan marcada durante la mayor parte de su desarrollo y evolución, hoy en día no sea un referente para su enseñanza.

Como dijimos antes, la relación entre los términos de la sucesión aritmética y geométrica, es poco conocida y utilizada por parte de los profesores de matemáticas. Consideramos que esto se debe en gran medida al desconocimiento por parte de profesor de matemáticas de dicha relación y de las eventuales ventajas que ofrecería para la enseñanza de los conceptos logarítmico y exponencial. Otra explicación considerada es la falta de recursos didácticos que le permitan al profesor de matemáticas hacer uso del componente histórico, como un medio facilitador a través del cual dotar de significado los conceptos matemáticos. Carencia que esperamos comenzar a suplir con la elaboración de estas Tareas.

Desde nuestra experiencia personal notamos que algunos conceptos relacionados históricamente (logaritmos, potenciación, radicación, funciones logarítmica y exponencial) se toman como independientes desde el currículo de matemáticas. Es por esta causa que el diseño de esta tarea tiene como objetivo mostrar un camino diferente al profesor de matemáticas que le permita hacer un reconocimiento de la importancia que tiene estas relaciones como parte de la enseñanza de los mismos, y desde este punto de partida logre hacer surgir cada uno de estos conceptos a medida que reconoce la relación entre ellos.

Recordemos que el descubrimiento del logaritmo, en su época, fue considerado como una herramienta invaluable, al facilitar los cálculos con números muy grandes; lo cual, fue un alivio que liberó a los matemáticos del trabajo tedioso que consumía la mayor parte de sus vidas. De igual forma, en épocas no muy lejanas la enseñanza de los logaritmos era prioritaria y se daba a través de las tablas logarítmicas. Todo curso de cálculo incluía saber operar con las tablas logarítmicas, lo cual dejó de ser una preocupación con la invención de la calculadora, la cual ofrece una respuesta inmediata, pero totalmente desvincula del significado como proceso.

Como una forma de rescatar el significado de los procesos dados por la historia, hemos realizado el diseño de esta tarea basándonos en la relación entre los términos de la sucesión aritmética y geométrica. Consideramos que el diseño de la misma como herramienta didáctica, aportará al CDC del profesor de matemáticas brindándole una nueva forma de comprender los conceptos de logaritmo y exponencial.

De acuerdo con Pinto (2010), el diseño de este Ejemplo podría brindar nuevas oportunidades al profesor de matemáticas para hacer emerger nuevos conceptos, desde la comprensión de las relaciones entre ellos. De esta forma, este Ejemplo pretende ser un aporte al primer componente del CDC, consistente en el Conocimiento de los Conceptos exponencial y logarítmico para su enseñanza, en su categoría de Conocimiento Específico del Concepto.

A continuación describimos las cuatro etapas de que consta la tarea, y cómo éstas aportan al CDC del profesor de matemáticas.

5.1.2.2. Aporte de la tarea al CDC del profesor de matemáticas

Cada una las etapas está orientada a que el profesor de matemáticas advierta las razones por las cuales hemos considerado que la relación entre las series aritmética y geométrica es un hecho histórico importante y podría aportar al CDC del profesor de matemáticas. Así, cada una de estas partes consta de una secuencia que tiene la intención de construir, a través de las observaciones propias del profesor de matemáticas, un acercamiento no habitual a los conceptos, que redunde en el fortalecimiento de su CDC

De esta forma, en la primera parte de la secuencia se busca que el profesor de matemáticas deduzca cómo la relación entre los términos de la serie aritmética y geométrica se conserva sin importar la razón o la diferencia entre los términos de dichas sucesiones. De igual forma, le permitirá al profesor de matemáticas reconocer otra forma de llevar a cabo multiplicaciones y divisiones, entre los términos de una sucesión geométrica, de forma rápida y precisa. Además, durante el desarrollo de este proceso, se propiciará en el profesor de matemáticas, la adquisición de nuevo conocimiento tendiente a reforzar o nutrir los conceptos sobre la base de nuevas ideas. Por tanto, la secuencia mostrará alternativas diferentes de abordar o hacer surgir las propiedades de la potenciación y la logaritmación, y su relación entre estos dos conceptos (esto ha sido mostrado en detalle en el Hito: Relación entre Conceptos, ver apartado 4.3.1).

La segunda parte de esta secuencia tiene la intención de brindar, al profesor de matemáticas, una interpretación diferente para las potencias con exponente fraccionario, y su relación con la extracción de raíces, desde la relación existente entre los términos de la sucesión aritmética y geométrica. De esta forma, se puede evidenciar un acercamiento al Hito Relación entre Conceptos, vinculando los conceptos de: logaritmación, radicación y potenciación. Esta nueva interpretación para las potencias con exponente fraccionario, se aleja de la noción común de potencia como la multiplicación reiterada de una base; de esta forma esperamos aportar al CDC del profesor de matemáticas.

En la tercera parte buscamos que el profesor de matemáticas advierta una posible forma de comprender las potencias con exponentes negativos, el exponente uno y cero; desde la relación existente entre los términos de la serie aritmética y geométrica. De igual forma, favorecer que las potencias sean entendidas como una sucesión de términos que se define como el resultado de multiplicar reiteradamente una razón. Finalmente, entender por qué la notación actual para potencias con exponentes no naturales es como es, y qué cuestiones epistemológicas están involucradas en estas decisiones.

Con la cuarta parte de esta secuencia se pretende que el profesor de matemáticas se acerque al proceso de razonamiento llevado a cabo por Napier y Bürgi para lograr que la relación entre los términos de las series aritmética y geométrica se constituya en una herramienta que facilite los cálculos. De esta forma, se puede llegar a comprender cómo se dio el proceso que condujo al descubrimiento del logaritmo.

La última parte de esta secuencia busca, mediante el uso del *applet* 1, que el profesor de matemáticas identifique la forma particular de co-variación que existe entre los términos de una sucesión aritmética y geométrica. También, pretende que el profesor reconozca la aritmética básica que rige el comportamiento exponencial, para que advierta posibles riesgos y pueda dar solución a las diferentes problemáticas ambientales que afronta la sociedad en la cual vive.

5.2. TAREA 2: ÁREA BAJO LA HIPÉRBOLA EQUILÁTERA Y SU RELACIÓN CON EL LOGARITMO NATURAL

Breve reseña histórica:

Para desarrollar esta tarea nos basamos en el planteamiento realizado por Lages (1996) quien desarrolla una aproximación geométrica de la relación entre el área bajo la curva de la hipérbola equilátera y el logaritmo natural de un número, utilizando los métodos de cuadratura de esta área con polígonos rectangulares y trapezoidales para comprobar las propiedades de los logaritmos. Sin embargo este enfoque, como lo reporta Maor (1994) se fundamenta históricamente en los métodos de exhaución planteados por Arquímedes en la Grecia Antigua, para el cálculo de los volúmenes de ciertos cuerpos, expuestos en el método de los indivisibles, por Cavalieri en 1635, en su obra Geometría Indivisible. Posteriormente Fermat en 1640, logra la cuadratura para un conjunto de curvas dadas por la ecuación $y = x^n$. Para esto utiliza rectángulos, ajustando sus anchos para que cada vez sean más pequeños y se acerquen más al área bajo la curva. Para sumar las áreas de los rectángulos utiliza la sumatoria para una serie geométrica infinita y encuentra que el área bajo este tipo de curvas se aproxima a $A = \frac{a^{n+1}}{n+1}$, donde a es el punto a la derecha del intervalo bajo la curva, y n es la potencia de la función. Aunque no logra la cuadratura para la función que nos interesa $y = 1/x$, porque en 0 tiene una discontinuidad (o asíntota vertical), y además porque el exponente para x es -1, cuando se expresa como x^{-1} , de manera que para $n = -1$ el denominador de la fórmula se hace 0. Hasta 1647 es Saint Vincent, quien nota que "… cuando $n = -1$, los rectángulos utilizados para aproximar el área bajo curva de la hipérbola equilátera tienen áreas iguales, verifica además que mientras la distancia entre los polígonos y el punto 0 crece geométricamente, las áreas correspondientes de los mismos crecen aritméticamente, y esto sigue siendo verdadero incluso cuando se hace la transición de rectángulos discretos a la hipérbola continua, esto de hecho implica que la relación entre el área y la distancia es logarítmica. Específicamente si denotamos con $A(t)$ el área bajo la hipérbola desde algún punto de referencia $x > 0$ (por conveniencia escogemos 1) hasta un punto variable $x = t$, tenemos que $A(t) = \log t$." (Maor, 1994, pp. 66-67). Sin embargo fue uno de los alumnos de Saint Vincent: A. de Sarasa, quien escribió esta relación de manera explícita, ver (Cajori, 1913, p. 12), siendo uno de los primeros en utilizar el logaritmo como función logarítmica, utilizándola para estudiar la covariación entre dos fenómenos: el crecimiento de las áreas de los polígonos formados bajo la curva de la hipérbola equilátera y su relación con la distancia de los mismos al punto de referencia cero. Es decir no la utiliza solamente como artefacto de cómputo numérico, como se había utilizado hasta ahora. De esta manera se logra realizar la cuadratura de la hipérbola dos siglos después de que los griegos plantearan el problema.

Sin embargo es necesario responder al hecho de que si bien la fórmula $A(t) = \log t$ da el área bajo la hipérbola (desde $x = 1$ hasta $x = t$), ¿se pueden hacer cálculos numéricos así no haya alguna base implicada? De manera que para hacer que la fórmula funcione debemos elegir la base que mejor corresponda a la relación establecida entre la hipérbola $y = 1/x$ y su área bajo la curva, es decir una particular base "natural" que mejor determine esta área numéricamente, y es la base e para nuestro propósito de ilustrar esta relación.(Lages, 1996,Introducción).

Según Lages (1996) la definición de los logaritmos desde el punto de vista geométrico representa una gran ventaja sobre otras, en cuanto a la simplicidad conceptual y técnica. Esto porque la definición geométrica depende sólo del concepto de área de una figura plana y una propiedad fundamental como: $L(xy) = L(x) + L(y)$ resultando del hecho de que el área de un rectángulo no se altera cuando se multiplica su base por un número y se divide su altura por el mismo número. Además la definición geométrica del número e surge de manera natural y los logaritmos que se definen de esa manera son los de base e. Por último, desigualdades fundamentales como $L\,(1\,+\,x)\,<\,x$ son evidentes cuando $L\,(1\,+\,x)$ es definido como un área. De esta desigualdad resulta por ejemplo, que para valores muy grandes de $x,$ el $L(x)$ es insignificante antes de x. Otra ventaja de utilizar este método es que "…las demostraciones se tornan más simples y los conceptos más intuitivos" (Lages, 1996, p. 10).

5.2.1. Métodos de aproximación al área bajo la curva hipérbola equilátera

Objetivo: Mostrar la relación entre el área bajo la curva de la hipérbola equilátera con la función logaritmo natural en un intervalo dado, aprovechando las posibilidades de exploración que brinda un SGD (Software de geometría dinámica) como Geogebra.

Aporte al profesor de matemáticas: El logaritmo de un número relacionado con el área bajo la curva de la hipérbola equilátera es un buen ejemplo de desarrollo histórico y conceptual dentro de las matemáticas mismas, y es como lo plantea Cajori (1913) uno de los aspectos que contribuyen a la consolidación de la función logarítmica y exponencial dentro del Cálculo. Además de proporcionarle al profesor de matemáticas una nueva aproximación al logaritmo, provee también otros significados del concepto y permite establecer conexiones con otras ramas de las matemáticas, como por ejemplo: la geometría, la teoría de números, y el cálculo infinitesimal. Este aspecto finalmente proporciona al profesor de matemáticas una herramienta conceptual y una nueva visión sobre estas funciones, beneficiando su proceso de enseñanza, y de comprensión de sus estudiantes.

5.2.1.1. Método 1: Aproximación del área bajo la hipérbola equilátera por polígonos rectangulares

Esta Tarea consta de tres secciones, donde se desarrollan cada uno de los métodos de aproximación al área bajo la curva de la hipérbola equilátera: Una primera aproximación utilizando polígonos rectangulares, luego usando los trapecios y finalmente una sección donde se muestran algunas propiedades de los logaritmos, así que se diseña esta secuencia retomando el enfoque planteado en Lages (1996). De igual forma, cada una de estas secciones está dividida en dos partes: en la primera, se hace una descripción de cada método y en la segunda, con el uso de un *applet*, se desarrolla la Tarea a partir de una serie de preguntas.

En relación al porqué del uso del programa Geogebra en el diseño de la Tarea, podemos decir que este permite al profesor una mayor interacción con los sistemas de representación, como lo menciona (Moreno, 2002, p. 64) "… poner a su disposición recursos que estimulen la construcción de significados. El medio funciona como un soporte para el establecimiento de conexiones entre fragmentos de conocimiento". Lo cual está en concordancia con nuestros objetivos de favorecer el CDC del profesor de matemáticas

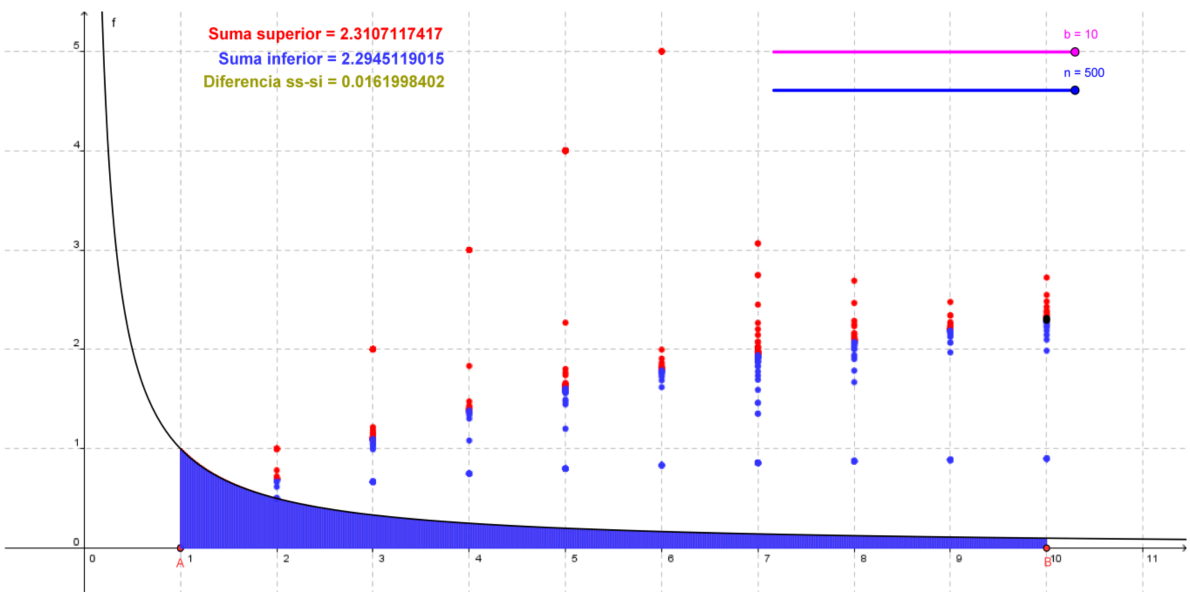
Descripción del método:

Para el desarrollo de esta Tarea graficamos con Geogebra en el plano cartesiano la función $y = 1/x$, asociando a cada número real positivo x el número $y = 1/x$. Siendo H el subconjunto del plano constituido por los puntos de la forma $(x, 1/x)$, donde $x > 0$. En símbolos: { (x, y); $x > 0$, $y = 1/x$}.

Geométricamente H es la rama de la hipérbola $xy = 1$ que está situada en el primer cuadrante, es decir, un punto del plano (x, y) pertenece al conjunto H si y solo si, $x > 0$ y $x.y = 1$. Una región de la hipérbola se obtiene cuando fijamos dos números reales positivos A, B, donde A < B, y tomamos una región del plano limitada por dos rectas verticales $x = A$ y $x = B$, por el eje de las abscisas y por la hipérbola H. Por lo tanto la región H_A^B está formada por los puntos (x, y) cuyas coordenadas cumplen simultáneamente las condiciones: $A \leq x \leq B$ y $0 \leq y \leq 1/x$.

A continuación explicaremos como calculamos el área de una región H_A^B . Por medio de puntos intermedios descomponemos el intervalo $[A, B]$ en un número finito de intervalos yuxtapuestos. Con base en cada uno de los intervalos $[c, d]$ de descomposición (donde $c < d$) consideramos la altura de los rectángulos como $1/d$. El vértice superior derecho de cada uno de esos rectángulos toca a la hipérbola H. Esto es lo que llamaremos un rectángulo inscrito en la región H_A^B . De modo que la reunión de estos rectángulos inscritos constituye lo que llamamos un polígono rectangular inscrito en la región H_A^B.

5.2.1.1.1. Ejemplo del área bajo la curva de la hipérbola equilátera por polígonos rectangulares



***Applet* 2: Aproximación por polígonos del área bajo la curva $y = 1/x$**

DESCRIPCIÓN DEL APPLET 2: El punto A es fijo, el punto B (situado a la derecha del punto A), se mueve con el deslizador b, los polígonos de color rojo representan la suma superior, y los de color azul la suma inferior, el deslizador n varía el número de polígonos. Los puntos rojos muestran la tendencia del área superior de los polígonos, y los azules muestran la tendencia del área inferior de los polígonos.

De acuerdo con la información presentada en la sección anterior y con base en el *applet 2: Aproximación por puntos*, se dan algunas indicaciones, cuyos valores deben ser registrados en la tabla 1.

1. Mueva el punto B (con el deslizador b) hasta $(2{,}0)$, luego aumente el número de polígonos por medio del deslizador n, y observe hacia donde tiende la suma superior y la suma inferior de los polígonos, marcados con los puntos rojos y azules respectivamente.

2. Repita el procedimiento anterior, y ubique el deslizador en $b = 3$ que corresponde al punto $B(3{,}0)$, luego mueva el deslizador n. Observe hacia donde tiende la suma superior y la suma inferior de los polígonos.

3. Repita el mismo procedimiento para $b = 4, 5, 6, \ldots 10$. ¿qué observa con respecto a los puntos hacia los que tiende la suma superior e inferior para cada uno de los valores de b, a medida que aumenta el valor al deslizador n?

4. Registre los valores aproximados hacia los que tiende las sumas superior e inferior de los polígonos para cada uno de los valores de b.

b	Suma Superior	Suma Inferior	Promedio
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Tabla 1. Aproximación de área superior e inferior por el método de polígonos

Observando la tendencia de los puntos para las áreas superiores e inferiores de los polígonos mostrados por el *applet* 2 ¿En qué punto coincidirán las sumas superiores e inferiores para cada valor de b?

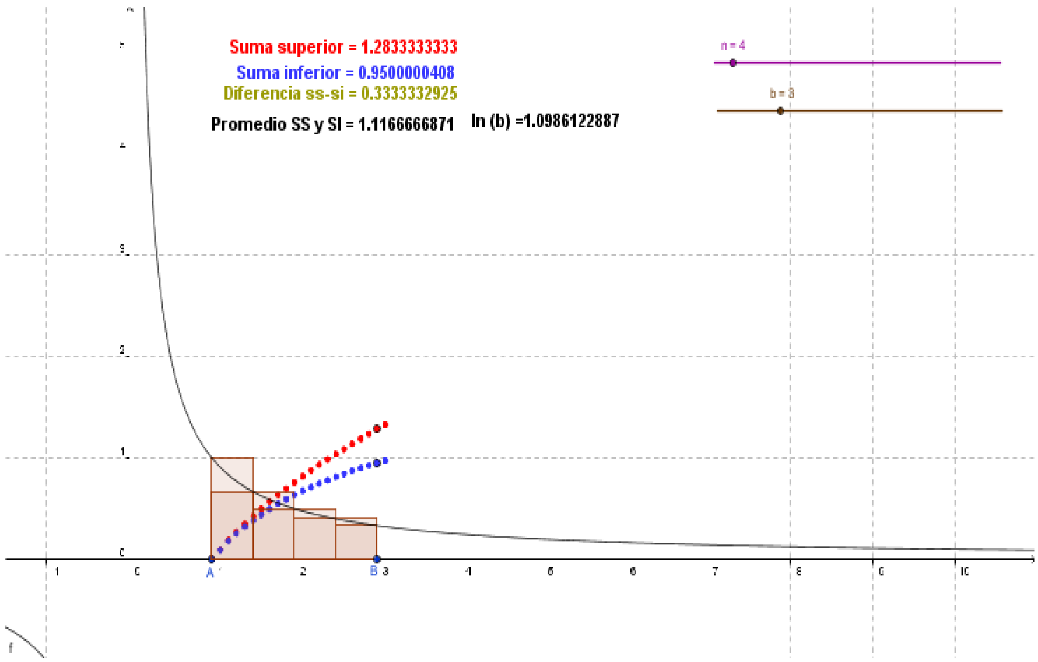
5. ¿Qué relación encuentra entre el valor que toma b y el punto hacia el cual tiende el área superior e inferior de los polígonos?

6. Trace una línea o curva que permite unir los puntos de tendencia de las sumas superiores e inferiores de los polígonos para cada uno de los valores de b.

7. ¿Qué forma describe esta línea o curva? ¿Tiene alguna similitud con alguna función conocida?

5.2.1.1.2. Aproximación por polígonos con rastro

DESCRIPCION APPLET 3: Al igual que en el *applet* 2, en este *applet* el punto A es fijo, el punto B (situado a la derecha del punto A), se mueve con el deslizador b, y las particiones o polígonos rectangulares de color rojo representan la suma superior, los de color azul representan la suma inferior, el deslizador n varía el número de polígonos. Los puntos rojos muestran la tendencia del área superior, y los puntos azules muestran la tendencia de las áreas inferiores, y el punto negro representa el $ln(b)$. Haciendo uso del *applet* 3:



***Applet* 3: Aproximación por polígonos con rastro de área bajo y=1/x**

1. Coloque $n = 1$ y mueve el deslizador b. ¿qué observa con respecto a los puntos rojos y azules? ¿qué representan la suma superior y la suma inferior de los polígonos, para cada valor de b?

2. Ahora mueva n hacia $n = 2$, y repita el procedimiento anterior ¿Qué observa con respecto al rastro dejado por los puntos rojos y azules?

3. Repita el procedimiento anterior para $n =$ 3,4,5,6,10,20,30,40,50 ¿Hacia dónde converge el rastro de los puntos rojos y azules?

4. ¿Qué podrían representar las curvas trazadas por el rastro de puntos rojos y azules?

5. ¿Hacia qué curva convergen las sumas superiores (rojas) y las sumas inferiores (azules) de los polígonos?

6. Cuando movemos el deslizador n hacia la derecha y observamos el punto hacia donde convergen en cada uno de los valores de b, las sumas superiores (puntos rojos) y las sumas inferiores (puntos azules), ¿Qué podemos observar?

7. Realizando una visualización de tipo general (o global) de los puntos de las sumas superiores e inferiores ¿Qué podemos observar? ¿Hacia dónde convergen los mismos?

5.2.1.2. Método 2: Aproximación del área bajo la curva por trapecios

Objetivo: Brindarle al profesor de matemáticas un método diferente de aproximación al área bajo la curva hipérbola equilátera, basado en el método de trapecios secantes.

5.2.1.2.1. Descripción del método de trapecios secantes:

Los métodos de cuadratura de áreas bajo una curva por medio de trapecios secantes y tangentes se remontan históricamente a los métodos de integración numérica desarrollados por Newton y Cotes hacia 1722. Para proponer nuestra Tarea retomamos fundamentalmente esta metodología propuesta también por Lages (1996) y que a lo largo de la descripción de los métodos seguidos, estaremos citando.

El método aquí propuesto para calcular el área bajo la curva de la hipérbola equilátera por medio de trapecios secantes se inspira igualmente en el referido anteriormente y consiste en hacer la cuadratura de ésta área por medio de polígonos trapezoidales secantes. En ésta aproximación los lados inclinados de los trapecios de hecho se aproximan más al área bajo la hipérbola equilátera, que las bases superiores de los rectángulos inscritos, de manera que las aproximaciones al área bajo la curva de la hipérbola equilátera usando éste método son mejores que las encontradas por el método de los polígonos rectangulares.

A continuación observamos de acuerdo con la propuesto por Lages (1996) la aplicación de éste método en la figura 1, en la cual las alturas de los trapecios, que en este caso corresponden a los puntos inicial y final de la base de cada trapecio, están dadas por $1/c$ y $1/d$ de acuerdo con la fórmula de la hipérbola equilátera $y = 1/x$, luego se suman estos puntos $1/c + 1/d$ para cada intervalo. Posteriormente cada uno de estos resultados se multiplica por la base de cada trapecio, que para esta Tarea es $\left(\frac{1}{8}\right)$, esto porque si tomamos 4 trapecios secantes el ancho de cada base o intervalo es $(\frac{1}{4})$; y la mitad de cada una de estas bases es $(\frac{1}{8})$. Finalmente al sumar los resultados de estos productos obtenemos un resultado aproximado al área bajo la curva hipérbola equilátera en el intervalo que se tome, y que resulta en una mejor aproximación

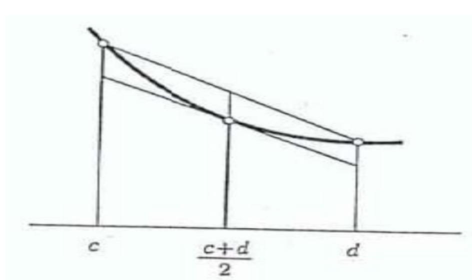
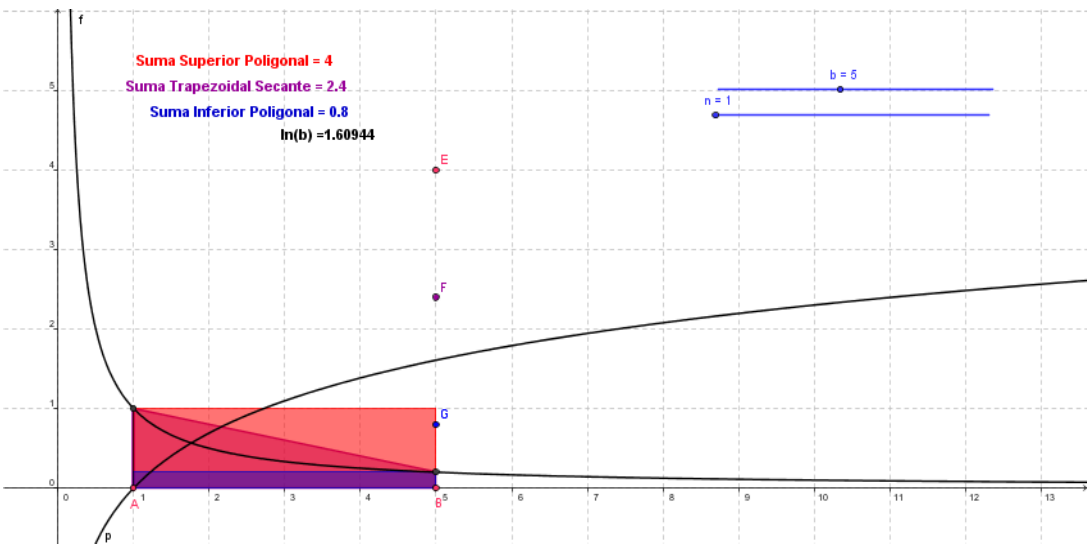


Fig.1: Trapecio secante y tangente a la curva y =1/x. Tomado de Lages, 2006, p.36.

al área bajo esta curva si se toman mayor número de trapecios secantes y una mayor subdivisión en el número de intervalos.

5.2.1.2.2. Ejemplo de la aproximación del área bajo la curva por trapecios secantes

DESCRIPCIÓN DEL APPLET 4: El punto A es fijo, el punto B se mueve con el deslizador b, y el deslizador n varía el número de particiones, representado por el número de polígonos o trapecios. Los polígonos rectangulares de color rojo representan la suma superior, los de color azul representan la suma inferior, y la suma trapezoidal secante está representada por los trapecios de color morado. También se muestra la curva $y = 1/x$ como la curva $y = \ ln x$.



***Applet* 4: Suma Trapezoidal del área bajo la curva y=1/x**

De acuerdo con lo observado en la sección 1, notamos que las sumas superiores e inferiores de los polígonos se aproximan al comportamiento de la función logaritmo natural.

1. Ubique el deslizador b, en $b = 2$, luego mueva el deslizador n de tal forma que éste aumente hasta $n = 10$. Registre los valores obtenidos en la tabla 2

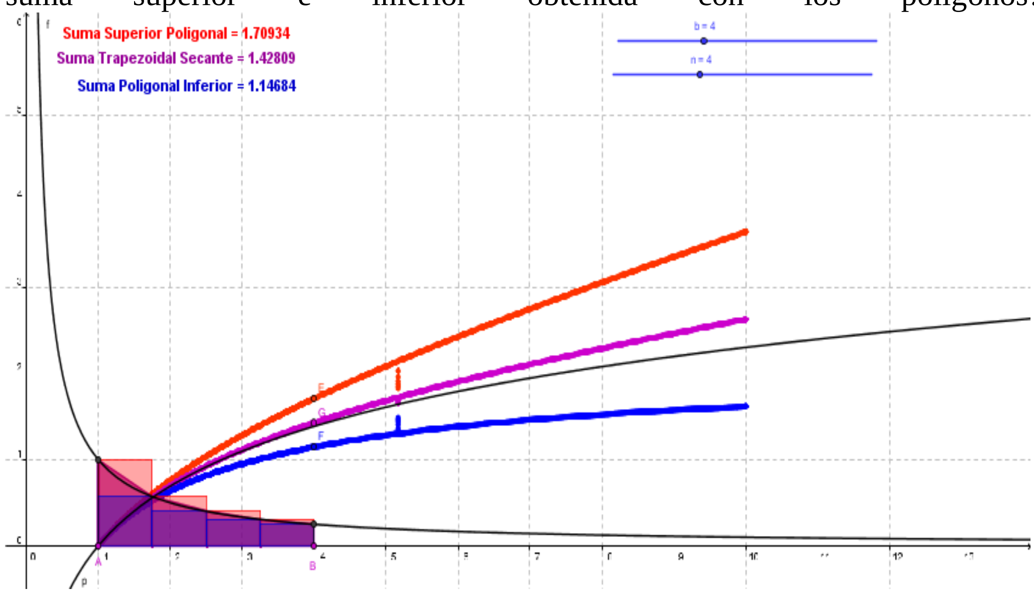
2. Repita el mismo procedimiento del punto 1, para los diferentes valores de b, y registre dichos resultados en la tabla 2.

b	Suma Superior Poligonal	Suma Inferior Poligonal	Suma Trapezoidal Secante
1			
2			
3			

4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Tabla 2: Aproximación del área superior e inferior con polígonos trapezoidales secantes

3. ¿qué concluye con respecto al valor de la suma trapezoidal en relación con la suma superior e inferior obtenida con los polígonos?



***Applet* 5: Suma de polígonos y trapecios del área bajo la curva $y = 1/x$**

4. Ubique el deslizador n, en $n = 1$ y, luego mueva el deslizador b.
5. Ubique el deslizador n, en cada uno de los siguientes valores: $n = 2, 3, 4, \ldots$ hasta $n = 10$, y luego mueva el deslizador b, de tal manera que se observe el rastro dejado por los puntos que corresponden a la suma superior e inferior poligonal, y la suma trapezoidal.
6. ¿Qué concluye en relación a las curvas trazadas por los puntos?, ¿cuál de ellas se acerca más a la función logaritmo natural? Justifique el hecho anterior.

7. ¿Se puede concluir que los puntos trazados a medida que se mueve el deslizador b hacen parte de una gráfica general? ¿De cuál gráfica?

8. ¿Es posible hablar del lugar geométrico de los puntos rojos y azules que convergen?

5.2.1.3. Aproximación a algunas propiedades del área bajo la curva

Objetivo: Mostrar de forma gráfica algunas propiedades de los logaritmos naturales que le permitan al profesor de matemáticas una visualización geométrica de las mismas

5.2.1.3.1. Descripción del método: otra base para el área bajo la curva $\boldsymbol{y = k/x}$

Siendo k una constante positiva, y según lo propuesto por Lages (1996), en lugar de $y = 1/x$ podemos considerar la hipérbola $y = k/x$ para definir los logaritmos. Para cada valor de k escogido tenemos un nuevo sistema de logaritmos. La elección más ´natural´ es k=1, de ahí que los logaritmos que venimos estudiando se denominen ´´naturales´´.

Dados dos puntos de las abscisas a y b en el eje x, denotamos con $H(k)_A^B$ el área bajo la curva hipérbola $y = k/x$, comprendida entre las rectas $x = a$ y $x = b$. Cuando $k = 1$ el área bajo la hipérbola $y = 1/x$ es $H\,_A^B$, que está comprendida entre las rectas $x = a$ y $x = b$. Entonces afirmamos que el área $H(k)_A^B$, es igual a k veces el área de $H\,_A^B$.

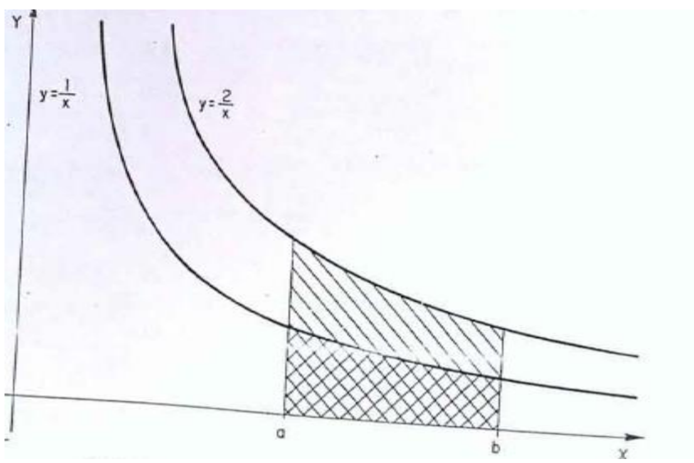
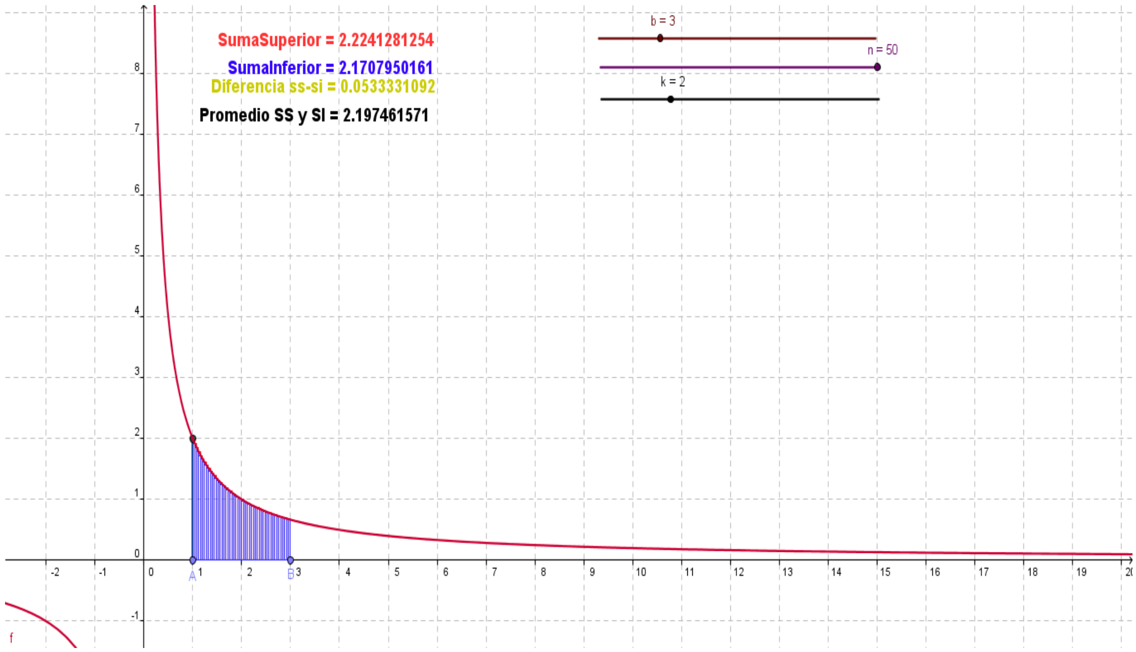


Fig.2: El área de la región $H(2)_a^b$ es el doble del área H_a^b. Tomado de Lages ,2006, p.63

En efecto, según afirma (Lages, 1996, p. 64): "… Dado un segmento $[c, d]$ contenido en el intervalo $[A, B]$ (en la figura 2 de arriba este último intervalo es el mismo $[a, b]$, mientras en los *applets* desarrollados más adelante se toman los puntos inicial y final de cada intervalo como $[A, B]$, Nota de los autores) un rectángulo de base $[c, d]$, inscrito en la hipérbola $y = 1/x$, tiene altura $1/d$, en cuanto que un rectángulo de la misma base, inscrito en la hipérbola $y = \ k$ tiene una altura k/d . Luego el área del segundo es k veces el área del primero. De aquí que toda subdivisión del intervalo $[A, B]$ determina dos polígonos rectangulares, uno inscrito en la región $H\,_A^B$ y otro inscrito en la región $H(k)\,_A^B$. Luego el área del segundo es k veces el área del primero. Concluimos que: El área de $H(k)\,_A^B = k$ x Área de $H\,_A^B$, de manera que son dos números reales con las mismas aproximaciones inferiores. Entonces fijada una constante $k > 0$, introducimos un nuevo sistema de logaritmos, puesto que por definición para cada $x > 0$: log x = Área de $H(k)\,{}_{1}^{x}$. Como acabamos de ver esto equivale a afirmar que: $log\ x = k.lnx$ "

5.2.1.3.2. Ejemplo de otra base para el área bajo la curva $y = k/x$



***Applet* 6: Otras bases para $y = k/x$**

Con base en el *applet* 6 y teniendo en cuenta que: el deslizador b permite mover el punto B y que el deslizador n determina el número de polígonos (o particiones). Desarrolle los siguientes puntos:

1. Complete la tabla 3 registrando los valores para la suma superior e inferior de los polígonos. Tome $n = 50$, $b = 2$ y luego varíe k.Registre los valores obtenidos en la tabla.

2. Cambie el deslizador k, de tal manera que tome los valores $k = 1,2,3,\cdots,5$. ¿Qué ocurre con el valor para las sumas superior e inferior de los polígonos en cada caso?

K	b=2	b=3	b=4	b=5
1				
2				
3				
4				
5				

Tabla 3: Promedio superior e inferior a las curvas $y = k/x$

3. Verifique que este comportamiento se obtiene para cualquier valor que tome el deslizador b ¿Qué puede concluir con respecto a lo anterior?

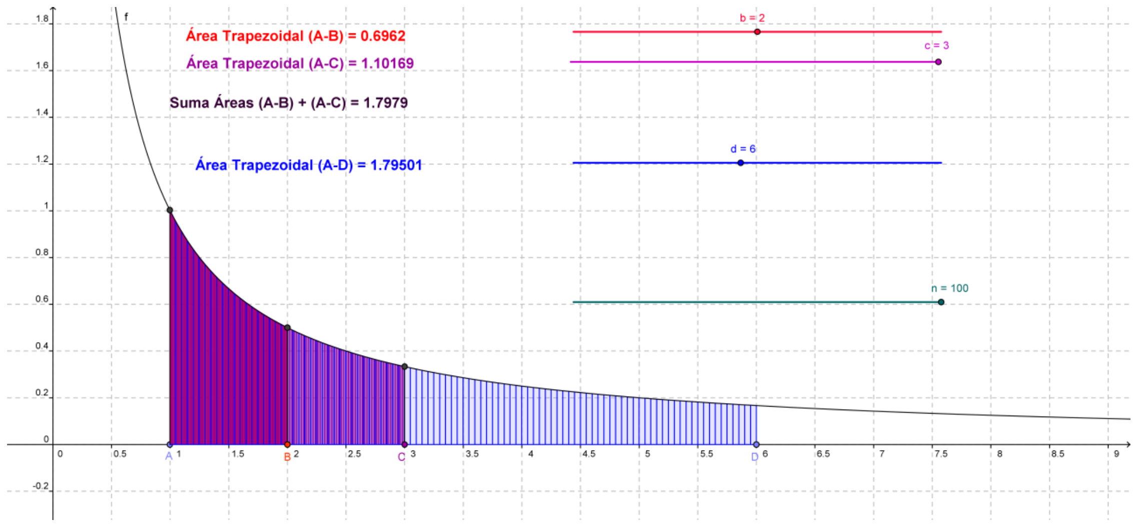
4. Escriba las sumas superiores e inferiores de los polígonos en términos de k.

5. Si las sumas inferior y superior de los polígonos representan el logaritmo del valor tomado en b, escriba el valor para cualquier b, en términos de k.

5.2.1.4. Aproximación a otras propiedades logarítmicas del área bajo la curva de la hipérbola equilátera.

La propiedad logarítmica $ln\,(xy) = ln\,x + ln\,y$ se puede verificar a través de la propiedad del área bajo una curva: Área H_1^{xy} = Área (H_1^x) + Área (H_1^y). De la misma manera por medio del área bajo la curva de la hipérbola equilátera se puede comprobar que la propiedad que $ln\ e$ =1.

5.2.1.4.1. Ejemplo de otras propiedades para el área bajo la hipérbola equilátera



Applet **7. Relación Series Aritmética y Geométrica con área bajo $y = 1/x$**

DESCRIPCIÓN DEL APPLET 7: Este *applet* consta de tres deslizadores. Los deslizadores b y c representan los números a los cuales se les va a calcular el logaritmo, rojo y morado respectivamente y el deslizador n controla el número de trapecios. El punto A es fijo, mientras que los puntos B y C son puntos móviles, controlados por los respectivos deslizadores.

En este punto es importante decir que el área bajo la curva de la hipérbola equilátera también guarda la relación entre los términos de una serie aritmética y geométrica a la que nos referimos en el Ejemplo uno.

Para las siguientes instrucciones tenga en cuenta que el deslizador n este ubicado en $n = 100$.

1. Ubique el deslizador b en $b = 2$, y registre el área trapezoidal en la tabla 4.

2. Ubique el deslizador c en $c = 3$, y registre el área trapezoidal en la tabla 4.

3. Realice la suma de las áreas trapezoidales de los 2 puntos anteriores. Mueva el deslizador d hasta que el área trapezoidal sea lo más próxima posible a la suma obtenida en el punto 3.

4. ¿Qué relación encuentra para los valores que toman los deslizadores b, c y d?

5. Realice el mismo procedimiento para completar la tabla 4, asignando los valores mostrados en la tabla 4 para los deslizadores b y c De tal manera que tome los valores: $k = 1,2,3,\cdots,\ 13.,$.

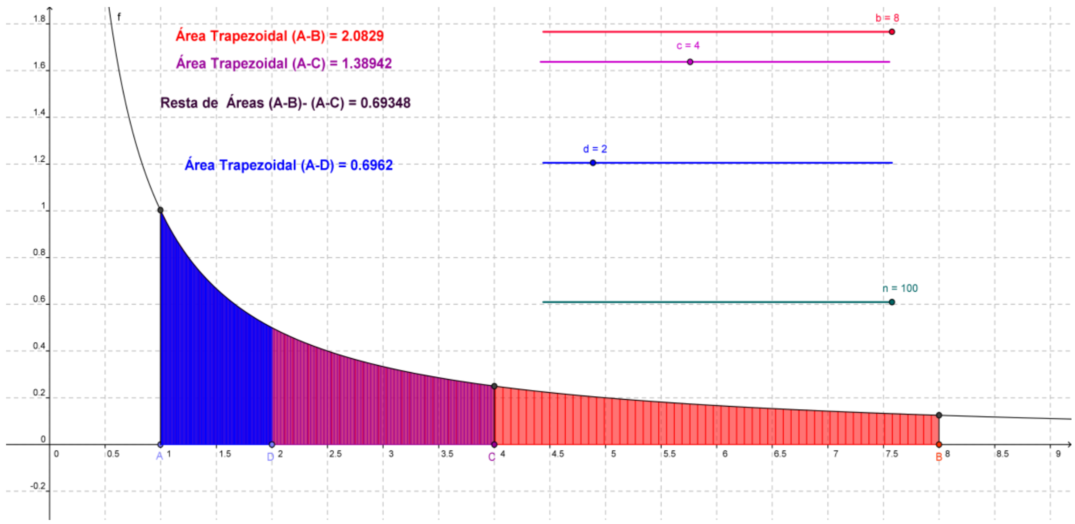
6. ¿Qué relación encuentra entre las áreas trapezoidales y el valor que toman los deslizadores?

