

Análisis y Formalización del Proceso de Colapso Gravitacional en el Marco de la Teoría General de la Relatividad

Paula Alejandra Cardona Torres

DIRIGIDO POR:

Msc. Yesid Cruz

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN:

La enseñanza de la física a partir de la relación Física y Matemática

Monografía de grado para optar por el título de Licenciada en física

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN FÍSICA
BOGOTÁ D.C
2016

“...Esa trama de tiempos que se aproximan, se bifurcan, se cortan o que secularmente se ignoran, abarca todas las posibilidades. No existimos en la mayoría de esos tiempos; en algunos existe usted y no yo; en otros, yo, no usted; en otros, los dos. En éste, que un favorable azar me depara, usted ha llegado a mi casa; en otro, usted, al atravesar el jardín, me ha encontrado muerto; en otro, yo digo estas mismas palabras, pero soy un error, un fantasma...”

Jorge Luis Borges.

El jardín de senderos que se bifurcan, Ficciones, 1944.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer a mi familia por creer y confiar en mí: A mi mamá y papá por su lucha constante, amor, confianza y por cada una de las enseñanzas que me han proporcionado a lo largo de mi vida y que me han permitido llegar hasta este punto; porque sin lugar a duda han sido un ejemplo claro de la perseverancia, humildad y voluntad. También agradezco a mis hermanas, Jhohana y Dayana, quienes han estado junto a mí en todo este proceso; por su cariño, paciencia, exigencia y por darme ánimos cuando las cosas no parecían estar bien. A mi abuela, Lorena, Michel, por su apoyo, por valorar mi esfuerzo y todos sus consejos. A todos ellos, mi familia, gracias infinitamente.

De igual manera, quiero agradecer al profesor Yesid Cruz, por su confianza, comprensión y paciencia, porque sus enseñanzas han sido para mí muy valiosas no sólo en mi desarrollo como profesional y académico, sino también personal. Además, agradezco en general a todos los profesores que me acompañaron durante este proceso, por darme las herramientas necesarias para poder ejercer esta profesión de la mejor manera.

A mis amigos, John y Miguel gracias por estar conmigo incondicionalmente, por su comprensión, constancia y cariño, por todos los momentos que hemos compartido, porque sin lugar a duda han dejado en mí muy gratos recuerdos. También, quiero agradecer a Pablo, Camilo, Valeria y Astrid por los momentos que hemos pasado, por las sonrisas, por su comprensión, por todo su cariño y apoyo, que realmente ha sido tan importante para mí durante este tiempo.

Paula A. Cardona

Resumen

Las primeras hipótesis que se plantearon sobre el colapso gravitacional fueron realizadas en el siglo XVIII por el filósofo natural británico John Michell y el físico francés Pierre-Simon Laplace. Sin embargo, estas ideas fueron estudiadas de forma rigurosa en el siglo XX gracias a la Teoría General de Relatividad que planteó Albert Einstein (1915), ya que permitió abrir una nueva perspectiva frente a la descripción de los fenómenos gravitacionales y ampliar el campo de investigación en la astrofísica y cosmología. A partir de la TGR, se realizaron diversas investigaciones que permitieron construir modelos más precisos del colapso estelar y a su vez reafirmar las hipótesis propuestas por Michell y Laplace. Así pues, uno de los modelos más importantes que se conoce sobre la implosión gravitatoria mediante las ecuaciones de campo de Einstein, fue realizado por Oppenheimer y Snyder (1939), en el cual describen el proceso de colapso de una estrella masiva y sus implicaciones dentro de la TGR. De esta manera, el siguiente trabajo hace un análisis del proceso de colapso estelar, mediante un análisis y formalización de los sucesos físicos que dan lugar a estos eventos en el universo mediante la Teoría General de la Relatividad.

Palabras clave: Relatividad general, colapso gravitacional, solución de Schwarzschild, estrellas masivas.

Índice general

Resumen	III
Lista de Símbolos	VI
Lista de Figuras	VIII
Introducción	VIII
1. Relatividad General	13
1.1. Contexto Histórico	13
1.2. Ecuaciones de Campo	16
1.3. Solución de Schwarzschild	19
1.3.1. Coordenadas de Kruskal-Szekeres	21
1.3.2. Coordenadas de Finkelstein-Eddington	24
1.4. Tensor energía-momento para un fluido perfecto	27
2. Introducción a la Evolución Estelar	29
2.1. Diagrama de Hertzsprung-Russell	29
2.2. Estructura Estelar	31
2.2.1. Equilibrio hidrostático	31
2.3. Límite de Chandrasekhar	33
2.4. Límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff	35
3. Colapso Gravitacional	38
3.1. Colapso gravitacional	38
3.2. Modelo de Oppenheimer-Snyder	41
3.3. Dilatación gravitatoria de tiempo	43

3.4. Desplazamiento al rojo gravitacional	45
3.5. Modificación de la estructura causal	47
4. Análisis del Colapso Gravitacional	52
4.1. Cálculo desplazamiento gravitacional al rojo	52
4.2. Cálculo dilatación gravitacional del tiempo	56
4.3. Posibles resultados del colapso gravitacional	59
4.4. Agujeros Negros	61
Conclusiones	66
Referencias Bibliográficas	68
I Anexos	73
Coordenadas de Kruskal-Szekeres	74
Coordenadas de Finkelstein-Eddington	76
Dilatación gravitacional del tiempo desde la TGR	77
Desplazamiento gravitacional al rojo mediante la TGR	80
Tabla de datos: Desplazamiento al Rojo y Dilatación del tiempo	82

Lista de Símbolos

Subíndices

Subíndice	Término
$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$	Símbolos de Christoffel
g_{ik}	Tensor métrico
R_{jkl}^i	Tensor de Riemann
R_{kl}	Tensor de Ricci
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
R	Escalar de curvatura

Constantes

Constante	Término
G	Constante de gravitación universal
Λ	Constante cosmológica
c	Velocidad de la luz
M_{\odot}	Masa Solar
R_{\odot}	Radio Solar

Abreviaturas

Abreviatura	Término
TER	Teoría Especial de la Relatividad
TGR	Teoría General de la Relatividad
LTOV	Límite de Tolman, Oppenheimer, Volkoff
CF-E	Coordenadas de Finkelstein-Eddington

Constantes físicas

Constante	Valor
G	$6,673 \times 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$
c	$2,99792458 \times 10^8 ms^{-1}$
M_{\odot}	$1,9891 \times 10^{30} kg$
R_{\odot}	$6,95508 \times 10^8 m$

Índice de figuras

1.1. Curvatura espacio-temporal por el sol (izquierda) y una estrella de neutrones (derecha)	15
1.2. Curvatura espacio-tiempo debido a la presencia de una masa.	21
1.3. Diagrama de Kruskal-Szekeres: Extensión espacio-tiempo de Schwarzschild	23
1.4. Diagrama espacio-tiempo: Coordenadas de Finkelstein-Eddington	26
2.1. Diagrama de H-Z	30
2.2. Equilibrio Hidrostático	32
3.1. Cono de luz	48
3.2. Conos de luz en la TER	49
3.3. Conos de luz en la TGR	49
3.4. Conos de luz en la solución de Schwarzschild	50
3.5. Comportamiento de los conos de luz en las CE-F	51
4.1. Diagrama E-T del colapso de una estrella: Variación de los conos de luz .	56
4.2. Estado final de las estrellas de acuerdo a su masa inicial	61
4.3. Colapso gravitacional: Formación de un agujero negro	65

Introducción

Durante los siglos XIX y XX se desarrollaron diversas investigaciones que transformaron de forma contundente la ciencia y tecnología. Estos avances científicos permitieron abrir la posibilidad de dar una explicación más profunda sobre el comportamiento de la naturaleza, ya que se plantearon nuevas perspectivas frente a la comprensión de los fenómenos gravitatorios y atómicos. Uno de estos avances científicos, fue la Teoría general de la relatividad propuesta por Albert Einstein (1879-1955) en el año 1915, la cual revolucionó de forma radical las concepciones previas que se tenían sobre la gravitación como: la teoría de gravitación universal y la teoría de campos; puesto que instauro que la gravedad es un resultado de la geometría curva del espacio-tiempo que produce cierta cantidad de materia y/o energía.

Esta teoría, ha permitido no sólo dar explicación a los diferentes fenómenos gravitacionales, también gracias a su estudio se han realizado nuevos planteamientos acerca del origen y desarrollo del universo. Sin embargo, tales ideas han podido evolucionar gracias a las observaciones que se desarrollaron tras los progresos tecnológicos que se dieron en la segunda mitad del siglo XX, donde la tecnología tuvo un auge significativo produciendo así, un avance importante en la ciencia, especialmente en el campo de la astrofísica y la cosmología.¹ De esta manera, una de las investigaciones más significativas que se realizó a mediados del siglo XX en la astrofísica -particularmente-, fue acerca de la estructura y evolución estelar, donde se indagó sobre la posible formación, composición y muerte de las estrellas. Algunos de los científicos que hicieron grandes contribuciones en esta área de estudio fueron: Sir Arthur Eddington (1882-1944), Robert Oppenheimer (1904-1967),

¹Sánchez, R. (2008). *“El mundo después de la revolución: La física de la segunda mitad del siglo XX”* Fronteras del conocimiento. Madrid: España pp. (63-91)

Subrahmanyan Chandrasekhar (1910-1995), John Archibald Wheeler (1911-2008), entre otros; quienes tras algunos resultados teóricos y experimentales, llegaron a la hipótesis de que las estrellas durante gran parte de su vida, se encuentran en un estado de “lucha” para mantener en equilibrio las fuerzas que allí se encuentran (que son la fuerza gravitacional y la fuerza de presión²); debido a que las estrellas pueden sufrir colapsos gravitacionales cuando la atracción gravitacional hacia su centro es mayor que la presión que la contrarresta.

Aun así, las primeras hipótesis que se tuvieron acerca del colapso gravitacional, fueron propuestas en el siglo XVIII por parte del filósofo natural británico John Michell (1724-1793) y el físico francés Pierre-Simon Laplace (1749-1827), a través de algunos estudios mediante la mecánica de Newton. A partir de ello, Michell planteó que para una estrella de masa estática, existe una circunferencia determinada en la que la velocidad de escape de un corpúsculo de luz -que era la idea que planteaba Newton sobre la composición de la luz- debe ser muy alta para escapar de la atracción gravitacional hacia la superficie de la estrella; razón por la que la estrella dejaba de emitir luz, convirtiéndose así en una estrella oscura con una densidad alta.³ Aunque esta idea fue revocada, siglos después mediante la TGR, se pudo dar cuenta de la existencia de dicha circunferencia crítica que había predicho John Michell en el siglo XVIII. Pues en 1916 el astrofísico alemán Karl Schwarzschild (1873-1916) proporcionó una solución a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío,⁴ en la que da cuenta de la existencia de una circunferencia crítica (denominada radio de Schwarzschild) para las estrellas, la cual depende en gran medida de su masa, ya que cuanto más pequeña y densa sea la estrella, mayor es su atracción gravitacional y por ende, si ésta fuerza es mayor que todas las de su interior -como la presión-, llega a una situación en la cual la estrella se comprime “completamente” hasta colapsar y formar un agujero negro, es decir una estrella oscura tal como instauraba Michell.

²La presión en este caso, puede ser de radiación o degenerativa para las estrellas más compactas

³Las *estrellas oscuras* o *estrellas invisibles* se puede decir que eran la versión newtoniana de los agujeros negros.

⁴Schwarzschild proporcionó la primera solución de las ecuaciones de campo cuando servía en el frente militar en Rusia durante la primera guerra mundial (1914-1918). Murió ese mismo año debido a una enfermedad llamada pénfigo.

Uno de los primeros modelos matemáticos que se presentaron del colapso gravitacional estelar a partir de la TGR, fue el realizado por R. Oppenheimer y H. Snyder en 1939⁵. En este trabajo, ambos científicos establecieron que, una estrella al implosionar bajo su propia atracción gravitatoria y a medida que se aproxima al radio de Schwarzschild, va generando una gran curvatura espacio-temporal. Así pues, dedujeron que durante este proceso, la radiación de luz emitida por la estrella va desplazándose cada vez más hacia el rojo hasta que va desapareciendo poco a poco del visible. Además, las mediciones del tiempo durante el proceso de colapso gravitatorio, diverge en un sistema de referencia externo y uno comóvil, es decir que implosiona junto con la estrella. A su vez, dedujeron que tras pasar dicha circunferencia crítica, la estrella continúa en este proceso de colapso hasta formar un punto con densidad infinita denominada singularidad espacio-temporal, la cual se encontraría entonces dentro de un agujero negro.⁶ (Thorne, 1994)

Con respecto a ello, el siguiente trabajo se divide en cuatro capítulos:

- Capítulo I: “Relatividad General”, se dan a conocer algunos aspectos globales de la teoría general de la relatividad a partir de una contextualización histórica que permite reconocer la evolución que tuvo esta teoría, junto con el impacto en el auge de nuevas teorías. Luego de ello, se realiza una descripción de las ecuaciones de campo de Einstein junto con la caracterización de la primera solución exacta: La solución de Schwarzschild. A partir de ello, se realiza una explicación de las coordenadas de Kruskal-Szekeres y Finkelstein-Eddington. Por último, se señala de forma introductoria el modelo de estrellas bajo la TGR, razón por la que se introduce una descripción del tensor energía-momento para un fluido perfecto.
- Capítulo II: “Introducción a la evolución estelar”, se realiza de manera general una caracterización de los aspectos más relevantes de la teoría de la evolución estelar.

⁵Oppenheimer, R y Snyder,H. (1939). “*On Continued Gravitational Contraction*” Physical Review. Vol.(56) pp. (455-459)

⁶Aunque la idea inicial de la existencia de agujeros negros fueron instauradas durante el siglo XVIII con el nombre de estrellas invisibles o estrellas oscuras, fue hasta la década de los sesenta del siglo XX que estos objetos fueron investigados de forma más profunda gracias al desarrollo de la TGR, pues en esta época denominada “la edad de oro”, se pudo hallar algunas propiedades que estos cuerpos pueden tener como carga, rotación, pulsaciones, entre otras.

Así pues, se inicia con la interpretación del diagrama de Hertzsprung-Russell, seguido de una explicación sobre el equilibrio hidrostático que deben tener las estrellas. Luego, se definen los límites de Chandrasekhar y el de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, señalando sus implicaciones dentro de la TGR, además de los modelos estelares y su importancia en el desarrollo del modelo de Colapso gravitacional.

- Capítulo III: “Colapso gravitacional”, se introducen algunos antecedentes acerca de los trabajos del colapso gravitacional y el desarrollo que tuvieron tales hipótesis en el siglo XX. A partir de ello, se plantea una descripción del primer modelo de colapso gravitacional desde la TGR: El modelo de Oppenheimer-Snyder. Seguidamente, se realiza un análisis físico-matemático frente a los efectos que se desprenden de dicho modelo desde la TGR para el colapso gravitacional, tal como es la dilatación del tiempo, el desplazamiento al rojo y la estructura causal.
- Capítulo IV: “Análisis del Colapso Gravitacional”, a través de un estudio de datos, se realiza un cálculo sobre el desplazamiento al rojo y la dilatación de tiempo para estrellas de diversas masas. Luego, se describe de manera global los posibles resultados de la implosión estelar, bajo un modelo más real de estrella. Finalmente, se realiza una introducción a los agujeros negros, que son resultado de un colapso gravitacional completo.

Este trabajo, es una propuesta que contribuye al campo de la enseñanza y de la propia disciplina; ya que es relevante que se reconozcan estos tópicos de la astrofísica como conocimientos significativos dentro de la educación y en el proceso de formación de docentes en física. Por esta razón, es importante que desde la Universidad Pedagógica Nacional, se rescate la importancia de estas temáticas desde las cuales se pueden impulsar nuevas producciones e investigaciones científicas que ayuden a dinamizar este campo, generando así espacios dentro de la escuela en el que se den a conocer los desarrollos teóricos que se dieron durante el siglo XX y su importancia en el auge de las nuevas tecnologías; más aún es una forma de dar a conocer un panorama más amplio sobre las investigaciones que se realizaron a la luz de la teoría de la relatividad de A. Einstein y a su vez abre nuevas perspectivas frente a la labor docente y su rol en la escuela como ser social, reflexivo y crítico.

Capítulo 1

Relatividad General

En este capítulo, se realiza una descripción de la TGR propuesta por Albert Einstein señalando algunos aspectos históricos generales, las ecuaciones de campo de Einstein, la solución de Schwarzschild.

1.1. Contexto Histórico

En la primera mitad del siglo XX, se llevaron a cabo dos grandes revoluciones científicas en el campo de la física las cuales permitieron abrir nuevas concepciones y teorías acerca de algunos fenómenos físicos tales como la gravitación y la estructura de la materia. Estos “cataclismos cognitivos” como afirma Sánchez (2008), están asociados con la formulación de la teoría especial y general de la relatividad por Albert Einstein y la mecánica cuántica por Heisenberg y Schrödinger[13].

Particularmente, en el año 1905 A. Einstein instaura la TER a través de la publicación de un artículo en el que planteó las primeras definiciones referentes a la simultaneidad, la constancia de la velocidad de la luz y la relatividad en las mediciones de la longitud y el tiempo [3]. Tales ideas, que a la vez argumentaban esta teoría trajeron consigo resultados que, como señala Sánchez, transformaron de forma contundente algunos conceptos que ya estaban consolidados en la física como: el espacio y el tiempo; pues Einstein los unió formando un solo espacio-tiempo. Por esta razón, uno de los aportes más significativos de la TER fue la constancia en el valor de la velocidad de la luz, la equivalencia entre masa

y energía que se mostraba en la ecuación $E = mc^2$ y el espacio-tiempo tetradimensional [14]. Más aún, los sistemas de referencia –inercial- cobraron un papel importante a la hora de establecer la dependencia de los observadores ahí situados con la simultaneidad de acontecimientos o la medida longitudes.

Sin embargo, es importante señalar que Einstein realizó importantes contribuciones a la física no sólo al instaurar la teoría de la relatividad, sino también por realizar aportes en el campo de la física estadística y la mecánica cuántica gracias a sus trabajos sobre el movimiento browniano y el efecto fotoeléctrico¹ que realizó hasta 1911. Empero, tras efectuar estos estudios, Einstein se centró en buscar una teoría de gravitación que fuese compatible con la TER, ya que la teoría de gravitación universal de Newton no satisfacía algunos requisitos de ella, como por ejemplo: la invariancia de Lorentz² (Sánchez, 2005); esto, pese a que la teoría de Newton junto con las leyes de movimiento dieron paso a la mecánica celeste, que explicaba el movimiento de los cuerpos celestes bajo la atracción gravitacional.³

Aun así, en 1907 Einstein realiza sus primeras apreciaciones frente a los sistemas de referencia no inerciales y campos gravitacionales a partir de la siguiente cuestión: “Ist es denkbar, daß das Prinzip der Relativität auch für Systeme gilt, welche relativ zueinander beschleunigt sind?”⁴(p.454); esta pregunta junto con sus famosos “Gedankenexperiment” (experimentos mentales), lo conllevaron a plantear el principio de equivalencia⁵, que señala la proporcionalidad entre la masa inercial y gravitatoria. A partir de este y otros

¹En 1922, la Real Academia Sueca de las ciencias, condecoró a Einstein con el nobel de física de 1921 por sus trabajos referentes al efecto fotoeléctrico, que se había dado a conocer en sus primeros artículos de 1905: Einstein, A. *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt* Annalen der Physik. Vol 17. pp. (132-148)

²Este principio señala que, las leyes de la física deben tomar la misma forma en cualquier sistema de referencia inercial.

³Además de no cumplir con algunos principios de la TER, la mecánica celeste no proporcionaba solución a algunos problemas como: la precesión del perihelio de Mercurio, la curvatura de la luz, entre otros. Véase en: Sánchez, J (1985). “Origen y desarrollo de la relatividad” Capítulo VIII

⁴En español: ¿Es concebible que el principio de la relatividad se aplique también para los sistemas que son acelerados respecto a otros?

⁵Esta fue por Einstein denominada “La idea más feliz” de su vida, ya que sentó las bases de la TGR.

estudios, Einstein llegó a una primera aproximación de la generalización del principio de relatividad para marcos de referencia no inerciales o acelerados[4]; concluyendo así que tal principio de equivalencia abría un nuevo paradigma en cuanto a la geometría del espacio-tiempo, pues tal como afirma él mismo (1922): “The gravitational field influences and even determines the metrical laws of the space-time continuum.” pp.(64), es decir que las propiedades geométricas del espacio-tiempo (teniendo en cuenta la gravedad), los teoremas de la geometría euclidiana no se cumplen, de ahí que su teoría de gravitación requería sentar su base en una geometría curva, con un espacio-tiempo dinámico (Véase: Figura 1.1)⁶[13].

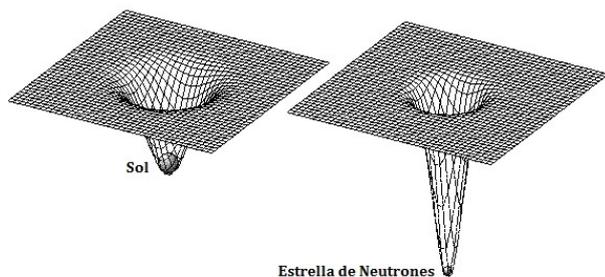


Figura 1.1: Curvatura espacio-temporal por el sol (izquierda) y una estrella de neutrones (derecha)

Así pues, tras un estudio riguroso de casi diez años el 25 de Noviembre de 1915, Einstein da a conocer las ecuaciones que replantearían el concepto de gravedad de Newton y abrían paso a una descripción relativista de los fenómenos gravitatorios, la TGR. Esta teoría hace alusión a la gravedad como una consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo, producto del contenido de materia-energía allí presente tal como se puede apreciar en la

De modo que los cuerpos tales como la tierra, ya no orbitan alrededor del sol debido a la fuerza de atracción que éste ejerce sobre ella, sino que sigue trayectorias geodésicas⁷. De igual manera, plantea que el comportamiento de relojes y reglas varían de acuerdo al campo gravitacional; es decir que existe una dilatación de tiempo en zonas cercanas y lejanas a una concentración de materia.⁸

⁶Imagen tomada de: <http://foros.astroseti.org/>

⁷Las geodésicas, son las líneas más rectas que hay en una geometría curva. Véase en: Wald, R. “General Relativity”. pp. (41)

⁸En 1911, Einstein realiza algunas apreciaciones sobre un disco rígido en rotación ya que este se podía relacionar con un campo gravitatorio de acuerdo con el principio de equivalencia. Así pues, plantea dos sistemas de referencia: K (Inercial), en donde no existe ningún campo gravitatorio y otro K' (En

Por otro lado, las ecuaciones de campo de 1915, señalaban un universo dinámico y no estático como él consideraba, razón por la que agregó a estas ecuaciones *la constante cosmológica* (Λ).⁹ Empero, tras un análisis exhaustivo de estas ecuaciones, algunos científicos llegaron a establecer una mirada más profunda sobre el comportamiento del universo, prediciendo fenómenos como: Los agujeros negros, la expansión del universo, las ondas gravitacionales e incluso plantear una teoría acerca del origen del universo (big bang), que a su vez dieron paso al estudio de la cosmología y la astrofísica¹⁰.