Registre la información solicitada en la tabla 4, moviendo el deslizador b y c. Los valores que toma c pueden ser arbitrarios

b	Área Trapezoidal[A,B]	c	Área Trapezoidal [A,C]	Suma Áreas Trapezoidales [A,B]+[B,C]	d	Área Trapezoidal de [A,D]
2		3				

Tabla 4: Relación entre las sumas de las áreas

Para desarrollar las siguientes instrucciones tenga en cuenta que el valor del deslizador b debe ser mayor que el del deslizador c, de tal forma que la resta de las áreas siempre sea positiva.



***Applet* 8. Relación Serie Aritmética y Geométrica con la resta**

7. Ubique el deslizador b en $b = 8$, y registre el área trapezoidal en la tabla 5.

b	Área Trapezoidal[A,B]	c	Área Trapezoidal [A,C]	Suma Áreas Trapezoidales [A,B]-[B,C]	d	Área Trapezoidal de [A,D]
8		4				

Tabla 5. Relación entre la diferencia de las áreas

8. Ubique el deslizador c en $c = 4$, y registre el área trapezoidal en la tabla 5.
9. Mueva el deslizador d, de tal forma que el área trapezoidal se aproxime a la resta de las áreas.
10. ¿Qué relación encuentra entre los valores que toman los deslizadores b, c y d?
11. Repita el procedimiento anterior para otros valores de b y c.
12. Realice el mismo procedimiento para completar la tabla 5, asignando otros valores para los deslizadores b y c.

13. ¿Qué relación encuentra entre las áreas trapezoidales y el valor que toman los deslizadores?

Utilizando los *applets* 7 y 8 siga las siguientes instrucciones:

Con la siguiente información de la tabla 6, responda:

b	Área Trapezoidal
1	0.
2	0.6962
3	1.10169
4	1.38942
5	1.61262
6	1.79501
7	1.94926
8	2.0829
9	

Tabla 6: Área Trapezoidal

14. Sume los valores de las áreas trapezoidales para $b = 1$ y $b = 2$ .Verifique que el resultado corresponde (aproximadamente) a algún otro resultado de las áreas de la tabla.

15. Reste los valores de las áreas trapezoidales en $b = 4$ y $b = 2$. Verifique que el resultado corresponde (aproximadamente) a algún otro resultado de las áreas en la tabla.

16. ¿Qué representa la suma de las áreas trapezoidales con respecto a los valores que toma b?

17. ¿Qué representa la resta de las áreas trapezoidales con respecto a los valores que toma b?

18. Los valores tomados por los deslizadores a, b y c ¿son términos que corresponden a cuál de las dos series: la aritmética o la geométrica?

19. ¿Cuáles son los términos que corresponden a la otra serie?

20. Sabiendo que e, es la razón o base, compruebe que los términos de una de las series equivalen a los exponentes (o logaritmos) para obtener los términos de la serie geométrica. Así e elevado a los diferentes exponentes permite obtener los términos de la serie geométrica.

21. Compruebe que la suma de los términos de la serie aritmética corresponden a la multiplicación de los términos de la serie geométrica.

22. Compruebe que la resta de los términos de la serie aritmética corresponde a la división de los términos de la serie geométrica.

23. ¿Qué relación se puede visualizar con las propiedades de los logaritmos (en relación con la suma, resta, multiplicación, división) con respecto al comportamiento de los términos de la serie aritmética y la serie geométrica?

5.2.2. Análisis de la Tarea: área bajo la hipérbola equilátera y su relación con el logaritmo de un número

5.2.2.1. Relación de la Tarea: área bajo la hipérbola equilátera con nuestra versión de la historia

La relación entre el área bajo la curva de la hipérbola equilátera y el logaritmo de un número es fundamental para profundizar en la comprensión de los conceptos logaritmo y exponencial. Esto debido al proceso de evolución y características de los mismos, que determina que no se puedan comprender profundamente sino es en conexión con otros conceptos y nociones relacionadas como: las sucesiones, las potencias, el cálculo infinitesimal e integral, los números complejos, entre otros.

Estas mismas características de los conceptos logaritmo y exponencial permiten también la visualización de sus diversas representaciones que se desarrollaron históricamente. Aunque a la vez estas representaciones se pueden utilizar para presentar estos conceptos desde diferentes enfoques, como por ejemplo: mediante sucesiones aritméticas y geométricas, a través de su representación gráfica en las coordenadas rectangulares, o en el plano complejo con la espiral logarítmica, también mediante su expresión analítica como función, entre otras.

De tal forma que esta Tarea al presentar la relación entre el área bajo la curva de la hipérbola equilátera y el logaritmo natural de un número pretende aprovechar estas representaciones, como también las otras relaciones que subyacen a la misma y que se dieron también a través de la historia, como lo son: el logaritmo natural de un número y su relación con la cuadratura del área bajo la curva de la hipérbola en un intervalo dado, el vínculo de las sucesiones geométricas y aritméticas con la variación de las áreas de los polígonos y con las sumas superior e inferior de los mismos; esta Tarea entonces es una manera de ilustrar algunas relaciones entre conceptos que aparentemente no tenían que ver en la evolución de las diversas ramas de las matemáticas, en este sentido aporta tanto al Hito de la Relación entre Conceptos como al de los Sistemas de Representación de estos conceptos.

Otro aspecto que es necesario considerar es la manera en que esta Tarea busca dar un uso a la historia, o también se puede plantear como las posibilidades que la Tarea brinda para utilizar la historia como herramienta de conocimiento y enseñanza de las matemáticas. La historia aquí en la Tarea pretende convertirse en el medio para potenciar una comprensión más profunda de los conceptos logaritmo y exponencial, buscando hacer más explícita la construcción matemática de las nociones y otros conceptos subyacentes a los mismos. Es decir busca con la historia profundizar en la comprensión del concepto, no potencializando los aspectos históricos, sino desde la historia potencializar lo matemático, pretendiendo explicar los métodos matemáticamente, y no sólo históricamente; o como lo plantean algunos investigadores: viendo la matemática como algo que puede ser construido y desarrollado, es decir resaltando más su parte creativa que su parte cultural en sí misma. En otras palabras, planteando un uso más implícito de la misma. (Fauvel & Vann Maanen, 2002).

Sin embargo tal y como plantean estos investigadores en HM, es necesario señalar que existen algunos riesgos en el uso que el profesor haga de la historia, por ejemplo se puede caer en el uso fragmentario de la historia, que puede dar a los estudiantes una visión falsa y truncada de lo que son las matemáticas, y también la historia; como también persiste el peligro de dar una educación en historia matemática independiente de las necesidades educativas matemáticas de los estudiantes. Entonces el reto para el profesor de matemáticas es integrar la historia dentro de la enseñanza de las matemáticas, y no al revés (Fauvel & Vann Maanen, 2002).

Pero entonces la pregunta necesaria que surge es: ¿cómo superar este reto en la Tarea que estamos planteando? Pensamos que la evolución de los conceptos logarítmico y exponencial tiene la posibilidad de mostrar las matemáticas como una ciencia en movimiento, y a las matemáticas como una actividad humana, que además establece vínculos fructíferos con otras ramas de las matemáticas, dando la posibilidad de motivar la curiosidad e interés de los estudiantes por conocer este asunto.

También la Tarea busca poner en escena otras herramientas y recursos que brinden elementos de análisis a los estudiantes, por ejemplo desde la posibilidad de visualización o la construcción paso a paso del significado de los conceptos en un contexto dado, con un software de geometría dinámico (SGD) como Geogebra. En este caso se usan los *applets* en Geogebra como una manera de posibilitar que los estudiantes puedan hacer visualización local y global de fenómenos como la convergencia, a través de un conjunto de puntos y de curvas, así como también de familias de funciones, que atienden a las características de la función logarítmica y sus propiedades; de manera que aporte igualmente a los Hitos mencionados anteriormente, desde otro sistema de representación. Sin embargo es necesario aclarar que también aquí se está haciendo un uso implícito de la Historia de las Matemáticas (HM) utilizada para ilustrar otras características de los conceptos en sí, no tanto como un fin en sí misma.

5.2.2.2. Relación de la Tarea: área bajo la curva equilátera y el logaritmo de un número, con el CDC del profesor de matemáticas.

Esta Tarea pretende aportar al CDC del profesor de matemáticas planteando otras formas de aproximación al concepto de logaritmo. Efectivamente al mostrar la relación del área bajo la curva hipérbola equilátera con el logaritmo de un número busca que el profesor disponga de otros enfoques del objeto matemático, y con esto gane mayor profundidad en la presentación del concepto logaritmo y exponencial.

Según esto, en la medida en que el profesor de matemáticas se apropie de elementos históricos involucrados en la evolución de los conceptos logaritmo y exponencial accederá a otras formas de representación de los conceptos, pudiendo evidenciar otros vínculos y conexiones de los mismos con otras ramas al interior de las matemáticas, pero también con diferentes ciencias en general. Con esta perspectiva el profesor de matemáticas gana tanto en conocimiento matemático (conocimiento específico de contenido) como también en el conocimiento meta-matemático (o conocimiento didáctico de contenido). Este último es el mismo conocimiento específico puesto en situación de enseñanza, y contribuye al mismo porque el profesor al tener una visión más profunda sobre las conexiones del logaritmo con otros conceptos relacionados del Cálculo puede hacer más enseñable este concepto, al disponer de riqueza en los enfoques, contextos y relaciones que puede presentar a sus estudiantes. De esta manera la Tarea busca contribuir con uno de los objetivos específicos del trabajo que es ampliar el CDC del profesor de matemáticas, al constituir una herramienta didáctica que pretende apoyar su trabajo en el aula.

Se hace necesario ahora plantear cómo desde las componentes, categorías y asuntos del CDC desarrollados por Pinto (2010) esta tarea contribuye a la formación del profesor de matemáticas, en tanto aporta a la ampliación de las estrategias instruccionales que pueda utilizar para abordar el concepto de lo logarítmico y exponencial. En primera instancia conocer la aproximación geométrica del área bajo la curva de la hipérbola equilátera y su relación con el logaritmo de un número le brinda al profesor de matemáticas unos principios, justificaciones y circunstancias adicionales a las estrictamente analíticas, o algebraicas que normalmente presenta en el aula de clase a sus estudiantes. Esto porque al establecer la conexión entre el área bajo una curva, su desarrollo geométrico y la conexión con la parte algebraica-analítica de la función gana un conocimiento más profundo y sólido que le permitirá implementar otras actividades en el aula distintas a las convencionales que usan generalmente los profesores, como por ejemplo: limitarse a presentar la forma gráfica de la función con sus características básicas en el plano cartesiano, o una tabla de valores en correspondencia con su expresión algebraica. De la misma manera este enfoque geométrico puede brindar otras estrategias de enseñanza y otras maneras de dirigir las actividades e intervenciones de los estudiantes. En este sentido aporta de manera directa al componente del CDC del profesor de matemáticas, que Pinto (2010) denomina: “conocimiento del contenido para enseñar”.

Este enfoque del área bajo la hipérbola equilátera y su relación con el logaritmo natural al mostrar diversas relaciones entre los conceptos y nociones que constituyen éstos conceptos proporciona al profesor formas alternativas de aproximación al concepto como lo menciona Pinto (2010) Al mismo tiempo brinda otros elementos sobre la cultura matemática y la sociedad de la época cuando se constituyeron estos conceptos y relaciones, como por ejemplo la búsqueda de otras formas de representación gráfica de las curvas logarítmica y exponencial, en este aspecto contribuye a la categoría del conocimiento específico de la función exponencial y logarítmica, en esta parte también a uno de sus asuntos: las diferentes representaciones que permite al profesor comprender y enseñar las funciones logarítmica y exponencial. Con esto los estudiantes son conscientes de que un mismo concepto, en este caso el logaritmo de un número, se puede representar de diferentes formas (incluso como el área bajo una hipérbola equilátera), y ver cómo aun así la esencia y características del concepto se mantienen, con esto se aporta esencialmente al componente de las estrategias y representaciones instruccionales, en la categoría contenido específico que subyace en las representaciones; específicamente esto ocurre con los logaritmos en el S.XVII, cuando la representación gráfica de un número variable y de su logaritmo fue posible desarrollarla en coordenadas polares, gracias a Descartes; posteriormente también fue posible otra representación de la misma curva gracias a Bernoulli: la espiral logarítmica; finalmente otra curva importante es la hipérbola equilátera, que consiste en la cuadratura del espacio entre la hipérbola y su asíntota, efectuada por G. de Saint Vincent en 1647. A partir de aquí se comienzan a construir otras propuestas matemáticas muy interesantes en la medida en que permiten vincular las áreas hiperbólicas con los logaritmos y con las series infinitas. Desde este momento se fundamentan teóricamente dentro de las matemáticas los logaritmos, que desde ahí juegan un papel definitivo en el análisis y en las ciencias aplicadas. De paso también permite afianzar la generalidad del concepto y la conexión de algunas ramas de las matemáticas que parecían no estar relacionadas, también como puerta de entrada al estudio del cálculo.

Por último esta Tarea (el área bajo la curva hipérbola equilátera y su relación con el logaritmo) contribuye de manera fundamental a la categoría de conocimiento del contenido para enseñar en relación con la categoría conocimiento específico de la función logarítmica y exponencial, y los asuntos que la componen: las características específicas del concepto, sus diferentes representaciones, sus formas alternativas de aproximación, la fuerza del concepto, su repertorio básico, el conocimiento y comprensión del concepto función logarítmica y exponencial, conocimiento acerca de su naturaleza, significado y proceso. Aporta igualmente al componente de las "representaciones instruccionales" como actividades, preguntas, modelos, analogías; pero también en los materiales curriculares.

Como lo plantean McDiarmid, Ball y Anderson (1989) ejemplos como estos, le permiten al profesor "… tener un conocimiento ´´ flexible ´´, es decir conocer cómo un fenómeno o evento es relacionado con otro fenómeno o hecho, tanto dentro de su campo disciplinario como fuera de éste. Adquirir un conocimiento ´´pensado´´, significa que el profesor se hace consciente de cómo el conocimiento sobre ésta función y su relación con el logaritmo, es generado en su campo y también de las ideas desarrolladas para explicar estas relaciones observadas. Tener un conocimiento ´´conceptual´´ implica que el profesor comprenda ideas fundamentales y relaciones subyacentes a la interpretación de fenómenos o eventos relacionados con éstas funciones.

5.3. TAREA 3: NOTACIONES DE LOS CONCEPTOS LOGARITMO Y EXPONENCIAL

OBJETIVO: Reconocer los diferentes tipos de notaciones que surgieron durante la evolución de los conceptos logaritmo y exponencial, y adicionalmente ampliar el CDC del profesor de matemáticas, por medio de la Tarea como actividad de reflexión sobre las notaciones, registrando la importancia para la actividad matemática y para la enseñanza de los objetos matemáticos en el aula.

5.3.1. Descripción

5.3.1.1. La Tarea

Con esta actividad se pretende reconocer la importancia de la notación, en nuestro caso la notación exponencial y logarítmica, posibilitando diversas interpretaciones que permiten reflexionar sobre su papel dentro de la actividad matemática. También, pretendemos que el docente sea consciente, de cómo el tipo de notación utilizado para representar un objeto matemático influye en la comprensión y manejo de los conceptos, y de esta manera pueda identificar lo que algunas notaciones pueden posibilitar y mostrar del objeto matemático. Por otro lado, comprender por qué se impuso un cierto tipo de notación, y las características que hacen que se utilice hoy en día.

5.3.1.2. Presentación de la Tarea

Durante el desarrollo y evolución de los conceptos logarítmico y exponencial se propusieron diferentes tipos de notaciones para cada uno de los conceptos, estas pueden permitirle al profesor no solo reconocer que dentro de la actividad matemática también se producen discusiones alrededor de la notación y que muchas de estas actividades se desconocen y se dejan de lado en la enseñanza. También le ofrece al docente la oportunidad de proponer diferentes tipos de notación e identificar las ventajas y desventajas de cada una de ellas en cuanto a claridad, eficiencia, y facilidad en el momento de su utilización en la actividad matemática. Dentro del proceso de constitución de los conceptos de lo logarítmico y exponencial se reconoce que hubo propuestas de notaciones simbólicas para las potencias, las cuales estuvieron determinadas por diferentes factores entre los que encontramos: la facilidad para su escritura e impresión y comodidad con operaciones algebraicas y con las matemáticas en general. A continuación se plantean algunos ejemplos de notación propuestos a través de la historia, presentándolos en el siguiente orden: Primero los exponentes positivos, luego los exponentes negativos, a continuación los exponentes radicales y fraccionarios y por último las notaciones para logaritmo.

Para los exponentes positivos tomaremos dos tipos de notaciones sobresalientes en dos épocas distintas. Una que fue propuesta inicialmente por algebristas del siglo XVI hacia el año 1520, en el *Libro Primero de la Arithemetica Algebraica* de Aurel (publicado en Valencia en 1552), de acuerdo con Meavilla (1993, citado en Martínez, 2000). Este tipo de notación tiene como característica principal que los exponentes están representados por símbolos matemáticos de forma gráfica. Un segundo tipo de notación comienza a ser desarrollado en el siglo XVII hacia el año 1620 con la evolución de la teoría logarítmica, este tipo de notación fue presentada por Cajori (1913) en su documento: *History of the Exponential and Logarithmic Concepts* en el que se reconoce un tipo de notación con más símbolos alfanuméricos que gráficos. A continuación hacemos una presentación en cuatro partes: una primera con la representación de exponentes positivos, la segunda representación con exponentes negativos, la tercera representación con exponentes fraccionarios, radicales y racionales y por último las notaciones convencionales para el logaritmo.

5.3.1.3. Notaciones propuestas para exponentes enteros positivos

Nombre	Símbolo utilizado por Marco Aurel	Símbolo actual
Dragma o número	φ	x^0
Rayz o cosa	χ	x

Nombre	Símbolo utilizado por Marco Aurel	Símbolo actual
Dragma o número	φ	x^0
Rayz o cosa	χ	x

Tabla 1. Notaciones de exponentes positivos, Aurel (1552, citado en Martínez, 2000, p.18)

En su propuesta Marco Aurel determina el nombre, símbolo y descripción de cada uno de los diez caracteres llamados "cósicos", los cuales se ejemplificaran más adelante utilizando la multiplicación entre monomios.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ	χ	ξ	ζ	ξξ	β	ξζ	bβ	ξξξ	ζζ

Tabla 2. Relación de los exponentes con las sucesiones a través de la multiplicación, Aurel (1552, citado en Martínez, 2000, p.19)

Para la multiplicación, la regla de Aurel se basa en el comportamiento especial de las sucesiones (La relación entre la sucesión aritmética y la sucesión geométrica), Martínez (2000).

Cuando se quiere multiplicar un carácter con otro, se miran sus grados en la fila de encima, estos se suman, luego en el resultado de esta suma se observa el carácter que está debajo, el cual es el resultado de la multiplicación. A continuación se presentan dos ejemplos:

Notación de Aurel	Notación actual
8ξ 2χ ------ 16ζ	$(8x^2)*(2x)=16x^3$
13ξξ 2ξξ -------- 26ξξξ	$(13x^4)*(2x^4)=26x^8$

Tabla 3. Relaciones de operaciones con notaciones Aurel (1552, citado en Martínez, 2000, p.19)

Luego presentamos las notaciones expuestas en el documento de Cajori (1913), en referencia a los exponentes positivos.

Notación propuesta	Significado	Notación moderna	Ejemplo	Autor
aa	Cuadrado de a.	a^2	$5aa = 5a^2$	René Descartes
A^3	Cubo de a.	a^3	$4A^3 = 4a^3$	Vieta
Ac	a a al cubo	a^3	$7Ac = 7a^3$	Mr. Oughtred
a Ɔ3	a a al cubo	a^3	$5a$ Ɔ3 $= 5a^3$	J.H. Rahn´n
$aaaa$	a Exponente cuatro.	a^4	$8aaaa = 8a^4$	Thomas Harriot
a③	a equis a la tres	ax^3	6 ③ $= 6x^3$	Stevin
12^3	Doce equis a la tres.	$12x^3$	$5^3 = 5x^3$	Chuquet
16^{II}	Dieciséis equis al cuadrado.	$16x^2$	$5^{II} = 5x^2$	Burgui, Reymar y Kepler

Tabla 4. Notaciones de exponentes positivos, Cajori (1913)

5.3.1.4. Notaciones propuestas para exponentes enteros negativos

Para las notaciones de los exponentes con números negativos y fraccionarios tuvimos en cuenta lo expuesto por Cajori (1913) ya que según la historia solo hasta mediados del siglo

XVII son sugeridos los exponentes negativos por autores como Chuquet y Stevin. A continuación presentamos una notación propuesta para exponentes enteros negativos.

Notación propuesta	Significado	Notación moderna	Ejemplo	Autor
7^{1m}	Siete equis a la menos uno.	$7x^{-1}$	$6^{4m} = 6x^{-4}$	Chuquet

Tabla 5. Notaciones de exponentes negativos, Cajori (1913)

5.3.1.5. Notaciones propuestas para exponentes fraccionarios y radicales

En relación con los exponentes fraccionarios propuestos en el documento de Marco Aurel (1552), citado en Martínez (2000), se señala que dentro del pensamiento algebraico los mismos se utilizaron para denotar la raíz cuadrada y la raíz cúbica

Kline (1972) citado en Martínez (2000) señala, “que en 1585 Stevin escribió la expresión $1 + 3x + 6x^2 + x^3$ como:

$$1^{0} \quad + \quad 3^{1} \quad + \quad 6^{2} \quad + \quad {}^{3}$$

Tabla 6. Ejemplo exponentes fraccionarios, (Martínez, 2000, p.20)

Así mismo utiliza los exponentes fraccionarios $1/2$ para la raíz cuadrada y $1/3$ para la raíz cúbica” Martínez (2000).

Notación propuesta	Significado	Notación moderna	Ejemplo	Autor
$a^{3/2}$	Raíz cuadrada de a exponente dos	$\sqrt[2]{a^3}$	$20^{3/2} = \sqrt[2]{20^3}$	Stevin

Tabla 7. Notaciones para exponentes fraccionarios, Martínez (2000)

Ahora, teniendo en cuenta el reporte de Cajori (1913) encontramos las siguientes notaciones para exponentes fraccionarios positivos, negativos y radicales. Estas notaciones están muy ligadas debido a su representación y significado, ya que las raíces, los logaritmos y los exponentes se representan de la misma manera y a veces pueden significar lo mismo.

Notación propuesta	Significado	Notación moderna	Ejemplo	Autor
$\sqrt[2]{a^3}$	a exponente tres medios	$a^{3/2}$	$\sqrt[2]{64} = 4^{3/2}$	Wallis
$\frac{1}{\sqrt{a}}$	a exponente $-1/2$	$a^{-1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = 3^{-1/2}$	Wallis
qa	Primera raíz de a	$\sqrt{a}$	$q9 = \sqrt{9}$	Newton
$\sqrt{a}{:}\,b$	Raíz a de b	$\sqrt[a]{b}$	$\sqrt{3}{:}\,64 = \sqrt[3]{64}$	Newton
ca	Raíz cúbica de a	$\sqrt[3]{a}$	$c8 = \sqrt[3]{8}$	Newton

Tabla 8. Notaciones para exponentes fraccionarios y radicales, Cajori (1913)

5.3.1.6. Notaciones propuestas para logaritmo

Las notaciones aquí presentadas son las reportadas por Cajori (1913), en su documento *History of* the *Exponential and Logarithmic Concepts*.

Notación propuesta	Significado	Notación moderna	Ejemplo	Autor
$b?\,a = x$	Logaritmo de b en base a igual a x	$log_a b = x$	$8?\,2 = 3$ $log_2 8 = 3$	Martín Ohm
$b?\,(a\|\alpha)$	Logaritmo de b en base a igual a α	$log_a b = \alpha$	$8?\,(2\|3)$	Martín Ohm
b $= = x$ a	Logaritmo de b en base a igual a x	$log_a b = \alpha$	8 $= = 3$ 2	Abel Biirja

Tabla 9. Notaciones expuestas para logaritmo, Cajori (1913)

5.3.2. Propuesta de actividades sobre notaciones logarítmicas y exponenciales

El objetivo es desarrollar los ejercicios dejando de lado la notación moderna y operando desde la lógica misma que plantea la notación propuesta, es decir, desde su significado y forma de escritura.

5.3.2.1. Actividad uno: exponentes positivos

La siguiente tabla presenta algunas notaciones expuestas en la historia de los conceptos logarítmico y exponencial, sobre exponentes positivos.

Número	Notación propuesta	Significado
1	$aaaa$	Representa el producto $a \times a \times a \times a$ ..., n veces a
2	A^3	$a \times a \times a$
3	Ac	$a \times a \times a$
4	a Ɔ3	$a \times a \times a$
5	a③	a por x a la tres
6	12^3	Doce por x a la tres
7	16^{II}	Dieciséis por x a la dos

Tabla 10. Notaciones de exponentes positivos y su significado

1. Utilizando la notación uno "aaaa" que representa el producto a×a×a×a…, n veces a y que además es válida para cualquier letra, como "bb". Desarrolle los siguientes ejercicios propuestos sin tener en cuenta la notación moderna pero utilizando las operaciones algebraicas normales.

   a. Escriba el resultado de $23aaa - 10aa$

   b. Escriba el resultado de $5aa \times 6a$

c. Justifique, por qué $16aaa + 20aa$ no es igual a $36aaaaa$

d. Reduzca la siguiente expresión algebraica.

$(16aaaaaa - 20aaaaa + 34bb - 23b + 10) - (15aaaaa + 43aa - 34bb)$

e. Realice la siguientes operaciones

- $(4aaaa - 3abbb + 7cc) \cdot (5aaa + 6bb - 2)$
- $(3a + 2b) \cdot (3a + 2b) \cdot (3a + 2b)$

A propósito de los ejercicios anteriores, desde su perspectiva, ¿qué posibilita y qué dificulta el proceso algebraico con el uso de esta notación?

2. Utilizando la notación cuatro “(aƆb)” que significa “a multiplicada por sí misma b

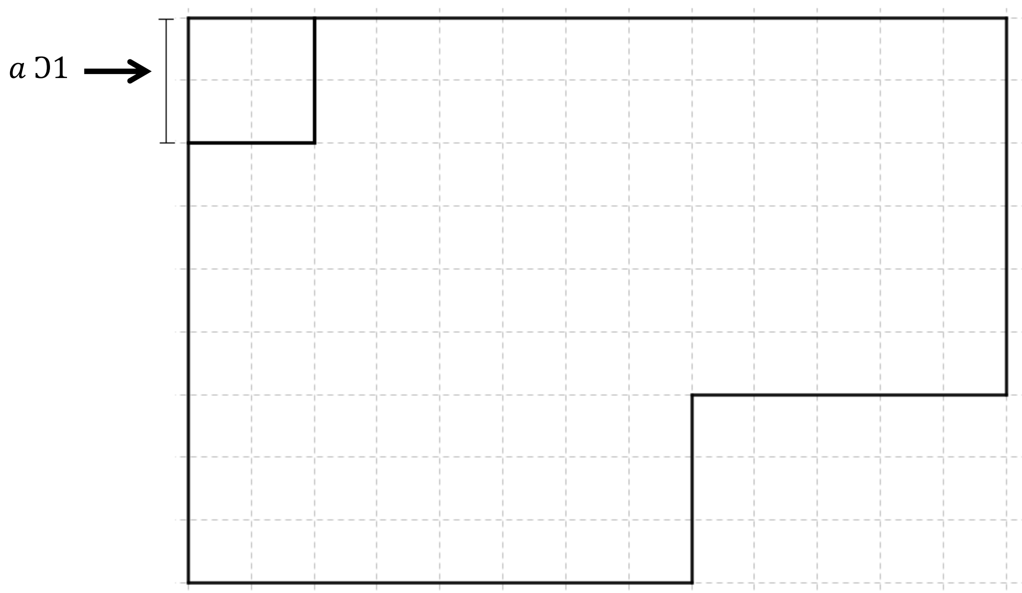


Ilustración 1. Área y perímetro de un polígono

veces”. Calculé el perímetro y el área de la siguiente figura.

3. Ahora, utilizando la notación de tipo seis, ejemplo, “(12^3)” que significa “*doce equis a la tres*” y que se puede generalizar para cualquier número n y exponente m así “n^m".

a. Realice los siguientes ejercicios:

- La expresión $2^3 \cdot 2^4$ es equivalente a:

A. 2^7

B. 4^7

C. 128

- La expresión $10^3 \div 5^2$ es igual a:

A. 2^1

B. 40

C. Ninguna

- El resultado de $4^3 + 4^2$ es, Justifique.

A. 8^5

B. 4^5

C. Ninguna

b. Con el mismo tipo de notación resuelva los siguientes ejercicios:

- $(4^3 + 6^2 - 3^1 + 1) + (24^5 - 18^3 + 21^2 - 45)$
- $(4^3 + 6^2 - 3^1 + 1) \cdot (2^3 + 5^2)$

4. Utilizando la notación siete "5^{II}" que significa "*cinco equis a la dos*" halle el área de cada una de las caras visibles y el volumen de la figura. Tenga en cuenta que, "*el ancho es dos veces la altura y el largo tres veces la altura*".

5. A continuación presentamos la actividad de exponentes positivos a partir de las

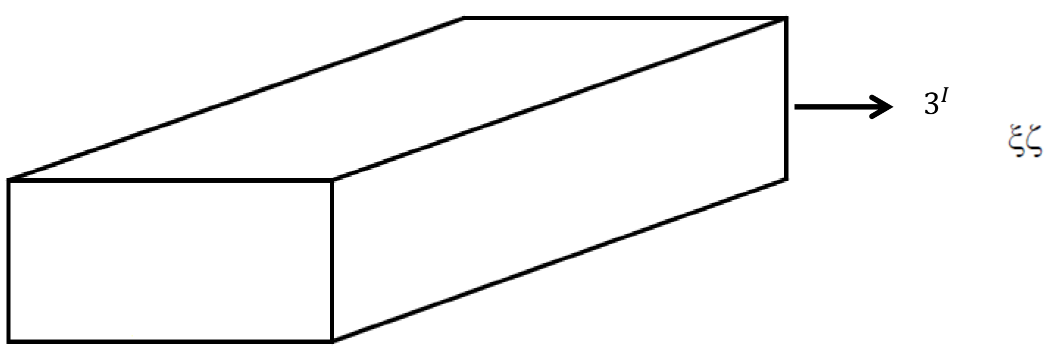


Ilustración 2. Prisma recto

notaciones recogidas por Aurel (1552). Estas notaciones se basan en el comportamiento especial de las sucesiones, de acuerdo con *la relación entre la sucesión aritmética y la sucesión geométrica*, Martínez (2000).

Ejemplo 1. Si se quiere representar $4x^6$ se hace mediante la siguiente notación 4.

Ahora cuando se quiere multiplicar un grado con otro, se observan estos grados en la fila de encima, estos se suman, luego en el resultado de esta suma se observa el carácter que está debajo, el cual es el resultado de la multiplicación.

Ejemplo 2. Si queremos multiplicar $5x^2 \cdot 4x^3$ se va a representar de la siguiente manera: $5 \cdot 4^{\zeta} = 20^{\xi\ \zeta}$

Teniendo en cuenta la tabla anterior conteste las siguientes preguntas y resuelva los ejercicios propuestos.

- ¿Podría explicar por qué la notación de los exponentes $0, 1, 5$ y 7 son diferentes a la demás?

- Complete la siguiente tabla, extendiendo la representación simbólica a otros exponentes según la regla de Marco Aurel, mostrada anteriormente en la tabla 2. Si existe algún número que no se pueda representar justifique su respuesta.

Exponente	10	11	12	13	14	15
Representación						

Tabla11. Representaciones con notaciones de Aurel

- Ahora, teniendo en cuenta el ejemplo que se presenta a continuación y el ejemplo 2 que se presentó anteriormente, realice los siguientes ejercicios.

Notación de Aurel	Notación actual
8ξ 2χ ------ 16ζ	$(8x^2)*(2x)=16x^3$
13ξξ 2ξξ -------- 26ξξξ	$(13x^4)*(2x^4)=26x^8$

Tabla 12. Ejemplo de operaciones con notaciones, Aurel (1552,

Tomado de: Martínez, 2000, p.19)

- $23^{\xi\xi}$ por 7^{β} ________________________
- 13^{ξ} por $-10^{\xi\xi\xi}$ ________________________
- $-5^{b\beta}$ por $-12^{\zeta\zeta}$ ________________________

Teniendo en cuenta las notaciones expuestas en el documento de Cajori (1913) y las expuestas por marco Aurel (1552). ¿Qué diferencias encuentra en cuanto a: significado, operacionalidad, y representación del objeto matemático cuando se utilizan estas notaciones?

5.3.2.2. Actividad dos: exponentes negativos

1. Teniendo en cuenta la notación propuesta en el siguiente cuadro, reportada por Cajori (1913) , realice los ejercicios.

Notación propuesta	Significado
a^{1m}	a equis a la menos uno

Tabla13. Notaciones de exponentes negativos, Cajori (1913)

- Ejemplo. $7x^{-3} = 7^{3m}$

  a. Escriba en este tipo de notación las siguientes expresiones y simplifique:

  - $\left(\frac{1}{4}x^{-5}\right)$
  - $\left(\frac{-3x^{-2}}{(2x)^{-3}}\right)^{-3}$

  b. Resuelve los siguientes ejercicios teniendo en cuenta la notación propuesta.

  - $(-2^{3m})^{5m}$
  - $\left(2^{2m} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\right) \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{3m} - 2^{3m}\right)$
  - $(4)^3 \div 4^{3m}$

¿Qué dificultad puede encontrar al utilizar este tipo de notación en los procesos algebraicos?

5.3.2.3. Actividad tres: exponentes fraccionarios y radicales

La siguiente tabla presenta algunas notaciones propuestas en la evolución de la función logarítmica y exponencial para exponentes fraccionarios y radicales.

Número	Notación propuesta	Significado
1	$\sqrt[2]{a^3}$	a a la tres medios
2	$\frac{1}{\sqrt{a}}$	a a la menos un medio
3	$\sqrt{a}: b$	Raíz a de b
4	qa	Raíz cuadrada de a
5	ca	Raíz cúbica de a

Tabla 14. Notaciones de exponentes fraccionarios y radicales con su significado, Cajori (1913)

1. Teniendo en cuenta la notación tres "$\sqrt{a}: b$" que significa "Raíz a de b" propuesta en la tabla 14, desarrolle los siguientes puntos:

   a. Escribe en notación moderna las siguientes expresiones:

- $\sqrt{3}:\left(\left(\sqrt{2}:5\right)+6\right)$
- $\left(\sqrt{3}:(5x+4)\right)^{\sqrt{2}:10}$

b. Escriba en la forma de notación $\sqrt{a}:b$ las siguientes expresiones.

- $\sqrt[4]{\sqrt[3]{6x}}$
- $c^2 = \sqrt{a^2+b^2}$

c. Cuál es el resultado de $(\sqrt{2}:(3)^4)^2$

d. Halle el perímetro y el área del siguiente triángulo haciendo el proceso de escritura con la notación propuesta.

2. Utilizando la notación cuatro “qa”, que significa “raíz cuadrada de a”, calcule el

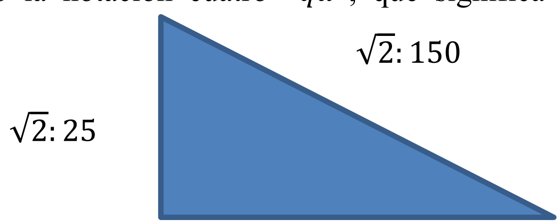


Ilustración 3. Triángulo rectángulo 1

perímetro y área de la siguiente figura.

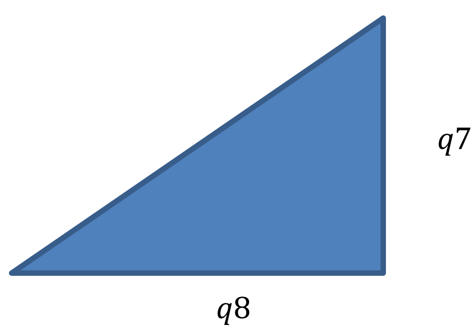


Ilustración 4. Triángulo rectángulo 2

Utilizando la notación de tipo cinco “ca” que significa “*raíz cúbica de* a”, halle la longitud de sus aristas, si consideramos que el volumen de la caja es de 500 cm^3, también utilizando la notación “qa”, que significa “raíz cuadrada de a”, halle la diagonal de las caras.

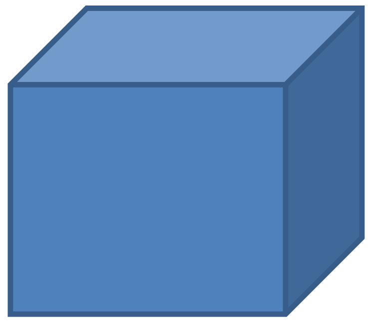


Ilustración 5. Cubo equilátero

5.3.2.4. Actividad cuatro: notaciones logarítmicas

- A continuación se presentan otras notaciones propuestas en la historia; intenta descubrir el significado de la siguiente expresión $b?a = x$ teniendo en cuenta el resultado de x

1. Observe la siguiente secuencia: $1?2 = 0$, $2?2 = 1$, $8?2 = 3$, $16?2 = 4$, …,
   a. Según la secuencia cuáles serían los tres términos siguientes.

   b. Complete las siguientes expresiones

   - $128?2 =$ ______
   - _____$?5 = 4$
   - $64?$____ $= 3$

   c. Puedes indicarnos, cuál es el significado de la expresión $m?n = x$

   d. Después de identificar el significado de la notación, aplique las propiedades de dicha operación y resuelva los siguientes ejercicios:

   - $(32 \div 8)?2 =$
   - $(9 \cdot 27)?3 =$

   e. Escribe en este tipo de notación la expresión $(log_3 81)^2 = 16$

2. Los siguientes ejemplos son dados en este tipo de notación $\overset{m}{\underset{n}{=}} = x$ y la operación cumple la siguiente propiedad.

   - $\overset{(25 \cdot 125)}{\underset{5}{=}} = 5$, es igual a $\overset{25}{\underset{5}{=}} = + \overset{125}{\underset{5}{=}} = = 2 + 3 = 5$

   a. Si identificas cuál es la operación, resuelve el ejercicio y aplica la propiedad.

- $\frac{(32 \div 4)}{2} = \quad =$
- $\frac{(1000 \cdot 10000)}{10} = \quad =$

b. Escribe en notación moderna el resultado $\frac{(64)^2}{4} = \quad =$

c. Resuelve el siguiente ejercicio $log_2 32^3 =$ y escríbelo en la notación indicada anteriormente.

3. Realice los ejercicios propuestos de acuerdo con la interpretación de la siguiente notación $b?\,(a\|\alpha)$:

a. Complete la tabla teniendo en cuenta que $a = 10$

b	1		100		10000		
α	0	1		3	4	5	6

Tabla 15. Interpretación de la notación $b?\,(a\|\alpha)$

b. De acuerdo con el significado de la notación $b?\,(a\|\alpha)$complete las siguientes expresiones.

- $16?\,(4\|\ )$
- $(9 \cdot 27)?\,(3\|\ )$
- $(128 \div 16)?\,(2\|\ ) = 128?\,(2\|\ )$ ______ $16?\,(2\|\ )$

c. Escribe en notación moderna $(16?\,(2\|4))^2 + 1$

d. Escribe en el tipo de notación $b?\,(a\|\alpha)$ la siguiente expresión $\left(\frac{log_5 125}{log_2 16^3}\right)^x$

e. Después de haber analizado las notaciones escribe los significados de las notaciones propuestas.

Número	Notación propuesta	Significado
1	$b?\,a = x$	
2	$b?\,(a\|\alpha)$	

3	$\begin{matrix} b \\ == x \\ a \end{matrix}$	

Tabla 16. Uso de la notación $\begin{matrix} \boldsymbol{b} \\ == \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{a} \end{matrix}$.

5.3.3. Análisis de la tarea

A continuación se presenta la definición sobre lo que es una notación matemática, luego se presenta la fuente de inspiración que motivo la Tarea desde la historia y un análisis sobre los aportes de esta Tarea al CDC del profesor de matemáticas.

5.3.3.1. Notación matemática

La notación matemática es considerada como un lenguaje simbólico formal que sigue convenciones propias, donde los símbolos permiten representar conceptos, operaciones, relaciones, fórmulas y todo tipo de entidades matemáticas. Respecto de los símbolos matemáticos, algunos autores señalan que: “Los símbolos matemáticos no se consideran solamente como abreviaciones si no como entidades escritas con valor completo y autónomo. No quedan por tanto sujetos a normativas de carácter lingüístico o gramatical, sino que siguen su propia lógica del lenguaje formal matemático para combinarse en expresiones y fórmulas según ciertas reglas establecidas, ya sea por, tradición, convenios internacionales, nacionales, locales o personales” (Bezos, 2007, pág. 1)

De acuerdo con lo expuesto en la historia de la función logarítmica y exponencial y de lo enunciado por Bezos (2007), se puede afirmar que las notaciones expuestas en los documentos de Cajori (1913) y Martínez (2000) fueron propuestas por diferentes motivos, como son: el gusto del autor, la facilidad de escritura, las convenciones internacionales y locales, entre otros. Además de que estas notaciones estuvieron sujetas a las normas matemáticas y normas de la comunidad matemática de la época, reflejan su significado de acuerdo con las operaciones en el álgebra, que en ese momento se encontraba en desarrollo, específicamente entre los siglos XVI y XIX.

5.3.3.2. Fuente de inspiración

En el estudio acerca de la evolución de los conceptos logarítmico y exponencial nos encontramos con que una pequeña parte de la actividad matemática estaba dedicada a la notación, a la cual muy pocas veces se le da importancia e interés en los estudios de matemáticas y en la didáctica de la matemática. Fue así como de manera sorpresiva nos encontramos con que existieron discusiones y afanes de algunos matemáticos por proponer ciertos tipos de notaciones, y también con la justificación de cómo unas notaciones se imponían sobre las otras; claro, que esta imposición tenía sus razones, como la facilidad en su escritura, que fue la razón predominante, pero también razones como aquellas que permitían evidenciar más fácilmente las características del objeto matemático que estaba representando. Un ejemplo de ello son las siguientes dos notaciones para logaritmo, el lector podría inclinarse por alguna de ellas, independientemente de las justificaciones $\begin{matrix} b \\ == \\ a \end{matrix}$ x y $b?a = x$, esto nos permitió evidenciar que establecer un tipo de notación para un objeto matemático, se constituye en una parte de la actividad matemática, que llega a consolidar los tipos de notaciones modernas que hoy día conocemos.

Es indudable que con el desarrollo de las ciencias, y específicamente con el de las matemáticas, cada día se encuentran nuevos objetos de conocimiento que necesitan ser representados simbólicamente dentro de su área de conocimiento para su manejo, comprensión y comunicación al resto de la comunidad. Por tanto, consideramos que es importante que este tipo de actividad se dé a conocer a los docentes en formación, ya que cuando nos dirigimos a nuestros estudiantes con el ánimo de enseñar nuevos objetos matemáticos, no nos damos cuenta que el estudiante está aprendiendo una nueva notación con la cual no está familiarizado, aunque para nosotros los docentes, sea evidente su significado y lo que representa. Esta problemática se ha venido estudiado como parte de la educación matemática y específicamente en referencia al concepto de logaritmo como se cita a continuación "…los profesores continúan manifestando la existencia, en sus grupos de estudiantes con dificultades relacionadas con la notación y el significado de la palabra logaritmo" Kenney, 2005; Toumasis, 1993 (citado en González, Pérez & Vargas 2011, p. 129).

En cuanto a la conexión de la Tarea con los Hitos Históricos que se presentaron al inicio del trabajo, encontramos que la Tarea está relacionada con el Hito de las Formas de Notación de lo Exponencial y lo Logarítmico, y en menor grado con el Hito de los Sistemas de Representación de los Logaritmos.

5.3.4. Conexión de la Tarea con el CDC

Para reconocer los aportes que proporciona esta Tarea en relación con las notaciones de la función logarítmica y exponencial para el CDC del profesor de matemáticas, tomamos los argumentos teóricos de Shulman (1986b) y Pinto (2010), que se presentaron en el marco teórico (ver apartado 2.3). Hacemos énfasis en que los aportes están en concordancia con la segunda definición que se tuvo en cuenta en este trabajo, "el CDC es una parte del conocimiento base para la enseñanza, un cuerpo de conocimientos, habilidades, y para algunos, una disposición, que distingue a la enseñanza como una profesión y que incluye aspectos como técnicas racionales y capacidades de juicio, improvisación e intuición" Shulman (1986b, citado en Pinto, 2010, p. 13). En concordancia con esta definición, se tienen en cuenta los tres componentes que el mismo Shulman (1986b) estableció como esenciales para el CDC.

Con respecto a los componentes mencionados, nos basamos en la descripción del CDC hecha por Pinto (2010). Así, desde el enfoque de Pinto, el CDC consta de tres componentes, los cuales a su vez están constituidos por tres categorías y estas a su vez por asuntos. Con esta versión del CDC hicimos una identificación minuciosa a cada uno de los aportes de la Tarea al CDC.

En este sentido podemos afirmar que la Tarea propuesta sobre las notaciones, le aporta al CDC del profesor de matemáticas, en dos de sus componentes en algunas de sus categorías y en algunos asuntos de dichas categorías, como se muestra a continuación:

1. Componente: Conocimiento del Contenido Matemático a Enseñar (es decir, el conocimiento de la materia a enseñar, en nuestro caso el conocimiento de los conceptos logarítmico y exponencial)

a. Conocimientos sobre la actividad matemática general

- Conocimiento de la historia de la disciplina (para nuestro efecto conocimiento de la historia de la evolución de los conceptos logarítmico y exponencial).

Lo anterior lo vemos reflejado a partir de la historia de la evolución de los conceptos logarítmico y exponencial, al igual que en el desarrollo de sus notaciones. De las notaciones podemos decir que no fueron estáticas ni permanentes, sino que también evolucionaron con la teoría. Este tipo de evolución le permite el profesor ampliar su CDC y le da la oportunidad de proponer nuevas actividades en el aula, permitiéndole reconocer algunas dificultades que se pueden presentar en el aula con la presentación de nuevos objetos y notaciones matemáticas.

- Conocimiento del conjunto de procedimientos que sirven de base para que el conocimiento de los conceptos logaritmo y exponencial progrese y avance. Reconocimiento de las principales escuelas y autores que han contribuido a ese desarrollo.

En este asunto el aporte se hace desde el reconocimiento de los matemáticos que participaron en el desarrollo de los conceptos logarítmico y exponencial; específicamente el reconocimiento a quienes fueron los autores de las diferentes notaciones para dichos conceptos, incluyendo las notaciones que no tuvieron relevancia.

- Conocimiento de la ética, valores morales y estéticos del contenido a enseñar, acerca de la cultura matemática y sociedad.

En este sentido podemos observar que el aporte al CDC se da debido a que la notación que prevalece posee características que se podría llamar estéticas en cuanto a la matemática, es decir la “comodidad para el trabajo matemático”, ya sea para su manejo y escritura o porque cierto tipo de notación permite ver ciertos aspectos del objeto representado. Por otro lado, permite identificar que en la historia también existieron discusiones acerca de la notación, ya que esta parte de la historia siempre se ha dejado de lado y los objetos matemáticos se presentan con una notación terminada, desconociendo este tipo de proceso.

b. Conocimiento por tópico específico matemático

- Características esenciales (correspondencia entre idea mental y concepto matemático, imagen del concepto, atributos críticos del concepto, ejemplos **prototipos,** distinción entre ejemplos concretos y no ejemplos, actualización del cambio del concepto)

Respecto a este asunto podemos decir, que los aportes se dan cuando encontramos en la historia los prototipos de notaciones, que fueron propuestos para los conceptos logarítmico y exponencial, los cuales se presentaron en el apartado 4.3.5, sobre el hito de las notaciones de lo logarítmico y exponencial.

- Diferentes representaciones (comprender los conceptos en diferentes representaciones, trasladar y formar conexiones entre estos)

Se puede observar en la Tarea, que cada una de las notaciones presentadas en la historia, nos muestran diferentes formas de representar simbólicamente el objeto matemático, por otra parte permiten explorar otras notaciones y compararlas con las notaciones modernas, llegando a entender la preferencia de los matemáticos por algunas notaciones particulares.

- Conocimiento acerca de las matemáticas (conocimiento acerca de la naturaleza de las matemáticas, formas del significado y procesos)

En este asunto podemos visualizar el aporte, en el momento en que se reconoce el ejercicio de crear una notación como parte de la actividad matemática. Es entendible que dentro de la actividad matemática sea necesaria la representación simbólica, sin la cual el desarrollo de los objetos sería imposible. Por otra parte, la Tarea permite reconocer a la actividad matemática, como una actividad de naturaleza humana, donde se involucra la subjetividad, los intereses personales, y su contexto.

c. Conocimientos sobre el currículo matemático

- Conocimiento de las ideas importantes para enseñar un tópico dado, (que son aquellas que los alumnos necesitan aprender acerca de estos tópicos, como son los procesos, conceptos del currículo, la capacidad y esfuerzo del estudiante, formas intuitivas de representación y otros)

En este asunto se puede reconocer un aporte importante, ya que esta Tarea le permite al docente replantear parte de su currículo en cuanto a los contenidos acerca de los conceptos logarítmico y exponencial. Aquí la Tarea le da la posibilidad de incluir o no actividades relacionadas con las representaciones simbólicas de los objetos matemáticos y permitirle al estudiante proponer formas intuitivas de representación. Es decir, recrear la actividad matemática, que históricamente se dio, acerca de la representación simbólica de los objetos logaritmo y exponencial.

2. Componente: Conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales (consideradas como las estrategias para enseñar el área específica)

a. Conocimiento sobre las representaciones instruccionales

- Comprender el contenido específico que subyace en las representaciones (las relaciones o conceptos de la misma disciplina y con otros campos de conocimiento, conocer el origen y fundamento de las representaciones, así como las relaciones que subyacen y los procedimientos de verificación y su relación con el conocimiento del proceso de aprendizaje del alumno)

Para este asunto, la Tarea aporta al CDC del profesor de matemáticas el origen y el fundamento de las representaciones simbólicas, le permite ampliar su conocimiento sobre las funciones logaritmo y exponencial y su representación; en consecuencia le permite tener elementos de justificación frente a sus estudiantes sobre las representaciones simbólicas utilizadas. Otro aporte es el reconocimiento de los significados que cada representación simbólica puede dejar ver o no sobre un determinado objeto matemático. También reconocer la dificultad que pueden tener los estudiantes, cuando en el proceso de enseñanza aprendizaje no puede distinguir un nuevo objeto matemático debido a las nuevas notaciones.

- Amplio repertorio de representaciones de la materia que enseñan; que incluye, el estudio de la relación entre las representaciones y recursos instruccionales específicos para la disciplina; así como de analogías, ilustraciones, modelos, metáforas, ejemplos, explicaciones, demostraciones, dibujos, preguntas, actividades, discusiones, exposiciones verbales, simbólicas, graficas o concretas, etc.

La Tarea propuesta permite reconocer diferentes notaciones que representan un mismo objeto matemático, cada una de ellas tiene sus propias características, que pueden hacer más fácil la comprensión y significado del objeto matemático. Igualmente algunas apoyan el manejo de las operaciones algebraicas y de las matemáticas en general.

b. Conocimiento sobre los materiales curriculares

- Del tratamiento y evaluación de los textos y materiales de la materia en cuestión, (su organización razonada de tópicos, las actividades y problemas que presentan, sus efectos en el aprendizaje del estudiante, de la relación con el contenido y las estrategias instuccionales que proponen y sobre los criterios de uso, selección y adecuación para la enseñanza o aprendizaje de un tópico matemático)

En este sentido la Tarea nos permite reflexionar sobre las actividades que presentan los libros acerca de las representaciones simbólicas, y las justificaciones del porqué un objeto matemático es representado de esta manera. Esto nos permite ampliar la visión para evaluar un texto, teniendo en cuenta las razones por las cuales proponen ciertos tipos de representación del objeto matemático.

c. Conocimiento sobre el currículo matemático

- Conocimiento sobre la planificación de la enseñanza del contenido matemático, (que incluye el conocimiento del diseño, evaluación y modificación del programa escolar, de las características del currículo matemático “según el grado y nivel de enseñanza”, de las relaciones con otros contenidos matemáticas y de las tendencias curriculares específicas de la educación matemática)

En este sentido, la Tarea da la posibilidad al docente, de incluir en el currículo de matemáticas actividades que permitan reflexionar sobre las representaciones simbólicas de los conceptos matemáticos logarítmico y exponencial.

6. CONCLUSIONES FINALES

Como producto de nuestro reconocimiento hecho al desarrollo histórico de los conceptos de lo logarítmico y exponencial, podemos afirmar que la apropiación de dicho conocimiento aporta elementos que transforman la visión que se tiene sobre los conceptos de exponencial y logaritmo, fortaleciendo al mismo tiempo el CDC del profesor de matemáticas en sus tres componentes. Aunque, también es cierto que existe una mayor afinidad con respecto a los dos primeros componentes; esto quiere decir, con los relacionados con el Conocimiento del Contenido para Enseñar, y con el Conocimiento de las Estrategias Instruccionales para enseñar los conceptos logarítmico y exponencial. Esto lo podemos observar desde la misma configuración que adquirió la matriz (ver anexo 3), donde se puede ver claramente que la historia tiene una mayor participación y aporte en los asuntos referentes a los dos primeros componentes. Consideramos que la relación con el tercer componente del CDC, correspondiente al conocimiento de los procesos de aprendizaje de los estudiantes no es tan evidente como los anteriores debido a que se trata de necesidades históricas particulares; es decir, que el conocimiento de los procesos de aprendizaje de los estudiantes está mediado por el contexto social y cultural. Pese a esto, el conocimiento de la historia sí le permite al profesor de matemáticas legitimar otros tipos de prácticas como parte de la actividad matemática, reconociendo posibles errores y dificultades comunes que se dan en la construcción o aprendizaje de un concepto en particular; es decir, que el conocimiento de los procesos de aprendizaje de los estudiantes es único y exclusivo de un grupo en particular y varían con la ubicación temporal y geográfica.

Nuestro asunto inicial de investigación fue la función exponencial, pero a raíz del proceso de apropiación de la historia de dicho concepto encontramos que éste no se halla de forma independiente, sino que al contrario está ligado o emerge del desarrollo de otros conceptos. De esta forma, hemos llegado a reconocer que la función exponencial debe ser entendida de forma simultánea con la función logaritmo, y que estas dos a su vez deben ser entendidas desde el desarrollo evolutivo de los conceptos de lo exponencial y logarítmico, como se muestra en el documento de Cajori (1913), ver anexo 4. Podemos decir que los conceptos de logaritmo y exponencial estuvieron ligados durante mucho tiempo a través de la historia, y en ocasiones significando lo mismo, recibían nombres diferentes. También nos percatamos de que estos dos conceptos fueron la base para el surgimiento de otros conceptos matemáticos, de los cuales algunos de ellos corresponden a diferentes ramas de las matemáticas y que generalmente se consideran como independientes, y no se establecen relaciones entre ellos. Por ejemplo, el cálculo infinitesimal surge a partir de la relación entre las sucesiones aritmética y geométrica persistente en el cálculo del área bajo la curva de la hipérbola equilátera, y en general de los métodos empleados para hallar la cuadratura de las curvas; esto se muestra en la segunda Tarea denominada área bajo la hipérbola equilátera y su relación con el logaritmo natural. De igual forma, los conceptos de potenciación, logaritmación, radicación, su relación entre ellos y sus propiedades se pueden entender igualmente desde la relación entre las dos sucesiones. De esta forma, podemos decir que hemos evidenciado que los conceptos matemáticos no son independientes en su desarrollo sino que tiene su origen en otras ideas que dieron lugar a su consolidación. En nuestro caso pretendíamos encontrarnos con una historia de la función exponencial más pura, sin tantas bifurcaciones, ni altibajos, más fácil de seguir, sin necesidad de entrar a considerar otros conceptos matemáticos, pero la misma historia cambió nuestra perspectiva sobre cómo se da la consolidación de los conceptos matemáticos, llegando a reconocer este estado como una particularidad subyacente a la misma evolución de los conceptos matemáticos, que se ha dado a través de la historia.

Una de nuestras hipótesis de trabajo plantea que el uso de la herramienta didáctica Tareas, a través de la secuencia didáctica, podría contribuir al CDC del profesor de matemáticas. Esta hipótesis la corroboramos mediante el diseño de las secuencias de tres Tareas, las cuales tienen la intención de aportar tanto al conocimiento matemático del profesor de matemáticas al permitirle acceder a otras maneras de representar los conceptos logaritmo y exponencial. También tales Tareas buscan mostrar conexiones y relaciones entre conceptos y nociones relacionadas dentro de las matemáticas. Estas conexiones permitirían que el profesor de matemáticas encuentre sentido y significado a los conceptos logaritmo y exponencial en el proceso de enseñanza-aprendizaje que implementa, dimensionando su importante papel para el desarrollo del pensamiento funcional en el currículo de matemáticas. También, estas Tareas podrían constituirse en un apoyo para el CDC, o conocimiento meta-matemático, del profesor de matemáticas, en la medida en que le brinda elementos de juicio adicionales. Entre estos elementos podemos mencionar: no ver el proceso de aprendizaje como algo lineal ni acabado, usar de manera positiva el error, admitir diferentes concepciones que surgen de un mismo concepto, también los cambios de enfoque, el pensamiento divergente como formas válidas de actividad matemática.

De otra parte la visión que obtenemos sobre los conceptos exponencial y logarítmico está ligada también a las características y naturaleza de los documentos usados para esta historia, en general la mayor parte de los textos consultados hacen un uso o una interpretación de la historia, en este sentido reconocemos que pueden haber otras visiones, usos o interpretaciones de la historia de los conceptos logaritmo y exponencial.

Las Tareas como herramienta didáctica tienen la ventaja de permitirnos ilustrar y potenciar hechos y principios matemáticos específicos dentro de la historia de los conceptos logaritmo y exponencial. Dentro de estos hechos están: la relación entre las sucesiones aritmética y geométrica con la representación tabular de estos conceptos, la conexión entre el área bajo la hipérbola equilátera con el logaritmo natural de un número, y el papel de las notaciones en el desarrollo de estos conceptos. Pero también esta herramienta favorece esta intención por el tipo de historia a la que accedimos (una historia internalista de los objetos matemáticos, planteada en una fuente original que permite ver los procesos de formación de los conceptos relacionados); también por la naturaleza de los objetos que estamos tratando (las conexiones intrínsecas de los conceptos logaritmo y exponencial con diversos conceptos al interior de las matemáticas en su proceso de constitución). Estas características nos puede permitir acceder a situaciones contextuales propias de esta evolución dirigidas a motivar el uso y la potencia de la Historia de las Matemáticas (HM) en los procesos de enseñanza-aprendizaje de estos conceptos como por ejemplo: el uso de las diversas representaciones, la conexión de los conceptos con otros dominios numéricos a los convencionales, la relación entre diversos conceptos al interior de las matemáticas; pero también permite mostrar aspectos como: el camino de construcción de éstas ideas, la elaboración matemática como actividad humana y cultural, el papel de la creación y la intuición en la actividad matemática, además muestra la matemática como actividad significativa. Aspectos que también fortalecen el papel de la HM en el CDC y en la formación del profesor de matemáticas.

De acuerdo al estudio realizado sobre la historia de los conceptos logarítmico y exponencial se reconocen dos aspectos que podrían ser de importancia y que le aportan al conocimiento en el diseño curricular. Primero, dado que históricamente surgió primero el concepto de logaritmo y luego el de exponencial, surge la posibilidad de hacer una propuesta curricular en la que se haga la inversión en los contenidos ya que actualmente se presenta en el currículo primero la función exponencial y luego la logarítmica; de esta manera se propongan también nuevas estrategias instruccionales para la enseñanza de estos conceptos, o explorar la oportunidad de enseñarlos de forma simultánea. Segundo, se reconoce a través del trabajo, que sin la comprensión de la teoría de los números complejos, no es posible una compresión completa de los conceptos logarítmico y exponencial. Por lo general en el currículo de bachillerato se presentan los conceptos logaritmo y exponencial desligados del concepto de número complejo. De esta manera, se podría proponer dentro del currículo un acercamiento del tema de los logaritmos y exponenciales con el tema de los números complejos, en este punto queda abierta la posibilidad de una investigación que diera cuenta de este tipo de propuestas.

Dentro del reconocimiento histórico realizado sobre los conceptos logarítmico y exponencial, se identificaron algunos aspectos que hacen que se reconozca la actividad matemática como actividad social. Entre estos aspectos encontramos las discusiones acerca de la teoría logarítmica que se dieron aproximadamente durante tres siglos, tiempo durante el cual hubo un gran movimiento de ideas y contradicciones en la comunidad matemática lo que evidencia una forma social de construcción del conocimiento matemático; este proceso involucró a diferentes matemáticos de distintas épocas y nacionalidades. Lo anterior, nos permite afirmar que el desarrollo matemático no es obra de una sola persona, sino el producto del trabajo en comunidad que lleva a la consolidación de una teoría general. Otro aspecto social que se reconoce son las formas de validar el nuevo conocimiento; algunas de éstas se realizaron sin la rigurosidad exigida por la comunidad matemática, como en el caso de Euler, que utilizó un tipo de validación intuitiva. Otras maneras de validación consistían en dar solución a problemas prácticos, mientras que otras se validaban desde la rigurosidad exigida por los matemáticos de la época. Por otra parte es importante mencionar que existieron trabajos que no fueron aceptados por la comunidad matemática, debido a que en algunas ocasiones no daban los resultados esperados o conducían a resultados equivocados; sin embargo, estos trabajos aportaron en el sentido de mostrar los caminos que no se debían seguir en la actividad matemática. Lo anterior le ofrece al profesor de matemáticas un panorama diferente acerca de la actividad matemática, permitiéndole reconocer la importancia del trabajo en comunidad y tener presente que el conocimiento no es, ni ha sido estático, sino que es promovido y construido constantemente.

El reconocimiento de la inventiva y recursividad humana como formas válidas para la solución de problemas matemáticos de gran complejidad, le permite al profesor de matemáticas valorar las matemáticas como producto humano. En esta evolución se observó la dificultad que tuvieron los matemáticos para entender la naturaleza de los logaritmos de los números negativos y la representación gráfica de las curvas logarítmica y exponencial, estas últimas permitieron una mejor comprensión de los objetos matemáticos y aportaron a la consolidación de la teoría. Durante el análisis documental fue posible ver la recursividad de los matemáticos al proponer novedosos sistemas de representación para un objeto matemático, de tal forma que le permitiera visualizar, comprender los significados del objeto y así avanzar en el desarrollo matemático.

Un aporte al conocimiento del profesor de matemáticas es el reconocimiento del potencial de motivación que pueden tener las paradojas en la evolución de los conceptos logarítmico y exponencial como promotoras del desarrollo matemático. Un ejemplo de lo anterior es la existencia o no de los logaritmos de números negativos; discusión que impulsó la investigación y la curiosidad de los matemáticos de la época. Estas paradojas dieron lugar a grandes controversias entre personajes como Bernoulli, Leibniz, D´Alembert y Euler, las cuales condujeron al desarrollo de la teoría de los números complejos. En este sentido muchas veces los profesores en bachillerato no nos damos la oportunidad de explorar estos tipos de problemas como motivadores de la actividad matemática, que pueden encender la curiosidad en los estudiantes, como es el caso de logaritmos de números negativos y los exponentes con bases negativas.

Con la elaboración de la Tarea sobre las notaciones de los conceptos logaritmo y exponencial se reconoce que la notación es parte fundamental de la actividad matemática, como mediadora de la misma. Se evidencia que un cierto tipo de notación, predispone, favorece, limita, condiciona la forma de pensar y determina la actividad matemática misma. De la misma forma, como profesores de matemáticas no somos conscientes que el tipo de notación actual es el resultado de aspectos como: acuerdos realizados en la comunidad, la capacidad de cierto tipo de notación para visualizar o destacar algunas características del objeto matemático, el gusto del autor, la facilidad para la operatividad, escritura e impresión, entre otras. En este sentido, los profesores muy pocas veces nos damos la oportunidad de explorar otros tipos de notación diferentes a las usuales, propuestas desde los textos, o que han sido establecidas por la comunidad; de manera que casi nunca nos cuestionamos ni proponemos a los estudiantes otros tipos de notación, ni reflexionamos acerca del porqué este tipo de notación es la aceptada por la comunidad. Como un ejemplo de lo anterior, para la notación de los conceptos logarítmico y exponencial existieron discusiones que permitieron que algunas notaciones se impusieran sobre las otras; este ejercicio es una oportunidad para que el profesor proponga y explore sus propias notaciones para los diferentes objetos matemáticos.

Durante la construcción de las Tareas que buscaban aportar al CDC del profesor de matemáticas, notamos que estos terminaron favoreciendo el conocimiento matemático antes que el conocimiento didáctico. Lo anterior podría tener respuesta desde los siguientes aspectos: el primero de ellos es nuestra formación como profesores de matemáticas, hecho que marca la forma como concebimos y diseñamos las secuencias. Un segundo aspecto es el tipo de documentos a los que tuvimos acceso; los cuales consisten en fuentes primarias que desarrollan un tipo de historia internalista (sobre las características del objeto matemático en sí). De lo cual, podemos concluir desde nuestra interpretación del tipo de historia que abordamos, que esta favorece más el conocimiento matemático, como se evidencio con las Tareas, posiblemente por la forma como es presentada la misma historia a través de secuencias y ejemplos.

De igual forma los documentos y textos a los que tuvimos acceso no son de fácil comprensión debido a que están en otro idioma y el sólo hecho de traducirlos ya se constituyen en una versión aproximada a la original. Esto también influye para que la información contenida en estos documentos y textos no estén al alcance de todos los profesores de matemáticas; otro aspecto que hace difícil el acceso a estos documentos es que son interpretaciones de fuentes primarias, como en el caso de los documentos centrales en nuestro trabajo, y en cierto sentido también se hace en ellos una interpretación y una aplicación específica de la historia de las matemáticas, para lo que se requiere un conocimiento matemático especializado.

En relación con nuestro proceso de profesionalización y el desarrollo de competencias investigativas, la realización de este trabajo nos aportó en los siguientes aspectos: primero, el fortalecimiento de habilidades relacionadas con la escritura y comunicación de textos académicos; segundo, el uso ágil y eficiente de diferentes fuentes y herramientas tecnológicas especializadas en el acopio, análisis y procesamiento de información documental, y tercero, la puesta en marcha de un procedimiento metodológico de investigación que permita la validación coherente de las hipótesis.

Finalmente queremos poner en consideración de los lectores algunos aspectos que surgieron a lo largo del desarrollo del trabajo y que quedan abiertos a futuras investigaciones. Entre los principales aspectos podemos mencionar: el diseño de Tareas para los Hitos Históricos de: La Generalización, Las Discusiones e Intentos Fallidos, Los Factores Sociales. Otros aspectos a desarrollar que surgen de la historia de estos conceptos son: las paradojas, las diversas representaciones del número e, la relación del logaritmo con los números complejos y su representación gráfica.

7. REFERENCIAS

Ball, L. (1991). *Research on teaching mathematics: Making subject matter knowledge part of the equation* (Vol. 2). (E. J. Brophy, Ed.), *Advances in research on teaching* Greenwich: JAI Press.

Barnett, J. & Hodson, D. (2001). Pedagogical Context Knowledge: toward a fuller understanding of what good science teachers know. *Science Teacher Education*, 85(4), 26-453.

Bartlett, A., Fuller, R., Plano, V. & Rogers, J. (2004). *The Essential Exponential for the future of our planet.* Lincoln, Nebraska, EEUU: Center for Science.

Bartolini, M. & Maschietto, M. (2008). Machines as tools in teacher education. En D. Tirosh, & T. Wood (eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education,* págs. 183-207. West Lafayette: Sense Publishers.

Bezos, J. (2007). Ortotipografía y notaciones matemáticas. *BuenasTareas.com*. Recuperado sept 3, 2013, de http://www.buenastareas.com/ensayos/Ortotipografia-y-Notaciones-Matematicas/135485.html

Cajori, F. (1913). History of the Exponential and Logarithmic Concepts. M. A. America, Ed. *The American Mathematic Monthly*, *20*(1-7), 1-210.

Chapman, O. (2008). Narratives in Mathematics Teacher Education. En D. Tirosh, & T. Wood, *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (págs. 15-38). West Lafayette: Sense Publishers.

Chapman, O. (2011). The field of research in mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*,14, 247-249.

Clark, K. M. (2006). *Investigating Teachers ´ Experiences with the History of Logarithms. A Collection of Five Case Studies.* University of Maryland. Maryland.

Clarke, B. (2008). A framework of growth points as a powerful teacher development tool. En D. Tirosh, & T. Wood, *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (págs. 235-256). West Lafayette: Sense Publishers.

D'Amore, B. (2007). El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemáticas de la escuela secundaria. *Cuadernos del Seminario en educación*, 8,1-22 . Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, p. 36.

Empson, S. & Jacobs, V. (2008). Learning to listen to children´s mathematics. En D. Tirosh, & T. Wood, *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (págs. 257-281). West Lafayette: Sense Publishers.

Fauvel, J. & Vann Maanen, J. (2002). History in Mathematics Education. En K. A. Publishers (Ed.), *The ICMI Study*. *6*, págs. 66-86. New York: Kluwer Academic Publishers.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logarítmo.* México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados de Instituto Pedagógico Nacional.

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 131-143.

Garritz, A. & Trinidad, R. (2004). El conocimiento pedagógico del contenido. *Educación Química, 15*(2), 1-2.

Gess Newsome, J. & Lederman, N. (1999). *Examining Pedagogical Content Knowledge: The Construct and its Implications for Science Education*. Dordrecht, Países Bajos, Kluwer Academic.

Glatthron, A. (1990). *Supervisory Leadership*. Nueva York: Harper Collins.

Godino, J. (2009). Categorias de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educacion Matemática*(20), 13-31.

Gómez, P. (2002). Conocimiento Didáctico Del Profesor y Organizadores del Currículo en Matemáticas. En Perales, F. J.; García, A. L.; Rivera, E.; Bernal, J.; Maeso, F.; Muros, J.; Rico, L.; Roldán, J. (Eds.), Congreso nacional de didácticas específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI, pp. 1245-1258. Granada: Grupo Editorial Universitario.

Gonzalez, M., & Vargas, J. (2007). Segmentos de la Historia: La Función Logarítmica. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria, 15*(2), pp. 129-144.

Gonzalez, M., Pérez, M. & Vargas, J. (2011). El logaritmo: ¿Cómo animar un punto que relacione una progresión aritmética y una geométrica? *Memorias del 20° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones.* pp. 129-138. Bogotá D.C.: Universidad Pedagógica Nacional (UPN).

Gravemeijer, K. (2008). RME Theory and mathematics teacher education. En D. Tirosh, & T. Wood, *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*. pp. 283-300. West Lafayette: Sense Publishers.

Grossman, P. (1989). A study in contrast: Sources of pedagogical content knowledge for secondary English. *Journal of Teacher Education, 40*(5), 24-31.

Grugnetti, L. (2000). The History of Mathematics and its Influence on Pedagogical Problems. En E. V. Katz, (Ed.). *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*s. pp. 29-35. Washington: Mathematical Association of America.

Guacaneme, E. (2010). ¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor? *Revista EDUCyT*, 1-12.

Guacaneme, E. (2011). La Historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones. *XIII CIAEM-IACME*. pp. 1-11. Recife: Comite Interamericano de Educación Matemática.

Jones, P. (1969). The History of Mathematics as a Teaching Tool. En: *Historical Topics for The Mathematics Classroom*. pp.1-17. Washington, D.C. National Council of Teachers of Mathematics.

Katz, V. & Fauvel, J. (1995). *Napier´s Logarithms Adapted for Today Classroom.* Washington: The Mathematical Association of America.

Lages, E. (1996). *Logaritmos.* Rio de Janeiro, Brasil: Grafitex.

Lupiáñez, J. (2009). La Historia en la enseñanza de las matemáticas. En J. Lupiáñez, *Nuevos Acercamientos a la Historia de la Matemática a través de la Calculadora TI-92* . pp. 17-28.

Maher, C. (2008). Video Recording as Pedagogical Tools in Mathematics Teacher Education. En D. Tirosh, & T. Wood, *The Internacional Handbook of Mathematics Teacher Education.* pp. 65-83. West Lafayette: Sense Publisher.

Maor, E. (1994). *e: The Story of a Number.* Princeton, New Jersey, E.E.U.U.: Princeton University Press.

Markovits, Z. & Smith, M. (2008). Cases as Tools in Mathematics Teacher Education. En D. Tirosh, & T. Wood, *The International Handbook of Mathematics Teacher Education.* pp. 39-64. West Lafayette: Sense Publisher.

Martínez, G. (2000). Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales. México, Tésis: Cinvestav.

Maza, C. (1994). Historia de las Matemáticas y su Enseñanza: Un análisis. *SUMA*, 17, 17-26.

MEN. (1998). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá D.C.: Ministerio de Educación Nacional.

Moreno, L. (2002). Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. *Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas*. pp. 40-66. Bogotá D.C.: Enlace Editores Ltda.

Nührenböeger, M. & Steinbring, H. (2008). Manipulatives as tools in mathematics teacher education. En D. Tirosh, & T. Wood, *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* pp. 157-181. West Lafayette: Sense Publishers.

Pinto, J. (2010). *Conocimiento Didáctico del Contenido sobre la representación de datos estadísticos: Estudios de Casos con Profesores de Estadística en carreras de Psicología y Educación*. Salamanca, España: Universidad de Salamanca.

Pinto, J. & González, M. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Relime*, *20*(3), 83-98.

Salazar, S. (2005). El Conocimiento Pedagogico del Contenido como Categoría de Estudio de la Formación Docente. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación"*, *5*(2), 1-18.

Shulman, L. (1986a). *Paradigms and research programs in the study of teaching.* New York, EEUU: MacMillan.

Shulman, L. (1986b). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, *2*, 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 8.

Shulman, L. (1993). Renewing the pedagogy of teacher education: The impact of subject-specific conceptions of teaching. En L. Moreno y J.M. Vez (eds.). *Las didácticas específicas en la formación de profesores,* 53-69. Santiago de Compostela. Tórculo Edicions.

Shulman, L. (1999). Foreward en Gess Newsome., Lederman, N.G. (eds.), Examining Pedagogical Content Knowledge. *The Construct and its Implications for Science Education.* Dordrech, the Netherlands, Kluwer Academic Publishers, *57*(1), IX-XII.

Sullivan, P. & Watson, A. (2008). Teachers learning about task and lessons. En D. Tirosh, & T. Wood (eds.). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*. pp. 109-134. West Lafayette: Sense Publishers.

Tapia, F. (2003). Historia de los logaritmos. *Apuntes de Historia de las Matemáticas,* Ed. Universidad de Sonora. *2*(2), pp. 5-22.

Thomas, C. (1994). Research and teacher education: In search of common ground. *Journal for Research in Mathematics Education* . 25 (6), pp. 608-635.

Tirosh, D. & Wood, T. (2008). *The International Handbook of Mathematic Teacher Education.* West Lafayette: Sense Publishers.

Toumasis, C. (Diciembre de 1993). Teaching Logarithms via their history. (R. Library, Ed.) *School Science and Mathematics*. pp. 428-434.

Trompler, S. (2002). *L'histoire des Logaritmes.* Bruxelles: Les Cahiers du CeDop.

Tsamir, P. (2008). Using theories as tools in mathematics teacher education. En D. Tirosh, & T. Wood, *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*. pp. 211-234. West Lafayette: Sense Publishers.

Vargas, J. (2011). Descomposición genética de la función exponencial:Mecanismos de construcción. *CIAEM-IAECME,* Recife, pp. 1-12.

Watson, A. & Sullivan, P. (2008). Teachers Learning about Tasks and Lessons. In: *The International Handbook of Mathematic Teacher Education.* West Lafayette: Sense Publishers

Yoshida, M. (2008). Exploring Ideas for a Mathematics Teacher Educator's Contribution to Lesson Study. En D. Tirosh, & T. Wood (eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*. pp. 85-106. West Lafayette: Sense Publisher.

Zazkis, R. (2008). Example as tools in mathematics teacher education. En D. Tirosh, & T. Wood, *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* pp. 135-154. West Lafayette: Sense Publishers.

8. ANEXOS

8.1. ANEXO 1: ENCUESTA SOBRE EL CONOCIMIENTO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Esta encuesta fue diseñada inicialmente para los profesores formadores de matemáticas de la UPN (Universidad Pedagógica Nacional), de la sede de Bogotá. El medio a través de cual se envió la encuesta fue Google Docs. Posteriormente, se aplicó a profesores de matemáticas en ejercicio de dos instituciones en los niveles de Educación Básica y Media; de las cuales una pertenece al municipio de Mosquera y la otra al Distrito de Bogotá, el medio de contacto fue personal.

A continuación se muestra la estructura de la encuesta y al final se muestran los resultados de la misma.

8.1.1. ENCUESTA PARA FORMADORES DE PROFESORES

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS ESTUDIANTES PRIMER SEMESTRE DE 2012, MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA.

Israel Bocanegra (mdma_ibocanegra724@pedagogica.edu.co)
Oscar Galeano (mdma_ogaleano106@pedagogica.edu.co)
Hermes Huérfano (mdma_hhuerfano805@pedagogica.edu.co)
Cel: 3208452371

Objetivo: Establecer si los formadores de profesores usan o no elementos de la historia para la enseñanza de la función exponencial.

Agradecemos contestar la siguiente encuesta, la cual no le tomará más de un par de minutos, ya que su información es muy valiosa para nosotros

---

NOMBRE

E-mail:

INSTITUCIÓN DONDE LABORA:

Pregunta 1 ¿En los últimos tres años ha enseñado aspectos relacionados con la función exponencial?

- SI
- NO

Pregunta 2. Si respondió afirmativamente a la pregunta 1, por favor mencione los cursos o seminarios en que ha trabajado la función exponencial. Si su respuesta es "NO", le agradecemos su gentil colaboración; por favor no olvide ir al final de la encuesta y seleccionar la opción "Enviar"

Pregunta 3 ¿Ha utilizado elementos de la historia de la función exponencial para su enseñanza en dichos seminarios?

- SI
- NO

Pregunta 4. Si contestó negativamente a la pregunta 3, sintetice las razones que considera justifican el que no haya utilizado la historia de las funciones exponenciales en sus clases.

Pregunta 5. Si contestó afirmativamente a la pregunta 3, ¿estaría usted dispuesto(a) a concedernos una entrevista de no más de 20 minutos para conocer más información acerca del uso que hace de la historia de las funciones exponenciales en su enseñanza?

- SI
- NO

Mil gracias por su tiempo y colaboración, esperamos un futuro encuentro.

Enviar

8.1.2. RESULTADOS DE LA ENCUESTA:

PROFESORES UPN (SEIS PROFESORES)

Pregunta 1: Los seis contestaron afirmativamente

Pregunta 2: Seminarios de matemáticas I y II; seminarios de cálculo

Pregunta 3: Los seis contestan negativamente

Pregunta 4: Respuesta generalizada por desconocimiento.

Pregunta 5: No tuvimos ningún candidato.

PROFESORES COLEGIOS (DIECIOCHO PROFESORES)

Pregunta 1: Los 18 contestaron afirmativamente

Pregunta 2: Matemáticas de grado noveno

Pregunta 3: Los 18 contestan negativamente

Pregunta 4: Respuesta generalizada por desconocimiento.

Pregunta 5: No tuvimos ningún candidato

8.2. ANEXO 2: CLASIFICACIÓN DOCUMENTAL EN CUATRO GRUPOS, DE ACUERDO CON LA TEMÁTICA

Este anexo muestra la clasificación documental llevada a cabo durante la primera fase del análisis. La clasificación consistió en agrupar los documentos encontrados en las diferentes fuentes sobre la función exponencial de acuerdo con su temática. De esta forma, se obtiene cuatros grupos: el primero, ubicamos los documentos relacionados con la Didáctica (D); en el segundo, los documentos relacionados con la Historia y sus usos Didácticos (H y D); en el tercero, los documentos Históricos (H); y en el último grupo, los relacionados con el campo de investigación: Formación del Profesor de Matemáticas (FP).

A continuación mostramos el cuadro utilizado en la clasificación. Este instrumento nos permitió una visualización de: el referente bibliográfico, la fuente de donde se obtuvo el documento, su respectiva clasificación en cada uno de los cuatro grupos documentales, y una breve descripción del contenido del documento, como su posible potencial de aporte en la elaboración de las herramientas didácticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICA	**D**	**D y H**	**H**	**FP**	**UBICACIÓN**	**OBSERVACIONES**
J.B.Sirvent, *Sonidos, fracciones, medias, potencias y funciones exponenciales,* Suma 44, Nov.2003	X				Revista Suma	Se utiliza incidentalmente potencias naturales y racionales, y proporciones para explicar la construcción de la escala musical pitagórica.
Contreras, A.,Díez M.C., Pacheco,J.P.,*Las Matemáticas y la evolución de las escalas musicales*, Suma ,54,Feb.2007.		X			Revista Suma	Uso de conceptos de intervalo, escala y nota musical utilizando proporciones, sucesiones y logaritmos para modelar diferentes escalas musicales a través de la historia.
Arenazana,V.,Buera, P.,Rodriguez L., *Los*		X			Revista Suma	Análisis de la escala logarítmica desde el aspecto gráfico.

cambios de escala y el cálculo gráfico, Suma 5, 1990.						(Está incompleto el artículo en la revista).
Fernandez, J.,*Potenciar el papel de los logaritmos,* Suma 11-12,1992.		X			Revista Suma	Realiza un recuento histórico de la noción logaritmo y vincula el uso de la calculadora para su revaloración en el aula
Gonzalez U,P., *La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza*, Suma,Feb.2004.			X		Revista Suma	Realza La historia de las matemáticas como fuente para enriquecer su didáctica y enseñanza.
Lupiañez J.L.,*Reflexiones didácticas sobre la historia de las matemáticas*, Suma,Junio,2002.		X			Revista Suma	Describe el papel de la historia de las matemáticas en su enseñanza, su interés, lo que puede aportar y cómo se puede implementar en el aula.
Botella,L.M., *La calculadora gráfica en correlación y regresión*, Suma, junio, 1996.	X				Revista Suma	Usando la calculadora gráfica modela situaciones de proporcionalidad inversa, funciones lineales, polinómicas y exponencial (radioactividad), dando prioridad al razonamiento y enunciar conjeturas a partir de las situaciones.
Vall,C. & Deulofeu,J. *Las ideas de los alumnos respecto de la dependencia funcional entre variables*, Suma, 33, Feb., 2000.	X				Revista Suma	Se analizan ideas de alumnos de secundaria respecto de la relación entre las variables de las funciones, tanto las expresadas en ecuaciones como en contextos geométricos.
Liern, V., Las matemáticas y la música popular, Suma, 62, Nov.2009.	X				Revista Suma	Por medio de frecuencias, intervalos y distancias entre frecuencia de las notas (utilizando logaritmos) analiza particularidades de la música popular.
Liern, V.,Las fracciones de la música,Suma, 59, Nov,2008.	X				Revista Suma	Estudia particularidades de las notas musicales utilizando proporciones, fracciones continuas y logaritmos.
Schubring,G. *Gauss y la tabla de logaritmos,* Relime, v.11(3),Nov.2008		X			Relime	A partir del análisis de una tabla logarítmica alemana revela importantes elementos epistemológicos en torno a la naturaleza y desarrollo de la matemática.
Leivas J.C.,Carneiro, M.T., *Una función logarítmica obtenida a partir de la simetría de*	X				Revista Iberoamericana de Educación Matemática,23,	Presenta una forma de construir la función logarítmica a partir de la modelización de un problema que conduzca a la función

la función exponencial: explorando la visualización, Unión:					Sept,2010.	exponencial, resaltando la importancia de la visualización en geometría como herramienta didáctica en la comprensión de conceptos matemáticos.
historia de los logaritmos (Tapia Francisco)			X		Dialnet	Condiciones sociales, económicas y causas que dan origen a los logaritmos. El desarrollo como producto de una sucesión aritmética y geométrica. Planteamiento de Arquímedes. Stifel, Napier, Burgi, Briggs. Logaritmos y antilogaritmos, en relación con el cálculo infinitesimal y el número e.
Learn from the masters (Katz,V & Fauvel, J.)		X				Cuestiones históricas que permitieron el desarrollo de los logaritmos. Manejo de números grandes, en astronomía, geometría del movimiento, log Neperianos pp.39-47.
Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los Exponentes no naturales. Gustavo Martínez Sierra(tesis)		X			Dialnet	Estudio epistémico y didáctico de los exponentes no naturales. Cuadraturas de hipérbolas y parábolas (Wallis). Newton y los exponentes negativos. Herperbola equilátera. Exponentes no naturales y la función exponencial.
Una visión socio epistemológica. Estudio de la función logaritmo Marcela Ferrari Escolá		X			Dialnet	Describe las etapas de desarrollo de la función logarítmica, donde se pueden percibir vínculos con la función exponencial

						pp(11-16).
Rico L, *Reflexiones sobre los fines de la Educación Matemática.* Suma Vol. 24, pp. 5-19, 1997	X				Revista Suma	Fines de la educación matemática, dimensión social, cultura, dimensiones que la caracterizan.
Godino J, Batanero C, Font, V., *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para Maestros.* Matemáticas y su didáctica para Maestros, febrero 2003,	X				Dialnet	Por qué enseñar matemáticas, justificación y orientaciones del currículo, principios de las matemáticas escolares, Diseño y gestión de unidades didácticas
D'Amore B (2007), *El papel de la epistemología en la formación de profesores de matemática de la escuela secundaria,*		X				Epistemología e historia de la matemática; La historia como clave para entender la epistemología; el uso de la historia en la didáctica de la matemática. p. 16
Maza C, *Historia de las matemáticas y su enseñanza: Un análisis,* Suma Vol. 17 p.17, 1994		X			Revista Suma	Obstáculos para el conocimiento de la historia la matemática, Meta historia de la matemática, enseñanza histórica de la matemática. La historia de la matemática como instrumento didáctico
Muños I, *Las matemáticas a través del tiempo,*			X			Algunas definiciones.
Guacaneme A, *La Historia de las matemáticas en la educación de un profesor razones e intenciones,* XIII CIAEM – IACME, Recife, Brasil, 2011				X		Papel de la historia de las matemáticas en el conocimiento del profesor de matemáticas
Guacaneme, A, *¿Qué tipo de historia de las matemáticas debe ser apropiada por un profesor?* Revista EDUCyT, Vol. 2, junio 2010.				X		Diez tipologías de la historia de las matemáticas, tendencias sobre el tipo de Hm que debe ser apropiada por un profesor.
Cajori F *History of the Exponential and Logarithmic Concepts ,1913*			X		Dialnet	Consta de siete momentos en el desarrollo de los conceptos de lo exponencial y logarítmico.

8.3. ANEXO 3: MATRIZ PARA RELACIONAR LA HISTORIA DE LOS CONCEPTOS EXPONCIAL Y LOGARITMO CON EL CDC DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

En este anexo se muestra el proceso de análisis y organización de la información que nos permitió relacionar la historia de evolución de los conceptos de logaritmo y exponencial con los diferentes asuntos del CDC del profesor de matemáticas, desde la propuesta hecha por Pinto (2010).