Por esta razón, esta idea revolucionaria de Einstein transformó de forma radical las nociones de la geometría del espacio-tiempo y de la materia; pues, mediante esta teoría se pudo estudiar de forma más contundente y precisa algunos fenómenos en el universo tales como el perihelio de mercurio y la curvatura de la luz, que eran algunas cuestiones que la teoría de Newton no sustentaba. Por otro lado, la importancia que tiene la TGR junto con las demás teorías científicas es realizar un aporte al conocimiento no sólo de las ciencias, sino al conocimiento humano en general y resaltar la relevancia que tiene la indagación acerca del comportamiento de la naturaleza, del universo y más aún, de nuestra propia existencia.

1.2. Ecuaciones de Campo

Para poder establecer las ecuaciones de campo que darían lugar a su nueva teoría de gravitación, Einstein partió del principio de equivalencia que, como afirma Penrose (rotación) en el que existe un campo gravitatorio. De acuerdo con la TER para K existe una variación en la medida del tiempo para los relojes que se encuentran en diferentes zonas del disco en rotación. De esta manera, Einstein generaliza tal hecho para todos los campos gravitacionales, además de establecer que la luz también se ve afectada por el campo gravitacional. Véase en: Einstein (1922). *The meaning of relativity*. United States of America: Princeton University Press. pp. (59-64)

⁹En 1917, A. Einstein presenta a la academia prusiana de las ciencias un artículo en el cual da a conocer la constante cosmológica que agregó a sus ecuaciones de campo: Einstein, A. (1917) *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie* Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften. pp. (142-152)

¹⁰Einstein tras conocer el trabajo de Edwin Hubble sobre la expansión del universo en 1929, afirmó que ésta modificación de sus ecuaciones con esta constante cosmológica había sido “el mayor error” en inglés “The biggest blunder.”

(2006), “puso en marcha toda la línea de pensamiento de Einstein” (p.623). Así, para un observador en caída libre, por ejemplo un astronauta hacia la Tierra, no hay fuerza gravitatoria alguna que deba sentir, en lugar de ello y de acuerdo con la TGR experimenta *fuerzas de marea*, que son una manifestación de la curvatura espacio-temporal. Estas fuerzas de marea, hacen que el astronauta sienta mayor atracción en sus pies (ya que están más cercanos a la Tierra) que en su cabeza, por lo que sentirá que lo estira de pies a cabeza. (Thorne, 1994). A partir de esta idea, era fundamental para Einstein la independencia del sistema de coordenadas, de modo que las ecuaciones de campo debían cumplir con el principio de covariancia y por lo tanto su formalismo debía ser tensorial.

De esta manera, en 1915 Einstein plantea su TGR tras establecer las ecuaciones de campo que redefinían el concepto de gravedad propuesto por Newton. Sin embargo, en su trabajo señala dos requisitos significativos y trascendentales que tales ecuaciones debían tener: [5][12]

- El límite Newtoniano: A pequeñas velocidades comparadas con la velocidad de la luz y en campos gravitatorios débiles, las ecuaciones que describen el campo deben tomar la forma de las descritas en la teoría de Newton (Ecuación de Poisson $\nabla^2\varphi = 4\pi\rho$).
- La densidad de materia descrita por la teoría de Newton (ρ) debe cumplir con el principio de relatividad, por ende se plantea el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$ que permite dar cuenta de la cantidad de materia contenida en el espacio y está sujeto a la ley de conservación ($\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$).

Por esta razón, tras un trabajo exhaustivo de 1905 a 1915 Einstein finalmente plantea las ecuaciones de campo [12]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

o con el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

Una manera de explicar esta ecuación la instauró el físico estadounidense John Archibald Wheeler: “*El espacio-tiempo le dice a la materia cómo moverse y la materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse*”. Pues tal como se ve en la ecuación la parte geométrica está dada por el tensor de Einstein (Lado izquierdo) y la cantidad de materia en el espacio-tiempo por el tensor materia-energía (Lado derecho).

En esta ecuación (1.1), el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ da cuenta de la curvatura causada por la materia y a su vez describe las trayectorias geodésicas que tienen las partículas alrededor de esta concentración de masa. El tensor métrico ($g_{\mu\nu}$) caracteriza no sólo el espacio-tiempo sino también el campo gravitacional, de hecho reemplazan al potencial escalar φ de la teoría newtoniana (Penrose, 2006). Luego, si no hay materia presente, entonces $T_{\mu\nu} = 0$ y por ende $R_{\mu\nu} = 0$; que se denomina ecuación de campo en el vacío y describe la curvatura fuera de la masa. Como se puede observar, esta ecuación en el vacío es análoga a la ecuación de Laplace en la teoría newtoniana $\nabla^2\varphi = 0$.

Más aún, la TGR predecía también soluciones cosmológicas que señalaban un universo no estático. Para resolver esta cuestión, Einstein planteó una constante que le permitiría obtener una solución de un universo estático, esta constante fue denominada Constante cosmológica (Λ). Así pues las ecuaciones de campo teniendo en cuenta esta constante son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

Es relevante mencionar que la TGR abrió paso al estudio de fenómenos gravitacionales, los cuales se estudian mediante las ecuaciones de campo. Las soluciones de estas ecuaciones se pueden establecer como locales y globales. Algunas soluciones globales que tienen en cuenta la ecuación (1.3) han sido planteadas por: George Lemaître (1894-1966), Edwin Hubble (1889-1953), Alexander Friedmann (1888-1925) las cuales han dado lugar a modelos de acerca del origen del universo y evolución del universo. Las soluciones locales expuestas por K. Schwarzschild (1916), H. Reissner (1916) y G. Nordström (1918), R. Kerr y T. Newman (1965) describen objetos -tales como agujeros negros- estáticos, rotantes y con carga eléctrica respectivamente.

1.3. Solución de Schwarzschild

Se conoce como la primera solución exacta de las ecuaciones de Einstein, fue planteada por el astrofísico alemán Karl Schwarzschild (1873-1916) en Febrero de 1916, casi unos meses después de que se diera a conocer la TGR. Esta solución, describe el campo gravitacional externo de una masa que se estima, es puntual de simetría esférica y estática, la cual se encuentra en el origen de un sistema de coordenadas determinado. Para realizar esta solución, Schwarzschild hace las siguientes consideraciones [15]:

1. Todas las componentes del elemento de línea son independientes del tiempo. Ya que la masa puntual se considera estática.
2. Las solución es espacialmente simétrica, es decir permanece invariante bajo transformaciones.
3. Cuando $r \rightarrow \infty$ la solución tiende a ser plana, es decir que toma la forma del espacio-tiempo en la TER (Espacio-tiempo de Minkowski)

Tras un trabajo exhaustivo para establecer el elemento de línea que estuviese acorde con estos tres planteamientos y pudiese describir el efecto en el espacio-tiempo que dicha masa puntual produce, Schwarzschild parte del elemento de línea en coordenadas esféricas:

$$ds^2 = A_{(r,t)}dt^2 - B_{(r,t)}dr^2 - C_{(r,t)}r^2d\theta^2 - D_{(r,t)}r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \quad (1.4)$$

Como se puede observar en la ecuación (1.4) las funciones A , B , C y D dependen de la coordenadas radial y temporal. Empero, al tener en cuenta las condiciones previamente escritas, las funciones deben ser independientes del tiempo; de ahí que, la solución propuesta debe ser radial. También, la metrica espacio-temporal estática en simetría esférica no debe sufrir modificaciones en su parte angular, por ello $C = D = 1$. [19] De esta manera, el elemento de línea resultante es:

$$ds^2 = A_{(r)}dt^2 - B_{(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 - \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1.5)$$

Para que se pudiera cumplir la condición de que la métrica en $r \rightarrow \infty$ se reduzca a la del espacio-tiempo plano de Minkowski (en coordenadas esféricas), era necesario plantear

1.3. SOLUCIÓN DE SCHWARZSCHILD

una función que para la cual fuera exponencial: $A(r) = e^\nu$ y $B(r) = e^\lambda$, además debía cumplir la condición que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nu = \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda \longrightarrow 0 \quad (1.6)$$

En donde ν y λ son funciones de r . Así pues, reescribiendo el elemento de línea se tiene [1]:

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1.7)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que la solución de Schwarzschild describe el campo externo de una masa esférica; se emplean las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío en la que $T_{\mu\nu} = 0$ y $R_{\mu\nu} = 0$. De este modo, a partir del tensor métrico que se deduce de la ecuación (1.7), calculando los símbolos de Christoffel y el tensor de Ricci, se tienen las siguiente componentes no nulas:

$$R_{00} = \nu'' - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{(\nu')^2}{2} + \frac{2\nu'}{r} \quad (1.8)$$

Y

$$R_{11} = \frac{1}{2}(\nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} - \frac{(\lambda')^2}{2} - \frac{2\lambda'}{r}) \quad (1.9)$$

Luego de un tratamiento matemático, se obtiene:

$$e^{\lambda(r)} = (1 - \frac{2m}{r})^{-1} \quad e^{\nu(r)} = (1 - \frac{2m}{r}) \quad (1.10)$$

Teniendo en cuenta este resultado y reemplazando en la ecuación (1.7) se tiene:

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r}) dt^2 - (1 - \frac{2m}{r})^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1.11)$$

Esta solución que se muestra en la ecuación (1.11) fue la que obtuvo Schwarzschild en 1916 y se denomina como la forma “estándar” [20]. Esta solución, predice algunas desviaciones de la teoría de gravitación de Newton para el movimiento de los planetas del sistema solar; da solución a la anomalía del perihelio de Mercurio, pronostica la desviación de la luz, el desplazamiento gravitatorio hacia el rojo y la dilatación gravitatoria de tiempo que es producida por la intensa gravedad de una estrella. (Wald, 1984)

Una característica notable de esta solución es la aparición de regiones singulares cuando $r = 0$ y $r = 2m$, en que parece una circunferencia crítica la cual está determinada por la masa del objeto (Véase: Figura 1.2)¹¹ y fue llamada *radio de Schwarzschild*:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (1.12)$$

Esta ecuación (1.12), da cuenta del radio mínimo que debe tener un cuerpo para que la luz no escape. Así, tal como afirma Thorne (1994) “la superficie de una estrella con su circunferencia crítica es exactamente el horizonte de eventos de un agujero negro” (pp.100-101) en donde se encuentra la singularidad, tal como se observa en la figura 1.2.

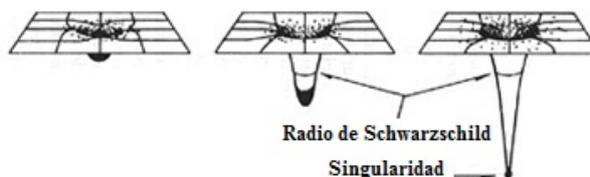


Figura 1.2: Curvatura espacio-tiempo debido a la presencia de una masa.

Paralelamente, señala Wald (1984) la singularidad en $r = \frac{2mG}{c^2}$ es causada por una “ruptura de coordenadas”, mientras que en $r = 0$ la singularidad tiene realidad física. Ya que para $r > 2m$ la métrica describe el campo exterior de estrellas o planetas, mientras que en $r \leq 2m$ presenta singularidad, lo cual parece mostrar dos soluciones totalmente independientes. A partir de ello, se establecieron algunos cambios de coordenadas las cuales permitían cubrir todas las regiones de la solución de Schwarzschild. Éstas son: Las coordenadas de Kruskal-Szekeres y las coordenadas de Finkelstein-Eddington.

1.3.1. Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Las coordenadas de Kruskal-Szekeres, fueron instauradas de forma independiente por M. Kruskal [10] y por G. Szekeres[16] en 1960. Kruskal, por su parte, realizó este trabajo a partir de algunas investigaciones realizadas por Schwarzschild (1916), Einstein-Rosen¹² (1935), Finkelstein¹³ (1958) y Misner, Wheeler¹⁴(1957). Estas coordenadas, proporcionan

¹¹Imagen tomada de: http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen1/ciencia2/50/html/sec_7.html

¹²“The partible problem in the General Theory of Relativity” Phys. Rev. 48 (73-77)

¹³“Past-future Asymmetry of the Gravitational Field of a Point Particle” Phys. Rev. 110 (965-967)

¹⁴“Classical Physics as Geometry” Annalen der Physik. 2 (525-603)

una extensión máxima de la solución de Schwarzschild en la que no aparece singularidad en $r = 2m$; por tanto, esta solución se puede reescribir a partir de las nuevas coordenadas, que proporcionan la métrica de Kruskal-Szekeres:

$$ds^2 = \frac{32M^3 e^{\frac{-r}{2m}}}{r} (-dT^2 + dX^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1.13)$$

En estas coordenadas, la relación entre X, T y r está dada por

$$X^2 - T^2 = e^{\frac{r}{2m}} \left(\frac{r}{2m} - 1 \right) \quad (1.14)$$

Mientras que la relación entre X, T y t es:

$$T = X \tanh\left(\frac{t}{4m}\right) \quad (1.15)$$

A partir de ello, se puede observar la estructura causal del espacio-tiempo de la solución de Schwarzschild en su forma extendida mediante la construcción del diagrama de Kruskal-Szekeres, Wald (1984). Tal como señala Kruskal (1960), *las geodésicas nulas*¹⁵ son líneas inclinadas 45 grados puramente radiales de modo que ($d\theta = d\varphi = 0$). Así mismo, las líneas del universo como de tiempo $ds^2 > 0$ de las partículas en cada punto tienen una pendiente la cual se va acercando al eje vertical (T) de 45° de modo que, un cono de luz en este diagrama es análogo a un cono de luz en el diagrama de Minkowski. Como se observa en la figura 1.3, las curvas de constante r son hipérbolas asintóticas a las líneas rectas de 45° y las líneas rectas de constante t son rectas en diversos ángulos que atraviesan el origen. [10]

La región I ($r > 2m$) tal como se observa en la figura 1.3 corresponde a la solución original de Schwarzschild, esta región, afirma Wald (1984), se puede interpretar físicamente como el campo gravitatorio exterior de un cuerpo esférico. Ahora bien, un observador que atraviesa la región I, es decir que cruza la geodésica nula $X = T$ (cuando $r = 2m$) y entra a la región II, en un tiempo propio finito $X = \sqrt{(T^2 - 1)}$ cae en la singularidad y no puede escapar de ella, por ende ninguna señal de luz puede ser enviada, ya que ésta también

¹⁵En donde la separación espacio-temporal es cero $ds^2 = 0$, ya que la luz no recorre ninguna distancia espacio-temporal

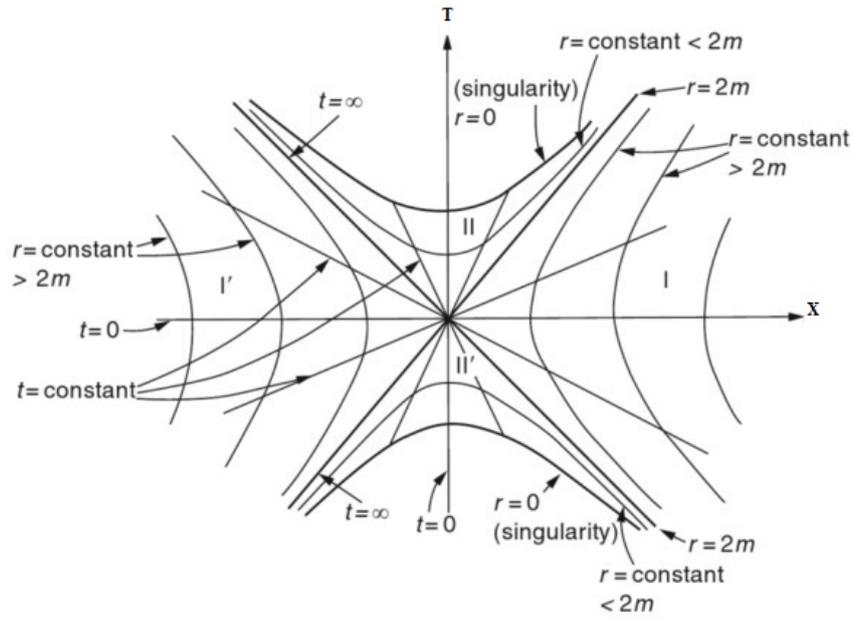


Figura 1.3: Diagrama de Kruskal-Szekeres: Extensión espacio-tiempo de Schwarzschild

queda atrapada en esta región, que se conoce como agujero negro. De igual forma, la región II', posee las mismas propiedades de la región II, aunque con el "tiempo invertido", de esta manera cualquier observador presente en ésta región debe haber tenido su origen en la singularidad cuando $X = -\sqrt{(T^2 - 1)}$ de modo que en un tiempo propio finito, debe abandonar la región II'; ésta se le denomina agujero blanco. De manera análoga, la región I tiene las mismas propiedades que la I'. Por esta razón, un observador que va de la región I hacia la región I', entra al agujero negro y es "tragado" por la singularidad allí presente.

Al mismo tiempo, se puede observar que las líneas rectas de 45° son precisamente los *horizontes de sucesos* que dividen las regiones exteriores e interiores del agujero negro y el agujero blanco, en el que permanecen los rayos de luz emitidos radialmente hacia el exterior en el caso del agujero negro y al interior en el agujero blanco.

Para un evento en el centro del diagrama de Kruskal-Szekeres ($T = X = 0$), los horizontes del agujero negro coinciden con los límites del futuro en el cono de luz de dicho suceso, mientras que los horizontes de los agujeros blancos coinciden con los límites del pasado. En efecto, cualquier evento que ocurra en el interior de la región II (Agujero

negro), tendrá un cono de luz futuro en el cual sus líneas del universo llegan a la singularidad que aparece en la hipérbola delimitada por los dos horizontes en $r = 0$. A su vez, algún suceso que se produzca en la región interior de la región II' (Agujero blanco), tendrá un cono de luz pasado en la que las líneas del universo deben tener su origen en la singularidad del agujero negro. En consecuencia, las regiones II y II', también se denominan futuro y pasado de la singularidad respectivamente (Wald, 1984).

1.3.2. Coordenadas de Finkelstein-Eddington

Para realizar una descripción física más precisa en cercanías al radio de Schwarzschild, fue necesario plantear un sistema de coordenadas tal que permitiera cubrir simultáneamente las regiones dentro y fuera de este radio. Para ello, era necesario que estas coordenadas no fueran singulares en $r = 2m$ y además que proporcionaran una explicación correcta sobre el comportamiento de objetos como por ejemplo las estrellas en límites cercanos a $r = 2m$. Bajo estas consideraciones, el cambio de coordenadas fue ideado primero por A. Eddington (1924) [2] y replanteado por D. Finkelstein (1958) [8], quienes a través de la caída radial de fotones bajo la métrica de Schwarzschild, establecen un cambio en la coordenada temporal¹⁶ que es:

$$t \longrightarrow \bar{t} = t + 2m \ln(r - 2m) \quad (1.16)$$

De esta manera, para un nuevo sistema de coordenadas $(\bar{t}, r, \theta, \varphi)$, teniendo en cuenta las geodésicas radiales nulas de la solución de Schwarzschild, se pueden reescribir las geodésicas nulas -entrantes y salientes- como: $\bar{t} = -r + constante$ (Geodésica entrante) y $\bar{t} = r + 4m \ln(r - 2m) + constante$ (Geodésica saliente). En este caso las geodésicas entrantes no divergen en $r = 2m$, de hecho r puede estar entre $0 < r < \infty$, además es una recta con pendiente negativa que forma un ángulo de -45° respecto al eje r [1], tal como se muestra en la figura 1.4. Ahora bien, la ecuación 1.16 también puede ser escrita como:

¹⁶En este caso, las coordenadas son avanzadas, ya que se construyen a partir de las geodésicas salientes; sin embargo se puede también plantear en términos de coordenadas retardadas, es decir geodésicas entrantes.

$$dt = d\bar{t} - \frac{2m}{r-2m}dr \quad (1.17)$$

De manera que al elevar al cuadrado y sustituir dt en la solución de Schwarzschild (1.11), se obtiene finalmente la métrica de Eddington-Finkelstein:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)d\bar{t}^2 - \frac{4m}{r}d\bar{t}dr - \left(1 + \frac{2m}{r}\right)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1.18)$$

Empero, en esta solución descrita por la ecuación (1.18), se puede observar la existencia de un término cruzado $d\bar{t}dr$, lo cual implica que se rompe la simetría o invarianza de $\bar{t} \rightarrow -\bar{t}$ de una solución estática. No obstante, es importante mencionar que el cambio de coordenadas suministrado anteriormente (Ecuación 1.16), puede a su vez estar dado en término de coordenadas retardadas [1]:

$$\tilde{t} = t - 2m \ln(r - 2m) \quad (1.19)$$

Tal que las coordenadas de E-F, pueden escribirse como:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)d\tilde{t}^2 + \frac{4m}{r}d\tilde{t}dr - \left(1 + \frac{2m}{r}\right)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1.20)$$

A partir de ello, se puede observar que existe una diferencia entre estas dos ecuaciones 1.18 y 1.20, que radica en el signo del término cruzado existente $d\tilde{t}dr$ la cual es producto de la construcción de las coordenadas mediante las geodésicas entrantes o salientes-coordenadas retardadas y avanzadas-. No obstante, las coordenadas tanto avanzadas como retardadas, proporcionan una buena descripción de la solución de Schwarzschild en $r > 2m$, por esta razón fuera del radio de Schwarzschild estas tres soluciones (1.11), 1.18 y 1.20 son análogas. Por otro lado, dentro del radio de Schwarzschild $r < 2m$ las soluciones 1.18 y 1.20 divergen; esto, se puede observar en el comportamiento de las geodésicas radiales nulas (entrantes y salientes respectivamente)[41][1].

Así pues, tal como afirma Misner et. al (1970) para establecer sus coordenadas Finkelstein y Eddington ese basan en la caída radial de fotones hacia una concentración de masa en el espacio-tiempo, como por ejemplo una estrella [11]; tal como se pudo observar previamente. De esta manera, en la figura 1.4¹⁷ se aprecia que las geodésicas radiales

¹⁷Imagen tomada de: Lecture: Spherical Black Holes

1.3. SOLUCIÓN DE SCHWARZSCHILD

nulas entrantes v tienen una pendiente negativa de -45° respecto al eje r , mientras que las geodésicas radiales salientes v tienen un ángulo que se aproxima 90° conforme se acerca a $r = 2m$.

Por esta razón, los fotones que se emiten en lejanías a $r = 2m$, viajan con facilidad conforme pasa el tiempo; contrario a los que se emiten un poco antes de $r = 2m$, ya que tardan más en salir hacia el espacio exterior, debido a que la atracción va a ser cada vez mayor. Los fotones emitidos cuando la estrella alcanza la circunferencia crítica se mantienen allí -en las esfera de fotones- mientras los que son emitidos en $r < 2m$ (Agujero negro), nunca pueden escapar y por ende son conducidos hacia la singularidad.[18] Así pues, estas coordenadas proporcionan una descripción física más detallada en diferentes regiones de una estrella -por ejemplo-, pues teniendo en cuenta estas coordenadas junto con la solución de Schwarzschild se puede analizar la estructura causal en el colapso gravitacional (Véase: Capítulo 3, Sección 3.5).

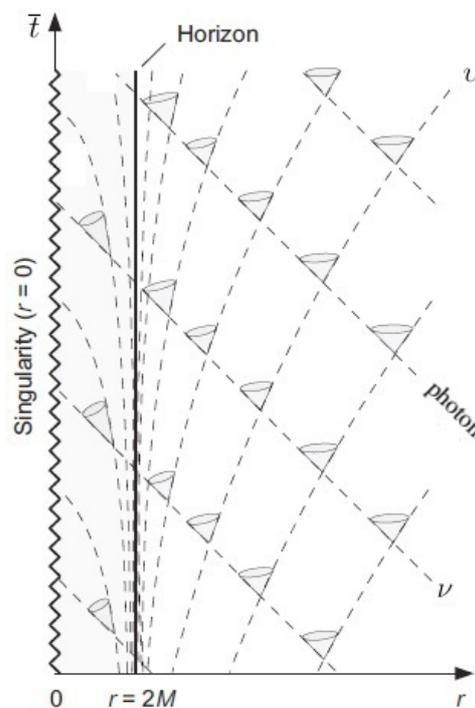


Figura 1.4: Diagrama espacio-tiempo: Coordenadas de Finkelstein-Eddington

Para ello, es necesario tener presente que el estudio de las estrellas bajo la perspectiva de la TGR toma en consideración algunos parámetros desde los cuales se establece un modelo de estrellas para el cual se pueden aplicar las ecuaciones de campo de Einstein. Así pues, algunos estudios de estrellas a la luz de la TGR se realizan despreciando los efectos de rotación y considerando que tienen simetría esférica; además de asumir la composición de gas en su interior como un "fluido perfecto". De esta manera, en el caso del modelo de colapso gravitacional tales planteamientos se tienen en cuenta en el análisis que se realiza a partir de la TGR; por esta razón, es necesario introducir el tensor energía-momento para un fluido perfecto como se señala a continuación.

1.4. Tensor energía-momento para un fluido perfecto

Para llegar a las ecuaciones de campo, Einstein tuvo en cuenta un factor fundamental que fue la densidad de energía ya que esta sería la responsable de la gravedad, esto, de acuerdo con la equivalencia entre masa-energía $E = mc^2$. Por este motivo, era necesario que esta densidad de energía fuese descrita mediante una magnitud tensorial, que a su vez estuviera de acuerdo con el principio de covariancia general. Este tensor, se denomina *tensor energía-momento*; es un tensor de signatura (0,2) covariante, que cumple con la condición de simetría ($T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$) -al igual que los componentes geométricos de las ecuaciones de campo- y que satisface la ecuación de conservación: $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$. Este tensor agrupa todas las densidades, flujos de energía y momento en los campos y partículas [12]:

$$[T^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} & T^{14} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} & T^{24} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} & T^{34} \\ T^{41} & T^{42} & T^{43} & T^{44} \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

En este caso, las componentes del tensor momento energía $T^{12} = T^{21}; T^{13} = T^{31}; T^{14} = T^{41}$, dan cuenta de la densidad de momento y las componentes $T^{23} = T^{32}; T^{24} = T^{42}; T^{34} = T^{43}$ describen el flujo de momento; mientras que $T^{11} = T^{22} = T^{33}$ describen la presión del sistema y T^{44} la densidad de energía.

Ahora bien, para el caso del fluido perfecto (que es aquel en el que las partículas no interactúan entre sí, y como consecuencia no conduce calor y no hay viscosidad) afirma Tolman, se puede establecer un observador local (x_o) en un medio mecánico -que en este caso es el fluido perfecto- cuyo tensor energía-momento está descrito como $T_o^{\alpha\beta}$. De esta manera, de acuerdo con la TGR, el tensor se puede reducir a una matriz de coordenadas propias ($x_o^1, x_o^2, x_o^3, x_o^4$), de modo que para obtener sus componentes en otro sistema de coordenadas determinado (x^1, x^2, x^3, x^4); se puede realizar la transformación tensorial:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x_o^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x_o^{\beta}} T_o^{\alpha\beta} \quad (1.22)$$

Empero, como se trata de un fluido perfecto de acuerdo con 1.21 las componentes del

1.4. TENSOR ENERGÍA-MOMENTO PARA UN FLUIDO PERFECTO

resultantes del tensor son: $T_o^{11} = T_o^{22} = T_o^{33} = p_o$; $T_o^{44} = \rho$, mientras las componentes $T_o^{\alpha\beta}$ cuando ($\alpha \neq \beta$) son igual a cero. De este modo, al sustituirlas en la ecuación 1.22, se puede reescribir la expresión como [37]:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_o^1} p_o + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_o^2} p_o + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_o^3} p_o + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^4} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_o^4} \rho_o \quad (1.23)$$

Así pues, al considerarse el caso del fluido perfecto para un observador local (o inercial) la presión es igual en todas las direcciones por ende: $T_o^{11} = T_o^{22} = T_o^{33} = p$ [43]. Además, dado que no hay movimiento entre las partículas, la densidad y el flujo de momento son iguales a cero, de manera que la matriz diagonal resultante es:

$$[T^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}$$

Para poder simplificar esta matriz, afirma Tolman (2008) se tienen en cuenta las componentes contravariantes del tensor métrico ($g^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_o^\beta} g_o^{\alpha\beta}$):

$$g^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_o^1} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_o^2} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_o^3} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^4} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_o^4} \quad (1.24)$$

Y la velocidad macroscópica del fluido con respecto al sistema de coordenadas determinado que en este caso es el sistema de coordenadas propio: $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_o^4}$. Así pues, al sustituir 1.24 y U^μ en 1.23, se puede expresar el tensor de energía-impulso para un fluido perfecto como [20]:

$$T^{\mu\nu} = p g^{\mu\nu} + (p + \rho) U^\mu U^\nu \quad (1.25)$$

Donde $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ y $U^\nu = (1, 0, 0, 0)$ son las cuadrivelocidades, p la presión y ρ la densidad de materia y/o energía. De hecho, U^μ es el valor local de $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ para un elemento de las coordenadas comóviles.¹⁸ La presión p y la densidad ρ medidas por un observador en el marco localmente inercial pasa a estar en movimiento con el fluido en el momento de la medición, por ende estas suelen ser escalares (Weinberg, 1972).

¹⁸Un sistema de referencia comóvil, hace alusión a un marco de referencia que se mueve junto con un fluido o partícula en cuestión, por esta razón, las componentes espaciales de la cuadrivelocidad son cero.

Capítulo 2

Introducción a la Evolución Estelar

En este capítulo, se realiza una descripción general de la evolución estelar, en donde se dan a conocer algunos aspectos físicos que se llevan a cabo durante el ciclo estelar. Así mismo, se mencionan algunas investigaciones que son de gran importancia a la hora de aproximarse al análisis del proceso de colapso gravitacional desde la TGR.

2.1. Diagrama de Hertzsprung-Russell

Realizado de manera conjunta por el astrónomo danés Ejnar Hertzsprung¹ ² (1909) y por el astrónomo estadounidense Henry Norris Russell ³ (1914). Este diagrama, que se dio a conocer en la Royal Astronomical Society en 1912, da cuenta de las características más relevantes de una estrella que son su brillo, temperatura superficial, magnitud absoluta y tipo espectral, ya que su nuevo diseño de clasificación estelar permitía distinguir entre estrellas supergigantes y enanas.⁴

¹“*Über die Sterne der Unterabteilung c und ac nach der Spektralklassifikation von Antonia C. Maury*” *Astronomische Nachrichten* 179 pp.(373–380)

²Es importante señalar que E. Hertzsprung realizó un estudio de los catálogos de los espectros estelares realizados por la astrónoma *Antonia Maury*

³“*Relations Between the Spectra and Other Characteristics of the Stars*” *Popular Astronomy* 22. pp. (275-294)

⁴En el siglo XIX, se realizaron algunos registros de los espectros estelares en el Harvard College Observatory de miles de estrellas, en donde trabajaron astrónomos y astrónomas como Henry Draper, Edward Charles Pickering, Annie Jump Cannon y Antonia Maury, entre otr@s.

2.1. DIAGRAMA DE HERTZSPRUNG-RUSSELL

Ahora bien, contrario de la práctica científica normal, la temperatura superficial crece de derecha a izquierda. El tamaño de la estrella aumenta con la distancia desde el extremo inferior izquierdo al extremo superior derecho tal como se ve en la figura 2.1⁵. La temperatura se relaciona con el tipo espectral, por ello en la parte superior izquierda (zona azul) se encuentran las estrellas con temperatura más elevada y más brillantes, mientras que en la parte superior derecha se encuentran las estrellas con menor temperatura y baja luminosidad (zona roja). La inmensa mayoría de estrellas se encuentran ubicadas sobre una diagonal que va del extremo inferior derecho al extremo superior izquierdo, por lo que se denomina *serie principal*.

En la parte serie principal se encuentran las estrellas que contienen grandes cantidades de hidrógeno y que están en su etapa inicial de combustión del hidrógeno, la cual dura una buena parte de su vida. Las estrellas de mayor masa son más brillantes y queman su hidrógeno más rápidamente, por lo que permanecen en la serie principal durante un tiempo relativamente corto. Por ejemplo, una estrella quince veces más masiva que el Sol abandona la región de la serie principal durante unos diez mil millones de años, mientras el tiempo necesario para que el sol consuma toda su reserva central de hidrógeno es comparable con la edad de la vía láctea (13,2 millones de años), lo que significa que las estrellas menos masivas que el sol que surgieron durante los comienzos de la galaxia están aún agrupadas en la serie principal del diagrama H-R.

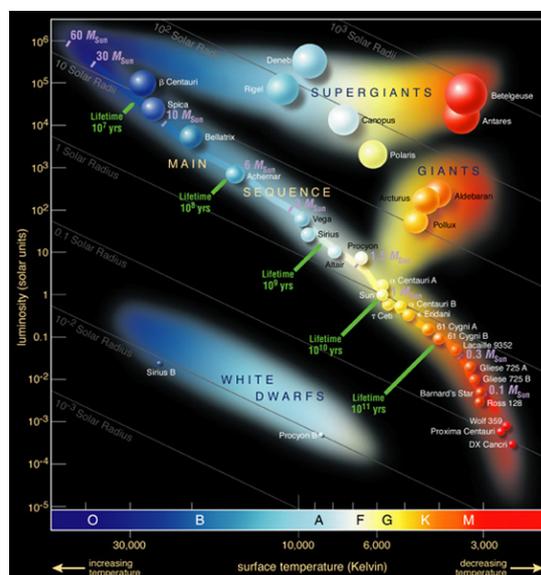


Figura 2.1: Diagrama de H-Z

Empero, mediante diversas investigaciones el astrofísico británico A. Eddington realizó algunos aportes significativos en el campo de la física estelar, ya que pudo reconocer algunas de las principales propiedades físicas que tienen las estrellas durante su evolución como: su estructura y una idea sobre la fuente de energía que genera la radiación.[21]

⁵Imagen tomada de: <https://universe-review.ca/F08-star13.htm>

2.2. Estructura Estelar

Las estrellas poseen características de acuerdo a su tipo espectral, brillo, masa, etc; como se pudo observar a partir del diagrama H-R. Sin embargo, algunas de ellas, comparan cualidades estructurales. Una característica en común y la más evidente entre ellas es que emiten energía, por esta razón se establece que las estrellas son capaces de producir energía durante períodos prolongados de tiempo; esto, mediante algunos procesos físicos que además de ser los causantes de la emisión de energía, también son los que permiten la estabilidad de la estrella. Por ende, la temperatura -al igual que la masa como se verá más adelante- jugará un papel significativo durante la evolución estelar. Este hecho, trae consigo un hecho particular y es el posible estado de la materia estelar, que fácilmente se puede pensar que no puede ser sólida ni tampoco líquida, pues la temperatura es tan elevada que haría fundir o evaporar la materia rápidamente; por ende, el estado que se establece es el gaseoso.

Así pues, en la TGR las estrellas son consideradas como una aproximación cuasiestática⁶ de simetría perfecta, en donde en algunas ocasiones no se tienen en cuenta los efectos de la rotación, campo magnético y pulsación de algunas [11], este supuesto conlleva a considerar entonces la estrella como un *fluido perfecto*.⁷ De igual manera, las estrellas durante mayor parte de su vida deben estar en equilibrio -mecánico y térmico- puesto que la estrella puede sufrir algunos cambios con el tiempo; puede explotar de forma violenta o colapsar bajo su propia atracción gravitatoria.

2.2.1. Equilibrio hidrostático

El proceso de formación estelar, se inicia cuando en la materia existen algunas fluctuaciones continuas de densidad producidas por movimientos internos, que generan una disminución o aumento en la densidad, es decir una compresión o enrarecimiento. Cuando

⁶Idealización de un proceso real en el cual el sistema está cerca del estado en equilibrio durante un gran número de pasos o años

⁷Desde la TR, un fluido perfecto se puede definir como tener en cada punto de éste una velocidad v , de modo que si un observador se mueve con esta velocidad ve al fluido a su alrededor como isotrópico: Tomado de: Steven Weinberg (1972). "Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the General Theory of Relativity". pp. 47-48

cierta región se comprime, el gas adquiere una presión que tiende a recobrar su densidad inicial, simultáneamente sobre el gas actúan fuerzas gravitatorias que aseguran la atracción de las moléculas; por ello, al comprimirse el gas, las fuerzas gravitatorias serán aún mayores debido a que la separación entre las partículas disminuye. Por esta razón, la primera condición que debe cumplirse en el interior de una estrella es la de *equilibrio hidrostático*, en la que la fuerza gravitatoria y de presión deben compensarse entre sí, de forma tal que no se produzcan movimientos fuertes y cambios en su estructura. (Véase en: Figura2.3)⁸

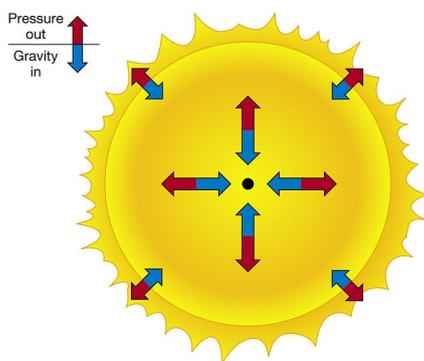


Figura 2.2: Equilibrio Hidrostático

En este caso las únicas fuerzas que se deben considerar son dos fuerzas la gravitacional \vec{F}_g que apunta hacia el centro de la estrella y una fuerza radial hacia afuera debida al gradiente de presión \vec{F}_p . Si $\vec{F}_g = \vec{F}_p$ se tiene equilibrio mecánico, mientras que si \vec{F}_g es mayor o menor que \vec{F}_p , la estrella se contrae o expande respectivamente. Este tipo de condiciones ocurren dependiendo de un balance de energía, la luz radiada al

espacio exterior hace que la energía interna decrezca lo que a su vez reduce la presión y por ende \vec{F}_p . Si esta energía no es repuesta, se llega a la condición de inestabilidad dinámica $\vec{F}_g > \vec{F}_p$ en la que la estrella se contrae o colapsa bajo su propia atracción gravitatoria. Así, la condición de equilibrio hidrostático debe ser:

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{\rho M_r}{r^2} \quad (2.1)$$

Donde P es la presión a una distancia r de la estrella central, ρ la densidad y M_r la masa en el interior (r).

Una idea aproximada del estado en el interior de una estrella se puede conseguir aproximando la presión interna dividida por el radio de la estrella $\frac{dP}{dr} \approx \frac{-P_c}{R}$ y $M_r = M$

⁸Imagen tomada de: <http://quecomoquien.republica.com/astrofisica/la-evolucion-estelar-parte-i.html>

la masa total de la estrella [23]

$$M_r = \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr \quad (2.2)$$

Que equivale a $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$ y $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \approx \frac{M}{R^3}$ que señala la densidad. De esta manera, se puede señalar que la presión central⁹ es igual a $P_c = G\frac{M^2}{R^4}$.

2.3. Límite de Chandrasekhar

En 1925, se planteó la teoría de que la presión interna que se genera en las estrellas es causada por el calor que hace que las partículas se muevan a velocidades altas y colisionen con la corteza exterior de la estrella, generando una presión hacia afuera tal como se ve en la figura 2.2. Sin embargo, tras el descubrimiento de las enanas blancas esta idea se llegó a cuestionar ya que la densidad de este tipo de estrellas era tan alta que se necesitaria una temperatura lo suficientemente alta como para que la estrella estuviese en equilibrio¹⁰

El físico británico R. Fowler¹¹ (1926) realizó algunos estudios sobre la relación entre la densidad, la energía y la temperatura de las enanas blancas mediante el modelo del gas de Fermi. A partir de este trabajo, E. Stoner¹² y W. Anderson¹³ establecieron en diciembre de 1929 una ecuación de estado -denominada ecuación de Stoner-Anderson- en la que señalaban implícitamente la existencia de una masa límite para las estrellas, donde la presión aún era capaz de contrarrestar los efectos de la gravedad. Esta presión, sin embargo era originada por la materia degenerada¹⁴ que existía dentro del núcleo de

⁹Greenstein, G.(1987). “*Order-of-magnitude “theory” of stellar structure*”. Am. J. Physc, 55(9), p. 804-805.

¹⁰El incremento en la temperatura haría que las partículas aumentaran su velocidad, sin embargo éstas no podían ser iguales o mayores a la velocidad de la luz, por ende era necesario tener en cuenta el principio de la TER.

¹¹Fowler, R. (1926)“*On Dense Matter*” Royal Astronomical Society. 87 pp. (114-122)

¹²Stoner, E (1929)“*The limiting Density of White Dwarf Stars*” Philosophical Magazine. 7 pp.(63-70)

¹³Anderson, W. (1929)“*Über die Grenzdichte der Materie und der Energie*” Zeitschrift für Physik. 56 pp.(11-12)

¹⁴Es el análogo al gas ideal en la mecánica clásica. Es un conjunto de partículas que no interactúa con la presión y con otras características físicas determinadas por efectos mecanocuánticos

la estrella.¹⁵

Así pues, en 1930 mientras realizaba un viaje de la India a Cambridge (Inglaterra), el astrofísico indio S. Chandrasekhar planteó una solución para la cuestión de la presión que se genera en las enanas blancas tomando en cuenta los efectos de la mecánica cuántica. En este trabajo, Chandrasekhar señala la existencia de una presión denominada *Presión degenerativa de los electrones*, que era la responsable de mantener a la estrella en equilibrio y de la masa límite para la cual ésta presión aún sustentaba a la estrella contra una implosión gravitatoria. Empero, en sus análisis, no incluyó los efectos de rotación, composiciones no homogéneas, campos magnéticos, entre otras[33]; de ahí que plantea la siguiente ecuación de estado [24]:

$$P = K_1 \rho^{\frac{5}{3}} \rightarrow \text{Caso no relativista}$$

$$P = K_2 \rho^{\frac{4}{3}} \rightarrow \text{Caso relativista}$$

Donde P es la presión, ρ la densidad de masa, K_1 y K_2 constantes y, $\frac{5}{3}$ y $\frac{4}{3}$ los coeficientes de compresión adiabática¹⁶. Así, mediante algunos análisis que subyacen de tal ecuación de estado, Chandrasekhar observó que para masas menores de $1,4M_{\odot}$ el coeficiente de compresión pasa de $\frac{5}{3}$ a $\frac{4}{3}$ y cuando la masa se aproximaba a $1,4M_{\odot}$ éste coeficiente tendía a ser constante. De esta manera, planteó que para masas igual o menores a $1,4M_{\odot}$ la presión degenerativa electrónica mantiene en equilibrio a la estrella.¹⁷ Así pues, señala Chandrasekhar[25] :

“Finally, it is necessary to emphasize one major result of the whole investigation, namely, that it must be taken as well established that the life-history

¹⁵Es importante señalar que sus trabajos fueron realizados independientemente. Sin embargo, Anderson tras aplicar las correcciones relativistas a la ecuación de estado encuentra que una estrella con materia degenerada tiene una masa menor que la que se describe en el modelo no relativista de Stoner. Véase en: S.Hawking y W. Israel (1987). "Three Hundred Years of Gravitation". pp. (212-214)

¹⁶Es el incremento porcentual de la presión que resulta de una compresión, es decir, cuando se disminuye el volumen -de un gas en este caso-, aumenta su densidad.

¹⁷Aunque Chandrasekhar encontró este límite en 1930, no comprendía muy bien lo significativo que iba a ser para el estudio de la astrofísica, tal como lo señala en 1977. Sin embargo, tras un trabajo de aproximadamente tres años, Chandra da a conocer una de las contribuciones monumentales en la astrofísica, una teoría completa sobre la estructura interna de las enanas blancas con núcleos degenerados basado en la formula de Stoner-Anderson. Véase en: S.Hawking y W. Israel (1987). "Three Hundred Years of Gravitation"p.(214)

of a star of small mass must be essentially different from... a star of large mass. For a star of small mass the natural white dwarf stage is an initial step towards complete extinction. A star of large mass cannot pass into white dwarf stage and one is left speculating on other possibilities”.

2.4. Límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Los planteamientos realizados por Chandrasekhar sobre el límite de masa de las enanas blancas, abrió sin lugar a duda un nuevo panorama en el estudio de la estructura estelar, además de contribuir de forma magistral al desarrollo de la astrofísica en general. No obstante, años posteriores se instauraron nuevas hipótesis sobre la posible existencia de estrellas más compactas que las enanas blancas las cuales producían rayos cósmicos de gran magnitud; tales estrellas fueron denominadas “*estrellas de neutrones*”. Este nombre fue acuñado por primera vez por el astrónomo suizo F. Zwicky y el astrónomo alemán W. Baade en 1934, dos años después del descubrimiento del neutrón por J. Chadwick¹⁸.