Se muestra en la matriz en color azul, en la segunda columna, cada uno de los tres componentes del CDC; en rojo, cada una de las categorías que conforman dicho componente, con viñetas, de punto, cada uno de los asuntos que conforma las diferentes categorías. En la primera columna establecemos un orden de numeración, del componente, las categorías y asuntos; en la tercera, se muestra el desglose de cada asunto en sus diferentes ideas, y en la cuarta la relación atribuida entre cada uno de los asuntos con la historia de los conceptos de lo exponencial y logarítmico.

1	**COMPONENTES DEL CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARITMICA A ENSEÑAR**	**APORTES**	**RESPUESTA**
A	CONOCIMIENTO SOBRE LA ACTIVIDAD MATEMATICA GENERAL		
	• ***Conocimiento de la historia de la función exponencial y logarítmica***, evolución, principales problemas y cambios en las nociones o conceptos, *la naturaleza de las explicaciones, de la heurística y de los valores histórico-filosóficos,*	Evolución	La evolución de los conceptos de logaritmo y exponencial fue un proceso de muchos años y que vinculó el trabajo de muchos matemáticos, lo que indica que no se dio de la noche a la mañana. *Aunque se observó un trabajo en comunidad, este no fue necesariamente colectivo y articulado.
		Principales problemas	La actividad matemática basó su desarrollo inicialmente en los problemas sociales, más tarde se enfoca hacia la necesidad de buscar sustento teórico a las afirmaciones conceptuales y la extensión del concepto a otros dominios numéricos. Igualmente, se evidencia problemas que dificultaron la actividad matemática como: la carencia de una comunicación adecuada, en cuanto a la definición de los conceptos.
		Cambios en las nociones o conceptos	* la actividad matemática produce cambios de significado en las nociones y conceptos.* un concepto no tiene una linealidad

			en tiempo de construcción, además esta construcción no es única de la matemática(exclusiva de los matemáticos), trabajos que en su momentos no fueron valorados, tiempo después fueron retomados con gran ventaja.* la historia muestra que los conceptos matemáticos no son estáticos, sino que evolucionan, tampoco están ligados a un solo contexto.* un caso especial fue Graves se retractó una definición que había publicado, por considerarlo como erronea.* discusiones
		La naturaleza de las explicaciones, de la heurística de la función logarítmica y exponencial	*La naturaleza de las explicaciones: se plantean en sentido geométrico, mediante la creación de diferentes sistemas de representaciones; como por ejemplo el numérico en autores como: Arquímedes, Stifel, Chuquet; el enfoque analítico en autores como: Euler, Cauchy, Riemann *el enfoque heurístico en las diferentes formas de abordar los problemas; Napier, en lo pragmático, intuitivo y empírico; ,mientras que Euler desde lo racional).* las explicaciones debían responder a la solución de problemas reales y a su aplicación.
		Valores históricos filosóficos	* Los valores históricos reflejados en la tenacidad de las matemáticos en la continuación de sus trabajos tanto de forma individual como en comunidad.* La nacionalidad influyó en la actividad matemática misma, porque no permitió seguir la misma línea de trabajo o abordar los mismos temas* el no reconocimiento por parte de la comunidad matemática de aquellos trabajos que no dieron un resultado positivo dentro de la matemática, pero que de alguna manera aportaron elementos que fueron considerados para el desarrollo de la teoría.
	Conocimiento de las diferentes posturas o escuelas filosóficas en relación a cómo se crea y se construye el saber científico básico		* Durante el desarrollo de los logaritmos observamos que tres posturas predominaron, cada una de las cuales permitió el

			desarrollo y construcción de las matemáticas. Entre estas posturas tenemos la de Napier, Bürgi y Briggs, quienes creían que las matemáticas debían tener un fin práctico o una utilidad; otra postura fue la de Bernoulli, Leibniz y Euler, quienes no se interesaron por la utilidad que tuvieran sus desarrollos matemáticos, sino que correspondían a la matemática por las matemáticas; finalmente la postura de Riemann, Graves, Ohm, Hamilton, Cauchy, entre otros, quienes creían en la importancia de la rigurosidad matemática basado en las demostraciones.
	Comprensión de aquellos conceptos, principios, hechos y teorías principales de la disciplina en cuestión, así como las posibles interrelaciones que pueden establecerse entre los mismos	Comprensión de los conceptos	la comprensión de los concepto dentro de la comunidad matemática no es algo trivial, pues aun los expertos tienen dificultad para el logro de este fin; como fue el caso del significado que se le atribuyó a lo que sería el logaritmo de un número negativo.* La comprensión del concepto de infinito, como fue el caso de Euler, cuando presentó su teorema de los infinitos logaritmos de un número, debido a lo novedoso y complejo del lenguaje utilizado.* el hecho de aceptar los número imaginarios, por las diferentes comprensiones que de ellos se tenía.
		Comprensión de los principios	La actividad matemática obedece a principios de validación, rigurosidad y generalidad establecidos por la comunidad matemática.
		Comprensión de los hechos	Dentro de la actividad matemática se ha tenido la tendencia de validar las propiedades, procesos y operaciones en nuevos dominios numéricos.
		Comprensión de las teorías	
		Interrelaciones entre las anteriores	La comunidad matemática al tener unas pautas para validar el nuevo conocimiento, como lo son: la rigurosidad y de generalidad al ser aplicadas a un

			objeto matemáticos, como por ejemplo los logaritmos dados en los números positivos, permitió consolidar una teoría general de las potencias y una teoría logarítmica.
	Conocimiento del conjunto de procedimientos que sirven de base para que el conocimiento de los mismos progrese y avance, principales perspectivas o escuelas en el campo, cómo la función logaritmo y exponencial se ha desarrollado a través del tiempo y quiénes han contribuido a ese desarrollo	Conocimiento del conjunto de procedimientos que sirve de base para que el conocimiento de los mismos progrese y avance	Los procedimientos seguidos por la comunidad matemática como parte de su actividad consistían en que una vez propuesto un concepto matemático, éste debía ser argumentado, demostrado y comprobados por la comunidad para que tuviera validez. Otra forma de proceder fue a través de intentos aislados que luego fueron recogidos por otros matemáticos para constituir una teoría más general.
		Principales Perspectivas o escuelas en el campo	
		Quiénes han contribuido al desarrollo	Los desarrollos de conceptos matemáticos generalmente no es una actividad solitaria, sino que vincula a muchos matemáticos, quienes aportan a la construcción y consolidación. * En el caso de la construcción de la teoría logarítmica siempre son reconocidos: Arquímedes, Stifel, Napier, Bürgi, Briggs,Bernoulli, Leibniz, Euler, Cauchy, Newton); pero se ignora el trabajo de muchos otros matemáticos que permanecen desconocidos .
	Conocimiento de la función logaritmo y exponencial para enseñar a otras personas, desde una perspectiva sociocultural, de las diferentes materias que componen el currículo escolar,	Desde una perspectiva socio cultural	Los factores socioculturales sirvieron de acicate para impulsar la actividad matemática, lo que le permite al profesor reconocer o establecer un vínculo entre lo que enseña con el contexto en el cual se encuentra.
		desde las diferentes materias que componen el currículo escolar	No necesariamente fueron los matemáticos quienes desarrollaron los conceptos, sino que dichos desarrollos se presentaron desde otras disciplinas, como la física. En esta época era común que estos hombres no solo se dedicaran a una disciplina, a varias, como es el caso de Newton quien era matemático y físico y de ahí su visión de todo en movimiento (fluxiones), mientras que Leibniz

			era filósofo y matemático, estas tendencias le dieron diferentes enfoque a sus desarrollos matemáticos. El enfoque en la formación académica da un tinte distintivo a la producción de las matemáticas. *diferentes ramas de la matemática y otras disciplina.
6	***Conocimientos de la ética y valores morales y estéticos de concepto función logarítmica y exponencial a enseñar, acerca de la cultura matemática y sociedad.***	Conocimiento de la ética	*Muchos de los avances alrededor de la función logaritmo y exponencial dieron lugar a controversias sobre la autoría, los derechos de autor, con su frase célebre "publique o perece". Igualmente como algunos nombres aunque no son reconocidos en la historia, por no haber realizado sus publicaciones a tiempo, o se hablan de ideas que fueron robadas y patentadas, y como la historia no brinda total claridad sobre estos asuntos. Por lo cual algunos trabajos tuvieron que se publicados de forma incompleta y manejar un leguaje que no diera muchos detalles para poder mantener la ventaja sobre los demás.*también se evidencia el caso contrario donde dentro de la actividad matemática existen unos parámetros éticos y de respeto por las ideas de los demás, una evidencia de esto es que aunque existió una gran discusión debido a la naturaleza de la función logarítmica y exponencial siempre existió una discusión cordial. Por otro lado se reconoce el momento en que Euler permite que su alumno publique primero los resultados, aun cuando él ya los tenía para permitir que su discípulo se llevara el crédito.
		De los valores humanos	También se reconoce que dentro de la actividad matemática el poder y recursividad de la mente humana para proponer y dar soluciones a problemas de gran complejidad, como fue el caso del desarrollo de esta teoría logarítmica y exponencial donde se necesitó de gran imaginación por ejemplo para representar gráficamente los infinitos

			logaritmos de un número.
		De los valores estéticos	El uso de una notación que se ajustara a los requerimientos de simplicidad y espacio; perdiendo el significado que reposaba en los mismos símbolos que la conformaban. Predominó la simpleza sobre el significado que se quería expresar mediante la notación.* remitir al lector al hito de la notación, donde se observan las discusiones sobre las diferentes notaciones.
		Acerca de la cultura matemática	Cada comunidad matemática se caracteriza por sus propias normas, significados y valores. Estas comunidades fueron determinadas por la nacionalidad y por los métodos que utilizaban
		Acerca de la sociedad	El estímulo brindado por el capitalismo comercial, mediante los préstamos de dinero; la conquista de territorio mediante la navegación, impulsó los esfuerzos para mejorar los cálculos y disminuir el error de los cálculos.
b	CONOCIMIENTO ESPECIFICO DE LA FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARITMICA		
	__Características esenciales__ (correspondencia entre idea mental y concepto matemático, imagen del concepto, atributos críticos del concepto, ejemplos prototipos, distinción entre ejemplos concretos y no-ejemplos, actualización del cambio en el concepto)	correspondencia entre idea mental y concepto matemático	La historia nos muestra que las ideas mentales que tuvieron los matemáticos sobre el concepto de logaritmo, aunque diferentes, siempre estuvieron ligadas a algún tipo de representación, la cual pudo ser gráfica o algebraica.* al cambiar el domino cambia la idea mental y el mismo concepto de logaritmo (no es lo mismo un logaritmo en los naturales, que en los imaginarios).* depende de la disciplina en que se de dicha definición, en la física se trataba de un punto que se movía con velocidad constante.
		Imagen del concepto	La imagen del logaritmo que se ofrece en la historia es la de un concepto complicado para su generalización ya que no se pudo generalizar dentro del conjunto de los números reales, si no que tuvo que recurrir a otro conjunto numérico, complejos, para poderlo hacer.* El logaritmo fue

			un concepto de mucha importancia que gozó de gran acogida desde su invención, por su aporte a la solución de problemas del momento.
		Atributos críticos del concepto	Aunque los logaritmos fueron reducidos a dos bases (base 10 y la Euleriana) para facilitar los procedimientos de cálculo pues estas dos bases reducían el número de cifras decimales que se presentaban al llevar a cabo las operaciones; se sabe que históricamente esto no fue así, sino que se utilizaron otras más tarde abandonadas por ser inadecuadas por lo dicho anteriormente.
		Ejemplos prototipos	La historia permite observar una estela de expresiones que son representativas de la función logarítmica y exponencial, que evidencia los diferentes acercamientos llevados a cabo por los matemáticos. Entre los cuales mostramos algunos ejemplos: Ir documento original.
		Distinción entre ejemplos concretos y no ejemplos	Entre los ejemplos concretos dados por la historia sobre la función logaritmo y exponencial la historia podemos mencionar: La modelación del interés compuesto, la representación tabular que permite relacionar los términos de la sucesión aritmética y geométrica, la mediada del área bajo de curva de la hipérbola cuadrática pues que permiten conservan sus característica principales que conforman la definición actual.*uso de series infinitas, por estar basado en el concepto de limite. Entre los ejemplo no concretos esta las expresiones dadas por Ohm, Karsten, entre otros, que no fueron aceptadas como inventos matemáticos (ejemplos pendientes por introducir).
		Actualización del cambio de concepto	La historia nos muestra que hubo una evolución del concepto a través de la cual se consolidó el concepto de función logaritmo y exponencial, lo que indica que los conceptos en la matemática

			no son definitivos ni estáticos. Como se mostrara más adelante en el asunto de formas alternativas de aproximación.
	Diferentes representaciones (comprender los conceptos en diferentes representaciones, trasladar y formar conexiones entre éstos)	Comprender el concepto en las diferentes representaciones	Remitir al lector al hito de las representaciones. Donde la idea de logaritmo es diferente en cada una de las estas representaciones, pues está matizado por la formación académica del su autor, aunque se destacan algunos hecho comunes.
		Trasladar y formar conexiones entre las diferentes representaciones	Ir al documento original.
	Formas alternativas de aproximación (familiarización con las principales alternativas de aproximación del concepto, sus usos en las diferentes ramas de la matemática, en otras disciplinas y en la vida diaria, así como el estudio de las posibles adecuaciones de estas aproximaciones a ciertas situaciones)	familiaridad con las principales alternativas de aproximación del concepto	Históricamente el acercamiento al concepto se pueda dar desde diferentes disciplinas, lo cual se mencionará más adelante. Ir al documento original.
		Usos en las diferentes ramas de las matemáticas	En cuanto a las ramas de la matemática están: el álgebra, trigonometría, el cálculo.
		Usos en otras disciplinas	En cuanto a otras disciplinas están: la economía, la astronomía, la física.
		Usos en la vida diaria	En la navegación; cálculo de distancias de forma más sencilla, rápida y exacta;
		Posibles adecuaciones a ciertas situaciones	
	La fuerza del concepto (nuevas oportunidades que originan nuevos conceptos, características únicas y propiedades relevantes del concepto, relación con otros conceptos, sub-tópicos o subcomponentes, visto desde una manera multidireccional e integral)	Nuevas oportunidades que originan nuevos conceptos	Remitir al lector al hito de relaciones entre conceptos. Ir al documento original. (ojo; tener cuidado con lo de los números complejos, porque surgen antes de los logaritmos)
		Características únicas y propiedades relevantes del concepto	La forma especial de covariación.* la función logarítmica no se puede generalizar sin la función exponencial y viceversa, * la generalización de estas dos funciones solo se puede dar en los números complejos.
		Relación con otros conceptos	Remitir al lector al hito entre conceptos
		Sub-temas y sub componentes	

	Repertorio básico (conocer y tener fácil acceso a familias de ejemplos específicos, ejemplos potentes que ilustran principios importantes, propiedades, teoremas, etc., aspectos prácticos en la escuela que se incluyen en el currículo)	Fácil acceso a familias de ejemplos específicos	* Las diferentes tablas logarítmicas construidas para la realización de los cálculos (Napier, Briggs y Bürgi).* método de la Prosthaphaeresis.* cálculo del área bajo de la hipérbola cuadrática, una aproximación a una integral (fundamental del cálculo).
		Ejemplos potentes que ilustran principios importantes	Un ejemplo potente que se puede mostrar en la representación tabular es la relación de las sucesiones aritméticas y geométricas; y como de allí surge la idea de logaritmo y algunas de sus propiedades. Otro ejemplo claro es que sin la definición de números imaginarios no es posible consolidar una teoría exponencial.
		Propiedades	En la historia nos muestra cuales son las propiedades que cumplen las funciones exponenciales y logarítmicas. Así, podemos entender las razones por las cuales el logaritmo de un producto igual la suma de los logaritmos de los factores; de igual forma, como el cociente de un logaritmo es igual a la resta de los logaritmos de los factores. Esto también se puede ver para las propiedades de la potencias. Los ejemplos se muestran a continuación.
		Teoremas	Que un número puede tener infinitos logaritmos,, de acuerdo con lo expuesto por Euler.
	Conocimiento y comprensión del concepto, (conocimiento conceptual y procedimental del concepto, y las relaciones de éstos)	Conocimiento conceptual del concepto	Todo lo anteriormente expuesto aporta al conocimiento y comprensión de los conceptos de función logarítmica y exponencial.
		Conocimiento procedimental del concepto	Inicialmente se da la idea de logaritmo, seguido del desarrollo de la teoría de logaritmos y la teoría de potencias; luego se da un vínculo entre los dos anteriores, considerándola como operaciones inversas. *
		Relaciones entre los anteriores	La historia brinda al profesor los elementos adecuados para realizar la conexión entre el procedimiento pertinente y el concepto que va a presentar.
	Conocimiento acerca de las	Acerca de la naturaleza de	Estas dos funciones son de

	matemáticas (conocimiento acerca de la naturaleza de las matemáticas, formas del significado y procesos)	la función exponencial y logarítmica	naturaleza transcendente, lo que quiere decir que no satisface unas ecuaciones polifónicas, cuyos coeficientes son a su vez polinomios, o lo que es igual, que no se puede ser expresada por una secuencia infinita de operaciones algebraicas. Consideramos que la historia es poco lo que nos brinda sobre este respecto.
		Formas de significado y procesos	
C	CONOCIMIENTO ACERCA DEL CURRÍCULO MATEMÁTICO		
	Conocimiento de los propósitos de la instrucción matemática en general, para referirse principalmente a tres aspectos: la importancia de las matemáticas en la escuela, el significado de aprenderla y el valor de cada uno de los contenidos dentro del ámbito escolar	Importancia de la función logarítmica y exponencial en la escuela	Desde la historia se corrobora que el concepto de logaritmo es transversal a diferentes ramas de las matemáticas y a otras disciplinas; lo que indica que a través de este el profesor puede presentar otros conceptos útiles en matemáticas. (Ver hito de la relación entre conceptos).
		El significado de aprender la función exponencial y logarítmica	
		El valor de la función exponencial y logarítmica dentro del ámbito escolar	
	Conocimiento de las justificaciones para aprender la función exponencial y logarítmica, que consiste en conocer y utilizar una variedad de formas específicas para la materia, para justificar los tópicos específicos y con ello motivar a los estudiantes para aprender	Conocer y utilizar una variedad de Formas específicas para la función exponencial y logarítmica	Para poder comprender las situaciones que son Modeladas por la función logaritmo y exponencial, que le sirva de referente para modelar otras similares. (cobro de intereses)
		Justificar la función exponencial	Conocer los conceptos que subyacen a la idea de la función logaritmo y exponencial, como son la teoría de potencia y de logaritmos.
		Con lo anterior motivar a los estudiantes a aprender	Tener una visión sobre posibles y diferentes escenarios o ambientes de aprendizaje desde los cuales se pueda promover la construcción de la función logaritmo y exponencial.* propiciar construcción de representaciones propias y escenarios de aprendizaje.
	Conocimiento de las ideas importantes para enseñar un tópico dado, que son aquellas que los alumnos necesitan aprender acerca de estos	Conocimiento de las ideas importantes que los estudiantes necesitan aprender acerca de las	No enseñar las función logaritmo desligada de la función exponencial, pues guardan ideas que de forma conjunta favorecen

	tópicos, como son los procesos, conceptos del currículo, la capacidad y esfuerzo del estudiante, formas intuitivas de representación y otros	funciones exponencial y logarítmica	comprensión de los conceptos.* destacar su transversalidad para la construcción de otros conceptos.
		Como son los procesos	En cuanto a los procesos identificamos los siguientes: la relación numérica entre cantidades y la inferencia de patrones numéricos, la representación tabular a la representación geométrica-mecánica de puntos en movimiento, la relación covariacional entre cantidades, los procesos de interpretación, representación, y transformación de gráficas, notaciones y modelos a tablas y a otras representaciones analíticas o gráficas,
		Conceptos del currículo	Puede acercar al profesor hacia las respuesta del cómo, para qué, a quienes de la enseñanza de la funciones logarítmica y exponencial.
		La capacidad y esfuerzo del estudiante	Para la evaluación de las comprensiones de los estudiantes; rompe el paradigma de tener una única respuesta correcta, de valorar los esfuerzos y argumentaciones de los estudiantes.
		Formas intuitivas de representación	Le ofrece al profesor disponer de formas intuitivas de representación que a su vez le permite generar procesos de comprensión de sus estudiantes. Valorar otros prototipos que se puedan dar como respuesta a un asunto propuesto; a no descalificar los acercamientos de solución por tratarse de algo que no encaja dentro de lo común o usual.
	Conocimiento de los prerrequisitos de conocimiento para un tópico dado, en los diferentes momentos del ciclo didáctico y estudio del tópico (ej. tópico dentro del mismo currículo, tópico y herramientas conceptuales y procedimentales previas, experiencia en el manejo del tópico o concepto y experiencia en procesos de pensamiento similares)	Prerrequisitos para: el tema función exponencial y logarítmica dentro del mismo currículo	La evolución de los concepto de función logarítmica y exponencial, brinda al profesor una secuencia natural de cómo se dio el desarrollo de estos conceptos desde los cuales se puede determinar una secuencia para el desarrollo del mismo (Ir al documento original)
		Que herramientas conceptuales y	Ir al documento original.

		procedimentales previas se necesitan	
		Que experiencia se tiene en el manejo del tema de función exponencial y logarítmica.	No aporta
		Experiencia en procesos de pensamientos similares	Los procesos de pensamientos que se dieron en la historia se pueden reproducir dentro del aula, ya sean aquellos que conllevaron a dificultades o aquellos que permitieron desarrollos.
	Conocimiento de los problemas típicos de la "escuela matemática", que muestre una familiaridad con problemas típicamente encontrados en la instrucción matemática.	Familiaridad con los problemas comúnmente encontrados en la instrucción matemática	El conocimiento de las diferentes paradojas, las discusiones, los intentos fallidos, los errores de representación, le brindan al docente un panorama que le lleve a ser consciente que esto hace parte del desarrollo normal de los procesos de enseñanza, por lo cual es normal que en la escuela se presenten problemas típicos, para que igualmente pueda identificarlos y afrontarlos.
2	**Componentes del conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales de las matemáticas**		
A	CONOCIMENTO SOBRE LAS REPRESENTACIONES INSTRUCCIONALES		
	Comprender el contenido específico que subyace en las representaciones, las relaciones con otras representaciones o conceptos de la misma disciplina y con otros campos de conocimiento, conocer el origen y fundamento de las representaciones, así como las relaciones que subyacen y los procedimientos de verificación y su relación con el conocimiento del proceso de aprendizaje del alumno	Comprender el contenido que subyace en las relaciones con otras representaciones	Remitir al lector al hito de las representaciones, donde se expuso las representaciones del concepto función exponencial.
		Comprender el contenido que subyace en relación con otros conceptos de la misma disciplina o con otros campos del conocimiento	Remitir al lector al hito de las representaciones.
		Conocer el origen y fundamento de las representaciones	Remitir al lector al hito de las representaciones.
		Conocer las relaciones y procedimientos de verificación que subyacen en relación con el	Remitir al lector al hito de las representaciones.

		conocimiento del proceso de aprendizaje del alumno	
	Criterios para desarrollar, evaluar, seleccionar y usar apropiadas representaciones instruccionales; que implica el conocimiento de los estándares de calidad que evalúan las adecuaciones de las representaciones de la materia en cuestión.	Criterios para desarrollar apropiadas representaciones de la función exponencial y logarítmico	Las representaciones tienen que encerrar la idea del concepto en sus características más importantes. *representaciones desde diferentes disciplinas o ramas de la matemática.* que propicie el pensamiento matemático con respecto a estas dos funciones de acuerdo con estándares curriculares de MEN (2002)donde se observar un vínculo entre ellos y la historia (ver parágrafo 1)
		Criterios para evaluar apropiadas representaciones de la función exponencial y logarítmica	La historia muestra un desarrollo de las representaciones que permitieron el desarrollo del concepto, lo que quiere decir pues está ligado el significado teórico con la representación visual que se ofrece; teniendo como cierto que la perspectiva visual favorece la construcción de los conceptos.* algunas representaciones desarrollan determinados características del concepto.
		Criterios para seleccionar apropiadas representaciones de la función exponencial y logarítmica	Algunos criterios son: cambio de dominio numérico, que muestre la relación entre las sucesiones, la multiplicidad de valores, el tipo especial de co-variación
		Criterios para usar apropiadas representaciones de la función exponencial y logarítmica	
	Amplio repertorio de representaciones de la materia que enseñan; que incluye, el estudio de la relación entre las representaciones y recursos instruccionales específicos para la disciplina; así como de analogías, ilustraciones, modelos, metáforas, ejemplos, explicaciones, demostraciones, dibujos, preguntas, actividades, discusiones, exposiciones verbales, diagramas, simulaciones, dramatizaciones y análisis de contenido, así como representaciones verbales, simbólicas, gráficas o concretas, etc.	Repertorio delas representaciones de la función exponencial y logarítmica	Remitir al lector al hito de las representaciones
		Estudio de la relación entre las representaciones	Remitir al lector al hito de las representaciones
		Recursos instruccionales	Remitir al lector al hito de las

		específicos de la función exponencial y logarítmica "¿o la materia?	representaciones
		Analogías de las representaciones	
		Ilustraciones de las representaciones	Hito de las representaciones
		Modelos de las representaciones	Hito de las representaciones
		Metáforas de las representaciones	
		Ejemplos de las representaciones	
		Explicaciones de las representaciones	
		Demostraciones de las representaciones	
		Dibujos de las representaciones	
		Preguntas de las representaciones	
		Actividades de las representaciones	
		Discusiones de las representaciones	
		Exposiciones verbales de las representaciones	Definiciones de logaritmo
		Diagramas de las representaciones	
		Simulaciones de las representaciones	
		Dramatizaciones y análisis del contenido	
		Representaciones verbales, simbólicas, gráficas y concretas	
	Conocimiento sobre las rutinas instruccionales, que implica, estrategias, métodos o técnicas específicas al contenido matemático vinculado con los materiales de instrucción *y el* conocimiento de las características de las interacciones didácticas, así como de las dificultades cognitivas que implica para su enseñanza y aprendizaje y las alternativas para afrontarlas.	Conocimiento de las estrategias	No aporta
		Conocimiento de los métodos o técnicas específicas a la función exponencial y logarítmica vinculadas con el material de instrucción	No aporta
		Conocimiento de las características de las	No aporta

		interaccciones didácticas.	
		Conocimiento de las dificultades cognitivas que implica para su enseñanza y aprendizaje	Las dificultades que se presentaron a nivel de la comprensión de las paradojas se pueden considerar como puntos de cuidado, pues estos mismos causan dificultad en la comprensión de los conceptos.
		Conocimiento de las alternativas para afrontar las dificultades anteriores	El hecho de conocerlas puede permitir encausarlas para permitir rutas de comprensión seguras.
b	CONOCIMIENTO DE LOS MATERIALES CURRICULARES		
	De los materiales para la instrucción del contenido matemático o para una determinación noción, sus características, los textos y materiales básicos y alternativos, software, calculadoras, programas específicos, problemas, ejercicios, guías, proyectos, ilustraciones, casos, materiales visuales, películas de y sobre conceptos o tópicos, demostraciones en laboratorios, programas o simuladores *on-line*, recursos en Internet, etc., y de los materiales curriculares que los estudiantes tienen en otras materias.	Conocimiento de los materiales para la instrucción de la función exponencial y logarítmica	Conocer el uso de las tablas logarítmicas. * El significado de las notaciones a nivel de los documentos históricos.*lectura de los documentos históricos.
		Características de los materiales	El conocimiento de la historia le permite al docente hacer emitir un juicio sobre los diferentes materiales a la luz de su conocimiento histórico.
		Características de los textos y materiales básicos y alternativos	
		Características de los ejercicios, guías, proyectos, ilustraciones, casos, materiales visuales, películas y sobre conceptos y tópicos	
		Características de demostraciones en laboratorios, programas o simuladores en línea.	
		Características de los recursos de internet	
		Características de los materiales curriculares que los estudiantes tienen en otras materias	
	Del tratamiento y evaluación de los textos y materiales de la materia en cuestión, su organización razonada de tópicos, las actividades y problemas	Conocimiento del tratamiento y evaluación de los textos y materiales de la función exponencial	La historia le da referentes al docente para hacer juicios sobre las estructuras internas que se presentan en los diferentes textos

	que presentan, sus efectos en el aprendizaje del estudiante, de la relación con el contenido y las estrategias instruccionales que proponen y sobre los criterios de uso, selección y adecuación para la enseñanza o aprendizaje de un tópico matemático.	y logarítmica	en lo referente a la presentación de los elementos de la función logarítmica y exponencial.
		Conocimiento de la organización razonada de los temas en referencia con la función exponencial y logarítmica	
		Conocimiento de las actividades y problemas que presentan los textos	
		Conocimiento de los efectos en el aprendizaje del estudiante	No aporta
		Conocimiento de la relación del contenido de la función exponencial y logarítmica y las estrategias instruccionales que proponen	
		Conocimiento de los criterios de uso, selección y adecuación para la enseñanza de la función exponencial y logarítmica.	
C	CONOCIMIENTO SOBRE EL CURRICULO MATEMÁTICO		
	Conocimiento sobre la planificación de la enseñanza del contenido matemático, que incluye el conocimiento del diseño, evaluación y modificación del programa escolar, de las características del currículo matemático (según el grado y nivel de enseñanza), de las relaciones con otros contenidos matemáticos y de las tendencias curriculares específicas de la educación matemática.	Conocimiento sobre la planificación de la enseñanza del contenido de la función exponencial y logarítmica	
		Conocimiento del contenido de diseño de la función exponencial y logarítmica	
		Conocimiento de la evaluación y modificación del programa escolar referente a la función exponencial y logarítmica	
		Conocimiento de las características del currículo matemático (según el grado y el nivel	No aporta

		de enseñanza)	
		Conocimiento del programa escolar y de las relaciones con otros contenidos matemáticos	Hito de las relaciones entre conceptos
		Conocimiento de las tendencias curriculares específicas de la educación matemática	No aporta
	Conocimiento del currículo de otras disciplinas escolares, que incluye la revisión de programas, textos, materiales y recursos con el objeto de establecer con éstas una mayor vinculación con la matemática y el tópico específico que se trate.	conocimiento del currículo de otras disciplinas escolares	No aporta
		Revisión de programas de otras disciplinas	No aporta
		Revisión de textos de otras disciplinas	
		Revisión de materiales y recursos de otras disciplinas	
		Establecer la relación de otras disciplinas con una mayor vinculación con el tema de función exponencial y logarítmica	
	Del diseño e implementación de nuevos materiales de la materia en cuestión, que implica el conocimiento teórico y práctico del estudio del diseño y evaluación de materiales curriculares de contenido matemático.	Conocimiento e implementación de nuevos materiales de la función exponencial y logarítmica	Diseño de una herramienta didáctica para la comprensión de la función logaritmo y exponencial
		Conocimiento teórico y práctico del diseño y evaluación de materiales curriculares referentes a la función exponencial y logarítmica	
3	**COMPONENTES DEL CONOCIMIENTO DE LOS PROCESOS DE APRENDIZAJE DEL ESTUDIANTE SOBRE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOAGRITMICA**		
A	CONOCIMIENTO DEL PROCESO COGNITIVO DEL ESTUDIANTE		
	Conocer las necesidades y conocimientos particulares de los estudiantes, a partir del estudio y observación de su desarrollo (edad, experiencia, antecedentes y escolaridad) y desempeño en el aula, sobre el contenido matemático que	Conocimiento de las necesidades y conocimientos particulares de los estudiantes (Edad, experiencia, escolaridad y desempeño en el aula)	No aporta

	aprende, y reconocer la importancia del estudio de las concepciones y dificultades del estudiante como parte inherente e indispensable para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; conocer sus intereses, motivaciones y expectativas relacionados con las matemáticas y con los diferentes tópicos específicos.		
		Conocimiento sobre el contenido matemático que aprende	No aporta
		Conocimiento de las concepciones y dificultades del estudiante como parte inherente e indispensable para la enseñanza y aprendizaje de la función exponencial y logarítmica	Las paradojas vistas en la historia se convierten en posibles dificultades para el conocimiento de los estudiantes*
		Conocimiento de sus intereses, motivaciones y expectativas relacionadas con la función exponencial y logarítmica	No aporta
	Conocer los procesos de aprendizaje de los estudiantes en matemáticas, enfatizando los procesos de comprensión del concepto y las formas de justificación, partiendo de objetos concretos que representen ideas matemáticas, conociendo las diferencias individuales que puede haber en la forma de aprender de los alumnos, el conocimiento de las características del aprendizaje de tópicos concretos (más y menos comunes) y según niveles cognitivos de desarrollo (procesal o conceptual), las formas de conectar las ideas concretas con las abstractas de las matemáticas y de las formas de ir de lo simple a lo complejo; del conocimiento de las intuiciones y heurísticas de los estudiantes; formas de conectar unas ideas con otras; formas en que la mayoría comprende un tópico dado; es decir, algunos aplicados a las matemáticas en general (ej. terminología), a los tópicos y procedimientos específicos de la matemáticas (ej. simplificar), y otros a su concepción o forma de aprender (ej. memorizar reglas sin comprenderlas) y el porqué de estos aspectos; los fundamentos de razonamiento del	Conocer los procesos de aprendizaje de los estudiantes en matemáticas	No aporta

	estudiante.		
		Conocer los procesos de comprensión y las formas de justificación del concepto función exponencial y logarítmica partiendo de objetos concretos que representan ideas matemáticas.	No aporta
		Conocimiento de las diferencias individuales que pueden haber en la forma de aprender de los alumnos	No aporta
		Conocimiento de las características del aprendizaje de tópicos comunes y según niveles cognitivos de desarrollo	No aporta
		Conocimiento de las formas de conectar las ideas concretas con las abstractas de las matemáticas y de las formas de ir de lo simple a lo complejo	No aporta
		Conocimiento de las intuiciones y heurísticas de los estudiantes	No aporta
		Conocimiento de las formas de conectar ideas con otras	No aporta
		conocimiento en que la mayoría comprende la función exponencial y logarítmica (Algunos aplicados a las matemáticas y otros en su concepción de solo memorizar reglas sin comprenderlas)	No aporta
		Conocer los fundamentos de razonamiento de los estudiantes	No aporta
	Conocer las creencias y concepciones inadecuadas comunes de los estudiantes, así como sus interpretaciones, dificultades (o facilidades), obstáculos y errores de los estudiantes del contenido matemático o del tópico específico, como son, por ejemplo, la falta de juicio para utilizar un procedimiento en una situación y que es diferente para otra (especialmente cuando parecen similares); y conocer las atribuciones o	Conocer las creencias comunes e inadecuadas de los estudiantes.	No aporta

	causas de éstas.		
		Conocer las concepciones comunes e inadecuadas de los estudiantes	No aporta
		Conocer las dificultades, obstáculos y errores de los estudiantes sobre la función exponencial y logarítmica	Ya está dicho
		Falta de juicio "Conocimiento" para utilizar un procedimiento en una situación que es diferente a otra (cuando parecen similares)	No aporta
		Conocer las causas de la falta de juicio	No aporta
B	CONOCIMIENTO DEL DIAGNOSTICO DEL PROCESO COGNITIVO DEL ESTUDIANTE		
	Conocimiento de técnicas para medir y diagnosticar sus concepciones inadecuadas, que incluye, el análisis de los criterios de selección, uso y adecuación de instrumentos o materiales (genéricos o específicos de la didáctica de las matemáticas) para el diagnóstico de las necesidades, formas de aprender, creencias, errores y dificultades en el aprendizaje del tópico matemático.	Conocimiento de las técnicas para medir y diagnosticar sus concepciones inadecuadas	No aporta
		Conocimiento de los criterios de selección, uso y adecuación de instrumentos o materiales (genéricos o específicos de la didáctica de las matemáticas)	Ya está dicho
		Para Diagnosticar las necesidades, formas de aprender, creencias, errores y dificultades en el aprendizaje de la función exponencial y logarítmica	Ya está dicho
C	CONOCIMIENTO DE LAS ESTRATEGIAS INSTRUCCIONALES		
	Conocer las estrategias instruccionales específicas para corregir las creencias y concepciones inadecuadas, errores y dificultades, así como conocer las estrategias instruccionales específicas que pueden ser usadas para permitir que los estudiantes conecten lo que ellos aprenden al conocimiento que ellos ya	Conocer las estrategias instruccionales específicas de la función exponencial y logarítmica para corregir las creencias y concepciones inadecuadas	Ya está dicho

	poseen		
		Conocer las estrategias instruccionales específicas de la función exponencial y logarítmica para corregir los errores y dificultades	Ya está dicho
		Conocer las estrategias instruccionales acerca de la función exponencial y logarítmica que puedan ser usadas para permitir que los estudiantes conecten lo que ellos aprenden de la función exponencial y logarítmica, al conocimiento que ellos ya poseen	No aporta
	Conocer las estrategias de aprendizaje de los estudiantes para promover la adquisición, organización y almacenamiento del contenido matemático, que implica, conocer estrategias para promover el recuerdo, la memorización y la comprensión; y conocer los contextos significativos de aprendizaje de los estudiantes, desde los más primitivos hasta los más sofisticados.	Conocer las estrategias de aprendizaje de los estudiantes	No aporta
		Conocer las estrategias para promover el recuerdo, la memorización y la comprensión.	No aporta
		Conocimiento de los contextos significativos de aprendizaje de los estudiantes, desde los más primitivos hasta los más sofisticados.	No aporta
	Conocer los materiales curriculares, utilizados como parte de las estrategias instruccionales para corregir las dificultades y concepciones inadecuadas de los estudiantes.	Conocimiento de los materiales curriculares	Ya está dicho
		Conocimiento de cómo utilizarlos como parte de las estrategias instruccionales para corregir las dificultades y concepciones inadecuadas de los estudiantes.	Ya está dicho

8.4. ANEXO 4: TRADUCCIÓN DEL DOCUMENTO: "HISTORIA DE LOS CONCEPTOS DE EXPONENCIAL Y LOGARITMO", CAJORI (1913).

Este anexo consta de nuestra versión de la interpretación de la historia de los conceptos exponencial y logarítmico, allí decidimos conservar la estructura manejada en el documento original de Cajori (1913) con algunas ampliaciones con base en otros documentos. El proceso de construcción de nuestra versión de la interpretación de la historia de lo exponencial y logarítmico fue un proceso lento que demandó considerable tiempo para adquirir primero algún grado de familiaridad con las notaciones y el significado de los conceptos que allí se manejaban por ser atemporales a los nuestros. También, como el documento base se encontraba en inglés, con algunos pasajes en francés, tuvimos que hacer una primera versión de la traducción de los siete artículos al español. Esta traducción pretendió ser lo más cercana posible a las ideas del autor, por lo cual, durante la escritura de nuestra versión de la interpretación de la historia, no se muestran citas textuales, como una manera de conceder a Cajori (1913) la paternidad sobre estas ideas; de igual forma, se introducen las citas de los demás autores cuando así se requiere.

I. DESDE NAPIER HASTA LEIBNIZ Y JOHN BERNUOLLI (1614-1712)

LOGARITMO DE NÚMEROS POSITIVOS

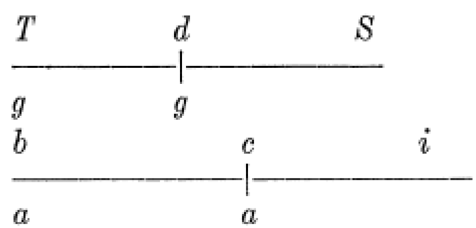
Los siglos XVI y XVII son notables en la historia del algebra por los importantes desarrollos de las notaciones e ideas que determinan su tratamiento moderno. El estudio del algebra en este periodo es más que un simple pasatiempo. En las palabras de Felix Klein: "si realmente deseamos avanzar hacia un completa comprensión de la teoría de los logaritmos, lo mejor es abordarlos desde la historia de su creación."

Los logaritmos fueron inventados antes de nuestra notación moderna de exponencial, a^n, fuera introducida en el álgebra. Para estar seguros, el uso de los símbolos algebraicos que era más o menos diferentes de la simbolización moderna para indicar potencias y raíces de un número había sido sugerido antes de la aparición del logaritmo, pero veremos que estas cuestiones han permanecido descuidadas; el hecho es que los inventores de los logaritmos no utilizaron la notación moderna de exponencial y no estaban familiarizados con el concepto de exponencial el cual ahora juega un papel fundamental en el desarrollo de la teoría de los logaritmos ¿Cuáles fueron las consideraciones básicas para el desarrollo de los logaritmos por parte de sus inventores, John Napier and Joost Burgui?

El *Mirifici logarithmorum canonis* descriptio de John Napier apareció en 1614 en Edinburgo, y su *Mirifici logarithmorum canonis constructio* apareció como un trabajo póstumo en 1619, escrito al tiempo con, o antes que la Descripción (*Descriptio).* Napier basó sus explicaciones en dos hechos: (1) el concepto de geometría mecánica de puntos en movimiento, (2) la relación existente entre series aritméticas y geométricas. Varios autores anteriores a Napier llaman la atención sobre ciertas relaciones entre los términos de una serie geométrica y los términos de una serie aritmética, cuyas relaciones encerraban la idea de logaritmo. Pero estos autores no comprendieron las posibilidades de esta idea, no concibieron y ni llevaron a cabo un método de cálculo de un par de las correspondientes series lo suficientemente elaborado para el uso práctico en los cálculos. A partir de ciertas afirmaciones de autores como Stifel uno podría ser tentado a decir que el concepto de logaritmo realmente existió antes de la época de Napier y Burgui. Sin embargo lo novedoso que fueron los logaritmos de Napier para los principales matemáticos de su época puede ser entendido por el entusiasmo con el cual hombres como Briggs y Kepler los recibieron. Tan novedoso y original parecieron los logaritmos a Briggs que viajó desde Londres a Escocia a visitar a su inventor Napier. Briggs se dirigió a él así:

"M*i señor, he emprendido este largo viaje con el propósito de verte,* y conocer cual *motor del ingenio y talento trajo al pensamiento la más excelente ayuda en astronomía, los logaritmos."*

Napier deja que el punto *g* se mueve a lo largo de la recta definida *TS* con velocidad decreciente talque su velocidad en *T* es a la de *d,* como la distancia *TS* es a la distancia *dS*. Al mismo tiempo Napier pone un punto *a* que se mueva a lo largo de la línea *bc* (la cual es de longitud indefinida) con velocidad uniforme igual a la velocidad inicial del punto *g,* si los dos puntos comienzan a moverse al mismo tiempo, y si *g* es a *d* como *a* es a *c,* entonces la longitud *bc* es definida como el logaritmo de *dS*. Napier construyó tablas para el cálculo trigonométrico. Con este fin en mente pone *TS* como el radio, asignándole el valor de 10^7, mientras *dS* corresponde a un seno dado. En aquella época las funciones trigonométricas no se pensaban estrictamente como razones. En el lenguaje de Napier, la definición de logaritmo es como sigue:



"El logaritmo de un seno dado es el número que se ha incrementado aritméticamente de forma constante con la misma velocidad como aquella con la cual el radio comenzó a decrecer geométricamente, y al mismo tiempo como el radio ha decrecido al seno dado."

Tomando v=10^7, la serie aritmética y geométrica de Napier podría verse en notación moderna como sigue:

$$\begin{array}{ccccc} v, & v(1-1/v), & v(1-1/v)^2, & \cdots & v(1-1/v)^v \; \cdots \\ 0, & 1 \quad , & 2 \quad , & \cdots & v \qquad \cdots \end{array}$$

Los números de la serie superior representan los valores sucesivos de los senos; los números en la serie inferior representan los logaritmos correspondientes| =1,2,… Napier tuvo un objeto definido en mente al hacer el logaritmo de radio, 10^7, igual a cero. El vio este arreglo como un ahorro de trabajo, observando la frecuencia con la cual multiplicaciones y divisiones por el radio se producen en el cálculo trigonométrico. El hace la serie geométrica decreciente mientras la correspondiente serie aritmética creciente. Esto hace que los logaritmos de los senos para todos los ángulos entre 0^0 y 90^0 sean positivos; en nuestras tablas modernas estos logaritmos son negativos.