Tal hipótesis, surgió de las observaciones de rayos cósmicos superluminosos realizadas por Baade y Zwicky, quienes mediante algunos estudios determinaron que el origen de tal radiación es producto de “Supernovas”, que son explosiones de estrellas, las cuales emiten una gran cantidad de radiación [33]. A partir de ello, Baade y Zwicky (1934) plantean que el remanente de tal explosión da origen a una estrella de neutrones¹⁹:

“With all reserve we advance the view that a super-nova represents the transition of an ordinary star into a neutron star, consisting mainly of neutrons. Such a star may possess a very small radius and an extremely high density.”²⁰²¹

¹⁸Chadwick, J. (1932) “*On the possible existence of a neutron*” Nature. 129 p.(312)

¹⁹Es importante mencionar que en el siglo XVI, particularmente el año 1572 el astrónomo danés Tycho Brahe observó accidentalmente una supernova en la constelación de Casiopea; su importancia radica en que fue la primera observada científicamente. Véase en: Luminet, J.P (1992). “Black Holes”. pp (89-90)

²⁰Baade, W y Zwicky, F. (1934) “*Cosmic rays from super-novae*”*Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. Vol.(20). pp. (259-263)*

²¹Aunque la existencia de estrellas de neutrones fue ignorada durante algún tiempo, en 1967 esta hipótesis fue confirmada gracias a las observaciones y los estudios realizados por la astrofísica irlandesa

Luego de conocer este planteamiento, el físico R. Oppenheimer junto con G. Volkoff se dedicaron a indagar sobre la posible masa límite que debe tener una estrella de neutrones. Para ello, realizaron un estudio sobre el equilibrio hidrostático que debían tener tales estrellas a partir de la ecuación de estado del gas de Fermi y la relatividad general.²² Mediante un análisis riguroso, obtuvieron una ecuación de equilibrio para las estrellas de neutrones a la luz de la TGR que se denominó ecuación de equilibrio hidrostático de Tolman-Oppenheimer-Volkoff [11]:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(p + \rho)(m + 4\pi r^3 \rho)}{r(r - 2m)} \quad (2.3)$$

En esta ecuación m es la masa de la estrella que se encuentra contenida en un radio r , ρ la densidad total de masa-energía y P la presión. A partir de esta expresión relativista de equilibrio (2.3) se puede realiza una comparación con la ecuación de equilibrio hidrostático de la teoría Newtoniana (2.1). De esta forma, se puede observar que en la TGR la presión se eleva de forma significativa a medida que se profundiza en la estrella, es decir cuando el valor de r va siendo menor, esto dado que se añaden algunas contribuciones a la presión tales como m y ρ , tal como se observa en la ecuación 2.3. Desde esta perspectiva las fuerzas de atracción gravitacional son más fuertes, que las descritas por la ecuación 2.1. Así pues, tales diferencias tienen consecuencias que son bastante significativas dentro de la descripción de las estrellas a partir de la TGR, pues en las estrellas -tales como enanas blancas o supermasivas- pueden colapsar gravitacionalmente; mientras en la teoría Newtoninana dichas estrellas se mantendrían en equilibrio.

Bajo esta perspectiva, Oppenheimer y Volkoff estimaron que la masa límite para una

Jocelyn Bell y el radio astrónomo británico Antony Hewish, quienes descubrieron inesperadamente los púlsares: estrellas de neutrones en rotación y magnetizadas que se caracterizan por emitir Rayos x y gamma Bell, J. y Hewish. (1968) "*Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source* Nature. Vol. 217 pp. (709-713) Véase en: Steven Weinberg (1972). "Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the General Theory of Relativity". pp.324-325

²²Estas investigaciones, sin embargo, se realizaron teniendo en cuenta el trabajo del físico matemático estadounidense Richard Tolman sobre la aplicación de las ecuaciones de campo de Einstein a esferas de fluido estáticas; éste trabajo -como menciona Tolman- pudo contribuir al estudio sobre la estructura estelar.(Tolman, R. (1939) "*Static solution of Einstein's Field Equation for Spheres of Fluid*" Physical Review. Vol. (55) pp. (364-373))

2.4. LÍMITE DE TOLMAN-OPPENHEIMER-VOLKOFF

estrella de neutrones en equilibrio es de $\sim 0,7M_{\odot}$ [27]. Sin embargo, investigaciones más recientes han arrojado que la masa límite para tales estrellas es de $1,5M_{\odot} - 3,0M_{\odot}$ [28].

Capítulo 3

Colapso Gravitacional

En este capítulo, se realiza una descripción de las principales causas que generan el colapso gravitacional y sus implicaciones dentro de la relatividad general. De esta manera, se hace necesario dar una aproximación al modelo de Oppenheimer y Snyder, donde se caracterizan y describen las principales consecuencias físicas de la implosión gravitatoria en las estrellas como lo son: El desplazamiento gravitacional al rojo, la dilatación gravitatoria de tiempo y la modificación de la estructura causal.

3.1. Colapso gravitacional

Los trabajos acerca del colapso gravitacional no hacen solo parte del estudio de la física contemporánea, ya anteriormente, en el siglo XVIII el filósofo británico John Michell¹ y el físico francés Pierre-Simon Laplace², habían planteado algunas hipótesis que hacían referencia a la existencia de “*estrellas oscuras*” o “*estrellas invisibles*”, donde, tal como afirma Israel (1987): “...*the attractive force of a heavenly body could be so large that light could not flow out of it*”; lo cual haría replantear algunas ideas frente a la mecánica celeste y la naturaleza de la luz [25]; pues esta propuesta realizada por Michell y Laplace, fue expuesta a la luz de los principios de la teoría de gravitación y corpuscular de la luz de Sir

¹Michell, J. (1784) *On the means discovering the distance, magnitude, of the fixed stars, in consequence of the diminution of the velocity of their light, in case such a diminution should be found to take place in any of them, and such other data should be procured from observations, as would be farther necessary for that purpose*. Philosophical transactions of the Royal Society of London. Vol. 74 pp.(35-57).

²Laplace, PS. (1796) *Exposition du Système du monde* Vol. 1 y 2. Paris, Francia.

Isaac Newton, razón por la cual, al ser expuesta en la Royal Society de Londres, produjo una gran conmoción entre los científicos de la época. Particularmente, la hipótesis de Michell (1784) puede describirse de la siguiente manera [25]:

“...If the semi-diameter of a sphere of the same density with the sun were to exceed that of the sun in the proportion of 500 to 1, a body falling from an infinite height towards it, would have acquired at its surface a greater velocity than that of light, and consequently, supposing light to be attracted by the same force in proportion to its force inertial, with other bodies, all light emitted from such a body would be made to return towards it, by its own proper gravity..”

Es decir cuánto más pequeña sea la circunferencia de la estrella, mayor es su gravedad; por ende, las partículas -de luz- necesitan una velocidad de escape tal que fuese capaz de escapar de la fuerza de atracción que produce la estrella, pues nada podía salir de ella. Sin embargo, estas ideas de Michell, fueron dejadas luego del auge que tuvo el trabajo de C. Huygens sobre la teoría ondulatoria de la luz a principios del siglo XIX.³

Empero, fue en el siglo XX que las hipótesis de Michell y Laplace resurgirían gracias a la solución de K. Schwarzschild en 1916, pues esta daba por sentado la aparición de una circunferencia crítica para las estrellas, en las que la luz no puede ser emitida para cualquier observador externo ya que queda atrapada por la intensa gravedad que esta genera tras sobrepasar dicho punto. Fue esta conclusión de Schwarzschild la que reabriría de nuevo las investigaciones frente a las especulaciones de las estrellas invisibles del siglo XVIII. Posteriormente, tras algunas investigaciones realizadas por Chandrasekhar (1935), Oppenheimer, Tolman y Volkoff (1939), se pudo afirmar que las estrellas deben tener una masa permitida para que las fuerzas en su interior -gravitatoria y de presión- se puedan compensar. Con respecto a esto, la fuerza gravitatoria es originada por la congregación de materia en el núcleo de la estrella, la cual incrementa conforme aumenta

³Laplace tras conocer la teoría ondulatoria de la luz de Christian Huygens, eliminó la idea de las estrellas invisibles o estrellas oscuras. Particularmente después de conocerse el experimento de la doble rendija de Thomas Young en 1801 retiró la idea de estas estrellas en ediciones posteriores de su libro: *Exposition du Système du monde*.

su masa; mientras que la fuerza de presión se genera en el interior del núcleo a causa de la elevada temperatura que también surge de la concentración de masa y hace que esta irradie energía. No obstante, esta presión no es la única responsable de la generación de energía, ya que como mencionó Eddington en 1920 [21], la energía que se produce en las estrellas se debe también a las reacciones nucleares que se producen en su interior⁴ y a efectos mecanocuánticos que generan una presión degenerativa -de electrones y neutrones respectivamente- que sustenta tanto a las enanas blancas como a las estrellas de neutrones.

En este sentido, las estrellas masivas no pueden terminar en un estado como las enanas blancas o las estrellas de neutrones, ya que ni la presión degenerativa de electrones, ni la de neutrones es suficiente para sustentarla contra la atracción gravitatoria y estabilizarla cuando sobrepase el LTOV.⁵ Por esta razón, cuando las estrellas agotan su combustible nuclear, se van comprimiendo cada vez más de modo que no hay fuerza física alguna que contrarreste los efectos de la gravedad, creando así campos gravitatorios extremadamente fuertes en los que las leyes de la TGR se hacen relevantes[29]; pues, como afirma J.A. Wheeler, “*«De todas las implicaciones de la relatividad general para la estructura y evolución del Universo, esta cuestión del destino de las grandes masas de materia es una de las más desafiantes»*,”. Por esta razón, al ser tan alta la densidad de materia que se encuentra colapsando, la curvatura del espacio-tiempo se hace cada vez más prolongada, cerrándose casi sobre sí misma, de modo que la luz que irradia la estrella va desapareciendo (tal como señalaba Michell), lo cual conllevaba a pensar que el posible final del colapso gravitacional estelar formaría agujeros negros.

Teniendo en consideración todas estas investigaciones, R. Oppenheimer y su estudiante H. Snyder en 1939 dan a conocer el primer modelo que se planteó para explicar tal fenómeno. En este trabajo, dan a conocer los primeros análisis referentes al colapso

⁴Es importante señalar que A. Eddington fue el primero en sugerir que las estrellas estaban compuestas por Hidrógeno y Helio. Sin embargo, fue el físico alemán H. Bethe quien afirmó dicha propuesta tras desarrollar la teoría de *nucleosíntesis estelar*: Bethe, H. (1942). “*Energy production in stars*”. American Scientist. Vol. 30 (4). pp.(243-264)

⁵Tal como establecieron Wheeler, Harrison y Wakano, la implosión es inevitable a menos que la estrella expulse la masa suficiente para quedar debajo del LTOV. Este resultado surgió luego de la controversia que se formó tras considerar la posible existencia de agujeros negros a causa de la implosión estelar. Véase en: Thorne, K. (1994) “Agujeros negros y tiempo curvo. El escandaloso legado de Einstein” pp.(166-167)

gravitacional estelar para estrellas masivas que sobrepasan el LTOV y señalan algunas consideraciones que fueron de gran relevancia en el avance de la física dentro del contexto de la TGR y también en la astrofísica.

3.2. Modelo de Oppenheimer-Snyder

Uno de los trabajos más significativos que se construyó referente al análisis del proceso del colapso gravitacional a través de la TGR, fue realizado de manera conjunta por R. Oppenheimer y su estudiante H. Snyder (1939); quienes establecieron un modelo en el cual dan a conocer algunas consideraciones frente a la implosión que se produce en las estrellas suficientemente masivas. En esta investigación, los científicos establecen la siguiente hipótesis [30]:

“When all thermonuclear sources of energy are exhausted a sufficiently heavy star will collapse. Unless fission due to rotation, the radiation of mass, or the blowing off of mass by radiation, reduce the star’s mass to the order of that of the sun, this contraction will continue indefinitely...”

Teniendo en cuenta esta afirmación, Oppenheimer y Snyder establecen en su modelo de colapso gravitacional una situación particular la cual se pueden exponer mediante las siguientes apreciaciones:

- La estrella se considera como un fluido perfecto, el tensor momento-energía que se plantea es: $T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}$
- Es perfectamente esférica y estática, la métrica que se utiliza es la de Schwarzschild.
- Es suficientemente masiva (sobrepasa el LTOV).
- No posee fuentes de energía ($P = 0$).
- Se desprecian los efectos de rotación por ende se desprecia el momento angular.

Así pues, dado que el modelo de Oppenheimer-Snyder plantea el hecho de que la estrella no posee ninguna fuente de energía nuclear, la presión se anula; por ello, el tensor momento-energía queda de la forma: $T_{44} = \rho$. Además, desprecian las pérdidas de energía

debidas a la radiación, es decir la disminución de masa (Teniendo en cuenta la relación $E = mc^2$), por ende, la estrella en este modelo se supone suficientemente masiva de modo que no pueda terminar como una enana blanca o en una estrella de neutrones.⁶

Tras estas apreciaciones realizadas, Oppenheimer y Snyder establecen el elemento de línea fuera del límite r_b de la concentración de materia [30]:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.1)$$

En la que $e^\nu = (1 - \frac{r_o}{r})$ y $e^\lambda = (1 - \frac{r_o}{r})^{-1}$, donde $r_o = 2MG/c^2$ es el *radio de Schwarzschild*. Ahora, como la estrella se contrae cada vez más, el límite r_b se acerca a r_o ; razón por la cual bajo la solución de Schwarzschild, tal situación abriría lugar a indagar sobre cómo sería el comportamiento del tensor métrico cuando $r_b \rightarrow r_o$. A partir de ello, tal como señalan los científicos se pueden realizar algunas apreciaciones referentes al comportamiento de la luz y del tiempo para dos sistemas de referencia -Uno estático fuera de la estrella y otro comóvil-.

Bajo estas consideraciones, es necesario hacer una descripción y análisis sobre los planteamientos que Oppenheimer y Snyder (1939) dedujeron de dicho fenómeno a través de la TGR como lo son: La dilatación gravitacional del tiempo y el desplazamiento al rojo; que es sin duda fundamental en la comprensión del proceso de colapso gravitacional para observadores comóviles y externos. Además, este panorama conlleva implícitamente a realizar una apreciación -que también es significativa-sobre la estructura causal en la TGR; donde el comportamiento de los conos de luz se comportan de manera diversa en comparación con el espacio-tiempo plano de la TER.

⁶La importancia de la masa de la estrella radica en que los científicos afirman -Mediante sus investigaciones sobre las estrellas de neutrones- que no se encuentra una solución relativista en la que la estrella se mantenga en equilibrio para estrellas mayores del LTOV, por lo que la estrella sufriría un colapso gravitacional inminente cuando es suficientemente masiva.

3.3. Dilatación gravitatoria de tiempo

Una de las ventajas del principio de equivalencia fue sin lugar a duda el nuevo paradigma que se planteó sobre la geometría del espacio-tiempo para sistemas acelerados -o campos gravitacionales-, sin embargo tal principio permitió además dar nuevas apreciaciones sobre el comportamiento de la luz y del tiempo, que fueron sumamente significativas a la hora de instaurar la TGR. Una de ellas, fue la dilatación gravitacional del tiempo, que permitió afirmar que la frecuencia de relojes en reposo puestos en diferentes potenciales gravitacionales varía uno con respecto al otro; particularmente, en la TGR esta medición varía de acuerdo a la separación de los observadores de la concentración de masa, pues la medición del tiempo tomado por un observador que se encuentra en la superficie de la concentración de materia es diferente para uno que esté lejos de ella.

Esta afirmación, se puede expresar a partir de la analogía existente entre el potencial gravitatorio de la teoría newtoniana (ϕ) y el tensor métrico de la TGR ($g_{\mu\nu}$). Esto, considerando el límite newtoniano que deben tener las ecuaciones de Einstein (Véase: Capítulo 1-Sección 1.2). Para ello, es necesario tener en cuenta que las partículas en la TGR se mueven alrededor de geodésicas, de modo que las ecuaciones de caída libre tal como afirma Wheeler (1972), pueden escribirse como:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\gamma\sigma}^\mu \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \quad (3.2)$$

Donde τ representa el tiempo medido por las partículas que se mueven sobre las geodésicas (Sistema comóvil). Ahora bien, al considerarse una partícula cuya velocidad es menor que la velocidad de la luz ($v \ll c$), se tiene que $\frac{dx^\mu}{d\tau} \ll c$; donde τ se redefine como t , ya que al no moverse con velocidades relativistas el tiempo es absoluto según la mecánica newtoniana.

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\gamma\sigma}^\mu \frac{dx^\gamma}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} = 0 \quad (3.3)$$

En este caso, $\frac{d^2x^\mu}{dt^2}$ representa la aceleración en la mecánica newtoniana, mientras $\Gamma_{\gamma\sigma}^\mu \frac{dx^\gamma}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt}$ da cuenta de la aceleración debida a la curvatura espacio-temporal. Así, considerando el sistema comóvil de las partículas, se puede reescribir la ecuación 3.3 en

3.3. DILATACIÓN GRAVITATORIA DE TIEMPO

términos de la coordenada temporal⁷:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{44}^\mu c^2 = 0 \quad (3.4)$$

Luego, al hacer una aproximación a un campo débil en la cual el tensor métrico se instaure como: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski en un espacio-tiempo plano y $h_{\mu\nu}$ representa una pequeña perturbación debida a la presencia de un cuerpo con poca masa (curvatura mínima del espacio-tiempo), mediante un tratamiento matemático (Véase en: Anexos-Dilatación gravitacional del tiempo desde la TGR) se obtiene:

$$\frac{d^2 x_\mu}{dt^2} - \frac{1}{2} c^2 \left(\frac{\partial h_{44}}{\partial x^i} \right) = 0 \quad (3.5)$$

Así, al considerarse un campo gravitacional en la teoría newtoniana ($g = -\frac{GM}{r^2} \hat{r}$), cuyo potencial gravitacional está dado por $g = -\nabla\phi$ y estimar el principio de equivalencia como: $a = -\nabla\phi$. Se puede plantear finalmente que:

$$g_{44} = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) \quad (3.6)$$

A partir de esta expresión 3.6, se puede decir que desde el punto de vista de la TGR, las partículas -en caída libre- se mueven en trayectorias geodésicas, lo que es análogo al movimiento de ellas en la teoría newtoniana que se describen mediante las leyes de Newton de gravedad.⁸. Además, esta expresión conlleva a un resultado significativo que da una idea referente al comportamiento del espacio-tiempo curvo a la luz de la teoría de newton, este hecho radica en que la componente del tensor métrico es sólo temporal; razón por la cual se puede decir que en la teoría de newton tal curvatura está ligada directamente al tiempo, es decir que la curvatura es temporal[19].

⁷Es importante mencionar que mediante la relación: $ds^2 = (dx^4)^2$, se puede deducir que $\frac{dx^4}{dt} = c$, teniendo en cuenta que $ds^2 = c^2 dt^2$.

⁸En el punto de vista newtoniano, el sol genera un campo gravitacional tal que ejerce una fuerza sobre la tierra y lo hace girar alrededor de él. En la TGR, la masa-energía del sol produce una curvatura espacio-temporal -campo gravitacional- que hace acelerar a la tierra alrededor de él en trayectorias geodésicas. Véase en: Wald, R. (1984). "General Relativity". United States of America: The University Chicago Press. pp. (76-77)

De este modo, mediante la solución de Schwarzschild se puede realizar un análisis frente al comportamiento del tiempo en un campo gravitacional, que en este caso, es producido por una concentración de masa perfectamente esférica y estática, que puede ser una estrella (Véase: Ecuación 1.11). Para ello, se establecen dos sistemas de referencia los cuales tienen relojes sincronizados, uno de ellos se encuentra en la superficie de la estrella, mientras el segundo observador está lejos de la concentración de materia. Como en este caso las coordenadas angulares y radiales no varían, entonces se tienen en cuenta las coordenadas temporales (Ver Anexos: Dilatación gravitacional del tiempo desde la TGR), de esta forma:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = -g_{44} c^2 dt^2 \quad (3.7)$$

Donde τ es el tiempo medido desde la superficie de la estrella, t el tiempo medido por el observador que se encuentra a una distancia lejana de la estrella y g_{44} la componente temporal del tensor métrico descrito por (3.6). De esta al reemplazar g_{44} y despejando τ , se obtiene:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right) dt^2 \quad (3.8)$$

En este caso, G la constante de gravitación universal, M la masa de la estrella, R es una distancia arbitraria fuera de la concentración de masa y c la velocidad de la luz. Así pues, se puede observar que cuando R se aproxima al radio de Schwarzschild 1.12, para el observador externo, el tiempo del observador situado en la estrella va tendiendo a infinito. Además, si $R > R_s$ -es decir en un espacio-tiempo plano- la medición para los observadores tiende a ser análoga. A partir de ello, se puede decir en la TGR, la variación del tiempo entre observadores varía conforme cambia la distancia desde la concentración de masa de acuerdo con la relación $\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}$; donde $R_s = \frac{2GM}{c^2}$ es precisamente el radio de Schwarzschild y R una distancia arbitraria fuera de la estrella.

3.4. Desplazamiento al rojo gravitacional

Una de las consecuencias de la dilatación del tiempo en la TGR, está ligada directamente con la frecuencia de la radiación electromagnética, que configura la longitud de

onda para los observadores dentro y fuera del campo gravitacional debido a la relación: $f = \frac{1}{T}$. Para poder observar tal situación, se establece la relación entre las frecuencias de dos observadores, uno que emite radiación y otro que la recibe a una distancia R_r . Para ello, en un primer momento es necesario tener en cuenta las coordenadas temporales de cada uno de los observadores de manera que se demuestre el intervalo de tiempos entre emisión y recepción de la luz. Así pues, mediante la ecuación 3.7, se tiene:

$$dt = \frac{d\tau_e}{\sqrt{-g_{44}(e)}} = \frac{d\tau_r}{\sqrt{-g_{44}(r)}} \quad (3.9)$$

Donde $d\tau_e$ es el tiempo medido por el observador que emite radiación y $d\tau_r$ es el tiempo propio para el observador que recibe las señales. De esta forma, a través de la relación entre la frecuencia y el tiempo de cada uno de los observadores y teniendo en cuenta la ecuación 3.9, se puede escribir [44]:

$$\frac{f_e}{f_r} = \sqrt{\frac{-g_{44}(r)}{-g_{44}(e)}} = 1 + Z \quad (3.10)$$

En este caso f_e es la frecuencia con la que es emitida la luz, f_r la frecuencia recibida y Z es el desplazamiento al rojo para el observador que recibe las señales en R_r . A partir de ello, se puede observar que si $g_{44}(e) < g_{44}(r)$, el tiempo de recepción entre una cresta y otra -es decir una longitud de onda (λ)- es mayor, razón por la cual $f_r < f_e$, es decir que la frecuencia de las señales recibidas es menor que las emitidas, lo que significa un desplazamiento hacia el rojo de la luz para el observador receptor [1].

De esta manera, al sustituir la componente temporal del tensor métrico g_{44} de la métrica de Schwarzschild la ecuación anterior se puede escribir como:

$$1 + Z = \frac{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R_r}}}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R_e}}} \quad (3.11)$$

En esta ecuación, R_r es la distancia por el observador receptor y R_e la distancia del observador emisor de señales de luz. Sin embargo, si la distancia por el observador receptor tiende a infinito ($R_r \rightarrow \infty$), es decir en un espacio-tiempo plano, entonces la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$1 + Z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R_e}}} \quad (3.12)$$

Así pues, Z es el desplazamiento al rojo, R_e es la distancia desde el centro de la estrella hasta un punto fuera de ella, M la masa de la estrella y G la constante de gravitación universal. De esta manera, durante el colapso gravitacional la luz que emite la estrella va tardando cada vez más en llegar a un observador externo ya que durante este proceso R_e se va aproximando al radio de Schwarzschild R_s debido a la atracción gravitatoria hacia el centro. Por esta razón, la fuente de luz -que es la estrella- se va alejando cada vez más del observador, lo cual genera que las longitudes de onda de la radiación electromagnética vayan siendo paulatinamente más largas según el *Efecto Doppler*.⁹

3.5. Modificación de la estructura causal

Uno de los principales aportes de la TER fue la descripción que se realiza en torno a la causalidad de eventos los cuales se describen mediante los *conos de luz* (Véase Figura: 3.1)¹⁰. No obstante, estos conos de luz sufren algunas modificaciones que son producto de la curvatura del espacio-tiempo en la TGR, los cuales en este caso juegan un papel significativo en la descripción del proceso de colapso gravitacional.

En primer lugar, el espacio-tiempo se puede considerar como un continuo que está compuesto de múltiples eventos que suceden en un tiempo determinado, donde cada uno de ellos se asume como un punto en el espacio en un instante de tiempo; por este motivo, tales eventos son caracterizados por la posición espacial y el tiempo. En este sentido, la TER (Espacio-tiempo plano de Minkowski) plantea una descripción de los eventos bajo el principio de causalidad a través de los conos de luz, que representan las relaciones causales que tienen los eventos entre sí en diferentes momentos, mediante alguna señal física.

⁹En caso contrario, que la fuente se acerque al observador externo se dice que el corrimiento es hacia el azul del espectro electromagnético, es decir longitudes de onda cortas.

¹⁰Imagen tomada de: <https://takeshimg.wordpress.com/>

Descripción de los Conos de luz:

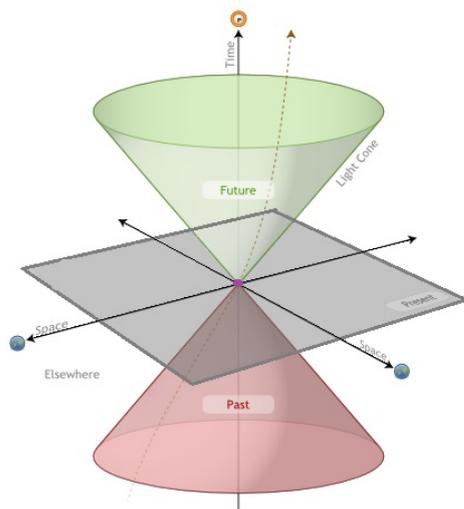


Figura 3.1: Cono de luz

Los límites del cono de luz, tal como se muestra en la figura 3.1, son las señales que se envían con una velocidad igual a la de la luz. Así pues, existe una división en dos regiones, que son futuro (Región verde) y pasado (Región roja) de un evento. En este caso, se plantea un evento P que sucede en el origen de coordenadas. De esta forma, los eventos, pueden estar relacionados causalmente con P como efecto-causa o causa-efecto: Si están relacionados efecto-causa pertenecen al futuro de P , si por el contrario es causa-efecto, pertenecen al pasado de P . Por ejemplo, si las señales que conectan dos eventos P y Q , tienen una velocidad igual a la de la luz,

se dice que la relación entre ellas es *Luminosa*, donde Q se conecta con P sobre la línea del universo del fotón. Si por el contrario, las señales son menores a la velocidad de la luz, la relación entre estos eventos será *Temporal* y pertenecerá dentro del cono de luz pasado, presente o futuro de P . Ahora, si las señales son mayores a la velocidad de la luz están relacionadas *Espacialmente* y no pertenecen a ningún lugar del evento P , es decir no se pueden conectar causalmente (Véase: Cuadro 3.1).

Intervalo E-T de los eventos (P-Q)	Relación E-T
$ds_{PQ}^2 = 0$	Luminosamente
$ds_{PQ}^2 > 0$	Temporalmente
$ds_{PQ}^2 < 0$	Espacialmente

Cuadro 3.1: Relación espacio-temporal entre eventos

Ahora bien, en el caso del espacio-tiempo plano de Minkowski en la TER, los conos de luz se orientan todos en un mismo sentido ya que se encuentran en un espacio libre

3.5. MODIFICACIÓN DE LA ESTRUCTURA CAUSAL

de materia (Véase: Figura 3.2)¹¹. Así pues, la trayectoria de cualquier señal -es decir las líneas de universo- siempre estará dentro del cono de luz de cada evento en el espacio, pues no hay nada que sobrepase la velocidad de la luz.

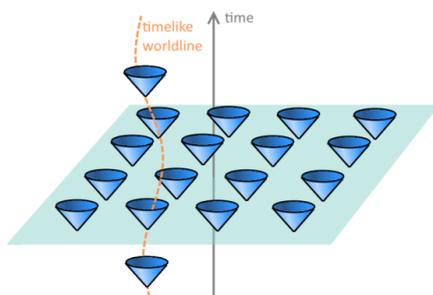


Figura 3.2: Conos de luz en la TER

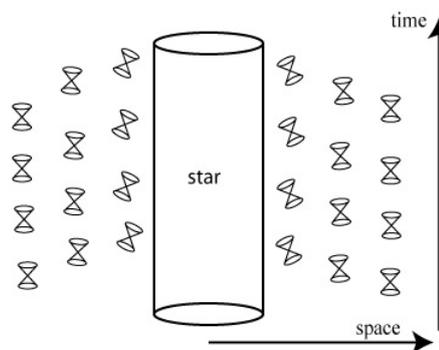


Figura 3.3: Conos de luz en la TGR

Por el contrario, en la TGR el comportamiento de los conos de luz varía debido a la curvatura que genera la presencia de materia en el espacio-tiempo. Por esta razón, al encontrarse más cerca de un objeto masivo -Como una estrella- los conos de luz tienden a variar su posición conforme se aproximan a la estrella (Véase: Figura 3.3)¹². Para explicar tal comportamiento de los conos de luz, se puede establecer a partir de la solución de Schwarzschild, la trayectoria de los fotones que en este caso se mueven a lo largo de r -es decir, las geodésicas nulas radiales-, de forma que:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \quad (3.13)$$

Sin embargo, al tratarse de geodésicas nulas, de acuerdo con el cuadro 3.1 la relación espacio-tiempo es luminosa, de modo que la ecuación anterior con $ds^2 = 0$ se puede escribir como:

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \quad (3.14)$$

Luego, al integrar esta ecuación se tiene que:

$$t = \pm(r + 2M \log |r - 2M|) \quad (3.15)$$

¹¹Imagen tomada de: <http://quantum-bits.org/?p=116>

¹²Imagen tomada de: <http://plato.stanford.edu/entries/spacetime-singularities/lightcone.html>

3.5. MODIFICACIÓN DE LA ESTRUCTURA CAUSAL

Teniendo en cuenta las consideraciones hechas previamente, se puede indicar que esta solución (3.15) proporciona una idea en cuanto a la dirección de las geodésicas radiales nulas, de acuerdo con el signo positivo y negativo. Así pues, el signo (+) hace referencia a las geodésicas salientes -con pendiente positiva-, mientras el signo (-) a las geodésicas entrantes -con pendiente negativa- tal como se muestra en la figura 3.4¹³.

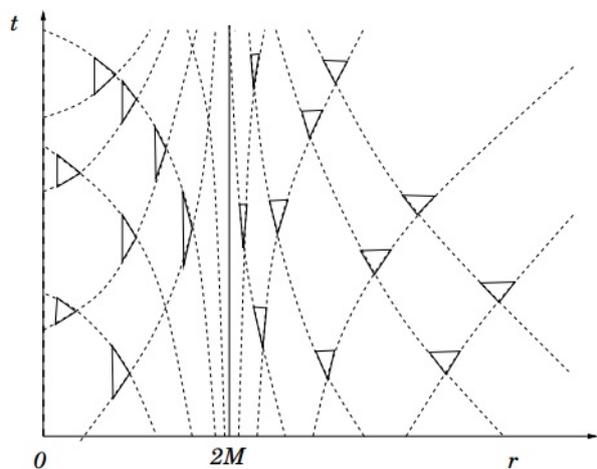


Figura 3.4: Conos de luz en la solución de Schwarzschild

de Schwarzschild tienden a cerrarse sobre sí.; pues las líneas de mundo de las partículas tienden a moverse cada vez más en trayectorias verticales, de modo que la partícula queda en vecindades cerca a $r = 2M$ en un tiempo infinito, es decir nunca atraviesa el radio de Schwarzschild.

No obstante, una manera de interpretar desde la TGR la estructura causal de la solución de Schwarzschild en cercanías a R_s es mediante las CF-E, por los planteamientos que se comentaron previamente (Véase en: Capítulo 1- Sección 1.3: 1.32). Así pues, a través de la construcción de las CF-E mediante las coordenadas avanzadas (Ecuación 1.16) se tiene que los conos de luz en la CE-F se comportan de forma similar a los descritos por la solución de Schwarzschild (figura 3.4) cuando $r \rightarrow \infty$. Sin embargo, conforme $r \rightarrow 2M$ los conos de luz a diferencia de la figura 3.4 tienden a inclinarse cada vez más la singularidad en $r = 0$ conforme pasa el tiempo tal como se observa en la figura

De esta manera, se puede observar de acuerdo a la figura 3.4, que en $r > 2M$ los conos de luz no muestran variación alguna, de hecho su comportamiento es análogo al de un espacio-tiempo plano como el de Minkowski en la TER a medida que $r \rightarrow \infty$ (Figura 3.2), lo cual es resultado directo de la solución de Schwarzschild[15]. Empero, cuando $r \rightarrow 2M$ las pendientes de las geodésicas radiales nulas tanto entrantes como salientes se aproximan a infinito; lo cual trae consigo un resultado relevante, ya que los conos de luz en cercanías al radio

¹³Imagen tomada de: Janssen, B. Teoría General de la Relatividad, 2013

3.5¹⁴. Más aún, se observa que las geodésicas radiales nulas entrantes conforme transcurre \tilde{t} conservan la pendiente de -45° respecto a r en contraste con las geodésicas radiales nulas salientes, que aumentan su ángulo a medida que se aproximan a $r = 2M$; razón por la cual tardan cada vez más en salir hacia afuera.

Además, cuando los conos de luz están en $r = 2M$, las geodésicas radiales nulas salientes forman un ángulo de 90° con r , de modo que algún tipo de radiación que sea emitida hacia $r > 2M$ quedará confinada en $r = 2M$. Eventualmente, los conos de luz convergen hacia la singularidad y por ende toda señal caerá justo en $r = 0$. Por el contrario, en $r < 2M$ es tal la inclinación de los conos de luz que tanto las geodésicas radiales nulas entrantes y salientes tienden hacia la singularidad. Ningún evento que ocurra en $r < 2M$ puede salir al exterior; de hecho, cualquier evento que ocurra $0 < r < 2M$ tenderá indudablemente en la singularidad.

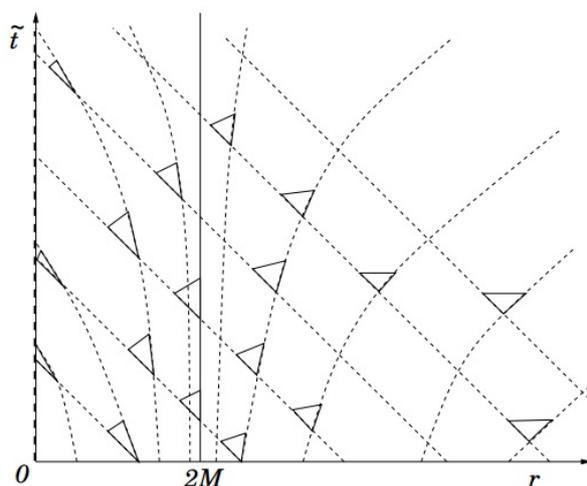


Figura 3.5: Comportamiento de los conos de luz en las CE-F

Por esta razón, se denomina “*Horizonte de eventos*” a la región en $r = 2M$, donde las partículas y ninguna señal emitida pueden escapar hacia el infinito; en palabras de Finkelstein (1958): “The surface ($r = 2M$) is thus a true unidirectional membrane: causal influences can pass through it only in one sense. This again demonstrates the asymmetry between past and future.”. Así, las relaciones causales tienden hacia el futuro del cono de luz que es la singularidad, de modo que no existe algún tipo de irreversibilidad temporal, razón por la que establece Finkelstein se conserva la asimetría temporal [8]. Esto implica que no hay forma alguna de que un objeto masivo como puede ser una estrella colapsada -al igual que cualquier señal- al atravesar el horizonte de eventos vuelva a la región plana y recobre su densidad y volumen inicial; pues el campo gravitacional generado es tal que absolutamente todo acabará inexorablemente en la singularidad.

¹⁴Imagen tomada de: Janssen, B. Teoría General de la Relatividad, 2013

Capítulo 4

Análisis del Colapso Gravitacional

En este capítulo se realiza un estudio de datos referente al colapso de estrellas para diferentes masas. Particularmente, se hace un análisis frente al desplazamiento al rojo de la luz y la dilatación gravitacional del tiempo. A su vez, se estudia sobre cómo se ve afectada la estructura causal y los conos de luz durante este proceso de implosión. Luego se realiza una pequeña descripción sobre los diversos tipos de resultados del colapso gravitacional para estrellas reales. Por último se realiza una introducción a la formación de agujeros negros por colapso gravitatorio.

4.1. Cálculo desplazamiento gravitacional al rojo

Mediante el trabajo sobre la implosión gravitatoria realizado por Oppenheimer y Snyder (1939) se pudieron observar algunas consecuencias que subyacen del análisis que se hace de dicho evento a través de la TGR. Entre estas, se encuentran la dilatación gravitatoria de tiempo (Véase: Capítulo 3-Apartado 3.3) y el gradual desplazamiento al rojo de la luz (Véase: Capítulo 3-Apartado 3.4) que irradia la superficie de la estrella a medida que va colapsando bajo su propia gravedad visto. A partir de ello, se realiza un estudio de datos en los cuales se busca demostrar como se comporta la luz en estrellas que poseen diferentes masas y radios, particularmente, cuando cada una de ellas se aproxima al radio de Schwarzschild (Ver: Cuadro 4.1); para ello, mediante la ecuación 3.12 se realiza el cálculo del desplazamiento al rojo, teniendo en cuenta el radio de Schwarzschild R_s para cada una de las estrellas y la situación que fue instaurada para dicha operación.

4.1. CÁLCULO DESPLAZAMIENTO GRAVITACIONAL AL ROJO

Tipo de estrella	Masa M_{\odot}	Radio R_{\odot}	Radio de Schwarzschild R_s (R_{\odot})
Supergigante Azul	120	16	$5,00 \times 10^{-4}$
Supergigante Azul	60	10	$2,40 \times 10^{-4}$
Supergigante Azul	25	6.5	$1,04 \times 10^{-4}$
Estrella Azul	12	4.3	$5,03 \times 10^{-5}$
Estrella Azul	5	2.7	$2,01 \times 10^{-5}$
Estrella Blanca	2.5	1.8	$1,04 \times 10^{-5}$
Estrella Amarilla	1.25	1.2	$5,10 \times 10^{-6}$
Estrella Amarilla	1.00	0.9	$4,10 \times 10^{-6}$
Enana Naranja	0.8	0.7	$3,30 \times 10^{-6}$
Enana Roja	0.5	0.4	$2,01 \times 10^{-6}$
Enana Roja	0.2	0.2	$8,49 \times 10^{-7}$
Enana Roja	0.1	0.1	$4,24 \times 10^{-7}$

Cuadro 4.1: Clasificación y datos de estrellas

Ahora bien, de acuerdo a los efectos de la dilatación gravitatoria sobre la frecuencia entre la emisión y recepción de las señales (Véase: Capítulo 3 - Sección: 3.3), a través de los datos propuestos (Ver: Cuadro 4.1) se puede dar a conocer la variación de dichas frecuencias mediante la longitud de onda observada y emitida. Así, de acuerdo con la métrica de Schwarzschild la relación entre la longitud de onda observada y emitida está dada por:

$$\lambda_o = \frac{\lambda_e}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{R_e}}} \quad (4.1)$$

Donde λ_o es la longitud de onda observada, λ_e la longitud de onda emitida desde la estrella y R_e la distancia desde donde es emitida la onda.

Bajo estos planteamientos, se puede establecer la siguiente situación: Se sitúan dos observadores a una distancia $R_o = 1,528,483km^1$ de la superficie de cada estrella (R_{\odot}).

¹Esta longitud es aproximadamente igual a la distancia -entre la tierra y el sol- a la que se encuentra

4.1. CÁLCULO DESPLAZAMIENTO GRAVITACIONAL AL ROJO

Uno de estos observadores (Observador comóvil), se aproxima a la superficie de la estrella que se encuentra colapsando bajo su propia gravedad R_e , mientras el otro observador (Observador externo) se encuentra fuera de ella (R_o). El observador comóvil, envía señales de luz amarilla ($\lambda = 575nm$) hacia el observador externo a medida que viaja junto con la estrella en su proceso de implosión y se va acercando al radio de Schwarzschild.

A través de los resultados (Véase en Anexos: Tabla de datos: Desplazamiento al Rojo y Dilatación del tiempo), se puede evidenciar que en común todos los datos arrojan que tanto el desplazamiento al rojo, como las longitudes de onda *aumentan* gradualmente a medida que R_e decrece y se acerca al radio de Schwarzschild R_s ; mientras que el tiempo τ va disminuyendo conforme R_e se aproxima a R_s . Por ejemplo, cuando los valores de desplazamiento al rojo se acercan a 1,0: $Z \approx 1,0$; las longitudes de onda observadas se encuentran en el orden de: $\lambda_o > 1000$, lo que afirma al mismo tiempo que el emisor se encuentra alejándose cada vez más del observador externo. Más aún, las longitudes de onda cuando R_e se encuentra cerca a R -Es decir, el primer de resultado de λ_o en cada una de las tablas- varían desde el inicio en las supergigantes azules, mientras que en las demás estrellas tarda más en alterarse, lo que afirma que la curvatura espacio-temporal en las estrellas masivas es tal, que existe una dilatación temporal y por ende un variación en las longitudes de onda de la luz en zonas distantes a la concentración de materia-energía.

De igual manera, cuando el observador comóvil se encuentra a una distancia de $1km$ del radio de Schwarzschild enviado señales al observador externo, el desplazamiento al rojo y las longitudes de onda oscilan entre:

- $Z = 1,14$ y $17,73$; $\lambda_o = 1233nm$ y $10772nm$ para las estrellas que se encuentran entre $1,25M_{\odot}$ y $120M_{\odot}$.
- $Z = 0,9$ y $0,13$ y $\lambda_o = 654nm$ y $1135nm$ para las estrellas cuyos valores están entre $0,1M_{\odot}$ y $1M_{\odot}$.

Lo cual afirma que existe una variación en el desplazamiento al rojo y las longitudes de onda. Véase en: <http://soho.nascom.nasa.gov/> y https://www.nasa.gov/mission_pages/soho/index.html

de onda para las estrellas masivas y las de menor masa. Sin embargo, ¿Por qué se produce tal variación en los valores de Z y λ_o para las estrellas con mayor y menor masa?; tal hecho, es consecuencia directa del campo gravitacional generado por cada una de ellas; ya que las estrellas masivas tendrán un campo gravitacional mayor que las de menor masa de acuerdo con los planteamientos de la TGR; además, durante el proceso de colapso gravitacional, la concentración de materia se va acrecentando conforme transcurre el tiempo, razón por la cual el campo gravitacional generado por la conglomeración de materia será cada vez mayor, de modo que las señales emitidas por el sistema comóvil conforme $R_e \rightarrow R_s$, es decir cuando el observador comóvil se aproxima al radio de Schwarzschild, son atraídas paulatinamente con mayor fuerza hacia la concentración de materia-energía.

De hecho, este suceso se puede comprender también a través de la estructura causal de la estrella en colapso, donde la variación que presentan los conos de luz puede dar una idea aproximada del comportamiento de la luz en zonas donde existe una conglomeración elevada de materia, en este caso: una estrella en implosión. La figura 4.1, puede ser análoga para todos los valores de la masa del cuadro 4.1, ya que se trata de un caso ideal en el que el colapso es inevitable. Así pues, durante el colapso gravitacional, la estrella conforme aumenta el tiempo disminuye su diámetro, es decir cuando el sistema de referencia comóvil R_e se aleja de R_o y se aproxima a R_s (event horizon) tal como se muestra en los datos obtenidos y en la figura 4.1².