En la *Descripción (Descriptio)* los logaritmos son definidos como sigue: "*Logarithmi sunt numeri qui proportionalibus adjuncti aequales servant diferentias.*"(Los logaritmos son números que corresponden a números proporcionales de tienen iguales diferencias.) Los números proporcionales son los términos de la progresión geométrica; los números que tienen diferencias iguales son los términos de la progresión aritmética. La palabra "logaritmo" es del griego y significa "el número de razones." La idea es esta: $v\ (1\text{-}1/v)^n$ es obtenido desde v por n aplicaciones sucesivas de la razón $(1\text{-}1/v)^n$. Por lo tanto n, que es el logaritmo, indica "El número de razones" Napier reafirma la definición en 1614 como sigue: Logarithmi dici possunt numerorum proportionalium comites aquidifferent. (Los logaritmos podrían ser llamados compañeros equi-diferentes de números proporcionales.)

No solamente la definición de Napier de un logaritmo es diferente de las definiciones modernas, pero la noción de una "base" es inaplicable a su sistema. Forzar el concepto a una "base" en su sistema nos hace modificarlo. Si cada número de las dos progresiones de Napier es dividido por 10^7, así que 0 sea el logaritmo de 1, entonces 1 es el logaritmo de $(1\text{-}1/10^7)^{10^{\wedge}7}$, que es casi equivalente a e^{-1}, donde e es la base del sistema natural. Por tanto la base de los logaritmos de Napier, cuando es modificada como se indicó aquí, es muy cercana a e^{-1}.

Es bien sabido que Joost Burgui inventó los logaritmos independientemente de Napier, pero perdió todos los derechos de propiedad por no publicarlo hasta los elogios al libro de Napier comenzó a resonar a través de toda Europa. En 1620 apareció en Prag *the Progress-Tabulen*, que contiene la tabla de logaritmos de Burgui, pero omitiendo las explicaciones de estos que fue prometida en el título de la página. Por tanto sus logaritmos fueron incomprensibles para el lector común. Lo común a Burgui y Napier fue el uso de progresiones en la definición de los logaritmos. En las tablas de Burgui los números de la progresión aritmética fueron pintados de rojo, y los números en la progresión geométrica fueron pintados con negro. La relación entre los logaritmos de Burgui, 10n, y sus antilogaritmos es expresada en la notación moderna por la ecuación $10n = \log[10^8(1 + 1/10^4)^n]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ La noción de una "base" no podría ser más forzada en los logaritmos de Burgui que lo que puede serlo en los logaritmos de las tablas de Napier. En ningún sistema el log 1 =0. Sus conceptos de logaritmo fueron más generales que los de la época actual en este sentido, que al deslizar una progresión sobre la otra, permitía la selección de algún número positivo al azar para el cual el logaritmo fuera cero. Hemos visto que originalmente Napier eligió $\log 10^7=0$ mientras Burgui eligió $\log 10^8=0$. Los logaritmos en sus tablas fueron números enteros. Además, los términos de las dos series se podrían hacer aumentar en la misma dirección o en direcciones opuestas, como se elija. Esto es, si $m > n$, uno puede hacer $log\ m\ < log\ n, o\ log\ m >\ log\ n$, como se desee. Napier originalmente tomó la primera opción mientras que Burgui la segunda.

Generalmente se sabe que Napier and Briggs decidieron después de haber dialogado modificar los logaritmos originales de Napier. En el *Apéndice* del trabajo póstumo de Napier, la *Construcción* un arreglo es sugerido, "que adopta una cifra como la unidad de Logaritmo, y 10,000,000,000 como el logaritmo de cada un décimo de unidad o diez veces la unidad." El uso posterior de fracciones decimales en las tablas de logaritmos condujo al logaritmo común adecuado, para el cual $log\ 1 = 0$ and $log\ 10\ = 1$. Un reajuste de los logaritmos originales de Napier fue hecho en *Los nuevos Logaritmos* de John Speidell publicado en 1619 en Londres, por lo cual los logaritmos pasaron a ser llamados “logaritmos naturales” hasta hoy.

Desde esa época los logaritmos fueron estudiados en conexión con alguna progresión geométricas teniendo un término inicial positivo y una razón positiva entre los sucesivos términos, así que los términos negativos no podrían aparecer en la progresión, este hecho no obligó ninguna consideración, qué podrían ser el logaritmo de un número negativo. Por lo que hemos notado, ningún autor en el siglo XVII hizo esta pregunta. Veremos que Leibniz en 1712 la hace. No sería de sorprender si esto se hubiera dado antes. Charles Reyneaun en su *Análisis de Demostración* (Analyse de'montr'e'e) Paris, 1708, Vol. II, p. 802, da la fórmula para la diferenciación, "$dl - x = -ldx/x,$ pero los cambia en la tabla de erratas a "$d - lx = -1dx/x.$" ¿falló Reyneau al recibir la sugerencia de la imprenta del diablo "$l - x$"? En el siglo XVII la teoría de los logaritmos realmente contó con bases satisfactorias. La definición de los logaritmos fue así restringida solamente a la aplicación con números positivos; para todo número positivo le corresponde uno y solamente un logaritmo. Las necesidades de cálculos prácticos aparecieron. Sin necesidad surgió entonces extender el concepto de logaritmo a los negativos o números complejos.

Una revisión de la definición de Napier del logaritmo de números positivos fue hecha por Edmud Halley. En 1695 el usó estas palabras:” la vieja definición de los logaritmos, que ellos son (Numerorum proportionalium equidifferentes comité) es tan fantasiosa para definirlos totalmente: para ello sería mucho más apropiado decir que son (Numeri Rationum Exponentes)." “Así, si se supone que hay entre 1 y 10 una Escala infinita de valores Proporcionales, cuyo Número es 100,000, etc., *en el infinito*; entre 1 y 2 podría estar 30102, etc., de tales Proporcionales, y entre 1 y 3 abría 47712, etc., de ellos, por tanto qué Números son los logaritmos de las Razones, de 1 a 10,1 a 2 y de 1 a 3; y no así propiamente ser llamado logaritmos de 10, 2, y 3.” El artículo de Halley, el cual citamos, esta oscuramente e imprecisamente redactado, pero posee el mérito de dar la primera derivación, por procesos diferentes al de la geometría (hipérbola), de serie infinita para el cálculo de logaritmos.

La idea de Halley de logaritmos de “razones” encierra un interesante punto que los historiadores han pasado completamente por alto hasta hora. Halley anticipó a Roger Cotes por diez y nueve años en la introducción de un método adecuado de medición de una razón. Halley considera razón a ("quantitas sui generis.") Aun la idea de Halley encuentra su origen en las relaciones de distancias de Napier para dos puntos en movimiento. Halley dice: “Estas Razones que suponemos medibles por el Número de Ratiunculae contenido en cada una” Ese número representa el logaritmo de la razón. Pero “logaritmos así producidos podría ser de muchas formas como se quiera.”

Si en lugar de 100,000 valores proporcionales entre 1 y 10 tomamos 230258 de ellos, entonces, en lugar de logaritmos comunes, obtendríamos logaritmos naturales. Todos los sistemas de logaritmos difieren por un factor constante de algún sistema escogido como estándar.

Por lo tanto, para una razón dada, el número de ratiunculae es arbitrario; este es igual al número en el sistema estándar, multiplicado por una constante. En otras palabras, *la medida de una razón es una constante de veces el logaritmo estándar de esa razón*. Esta es la idea, aquí expresada por Halley, posteriormente elaborada por Cotes, después perdida de la vista por largo tiempo hasta el siglo XVII, cuando F. Klein la introduce de nuevo, con el propósito de establecer la validez de los procesos de proyección geométrica por las hipótesis de geometría no-euclideana.

La siguiente cita de un artículo “Los logaritmos” en la segunda edición (1743) el *Nuevo Diccionario Matemático* de E. Stone es de interés, porque este asegura la dependencia de Cotes sobre Halley y especialmente porque esta da una sentimiento de extrañeza hacia la definición de Halley de la “medida de una razón” que se apodera de quien no ha ido más allá de los conceptos elementales de medición. Stone dice:

“Señor Cotes también, en el Comienzo de su Harmon. Mesur ha dado este Negocio en imitación de Dr. Halley, aunque más corto, con la misma Oscuridad: abogo para que nadie, incluso a sus más grandes Admiradores, si saben qué podría ser de su primer Problema, encontrar una Medida de una Razón de los Términos del Problema en sí mismo…”

“logaritmos de las medidas de las razones” es referido por Saunderson en sus *Algebra* y por W.J.G.Karsten de Halle, en un importante documento sobre logaritmos y por J.F.Lorenz, en su *Elementos de Matemáticas* (*Elemente der Mathematik)*, pero en general, esta definición fracasó en influenciar el pensamiento matemático del siglo XVII.

Las explicaciones tempranas del uso de los logaritmos involucra la consideración de muchos casos especiales. Los teoremas $log\ a + log\ b = log\ ab, log\ a - log\ b = log\ a/b, log\ a^m, = m\ log\ a,$ fue explícitamente establecida por Oughtred (no en símbolos algebraicos, como aquí, pero en palabras) en su folleto De *cequationum affectarum resolutione in numeris* que fue publicado en 1652, ligado en un volumen con su *Clavis mathematic*. La edición de 1631 del *Clavis* no da estos teoremas.

El punto de vista teórico del logaritmo fue ampliado un poco durante el siglo XVII por la representación gráfica, tanto en coordenadas rectangulares como polares de un número variable y su logaritmo variable. Así fue inventada la *curva logarítmica* y la *espiral logarítmica*. La representación gráfica de funciones fue solo entonces cuando comenzó a ser entendida. Probablemente la curva logarítmica sugirió por si misma muchas opiniones. No ha sido posible hasta hora determinar con certeza quién fue su primer inventor. Hutton dice que la curva ha sido atribuida a Edmud Gunter, pero Hutton no lo encontró en los escritos de Gunter. Lo más probable es que el rumor sea debido a una confusión entre la “curva logarítmica” y la “línea logarítmica” inventado por Gunter y conocida como la precursora de la regla del cálculo. Sea ha pensado que la primera referencia de la curva logarítmica fue hecha por el Evangelista Italiano Bernoulli en una carta del año 1644, pero Paul Tannery ha hecho prácticamente cierto que Descartes conocía la curva en 1639.

Esto es encontrado en un trabajo de J.Gregory del año 1667 y es claramente explicado en la segunda edición (1690) de un libro por el matemático francés, C.F.M.Dechales. En el mismo año Christiaan Huygens da a conocer sin prueba las bellas propiedades de la curva logarítmica; estas propiedades fueron probadas más tarde por G. Grandi y G.Fontana. Los teoremas sobre la cuadratura de esta curva fue dada por Torricelli, Huygens y J.Craig. Esta curva fue discutida también por J. Bernoulli. Su rectificación fue primero explicada en

1692 por Marquis l´Hospital en una carta a Leibniz. Veremos que durante el siglo XVIII la curva logarítmica juega el papel de guiar la discusión de la teoría de logaritmos, y que ayudó a oscurecer más que a clarificar las cuestiones sobre este asunto.

La curva que es la representación gráfica en coordenadas polares de la relación entre una variable y su logaritmo fue inventada por René Descartes. Esto es descrito por él en 1638 en una carta a P.Mersenne. Descartes no da su ecuación, ni da la conexión con los logaritmos. Él los describe como la curva que forma ángulos iguales con todos los radios trazados a través del origen. Poco después, esta espiral fue reinventada por Torrichelli, quien, como hemos visto, es el segundo con Descartes en estar incuestionable relacionado con la historia de la curva logarítmica. El nombre, *espiral logarítmica* fue acuñado por Pierre Varignon en un documento presentado a la academia de Paris en 1704 y publicado en 1722. En Inglaterra esta espiral comandó la atención de Oughtred, Collins, Wallis y Barrow.

No menos importante en la historia de los logaritmos es una tercera curva, llamada la hipérbola. La cuadratura del espacio entre la hipérbola y su asíntota fue llevada a cabo por Gregory St Vicent, en el libro VII de su *Opus geometricum*, Amberes, 1647.

Esta área, para la hipérbola rectangular $xy = 1$, es expresada ahora en la forma logarítmica $log y_1 / log y$, el área así indicada está limitada por las abscisas de x, la ordenadas y y $y1$, y el arco hiperbólico. Sin embargo, esta investigación de Gregory St. Vincent, estrictamente hablando, no figura en la historia de los logaritmos. El no menciona los logaritmos. Su resultado es puramente geométrico y podría permanecer inalterado en todos sus detalles, los logaritmos nunca hubieran sido reinventados. Lo que él estableció fue simplemente el teorema que, si paralelas a una asíntota estan puestas entre la hipérbola y la otra asíntota, así que las sucesivas áreas de la cuadriláteros mixtelineos así formados son iguales, entonces la longitud de esas paralelas forman una progresión geométrica.

Aparentemente el primer escritor que establece este teorema en el lenguaje de logaritmos fue el Belga Jesuita Alfons Anton de Sarasa, quien defendió Gregory St Vincent contra los ataque hechos por Mersenne. Esta declaración fue un paso muy natural a tomar, en vista de que el teorema de Gregory St. de Vicent en una hipérbola $x.y = 1$, el área asintótica varia en razón aritmética cuando y o x varia en razón geométrica, y de la definición de Napier de un logaritmo la cual estableció una correspondencia uno a uno entre la serie geométrica y la serie aritmética.

Una importante publicación fue el folleto de Nicolaus Mercantor *Logarithmo- techni*a, Londres, 1668. Mercantor escribe la ecuación de la hipérbola en la forma $y = 1/(1 + a)$, donde $1 + a$ es la abscisa, y y es la ordenada. La extiende $1/(1 + a)$ por división entre una serie infinita (en sí mismo una idea novedosa)

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + aa - a^3 + \cdots .$$

El da una cruda explicación del proceso de sumatoria que nosotros ahora indicamos por $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$, y luego integra los términos de la serie superior. Uno esperaría que él escribiera la serie logarítmica $log\,(1 + a) = a - aa/2 + a^3/3 - \ldots$, que es atribuida a él, pero él no lo hace así. En lugar de esto él escribe los valores numéricos de los pocos primeros términos de esa serie, tomando $a = 1$, por tanto obtiene el área de cuadrilátero mixtilíneo entre las ordenada $y = 1$ y $y = 1/1.1$ como $.095310181$. Él repite este proceso para $a = .21^2$. Probablemente usando los resultados por Gregory St Vincent y de Sarasa, Mercantor finalmente conecta sus propios resultados con los logaritmos. Que él realmente usó la serie logarítmica es evidente también desde el próximo paso, que debía haberse obtenido por integración de los términos de esa serie. El no escribe el resultado general de esa integración, pero otra vez da solamente el valor numérico correspondiente a los primeros pocos términos de la nueva serie, para $a = .1$. Así él obtiene el valor de $\int log\,(1 + a)da$ para $a = 1$. Estos resultados son encontrados muy al final del folleto de Mercantor, bajo el título *Invenire summam loga- rithmoru*. Tropkle es de la opinión que el fracaso en la publicación de Mercantor de las series logarítmicas generales fue debido a una práctica todavía presente en su época, de enunciar meramente los nuevos resultados, con la intensión de mantener la ventaja sobre los demás. Nosotros no consideramos este el motivo real. Algún lector podría repetir los cálculos de áreas de Mercantor, desde la explicación completa dada. Su rumbo es probablemente debido a la concepción diferente del estilo apropiado de exposición, que favoreció el caso especial concreto de la formula general. Wallis fue el primero en expresar la serie logarítmica de Mercantor en símbolos generales. Mientras las investigaciones debidas a Gregory St. Vicent, Mercantor y algunos otros guió la grandiosa mejora de los métodos del cálculo de logaritmos por series infinitas, y el estilo de los teoremas geométricos en el lenguaje de los logaritmos, ninguna modificación del concepto de logaritmo surgió de estas investigaciones.

En un MS. De julio, 1676. Leibniz deduce la integral $\int dy/y$. Esto surgió del estudio del problema que Florimond de Beaune había propuesto a Descartes quien respondió en una carta de feb. 20, 1639. Encontrar la cuadratura de esa curva en la cual la ordenada es a la subtangente como un segmento lineal dado, es la diferencia de la ordenada y la abscisa. En este MS. de 1676, al igual en el documento publicado la *Nova methodus,* Leibniz es guiado por ese problema de la ecuación $w/a = dw/dx$. Él toma dx como una constante *b,* y obtiene $w = a/b \cdot dw$; esto es, las ordenadas w es proporcional a sus incrementos. Si la $x´s$ crece en progresión aritmética, entonces la correspondiente $w´s$ son los términos de una progresión geométrica. Por tanto las $x´s$ son los logaritmos de la $w´s$; él concluyó que la curva es logarítmica. Ya en 1675 Leibniz uso la notación "$Log\ y$" en la ecuación "$a^2 - yx = 2y^2\ Log\ y$."

LA NOTACIÓN EXPONENCIAL MODERNA

El simbolismo moderno para potencias de números fue introducido por René Descartes en su *La geometrie,* París, 1637. El escribe *"aa o a^2 para multiplicar a por si misma; a^3 pour le multiplier encore une fois par a, et ainsi a l'infini.* Así, mientras Vieta representó A^3 para "A cubos" y Stevin x^3 con una figura 3 dentro de un circulo pequeño, Descartes escribió a^3. En su *Geometría* él no usa exponentes negativos ni fraccionarios, ni exponentes literales. Su notación fue el crecimiento y mejora de las notaciones empleadas antes de él por Chuquet, Bombelli, Burgui, Reymer, y Kepler. El trabajo manuscrito de Chuquet El tripartido en la ciencia de los números (Le Tri- party en la science des nombre), 1484, da $12x^3$ y $10x^5$, y su producto $120x^8$, por los símbolos 12^3, 10^5, 120^8, respectivamente. Chuquet va incluso más allá y escribe $12x^0$ y $7x^{-1}$ así $12^0, 7^{1m}$. El representa el producto de

$8x^3$ y $7x^{-1}$ con 56^2. Burgui, Reymar y Kepler usan numerales Romanos para el símbolo exponencial. Burgui escribe $16x^2$ así 16^{II}. Thomas Harriot simplemente repite las letras; el escribe $a^4 - 1024a^2 + 6254a$ *como:* $aaaa - 1024aa + 6254a$.

La notación de Descartes se extendió rápidamente. Esta fue usada por Fr.v.Schooten en su comentario sobre la *Geometría* de Descartes, en la edición que apareció en Amsterdan en 1644. Esta notación fue usada por Huygens y Mersenne en 1646 en sus correspondencias entre ellos, y por Hudde en 1658. Oughtred no usó los exponentes modernos en ninguna de sus ediciones de su *Clavis mathematica* (Londres, 1631, 1648,1652), pero sí Rigaud reprodujo fielmente las notaciones en las cartas originales, esto conduce a que Oughtred usó exponentes de enteros positivos en su correspondencia hacia 1642. En feb.5, 1666-7, John Wallis escribió a John Collis, una nueva edición propuesta de *Clavis* de Oughtred estando bajo discusión: "es verdad, que así como en otras cosas así en la matemáticas, las tendencias cambian constantemente, y esa que Mr. Oughtred designó por grandes letras podría para otros ser considerado como pequeño; pero una voluntad matemática, con la misma facilidad y ventaja entiende Ac y a^3 *o* aaa. John Pell escribió r^2 y t^2 en una carta escrita en Amsterdam en agosto 7 de 1645. Pascal hace usó libre de exponentes enteros positivos en muchos de sus documentos, particularmente en *Potestatum numeri- carum summa,* 1654. G. Kinckhuysen usó exponentes enteros positivos en 1660 en su *Meet-Konst,* y en 1661 en su *Algebra.*

La edición de febrero concluirá la discusión de la notación exponencial moderna y se ocupará de los intentos fallidos de crear una teoría de los logaritmos de números negativos.

La Moderna Notación Exponencial

El *Deutsche Algebra,* de J.H.Rahn, publicado en, 1659, contiene dos notaciones para potencias de enteros positivos, una usando los exponentes cartesianos,a^3, x^4,la otra considera para su escritura una pequeña espiral entre la base y el exponente sobre la parte derecha. Así a) 3 significa a^3. Al espiral significa involución (involution), un proceso que él llama *involviren.* Una traducción al inglés, alterada y ampliada por John Pell, fue hecha por Thomas Brancker y publicada en 1668 en Londres. En el mismo año los exponentes de enteros positivos fueron usados por Lord Brouncker en un volumen temprano de las *Transacciones Filosóficas de Londres*(Philosophical Transactions of London) en estas negociaciones ninguna de las notaciones anteriores a Descartes (pre-descartia) para potencias aparece, excepto una pocas veces en un artículo de 1714, escrito por John Cotes.

De interés es el pasaje siguiente en la *Aritmética Universal* de Newton (Universal Arithmetick) (que consiste en lectura producidas en Cambridge en el periodo 1669-1685, impresa por primera vez en 1707): " así $\sqrt{64}$ denota 8; y $\sqrt{3}$:64 denota 4…Hay algunos, que para denotar la raíz o primera Potencia, hacen el uso de q , y de c para el Cubo, qq para los Bicuadrados , y qc para los Cúbico-Cuadrado, etc.. otros hacen uso de otros tipos de Notación, pero ellas son ahora casi en desuso.

En una edición de 1679 de los trabajos de Fermat la notación algebraica de Vieta, originalmente seguida por Fermat, es descartada a favor de los exponentes de Descartes. Al parecer, desde lo que sea citado, que hacia 1660 o 1670 el exponente de entero positivo ha ganado un lugar indiscutible en la notación algebraica. Aunque generalmente adoptado, no fue tan universal. Un importante volumen, el P. Gasparis Schotti *Cursus matheniaticus,* Frankfurt a. M., 1661 y la segunda edición de Diophantus by Bachet de Meziriac (Toulouse, 1670), no contiene rastro de la notación exponencial moderna. La explicación de su método de aproximación a las raíces de ecuaciones numéricas de Joshep Raphson, impreso la edición en Latín del *Algebra* de John Wallis en 1693, no usa exponentes de enteros positivos; Raphson usa raíces de g hasta g^{10}, pero en todos los casos escribe fuera cada uno de los factores a la manera de Harriot.

Es digno de notar que por largo tiempo hubo diferentes notaciones para las raíces de una letra. Algunos lo escribieron como *aa;* otros a^2. Sería bastante difícil distinguir un claro caso a favor de a^2, uno de los argumentos base fue para mayor economía de espacio. La simbolización *aa* fue preferida por Descartes, Huygens, Rahn, Kersey, Wallis, Newton, Halley, Rolle, L.Euler-en efecto, por la mayoría de escritores de la segunda mitad de los siglos XVII y XVIII; a^2 fue preferido por Leibniz, Ozanam, David Gregory.

Notaciones exponenciales negativas y fraccionarias han sido sugeridas por Chuquet, Stevein y otros. El simbolismo moderno es debido a Wallis y Newton.

En su *Arithmetica infinitorum,* Oxford, 1656, Wallis usa exponentes de enteros positivos y habla de "índices" negativos y fraccionaros. Pero él no la escribe en realidad a^{-1} para $1/a$, o $a^{3/2}$ para $\sqrt{a^3}$. El habla de la serie 1/ $\sqrt{1}$, 1/$\sqrt{2}$, 1/$\sqrt{3}$, etc., como tomar el índice -1/2 la serie 1,4,9, ...como tomar el "índice 2" la serie $\sqrt{1}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{27}$,…como tomar el índice 3/2" nuestra notación moderna involucra exponentes fraccionarios y negativos que fueron formalmente propuesta una docena de años más tarde. En junio 13 de 1676, Newton escribió a H. Oldenburg, entonces secretario de la Real Sociedad de Londres, una carta la cual fue remitida a Leibniz. La carta contiene el siguiente mensaje, que es interesante pues contiene el teorema del binomio y explica el uso de los exponentes negativos y fraccionarios:

Sed extractiones radicum multum abbreviantur per hoc Theorema.

$$\overline{P+PQ}|^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c.$$

Ubi $P+PQ$ significat quantitatem, cujus radix, vel etiam dimensio quævis, vel radix dimensionis, investiganda est; P, primum terminum quantitatis ejus; Q, reliquos terminos divisos per primum. Et m/n, numeralem indicem dimensionis ipsius $P+PQ$: sive dimensio illa integra sit; sive, ut ita loquar, fracta; sive affirmativa, sive negativa. Nam, sicut analystæ, pro aa, aaa, &c. scribere solent a^2, a^3, &c. sic ego, pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{ca^5}$, &c. scribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$; & pro $1/a$, $1/aa$, $1/aaa$, scribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}.[3]

Es de resaltar que la notación moderna de exponentes fraccionarios fue introducida primeramente por Newton en la comunicación de su Teorema del Binomio, inventado por él algo antes de 1669. Newton usó también exponentes negativos y fraccionarios. En ReyNoviembre de 1676, Leibniz recogió algunos de sus resultados en una hoja de papel; el usa aquí la notación x^{-3}, x^{-1}. Se debe observar también que el uso de los exponentes literales es sugerido en la fórmula para el teorema del binomio de Newton como se mostró antes. Y que los exponentes *literales* vienen a ser generalmente utilizados en la última parte de siglo XVII por Newton, Leibniz y sus seguidores. Quizás la primera aparición de los exponentes literales es en la *Mathesis universalis,* de Wallis, en Oxford, 1657, donde unas pocas expresiones como han sido dadas $\sqrt{^d R^d} = R$, $AR^m \times AR^n = A^2R^{m+n}$

La teoría de exponentes, involucra valores positivos, negativos y fraccionarios, es expuesta y utilizada libremente en documento más leído y con mayor prestigio, titulado *Analyse demontree* por Charles Reyneau, París, 1708. La teoría es expuesta en la introducción del primer volumen. Esto es hecho porque los tratamientos de algebra entonces en uso usualmente no los contenía. Reyneau usa estas palabras: “El único cálculo que no se explica de los borradores del algebra es el que acabamos de discutir referente a los exponentes de las potencias” (algebra then in use did not usually contain it. Reyneau uses these words: "Le seul calcul qui n'est pas explique dans les Traites d'Algebre dont on vient de parler, est celui des exposants des puissances.)" Al derivar reglas de diferenciación Reyneau pasa de $x^x = a \ \ a \ \ x/x = la$, y de $x^{x^x} = y^{y^y}$ to $x^x lx = y^y ly$.

Surge la interesante cuestión, ¿dónde y cuándo se da la unión entre los conceptos de exponencial y logaritmo? Esto no ocurre hasta el siglo XVIII. Como es de suponerse, hubo una relación bastante larga. Que nos remonta a los a tiempos de Wallis. En el capítulo veinte de su *Algebra*, 1685, Wallis desarrolla la teoría de los logaritmos, comenzando con dos progresiones 1,2,4,8, ...y 0,1,2,3, ... Él luego generaliza tomando

$$\begin{array}{l} 1 \cdot r \cdot rr \cdot r^3 \cdot r^4 \cdot r^5 \cdot r^6 \text{ etc.} \\ 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \text{ etc.} \end{array}$$

Y dice que “*Estos exponentes los llaman logaritmos”*, son números artificiales, que corresponden a los números naturales, así que la adición y la sustracción de estos corresponde a la multiplicación y división de los números naturales” y aun Wallis no se declara, resueltamente, de acuerdo con la definición moderna de un logaritmo, y su uso.

Un punto de vista similar fue dado por John Bernoulli I en una carta de mayo, 1694, dirigida a Leibniz. Bernoulli discute una *"ideam novi ... calculi per- currentis,"* una terminología después descartada en favor del cálculo de “cantidades exponenciales.” Él habla de la construcción de curvas exponenciales $x^x = y$ por medio valores de la curva logarítmica ordinaria la cual él dice es consiste en una curva de ese tipo, tomando la ecuación $a^x = y$. Bernoulli asume la curva logarítmica creada y usa la gráfica para el trazado la ecuación $x^x = y$. El asume un valor de x_1, luego mide la ordenada $log\, x_1$, sobre la curva logarítmica y construye geométricamente el producto $x_1 \ \ log\, x_1 = log\, y1$. Finalmente encuentra, una vez más con la ayuda de la curva logarítmica, el antilogaritmo y_1. Este y_1, junto con el valor tomado para x_1, produce un punto sobre la curva $x^x = y$. Así la curva puede ser construida por puntos. Desde nuestro punto de vista, el interés de este proceso radica en el hecho que la curva logarítmica y por tanto el mismo logaritmo, esta relaciona con la ecuación $a^x = y$. Así x es vista como el logaritmo de y. Bernoulli no ha mencíonado aquí las progresiones aritmética y geométrica. Su procedimiento envuelve la definición moderna de un logaritmo, que, sin embargo él no ha explicitado. El proceso muestra que Bernoulli pasó de la forma $x^x = y$ a $x\, log\, x = log\, y$, aunque él realmente no escribió esta última ecuación. En junio, 1694, Leibniz envió a J. Bernoulli una carta en respuesta, en la cual él escribe de las dos formas $x^x = y$ y $x\, log\, x = log\, y$. Vemos desde lo anterior que Leibniz y J. Bernoulli tuvieron en ese momento una comprensión de la función exponencial.

II. DESDE LEIBNIZ Y JOHN BERNOULLI I HASTA EULER (1712-1747)

INTENTOS FALLIDOS DE CREAR UNA TEORIA DE LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS

En el siglo XVII la tendencia de tomar reglas dadas solamente para un caso especial y aplicarlas a los casos más generales se acentuó más de lo que había sido. Esta tendencia que en el siglo IXX llegó a ser llamada "principio de la permanencia de las formas equivalentes" o mejor aún, el "principio de la permanencia de leyes formales" Hoy, vemos ampliaciones teóricas como cosas que estamos en la libertad de hacer o no hacer, como queramos. Si encontramos más conveniente en una investigación dada trabajar con los números positivos dejando de lado los números negativos y complejos, podremos hacerlo, pero debemos establecer claramente nuestra posición, para luego mantenerla. En el siglo XVII y XVIII este sentir no era claro, lógicamente, uno contaba con la libertad para ampliar o limitar el concepto de número. Los números negativos vienen a ser usados libremente, sin embargo esta ampliación del dominio fue hecho con recelo, lo cual se muestra en los nombres que se les asignaron, tales como números *falsos* o *defectuosos,* (numeri ficti). Aún más pronunciada fue el sentimiento de inconformidad hacia bi o $a + bi$; tales números fueron llamados *imaginarios,* e *imposibles*. Se sintió que la validez de los números negativos y complejos debía ser probada, y no solo asumida; que la reglas de operación con tales números era un asunto que requería demostración. Por tanto los matemáticos del siglo XVIII, incluidos hombres de la categoría de Laplace, trataron de probar la ley de los signos en la multiplicación de dos números negativos. Las "pruebas" dadas fueron débiles; ellos se basaron en un silogismo sin mucha premisa. Esta diferencia en el punto de vista debe ser decisiva a tener en cuenta en la historia en la ampliación del concepto de logarítmico a los números negativos y complejos. Esto ayudará a explicar cómo fue que la controversia sobre este asunto duró durante todo el siglo y llegó hasta bien entrado el siglo IXX.

Varios de los matemáticos prominentes del siglo IXX, particularmente Euler, usó libremente imaginarios; algunos otros matemáticos vieron los imaginarios con recelo. Aquí y allá en el siglo XVIII los matemáticos se pronuncian fuertemente contra del uso de los negativos y los imaginarios. Interesante es el lenguaje utilizado por Leibniz en 1972. El habla de un factores imaginarios de $x^4 + a^4$ como "un elegante y maravilloso recurso de la inteligencia divina, un origen anormal en la campo del pensamiento, casi un anfibio entre ser y no ser. Más maravilloso fue el resultado alcanzado en 1702 por John Bernoulli (1667-1748). Él explicó la transformación del diferencial $adz \div (b^2 + z^2)$ into $-adt \div 2bt\sqrt{-1}$ por valores de la relación $z = (t-1)$, $b\sqrt{-1} \div (t+1)$ y por tanto mostró que la integral puede ser expresada como una arco-tangente y también como un logaritmo. De esta manera él señaló una relación entre el logaritmo de un número imaginario y la arco-tangente. Este *logaritmo imaginario* como John Bernoulli lo llamó, fue tan novedoso y tan extraño al pensamiento de la época que causó poco comentario.

En una carta del mismo año (1702), fechada junio 24 y dirigida a John Bernoulli, Leibniz habla de logaritmos imaginarios en conexión con los problemas de integración. Hay peligro de atribuir demasiada importancia a los fragmentos de este tipo. Para Leibniz yJ.

Bernoulli un imaginario a menudo significaba no existencia. Si se creyó en la existencia de los logaritmos de números imaginarios, nada de lo presentado hasta ahora da cuenta de la naturaleza de tales logaritmos.

La controversia sobre los logaritmos que inquietó a los matemáticos por más de un siglo no se originó principalmente en las discusiones de los números imaginarios, sino más bien en discusiones de números negativos. ¿Son los números negativos menos que nada? Sí lo son, entonces en una proporción $1: -1 = -1: 1$ el número mayor es al menor, como el menor es al mayor – un imposible. Este asunto fue discutido por muchos autores, incluido Leibniz, Newton, D´Alenbert Maclaurin, Rolle and Wolf. Leibniz publicó un documento sobre este asunto en 1712. El consideró la proposición anterior de hecho imposible, pero sostuvo que tales proporciones podía ser usadas con la misma ventaja y seguridad con la cual otras cantidades inconcebibles son usadas. Leibniz dijo que una razón puede ser considerada imaginaria, cuando no tiene logaritmo. La razón $-1/1$ no tiene logaritmo; pera, resultaría $log\,(-1/1) = log\,(-1) - log\,1 = log\,(-1)$. Leibniz afirmó que -1 no tiene logaritmo real; tal logaritmo no puede ser positivo, un logaritmo positivo corresponde a un número mayor que 1; el logaritmo podría no ser negativo, un logaritmo negativo corresponde a un número positivo, menor que la unidad. La única alternativa que queda, es declarar el logaritmo de -1 como no verdadero realmente, pero imaginario. Él llega a la misma conclusión desde la consideración que si existe realmente un logaritmo para -1 entonces la mitad de este podría ser el logaritmo del número imaginario $\sqrt{-1}$, una conclusión que el consideró absurda. Notamos en estas afirmaciones de Leibniz un doble uso del término imaginario (1) en el sentido de no existente, (2) en el sentido de un número de la forma $\sqrt{-1}$.

En marzo 16 ese año, antes de la aparición del artículo, Leibniz mencionó el asunto en una carta a John Bernoulli. Esta carta abrió una controversia amigable entre ellos dos sobre los logaritmos de números negativos e imaginarios. En su correspondencia ellos debatieron este asunto por diez y seis meses.

En esta época ellos fueron los únicos interesados en el asunto; de hecho ellos fueron los únicos a los cuales el problema de la existencia o no-existencia de los logaritmos de números negativos había ocupado. La controversia permite varias posiciones de los más interesantes y da una visión dentro de los conceptos algebraicos de esa época que realmente no podría ser obtenida de ninguna otra manera. Para resumir $+\,n$ o $+\,x$ indica un "número positivo" y - n o - x indica un "número negativo," *log (+n)* "el logaritmos de un números positivo", *log (-n)* "el logaritmo de un número negativo," *i* o *in* un *"número imaginario"*. La siguiente es una síntesis de la correspondencia:

Marzo 16, 1712. Leibniz para J. Bernoulli. Esta es la carta ya mencionada, L. dice que $-1/1$ es imaginario, ya que no tiene logaritmo.

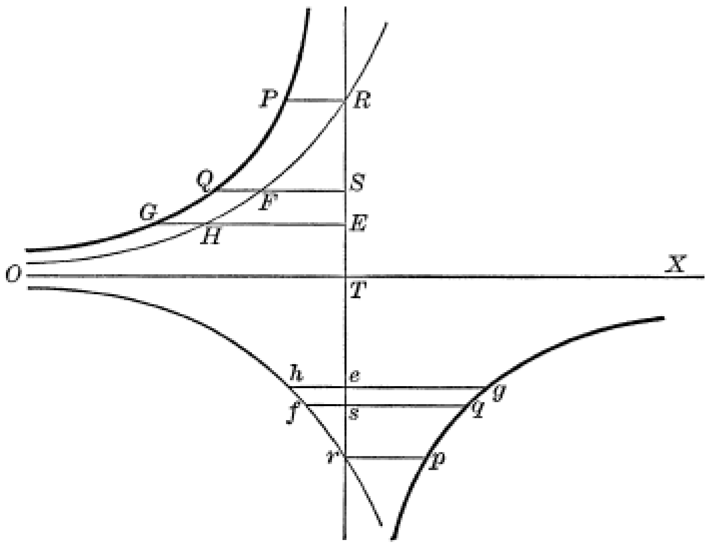
May 2, 1712. J. Bernoulli para Leibniz. B. rechaza la prueba de L. que la razón $1: -1, o -1: 1$ es imaginaria, con el argumento de que $-x$ tiene un logaritmo. Tenemos $dx: x = -dx: -x;$ por tanto, por integración, $log(x) = log\,(-x)$. La curva logarítmica $y = log\,x$ tiene por tanto dos ramas, simétricas al eje Y, por lo tanto la hipérbola tiene dos ramas opuestas.

Junio 30,1712 Leibniz para J: Bernoulli. L. repite su argumento que log *(-2)* no existe; porque, si existirá, su mitad sería igual a $log\ \sqrt{-2}$, algo imposible. La regla para la diferenciación $d\ log\ x = dx: x$, no aplica para $-x$. En la curva logarítmica $y\ =\ log\ x, x$ no puede decrecer hacia 0 luego pasa al lado opuesto, ya que la curva no puede cortar el eje Y, que es su asíntota.

Agosto 13, 1712. J. Bernoulli para Leibniz: el argumento que $log\ (-2)$ no existe, porque $log\ \sqrt{-2}$, no existe es válido. Niego que $log\ \sqrt{-2}$ sea la mitad de $log\ (-2)$, aunque es cierto que $log\ \sqrt{2}$= ½ log 2. La diferencia es que $\sqrt{2}$, es un valor proporcional entre 1 y 2; $\sqrt{-2}$ no es un valor proporcional entre *-1 y -2*. Como $log\ \sqrt{1 \times 2}\ = 1/2\ log 2$, así es $log\ \sqrt{-1 \times -2} = \frac{1}{2} log(-2)$. Es decir, $log\ \sqrt{2} = \frac{1}{2} log 2 = \frac{1}{2}\ log\ (-2)$. En el paso de $+\ x$ a $-x$ en una curva no es necesario que la curva corte el eje *y*. Ejemplo la hipérbola conjugada cuyas abscisas son comunes a las ordenadas $+$ y $-$, pero nunca desaparecen. $Ln\ y =\ log\ x$, una rama de la curva pasa sobre la otra hasta el infinito, cuando $x = 0$, del mismo modo como en el concoide de Nicomedes y otras curvas.

Sept, 18, 1712. Leibniz para J. Bernoulli: Los logaritmos son números en progresión aritmética, que corresponde a los números en progresión geométrica, de los cuales un número podría ser 1 y el otro podría ser algún número positivo. Asumamos que $log\ 1\ = 0$ y que $log\ 2\ =\ 1$. En la progresión aritmética así limitada, *-n* nunca puede ser obtenido, sin importar cuantos triadas proporcionales son formadas. En la serie $1, 2, 4$ el valor proporcional entre $1\ y\ 4$ son ambos $+2\ y\ -2$. Pero -2 no puede estar en la misma progresión geométrica que contiene a *+2*; es decir, ningún valor de e se hace $-2 = 2^e$ o $e\ =\ log\ (-2)$; por tanto no hay logaritmo para -2, y una curva $e\ =\ logx$ que satisface $x = 1$ y $x\ = 2$, pero no puede satisfacer $x\ = -2$. *De lo contrario*: si -2 tiene un logaritmo, entonces la mitad de ese logaritmo existe y es el logaritmo de $\sqrt{-2}$. Pero $\sqrt{-2}$ es un número imposible; por tanto la mitad de $log\ (-2)$ es imposible, y el conjunto, ósea $log\ (-2)$ es imposible. *Otro punto*: En la teoría logarítmica, n^e *o* $\sqrt[e]{n}$ es representado por $log\ n \cdot\ e$ o por $log\ n: e;\ \ nn$ o $n: n$ es representado por $log\ n\ \pm\ logn$; n es representado por $logn;$ pero ¿qué es $-n$ representado? No hay forma de representación para lo ya mencionado. *Otra vez*: Concedamos por el momento que log (*-2)* existe, esto sigue que $log\sqrt{-2}$ es la mitad de este, para $\sqrt{-2}$ es el valor proporcional entre $+1$ y -2; por tanto *log*$\sqrt{-2}$ *= (log 1 + log (-2)): 2 = ½ log (-2).*

Nov. 9, 1712. J. Bernoulli para Leibniz: B. dice que nada ve en la última carta que pruebe la imposibilidad de $log\ (-n)$. Él admite que no hay transición desde una serie (geométrica) de términos positivos a una de términos negativos, y así $log\ (-n)$ no existe en este caso. Pero número negativos determinan su propia serie particular comenzando con -1, en lugar de $+1$. Así las mismas propiedades logarítmicas se dan para $-n$ como para $+n$. El reitera que $log\ n\ =\ log - n$. Muestra que $y\ =\ log\ x$ tiene dos ramas, él usa la hipérbola rectangular $PQGpqg$ y sea SF y EH proporcionales a las áreas de la hipérbola $RSQP$ y $REGP$. Sea PR y GE constantes y FS una variable. Así S toca T, FS es infinito y el área infinita. Ahora manteniendo la misma ley de generalización de la curva RFH, donde el punto *S* procedente de e (¿para qué poder impedir esto?). El área sobre Re es



Parcialmente $+$ y parcialmente – e igual a EP, cuando $TE = Te$. Tenemos entonces $EH = eh$. Similarmente, si $Ts = TS$, entonces $sf = SF$. Así surge la rama hfr que, con HFR, constituye una curva logarítmica, así las dos ramas de la hipérbola constituye una curva. *Si* $TR = +1, Tr = -1, TS = +n, Ts = -n$, entonces $SF = log\, n, sf = log\,(-n)$. Como $SF = sf$, debemos obtener que $log\, n = log\,(-n)$.

Jun., 1712. Leibniz para J. Bernoulli: Asumiendo que $2^e = x$, *si* $x = 1$ *entonces* $e = 0$, *si* $x = 2$ *entonces* $e = 1$. Cuando $x = -1$, e no podría ser asignado.

Feb. 28, 1713. J. Bernoulli para Leibniz: si en $v^e = x$, asumimos $x = 2$ y $e = 1$, también $x = 1$ y $e = 0$, entonces verdaderamente e no puede ser asignado cuando $x = -1$. Como estas afirmaciones son arbitrarias, cambiarlas así que $x = -1$ cuando $e = 0$, entonces e puede ser asignado para un valor de $-x$.

Abril 26, 1713. Leibniz para J. Bernoulli: dices que mi valores para e y x en $2^e = x$ son arbitrarios. Haces $x = -1$ *y* $e = 0$. Lo mío es más natural. Por otro lado desde esta primera consideración que no podemos tener ambos $log\, n\, y\, log\,(-n)$ *pero si* $log\,(-1) = 0$, entonces $log\,(-1)^2 = log\, 1 = 2 \times 0 = 0$, y $log\sqrt{-1} = 0/2 = 2$. *Es* decir, uno y el mismo logaritmo es obtenido para *+1, -1*, e *in. Segundo:* Sobre su afirmación de que 2^0 tiene un número infinito de valores, para 2^0 será igual a -1, y $+1$, $\sqrt{-1}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[8]{-1}$ etc. A menos que 2^0 tenga muchos valores, todos estos deberían ser iguales los unos con los otros. Si $2^0 = +1$, entonces 2^0 tiene un solo valor y tal dificultad no surge. *Tercero*: si $x^e = -2$, $x^{2e} = +4$, pero esta transición desde $-n$ a $+n$ la rechazas. *Cuarto*: Si *log (-n)* es real, entonces *log* $\sqrt{-n}$ es real; por tanto, números imposibles tendrían logaritmos posibles. La afirmación que solo *+n* tiene logaritmos evita este problema. *Quinto*: Desde el principio has admitido que no podemos tener $2^e = 1$ *y* $2^e = -1$ al mismo tiempo. Pero si tomamos $2^0 = -1$, entonces $(2^0)^2 = 2^0 = +1$. Por tanto $2^e = 1$ *y* $2^e = -1$, para $e = 0$. Esto es contrario a tu afirmación.