²Imagen tomada de: <http://plato.stanford.edu/entries/spacetime-singularities/lightcone.html>

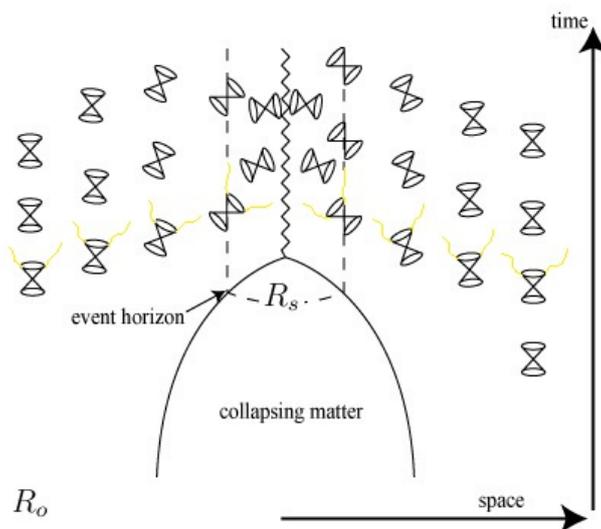


Figura 4.1: Diagrama E-T del colapso de una estrella: Variación de los conos de luz

Ahora bien, dado que las señales que se envían son fotones -es decir luz ($\lambda = 575nm$)-, en el cono de luz dichas trayectorias estas pueden ser descritas por las geodésicas radiales nulas. De esta manera, de acuerdo con los planteamientos hechos previamente sobre la estructura causal (Véase: Capítulo 3 - Sección 3.5), se puede decir que a $1km$ de R_s las longitudes de onda observadas aumentan de forma significativa en cualquier tipo de estrella en colapso, comparada con la longitud de onda inicial, de modo que el observador externo las verá desplazadas al rojo. Sin embargo, cuando el observador comóvil se encuentra en el horizonte de eventos ($R_e = R_s$), las geodésicas salientes quedan confinadas allí, en la esfera de fotones³ y las entrantes tienden a la singularidad; por el contrario, si el observador sobrepasa el horizonte de eventos ($R_e < R_s$) todas las señales quedan confinadas en este punto de "no retorno", por ello, el observador externo no podrá recibir ningún tipo de información.

4.2. Cálculo dilatación gravitacional del tiempo

Además del desplazamiento al rojo y las longitudes de onda, otro efecto relevante del colapso gravitacional es la medición del tiempo efectuado por diversos sistemas de referencia. Para poder observar tal hecho, se retoma la situación planteada anteriormente

³Es una región del espacio en donde la gravedad es tan fuerte que los fotones viajan alrededor de órbitas.

4.2. CÁLCULO DILATACIÓN GRAVITACIONAL DEL TIEMPO

en la que un observador externo (R_o) se encuentra recibiendo señales de un observador en un sistema comóvil (R_e); en este caso además, es necesario agregar una nueva suposición: Cada uno de los observadores tienen sus relojes sincronizados en $3600s$ cuando se encuentran a una distancia inicial de R_o de la superficie de la estrella.

De esta manera, tal como se muestra en los resultados obtenidos (Véase: Anexos, Tabla de datos: Desplazamiento al Rojo y Dilatación del tiempo. Columna 3), de manera global se puede observar que la medición del tiempo para el sistema comóvil parece ser cada vez más lenta conforme su radio disminuye y se aproxima al R_s . Sin embargo, en las estrellas con masa menor, la variación del tiempo es más contundente que en las estrellas masivas. En un caso extremo, se puede comparar la enana roja de $0,1M_\odot$ con la supergigante azul de $120M_\odot$ y se puede constatar que la variación de tiempo inicial es de $3600s$ y $3599,95s$ respectivamente. El hecho que no varíe el tiempo en la enana roja es que al ser tan pequeña la masa, la curvatura espacio-temporal producida no es tan prolongada como en la supergigante azul, de modo que el tiempo parece comportarse tal como en un espacio-tiempo plano.

Ahora bien, suponiendo que el observador comóvil se encuentra a una distancia de $1km$ del radio de Schwarzschild, se puede evidenciar de forma más contundente la dilatación gravitatoria de tiempo. De esta forma, el tiempo medido por el observador comóvil varía de la siguiente manera:

- Para las estrellas que se encuentran entre $1,25M_\odot$ y $120M_\odot$, el tiempo medido por el sistema comóvil oscila entre $1678,50s$ y $192,15s$.
- Para las estrellas cuyos valores están entre $0,1M_\odot$ y $1M_\odot$, tales valores de tiempo para el sistema comóvil se encuentran entre $1822,93s$ y $1706,78s$.

A partir de ello, se observa que la variación en la medición del tiempo a $1km$ de R_s , es mucho más evidente en las estrellas masivas que las que poseen menor masa. Así pues, mientras en la supergigante azul el observador comóvil pasan $192s$ de acuerdo a la medición de su reloj, para el observador externo en R_o transcurrirán $3599,95s$. En otro caso, por ejemplo en la estrella amarilla, mientras en el sistema comóvil transcurren $1822,93s$,

en el sistema de referencia externo pasan 3599,99s. Este hecho, es indudablemente un efecto del principio de equivalencia, ya que al ser la gravedad y la aceleración análogas, el tiempo en sistemas acelerados tiende a moverse más lentamente de acuerdo a la TER; por ende en la TGR bajo los efectos producidos por el contenido de masa-energía (curvatura espacio-temporal), el tiempo tiende a ralentizarse en zonas donde la aceleración o campo gravitacional es mayor, es decir donde la curvatura es significativa. Empero, para poder dar cuenta del fenómeno de dilatación gravitacional del tiempo, se puede establecer una analogía con la paradoja de los gemelos de la TER, como se señalará a continuación.⁴

Durante del proceso de colapso gravitacional las mediciones de tiempo realizadas por observadores dentro y fuera de la estrella en implosión varían tal como se demostró con los datos obtenidos anteriormente. Así pues, se puede suponer que si el sistema de referencia comóvil se encuentra en campos gravitacionales cada vez más grandes, su tiempo con respecto al observador externo se va a ralentizar. Para poder entender este hecho, se puede realizar una similitud con la paradoja de los gemelos, mediante las siguientes apreciaciones:

1. Los dos observadores se encuentran juntos fuera de la estrella a una distancia de terminada -espacio-tiempo casi plano- con los relojes sincronizados.
2. Cuando el observador comóvil (R_e) llega a la superficie de la estrella, la estrella empieza a colapsar gravitacionalmente de modo que $R_e \rightarrow R_s$.
3. Conforme implosiona la estrella el campo gravitacional aumenta gradualmente, de modo que el observador comóvil es acelerado cada vez más rápido hacia el centro de ella y su tiempo va haciéndose cada vez más lento con respecto al observador externo.
4. Cuando se encuentra a $1km$ de la estrella la aceleración es tal que el tiempo tiende a ser más lento.

⁴Para realizar una profundización sobre esta paradoja remítase a: Stephani, H. (2004) "Relativity: An introduction to special and general relativity" pp. (20-21) y Schutz, B. (2009) "A first course in general relativity" pp. (25-27)

Para efectos de este análisis, se establece que para el observador externo han transcurrido 30 años de acuerdo a la medición en su sistema de referencia. Con respecto a ello, ¿Cuánto tiempo transcurrirá para el observador comóvil cuando se encuentra a $1km$ del radio de Schwarzschild?. A continuación en el cuadro 4.2 se puede observar la medición del tiempo para el sistema comóvil cuando se encuentra a $1km$ de algunas estrellas:

Tipo de estrella	Masa M_{\odot}	Tiempo τ (años)
Supergigante Azul	120	1.6
Supergigante Azul	60	2.29
Estrella Azul	5	7.74
Estrella Amarilla	1.00	15.19
Enana Roja	0.1	26.35

Cuadro 4.2: Tiempo medido por el observador comóvil a $1km$ del radio de Schwarzschild

Al igual que en la paradoja de los gemelos, se puede observar que el tiempo para el observador que se encuentra acelerado -sistema de referencia comóvil- transcurre más lento que para el observador externo -Sistema de referencia fuera de la estrella-. Además, dicha variación es más contundente en las estrellas cuya masa es mayor que en estrellas menores, comparadas con el sol ($1M_{\odot}$). De hecho, en la supergigante azul de $120M_{\odot}$ donde se espera que el campo gravitacional sea muy fuerte; mientras para el observador externo pasan 30 años, para un observador a $1km$ de R_s tan solo transcurre 1.6 años. Caso contrario a la estrella amarilla, donde para el observador en el sistema comóvil transcurre casi la mitad de los años comparado con el observador externo; donde la intensidad del campo -o curvatura espacio-temporal- no es tan fuerte, comparada con la supergigante azul.

4.3. Posibles resultados del colapso gravitacional

Gracias al desarrollo progresivo que ha tenido la TGR a lo largo de los años, se han realizado diversos estudios en el campo de la astrofísica que han permitido abrir nuevas perspectivas de muchos fenómenos gravitacionales. Particularmente, ha dado lugar a una teoría más compacta sobre la evolución estelar y más aún sobre el estado final

de las estrellas. Estas investigaciones han arrojado un nuevo panorama sobre el colapso gravitacional, pues en algunos casos se han realizado análisis con estrellas un poco más realistas donde toman bajo consideración los efectos que causan la rotación y la presión -por ejemplo- en ellas.

Así pues, se ha planteado que el estado final de las estrellas con suficiente masa forma agujeros negros, sin embargo nuevas investigaciones arrojan que el estado final del colapso gravitacional podría generar *supernovas*, *enanas blancas*, *estrellas de neutrones* o finalmente *agujeros negros*, este tipo de estrellas -a diferencia de las estrellas normales- se caracterizan por [42]:

- Este tipo de estrellas no se encuentran en ningún proceso de combustión y no se mantienen contra el colapso gravitacional por medio de presión térmica. Las enanas blancas se equilibran por medio de la presión degenerativa de electrones, mientras las estrellas de neutrones compensan la atracción gravitacional a través de la presión degenerativa de neutrones. Por el contrario los agujeros negros son el final de estrellas colapsadas en su totalidad.
- Estas estrellas (Enanas blancas y estrellas de neutrones) se caracterizan por ser compactas y pequeñas, por lo que generan campos gravitatorios mucho más fuertes que las estrellas normales.

Ahora bien, las fases finales de las estrellas dependen en gran medida de su masa, por esta razón, dado la cantidad de materia contenida en las estrellas se puede clasificar el estado final de cada una de ellas a partir del siguiente diagrama. De acuerdo a los datos del cuadro 4.1 y a la figura 4.2⁵, se puede realizar una clasificación de la posible fase final de cada una de las estrellas a partir de su masa.

Durante las últimas etapas de la evolución estelar, estas estrellas (que se encuentran entre $0,1 < M_{\odot} < 1,25$) desprenden algunas capas exteriores denominadas *nebulosas planetarias*, las cuales dejan como remanente una enana blanca que se enfría poco a poco.⁶

⁵Imagen tomada de: Camenzind, M. Compact objects in Astrophysics.

⁶Sin embargo, en algunos casos cabe la posibilidad que la enana blanca incremente su masa (en sistemas binarios) de modo que el núcleo incremente tanto su temperatura que la presión aumente y la combustión nuclear produzca Supernovas de tipo Ia.

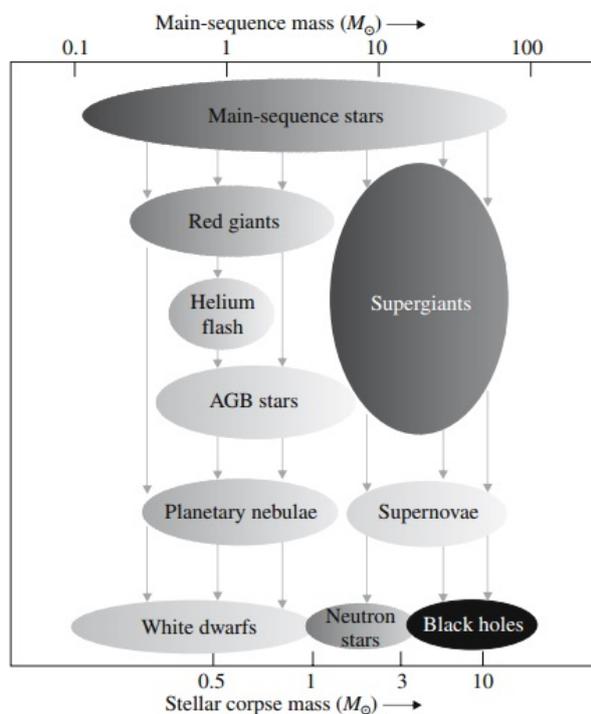


Figura 4.2: Estado final de las estrellas de acuerdo a su masa inicial

Así pues, para las estrellas que poseen una masa entre $2.5 < M_{\odot} < 12$ generan supernovas⁷, que son explosiones estelares las cuales emiten gran cantidad de energía y luminosidad; no obstante, los “núcleos” de tales explosiones son estrellas de neutrones. Por último las estrellas mayores a $25M_{\odot}$, pueden culminar sus etapas en agujeros negros, que sería la el resultado total del colapso gravitacional.⁸

4.4. Agujeros Negros

Luego de conocerse la solución de Schwarzschild [15], en la que se planteó la existencia de un radio crítico y una singularidad espacio-temporal, se abrieron una serie de

⁷Las supernovas poseen una clasificación la cual depende particularmente del elemento químico que se observa de sus espectros, estas pueden ser de tipo I, Ia, Ib, Ic y II.

⁸Algunas hipótesis afirman que estrellas supermasivas $M_{\odot} > 100$ generan hipernovas, las cuales son explosiones muchos más potentes que las supernovas estándar y producen Gamma-Ray Bursts de larga duración, cuyo núcleo da origen a un agujero negro.

Bajo estos planteamientos, se puede suponer que las estrellas que se encuentran en el cuadro 4.1 pueden terminar como:

- *Enanas blancas* (White Dwarfs): Estrellas que se encuentran entre $0.1 < M_{\odot} < 1.25$ que son: las enanas rojas, naranjas y amarillas.
- *Supernovas* (Supernovae) dejando como remanente una *estrella de neutrones* (Neutron Stars): Estrellas cuya masa varía entre $2.5 < M_{\odot} < 12$ que son la estrellas blancas y azules.
- *Agujeros negros* (Black Holes): Estrellas donde la masa oscila entre $25 < M_{\odot} < 120$.

investigaciones referentes a los astros de gran masa. Sin embargo, la cuestión sobre estrellas masivas se intensificó luego de conocerse los trabajos de Chandrasekhar sobre la masa límite para las enanas blancas y más aún por el estudio realizado por Tolman, Oppenheimer y Volkoff sobre el límite de masa para las estrellas de neutrones.^{9 10} Esto, ya que los efectos que traía consigo la existencia de estrellas masivas era eventualmente el colapso gravitacional, que fue modelado a partir de las leyes de la TGR en 1939 por Oppenheimer y Snyder. Una de las reflexiones que se hace en torno a estos eventos es la posible existencia de regiones en las que la fuerza de atracción gravitacional es tal que la luz no puede escapar; a estos cuerpos se les denominó agujeros negros.¹¹

Un agujero negro es el resultado de un colapso gravitacional completo, en el que el espacio-tiempo está tan fuertemente curvado -por su gran concentración de materia- que algún objeto que caiga dentro no puede salir hacia el exterior, incluso la luz [38]. Así pues, tan pronto cuando la estrella comienza su proceso de implosión y llega al radio de Schwarzschild este límite se denomina *horizonte de eventos* que se puede definir como “el punto de no retorno” en el que cualquier evento que suceda allí no afecta al exterior, por ejemplo la luz emitida desde el horizonte de eventos queda ahí atrapada.

Es importante señalar que durante el periodo de 1960 y 1975 que se denominó *La edad de oro*, se realizaron diversas investigaciones a la luz de la relatividad general las cuales permitieron abrir nuevos conceptos que fueron y son de gran importancia en el estudio de

⁹Es importante señalar, que A. Eddington en 1926 realizó algunas reflexiones sobre las estrellas masivas en las que señaló algunos efectos que traería consigo la existencia de tales estrellas en el universo de acuerdo a la TGR, como la imposibilidad de la emisión de luz, el desplazamiento de las líneas espectrales y la prolongada curvatura espacio-temporal. Véase en: Eddington, A. (1926) “The internal constitution of stars” pp. (6)

¹⁰Algunos estudios sobre el radio de Schwarzschild ya se habían realizado desde el año 1920 por parte de Artur Eddington, Jean Becquerel, Elie Cartan, Paul Langevin, entre otros. Quienes pese a que no pudieron resolver el problema matemático de la solución de Schwarzschild, intuyeron la posibilidad del colapso gravitacional. Véase en: Luminet, J.P (1992). “Black Holes”. pp (120-122)

¹¹“At a conference in New York in 1967, Dr. Wheeler, seizing on a suggestion shouted from the audience, hit on the name “black hole” to dramatize this dire possibility for a star and for physics.” Véase en: Overbye, D. (April 14, 2008). John A. Wheeler, Physicist who coined the term ‘Black Hole’, is dead at 96. Recuperado de: http://www.nytimes.com/2008/04/14/science/14wheeler.html?_r=0

la física tales como los agujeros negros, las singularidades espacio-temporales, las ondas gravitacionales, entre otras. Particularmente, se desarrollaron diversos trabajos los cuales permitieron plantear nuevas perspectivas frente a la física de los agujeros negros, ya que se pudo afirmar que tales cuerpos en el universo también se pueden considerar como dinámicos. Entre estas, sobresalen las investigaciones realizadas por: R. Kerr¹² (1963) y T. Newman¹³ (1965). Sin embargo, algunos trabajos ya habían sido expuestos años anteriores; entre estos se encuentran los estudios hechos por: K. Schwarzschild¹⁴ (1916), Reissner¹⁵ (1916) y G. Nordström¹⁶(1918). En estos análisis específicamente, los científicos plantean soluciones locales a las ecuaciones de campo de Einstein, que posteriormente permitirían caracterizar 3 propiedades físicas de los agujeros negros que son su masa, carga eléctrica y momento angular. Por esta razón, años siguientes a través del estudio de los agujeros negros, Chandrasekhar afirma que¹⁷:

“The black holes of nature are the most perfect macroscopic objects there are in the universe: the only elements in their construction are our concepts of space and time. And since the general theory of relativity provides only a single unique family of solutions for their descriptions, they are the simplest objects as well.”

Sin embargo, análisis posteriores realizados por Stephen Hawking y Roger Penrose sugirieron la existencia de singularidades espacio-temporales en el interior de los agujeros negros e incluso llegaron a generalizar su idea para el origen del universo. Tal planteamiento, nace mediante los trabajos realizados sobre la inestabilidad gravitatoria en presencia de grandes concentraciones de materia, en donde las leyes de la TGR son

¹²“*Gravitational Field of a Spinning mass as an example of algebraically special metrics*” Physical Review. 11 pp.(237–238)

¹³“*Metric of a Rotating, Charged Mass*” Journal of Mathematical Physics. 6 pp.(918-919)

¹⁴“*Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*”. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften. pp.(189-196)

¹⁵“*Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie*”. Annalen der Physik 355 pp.(106-120)

¹⁶“*On the Energy of the Gravitational Field in Einstein’s Theory.*” Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. 20 pp. (1076-1091)

¹⁷Véase en: Chandrasekhar, S. (1983) “The Mathematical Theory of Black Holes”. New York: United States of America: Oxford University Press.

bastante importantes y conllevan a nuevos interrogantes sobre el colapso gravitacional, así como establecen Hawking y Penrose (1970):...”*what is the ultimate fate of a system in gravitational collapse?*”¹⁸. Una de las hipótesis a las que llegaron estos científicos fue, que luego de formarse el agujero negro a causa del colapso gravitacional, la materia sigue su proceso de implosión, originando dentro del agujero negro un punto en el cual la gravedad se hace tan intensa que tanto la curvatura espacio-temporal como la densidad se hace infinita; es decir, se forma una singularidad. Esta región del espacio-tiempo, se encuentra oculta por el horizonte de eventos de los agujeros negros de acuerdo con la hipótesis de Penrose sobre *la censura cósmica*; la cual afirma que a partir del colapso de materia no se pueden producir singularidades desnudas, ya que esta debe estar oculta por el horizonte de eventos de modo que no se puede tener algún tipo de información sobre ella¹⁹[40].

De la superficie de la estrella a los agujeros negros:

Para entender un poco más acerca del comportamiento de la luz y el tiempo durante el proceso de colapso gravitacional es necesario plantear diversos sistemas de referencia de modo que se pueda comparar los efectos en puntos arbitrarios del sistema en implosión. Así pues, a través de la imagen 4.3²⁰, se puede realizar una descripción de tal fenómeno para dos observadores, pues este diagrama espacio-tiempo muestra el colapso gravitacional desde el inicio (Surface of the star), la formación del agujero negro (Event horizon), hasta el final de la implosión que es la singularidad (Singularity). En este caso, existe un observador externo (Distant astronomer) y un observador comóvil que emite señales: $E_1, E_2..etc.$).

¹⁸Véase en: Hawking, S. y Penrose, R. (1970) “The singularities of gravitational collapse and cosmology”. Proceedings of the Royal Society. 314 pp. (529-530)

¹⁹Es importante señalar, que en las singularidades espacio temporales la TGR junto con las demás leyes físicas se hacen incomprensibles, ya que no se puede entender que sucede dentro de estas regiones que se suponen son caóticas. Sin embargo, se establece que mediante una teoría cuántica de gravedad tal singularidad no exista e incluso a través de esta sea posible explicar el origen del universo. Véase en: Hawking, S. (1990). “Historia del tiempo: Del big bang a los agujeros negros”. Madrid, España: Alianza editorial.. pp. (112-113)

²⁰Imagen tomada de: Luminet, J.P. Black Holes.

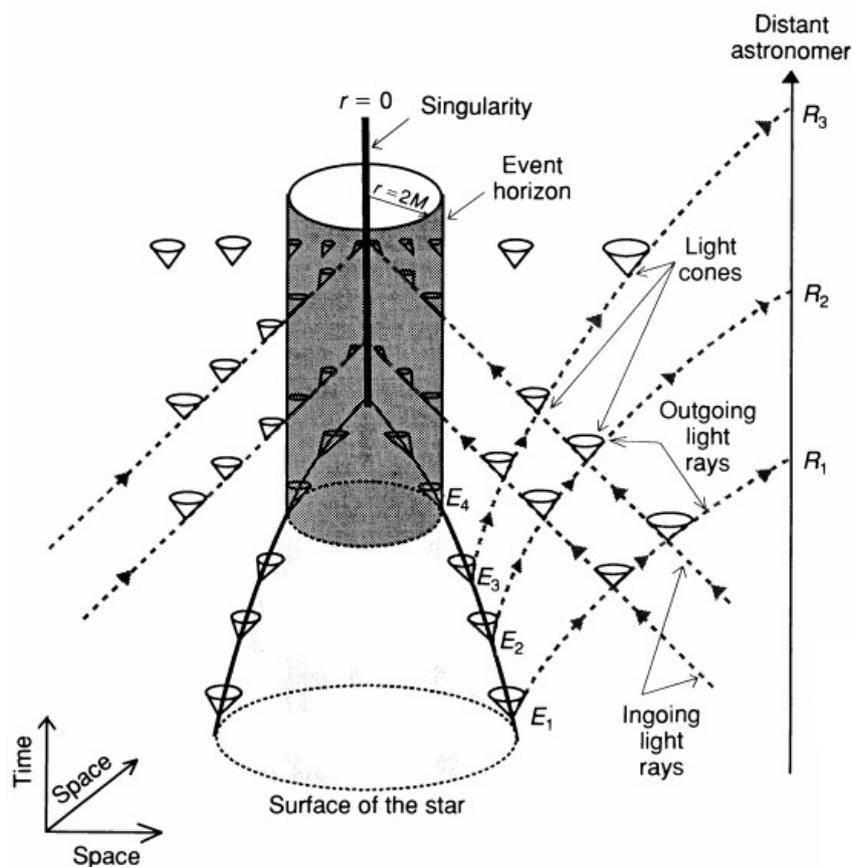


Figura 4.3: Colapso gravitacional: Formación de un agujero negro

Así pues, un observador que se mueve con la superficie de la estrella hacia $r = 0$ emite luz para un astrónomo distante en una distancia determinada, las cuales están descritas por E . Tal como se puede observar, desde la superficie de la estrella el observador comóvil emite luz (E_1) que es recibida por el astrónomo distante (R_1) en un tiempo particular; no obstante, cuando vuelve a emitir luz desde un radio menor al inicial (E_2) y luego (E_3), la señal es recibida por el astrónomo (R_2) y (R_3), es decir en intervalos de tiempo mayor a los anteriores. Por esta razón, las señales que son producidas desde E_3 hasta un poco antes de E_4 llegan espaciados por intervalos de tiempo cada vez mayores, lo que a su vez afirma que en cercanías del horizonte de eventos (E_4), la luz tardará en viajar más hacia la superficie ya que pierde energía por la atracción del campo gravitacional; razón por la cual la luz sufre un desplazamiento hacia el rojo. Finalmente, cuando el observador se encuentra justo en $r = 2m$, estos fotones no logran viajar hacia el astrónomo distante, la atracción es tan fuerte que la luz no puede escapar, por lo que la luz queda justo en el horizonte de eventos, particularmente, en la esfera de fotones. Eventualmente, los conos de luz

convergen hacia la singularidad en $r = 0$, de modo que todas las señales llegarán justo allí.