Todas las tres cosas muestran que tu hipótesis con respecto a que $log\ (-n)$ irreal, inútil e inadmisible. He mostrado antes que las proporciones no pueden formarse, involucrando $-n$. si es verdad que las dos fracciones$+1/-1\ y\ -1/+1$ son equivalentes, observa que las fracciones no son las mismas para las razones. Esto es evidente desde todo esto que los muchos fundamentos de cosas analíticas han sido descuidados hasta ahora.

Junio 7,1713. Bernoulli para Leibniz: ¿Qué entiendes por natural? Sí que es natural que se ajuste con el uso. Entonces $log\ (-n)$ es menos natural que *log (+n)*. La primera de tus cinco objeciones para $log\ (-n)$ es que algunos $+n, -n, i$ podrían tener los mismos logaritmos. Yo admito solo que $log\ (+n)\ =\ log\ (-n)$. La mitad de un logaritmo no es necesariamente el logaritmo de la raíz cuadrada; es más bien el logaritmo del valor proporcional entre +1 y $+n$, o -1 y $-n$. El valor proporcional entre -1 y -1 es $\sqrt{-1\ \times -1}$ = + $\sqrt{+1}\ o\ -\sqrt{+1}$. No hay nada absurdo en esto. *Segunda*: Niego que $2^0 = \sqrt{-1} = \sqrt[4]{-1}$, etc. Como se acaba de explicar, $2^0 = \sqrt{-1\ \times -1}$ y = $\sqrt{-1\ \times -1\ \times -1\ \times -1}$, etc. Todos estos radicales iguales a $\sqrt{+1}$ o = ± 1. No hay discordancia en estos resultados. *Tercera*: dices que si $x^e = -2$, entonces $x^{2e} = +4$. La curva logarítmica muestra que esto debe ser falso. Dos veces $log\ (-n)$ no es $log\ n^2$. La tercera proporcional de *–n* es obtenida desde $-1: -n\ = -n: x$. por tanto si $x^e = -2$, entonces $x^{2e} = -2\ \times$ -2 $\div -1 = -4$. En consecuencia no hay cruce desde $-n$ sobre $+n$. *Cuarto*: Mi definición del valor proporcional de $-n$ no conduce al resultado absurdo que i tiene un logaritmo posible. *Quinta*: si $2^0 = -1$, entonces $2^{2\cdot 0}$ no es $= +1$, pero -1 $\times -1: -1 = -1$. Por tanto el resultado absurdo no permite que 2^0 sea al mismo tiempo $+1\ y\ -1$.

June 28, 1713. Leibniz para J. Bernoulli: No he tenido tiempo para refutar tus objeciones sobre mis creencias que hacen $log\ i$ imposible. El doble de imposible imposibles, *log n* el doble de $log\ \sqrt{n}$. Si asumes los logaritmos en los cuales esto no es así, no me interesa. Yo llamo lo más *natural*, no eso que es más habitual, pero lo que está más cercano a lo natural y a lo más simple.

Julio 29, 1713. J: Bernoulli para Leibniz: No niegas que la afirmación $+1$ es arbitraria, y que -1 es aceptable. De acuerdo con lo último, $log\ (-1)\ =\ 0$. De esto se desprende todo lo que previamente he dicho sobre el $log\ (-n)$.

Es fácil ver que Leibniz y J. Bernoulli no se pudieron llegar a un acuerdo sobre $log\ (-n)$, tampoco acordaron una definición para “valor proporcional” y “tercera proporcional” cuando se trata de números negativos. No es necesario para nosotros entrar en la misma discusión sobre su validez de los argumentos presentados. Los argumentos de Bernoulli involucran infinitas áreas entre la hipérbola y sus asíntotas fue atacado repetidamente durante el siglo XVIII, pero nunca en su punto vulnerable, la afirmación que $\infty - \infty = 0$. Es interesante notar que los logaritmos son parte del tiempo de conexión entre dos progresiones, como en la definición de Napier de un logaritmo, pero la mayoría de las veces no con el concepto de exponencial como lo expresado en la notación exponencial del tiempo presente. Leibniz recurre poco a la geometría; J. Bernouli usa curvas reiteradamente, como si más se pudiera obtener desde una figura que lo representa.

Leibniz insiste que *log (-1)* y *Log* ($\sqrt{-1}\ n$) no existen. *Non potest dari Logarithmus* $\sqrt{-2}$. La no existencia es basada en la inconcebilidad. Veremos más tarde que Euler propone una interpretación diferente a la de Leibniz. El presenta a Leibniz la idea como contendiendo que $log\,(-1)$ es imaginario, no como no existente, Leibniz muere tres años después cerrando esta controversia. Esta correspondencia entre él y John Bernoulli durante los años 1712-1713 no fue publicada hasta 1745. No hasta entonces los logaritmos de números negativos atrajo la atención de los matemáticos en general.

Al mismo tiempo hay otras investigaciones que demandan nuestra atención. En un artículo en las Transacciones Filosóficas (Philosophical Transactions) de Londres, publicado en 1714, Roger Cotes desarrolla una importante formula que en notación moderna es

$$i\varphi = \log\ (\cos\varphi + i\sin\varphi).^2$$

En 1722, después de la muerte de Cotes, este artículo fue publicado en su *Harmonia mensurarum*. Él la introduce como "la medida de una razón" del logaritmo de la razón, multiplicada por una constante o modulo. Como Braunmuhl señala, esta "medida de una razón "fue perdida de vista por largo tiempo, pero fue introducida nuevamente en el siglo IXX. Ya hemos llamado la atención sobre el hecho de que Cotes fue anticipado por Edmud Halley en esta manera de medir la razón.

Sin detenernos a explicar cómo "la medida de la razón" aparece en la derivación de Cotes de su fórmula $i\varphi$, su proceso puede ser mas o menos esbozado en la notación moderna como sigue: El área de la superficie generada por un arco de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, cuando gira alrededor del eje *Y* y tomado entre los límite *y=0, y=y*, puede ser expresado de dos formas, a saber,

$$S = a\pi\left\{y\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^4}y^2} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\log\left(y\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^4}} + \sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^4}y^2}\right)\right\},$$

$$S = a\pi\left\{y\sqrt{1-\frac{b^2-a^2}{b^4}y^2} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\varphi\right\},$$

where $\sin\varphi = y\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^4}} = iy\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^4}}$, $\cos\varphi = \sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^4}y^2}$. Comparing the two expressions for S, we have

$$i\psi = \log\ (i\sin\psi + \cos\psi). \tag{1}$$

Mientras que Cotes fue anticipado por John Bernoulli I en establecer una relación entre el logaritmo de un número imaginario y una función goniométrica, Cotes , en cambio, anticipó a los matemáticos continentales en la derivación de $i\varphi = \log(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Esto fue mucho más tarde, en una carta de Oct,18,1740, que Euler declaró a John Bernoulli I que $y = 2cosx$ y $y = e^{+x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$ eran ambas integrales de la ecuación diferencial ${d^2y}/{dx^2} + y = 0$; que las dos integrales eran iguales la una con la otra, ya que ambas pueden ser explicadas por la misma serie infinita. Euler hace observaciones desde lo cual se entiende que él sabía en ese tiempo la expresión exponencial correspondiente para $sinx$.

Ambas expresiones son dadas por él en la *Miscellanea Berolinensia* de 1743, y otra vez en su *Introductio in analysin*, Lausannae, 1748, vol I,p.104, donde él da también las fórmulas de suma importancia, $e^{+r\sqrt{-1}} = cosv + \sqrt{-1}\,sinv,\ e^{-r\sqrt{-1}} = cosv - \sqrt{-1}\,sinv$. Desde la fórmula de Cotes $i\varphi = \log(cos\varphi + isin\varphi)$, dada en 1714 y 1722, la forma exponencial de Euler es un paso fácil, sin embargo un tercio de siglo transcurrió entre la publicación de la primera y la segunda. Es interesante observar que ni Cotes, ni Euler parecen vacilar en, o el retroceso desde, el uso de $\log(cos\,\psi + i\,sin\,\psi)$, involucraba el logaritmo de números complejos. Además, ni Cotes, ni Euler en su *Introductio*, hacen alguna referencia al uso de esta relación en la discusión en la teoría de los logaritmos de números complejos. Ambos fueron conscientes de la periodicidad de las funciones trigonométricas. Había Cotes aplicado la idea de periodicidad a $i\varphi = \log(cos\,\psi + i\,sin\,\psi)$ él podría haber anticipado a Euler por muchos años en mostrar que el logaritmo de un número tiene número infinito de valores diferentes.

La teoría de los logaritmos de números negativos fue tratada muy temprano por Euler de forma accidental, en su correspondencia con John Bernoulli I. Las cartas entre ellos entre 1727-1731 habían estado en poder de la Academia de ciencias de Stockholm y fueron por primera vez publicadas en su totalidad por G. Enestrom en 1902. Una traducción desde el latín original al alemán fue llevada a cabo por E. Lampe. Se recordará que Euler fue discípulo de John Berboulli I y ha seguido los dos hijos (Daniel y Nicolaus) de John Bernoulli hasta San Peterburgo. Euler era entonces de 20 años; mientras que John Bernoulli de 60 años.

La siguiente es una síntesis de la correspondencia, en relación con los logaritmos:

Nov.5, 1727. Euler a Bernoulli: La ecuación $y = (-1)^x$ es difícil de trazar, donde y es ahora positivo, ahora negativo, ahora imaginario. Esto no representa una línea continua.

Jun.9.1728. Bernoulli a Euler: si $y = (-1)^x$, entonces $ly = xl(-n)$ y ${dy}/{y} = dx.l(-n) = dx.l(+n)$; para $dl(-z) = -\frac{dz}{-z} = +\frac{dz}{-z} = dlz$. Integrando, $ly = xln,$ y $y = n^x$. Por tanto $y = (\pm 1)^x$, se convierte 1^x=1, o $y = 1$.

Dic.10, 1728. Euler a J. Bernoulli: He argumentado ambas para y encontrar $lx = l(-x)$. Si $lxx = z,$ tenemos ½$z = l\sqrt{xx}$. Pero $\sqrt{xx}$. es tanto x como $-x$. Por tanto $\frac{1}{2}z = lx = l(-x)$. Se puede objetar que xx tiene dos logaritmos, pero quien pretende dos, podría pretender un número infinito. Argumento en contra: Desde la igualdad de las diferenciales no podemos inferir la igualdad de las integrales. Además, $l(-x) = lx + l(-1)$; por tanto $l(-x) = lx$ solamente si $l(-1) = 0$. Otra vez, si $lx = l(-x)$, entonces $x = -x$ y $\sqrt{-1} = 1$, pero más bien creo que la conclusión desde la igualdad de los logaritmos a la igualdad de los números no puede ser trazada. Su expresión para el área de un sector circular de radio a, *viz.aa/*$(4\sqrt{-1})\ \times l\big(x + y\sqrt{-1}\,/(x - y\sqrt{-1}\big)$, se convierte en un cuadrante, x siendo entonces 0, $aa/\big(4\sqrt{-1}\big) \cdot l(-1)$. Por tanto, si $l(-1) = 0$, debemos tener $\sqrt{-1} = 0$ y entonces *1=0*. Más célebre Señor, ¿qué piensas de estas contradicciones?

Abril 18, 1729. J. Bernoulli a Euler: Cuando dije que $lx = l - x,$ debío entenderse que se entiende $l - (x)$, no $l(-x)$. Así, $l - (x)^{1/2}$ es real, pero $l(-x^{1/2})$ es imaginario. El área del sector circular es 0, donde *x=0*, sin embargo muchos podrían ser igual al cuadrante. Hagamos que la constante Q es un cuadrante, entonces podemos escribir el área del sector generalmente = $aa/\left(4\sqrt{-1}\right)l\left(x+y\sqrt{-1}\right)/\left(x-y\sqrt{-1}\right)+nQ$, así que, el primer término desaparece cuando el sector se convierte en un cuadrante, *n* puede ser así escogida como para hacer nQ algún múltiplo o submultiplo del cuadrante que necesitamos. Para un semicuadrante tenemos $aa/\left(4\sqrt{-1}\right)l\sqrt{-1}$, que es 0, desde $l\sqrt{-1}=0$. Aquí debemos tomar $n=\frac{1}{2}$.

Mayo 16, 1729. Euler a J. Bernoulli: La diferencia entre $l-(x)$, y $l(-x)$ no es clara para me. La expresión $aa/\left(4\sqrt{-1}\right)l\left(x+y\sqrt{-1}\right)/\left(x-y\sqrt{-1}\right)$, pienso es constante, me parece que es creciente, desde *x=0* muestra un sector que desaparece. Que nQ debería ser sumado, lo que hasta ahora no he visto. Si *n* puede ser ½, puede ser ¼ y cualquier número. Podría ser superfluo mostrar que $aa/\left(4\sqrt{-1}\right)l\left(x+y\sqrt{-1}\right)/\left(x-y\sqrt{-1}\right)$ debe expresar un sector, si nQ solo es suficiente para representar un sector cualquiera. Ninguno de nosotros puede darse el lujo de caer en paralogismos.

En esta correspondencia entre John Bernoulli I y L. Euler, Bernoulli sostiene la opinión de que $logn=\log(-n)$. Esta es la misma formula que el difendió 16 años atrás, en sus cartas a Leibniz. Ahora, como entonces, Bernoulli argumenta desde la igualdad de dos diferenciales, la igualdad de los dos resultados de las integrales generales. En su argumento sobre áreas sectoriales (Abril.18, 1729) él confunde integrales definidas con integrales generales. Su distinción entre $l-(x^{\frac{1}{2}})$ y $l(-x^{\frac{1}{2}})$, no es clara. Quizás él simplemente quiso decir que $l(-x^{\frac{1}{2}})$ significaría $l(-x^{\frac{1}{2}})$, cuando *x* es positiva.

El argumento de Euler, que $e^{\frac{x}{2}}=\pm x$ produce $\log x=\log(-x)$, tiene un punto interesante. Cuando escribimos $a^b=c$ y definimos $b=log_a c$, *a y c se* toman para que ambos tengan un solo valor. Euler hace esta restricción sobre *c*. Él toma $e^{\frac{x}{2}}=\pm x$, así la definición influye en su manera de proceder, *viz.* $\frac{z}{2}$=*log* (±*x*), Cantidades reales de dos definiciones, $\frac{z}{2}$= *log x y* $\frac{z}{2}$=*log (-x).* Ahora no hay objeción, a priori, para dos definiciones distintas. En el análisis vectorial tenemos al menos dos definiciones para la multiplicación, produciendo un ventor producto a $\times b$, y un producto escalar $a\cdot b$. La cuestión a ser considerada es, ¿pueden dos definiciones ser utilizadas simultáneamente? Encajan las dos encajar para producir una teoría logarítmica no contradictoria de los números complejos? La conclusión es dada desde las dos definiciones y las reglas ordinarias de operación, que todas las raíces de *+1* y *-1*, en otras palabras, todos los números complejos de modulo unidad, tiene 0 como su logaritmo. Esto es ciertamente muy simple, también bastante inútil. Previo a la correspondencia de Euler-Bernoulli ninguna contradicción ha sido señalada en esta teoría. Fue Euler quien da un golpe mortal al señalar que $log\sqrt{-1}=0$ estaba en conflicto con la formula $\sqrt{-1}\,\pi=2l\sqrt{-1}$, resultando de la expresión aceptada para el área de una sección circular de J. Bernoulli. Este golpe mortal de Euler no fue considerado fatal en ese tiempo. Las integrales definidas eran todavía comprendidas indefinidamente. La teoría de J. Bernoulli de los logaritmos continúo encontrando defensores. Euler hace otro importante comentario en su carta de Diciembre 10, 1728; el toca por primera vez la verdad que $logn$ tiene un infinito número de valores.

Pero el no insiste en este asunto en ese momento.

LA UNIÓN DE LOS CONCEPTOS DE LOGARITMO Y EXPONENCIAL

La posibilidad de definir logaritmos como exponentes fue reconocida en el siglo XVII por John Wallis, pero no fue hasta 1742 cuando encontramos una explicación sistemática de los logaritmos basada en esta idea. En este época tienen que ser reconocido que la involución tuvo dos caras, diferentes en género, a saber, evolución y logaritmación; en la primera cara asumimos, $a^b = c,\ b$ y c como dados para encontrar a, en la otra cara asumimos que a y c son dados para encontrar b. Tropfke menciona a Willian Gardier como el primero en dar la nueva definición de los logaritmos y basar la teoría de los logaritmos sobre esta. Esto se muestra en la introducción de las *Tablas de Logaritmos* de William Gardier, Londres, 1742. La definición es como sigue: "El logaritmo común de número es el Índice de esa potencia de 10 que es igual al número." Esto es prácticamente seguro que esta definición no es de Gardiner sino de Willian Jones. "La Explicación de las Tablas" dice Gardiner "… Yo he recolectado todo desde los documentos de W. Jones, Esq."Maseres, quien reimprimió esta "Explicación" en 1979 la atribuyó totalmente a Jones. Prof. W.W. Berman me informa que la explicación de los logaritmos de Jones, dada en su *Synopsis palmariorum matheseos*, 1706, fue basada en el tratado de Halley de 1695,pero un documento póstumo de Jones, publicado en *Transacciones Filosóficas* para el año 1771, da la nueva definición. Si Jones publicó esta definición antes de Gardiner es todavía indeterminado. El único a quien influenció mayormente dándole una nueva visión fue a Euler, quien en su *Introducción*, 1748, Chap.VI.p.102, da la definición involucrando exponentes. En este mismo capítulo Euler da un explicación de exponentes negativos y fraccionarios y llama la atención de los valores múltiples de un número que tiene un exponente fraccionario, una explicación rara vez encontrada en los tratados de matemáticas de esa época. La nueva definición de un logaritmo fue en todos los sentidos un avance que ha sido puesto en duda por algunos autores. Cierto es que esto envuelve dificultades internas de una naturaleza seria.

III. LA CREACIÓN DE UNA TEORÍA DE LOS LOGARITMOS DE NÚMEROS COMPLEJOS. POR L.EULER

Es conveniente mirar hacia atrás, por un momento, a lo largo de los 35 años de historia de los logaritmos de los números negativos y complejos. Hasta el momento sólo tres matemáticos han tratado de desentrañar los misterios de este tema, a saber, Leibniz, John Bernoulli I y Euler. Sus conversaciones se llevaron a cabo en su totalidad por carta, estas cartas no se publicaron en ese momento. No hay artículos o memorias sobre esta controversia que haya llegado a la prensa. El tema discutido por ellos no había atraído la atención del público matemático. La publicidad sobre este tema se inició en 1745. En ese año se publicó la correspondencia entre Leibniz y Jean Bernoulli 1. La lectura de esta correspondencia actuó como un estímulo tremendo para Euler. Cuando era un muchacho de 20 años, como habíamos visto, había mantenido correspondencia sobre este tema con su venerado maestro, John Bernoulli I. Esta correspondencia había revelado graves dificultades de la materia, pero no las habían superado. Desde esa época Euler había descubierto las expresiones exponenciales para $sen\, x, cos\, x\, y\, cos\, x + i\, sen\, x$, habiendo adquirido una visión más profunda de las propiedades de los números imaginarios. Fue en 1745 que terminó su manuscrito sobre la Introductio, que se publicó en la prensa tres años después. Dos años más tarde (en 1747) el volvió sobre sus investigaciones de la teoría clásica logarítmica. Este tema lo discutió en su correspondencia con D'Alembert. Algunas cartas de Euler sobre este tema han sido publicadas solo recientemente. Por esa razón ni siquiera el ensayo histórico de Lampe está basado en el estudio de todo el material que está disponible ahora. Para facilitar la referencia entonces presentamos los escritos de Euler sobre este tema, el año en que fueron escritas, y el año de publicación. Las dos primeras publicaciones ya las hemos revisado.

	Fecha de escritura.	Publicación .
La correspondencia entre Euler y Bernoulli Juan I	1727-1729	1902
Introductio in analysin de Euler	1745	1748
Cartas de Euler a D'Alembert .	1747-8	1886-1907
Artículo Euler Sur les logarithmes	1747	1862
Cartas de Euler a D'Alembert, de fecha 27 de diciembre 1748, 03 de enero 1750, 26 de julio 1763, 20 de diciembre 1763}		1768
Carta de Euler a D'Alembert	15 de febrero 1748	1911
Artículo de Euler De la Controverse Entre Mrs. Leibnitz et Bernoulli	1749	1751
Artículo Euler Recherches sur les Imaginarias	1749	1751

La carta de Euler del 15 de abril de 1747, a D'Alembert, escrita en francés, se ve en el contexto que es una respuesta a un argumento presentado por D'Alembert en cartas que se han perdido. La correspondencia entre los dos hombres a veces parece haber sido bastante animada. Damos la sinopsis de cinco cartas escritas por Euler desde Berlín.

15 de abril 1747. Euler a D'Alembert: “Debo oponerme a su argumento de que e pueda tener un valor positivo y un valor negativo. Admito que el valor sea arbitrario, digamos 10 o 2.718. . . ,. Pero tan pronto como a e en $y = e^{x}$ se le asigna un valor definido, el sistema de logaritmos de todos los números se fija, así también la curva $y = ex$. No se puede asignar a e dos valores diferentes al mismo tiempo, sin que la curva resultante sea la composición de dos curvas distintas. Si e = 1 + 1 + 1 / (1 - 2) + 1 / (1 * 2 * 3) +···, entonces es claro que los logaritmos de los números negativos debe ser algo "imposible," para ningún valor de x se puede encontrar el que cumpla con e^{x} o que haga que 1 + x / 1 + xx / 1 * 2 +··· sea negativo. A Usted le parece paradójico que ly = 1 (- y), pero para cualquier valor de a se tiene d(ly) = d (lay), por lo tanto, también para a = - 1. El argumento por el cual Usted demuestra que l (- 1) = 0 le permite probar que l $\sqrt{-1}$ = 0, porque desde que $\sqrt{-1}\,.\sqrt{-1}$ = -1. Usted tiene que $l\,\sqrt{-1} + l\,\sqrt{-1}$ = l (-1) = $2l\sqrt{-1}$ = 1/2 log (+ 1) y $l\sqrt{-1}$ = 1/4 l (+ 1) = 0. Usted admitirá que los logaritmos de los números imaginarios no son

reales; además que $l\sqrt{-1}/\sqrt{-1}$ no puede expresar la cuadratura del círculo. Sea $\sqrt{-1}/\sqrt{-1} = \propto$, entonces $l\sqrt{-1} = \propto\sqrt{-1}$ lo cual es imaginario. Ahora bien, si $l\sqrt{-1}$ es imaginario, ¿por qué no $2l\sqrt{-1} = l$ (- 1) debería serlo también? Del mismo modo se seguiría que el logaritmo de una raíz cúbica de un imaginario sería 0, como lo son también uno l (+ 1), l (- 1), $l\sqrt{-1}$, etc .Esto es insostenible. Usted responderá que incluso l (+1) debe ser imaginario, para l (+1)=2 l(-1)=$4l\sqrt{-1}$= $4, 3l(-1+\sqrt{-3})/2 = \ldots$Esto es exactamente lo que pretendo, para l (+ 1) que tiene un número infinito de valores distintos, de los cuales todos son imaginarios excepto 0. Sea l (+1) = 0, $\propto, \beta, \delta, \in$. Entonces ½ $\propto$, ½ β , ½ δ son los logaritmos de - 1, todos imaginarios; no cada mitad de los valores de l (+1) como un valor de 1 (- 1); para, -1 que es sólo un valor de $\sqrt{+1}$. El otro valor + 1 tiene los logaritmos ½ . 0 ½ β , ½ δ que son lo mismos valores que 0, $\propto, \beta, \delta, \in, \ldots$, pero tenemos que ½ β= $\propto$, ½ $\delta = \beta$,…….. Del mismo modo para los logaritmos de las raíces cúbicas de 1, puedo dar los valores reales. Dejando que π *sea* la circunferencia de un círculo de radio unitario , los valores de log (+ 1) son $+\ \pi\sqrt{-1}$, $+2\pi\sqrt{-1}$, $+3\pi\sqrt{-1}$,….Los de l (- 1) son: $\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, $\frac{3}{2}\pi\sqrt{-1}$, $\frac{5}{2}\pi\sqrt{-1}$. Generalmente: $l\ (1^{p}) = \pi\ (\text{mp} + \text{n})\sqrt{-1}$.

$l\ (-1^{p}) = \pi\ (\frac{1}{2}\text{p} + \text{mp} + \text{n})\sqrt{-1}$., donde m y n son enteros + ó -.

Aquí todas las dificultades desaparecen, las cuales surgen durante el esfuerzo para hacer que los logaritmos de los números negativos sean reales. De acuerdo con la fórmula 2 l (-1) = l (+ 1) = 0 tendríamos que $l\sqrt{-1} = 0$ y $l\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}) = 0$. Usted dice que en $e^{x} = y$ puede ser $+$ y además $-$, cuando $x = \frac{1}{2}$. Pero como e^{x} representa el valor de la serie 1 + x + x^2 /(1.2) + … yo descanso en terreno firme cuando digo que e^{x} representa sólo un valor, el cual es positivo, incluso cuando x es fraccionario."

Los logaritmos de números negativos e imaginarios había sido objeto de discusión, de vez en cuando, por unos pocos matemáticos durante más de 35 años, pero la carta de arriba de Euler a D'Alembert es la primera investigación que realmente penetra en el tema y cuyos resultados son importantes. El teorema fue anunciado estableciendo que log n tiene un número infinito de logaritmos que son todos imaginarios, excepto cuando n es un número positivo, en cuyo caso un logaritmo fuera de este número infinito es real. También es interesante observar que Euler da en esta carta una nueva definición de la e^{x} exponencial. Deja que e^{x} represente el valor de la serie exponencial, $1 + x + x^2/(1\,.\,2) + \cdots$, y de aquí él toma el punto de vista que desde entonces ha sido el fundamento de la teoría de funciones. La respuesta de D'Alembert a la carta de Euler no se conoce. Desde que los principales resultados de Euler fueron establecidos como se indica en la carta anterior sin pruebas, no es de extrañar que D'Alembert no estaba convencido. Una idea de la posición de D'Alembert se desprende de la siguiente carta de Euler:

19 de agosto 1747. Euler a D'Alembert: "…En su artículo sobre integrales, recientemente publicados en el segundo volumen de nuestras memorias, he tachado el párrafo sobre log (-1), como Usted indicó. Su declaración de que l (- x) se puede expandir en una serie cuyo valor es real, es incomprensible para mí. Cuando usted dice que e debe ser considerado, no como un parámetro de la curva logarítmica, pero si la ordenada cuando $x = 1$, de aquí

que por lo tanto, e puede ser +, así como -, entonces tengo derecho a reclamar que la curva logarítmica no sólo tiene dos ramas, para cualquier número. Si $x = l$ (+ y) y $x = l$(- y) se mantienen dos ramas, entonces $x = l$ (my), la ecuación diferencial, que es la misma para todos los valores de m, se obtiene de una rama para cada posible valor de m. En e^x Usted toma $x = k/g$, donde $k : g$ = número impar: número par. Con la ecuación de la derecha podemos tomar k: g = número par: número impar, o = número impar: número impar, y por lo tanto llegar a conclusiones contrarias a la suya. Sus argumentos fallan en establecer la fórmula l $(+x) = (-x)$. En cuanto a $l\sqrt{-1}/\sqrt{-1}$ sostengo que no puede tener valores distintos de $\frac{1}{2}$ (4n + 1) π , donde n es cualquier entero, π es la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es la unidad, por lo que este fórmula no puede nunca dar 0. He enviado a la Academia una memoria, que me parece elimina todas las dificultades en esta materia que antes me asombraban en gran medida.

PS: Usted $admite\ que\ l\ (+1) = +2n\pi\sqrt{-1}$ y que $l\ (-1) = +(2n-1)\pi\sqrt{-1}$, pero usted dice que el 0 se encuentra entre los logaritmos de - 1. Puesto que dos veces el logaritmo de -1 es $l\ (+1)$, tendríamos que l (+ 1) = + $2n\pi\sqrt{-1}$ y además $+(2n-1)\pi\sqrt{-1}$. Usted admite que $l\sqrt{-1}$= $\frac{1}{2}$ $(4n+1)\pi\sqrt{-1}$. Pero afirma que de esta fórmula no se obtienen todos los logaritmos , ya que omiten el logaritmo 0. Si es así, entonces l (+1) ó $l\left(+\sqrt{-1}\right) + l\left(+\sqrt{-1}\right)$ puede ser igual a $\frac{1}{2}$ $(4n+1)\pi\sqrt{-1}$. Usted afirma que 0 puede ser el logaritmo de las raíces superiores imaginarias de la unidad, por lo que $l\ (+1)$ estaría representada por $\sqrt{-1}$, de aquí que cualquier número puede ser a. Por consiguiente, $l\ (+1)$ sería totalmente indeterminado. Esta conclusión derroca a sus argumentos. Mis resultados están en perfecta armonía unos con otros y no producen ninguna indeterminación.

30 de diciembre 1747. Euler a D'Alembert: Me enteré a través del Sr. Maupertius que Usted suspendió la investigación matemática, con el fin de recuperarse de la mala salud. Por lo tanto, no voy a molestarlo con asuntos sobre los logaritmos imaginarios. Apenas tengo nada que añadir a lo que dije antes. Dudo que mi artículo sobre este tema elimine todas las dudas que te han traído.

15 de febrero 1748. Euler a D'Alembert: " La ecuación $y = 2^x$ da una curva continua por encima del eje de x, pero si $x = \frac{1}{2}$, entonces $y = \sqrt{-2}$ + $y = \sqrt{+2}$, admito que hay un punto conjugado por debajo del eje de x. Tomando $x = n/2$, hay una infinidad de dichos puntos por debajo del eje x, que están aislados unos de otros. La ecuación $y = (-2)^x$ofrece una infinidad de puntos aislados y no cualquier curva continua, $y = e^x$ representa una curva continua por encima del eje x, y puntos aislados por debajo". Se ve que Euler se aleja aquí de su definición de e^x como la suma de la serie $1 + x + x^2 / (1 * 2) + \ldots$, adoptada en su carta del 15 de abril de 1747. El no asigna ninguna razón para su cambio de punto de vista, ni explica cómo esta admisión afecta al tema en controversia.

28 de septiembre 1748. Euler a D'Alembert: " El tema de los logaritmos imaginarios ya no es tan claro en mi mente que yo pudiera responder con rigor a sus últimas declaraciones.

Tengo que esperar hasta que pueda examinar de nuevo esta cuestión". El artículo que reporta Euler en su carta del 19 de agosto de 1747, como si hubiera sido enviado por él a la Academia de Berlín, es sin duda el artículo que fue publicado por primera vez en 1862 y titulado "Sur les des logarithmes nombres negatifs et imaginaires". Euler comienza haciendo referencia a la ´grande controverse´ "entre Leibniz y Jean Bernoulli I, que terminó en desacuerdo entre estos grandes hombres que estaban en perfecta armonía en todas las otras partes del análisis. La gloria de la infalibilidad de la ciencia recibe un golpe fuerte, si se presenta cuestiones en las que es imposible conocer la verdad y poner fin a toda controversia". Es mi esperanza por la presente investigación resolver la controversia sobre los logaritmos de los números negativos. Revisando los argumentos de Leibniz y Jean Bernoulli I, Euler señala que la objeción de Leibniz al argumento de Bernoulli : que $l(+x) = l(-x)$ desde $d\,lx = d\,l(-x) = dx/x$, sobre la base de que la regla para encontrar lx es válida sólo cuando x es positivo - sacude los cimientos mismos del análisis, cuyas normas de funcionamiento se considera que son generales y aplicables a las cantidades de todo tipo. El error de B. se encuentra en reclamar $lx = l\,(-x)$, basándose en que $d\,lx = d\,l(-x)$, el mismo argumento descansa en el absurdo que $lnx = lx$. B. reivindica que la curva logarítmica es doble, implica el argumento que acabamos de mencionar, si $lx = l\,(-x)$, entonces de manera similar $lnx = lx$, y la curva tiene un número infinito de ramas. Una ecuación diferencial descansa siempre en la integración de una familia de curvas, B. y otros afirman que la asíntota de la curva logarítmica es el diámetro de la misma, diciendo que $dx = dy/y^{n}$produce una curva que, en general, tiene un diámetro cuando n es impar y tiene por lo tanto otro cuando $n = 1$. Euler explica este punto y cierra con la nueva afirmación de que la cuestión de la duplicidad de la curva logarítmica no está necesariamente relacionada con la cuestión de si $l(-x)$ es real o imaginario. Euler entonces define un logaritmo; si $x = ly$, entonces $y = e^{x}$, e siendo una constante ".si el logaritmo x de un número propuesto = y no es otra cosa que el exponente de la potencia de e igual al número y " (p. 273). En los logaritmos hiperbólicos,si w es infinitesimalmente pequeño, entonces $l\,(1 + w)$ = w y e = 2.718 . .. Si y es negativo, ningún valor real de x satisface $y = ex$. Para estar seguro, cuando $x = \frac{1}{2}$, $y = \sqrt{e}$, pero cuando $x = 2$, no es cierto que $y = +ee$ y que $x = l$ + ee. Por lo tanto, la afirmación de que los logaritmos de los números negativos son reales, no es ciertamente una verdad general. "Pero, por lo que se refiere a la ambigüedad de la fórmula e^{x} ,por ejemplo en el caso en que x es una fracción de un denominador par, no sé si podemos admitirlo dentro de los logaritmos, porque, teniendo en cuenta la naturaleza y el uso de los logaritmos, parece que cada uno logaritmo no puede responder a un solo número(p. 274). Si alguien afirma que $e^{0} = e^{0/2} = \sqrt{e^{0}} = \sqrt{1} = +1$, entonces, por el mismo argumento $x^{1} = x^{2/2}$ =, $+x$ "y de más que a + x será la misma cosa que $a - x$", de ahí el absurdo "todas las cantidades son iguales entre ellas" .Pero si l (- 1) no es 0, debe ser imaginario, y l(- y) $= l(-1) + l$ y debe ser imaginario. Que x puede ser el logaritmo de solo un número y, sólo es confirmado por la serie: $ex = 1 + x + x^{2} / (1 * 2) + \cdots$ Si uno insiste en que, para x = $\frac{1}{2}$, $e^{x} = +\sqrt{e}$, se deduce que los logaritmos de los números imaginarios son reales, pero cuando x = $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ es el logaritmo de la raíz cúbica real de e, así como de los dos imaginarios. Pero B. ha hecho el hermoso descubrimiento que $\pi = 2l\sqrt{-1}/\sqrt{-1}$, se sigue que $l\sqrt{-1}$ debe ser imaginario y que $l\sqrt{-1} = 0$ no puede ser cierto, pero si dejamos que $l\,(-1) = p$, siendo p imaginario, nos encontramos con $l\,(-1)^2 = l\,(+\,1) = 2\text{p} = 0$, lo cual es contrario a la hipótesis y nos lleva a que $l\,\sqrt{-1} = 0$, como antes. "Así que aquí son bastante palpables las contradicciones que encontré en cualquier dimensión que se convierte,. . esto probablemente sería una mancha indeleble en el análisis, si la doctrina de los logaritmos estaba tan llena de contradicciones, era imposible encontrar una reconciliación" (p. 275). Euler intenta el experimento de dejar que el logaritmos de las tres raíces cúbicas de y sean diferentes unas de otras, a saber, llamadas: $x/3, x'/3\ y\ x"/3$. De estos tres logaritmos el primero es real, los otros dos imaginarios; pero el triple de cada uno debe ser x. "Esta explicación me pareció una muy extrema e insostenible paradoja, pero menos absurdo que las contradicciones que se han visto obligados a admitir la teoría de los logaritmos de los números negativos e imaginarios "(p. 276). Pero la mente fértil de Euler no había agotado todas las posibilidades, él sale con la fértil observación: "Bueno, después de haber sopesado todas las dificultades que tengo para difundir, creo que sólo radican en suponer que cada número tiene un solo logaritmo "(p. 276). Admitiendo que un número puede tener muchos, de hecho, un número infinito de logaritmos, todas las dificultades desaparecen. Para demostrar que este número es realmente infinito, Euler toma el círculo como más adecuado para el estudio de los logaritmos que la curva logarítmica, el desarrolla con la ayuda del cálculo integral la ecuación $\sqrt{-1}\varphi = l(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi),$ donde escribe para φ el valor más general $\varphi \pm 2n\pi$, siendo n un número entero. De esta fórmula se obtiene el logaritmo de 1, - 1, - a, $\sqrt{-1}$, y señala que Leibniz tenía razón al afirmar que los logaritmos de los números negativos son imaginarios. Pone a prueba sus resultados en productos, cocientes y potencias de números positivos, negativos e imaginarios, y comenta: "siempre encontramos un maravilloso acuerdo con la verdad "(p. 280). Usando el teorema de De Moivre obtiene finalmente:

$$l1^{\mu/\nu} = \frac{1}{\nu}(\pm\, 2\mu m \pm 2\nu n)\pi\sqrt{-1}$$

and

$$l(-\,1)^{\mu/\nu} = \frac{1}{\nu}(\mu \pm 2\mu m \pm 2\nu n)\pi\sqrt{-1},$$

Donde m y n son enteros. En lo que sigue de la historia de los logaritmos después de 1747, el lector no debe olvidar que el artículo de Euler no fue publicado sino hasta 1862, de haber sido publicado en el momento en que fue escrito, sin duda hubiese contribuido a una rápida resolución de la gran controversia. Como veremos, Euler volvió a escribir este artículo y preparo uno más largo y exhaustivo, aunque en algunos aspectos menos convincente al que había impreso en las memorias de Berlín para el año 1749. El artículo de 1747 no ha recibido la atención que merecía. Cantor no parece haberse dado cuenta de su existencia. " Lampe es de la opinión de que el artículo de 1747 es el publicado en 1749. Felix Müller establece que la publicación de 1862 es una continuación del artículo de 1749, una declaración que de un vistazo se ve que no es cierta para cualquiera que haya leído los dos artículos. La pregunta interesante surge:¿ por qué el primer artículo no fue publicado poco después de que fue enviado a la Academia de Berlín?, en lugar de ser enviado lejos para su publicación póstuma? Sólo podemos adivinar los motivos. El objetivo de Euler fue, como él dice, poner orden y armonía en un tema que había estado lleno de contradicciones. Nuestra conjetura es que Euler estaba insatisfecho con su artículo. Es posible que el uso del cálculo integral en el establecimiento de que $i\varphi = \log\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ parecía inapropiado para lo que parecía ser un tema elemental. En el mismo artículo el expresa una duda en cuanto a cómo la duplicidad de la curva logarítmica afectaba la teoría logarítmica. El artículo no explica completamente cómo $2\,l(-\mathrm{a})$ es igual a $l\mathrm{a}^2$, y $2l\,(+\mathrm{a})$) es igual a la^2, y sin embargo, $2\,l(-\mathrm{a})$ no es igual a $2l\,(+\mathrm{a})$. En el documento de 1749 este asunto se explica en su totalidad. Si examinamos las cartas de Euler a D'Alembert, nos encontramos con que el 19 de agosto de 1747, Euler escribió que había eliminado de un artículo de D'Alembert enviado para su publicación en las memorias de Berlín un párrafo sobre los logaritmos de los números negativos. Esto se hizo a solicitud de D'Alembert. Sin embargo, no sería más natural que Euler retuviera la impresión de su propio escrito, si le parecía incompleto. El 30 de diciembre de 1747, Euler expresa a D'Alembert su temor de que su propio escrito no eliminaría todas las dudas de D'Alembert. El 28 de septiembre de 1748, Euler hace la asombrosa afirmación de que no es capaz de responder con rigor a algunas observaciones recientes de D'Alembert y que debía esperar hasta que pudiera volver a examinar el tema. Desafortunadamente el segundo trabajo de Euler no contiene todas las cosas buenas que se encuentran en el primer documento. En la primera, Euler lleva al lector completamente en su confianza y habla sinceramente con él. Él deja que el lector vea cómo él lucha con la materia, la forma en que lleva a cabo sus experimentos. Cuando el demuestra que $log\,(-1)$ no puede ser un valor real, ni siquiera un valor imaginario, parecía como si todas las posibilidades estaban agotados. Sin embargo, persiste y trata el experimento de asumir que dos de las raíces cúbicas de un número positivo tienen cada uno un logaritmo imaginario, mientras que la raíz tercera tiene un logaritmo real. Esto conduce a resultados que él considera un poco menos absurdo que algunos de los resultados anteriores, pero sin embargo absurdo. Finalmente Euler se dio cuenta de que posiblemente el error radica en la suposición de que un número sólo tenía un logaritmo. Intenta el supuesto de que había un número infinito de ellos, y trabajaba en esto ¿Qué tan fácil todo esto es para un lector moderno, pero lo difícil que era para Euler. Sus labores en relación con esta gran investigación nos recuerdan la lucha de Kepler con la órbita de Marte. Hay una diferencia, sin duda. Kepler tuvo que construir una teoría que se ajusta a los hechos de la naturaleza como reveladas por el telescopio de Tycho Brahe; Euler tuvo que construir una teoría que se ajustara a las demandas de consistencia en la lógica. Aparte de esto el procedimiento fue el mismo. Kepler hizo varias conjeturas sucesivas en cuanto a lo que la órbita de Marte podría ser, sólo para descubrir que él adivinó mal. Finalmente se le ocurrió probar una elipse, por fin se encontró con que había adivinado correctamente. El lector de las obras de Euler encontrará que en otros temas de matemáticas y, en particular, en la teoría de números, Euler a menudo seguía de cerca métodos similares a los de los estudiantes de la ciencia natural. Y, sin embargo, Sir William Hamilton y Thomas Huxley nos quiere hacer creer que la matemática es una ciencia que no sabe nada de la observación y el experimento!. El escrito de Euler de 1749 lleva el título:" De la controverse entre Srs. Leibnitz y Bernoulli et sur les des logarithmes nombres Imaginaries et negatifs ". Comienza con una descripción histórico- crítica de la controversia. La parte estrictamente constructiva del artículo consta de un teorema y cuatro problemas. El teorema es que hay una infinidad de logaritmos para cada número. La demostración de este teorema se basa en el artículo de 1747 sobre la relación $i\varphi = \log\left(\cos\,\varphi + i\,\sin\,\varphi\right)$. Aquí en el artículo de 1749 se basa en la suposición de que $l(1+\omega)=\omega$, siendo ω infinitamente pequeño. Presumiblemente, esta relación se basa en la serie $\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 -$ …La prueba de Euler de 1749 juega un papel tan importante en la teoría logarítmica durante el siguiente medio siglo, que debería ser reproducida aquí en su totalidad. Como se verá más adelante, el razonamiento de Euler falló en ser convincente. La prueba es la siguiente: "Me limito aquí a los logaritmos hiperbólicos, ya que sabemos que los logaritmos de todas las demás especies están en una relación constante, por lo que cuando el logaritmo hiperbólico del número x = y se llama el logaritmo tabular de éste mismo número será = $0{,}4342944819$ y. Pero la base de los logaritmos hiperbólicos es que si w es un número infinitamente pequeño, el logaritmo del número $1+w$ será = w de aquí que $l(1+w)=w$. De ello se deduce que $l(1+w)^2=2w$; $l(1+w)^3$ = 3w, y en general $l(1+w)^n=nw$. Pero puesto que w es un número infinitamente pequeño, es evidente que el número $(1+w)^n$ no será igual a algún número que toma x, a menos que el exponente n es un número infinito. Es por lo tanto n un número infinitamente grande, y de ahí que se plantee que $x=(1+w)^n$, y el logaritmo de x, que fue nombrado $=y$, será $y=nw$. Por tanto, para expresar y por x, la fórmula primera queda $1+w=x1^{/n}$ y $w=x1^{/n}$ - 1, siendo que este valor actúa como un sustituto para w en la otra fórmula dará $y=x1^{/n}-n=lx$. De aquí es evidente que el valor de la fórmula $x^{1/n}-n$ aparecerá del logaritmo de x, el número n se toma grande, y si se pone un número infinito para n, esta fórmula dará el verdadero valor del logaritmo de x. Pero como es cierto que $x^{1/2}$ tiene dos valores diferentes, $x^{1/3}$ tres, $x^{1/4}$ cuatro, y así sucesivamente, también es cierto que $x^{1/n}$ debe tener un número infinito de diferentes valores, dado que n es un número infinito. Por lo tanto este infinito de diferentes valores de $x^{1/n}$ también producirá un número infinito de valores diferentes para lx, de modo que el número x deberá tener una infinidad de logaritmos". Estableciendo en $y=x1^{/n}-n,=lx, x=1$ se obtiene $(1+y/n)^n-1=0$. Los factores de cualquier binomio $p^n-qn=0$ puede ser obtenido a partir de

$$p = q(\cos 2\lambda\pi/n \pm \sqrt{-1}\,\sin\,2\lambda\pi/n),\ \text{where}\ \lambda = \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots.$$

De aquí que:

$$1 + y/n = \cos\,2\lambda\pi/n \pm \sqrt{-1}\,\sin 2\lambda\pi/n,\ \text{and}\ y = \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1},\ \text{when}\ n = \infty.$$

Euler procede a encontrar la fórmula para : $\log\ (\pm a),\ \log\ (a + b\sqrt{-1})^{\mu/\nu}$ donde μ y ν son enteros reales. En ninguna parte de este artículo se abordarán los exponentes complejos. Euler trata con cuidado notable y claridad las relaciones entre l(a), $l(-a)$, $2la$, $2l(-a)$, and la^2. Él deja que p sea todos los números pares, q todos los números impares. De aquí que:

$$l(+a) = A \pm p\pi\sqrt{-1},\quad l(-a) = A \pm q\pi\sqrt{-1}$$; por lo tanto :

$$l(+a)^2 = 2l(+a) = 2A \pm 2p\pi\sqrt{-1},\quad l(-a)^2 = 2l(+a) = 2A \pm 2q\pi\sqrt{-1}.$$

Pero tenemos la formula general $la^2 = 2A \pm p\pi\sqrt{-1};$, de aquí la fórmula:

$2\,l(+\,\mathrm{a}) = la^2$, y $2\,l(-\,\mathrm{a}) = la^2$,"teniendo la señal de = para marcar, que los valores de $2\,l(-\,\mathrm{a})$ o $2\,l(+\,\mathrm{a})$ se encuentran entre los valores de $l\mathrm{a}^2$ ".El agrega :"no podemos decir que la verdad sea: $2\,l(-\,\mathrm{a}) = 2\,l(+\,\mathrm{a})$," un comentario superficial sobre esto sería que las cosas iguales a la misma cosa no son iguales entre sí. La razón de porqué $2\,l(-\,\mathrm{a})$ y $2\,l(+\,\mathrm{a})$, no son iguales es por supuesto que $2q$ nunca es el mismo número que 2p, aunque ambas pertenecen a la clase más general p. Euler señala otra dificultad. Si tomamos $l(-a)^2 = la^2$, en el sentido en que: $2A \pm 2q\pi\sqrt{-1} = 2A \pm p\pi\sqrt{-1}$, entonces $2\,l(-\,\mathrm{a}) = 2\,l(+\,\mathrm{a})$ a pesar de que, como hemos visto arriba, la no es $l(-\,a)$. Un comentario superficial de esto es que el axioma: igual dividido por igual dará igual, se viene abajo. Euler trata aquí con ecuaciones que en el siglo XIX llegaron a ser llamados ecuaciones incompletas, en el que cada valor en un lado de una ecuación es igual a algún valor en el otro lado, pero no viceversa. Euler procede a mostrar en qué condiciones $2\,l(-\,\mathrm{a}) = 2\,l(+\,\mathrm{a})$ se convierte en una ecuación completa. Sean p y p números pares, iguales o no, sean q y q' números impares, iguales o no. Entonces tomamos: $2l(+\,a) = 2A \pm (p + p')\pi\sqrt{-1},\ 2l(-\,a) = 2A \pm (q + q')\pi\sqrt{-1}$ además, seleccionamos los números de modo que $p + p' = q + q'$. Entonces una ecuación completa $2\,l(-\,\mathrm{a}) = 2\,l(+\,\mathrm{a})$ se obtiene. Por tanto: "en este sentido, se puede argumentar que $2\,l(-\,\mathrm{a}) = 2\,l(+\,\mathrm{a})$ sin que $l(-\,\mathrm{a}) = l(+\,\mathrm{a})$. El concepto de ecuaciones completas e incompletas aquí creados por Euler no habían sido antes atribuidos a él. Euler no introdujo para la ecuación completa un nombre especial, ni una notación especial. En cuanto a su ecuación completa $2\,l(-\,\mathrm{a}) = 2\,l(+\,\mathrm{a})$, se ve fácilmente que implica la condición $p + p' = q + q'$, la cual no es práctica en un álgebra de logaritmos generales. Euler entra en discusiones similares para: $l(-\,a)^2,\ la^3,\ la^4$.