Finalmente, se puede observar que el colapso gravitacional en su forma completa, genera singularidades espacio-temporales las cuales se encuentran cubiertas por el horizonte de eventos de los agujeros negros. Por esta razón, este fenómeno ha traído consigo un sinnúmero de hipótesis que a través de los años han abierto nuevas perspectivas a través del desarrollo de teorías que han permitido enlazar conceptos de la física nuclear, la física cuántica, entre otros; a la TGR y por ende dar una explicación más completa acerca de la implosión gravitacional. Bajo esta perspectiva, los agujeros negros se han catalogado como uno de los mecanismos más violentos de muerte estelar, donde ni si quiera la luz puede escapar debido al intenso campo gravitacional que produce. Sin embargo, a través de su estudio subyacen algunas cuestiones como: ¿Qué sucede cuando un observador se encuentra en el horizonte de eventos? y más aún ¿Qué pasaría si traspasa el horizonte de eventos hacia la singularidad?; además de ello, ¿Qué sucede con la información que cae en el agujero negro?. Tales planteamientos abren una nueva puerta hacia cuestiones cada vez más profundas que no sólo se tratan de sustentar de forma magistral dentro del campo de la física, sino que además conllevan a reflexionar sobre nuestra existencia en el universo.

Conclusiones

1. Mediante el análisis de datos que se realizó bajo la suposición de dos sistemas de referencia; se evidenció -tal como se predice en el modelo de Oppenheimer y Snyder- que conforme pasa el tiempo las longitudes de onda recibidas van alargándose cada vez más, es decir que existe un desplazamiento al rojo; en la cual el emisor va alejándose cada vez más del receptor. Sin embargo, tal como se esperaba de acuerdo con la teoría, los resultados de los datos establecidos arrojaron que la variación del desplazamiento al rojo es más contundente en las estrellas masivas donde las longitudes de onda, tienden más hacia el rojo del espectro electromagnético, que las estrellas de menor masa (comparadas con el sol). Tal hecho fue confirmado cuando en cercanías al radio de Schwarzschild los valores de Z entre estrellas masivas y de menor masa, variaban significativamente, tal como se esperaba por la intensidad del campo gravitacional producido en el proceso de colapso gravitacional.
2. Una de los resultados más relevantes que se obtuvo a través del estudio de datos fue acerca de la medición del tiempo para dos sistemas de referencia –externo y comóvil-. A partir de ellos, se hizo evidente que las mediciones del tiempo para el sistema de referencia comóvil van disminuyendo conforme se acerca al radio de Schwarzschild; de hecho, el tiempo medido por el observador comóvil a $1km$ diverge significativamente entre estrellas de mayor y menor masa tal como se demostró. Estos resultados a su vez, reafirmaron que de acuerdo con el principio de equivalencia, en zonas donde el potencial gravitacional es mayor, el tiempo tiende a ser cada vez más lento, es decir en zonas cercanas a R_s , donde se esperaría que por el colapso de la estrella, el campo gravitacional sea mayor.
3. Dentro del modelo ideal que se estableció para analizar el colapso gravitacional, se pudo constatar bajo el análisis del tensor métrico de la solución de Schwarzschild que

la luz y el tiempo se ven afectadas por el campo gravitacional generado por la estrella y más aún implosionando bajo su propia gravedad. Además, se pudo apreciar como la estructura causal se ve afectada por el contenido de masa-energía en el espacio-tiempo. Para ello, mediante las coordenadas de Finkelstein-Eddington se realizó una aproximación sobre el comportamiento de los conos de luz en zonas alrededor del radio de Schwarzschild, demostrando así que cualquier tipo de radiación que sea emitido desde esta distancia difícilmente llega a un observador externo. Más aún, todo tipo de señal que se emita desde este radio tiende hacia la singularidad y no puede salir de allí. Tal hecho además supone que tal como se observa en la naturaleza, existe una asimetría temporal, pues ningún suceso puede ser irreversible al momento de cruzar el horizonte de eventos.

4. Fue bastante significativo realizar el análisis de datos, ya que permitió argumentar de forma clara los planteamientos de Oppenheimer y Snyder sobre el comportamiento de la luz y del tiempo para el colapso de una estrella de simetría esférica y estática. Junto con ello, se observó que los datos divergen entre estrellas masivas y de menor masa (comparadas con el sol), pues tal como se planteó anteriormente la materia juega un papel fundamental en el colapso gravitacional, razón por la cual los efectos que se desprenden de la solución de Schwarzschild varían de forma significativa para las supergigantes azules y las enanas rojas, como se demostró en el estudio de datos.
5. La importancia de este tipo de trabajos radica en que se hace significativo que desde la Universidad Pedagógica Nacional se reconozcan los tópicos de la astronomía y la astrofísica como conocimientos relevantes dentro del campo de la enseñanza-aprendizaje. Por este motivo, se espera que esta monografía sea un aporte en dicho proceso para los estudiantes del departamento de física que quieran reconocer más acerca de las investigaciones realizadas mediante la teoría general de la relatividad, particularmente el colapso gravitacional estelar.

Bibliografía

- [1] D'INVERNO, R. (1992) *Introducing Einstein's relativity*. New York, United States: Clarendon press.
- [2] EDDINGTON, A. (1924) *A comparison of Whitehead's formulæ*. Nature. Vol. (113) p.(192)
- [3] EINSTEIN, A. (1905) *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Annalen der Physik. Vol. 17 pp. (63-91)
- [4] EINSTEIN, A. (1907) *Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen*. Annalen der Physik. pp. (411-462)
- [5] EINSTEIN, A. (1915) *Die Feldgleichungen der Gravitation*. Annalen der Physik. pp. (844-847)
- [6] EINSTEIN, A. (1922) *The meaning of Relativity*. United States of America: Princeton University Press.
- [7] EINSTEIN, A. (1994) *Sobre la teoría especial y general de la relatividad*. Traducción por: Miguel paredes Madrid, España: Alianza editorial.
- [8] FINKELSTEIN, D. (1958) *Past-Future Asymmetry of the Gravitational Field of a Point Particle* . Physical Review. Vol. (110) pp. (965-967)
- [9] KAY, D. (1988) *Theory and problem of Tensor calculus*. United States of America: McGraw-Hill.
- [10] KRUSKAL, M. (1960) *Maximal Extension of Schwarzschild Metric*. Physical Review. Vol.(119) pp.(1743-1745)

- [11] MISNER, C THORNE, K Y WHEELER. J (1970). *Gravitation*. San Francisco, United States of America: Freeman and Company.
- [12] PENROSE, R. (2006) *Camino a la realidad: Una guía completa de las leyes del universo*. Barcelona, España: Debate editorial.
- [13] SÁNCHEZ, R. (2008) *El mundo después de la revolución: La física de la segunda mitad del siglo XX*. Fronteras del conocimiento. Madrid: España pp. (63-91)
- [14] SÁNCHEZ, R. (2005) *Albert Einstein: Su vida y obra*. Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza. Zaragoza: España. Vol. 27 pp. (11-24)
- [15] SCHWARZSCHILD, K. (1916) *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften. pp.(189-196)
- [16] SZEKERES, G. (1960) *On the singularities of a Riemannian Manifold*. Publicationes Mathematicae Debrecen Vol.(285)
- [17] TEJEIRO, J. (2005) *Principio de Relatividad General*. Notas de clase, Universidad nacional de Colombia. Bogotá, Colombia: Unibiblos
- [18] THORNE, K. (1994) *Agujeros negros y tiempo curvo. El escandaloso legado de Einstein*. Barcelona, España: Grijalbo S.A
- [19] WALD,R. (1984) *General Relativity*. United States of America:The University of Chicago Press.
- [20] WEINBERG, S. (1972) *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the General Theory of Relativity*. United States of America: John Wiley and Sons, Inc.
- [21] EDDINGTON, A. (1926) *The internal constitution of the stars*. United Kingdom: Cambridge University Press.
- [22] KLAPP, J. Y CORONA, M. (1987) *Fundamentos de la teoría de estructura y evolución estelar*. México: Técnico científicas S.A

- [23] SCHWARZSCHILD, M. (1958) *Structure and evolution of stars*. New York, United States of America: Dover Publications, Inc.
- [24] CHANDRASEKHAR, S. (1935) *The Highly collapsed configurations of a stellar mass*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. Vol (95). pp. (207-225)
- [25] HAWKING, S Y ISRAEL, W. (1987) *Three Hundred Years of Gravitation*. United Kingdom: Cambridge University Press.
- [26] BURROWS, A. (2015) *Baade and Zwicky: "Super-novae", neutron stars, and cosmic rays*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. Princeton University. Vol (112). pp. (1241-1242)
- [27] OPPENHEIMER, R. Y VOLFOFF, G. (1939) *On Massive Neutron Cores*. Physical Review. Vol. (55) pp. (374-381)
- [28] BOMBACI, I. (1996) *The maximum mass of a neutron star*. Astronomy and Astrophysics. Vol. (305) pp. (871-877)
- [29] PANKAJ, J. Y MALAFARINA, D. (2012) *Recent developments in gravitational collapse and spacetime singularities*. International Journal of Modern Physics. pp.(2641-2729)
- [30] OPPENHEIMER, R. Y SNYDER, H. (1939) *On continued gravitational contraction*. Physical Review. Vol. (56) pp.(455-458)
- [31] CARROLL, B Y OSTLIE, D. (2007) *An introduction to modern astrophysics*. United States of America: Pearson, Addison Wesley.
- [32] HARTLE, J. (2003) *Gravity: An introduction to Einstein's general relativity*. United States of America: Pearson, Addison Wesley.
- [33] BOER, K Y SEGGEWISS, W. (2008) *Stars and Stellar evolution*. France: EDP Sciences.
- [34] LUMINET, J.P (1992) *Black Holes*. United Kingdom: Cambridge University Press.

- [35] MICHELL, J. (1784) *On the means discovering the distance, magnitude, of the fixed stars, in consequence of the diminution of the velocity of their light, in case such a diminution should be found to take place in any of them, and such other data should be procured from observations, as would be farther necessary for that purpose..* Philosophical transactions of the Royal Society of London. Vol. 74 pp.(35-57).
- [36] MASSEY, P. Y MEYER, M. (2001) *Stellar Masses*. Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics. Bristol, United Kingdom: Nature Publishing Group.
- [37] TOLMAN, R. (2003) *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. New York, United States of America: Dover Publications, Inc.
- [38] RUFFINI, R. Y WHEELER, J. (1971). *Introducing the black hole*. Physics Today. Vol. (24) pp.(30-41).
- [39] WALD, R. (1992) *Space, time and gravity. The theory of the Big Bang and Black Holes*. Chicago, United States of America: The university of Chicago Press; Ltd. London.
- [40] HAWKING, S. Y PENROSE, R. (1996). *The nature of space-time*. United States of America: Princeton University Press.
- [41] FALCKE, H. Y HEHL, F. (2003) *The Galactic Black Hole: Lectures on general relativity and astrophysics* . Bristol, United Kingdom: IOP Publishing Ltd.
- [42] CAMENZIND, M. (2007) *Compact objects in Astrophysics. White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes*. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag.
- [43] CARROLL, S. (2007) *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. United States of America: Pearson, Addison Wesley.
- [44] STEPHANI, H (2004) *Relativity: An introduction to Special and General Relativity*. United Kingdom: Cambridge University Press.
- [45] SCHUTZ, B (2009) *A first course in General Relativity*. United Kingdom: Cambridge University Press.

Parte I

Anexos

Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Las coordenadas de Kruskal-Szekeres se construyen sobre las trayectorias de luz. Para ello, se parte de las coordenadas nulas de la solución de Schwarzschild²¹ Por tanto el intervalo será:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} = 0 \quad (4.2)$$

Despejando dt

$$dt = \frac{r}{\left(\frac{r}{2m} - 1\right)} \left(\frac{1}{2m}\right) dr$$

Integrando ambos lados se obtiene,

$$t = r + 2m \ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right) \quad (4.3)$$

Definiendo la coordenada tortuga $r^* = t$

$$r^* = r + 2m \ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right) \quad (4.4)$$

Ahora bien, planteando las coordenadas nulas:

$$\text{Coordenada avanzada} \longrightarrow \bar{v} = t + r^*$$

$$\text{Coordenada retardada} \longrightarrow \bar{u} = t - r^*$$

Derivando las coordenadas nulas, se tiene

$$\begin{aligned} d\bar{u} &= dt - dr\left(1 + \frac{2m}{r - 2m}\right) \\ d\bar{v} &= dt + dr\left(1 + \frac{2m}{r - 2m}\right) \end{aligned}$$

²¹Las coordenadas nulas o geodésicas nulas son las trayectorias de las partículas que tienen una velocidad igual a la velocidad de la luz c en el cono de luz, éstas a su vez podrían considerarse las historia de los fotones, por ende $(ds^2 = 0)$. [29]

Así pues, multiplicando $d\bar{u}d\bar{v}$

$$d\bar{u}d\bar{v} = dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2}$$

Luego, multiplicando ambos lados $\left(1 - \frac{2m}{r}\right)$ y reemplazando en la ecuación (1.11) con la signatura $(-, +, +, +)$ se tiene:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)d\bar{u}d\bar{v} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (4.5)$$

Esta ecuación (4.5) representa la métrica de Schwarzschild en coordenadas nulas. Por otro lado, teniendo en cuenta que: $e^{\frac{r^*}{2m}} \approx 1 - \frac{2m}{r}$; Y que, $r^* = \frac{\bar{v} - \bar{u}}{2}$. La métrica se puede reescribir como:

$$ds^2 \approx \pm \left(e^{\frac{-\bar{u}}{4m}} e^{\frac{\bar{v}}{4m}}\right) d\bar{u}d\bar{v} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (4.6)$$

Don el signo negativo representa la región $r > 2m$ y el signo positivo la región $r < 2m$. Introduciendo un nuevo cambio de variable y calculando las diferenciales:

$$\begin{aligned} U = -e^{\frac{-\bar{u}}{4m}} &\longrightarrow dU = \frac{1}{4m} e^{\frac{-\bar{u}}{4m}} d\bar{u} \\ V = e^{\frac{\bar{v}}{4m}} &\longrightarrow dV = \frac{1}{4m} e^{\frac{\bar{v}}{4m}} d\bar{v} \end{aligned}$$

Despejando $d\bar{u}$ y $d\bar{v}$ de las diferenciales de dU y dV , se tiene

$$\begin{aligned} d\bar{u} &= 4me^{\frac{\bar{u}}{4m}} dU \\ d\bar{v} &= 4me^{\frac{-\bar{v}}{4m}} dV \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación (4.6) y realizando un tratamiento matemático se obtiene:

$$ds^2 = -32 \frac{m^3}{r} e^{\frac{-r}{2m}} dU dV + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.7)$$

A la ecuación (4.7) se le denomina coordenadas nulas de Kruskal, sin embargo instaurando las coordenadas nulas: Retardada $U = T - X$ y avanzada $V = T + X$ de tiene finalmente las coordenadas de Kruskal-Szekeris:

$$ds^2 = \frac{32M^3 e^{\frac{-r}{2m}}}{r} (-dT^2 + dX^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.8)$$

Coordenadas de Finkelstein-Eddington

En este caso, se construye las coordenadas teniendo en cuenta que la coordenada temporal va a ser la única que se modifique así $(t, r, \theta, \varphi) \longrightarrow (\bar{t}, r, \theta, \varphi)$. De esta manera, se tiene,

$$\bar{t} = t + 2m \ln(r - 2m) \quad (4.9)$$

Ahora, derivando la ecuación (4.9) y despejando dt

$$dt = d\bar{t} - \frac{2m}{r - 2m} dr \quad (4.10)$$

Elevando al cuadrado la ecuación (4.10) y reemplazando dt^2 en la ecuación (1.11)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left[(d\bar{t})^2 - \left(\frac{4m}{r - 2m}\right) d\bar{t} dr + \frac{4m^2}{(r - 2m)^2} dr^2 \right] + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 d\varphi^2) \quad (4.11)$$

Operando la ecuación (4.11), se tiene

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\bar{t}^2 + \frac{4m}{r} d\bar{t} dr - \frac{4m^2}{r(r - 2m)} dr^2 + \frac{r}{r - 2m} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 d\varphi^2)$$

Factorizando dr^2

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\bar{t}^2 + \frac{(r^2 - 4m^2)}{r} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 d\varphi^2)$$

De esta manera se tiene finalmente que las coordenadas de Finkelstein-Eddington son:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\bar{t}^2 + \frac{4m}{r} d\bar{t} dr + \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 d\varphi^2) \quad (4.12)$$

Dilatación gravitacional del tiempo desde la TGR

- Analogía existente entre el potencial gravitatorio de la teoría newtoniana (ϕ) y el tensor métrico de la TGR ($g_{\mu\nu}$)

En primer lugar, es necesario tener en cuenta que las partículas en la TGR se mueven alrededor de geodésicas, de modo que las ecuaciones de caída libre tal como afirma Wheeler (1972), pueden escribirse como:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\gamma\sigma}^\mu \frac{dx^\gamma}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = 0 \quad (4.13)$$

Donde $\frac{d^2 x^\mu}{ds^2}$ representa la aceleración en la mecánica newtoniana, mientras $\Gamma_{\gamma\sigma}^\mu \frac{dx^\gamma}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds}$ da cuenta de la aceleración debida a la curvatura espacio-temporal y s es un parámetro que describe la trayectoria que es τ (Tiempo propio). Sin embargo, para el caso de una partícula cuya velocidad es menor que cero ($v \ll c$), se tiene que $\frac{dx^\mu}{dt} \ll c$, ya que al no moverse con velocidades relativistas el tiempo es absoluto -según la mecánica newtoniana-; así pues, la componente temporal es:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{44}^\mu \frac{dx^4}{ds} \frac{dx^4}{ds} = 0 \quad (4.14)$$

De esta manera, teniendo en cuenta que $\frac{dx^4}{dt} = c$, entonces:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{44}^\mu c^2 = 0 \quad (4.15)$$

Ahora bien, a partir de un campo gravitatorio débil, se puede escribir el tensor métrico como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski en un espacio-

tiempo plano y $h_{\mu\nu}$ representa una pequeña perturbación debida a la presencia de un cuerpo -es decir, un campo gravitacional débil-. A partir de ello, teniendo en cuenta los símbolos de Christoffel de la forma:

$$\Gamma_{44}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu i} \left[\frac{g_{i4}}{dx^4} + \frac{g_{4i}}{dx^4} - \frac{g_{44}}{dx^i} \right] \quad (4.16)$$

y reescribiendo estos en términos de $\eta_{\mu\nu}$ y $h_{\mu\nu}$:

$$\Gamma_{44}^{\mu} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu i} + h^{\mu i}) \left[\frac{(\eta_{i4} + h_{i4})}{dx^4} + \frac{(\eta_{4i} + h_{4i})}{dx^4} - \frac{(\eta_{44} + h_{44})}{dx^i} \right] \quad (4.17)$$

Con respecto a ello, se puede decir que la variación temporal de $h_{\mu\nu}$ es mucho más pequeña que la espacial, de modo que las derivadas con respecto al tiempo -es decir con respecto a (dx^4) - se desprecian, además las derivadas del tensor de Minkowski son cero ($\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$) [43], razón por la que se puede expresar Γ_{44}^{μ} como:

$$\Gamma_{44}^{\mu} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu i} + h^{\mu i}) \left[-\frac{h_{44}}{dx^i} \right] \quad (4.18)$$

Asumiendo los valores $h_{\mu\nu} \ll 1$, se tiene que:

$$\Gamma_{44}^{\mu} = -\frac{1}{2}(\eta^{\mu i} \frac{h_{44}}{dx^i}) \quad (4.19)$$

Así, multiplicando a ambos lados por $\eta_{\mu\mu}$ y estableciendo que $\mu = i$ de modo que cumpla con la propiedad de Kronecker delta, se tiene que: $\Gamma_{44}^{\mu} = -\frac{1}{2}(\delta^{\mu i} \frac{h_{44}}{dx^i})$. De esta forma, reemplazando en la ecuación 3.2, se tiene que:

$$\frac{d^2 x_{\mu}}{dt^2} - \frac{1}{2}c^2 \left(\frac{h_{44}}{dx^i} \right) = 0 \quad (4.20)$$

Así pues, al considerar un campo gravitacional en la teoría newtoniana se tiene que: $g = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$, que en términos del potencial gravitacional se puede escribir como $g = -\nabla\phi$; se puede observar que por el principio de equivalencia es $a = -\nabla\phi$. De esta forma, teniendo en cuenta que el potencial gravitacional está dado por:

$$\phi = \frac{-GM}{R} \quad (4.21)$$

y con la condición anterior se puede ver que $\frac{d^2 x_\mu}{dt^2} = -\frac{d\phi}{dt}$, de modo que la ecuación 3.3 es:

$$-\phi = \frac{1}{2}c^2 h_{44} \quad (4.22)$$

reemplazando ϕ , despejando h_{44} y reemplazando en la coordenada temporal $g_{44} = \eta_{44} + h_{44}$ se tiene que,

$$g_{44} = -\left(1 + \frac{2GM}{Rc^2}\right) \quad (4.23)$$

■ Dilatación gravitacional del tiempo:

La dilatación gravitacional del tiempo, es un fenómeno que se evidencia en la TGR y que es producido por el campo gravitatorio (curvatura espacio-temporal) que genera una concentración de masa. En este caso, se inicia estableciendo la métrica de Schwarzschild²²

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.24)$$

Teniendo en cuenta que las medición del tiempo se realizan para una distancia determinada r y al ser perfectamente simétrica (es decir sin ninguna variación de las coordenadas angulares θ y φ), entonces:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 \quad (4.25)$$

Ahora bien, si se ubica un observador a una distancia r en un sistema de referencia ($ds'^2 = c^2 d\tau^2$) y considerando que $ds'^2 = ds^2$ se tiene:

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{R_s}{r}} t \quad (4.26)$$

Donde τ es el tiempo medido desde la superficie de la estrella y t el tiempo medido por el observador que se encuentra a una distancia lejana de la estrella.