El Cuarto problema de Euler es, dado un logaritmo, encontrar el anti-logaritmo de x, sea x real o complejo. Si el logaritmo dado es $g\sqrt{-1}$, y g es un múltiplo de π, entonces x es 1 o $-\,1$. Si g no es un múltiplo, entonces "…para encontrar uno sólo se tiene que tomar un arco = g, siendo el radio $= 1$ y que tenga su seno y coseno, el número obtenido es $x = \cos g + \sqrt{-1}$ sin g. Si el logaritmo es $f + g\sqrt{-1}$, entonces x es el producto de dos números, uno obteniendo el logaritmo de f, el otro el logaritmo de $g\sqrt{-1}$." (Cajori, 1913, pp. 83-84).

Llegamos ahora al tercer trabajo de Euler, "Investigaciones sobre las raíces Imaginarias de las ecuaciones". Nunca hemos visto este artículo mencionado en artículos históricos sobre los logaritmos. Su objetivo es dar dos pruebas del teorema de que toda ecuación tiene una raíz. Fue discutido por C.F. Gauss en su memorable disertación inaugural de 1799. En la segunda prueba Euler demuestra que las expresiones que implican operaciones aritméticas, incluso operaciones complicadas y extracción de raíces, siempre pueden ser llevadas a la forma $m + n\sqrt{-1}$. Esta parte contiene nuevos desarrollos sobre los logaritmos, pero Gauss, en su crítica de Euler, no tiene ningún motivo para aceptar la teoría logarítmica. Cantor, en su gran historia, declaradamente sigue a Gauss, por lo tanto, no hace referencia a los logaritmos. Lampe parece haber pasado por alto y de manera completa este trabajo de Euler. Tampoco hemos visto ninguna referencia a el, en el medio siglo posterior de discusión de la teoría logarítmica. Euler generaliza sus resultados anteriores, considerando la potencia general, en la que la base y el exponente son ambos complejos. El permite que:

$(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1}$, donde x y y son incógnitas que se encuentran. Se toma el logaritmo de ambos lados, entonces diferencia a los miembros de la ecuación resultante, considerando a, b, x e y como variables. Dejando que: $\sqrt{aa + bb} = c$,

$A \tan b/a = \phi, \sin \phi = b/c, \cos \phi = a/c$, consigue, igualar las raíces reales y las imaginarias: $x = c^m e^{-n\phi} \cos(m\phi + nlc)$, $y = c^m e^{-n\phi} \sin(m\phi + nlc)$.

Escribiendo en lugar de ϕ, el valor más general $\phi + 2\lambda\pi$, Él tiene:" todos los posibles valores, las cuales son potencias generales que pueden tomar: dando cuenta sucesivamente de todos los valores de $0, \pm 1, \pm 2,$ etc, simplemente puede tomar para c^m un único valor real y positivo, el cual y adjunta. Vemos aquí que Euler no duda en tomar el logaritmo de la potencia general que involucra números complejos y que encuentra con esta potencia general a ser infinitamente valorada - un resultado notable en ese momento. Pasando a la consideración de los casos especiales en virtud de la fórmula general obtenida, el llega al resultado: $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-2\lambda\pi-\pi/2} = 0{,}2078795763507$ para $\lambda = 0$, "lo que es aún más notable, es real, e incluso contiene un número infinito de valores de verdad diferentes".

Luego, independientemente de cualquiera de sus resultados anteriores, dedica media página a la derivación de los logaritmos de un número complejo. Asume:

$l(a + b\sqrt{-1}) = x + y\sqrt{-1}$, Siendo x e y desconocidas, entonces diferencia, e iguala las reales y las imaginarias. Así x e y son encontradas expresado en términos de arco seno y el coseno del arco. Aquí la gran pregunta, la cual fue agitada durante un siglo, fue tratada satisfactoriamente dentro del ámbito de menos de un par de docenas de líneas. ¿Comunicó Euler sus resultados sobre los logaritmos a su viejo y venerado maestro, John Bernoulli I? Los historiadores no han dado ninguna información sobre esta cuestión. Sin embargo, hay pruebas de que Euler lo hizo. Pessuti, que tomó parte en la controversia en Italia, afirma que conoció a Euler en San Petersburgo y que Euler hizo a él la afirmación de que "después de haberse comunicado sus resultados a John Bernoulli poco antes de su muerte, el buen anciano respondió que murió contento, porque vio reconciliado lo que parecía ser paradojas irreconciliables, a saber, las contradicciones con que habían dado lugar a la gran disputa sobre los logaritmos de los números negativos y largamente continuadas, entre Leibniz y él mismo". Calandrelli replicó a Pessuti que esta afirmación no puede ser cierta, ya que Bernoulli murió en 1748, y el artículo de Euler fue enviado a la Academia de Berlín en 1749. Pero ahora sabemos que Euler tuvo su primer trabajo terminado en 1747. (Continuará).

IV. DESDE EULER HASTA WESSEL Y ARGAND (DE 1749 - ALREDEDOR DE 1800). MEDIO SIGLO DE ESTÉRIL DISCUSIÓN SOBRE LOS LOGARITMOS.

En un ensayo:" Sobre los logaritmos de cantidades negativas" D'Alembert se refiere a su correspondencia de 1747 y 1748 con Euler sobre este tema y afirma que él había leído el escrito de Euler de 1749, pero sentía que aún la cuestión no se había resuelto. D'Alembert procede a presentar argumentos de carácter metafísico, analítico y geométrico que envolvían el tema en neblina densa y ayudó a prolongar la polémica hasta el final del siglo. Definiendo los logaritmos con la ayuda de dos progresiones, como lo hizo Napier, D'Alembert afirma que los logaritmos de números negativos no son imaginarios, sino reales, o más bien, que ellos podrían ser representados como reales o imaginarios, ya que todo depende de la elección del sistema de logaritmos. Con su argumento metafísico contra la conclusión de Euler da como improbable que la curva logarítmica $y = e^x$ pase de $x = \infty$ a valores imaginarios. Como una razón geométrica, afirma que todas las curvas para las cuales $a^n dy/y = dx$, siendo n impar, tiene dos ramas que son simétricas con respecto al eje x y se obtienen dos valores y y $-y$ para uno y el mismo valor de x. Proclama que su prueba sea general, por lo tanto, válida para $n = 1$.

Esta conclusión, dice Karsten, descansa sobre un error en el signo, tan simple que él duda si D'Alembert estaba tomando realmente en serio su argumento. Este desacuerdo entre D'Alembert y Karsten fue debido a la falta de una clara y consistente definición de las áreas negativas, y al uso de áreas infinitas que implican la indeterminación de ∞ a $-\infty$. Sin duda, D'Alembert y otros tenían derecho a adoptar dos ramas de la curva logarítmica, si lo deseaban, todo el asunto se resume en una de las hipótesis. Si estamos de acuerdo en que $y = e^x$ debería interpretarse, de modo que para cada valor fraccionario de x con un denominador par, deberán tomarse ambas raíces reales, entonces hay dos ramas, por supuesto; si estamos de acuerdo en restringirnos solamente a la raíz positiva entonces hay naturalmente sólo una rama. Pero lo que la mayoría de los matemáticos de la época no entendió, fue la observación de Euler que la cuestión de una rama o de dos ramas, de hecho nada tenía que ver con la cuestión de la naturaleza de los logaritmos de los números negativos. La primera es una cuestión sobre la evolución; la segunda es un tema sobre la logaritmación; la primera tiene referencia a una de las dos inversiones de la involución, la última a la otra inversión. En su artículo de 1749 Euler se había explícitamente limitado al sistema con la base positiva $e = 2{,}718$ ... y llegó a la conclusión de que los logaritmos de los números negativos son complejos. D'Alembert selecciona una base negativa mediante la adopción de una serie geométrica $1, -2, 4, -8, \cdots$ y la serie aritmética $0, 1, 2, 3, \cdots$ Así obtiene ciertos números negativos que tienen logaritmos reales. Cuando Euler dice que $l(-\mathrm{a}) = l(+\mathrm{a})$, se obtiene el cero para los logaritmos de los números complejos de módulo unitario, D'Alembert en respuesta de nuevo cambia su sistema de logaritmos a uno en el que la serie aritmética es $0, 0, 0, \cdots$ y recuerda al lector que cualquier serie geométrica puede estar asociada con esta. Para uno y el mismo sistema de logaritmos D'Alembert selecciona las dos series:

$$\begin{array}{l} \cdots \quad 2n \quad n \quad 0 - n - 2n \ \cdots \ \infty \ \cdots - 2n - n \quad 0 \quad n \quad 2n \cdots \\ \cdots - b^2 - b - 1 \quad 1/b \quad 1/b^2 \cdots \ 0 \ \cdots \ 1/b^2 \quad 1/b \quad 1 \quad b \quad b^2 \ \cdots \end{array}$$

en el que la base es arbitrariamente alterada cambiando -1 a $1/b$, esto es hecho para mostrar que $lb^m = l(-b^m)$. ¿Qué otro matemático de renombre nunca cambió su base tan a menudo en defensa de una teoría matemática!?.

Aunque no se publicó hasta 1761, este documento de D'Alembert fue escrito unos años antes, por supuesto, antes de la publicación en 1759 de un documento: "Reflexions sur les quantitees imaginaires" por Daviet de Foncenex. Este trabajo es el más interesante porque su autor, un alumno de Lagrange, comenta que Lagrange le había comunicado a él sus puntos de vista sobre los logaritmos de los números negativos. El mismo Lagrange nunca publicó nada sobre este tema. De Foncenex da una demostración elemental para $\log(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \varphi\sqrt{-1}$, entonces escribe $\cos\varphi + \sqrt{-1}$, $\sin\ \varphi = a + b\sqrt{-1}$, y los toma para : $\varphi,\ \varphi + 2\lambda\pi$.

Entonces: $(\varphi + 2\lambda\pi)\sqrt{-1} = \log\ (a + b\sqrt{-1})$. Este resultado cotesiano se obtiene de Foncenex con la ayuda de la hipérbola, la curva muy por mediante la cual J. Bernoulli I, derivó resultados contradictorios a esto. Dice que Bernoulli no prestó la debida atención a las cuestiones de la continuidad. En $dz/z = -du/u$, el elemento de la superficie dz/z se convierte en finito mientras que u está pasando de + ∞ a - ∞. Afirma que, puesto que el elemento de superficie cambia su signo sin pasar por el cero, no hay una transición continua de positivo a negativo de superficies de la hipérbola; desde que $z = a^u$ se obtiene que $du = dz/z$, no hay paso continuo desde la rama de la curva logarítmica $+$ a la $-$; las ramas son reales, pero aisladas y algebraicamente independientes unos de otras, aunque trascendentalmente conectadas. Al parecer en contradicción con sus propias conclusiones analíticas anteriores, de Foncenex ahora concede que los logaritmos de los números negativos se pueden considerar reales, como los de los números positivos.

La respuesta a De Foncenex fue preparado por D'Alembert, bajo el título: "Suplement au mémoire au précédent". Esta respuesta apareció al mismo tiempo y en el mismo volumen que su primer artículo. D'Alembert debate cuestiones de geometría, corrige algunos errores de De Foncenex y se aferra a algunos puntos de vista erróneos sobre su trabajo.

De Foncenex preparó una respuesta a los dos artículos de D'Alembert, en los que declara que la parte aritmética de esta controversia debe distinguirse de la geométrica. Si en $y = e^x$, e es un número fijo, no puede haber logaritmos reales de los números negativos. En el estudio de la curva logarítmica, debemos investigar la existencia de dos ramas y su relación entre sí sin necesidad de utilizar procesos de integración. Él encuentra la ordenada β de la evoluta de $y = e^x$ para que sea $(2y^2 + 1)/y$. No satisfecho con esto, plantea que $1 + y^2 = u$ y encuentra que: $\beta^2 = (4u - 4u^2 - 1) \div (1 - u)$. Por lo tanto, dice, hay dos valores para β o hay dos ramas de la evoluta, ambas simétricas con respecto al eje x. Desde que la evoluta tenga dos ramas, la propia curva debe tener dos ramas. Ahora D'Alembert admite la afirmación de que las dos ramas están algebraicamente conectadas. El asume la tarea imposible de armonizar los resultados escribiendo: $\varphi\sqrt{-1} = \log\ (\pm\ \cos\ \varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})$, con el sentido de que los signos se escojan apropiadamente acorde a cada caso especial. Se ve que De Foncenex comenzó en estrecha vinculación con los puntos de vista de Euler, pero se separó de ellos considerablemente a través de su estudio de las cuestiones de la continuidad de las curvas y su falsa interpretación de las raíces de una ecuación cuadrática. D'Alembert escribió el artículo "logarithme" para la Encyclopédie de Diderot razonado ou Dictionnaire ', 9, Paris, 1765. Este artículo fue incorporado más adelante en la gran Encyclopédie Méthodique de 1785, la parte matemática de la cual fue traducida al italiano en 1800. En cuanto al tema de los logaritmos de los números negativos el artículo expresó la visión de J. Bernoulli I. vez de la de Euler. El único francés quien antes de los últimos años del siglo XVIII es conocido por nosotros como participante en esta discusión fue Louis Charles Trincano, que contribuyo a: "Un Mémoire sur les des logarithmes quantit négatives" como un apéndice al trabajo de su padre:"Traité complet' d'arithmétique", París y Versalles,1781. El joven dice con sinceridad suficiente que si uno asume la progresión geométrica $-2, -4, -8 \cdots$ ó $2, -4, 8, \cdots$ ó $-2, 4, -8 \cdots$, entonces algunos o todos los números negativos tienen logaritmos reales. De acuerdo con la primera progresión, los números positivos no deberían tener logaritmos reales. En $2, 4, 8, \cdots$ el logaritmo de un número negativo es "*chimerique*".

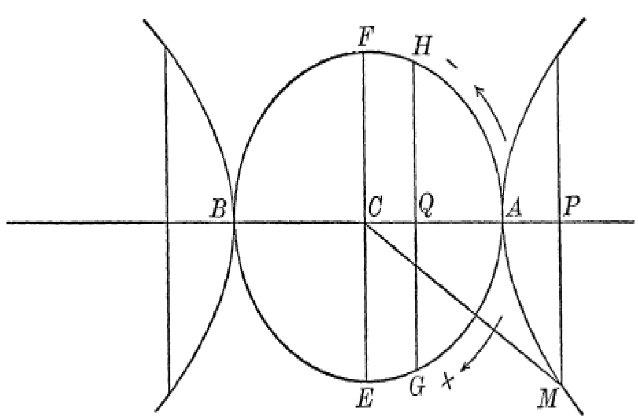
A pesar de la influencia de D'Alembert, la teoría de Euler adquirió mucha fuerza en Francia al final del siglo. En 1797-9 apareció en París el gran tratado de Lacroix sobre el cálculo, el cual presenta sin reservas los logaritmos desde el punto de vista Euleriano.

Es digno de notar que no hemos encontrado una sola investigación, publicada en Inglaterra en este siglo, que toque el tema en discusión. ¿Puede ser debido a la alineación entre los matemáticos ingleses y continentales que resultó de la controversia Newton-Leibniz sobre la invención del cálculo?

En Alemania aparecieron entre 1750 y 1770 tres escritores que aceptaron el punto de vista euleriano y fueron inusualmente claros en sus exposiciones. Nos referimos a Charles Walmesley, un prelado católico romano Inglés que fue elegido miembro de la Academia de Berlín y contribuyó con un documento en sus memorias, J.A. Segner, profesor en Halle, y W.J.G. Karsten, profesor en Butzow, después en Halle. Walmesley escribió un artículo de cuatro páginas:"*Methode de trouver les logarithmes de chaque nombre positif, negatif, ou meme imposible*", el cual contiene una breve derivación, mediante el cálculo integral, de la fórmula: $ac\sqrt{-1} = \pm \log\,(y \pm u\sqrt{-1}),$ donde ac es un arco del círculo unitario ,y y u el coseno y el seno del arco. A partir de esta fórmula, y de la consideración de la periodicidad de las funciones trigonométricas, Walmesley deduce los valores de Euler para log 1, log - 1, $\log \pm \sqrt{-1}$, log , $(a + b\sqrt{-1})$. En este artículo, como en el artículo de Euler de 1749, y y $u\sqrt{-1}$, son tácitamente tomadas a lo largo de líneas perpendiculares una de la otra. Para encontrar los logaritmos de una $a + b\sqrt{-1}$, Walmesley lo cambia a la forma: $(a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}(y + u\sqrt{-1})$; ahora el dice:" está claro que uno debe tomar el arco del círculo cuyo seno es u, y el coseno es y", entonces si el arco es φ y : $\log\,(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} = C,$ Tenemos que para $log(a + b\sqrt{-1})$ obtenemos los valores: $C + \varphi\sqrt{-1},\ C + (\varphi \pm 2\pi)\sqrt{-1}, \cdots$.Tenemos la sospecha de que el diagrama atribuido a Wessel y Argand estaba en la mente de los matemáticos mucho antes de que se registrara en el papel. Walmesley concluye con algunas observaciones generales que describen una sensación desagradable hacia lo negativo y lo imaginario. Él declara que es impropio hablar de la razón entre una cantidad positiva y una negativa, ya que la razón implica sólo una magnitud, no implica cualidad. Mezclar las dos ideas es como si consideráramos densidad, peso, etc, en comparación a los volúmenes de dos sólidos.

Segner pone inusual énfasis para la época en el tratamiento de los imaginarios y es el primero en incorporar los logaritmos de números complejos de Euler en un texto escolar regular. En:"Cursus mathematici" de Segner de, Pars IV,1763, hay una discusión sobre las raíces de la unidad, tratados por la fórmula de De Moivre, seguido de un tratamiento completo de los logaritmos de los números complejos. La posición de Euler se toma aquí sin reservas. El tema se enfatiza en Pars V (1768) en una sección sobre:" De usu imaginariorum". Tratamiento Segner es totalmente analítico y libre de cualquier relación confusa con las preguntas desconcertantes en relación con la curva logarítmica y la hipérbola.

Karsten publicó un extenso artículo de 108 páginas en el cual los errores de D'Alembert son tratados con gran claridad. Pero Karsten está de acuerdo con D'Alembert en un punto, a saber, que la prueba de Euler (citada por nosotros en su totalidad en la página 81.) del teorema fundamental, que $log\ x$ tiene una infinidad de valores distintos, es cuestionable en este sentido: Transmite la idea de que todos los logaritmos pertenecen a los números positivos, desde que $(1+w)^n$ donde w es infinitesimal y n es infinito, parece ser siempre positivo; la controversia misma se refiere a los números negativos. Como un hecho ya dado, Euler no hace ninguna restricción de este tipo, sino que permite que w sea imaginario. Su único error consistió en no dar una explicación suficientemente exhaustiva para las necesidades de la época. Karsten está probablemente en lo cierto al afirmar que habría sido mejor, si Euler hubiese utilizado en la prueba de una definición más elemental de un logaritmo. Contra D'Alembert, Karsten argumenta convincentemente, que D'Alembert simplemente muestra la posibilidad de sistemas en los que los números negativos tienen logaritmos reales, la pregunta en cuestión, sigue siendo, sin embargo, ¿cuáles son los logaritmos de los números negativos en el sistema natural, con la base $e = 2{,}718\cdots$? Lo más interesante en el artículo de Karsten es una representación geométrica de los infinitos-múltiplos logaritmos de un número. Nunca hemos visto una referencia a esta construcción ingeniosa, ya sea por los contemporáneos de Karsten o por los historiadores. Pareciera como si las transacciones de las academias habían sido en algunos casos, los lugares más seguros para la ocultación de artículos científicos del público científico.



Al pasar por la construcción de Karsten hay que recordar que él la escribió 29 años antes que la de Wessel. En la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ y el círculo $x^2 + z^2 = 1$, donde Karsten toma y = z$\sqrt{-1}$, el "círculo es una parte imaginaria de la hiperbola" y viceversa. Un arco AG del círculo puede ser considerado como un arco imaginario de la hipérbola. Cada uno de los cuatro arcos que se unen a A o B es una continuación de cada uno de los otros, ya que todos son expresados por una ecuación común. Entre cada dos puntos M y G existen innumerables diferentes arcos: MAG, MAGBFAG, y,en general, MAG $+2\lambda\pi$, y también MAHBG + 2 $\lambda\pi$ donde $\lambda = 0, 1, 2,$ Para cualquier abscisa x habrá allí por lo tanto no sólo innumerables arcos, sino también innumerables sectores correspondientes. Tomemos un sector de la abscisa:

$$x \text{ be } \tfrac{1}{2} \log (x + y) = \sqrt{-1} \cdot \tfrac{1}{2} \text{arc cos } x = \sqrt{-1} \text{ sect. cos } x,$$

Siendo que el sector está asumiendo el 0 cuando $x = 1$. Si x> 1, decimos que

$x = CP$, entonces $\frac{1}{2}$ $log\,(x + y)$ da las áreas sectoriales correspondientes a los arcos $AM \pm \lambda(AGBFA)$, es decir $AM \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$. Sólo el sector ACM es real. Si x <1, entonces $x + y$ es imaginario Sea $x = CQ$, entonces $\frac{1}{2}$ $log\,(x + y)$ mide las áreas sectoriales cuyos arcos son $AG \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$, ó $AFBG \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$. Todos estos arcos y sectores son imaginarios. De esto podemos ver que $\frac{1}{2}$ $log\,(-1)$ está representado por los sectores imaginarios cuyos arcos son AEB+ λ((BFAEB), o también AFB + λ(BEAFB). Todos estos valores están incluidos en la fórmula:

$\log(-1) = \pm(2\lambda + 1)\pi\sqrt{-1}.$, La "Geometría por tanto, es aquí un poco antagónica al principio leibniziano, de que los logaritmos de los números negativos son imposibles, como actualmente se le da plena confirmación". En esta representación de los logaritmos se establece una doble correspondencia: una entre los puntos en el plano, x e y, y el otro entre los puntos en el plano, y x y z, donde $y = z\sqrt{-1}$.

El país donde se realizó nuestra controversia con mayor entusiasmo durante la segunda mitad del siglo XVIII es Italia. Ya nos hemos referido a los dos escritos de De Foncenex . Unos años más tarde la cuestión fue tratada por los hermanos Riccati Vicenzo y Riccati Giordano. Eran hijos del célebre Giacomo Francesco Riccati, de Venecia, el creador de la ecuación diferencial de Riccati . Vicenzo Riccati fue profesor de matemáticas en la Universidad de Bolonia. En 1767 dirigió cinco cartas a Jacopo Pellizzari, profesor en Treviso, las cuales, se nos informa, se imprimieron junto con una carta de Giordano Riccati. Ellas fueron reimpresas doce años después. Los argumentos de Leibniz, J. Bernoulli, D ' Alembert, Euler y De Foncenex fueron discutidos. En su conjunto, Riccati considera las críticas de D'Alembert a Euler válidas, cuando Euler toma:

$1 + y/n = \cos\,(2\lambda - 1)/n\cdot\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin\,(2\lambda - 1)/n\cdot\pi,$ donde y es el requerido l(-1),y se deriva de este, para $n = \infty$, $l(-1) = \pm(2\lambda - 1)\pi\sqrt{-1},$

D'Alembert modifica el proceso escribiendo:

$\lambda = n, 1 + y/n = \cos\,(2 - 1/n)\pi \pm \sqrt{-1}\sin\,(2 - 1/n)\pi.$, tomando $1/n = 0$ en el miembro de la derecha, pero no en el izquierdo, él toma $1 + y/n = 1$, o $y = 0 = l(-1)$. Riccati rechaza la revisión de D'Alembert al punto de vista de Euler en este punto, pero sostiene a D'Alembert en la crítica de Euler en que: $l(1 + w)^n = nw$, donde n es infinito y w es infinitesimal, ya que abarca todos los logaritmos, desde que $(1 + w)^n$ sea un número positivo (!), de ahí que nw no sea la representación analítica de los logaritmos de los números negativos. Hemos visto que Euler no establece ninguna limitación en cuanto a si el infinitesimal w es real o imaginario y no significa que $(1 + w)^n$ represente un número positivo. Como cuestión de hecho, Euler establece más tarde que $(1 + w)^n = x = -1$ y obtiene $l(-1)$ de éste. La falta de explicitez en la declaración de Euler en este punto volvió a Riccati y otros en contra de él. Riccati escribe $-1 - w$ en lugar de $1 + w$, con lo que $l(-1 - w) = w$, y llega por supuesto a que $l(-1) = 0$. Además se encontró con que la curva logarítmica tenía dos ramas. El punto de vista de J. Bernoulli I y D'Alembert prevaleció. Vicenzo Riccati escribió una carta a Joaquín Pessuti, que había estado en San Petersburgo y fue amigo de Euler. Pessuti era entonces editor de dos revistas literarias, la Anthologia romana y Effemeridi letterarie, y después de 1787 profesor de matemáticas aplicadas en el Collegio della Sapienza en Roma. Pessuti defendió los puntos de vista de Euler en un artículo, titulado Riflessioni analitiche, Livorno, 1777,los principales resultados derivados de:

$$u = \int \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1 + z\sqrt{-1}}{1 - z\sqrt{-1}}.$$

Tomando $z = 0$, el obtiene $u = n\pi$, donde $n = 0, 1, 2,\cdots$ La respuesta a Pessuti realizada por V. Riccati apareció anónimamente. Los ataques de Riccati a Euler fueron repelidos por un segundo escritor que había estado bajo la influencia de San Petersburgo: el astrónomo alemán Friedrich Theodor V: Schubert, en un artículo titulado "*Ueber die Logarithmen verneinter Grossen* ". En el año 1778 Giuseppe Calandrelli, profesor de matemáticas en el Colegio Romano, atacó a Pessuti y a Euler en un folleto*:"Saggio analítico sopra la riduzione degli Archi circolari ai logaritmi imaginarj*", Roma, 1778. Como V. Riccati había hecho antes que él, ahora Calandrelli arroja dudas sobre la exactitud de la relación planteada por Bernoulli-Euler: $\pi\sqrt{-1} = l(-1)$, el argumento que lo relacionaba es $2l(-1) = 2l(1)$. La misma línea de argumentación fue perseguida por P.M. Caldani, discípulo de V. Riccati y profesor en Bolonia. El escrito de Caldani:"*Della proporzione Bernoulliana fra il diametro, e la circonferenza del circolo e dei logaritmi*", Bolonia, 1782 hizo que D'Alembert proclamara a Caldani, como el primer matemático en Italia. Caldani se opuso, como Riccati había hecho antes que él, a la escritura de Pessuti de que:z $\sqrt{-1} = 0$, cuando z = 0. Caldani escribe:

$0 : 0\sqrt{-1} :: a : a\sqrt{-1}$; ahora, si $0 = 0\sqrt{-1}$, se sigue a $= a\sqrt{-1}$, una imposibilidad. Él escribió más adelante un documento que no hemos visto, "*Riflessioni sopra un opuscolo del Padre Franceschini Barnabita, dei logaritmi de' numeri negativi*", Modena, 1791. Estos escritores, entre ellos Pessuti, coinciden en que la prueba de Euler de su teorema fundamental no es clara. Cuando Euler escribe $l(1 + w) = w$, donde w es un infinitesimal, y entonces obtiene $l1 = 0$ cuando $w = 0$, no puede al mismo tiempo argumentar, según los críticos, que $log 1 = 2\pi\sqrt{-1}$, $4\pi\sqrt{-1}$, etc. Muchos de estos puntos son discutidos por el jesuita español Juan Andrés de una manera muy interesante, en su libro anteriormente citado. En 1766, cuando los Jesuitas fueron llevados fuera de España, él fue a Italia y se interesó por las discusiones filosóficas de allí. Él estaba dispuesto a aceptar las conclusiones de Euler, pero pensaba que si:

$1 = e^0 = e^{2n\pi\sqrt{-1}}$, entonces debemos tener $0 = 2\pi\sqrt{-1} = 4\pi\sqrt{-1}$, etc.

De tipo superior es la investigación de Gregorio Fontana, profesor de la Universidad de Pavia. Él toma el punto de vista de Euler. En un artículo, *"Sopra i logaritmi delle cuantita negativa e sopra gl'immaginarj"*, El trató de fundamentar la teoría sobre pruebas más simples y más rigurosas. Él da tres pruebas. Primero el toma x = vers $\emptyset$, y obtiene $\sqrt{-1}\, d\emptyset$=

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}} = \left(\frac{xdx - dx}{\sqrt{x^2-2x}} + dx\right) \div (x - 1 + \sqrt{x^2-2x}).$$

Integrando, el obtiene $\phi\sqrt{-1} = \log\ (1 - x - \sqrt{x^2-2x})$ después de dejar que $\emptyset = 0$ cuando $x = 0$. Para $x = 2$, $\log\ (-1) = \pm (2n-1)\pi\sqrt{-1}$; para $x = 0$, $\log 1 = \pm 2n\pi\sqrt{-1}$. Una segunda prueba se inicia cuando $x = cos\emptyset$ e implica la integración. Una tercera prueba semejante implica varias funciones trigonométricas Fontana razona con una claridad que no es habitual en artículos sobre los logaritmos de ese momento. Él cuenta cómo en un momento pensó que tenía una prueba absoluta de la falsedad de los resultados de Euler. En $e^{\log(-a)} = -a$ el pensaba que log (- a) sin duda debe ser igual a -a, un real siempre. Como cuestión de hecho, dice, tenemos log (- a) = $\pm (2n-1)\pi\sqrt{-1} + \log a$. Por último Fontana deriva los teoremas sin utilizar el cálculo integral; el usa series infinitas, pero no presta atención a las cuestiones de convergencia.

Este artículo no puede prevenir la aparición de cinco "pruebas" que $log\,(-z). = log\, z$, en "Teoria dell'Analisi" de Pietro Franchini, Roma, 1792. En 1795 Gianfrancesco Malfatti, de la Universidad de Ferrara, examinó a fondo la cuestión de si la curva logarítmica tiene una o dos ramas. La ecuación $ydx = dy$ tiene un número infinito de integrales incluso bajo la restricción de que $x = 0$ cuando $y = 1$. Para cualquier constante n, $e^{nx} = y^n$ da lugar a la ecuación diferencial ydx = dy. Antes de integrar uno debe acordar el número de valores que tendrá y. Si ha de tener un valor, obtenemos $e^x = y$, si dos valores, obtenemos $e^{2x} = y^2$ ó $(e^x - y)\ (e^x + y) = 0$. Dado que $e^x = y$ tiene sólo una rama, se argumenta a partir de consideraciones geométricas y analíticas periódicas.

En los libros de texto regulares de matemáticas la falta de acuerdo en relación con $log\,(-1)$, fue tan marcada como en los artículos especiales. Odoardo Gherli parte de la base, de que los números negativos difieren de los positivos, simplemente en ser tomados en un sentido contrario, y que los logaritmos no toman conocimiento de tal contrariedad. Pietro Paoli deriva "il Famoso Teoreme del Sig. Euler", pero cree que debe utilizar series infinitas para asegurar el rigor. Paolo Frisi, en su álgebra, muestra familiaridad con los principales escritores sobre logaritmos; él indica los resultados alcanzados por Euler, pero está lejos de simpatizar con ellos. Muchos de los resultados le parece absurdos, como por ejemplo, $log\ (-1) : \sqrt{-1} : \pi : 1$. Además critica que: $0. \sqrt{-1} = 0$ y afirma que un cero imaginario representa una magnitud real diferente de cero.

En un pesado volumen 4, publicado en 1782 en Florencia, Petro Ferroni dedica un capítulo a los logaritmos de los números negativos, sólo para llegar a la conclusión de que tomando consideraciones analíticas, así como geométricas de continuidad, se obtiene $l(+1) = l(-1)$. Del argumento de Euler $-y = y(-1) = c^{ly} \cdot c^{\pm\lambda p\sqrt{-1}}$, se obtiene $l(-y) = ly \pm \lambda p\sqrt{-1}$, es rechazado, desde que en pura doctrina (puriore religione) se tiene $-y = -e^{ly}$, y $l(-y)$ es un número real. Ferroni basa su teoría de los logaritmos generales sobre la relación $y = \pm c^x;$, él no percibe ninguna contradicción en este procedimiento. Los signos de decadencia son visibles también en Alemania. El alto nivel alcanzado en la mitad del siglo no se mantuvo en su cierre. Kastner, de la Universidad de Göttingen, muestra desde la teoría de las proporciones que no podemos tener logaritmos reales de cantidades negativas. I.A.C.Michelsen, un admirador de Euler, profesor en el Gimnasio Real en Berlín, fue quien en 1788 llevó a cabo una traducción alemana de la famosa *Introductio* de Euler de 1748, añade notas a la traducción, las que indican que Michelsen fracasó por completo en comprender el argumento de Euler; el sostiene el punto de vista, por ejemplo, que para cada número, ya sea positivo o negativo, le corresponde uno y sólo un logaritmo. En 1795, GS.. Klugel declaró lo siguiente: "El $log\ (-x^2)$ es imposible, pero el $log\ (-x)$ es posible, de lo contrario hay que demostrar que alguna condición no permite tomar a x negativamente". La posibilidad de que el logaritmo de un número negativo se base en la posibilidad de que el número sea negativo en sí. El interés en la discusión de los logaritmos se muestra en los anuncios ocasionales que aparecían en el "*Gottingische Anzeigen von gelehrten Sachen*". Una noticia del año 1786 declara que los opositores de Euler tratan de resolver la cuestión por medio de fórmulas de integración, los radios de curvatura, etc ,de tal modo tratando de pasar a conceptos fundamentales por medio de sistemas de notación, cuando, como cuestión de hecho, los conceptos se deben determinar en primer lugar, antes de que los sistemas de notación se pongan en acción. Los opositores de Euler son denominados calculadores, en lugar de filósofos.

En conclusión, nos paramos a preguntar: ¿Cuál fue el resultado del medio siglo de discusión? El sentimiento que prevalece hacia la teoría de los logaritmos de los números negativos fue uno de vacilación. En 1799 Christian Kramp, profesor de matemáticas en Strassburg, expresó sus dudas "sobre la exactitud de la fórmula $l(-\mathrm{x}) = l(-1) + lx$.

En 1801 Robert Woodhouse, de Caius College, publicó un artículo "Sobre la verdad necesaria de ciertas conclusiones obtenidas a través de cantidades imaginarias." Dice: "Mientras las paradojas y contradicciones se allegan mutuamente entre sí, los matemáticos se dedican a la controversia relativa a la aplicación de los logaritmos de las cantidades negativas e imposibles, se pueden emplear como argumentos en contra de la utilización de dichas cantidades en investigación".

En 1803 L.N.M. Carnot dijo en su *Géométrie de position*,p. III, que el largo debate no ha logrado aclarar la paradoja de que, mientras que $log\ (-2)^2 = log(2)^2$, no podemos escribir

$2\,log(-2) = 2\,log\,2$. Euler había aclarado este punto en 1749; él tenía las premisas bajo las cuales 2 log (- 2) es o no es igual a 2 log 2, se establece de manera magistral, pero la discusión de cincuenta años supuso la pregunta más primitiva, si log x es o no es igual a $log\,(-x)$. ¿Por qué el brillante trabajo de Euler de 1749 no fue convincente? Por tres razones:

1. Euler no pudo dejar en claro la cuestión de que si la curva logarítmica tenía una rama o dos ramas, en realidad nada tenía que ver con la teoría de los logaritmos de los números negativos y complejos.

2. La prueba de Euler de su teorema fundamental, que log x tiene un número infinito de valores, no fue explicado con plenitud de detalle suficiente para llevar a la convicción general.

3. La base de los matemáticos aún no habían aprendido a tratar con cuidado las multivaloradas operaciones inversas y las acuciantes cuestiones de discontinuidad. Tampoco evitaban el riesgo de confusión resultante de la consideración simultánea de los logaritmos de diferentes bases.

Una característica notable de la larga discusión merece ser mencionada. Normalmente una prueba genuina es aceptada como suficiente para establecer una verdad matemática con certeza absoluta, ningún argumento puede avanzar en contra de tal demostración. Pero, por regla general, la discusión de los logaritmos de los números complejos se consideró como la participación de los argumentos en cada lado de la cuestión, de modo que la decisión parecía descansar en una preponderancia de argumentos o una preponderancia de probabilidades, que aparentemente representa lo deseable para un partidista, ejemplo un abogado, para avanzar como tantas diferentes "pruebas" como sea posible. Esta actitud fue especialmente notable en los debates realizados por correspondencia. Esto se debió principalmente a la falta de definición precisa de los términos y la no discriminación entre lo que se asume sin pruebas y lo que va a ser objeto de demostración rigurosa.

LA UNIÓN DE LOS CONCEPTOS LOGARÍTMICO Y EXPONENCIAL.

La amplia adopción de la definición de logaritmos como exponentes, en los libros escolares, se debió en gran parte a la influencia y el ejemplo de L. Euler, quien la presentó en su *Anleitung zur Algebra*. Durante el siglo XVIII la definición neperiana, basada en las dos progresiones, continuó siendo la definición vigente. Todavía en 1808, C.F. Kaussler expresó preferencia por ella, la nueva definición ofrecía a los principiantes "lagunas y oscuridades".

Hemos visto que Euler amplió el concepto exponencial incluso hasta el uso de exponentes imaginarios. Hemos visto que la expresión $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ se asocia con su nombre, el reconoció que se trataba de un número con infinitos valores. Cuando el exponente es real y fraccionario, los múltiples valores de $a^{m/n}$ fueron reconocidos por Euler y otros en artículos de investigación. Por regla general, esta multivaloración no se discutió en absoluto en los libros de texto del siglo XVIII, tal como en las álgebras de Saunderson, Blassiere y Lacroix, o los textos matemáticos de La Caille, Haiseler J.F., Abbé Sauri, Karsten, Reyneau , Bezout, Gherli, Rivard y Bertrand, o los diccionarios de matemáticas de E. Stone y Ch. Wolf.

La relación $a = e^{\log a}$ fue fácilmente deducida de la nueva definición de logaritmos y fue utilizada por algunos escritores de este siglo, como G. Fontana en 1782.

V. REFINAMIENTOS YGENERALIZACIONES LLEVADAS A CABO Y DURANTE EL SIGLO XIX.

LA POTENCIA GENERAL Y LOGARITMO.

Hemos visto que la teoría general de a^b, donde a y b son números complejos, fue descrita por L. Euler en su investigación sobre las raíces de las ecuaciones Imaginarias de 1749, pero que este documento no llamo la atención de los matemáticos. Veremos ahora que tres cuartos de siglo después, la teoría de la potencia general fue elaborada por matemáticos de Alemania, Inglaterra, Francia y los Países Bajos. En la apertura del siglo XIX, este tema parecía difícil para muchos, según se conoce de un documento de A.Q. Buee, en el que el autor sostiene que $\sqrt{-1}$ significa perpendicularidad (1), y finalmente se llevó a la conclusión de que$(\sqrt{-1})^n = \pm n(\sqrt{-1})$.
La dificultad del tema aparece también en un documento de Argand que en 1813, donde se aventuró a declarar que la expresión $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ "ofrecería el ejemplo más simple de una cantidad irreducible" a la forma $a + ib$ (1).

La Excepción fue hecha por la declaración de J.F. Francais, profesor en Metz, quien señaló que Euler había encontrado que $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-1/2\pi}$, y demostró que $(c\sqrt{-1})^{d\sqrt{-2}}$ es reducible a $a + bi$.
En el transcurso de los próximos quince o veinte años, hubo la suficiente familiaridad con los imaginarios, permitiendo que varios matemáticos pudieran enfrentarse con éxito a la teoría de las potencias en general. En la historia temprana de los logaritmos de los números positivos se encontró sorprendente que los logaritmos se inventaron de forma independiente de los exponentes. Ahora otra sorpresa que nos espera, es decir que la teoría de los exponentes depende de la teoría general de los logaritmos. Todas las interpretaciones de a^b, donde a y b son números complejos, involucran a los resultados previamente establecidos en logaritmos. Así pues, parece que, históricamente, el concepto logarítmico es el más primitivo.
Desde la sutileza de la teoría logarítmica en general se corre el peligro de un ocasional recrudecimiento. Damos un ejemplo de esto antes de proceder a la teoría general.

Las huellas de confusión se encuentran en un artículo de AJH Vincent, profesor en el Colegio Real de Reims en un artículo que posee muchos puntos de mérito. Afecta a la naturaleza múltiple de la curva logarítmica y su relación con la teoría logarítmica. Se titula, *Nuevas consideraciones sobre la naturaleza de las curvas logarítmicas y exponentiell* (3). El autor deja la variable x en $y = a^x$ incluso toma valores con denominadores fraccionarios, y obtiene las habituales dos ramas reales. El artículo de Vincent es discutido por George Salmon en su documento *curvas plano superior* (1879, página 286).

Salmon acepta idea de Vincent de que la curva tiene varias ramas. Vincent define $1/n$ como el logaritmo de todo los números $a^{1/n}$, y llega a la conclusión de que, si a es positivo, algunos números tienen logaritmos reales; si a es negativo, algunos son $(+)$ y algunos $(-)$ y otros números no tienen logaritmos, así sucesivamente. Vincent estudia las discontinuidades de sus curvas, pero no investiga la consistencia de su múltiple definición de logaritmos. Peacock se expresa de la siguiente manera:

"La cuestión de la identidad de los logaritmos del mismo número, ya sea positivo o negativo,. . . Con frecuencia se ha reanudado en los últimos tiempos. Los argumentos a favor de la discriminación positiva de esta proposición, que eran en su mayor parte fundada sobre la interpretación analítica de las propiedades de la hipérbola y la curva logarítmica, no tenían derecho a mucha atención, en la medida en que no se extrajeron de un análisis de la trayectoria seguida en la derivación de las expresiones simbólicas propias y de los principios de interpretación que las leyes de la derivación autorizadas" (4)

El artículo Vincent fue criticado por J.P.W. Stein (5), quien considera que cada índice fraccionario puede ser convertido en uno que tiene un denominador, incluso, de modo que no habría un número doble correspondiente a cada logaritmo. Vincent también fue criticado por D.F. Gregory, quien dijo:

"Podría, tal vez, haber debilitado su creencia en la exactitud de los resultados, si es que había llegado a una conclusión, como debería haberlo hecho, que el logaritmo mismo correspondía a cantidades positivas, negativas e imposibles. Parece bastante haber pasado por alto Estos últimos. "

Un recrudecimiento más fuerte se ve en un artículo de L.C. Bouvier, Ex oficial de ingeniería. En 1823 él derivó la fórmula de Euler para $log\, x$ y $log\,(-x)$ en el reconocimiento de la relación $\log x = n(\sqrt[n]{x} - 1), \;\; n = \infty.$ Entonces, despejando x, resulta,

Debido a que n tiende a infinito, podemos concluir:

$$x = \left(1 + \frac{1}{n}\log x\right)^n, \textit{ d'où, à cause de n infini, on peut conclure } x = \left(1 + \frac{1}{n}\log x\right)^{n+1/k}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\log x\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\log x\right)^{1/k} = N\ \sqrt[k]{1},\ N \text{ being real and } k \text{ any positive}$$

N es real y k un entero positivo

Así, no sólo el logaritmo de un número tiene muchos valores, sino cualquier logaritmo y anti-logaritmo tiene muchos valores. Para $k = 2$, $log\, x = log\,(-x)$. *Estas consideraciones parecen conducir a terminar de una vez por todas, la discusión fuerte entre Euler y D'Alembert, por la naturaleza de los logaritmos de las cantidades negativas*.

Bouvier no hizo ningún intento de probar la consistencia inherente a su sistema.

Esta inconsistencia fue hecha por JPW Stein, profesor (2) en el gimnasio en Tréveris. Stein señala que Bouvier no podía aceptar la formula euleriana, $\log\ x = r + 2m\pi\sqrt{-1}$, (x positiva) y $\log x = r + (2m+1)\pi\sqrt{-1}$, (x negativo), y al mismo tiempo tomamos $x = N\sqrt[k]{1}.$

Comenzando en un camino inexplorado, Stein avanza en nuevos argumentos para demostrar que formula de Euler es incorrecta. De la relación $e^{r+z\sqrt{-1}} = y,\ r$, r es el logaritmo real de y, z es un número que puede ser determinado, Stein primero deduce $e^{z\sqrt{-1}} = 1$ y de esta forma obtiene la formula de Euler. *Pero hay que señalar que, si e^r*

puede asumir varios valores diferentes, por ejemplo los valores de k, entonces $e^r = y[\cos\ (2p\pi/k) + \sqrt{-1}\ \sin\ (2p\pi/k)]$. Este resultado, combinado con los valores de Euler, le resulta… $Log\ y = r + [2m - (2p/k)]\pi\sqrt{-1}$, $\log\ (-y) = r + [2m' + 1 - (2p'/k)]\pi\sqrt{-1}$.
Donde k es par, obteniendo Log y= log (-y). Vemos que, en el sistema de Stein la relación x = log y ya no se define por la simple ecuación $e^x = y$, sino por el ecuación $e^{x-(2p\pi/k)} = y$. . La expresión general para el logaritmo de un número implica dos constantes independientes arbitrarias, m y p, en lugar de una sóla, como en el sistema euleriano. Más sorprendente es el hecho de que el número de valores k que toma e^r, aparentemente no es el mismo en todos los casos o para todos los números. El autor no explica cómo, en estas condiciones, su sistema puede proporcionar una teoría de los logaritmos que sea general, coherente y útil. Ciertamente Stein no se movió en la dirección de Cauchy, que, como veremos, por la introducción de valores principales se dirige a una mayor simplicidad y al inicio de una ley y orden.
Partiendo de la teoría general de a^b, se observa que el autor da marcada influencia en el desarrollo de esta teoría a Martin Ohm, profesor en Berlín en 1811, cuando era docente en la Universidad de Erlangen, concibió la idea de escribir un sistema matemático que apareció más tarde bajo el título, *Intento de un sistema perfecto consecuencias de las matemáticas*, Nuremberg, 1822-1852. El objetivo de este trabajo lo indica su título. Se ha criticado mucho, pero es meritoria la parte del desarrollo general y logaritmos
Estos temas se tratan en el segundo volumen, de los cuales la segunda edición, Berlín, 1829, es la que tenemos ante nosotros. La primera edición apareció en 1823. La edición de 1829 es la que habitualmente es citada por escritores contemporáneos. Ohm hizo una exposición de su teoría de los logaritmos en 1821 en una tesis latina, que tenía probablemente una circulación muy limitada. Nunca le hemos visto citada en algún lugar. Ohm introduce la definición de *ecuación completa y ecuación incompleta*. Una ecuación es *completa* cuando los dos lados de la misma tienen el mismo número de valores que representan exactamente las mismas expresiones, es incompleto cuando solo uno o varios (pero no todos) los valores de las expresiones de de la derecha y la izquierda son los mismos . Nosotros hemos señalado que Euler tuvo ocasión de considerar estos dos tipos de ecuaciones en su documento de 1749 sobre los logaritmos. Después de haber desarrollado la teoría de Euler de logaritmos Ohm toma el desarrollo general "potencia general," a^x, donde a y x son números complejos, es decir, $a = p + qi,\ x = \alpha + \beta i.$
Suponiendo e^z siempre como un solo valor, y dejado r

$r = \sqrt{p^2 + q^2}$, $\log a = Lr + (\pm 2m\pi + \varphi)i$, he takes $a^x = e^{x \log a} = e^{\alpha . Lr - \beta(\pm 2m\pi + \phi)} \cdot \{\cos[\beta \cdot Lr + \alpha\ (\pm 2m\pi + \varphi)] + i \sin[\beta \cdot Lr + \alpha(\pm 2m\pi + \varphi)]\}$, where $m = 0, +1, +2,$ ... y L significando el logaritmo tabular. Así, la potencia general tiene un número in-finito de valores, pero todos son de la forma $a + bi$. Ohm (1) Muestra de que todos los valores infinitos son iguales cuando x es un número entero (2), que hay n valores distintos cuando x es una fracción real, que cuando la fracción es racional s/n (3), algunos de los valores son iguales, aunque el número de valores distintos son infinitos cuando x es real pero irracional (4), y los valores son todos distintos cuando x es imaginario. Su idea de lo irracional se explica en parte por la afirmación de que, si $x = s/n$ es irracional, entonces

s y n son números infinitamente grandes y nunca asignables. Como ejemplos de lo que sus avances, fórmula en casos especiales, bosquejos de Ohm que

$$i^i = (-i)^{-i} = e^{-(\pm 2d + \frac{1}{2})\pi}, \quad d = 0, 1, \cdots.$$

Se hace la siguiente pregunta, cómo las fórmulas…

$$(A)\ a^x \cdot a^y = a^{x+y},\ (B)\ a^x \div a^y = a^{x-y}$$

$$(C)\ a^x \cdot b^x = (ab)^x,\ (D)\ a^x \div b^x = (a \div b)^x,\ (E)\ (a^x)^y = a^{xy}$$

… se aplican al exponente general a^x, y encuentra que (A), (B) y (E) son ecuaciones incompletas, ya que los miembros de la izquierda tienen "muchos, muchos más" valores que los miembros de la derecha, aunque los valores de la derecha (tienen un número infinito) se encuentran que en todos los "tiempos infinitos infinitos" valores de la izquierda, que (C) y (D) son ecuaciones completas para el caso general.
Ohm establece limitaciones en la elección de los valores de log a y log b. Al cabo de un número infinito de valores de log a, uno en particular, digamos α, debe estar en la potencia $a^x = e^{x \log a}$, y se indica con la notación $(a||\alpha)^x$. Él escribe de manera similar, $(b||\beta)^x$. entendiendo esto, podemos escribir $x \log a + y \log a = (x + y) \log a$, y la fórmula (A) se completa. Lo mismo pasa con (B), mientras que (C) y (D) son ecuaciones completas bajo esta interpretación particular.
Se notará que Ohm no introdujo en particular el valor de a^x, que ahora lo llama "el valor principal". Aporte de su tratamiento de la potencia general es principalmente el de la actualidad, excepto, por supuesto, en la explicación de lo irracional.
Procede Ohm al logaritmo general, y hace la novedosa y significativa afirmación de que "el concepto general de las potencias se da en el concepto general de logaritmo $b?a$, si por tal se entiende a todo x en la expresión, de manera que se tiene $a^x = b$ o $e^{x \log a} = b$ "(1). Observese que esta es la notación general para el logaritmo, $b?\ a$. A medida que x tiene un número infinito de valores para cada valor de log a, tenemos aquí la aparición de dos constantes independientes y arbitrarias, como en las investigaciones de Stein y en las de Graves, Hamilton y otros, que se discutirán más adelante. Él dice que dado que b y a se toman siempre general, y a^x tiene una infinidad de valores, $b?a$ son totalmente indeterminados, a menos que nosotros establezcamos el valor de log a el que deban tomarse de la raiz a^x. Se adopta la notación especial $b?(a//\alpha)$, lo que significa el logaritmo de b para la base a, cuando log $a = \alpha$. Ohm muestra que $b?(a//\alpha) = (\log b)/\alpha$ esta es una ecuación completa. Si a es positivo, se dice e, entonces el sistema logarítmico de Ohm se reduce a la forma familiar euleriana. "Y si a no es positiva, entonces el logaritmo general, así como cada uno de sus casos especiales es diferente de cada uno de los logaritmos hasta ahora definidos y discutidos."

Hay que admitir que Ohm ha superado a todos sus predecesores en general y plenitud en la discusión de la expresión a^x, y que él es el primer escritor que establecer con éxito la teoría general de los logaritmos (que tiene un número complejo como una base) completamente y sin reservas en la teoría general de la potencia a^x. Sin embargo, la teoría de la potencia general, como hemos visto, no se desarrolla independientemente de los logaritmos, de hecho se utiliza la teoría de los logaritmos de los números complejos de base e. Por lo tanto, los logaritmos eulerianos han respondido como una escalera de mano que lleva a la teoría general de las potencias, la teoría general de las potencias, a su vez, ha llevado a una teoría más general de los logaritmos que tienen una base compleja.

La primera investigación original sobre los logaritmos de los números complejos apareció publicada en Inglaterra en 1829, en las *Philosophical Transactions*, de la pluma de John Graves, cuando era un joven de 23 años. Graves fue un compañero de clase de William Rowan Hamilton en Dublín. Hamilton ha expresado reiteradamente su deuda con Graves y afirma que la reflexión sobre las ideas de Graves sobre los imaginarios, lo llevó finalmente, a su invención de los cuaterniones. Graves se convirtió en un jurista señaló. Su artículo de 1829 lleva por título: *"Un intento de rectificar la inexactitud de algunas fórmulas logarítmicas"* Le modifica a l1 por ciertas extensiones bastante sorprendentes, dando $l1 = (2m'\pi\sqrt{-1})/(1+2m\pi\sqrt{-1}).$ Esto se hace tomando la base e no en su forma aritmética, pero en su forma más general $e^{1+2m\pi\sqrt{-1}}$, de manera que x se define como el logaritmo general de y, no por la ecuación $e^x = y$, pero por la ecuación e $e^{(1+2m\pi\sqrt{-1})x} = y = e^{\log y+2m'\pi\sqrt{-1}}$, donde log y significa el logaritmo real o tabular de y. Dejar que $y = 1$ da $l1$ como está escrito arriba. Por lo tanto, Graves (como Ohm) afirmarón que en la expresión general para el logaritmo hay dos enteros arbitrarios e independientes, m y m', en lugar de limitarse a uno, como lo dicho por Euler.

En un documento de fecha posterior, publicado en el mismo volumen de las transacciones filosóficas (1829), el reverendo John Warren de Cambridge presentó un documento del cual nos dimos cuenta, cuando se abordó la representación geométrica de algebra cantidades. Warren llegó a algunos de-los resultados algebraicos de Graves. En junio de 1832, Vincent publicó en Lille, resultados idénticos en consecuencia de las fórmulas principal de Graves.

La falta de claridad en los escritos de Graves, fue mostrada por Augustus De Morgan en su tratado sobre el cálculo de las funciones, donde dio su propio punto de vista, las secciones 158 y 245, publicados en la *Encyclopaedia Metropolitana.*

En 1833 George Peacock realizó un informe sobre los progresos recientes de ciertas ramas del análisis en la que se mueven por los logaritmos eulerianos, y argumenta que incluso la teoría que los números negativos pueden tener logaritmos reales. Por considerar $-a^m\cdots$ como proveniente de, $(-1)(+a)^m$, then $l(-a)^m = (2r+2mr'+1)\pi\sqrt{-1} + m\log a.$

Si suponemos $m = \frac{1}{2},\ r = 0,\ r' = -1,$ tenemos $l(-\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\log a = l\sqrt{a}.$

El lector verá que la teoría de Euler está quebrantada por el supuesto de que en $2mr'$ es posible tomar r' impar. En cuanto a la obra de Graves, Peacock cree que hubo un error fundamental en su generalización, porque hace una cantidad periódica en la base de su sistema. Graves envió una defensa a la Asociación Británica en 1834, también a la *Philosophical Magazine*. El resultado de la discusión fue que Graves retirara la declaración contenida en el título de su primer trabajo, en el sentido de que él estaba tratando de "rectificar la inexactitud" de la teoría de Euler, mientras que De Morgan admitió que si Graves deseaba extender la idea de un logaritmo para incluir no sólo los logaritmos de la forma de base aritmética, sino también los de una forma más general, entonces no había un error involucrados en el proceso. De hecho, De Morgan sugirió aún una extensión más . El sistema logarítmico como el de Graves en el cual hay dos enteros arbitrarios e independientes, que se trabajaron también por Sir William R. Hamilton.

Sin conocer, al parecer, que De Morgan y Graves habían llegado a un acuerdo, DF Gregorio del colegio Trinity, Cambridge, publicó un artículo "los logaritmos de las cantidades imposibles", en el que se indaga, “cuál es el resultado correcto", el de Graves o

de sus oponentes. Aunque admite la posibilidad, Gregory considera una base aritmética sería más conveniente. Gregory también señala que Vincent, Peacock y Graves, erróneamente pensaron que habían establecido que en ciertos casos existía un logaritmo común para los números positivos y negativos. Gregory murió a la edad prematura de 31 años, sin embargo, en su corta carrera científica hizo mucho para establecer las bases del álgebra.
Un profundo conocimiento filosófico y lógico de las potencias son evidentes en cuatro documentos sobre el fundamento del Algebra, publicado por Augustus De Morgan en 1842 y 1849. Ellos fueron leídos ante la Sociedad Filosófica de Cambridge en 1839, 1841, 1843 y 1844, respectivamente. Desde su primer artículo citamos los siguientes
"Si definimos $log\, x$, o más bien λx (reservando $log\, x$ para el logaritmo de la longitud numérica) para cualquier solución legítima de $e^{\lambda x} = x$, es claro que el logaritmo de n inclinado en un ángulo v, (o de N) para la base b inclinada en un ángulo B, $(o\, B)$ se deriva (evitando la ambigüedad) desde"

$$(b\epsilon^{\beta\sqrt{-1}})^x = = n\epsilon^{\nu\sqrt{-1}},$$

$$\lambda_B N = = \frac{\log n + \nu\sqrt{-1}}{\log b + \beta\sqrt{-1}}.$$

Este resultado es verdadero cuando $log\, n \,/\, log\, b = v\, /B$, no es más sorprendente que una cantidad imposible (hasta ahora llamada) debe tener un logaritmo posible, de las operaciones exponenciales que no contenga $/ -1$, o no exponentes intercambiables de longitud y dirección, solo en algunos casos nos permiten pasar de una línea a otra"2.

Es importante notar que en la discusión del exponente $/-1$ en la página 184, el autor revela, aunque algo vaga, la idea de grupos abstractos y desarrolla el grupo cíclico de orden cuatro. Este documento fue escrito por De Morgan en 1839, algunos años antes de Cayley y William Rowan Hamilton salieron con sus investigaciones sobre los grupos. Es uno de los primeros, tal vez muy pronto, que hace referencias inglesas a la teoría de grupos.

De Morgan muestra que resultado de Graves es un caso especial de los anteriores. En su segundo artículo, De Morgan procede al estudio de a^b. Razonando geométricamente como antes, y deja que (r, p) sea una línea de r unidades inclinadas a la línea de la unidad, en un ángulo de p, que llama la logómetro de (r,p) o $X\,(r,p)$, el logaritmo de esa línea, no sólo con respecto a su longitud, sino también la cantidad de revoluciones en la que alcanzó su dirección actual. De

From $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$ he gets $\pi = \lambda(-1)/(\sqrt{-1})$,

"Una proposición que, no muchos años antes, fuera un misterios de análisis, es ahora una proposición geométrica muy simple:El primer lado se entiende una línea de π unidades establecida positivamente como unidad en la línea, y el segundo lado significa el logometer de una unidad negativa a través de un ángulo recto. Ahora el logometer de una unidad negativa es una línea de π unidades elevado positivamente perpendicular a la línea de la unidad:.. dónde la identidad de los dos lados es visible "

Estos temas se desarrollan también en Álgebra doble de De Morgan, Londres, 1849. El objeto era evitar la consideración de los valores ambiguos de símbolos, "algo que no era necesario".

"Cuanto más pienso en este tema, más satisfecho me siento, que la nueva álgebra no debe tener símbolos de valor absoluto doble o múltiple, es decir, que el significado de cada símbolo ele-mental no debe ser considerado como completo, a menos que exprese la cantidad de revolución desde la línea de la unidad por la que se debe hacer para alcanzar su dirección, así como su dirección".

Señala que las consecuencias de la extensión completa de a^b podrá ser capaz de pasar de la expresión del caso particular al uso general. "Considerando que, en el sistema común e y $\epsilon^{\sqrt{-1}}$ son las bases logarítmicas empleadas para magnitudes normales y periódicas, se tiene, en el sistema descrito anteriormente, empleando… $e^{(m+n\sqrt{-1})^{-1}}$, y $e^{(\nu-\mu\sqrt{-1})^{-1}}$."

Una discusión independiente de la potencia generalizada $A^B = C$ está dada por G.M. Pagani (1), un profesor de la Universidad Católica de Lowen. Él toma $A = \mu e^{\theta i}$, , donde θ es llamado el argumento determinante de A. La consideración de determinar una cantidad es el único medio, según el autor, de evitar paradojas en el análisis algebraico. Él usa la notación $(a)^{m/n}$ para indicar todos los valores de $a^{m/n}$. Asumiendo A y C como se indica, se calcula B. Aquí $A = \mu e^{i\theta} =$

$e^{l\mu + i\theta}$, $B = \alpha + i\beta$, he gets $C = e^{(l\mu + i\theta)(\alpha + i\beta)} = re^{i\phi}$ y finalmente $\alpha = (l\mu + \theta\phi) \div (l^2\mu + \theta^2)$, $\beta = (\varphi l\mu - \theta l\gamma) \div (l^2\mu + \theta^2)$.

Aquí l significa que el logaritmo tabular para la base e, θ y φ tienen cada uno un número infinito de valores. Pagani señala que, si A es real y positiva, por lo que so that $\theta = 2k\pi$, and if $\varphi = 2k\pi \cdot lr \div l\mu$, , entonces el número imaginario $re^{i\phi}$ tiene un logaritmo real. Esta conclusión es evidentemente errónea. Si se dice que sus fórmulas son *más Generales y por lo tanto más precias*, más que las de Euler, ya que la de Euler se obtiene haciendo k=0. El Documento de Pagani fue leído ante la Academia en Bruselas el 7 de octubre de 1837. Después de la conferencia Quetelet señaló que J.C. Cerquero (1), director del observatorio de San-Fernando, cerca de Cádiz, había llegado a resultados similares. Más tarde, Pagani preparo una Nota (3) en el que el límite de $(1 + (x / n))^n$, x debe ser complejo, con lo cual se le informó de los trabajos de Graves en Inglaterra en A^B. Veremos que la potencia general fue tratada también por Cauchy en 1847 (4).

El error de Pagani, antes mencionado, surge de la suposición tácita de que $(A^X)^Y = A^{XY}$ es una ecuación completa. Ohm había demostrado que era incompleta. El hecho de no prestar atención a este asunto conduce a paradojas curiosas. T.h. Clausen de Altona, hizo una paradoja en 1827 (5), Fue citado por Peacock en su informe (6). Cuando n es un número entero, $e^{2n\pi i} = 1$, $e^{1+2n\pi i} = e$, por lo tanto también, $e^{(1+2n\pi i)^2} = e = e^{1+4n\pi i - 4n^2\pi^2}$. desde $e^{1+4n\pi i} = e$, se seguirá que, $e^{-4n^2\pi^2} = 1$, Lo cual es absurdo. En forma más condensada la paradoja es presentada por E. Catalan así:

$e^{2m\pi i} = e^{2n\pi i}$, donde m y n son dos enteros distintos.El aumentar ambas partes a la potencia $i/2$, tenemos un absurdo a si, $e^{-m\pi} = e^{-n\pi}$.

El lector se dará cuenta de $(e^{2m\pi i})^{i/2} = e^{-m\pi}$ es una ecuación incompleta; todos los valores del miembro derecho son valores del miembro de la izquierda, pero no al revés. Dejando $((a))^x$ significa todos los valores de la potencia general. Puesto que $((a))^x$ = $((a))^x = e^{x \log a + 2p\pi i}$ es una ecuación completa, donde $\log a = la + 2q\pi i$, $la =$ logaritmo tabular $\pm p = 0, 1, 2, \cdots$ and $\pm q = 0, 1, 2, \cdots$, se obtienen las siguientes ecuaciones completas $((((e))^{2m\pi i}))^{i/2} = ((e^{2m\pi i \log e + 2p\pi i}))^{i/2} = e^{-m\pi - p\pi - 2mq\pi^2 i}$. .Cuando $p = q = 0$, tenemos la el valor particular e^{-mx}. Se obtienen resultados similares para $(e^{2n\pi i})^{i/2}$. De ello se tiene que $(e^{2m\pi i})^{i/2} = (e^{2n\pi i})^{i/2}$ es una ecuación incompleta,…en la que el valor particular e^{-mx} en el lado izquierdo no es igual que el valor particular de e^{-nx} a la derecha. Esta última ecuación se convierte en completa bajo las restricciones de $m + p = n + p'$ y $mq = nq'$, donde los números enteros p' y q' se utilizan en el valor completo del miembro de la derecha de la misma manera como p y q se utilizaron en el lado izquierdo. De Morgan se basa en la noción de dirección de las líneas para explicar las paradojas de este carácter. Él nos recuerda que tales falacias han sido seriamente propuestas como argumento en contra de la utilización de las cantidades imaginarias.

Las generalizaciones de los logaritmos que conducen a sistemas que tienen bases periódicas o complejas dió lugar una fórmula de tal complejidad que no fue aprobada por el sistema general. La maquinaria era demasiado complicada para uso general. La teoría de la potencia general de a^b, siendo A y B los números complejos, se estableció satisfactoriamente con la ayuda de los logaritmos eulerianos de la base $e = 2{,}718$. Ninguna ventaja real creció fuera de los sistemas logarítmicos nuevos. Si en $a^x = c$, los números complejos a y c se dan y x se encuentra, la formula logarítmica euleriana es suficientes para la solución. Así que los sistemas generales logarítmicos de Ohm, Graves, Vincent Warren, Morgan De Gregorio, Hamilton y Pagani no se reconocieron como inventos matemáticos útiles.

Sin embargo, es uno de los resultados del estudio de la potenciación general y de los logaritmos que tienen un número $a + ib$ como una base de importancia; este estudio condujo a la conclusión de que no hay una combinación posible de números reales y complejos frecuentes que den lugar a nuevas formas de números.De Morgan admite que francamente él había esperado *nuevas cantidades imaginarias o imposibles*. Pero los procesos de la suma y la resta, la multiplicación y la división, potenciación y sus dos inversas, *involutión* y *logarithmation*, constituyen un grupo cerrado de operaciones, Que completan el ciclo de operaciones en el álgebra de los números complejos comunes. En el siglo XVII la logaritmación de los números negativos y complejos no fue reconocida, por lo que el ciclo de operaciones no fue cerrada y el álgebra de ese momento no se había completado.

Investigaciones similares se llevaron a cabo para los cuaterniones. Hemos visto que William Rowan Hamilton estaba en estrecho contacto con el trabajo de J.T. Graves y De Morgan. Estaban familiarizados con las investigaciones de Ohm. Como Cauchy y otros, Hamilton reconoció el gran inconveniente que surge de la multiplicidad de los valores logarítmicos. "..., Pero ha sido mi objeto, en la presente teoría, de impedir, hasta donde pude, *mostrar la indeterminación por definición". Hamiltón.*

Una de las dificultades en el desarrollo de Hamilton de la teoría general del quaternion, es el álgebra del espacio y es descrito por él de la siguiente manera:

En la presente teoría de cuaterniones diplanar, no podemos esperar encontrar que la suma de los logaritmos de los dos factores propuestos deberán ser generalmente igual al logaritmo del producto; pero para el caso más simple y fácil de cuaterniones complanares, la propiedad algebraica puede considerarse que existe, con modificaciónes debido a la multiplicidad de valores.

Esta dificultad más recientemente ha recibido la atención de Alexander Mac-

Farlane. Quien señala que en el álgebra del plano no hay necesidad de especificar el eje de rotación de un ángulo circular, como el e^{ib}. Es diferente en el espacio. Cuando los ángulos en una esfera se consideran, el eje debe ser insertado, y también $\pi/2$ para el indefinido i (1). Si por α^a nos referimos a como radianes alrededor del eje α, α^1 significa 1 radián alrededor α.Aquí $\alpha^1 = \alpha^{\pi/2}$ and $\log\ \alpha^a = a \log\ \alpha^1 = a\alpha^{\pi/2}$. De dónde $\alpha^a = e^{a \log_e \alpha^1} = e^{a\alpha^{\pi/2}}$. Ahora Hamilton adoptado el principio de que, en notación Macfarlane $\alpha^{\pi/2}\beta^{\pi/2} = -\cos\alpha\beta + \sin\alpha\beta[\alpha\beta]^{\pi/2}$, where $[\alpha\beta]$ s, donde [αβ] significa la unidad que normal para α y β. Macfarlane, por otra parte, adopta el principio de $\alpha^{\pi/2}\beta^{\pi/2} = -\cos\alpha\beta - \sin\alpha\beta\,[\alpha\beta]^{\pi/2}$. Mediante esta modificación Mac Farlane puede establecer este espacio algebraico con un teorema simple, que Hamilton no lo pudo derivar de su supuesto, $\log\,(e^{a\alpha^{\pi/2}} \cdot e^{b\beta^{\pi/2}}) = a\alpha^{\pi/2} + b\beta^{\pi/2}$.

GENERALIZACIONES Y MEJORAS EFECTUADAS DURANTE EL SIGLO XIX.

UNIFICACIÓN

Sin el uso de la función logarítmica, la interpretación de la potencia $z^y = w$ se complica en el simple caso cuando z es negativo y Y es real. Para valores enteros de y, w se convierte entonces alternamente en $+$ y en $-$, mientras que para valores racionales m/n, w frecuentemente se convierte en imaginario, y el par de valores (z, w) todo en conjunto, no producen ninguna curva continua. En esta etapa la función logarítmica se introduce con gran ventaja a través de la relación $z^{m/n} = e^{m/n \log z}$.
Aquí la expresión $z^{m/n}$ sin valorar n se convierte en una función importante del log z.
Decimos que $z^y = w$ ha sido <u>unificada</u>. Esto es w, en el caso cuando $y = m/n\, n$ sin valor en la función de z, se convierte en un valor de la función de z. La función $log\, z$ es una función unificada. Si miramos hacia atrás, vemos que los primeros vestigios de uniformización se produjeron en el siglo XVIII, pero solo hasta hace poco el proceso fue

formalmente introducido en el análisis como un *método conciso* (1). Cuando en $z^{y} = w$, y es una constante real o irracional, cuando y es una constante compleja y z es una variable compleja, entonces w es una función de un número infinito de valores de z. En estos casos, la uniformización $w = z^{y} = e^{y \log z}$ es todavía más notoria, ya que w proviene de un número infinito de valores en función de z para un solo valor en función $log\ z$.

PRINCIPALES VALORES DE LAS POTENCIAS Y LOGARITMOS. NOTACIONES PROPUESTAS

Pocas investigaciones sobre nuestro tema, realizadas durante el siglo XIX son de mayor importancia que las que introducen la idea de valores principales y sugieren notaciones adecuadas. El líder de este movimiento fue el gran matemático francés, Augustin-Louis Cauchy.

En el *Curso de análisis*, Cauchy introduce notaciones diseñadas para facilitar las operaciones con potencias generales, raíces y logaritmos. Para designar cualquier ($i, e,$ todos) de los valores, el usa $((\alpha + \beta\sqrt{-1}))^{1/n}$, siendo n un número entero. Tomando m y n como números enteros positivos, relativamente primos, y utilizando la trigonometría encuentra los valores $((\pm 1))^{n}$, $((\pm 1))^{m/n}$, $((\pm 1))^{-m/n}$, así como la diferentes potencias de $\alpha + \beta\sqrt{-1}$. El sugiere también el uso de paréntesis dobles para funciones trigonométricas inversas, por lo tanto, arco sin $((a))$. Para los valores principales se utilizan los símbolos comunes $(\pm a)^{m/n}$, $\text{arc sin } (a)$. Para L ((x)) expresa alguna (i, $e.$., todos) de los logaritmos de los números x reales o complejos, para la base de A. Cuando la base es e, se escribe $l\ ((x))$; $l(2)$ representa el real, logaritmo natural del número.

$, l((\alpha)) = l(-\alpha) + l((-1))$
$= l(-\alpha) \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1},\ k = 0,\ \pm 1,\ \cdots.$ If $\alpha + \beta\sqrt{-1} = \rho(\cos\ \theta$

Luego Cauchy (2) escribe, $l((\alpha + \beta\sqrt{-1})) = l(\rho) + \theta\sqrt{-1} + l((1)),$

θ recibe algún valor que se ajusta a los valores dados de seno y coseno.

Por otra parte $l(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = l(\rho) + \theta\sqrt{-1}$, donde θ es alguno de un número infinito de arcos. Encuentra que $L(x) + L(y) + \cdots = L(xy\cdots)$ se cumple sólo cuando la parte real de cada número complejo $x, y \cdots$ es positivo, que la fórmula $L(x^{\mu}) = \mu L(x)$ se cumple sólo cuando α in $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ es positivo, y u por $arc\ tg\ \alpha/\beta$ se encuentra entre $-\pi/2$ y $pi/2$, u es real. Esta notación se explica también al inicio de los *Ejercicios mathématiques* de Cauchy, Paris, 1826. Más tarde Cauchy encontró que su definición de $l(x)$ es insatisfactoria desde el punto de vista de la continuidad de la función $l(x)$. De ahí que en 1846 se sugirió la siguiente modificación de la definición: $l(x) = l(\rho) + \theta\sqrt{-1}$, donde θ se permite variar entre $-pi$ y $pi. -pi$ en sí está excluido, pero incluido $+pi$. De la misma manera $(x)^{m}$ o x^{m} se definió como $\rho^{m}e^{m\theta\sqrt{-1}}$, con las mismas restricciones en θ. Recomendaciones similares se hicieron en la misma época por E.G. Bjorling en Suecia.

Otros autores eligieron diferentes restricciones para el argumento θ. Así, John Warren en 1829 adoptó la convención $0 < \theta < 2pi$.
En 1847 A. Cayley modifica un poco la definición de Cauchy de los valores importantes. Asume que sean $(x+iy)^m = \rho^m e^{im\theta}$ cuando x es positiva, y $(x+iy)^m = \rho^m e^{im(\theta \pm \pi)}$ cuando x es negativo, θ que se encuentra entre $+\,pi/2$ y $-pi/2$, y el $(+)$ o $(-)$ se toman para $(+)$ o $(-)$ según como y sea $(+)$ o $(-)$. Para logaritmos, Cayley da como valores principales, $log\,(x + iy) = log\,p + i\theta$ cuando x es positivo, y $log(x + iy) = log\,p + i(\theta = -pi)$ cuando x es negativo. Afirma que estos son valores principales que satisfacen las ecuaciones $(x+iy)^m(x'+iy')^m = \underline{[(x+iy)(x'+iy')]^m}$ y $\log\,(x+iy) + \log\,(x'+iy') = \log\,[(x+iy)(x'+iy')]$. En un segundo documento (1) del año 1856 establece que esta última ecuación no siempre se cumple, e investiga las causas de la falla. En 1869 se publicó un artículo de Cayley, *sobre los logaritmos de las cantidades imaginarias,* en el que trata principalmente "seleccionar" los valores, adoptando $-\,pi$ y $+\,pi$ como los límites angulares.
El término alemán para el valor principal es *Hauptwert*, un término usado por Karl Weierstrass en sus conferencias sobre trascendentes abelianos entregados alrededor de 1875 en Berlín. Cauchy había tomado, como el principal valor de $\sqrt{a+bi}$, el valor cuya segunda coordenada tiene el mismo signo que la segunda coordenada b, en a + bi. Weierstrass modificó esta definición, por lo que el valor principal de $\sqrt{a+bi}$, es el "positivo"(3) valor de la raíz cuadrada, la condición de que $a + bi$ es en sí mismo "positivo". Weierstrass llama a + bi "positivo", cuando a es positivo o, si a = 0, cuando b es positivo. Si a+bi es negativo, el valor principal de su raíz cuadrada será $i\sqrt{-a-bi}$, donde $\sqrt{-a-bi}$ es "positivo".
La terminología y la notación de potencias, raíces y logaritmos recibió mayor atención de Cauchy en 1846. Cuando las variables en una función se extienden de los valores reales a los imaginarios, la notación y las fórmulas utilizadas para variables reales no pueden ser conservadas, a menos que se adopte nuevos arreglos para fijar el significado de la notación para imaginarios. Puesto que un número tiene una infinidad de logaritmos, no se puede representar todos en una y la misma notación sin introducir una confusión en el cálculo. Se establece que Lx para logaritmo natural de x en el que el coeficiente de x de $\sqrt{-1}$ se encuentra entre $+pi$ y $-pi$, el límite inferior está excluido. Usando de Lx para el logaritmo en cualquier sistema, se tiene $Lx = Le^{lx},\ x^a = e^{alx},\ x^y = e^{ylx}$. . Con la restricción estas funciones son en general, funciones continuas de x para los valores reales y complejos de las variables. Estos valores Cauchy los llama *logaritmo principal*, *potencia principal*, usó de manera similar el término *raíz principal*. Parte de esta terminología fue sugerida por primera vez por E. G.Bjorling.
La notación $((1))^x$ fue utilizada en 1845 por T. Wittstein de Hannover en una prueba de que cada ecuación tiene una raíz. Fue utilizada en 1856 por el suizo, h. Kinkelin y es utilizado por O. Stolz y J.A. Gmeiner en su conocida obra, ARITMETICA TEORICA.

Como contrapartida a la notación de Cauchy para la potencia general, G. Peano ha introducido la notación $\sqrt[m]{*a}$ para designar a todos los valores que la raíz m-ésima de a puede tomar

Cauchy discute el límite hacia el que $(1 + z/m)^m$ converge, para los valores crecientes de enteros positivos de la variable m, cuando z puede ser un número complejo.

Este valor límite, que se muestra, de existir, se presta para la definición de la función exponencial e^z. De ello se deduce que el e^z . $e^{z`} = e^{z+z'}$. Cauchy procede a generar la potencia, en la que tanto la base y el exponente son complejos, o *cantidades geométricas* como Cauchy las llama aquí (1). Si z y u son tanto complejos, entonces z^u necesita una definición; lo hace por la ecuación $z^u = z^{ul\,(z)}$. Esta definición incluye, como casos especiales, en el desarrollo menos general previamente discutido por Cauchy. Afirma que E.G Bjorling ha dado la misma definición de z^U y A introducido el término alimentación principal. Este término adoptado por Cauchy, sólo se le atribuye al argumento P en $Z^u = r^n e^{upi}$ valores entre $-pi < p <= pi$, mientras que Bjorling establecer los límites $(pi/2) + pi > p >= (pi/2) - pi$. Por el sistema de Cauchy, dos números complejos conjugados elevados a las potencias indicadas por los números conjugados, respectivamente, obtiene los valores principales, cantidades complejas las cuales son las mismas conjugadas.

Aunque la notación exponencial de Descartian es excelente en toda la escritura ordinaria y la impresión, es insatisfactoria para exponentes complicados. Cambios en la notación han sido propuestos por De Morgan al final de su cálculo de funciones, en el Encyclopwedia Metropolitana (1843), y también en un artículo publicado en Cambridge Phitlosophical Transaction, y más tarde por J.W.L. Glaisher. De Morgan ilustraría "*una raíz de la potencia* $(a + bx) / (c + dx)$" por lo tanto, $a\ y\ \{(a + bx) / (c + dx)\}$.

Glaisher igualmente sugiere el uso de las flechas la cuales prefiere en una tercera notación que se le había ocurrido, es decir, la impresión de a^u como a $Exp.u$. Esta última notación es la utilizada por A. Cayley en su artículo "Función" en la Enciclopedia Británica, 9 ª edición, 1879. Él escribe e^u como $exp.u$. Esta notación ha encontrado una amplia aceptación en los trabajos sobre la teoría de funciones.

Algunas novedades en notación logarítmica se sugirieron en Alemania, pero no fueron adoptadas. Ya en 1786 Abel Biirja (4) indica que el logaritmo inverso de $23 = 8$ por la notación $8//2 = 3$. En 1811 Rothe (5) utiliza los símbolos $8?2$, los cuales fueron adoptadas en 1823 por Martin Omh. En 1860 Kopp defendió por la tercera notación que no se puede representada con el tipo común. Su sugerencia se opone por F.A. Stadnicka de Prag. La necesidad de una nueva notación para logaritmación no es evidente, lo de siempre "$log2$ 8" parece satisfacer las necesidades comunes.

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS LOGARÍTMICOS.

Una curiosa clasificación de los sistemas logarítmicas de números reales positivos se basan en Hessel, de la Universidad de Marburg, en el teorema de quesi… $a > \sqrt[e]{e}$, where $e = 2.718\cdots$ and $\sqrt[e]{e} = 1.4445\cdots$, then $a^x > x$ for all (real) para todo valor real de x. En su primer grupo de sistemas logarítmicos, cada número es mayor que su logaritmo (tabular), como debe ser cierto cuando la base de $a > \sqrt[e]{e}.$; En su segundo sistema de la base de $a = \sqrt[e]{e};$; aquí hay un número, nombrado e, que es igual a su logaritmo propio, pero todos los otros números son menores que sus respectivos logaritmos. En su tercer grupo de sistemas, en el que cada base de $a < \sqrt[e]{e}$, algunos de los números son más grandes, otros son más pequeños que sus logaritmos respectivos, mientras que en un número hay una igualdad entre los dos.

Una clasificación general y más fundamental fue dada en 1892 por Irving Stringham de la Universidad de California. Fue modificada en parte por MW Haskell y Stringham, y formulada por Stringham en su Algebra Uniplanar, San Francisco, 1893. En el diagrama de Wessel-Argand, números complejos se representan mediante vectores dibujados desde el origen a los puntos en una espiral logarítmica; los logaritmos de estos números se representan mediante vectores desde el origen a los puntos en una línea recta. La base es el vector particular dibujado a la espiral que se corresponde con el vector (1) dibujado a la línea, el módulo es, en general, un número complejo. Sistemas logarítmicas se clasifican como sistemas gonic y agónica, según que el módulo es un número complejo o un número real.

LOGARITMOS COMO FUNCIONES DIRECTAS.

Es posible acercarse a los logaritmos, no desde el punto de vista de las funciones inversas, pero desde el punto de vista de las funciones directas, fue reconocido a principios del siglo XVIII. John Bernoulli I, en su correspondencia con Leibniz, comenzó a partir de la ecuación diferencial $dx/x = -dx/-x$ y de ahí deduce $log\,x = log\,(-x)$. Esta operación presenta la función logarítmica como una integral, pero lo aborda bajo el defecto de no hacer la integral definida. Ideas claras sobre este tema expuestas por Gauss quien en una carta del 18 de diciembre de 1811, dirigida a Bessel, establece la importancia de of $\int_1^x dx/x$ in the Wessel-Argand en el plano de Wessel, Argand como una función de infitos valores de variable compleja. Este punto de vista ha sido presentado en las obras sobre la teoría de funciones.

En 1869 se publicó un artículo por Cayley, en logaritmos de cantidades imaginarias en el que se define el logaritmo como una integral definida y la potencia general a^b se define como la inversa de la función logarítmica. Gran parte del mismo curso fue perseguido en 1902 por JW Bradshaw. Un cambio radical es defendido por Felix Klein. Después de discutir las dificultades encontradas en la definición de un logaritmo en la ecuación $a^b = c$, se va tan lejos como para recomendar que, para los fines de la instrucción escolar, el logaritmo se define como una integral y estar conectado con las áreas asintóticas de la hipérbola equilátera. Declara que la fuente adecuada para la introducción de nuevas funciones es la cuadratura de las curvas conocidas. Este programa se elabora con más detalle en un artículo de C. Frenzel.

Una teoría puramente analítica de la función logarítmica, distante de la geometría, fue desarrollada en 1891 por Ch. Meray de Dijon. A su juicio, la función logarítmica es resultado de la integración y llegó a la función exponencial al resolver la ecuación para $log\,u = x$.