²²Se plantea esta métrica ya que se realiza el estudio de colapso gravitacional para una estrella esférica y sin momento angular.

Desplazamiento gravitacional al rojo mediante la TGR

Este fenómeno de dilatación gravitacional de tiempo en el espacio-tiempo curvo, trae consigo otros efectos en la TGR, tal como el desplazamiento al rojo de la luz. Al considerar la relación entre la frecuencia f , la longitud de onda λ y el periodo T :

$$f = \frac{1}{T} \quad (4.27)$$

Y

$$T = \frac{\lambda}{c} \quad (4.28)$$

Se puede hallar la longitud de onda que es detectada por un observador que se encuentra fuera de la estrella, con:

$$\tau = \frac{\lambda_{emitida}}{c} \quad (4.29)$$

Y

$$t = \frac{\lambda_{observada}}{c} \quad (4.30)$$

Reemplazando la ecuación 4.26 en la ecuación 4.29, se tiene:

$$\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}} t = \frac{\lambda_{emitida}}{c} \quad (4.31)$$

Ahora, sustituyendo t de la ecuación 4.30 a la ecuación 4.31:

$$\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}} \left(\frac{\lambda_{observada}}{c} \right) = \frac{\lambda_{emitida}}{c} \quad (4.32)$$

Despejando y simplificando, se tiene finalmente:

$$\lambda_{observada} = \frac{\lambda_{emitida}}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}} \quad (4.33)$$

En este caso, para un observador externo el tiempo transcurrirá más rápido, por ende, la frecuencia entre las ondas será menor, mientras la longitud de onda más larga. En el caso del observador en la superficie de la estrella el tiempo transcurre más lento, por lo que la frecuencia será mayor y la longitud de onda más corta.

El desplazamiento al rojo, sucede cuando las longitudes de onda se alargan y se mueven hacia el rojo del espectro electromagnético; así, la medición del corrimiento al rojo viene dada por la relación:

$$1 + Z = \frac{\lambda_{observada}}{\lambda_{emitida}} \quad (4.34)$$

Sin embargo, el valor de Z depende de si este es negativo o positivo, pues se dice que el corrimiento es al rojo cuando $Z > 0$, es decir que el emisor se encuentra alejándose del observador y es al azul cuando $Z < 0$, donde por el contrario, el emisor está acercándose al observador, de acuerdo con el efecto Doppler.

Finalmente, con la ecuación 4.34 y la relación de las longitudes de onda de la ecuación 4.33, se tiene que el desplazamiento al rojo es:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}} - 1 \quad (4.35)$$

Este hecho, claramente es una consecuencia directa de la dilatación gravitatoria de tiempo, ya que durante el proceso de colapso gravitacional -si se establece un sistema de referencia comóvil y uno fuera de él-, el observador comóvil se va alejando paulatinamente del observador externo, por ende la longitud de onda de cualquier tipo de radiación tenderá a correrse cada vez más hacia rojo, aunque para el observador que se encuentra implosionando junto con la estrella, la luz siga siendo igual.

Tabla de datos: Desplazamiento al Rojo y Dilatación del tiempo

Para observar como es vista la luz emitida desde una estrella en colapso gravitacional y el comportamiento del tiempo para un sistema de referencia externo y otro comóvil, se realiza un estudio de datos de estrellas[36]. Para ello, fue necesario clasificar el tipo de estrellas, hallar el radio de Schwarzschild, determinar una distancia r de la estrella e ir disminuyendo este hasta que se acerque a R_s ; de igual modo, se realizó la respectiva conversión de unidades tal como se mostrará a continuación:

Tipo de estrella	Radio (km)	Radio de Schwarzschild (km)
Supergigante Azul	11100000	350
Supergigante Azul	6955080	170
Supergigante Azul	4520802	73
Estrella Azul	2990684	35
Estrella Azul	1877871	14
Estrella Blanca	1251914	7,3
Estrella Amarilla	834609	3,6
Estrella Amarilla	625957	2,9
Enana Naranja	486855	2,3
Enana Roja	278203	1,4
Enana Roja	139101	0,59072
Enana Roja	69550	0,29536

Cuadro 4.3: Datos de estrellas en Kilómetros (km)

Así pues, sumando cada radio de la estrella con la distancia $r = 1,528,483km$ y disminuyendo la distancia a la mitad de la anterior hasta llegar a R_s , junto con la sincronización de los relojes en $t = 3600seg$, se pudieron obtener los respectivos datos del desplazamiento al rojo y la dilatación del tiempo. Por medio de la ecuación 4.33 se hallaron las longitudes de onda, luego, mediante la ecuación 4.35 los valores de desplazamiento al rojo y con la ecuación 4.26 los datos de la dilatación gravitacional del tiempo, como se muestra en seguida :

- Supergigante Azul: $120M_{\odot}$, $R_s = 350km$, $r_o = 12,628,483km$

Radio (km)	Corrimiento al rojo (Z)	λ_o (nm)	Tiempo (τ)
12.628.48	$1,385 \times 10^{-5}$	575,007	3599,95
6314241,5	$2,771 \times 10^{-5}$	575,01	3599,90
3157120,75	$5,543 \times 10^{-5}$	575,03	3599,80
1578560,37	0,000110	575,06	3599,60
789280,187	0,000221	575,12	3599,20
394640,093	0,000443	575,25	3598,40
197320,046	0,000888	575,51	3596,80
98660,023	0,00177	576,02	3593,60
49330,012	0,00356	577,05	3587,20
24665,006	0,00717	579,12	3574,36
12332,503	0,01449	583,33	3548,54
6166,251	0,02964	592,04	3496,33
3083,125	0,06210	610,70	3389,50
1541,562	0,13742	654,01	3165,04
770,7814	0,35343	778,22	2659,89
385,3907	2,2999	1897,46	1090,92
351	17,73	10772,6	192,15
96,34767	∞	∞	∞

Cuadro 4.4: Resultados Supergigante Azul ($120M_{\odot}$)

- Supergigante Azul: $60M_{\odot}$, $R_s = 170km$, $r_o = 8,483,563km$

Radio (km)	Corrimiento al rojo (Z)	λ_o (nm)	Tiempo (τ)
8483563	$1,00 \times 10^{-5}$	575,005	3599,96
4241781,5	$2,00 \times 10^{-5}$	575,011	3599,92
2120890,75	$4,00 \times 10^{-5}$	575,023	3599,85
1060445,37	$8,01 \times 10^{-5}$	575,046	3599,71
530222,68	0,000160	575,092	3599,42
265111,34	0,000320	575,184	3598,84
132555,67	0,000641	575,369	3597,69
66277,83	0,00128	575,738	3595,38
33138,91	0,00257	576,480	3590,75
16569,45	0,00516	577,972	3581,48
8284,72	0,01042	580,991	3562,87
4142,36	0,02117	587,174	3525,35
2071,18	0,04375	600,157	3449,09
1035,59	0,09379	628,934	3291,27
517,79	0,22016	701,592	2950,43
258,89	0,70654	981,265	2109,52
171	12,07	7519,10	275,29
64,72	∞	∞	∞

Cuadro 4.5: Resultados Supergigante Azul ($60M_{\odot}$)

- Supergigante Azul: $25M_{\odot}$, $R_s = 73km$, $r_o = 6,049,285km$

Radio (km)	Corrimiento al rojo (Z)	λ_o (nm)	Tiempo (τ)
6049285	$6,03 \times 10^{-6}$	575,003	3599,97
3024642,5	$1,20 \times 10^{-5}$	575,006	3599,95
1512321,25	$2,41 \times 10^{-5}$	575,013	3599,91
756160,625	$4,82 \times 10^{-5}$	575,027	3599,82
378080,312	$9,65 \times 10^{-5}$	575,055	3599,65
189040,156	0,000193	575,111	3599,30
94520,0781	0,000386	575,222	3598,60
47260,039	0,000773	575,444	3597,21
23630,019	0,001548	575,890	3594,43
11815,009	0,003103	576,784	3588,86
5907,504	0,00623	578,585	3577,68
2953,752	0,012591	582,239	3555,23
1476,876	0,025669	589,760	3509,90
738,438	0,053424	605,718	3417,42
369,219	0,116440	641,953	3224,53
184,609	0,286104	739,510	2799,14
92,304	1,186652	1257,325	1646,35
74	7,60	4946,3	418,49
46,152	∞	∞	∞

Cuadro 4.6: Resultados Supergigante Azul ($25M_{\odot}$)

- Estrella Azul: $12M_{\odot}$, $R_s = 35km$, $r_o = 4,519,167km$

Radio (km)	Corrimiento al rojo (Z)	λ_o (nm)	Tiempo (τ)
4519167	$3,87 \times 10^{-6}$	575,002	3599,98
2259583,5	$7,74 \times 10^{-6}$	575,004	3599,97
1129791,75	$1,54 \times 10^{-5}$	575,008	3599,94
564895,875	$3,09 \times 10^{-5}$	575,017	3599,88
282447,937	$6,19 \times 10^{-5}$	575,035	3599,77
141223,968	0,000123	575,071	3599,55
70611,984	0,000247	575,142	3599,10
35305,992	0,000496	575,285	3598,21
17652,996	0,000992	575,570	3596,42
8826,498	0,00198	576,143	3592,85
4413,249	0,00398	577,293	3585,69
2206,624	0,00802	579,615	3571,33
1103,312	0,0162	584,343	3542,43
551,656	0,0333	594,157	3483,92
275,828	0,0702 3	615,366	3363,85
137,914	0,157	665,632	3109,82
68,957	0,425	819,393	2526,25
36	5	3450	600
34,478	∞	∞	∞

Cuadro 4.7: Resultados Estrella Azul ($12M_{\odot}$)

- Estrella Azul: $5M_{\odot}$, $R_s = 14km$, $r_o = 3,406,354km$

Radio (km)	Corrimiento al rojo (Z)	λ_o (nm)	Tiempo (τ)
3406354	$2,05 \times 10^{-6}$	575.001	3599,99
1703177	$4,10 \times 10^{-6}$	575,002	3599,98
851588,5	$8,22 \times 10^{-6}$	575,004	3599,97
425794,25	$1,64 \times 10^{-5}$	575,009	3599,94
212897,125	$3,28 \times 10^{-5}$	575,018	3599,88
106448,562	$6,57 \times 10^{-5}$	575,037	3599,76
53224,281	0,000131	575,0756	3599,52
26612,140	0,000263	575,151	3599,05
13306,070	0,000526	575,302	3598,10
6653,035	0,00105	575,605	3596,21
3326,517	0,00211	576,213	3592,41
1663,258	0,00423	577,435	3584,81
831,629	0,00852	579,901	3569,56
415,814	0,0172	584,931	3538,87
207,907	0,0354	595,395	3476,67
103,953	0,0750	618,127	3348,82
51,976	0,169	672,687	3077,20
25,988	0,472	846,597	2445,08
15	2,87	2226,96	929,51
12,994	∞	∞	∞

Cuadro 4.8: Resultados Estrella Azul ($5M_{\odot}$)

- Estrella Azul: $2.5M_{\odot}$, $R_s = 7,3km$, $r_o = 2,780,397km$

Radio (km)	Corrimiento al rojo (Z)	λ_o (nm)	Tiempo (τ)
2780397	$1,31 \times 10^{-6}$	575,000	3599,99
1390198,5	$2,62 \times 10^{-6}$	575,001	3599,99
695099,25	$5,25 \times 10^{-6}$	575,003	3599,98
347549,625	$1,05 \times 10^{-5}$	575,006	3599,96
173774,812	$2,10 \times 10^{-5}$	575,012	3599,92
86887,406	$4,20 \times 10^{-5}$	575,024	3599,84
43443,703	$8,40 \times 10^{-5}$	575,048	3599,69
21721,851	0,000168	575,096	3599,39
10860,925	0,000336	575,193	3598,78
5430,462	0,000672	575,386	3597,57
2715,231	0,001346	575,774	3595,15
1357,615	0,00269	576,552	3590,30
678,807	0,00542	578,116	3580,59
339,403	0,0109	581,285	3561,07
169,701	0,0222	587,781	3521,71
84,850	0,0460	601,454	3441,65
42,425	0,0990	631,931	3275,67
21,212	0,234	710,002	2915,48
10,606	0,791	1029,853	2009,99
8.3	1,88	1656,55	1249,57
5,303	∞	∞	∞

Cuadro 4.9: Resultados Estrella Azul ($2.5M_{\odot}$)

- Estrella Amarilla: $1.25M_{\odot}$, $R_s = 3,6km$, $r_o = 2,363,092km$

Radio (km)	Corrimiento al rojo (Z)	λ_o (nm)	Tiempo (τ)
2363092	$7,61 \times 10^{-7}$	575,000	3599,99
1181546	$1,52 \times 10^{-6}$	575,000	3599,99
590773	$3,04 \times 10^{-6}$	575,001	3599,98
295386,5	$6,09 \times 10^{-6}$	575,003	3599,97
147693,25	$1,21 \times 10^{-5}$	575,007	3599,95
73846,625	$2,43 \times 10^{-5}$	575,014	3599,91
36923,312	$4,87 \times 10^{-5}$	575,028	3599,82
18461,656	$9,75 \times 10^{-5}$	575,056	3599,64
9230,828	0,000195	575,112	3599,29
4615,414	0,000390	575,224	3598,59
2307,707	0,000780	575,449	3597,19
1153,853	0,00156	575,899	3594,37
576,926	0,00313	576,802	3588,75
288,463	0,00629	578,621	3577,46
144,231	0,0127	582,313	3554,78
72,115	0,0259	589,912	3508,99
36,057	0,0539	606,049	3415,56
18,028	0,117	642,740	3220,58
9,014	0,290	741,924	2790,04
4,507	1,228	1281,628	1615,13
4,6	1,14	1233,23	1678,50
2,253	∞	∞	∞

Cuadro 4.10: Resultados Estrella Amarilla ($1.25M_{\odot}$)

- Estrella Amarilla: $1M_{\odot}$, $R_s = 2,9km$, $r_o = 2,154,440km$

Radio (km)	Corrimiento al rojo (Z)	λ_o (nm)	Tiempo (τ)
2154440	$6,73 \times 10^{-7}$	575,000	3599,99
1077220	$1,34 \times 10^{-6}$	575,000	3599,99
538610	$2,69 \times 10^{-6}$	575,001	3599,99
269305	$5,38 \times 10^{-6}$	575,003	3599,98
134652,5	$1,07 \times 10^{-5}$	575,006	3599,96
67326,25	$2,15 \times 10^{-5}$	575,012	3599,92
33663,125	$4,30 \times 10^{-5}$	575,024	3599,84
16831,562	$8,61 \times 10^{-5}$	575,049	3599,68
8415,781	0,000172	575,099	3599,37
4207,890	0,000344	575,198	3598,75
2103,945	0,000689	575,396	3597,51
1051,972	0,00138	575,794	3595,03
525,986	0,00276	576,591	3590,06
262,993	0,00555	578,196	3580,09
131,496	0,0112	581,447	3560,08
65,748	0,0228	588,116	3519,71
32,874	0,0472	602,173	3437,54
16,437	0,101	633,603	3267,02
8,218	0,243	714,774	2896,01
4,109	0,843	1059,958	1952,90
3,9	0,97	1135,53	1822,93
2,054	∞	∞	∞

Cuadro 4.11: Resultados Estrella Amarilla ($1M_{\odot}$)

- Enana Naranja: $0.8M_{\odot}$, $R_s = 2,3km$, $r_o = 2,015,338km$

Radio (km)	Corrimiento al rojo (Z)	λ_o (nm)	Tiempo (τ)
2015338	$5,70 \times 10^{-7}$	575,000	3599,99
1007669	$1,14 \times 10^{-6}$	575,000	3599,99
503834,5	$2,28 \times 10^{-6}$	575,001	3599,99
251917,25	$4,56 \times 10^{-6}$	575,002	3599,98
125958,625	$9,13 \times 10^{-6}$	575,005	3599,96
62979,312	$1,82 \times 10^{-5}$	575,010	3599,93
31489,656	$3,65 \times 10^{-5}$	575,021	3599,86
15744,828	$7,30 \times 10^{-5}$	575,042	3599,73
7872,414	0,000146	575,084	3599,47
3936,207	0,000292	575,168	3598,94
1968,103	0,000584	575,336	3597,89
984,051	0,00117	575,673	3595,79
492,025	0,00234	576,348	3591,57
246,012	0,00470	577,706	3583,13
123,006	0,00948	580,452	3566,18
61,503	0,0192	586,062	3532,04
30,751	0,0396	597,789	3462,75
15,375	0,0843	623,523	3319,84
7,687	0,194	686,849	3013,75
3,843	0,577	907,277	2281,55
3,3	0,81	1044,53	1981,73
1,921	∞	∞	∞

Cuadro 4.12: Resultados Enana Naranja ($0.8M_{\odot}$)

- Enana Roja: $0.5M_{\odot}$, $R_s = 1,4km$, $r_o = 1,806,686km$

Radio (km)	Corrimiento al rojo (Z)	λ_o (nm)	Tiempo (τ)
1806686	$3,87 \times 10^{-7}$	575,000	3599,99
903343	$7,74 \times 10^{-7}$	575,000	3599,99
451671,5	$1,54 \times 10^{-6}$	575,001	3599,99
225835,75	$3,09 \times 10^{-6}$	575,002	3599,98
112917,875	$6,19 \times 10^{-6}$	575,004	3599,97
56458,937	$1,23 \times 10^{-5}$	575,007	3599,95
28229,468	$2,47 \times 10^{-5}$	575,014	3599,91
14114,734	$4,95 \times 10^{-5}$	575,029	3599,82
7057,367	$9,92 \times 10^{-5}$	575,057	3599,64
3528,683	0,000198	575,114	3599,28
1764,341	0,000396	575,228	3598,57
882,170	0,000794	575,457	3597,14
441,085	0,00159	575,915	3594,28
220,542	0,00318	576,834	3588,55
110,271	0,00640	578,685	3577,07
55,135	0,0129	582,442	3554,00
27,567	0,0264	590,181	3507,39
13,783	0,0550	606,632	3412,28
6,891	0,120	644,133	3213,62
3,445	0,297	746,231	2773,93
2,4	0,54	1044,53	2323,79
1,722	1,309	1328,051	1558,67
0,861	∞	∞	∞

Cuadro 4.13: Resultados Enana Roja ($0.5M_{\odot}$)

- Enana Roja: $0.2M_{\odot}$, $R_s = 0,59km$, $r_o = 1,667,584km$

Radio (km)	Corrimiento al rojo (Z)	λ_o (nm)	Tiempo (τ)
1667584	$1,77 \times 10^{-7}$	575,000	3599,99
833792	$3,54 \times 10^{-7}$	575,000	3599,99
416896	$7,08 \times 10^{-7}$	575,000	3599,99
208448	$1,41 \times 10^{-6}$	575,001	3599,99
104224	$2,83 \times 10^{-6}$	575,002	3599,99
52112	$5,66 \times 10^{-6}$	575,003	3599,98
26056	$1,13 \times 10^{-5}$	575,007	3599,95
13028	$2,26 \times 10^{-5}$	575,013	3599,91
6514	$4,53 \times 10^{-5}$	575,026	3599,83
3257	$9,06 \times 10^{-5}$	575,052	3599,67
1628,5	0,000181	575,104	3599,34
814,25	0,000362	575,209	3598,69
407,125	0,000726	575,418	3597,38
203,562	0,00145	575,836	3594,77
101,781	0,00291	576,676	3589,53
50,890	0,00585	578,367	3579,04
25,445	0,0118	581,793	3557,96
12,722	0,0240	588,832	3515,43
6,361	0,0499	603,714	3428,77
3,180	0,108	637,208	3248,54
1,590	0,261	725,264	2854,13
1,39	0,26	725,30	2853,95
0,795	0,972	1133,985	1825,42
0,397	∞	∞	∞

Cuadro 4.14: Resultados Enana Roja ($0.2M_{\odot}$)

- Enana Roja: $0.1M_{\odot}$, $R_s = 0,29km$, $r_o = 1,598,033km$

Radio (km)	Corrimiento al rojo (Z)	λ_o (nm)	Tiempo (τ)
1598033	$9,24 \times 10^{-8}$	575,000	3600,00
799016,5	$1,84 \times 10^{-7}$	575,000	3599,99
399508,25	$3,69 \times 10^{-7}$	575,000	3599,99
199754,125	$7,39 \times 10^{-7}$	575,000	3599,99
99877,062	$1,47 \times 10^{-6}$	575,001	3599,99
49938,531	$2,95 \times 10^{-6}$	575,002	3599,98
24969,265	$5,91 \times 10^{-6}$	575,003	3599,97
12484,632	$1,18 \times 10^{-5}$	575,007	3599,95
6242,316	$2,36 \times 10^{-5}$	575,014	3599,91
3121,158	$4,73 \times 10^{-5}$	575,027	3599,83
1560,579	$9,46 \times 10^{-5}$	575,054	3599,65
780,289	0,000189	575,109	3599,31
390,144	0,000378	575,218	3598,63
195,072	0,000757	575,436	3597,27
97,536	0,00151	575,873	3594,54
48,768	0,00304	576,749	3589,08
24,384	0,00611	578,514	3578,13
12,192	0,0123	582,094	3556,12
6,096	0,0251	589,457	3511,70
3,048	0,0522	605,063	3421,13
1,524	0,113	640,395	3232,38
1,29	0,13	654,43	3161,11
0,762	0,277	734,774	2817,19
0,381	1,109	1212,804	1706,78
0,190	∞	∞	∞

Cuadro 4.15: Resultados Enana Roja ($0.1M_{\odot}$)