ARGUMENTAR PARA DEFINIR Y DEFINIR PARA ARGUMENTAR

LUZ HELENA SILVA CALDERÓN

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2013

ARGUMENTAR PARA DEFINIR Y DEFINIR PARA ARGUMENTAR

LUZ HELENA SILVA CALDERÓN

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de
Magíster en Docencia de la Matemática

Asesora
Carmen Samper de Caicedo
Profesora Titular Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2013

En cumplimiento del Acuerdo 031 de 2007 del Consejo Superior de la Universidad, Artículo 42, parágrafo 2:

Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos.

Luz Helena Silva Calderón
c.c. 51949393

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"Argumentar para definir y definir par argumentar."** Presentado por la estudiante:

Luz Helena Silva Calderón – 2012185025

Como requisito parcial para optar al título de **Magister en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por la estudiante en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado** con **48** Puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 06 dias del mes de diciembre de 2013.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) *CARMEN SAMPER*

Jurados:

Profesor(a) *BETTINA PEDEMONTE*

Profesor (a) *ÓSCAR JAVIER MOLINA*

AGRADECIMIENTOS

A Carmen Samper de Caicedo, profesora titular del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, por su interés en dirigir este trabajo y por aportar sus valiosos conocimientos y experiencia para su elaboración.

A Tania Julieth Plazas Merchán, profesora de la Universidad Pedagógica Nacional, por su colaboración aplicando las tareas diseñadas y brindando información necesaria para el análisis de resultados.

A los profesores de la Maestría en Docencia de la Matemática, cuyos aportes para fortalecer mi formación profesional se vieron reflejados en este trabajo.

A mi familia por su constante apoyo.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado en maestría de profundización
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Argumentar para definir y definir para argumentar
Autor(es)	Silva Calderón, Luz Helena
Director	Samper de Caicedo, Carmen
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2013. 134 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional UPN
Palabras Claves	Argumentación, definición, proceso de conceptualización en geometría, construcción de definiciones en geometría

2. Descripción

Trabajo de grado que se propone determinar el tipo de tareas para el aula, relacionadas con la definición de un objeto geométrico, que favorecen la argumentación. Entre otros, se asumieron como referentes teóricos los planteamientos de Vinner y de Villiers sobre proceso de conceptualización y construcción de definiciones en geometría, la propuesta para la construcción y análisis de definiciones del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional, los planteamientos sobre argumentación de Leitão, Boero, Douek y Ferrari, el modelo de Toulmin para argumentos y la relación entre argumentación y definición propuesta por Kublikowski. Con base en los referentes teóricos se diseñó un Taller compuesto por 16 tareas en torno a la definición de simetría axial que fue aplicado en un curso de la asignatura Elementos de Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional. Las tareas se clasificaron como problemas abiertos o no abiertos, de argumentación o de construcción. Se hicieron grabaciones de audio y video y se recogió el trabajo escrito de los estudiantes. Se analizó el trabajo realizado por tres estudiantes clasificando los argumentos generados según tipo, clase y relación con la definición, y determinando el tipo de tarea que lo generó, así como el proceso argumentativo al que pertenece. La principales conclusiones obtenidas son:

- Parece que para favorecer la argumentación no es significativo si el problema es o no abierto, sino que sea un problema de argumentación y, preferiblemente, de construcción.
- Las tareas que pertenecen simultáneamente a los procesos de argumentar para definir y definir para argumentar o las que pertenecen únicamente al segundo proceso parecen ser las que más favorecen la argumentación.

3. Fuentes

Entre las fuentes bibliográficas consultadas se destacan:

De Villiers, M. (1998). To Teach Definitions in Geometry or Teach to Define. En A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 248-255).

Stellenbosch: University of Stellenbosch.
De Villiers, M. (2004). Using Dynamic Geometry to Expand Mathematics Teachers ' Understanding of Proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(5), 703-724.
Douek, N., & Scali, E. (2000). About Argumentation and Conceptualisation. En *Proceedings of PME-XXIV* (Vol. 2, pp. 249-256). Hiroshima.
Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1982). Basic Geometric Concepts - Definitions and Images. En A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 18-23). Anthwerp, Belgium: Universitaire Instelling Antwerpen.
Kublikowski, R. (2009). Definition within the Structure of Argumentation. *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, *16*(29).
Leitão, S. (2007). Processos de construção do conhecimento: a Argumentação em foco. *Pro-Posições*, *18*(3), 75-92.
Perry, P., Samper, C., Camargo, L., & Molina, Ó. (2012). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En *Geometría plana: un espacio de aprendizaje*. Universidad Pedagógica Nacional.
Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. Barcelona: Ediciones Península.
Otras fuentes fueron las grabaciones de audio y video y las respuestas escritas que los estudiantes dieron a un taller de 16 tareas, agrupadas en 10 preguntas.

4. Contenidos

El objetivo general de este estudio es determinar qué tipo de tareas para el aula, relacionadas con la definición de un objeto geométrico, propician la argumentación. Los objetivos específicos son:

- Fundamentar el asunto de estudio a partir de la lectura de literatura especializada.
- Diseñar tareas para el aula, en torno a la definición de un objeto geométrico, y aplicarlas.
- Analizar los datos recogidos en la aplicación de las tareas para determinar en qué casos se propició la argumentación.
- Agrupar e interpretar los resultados del análisis de datos.
- Analizar las tareas que propiciaron la argumentación para determinar sus características generales.
- Redactar un documento final acerca del estudio realizado.

El trabajo está compuesto por la Introducción y cinco capítulos: Presentación del problema, Referentes teóricos, Diseño metodológico, Análisis de datos, Análisis de resultados y conclusiones.

En la Introducción se hace una descripción general del estudio y de la estructura de este documento.

En el Capítulo 1 se hace la presentación del problema. Incluye los antecedentes, la pregunta de investigación, la hipótesis de trabajo, los objetivos generales y específicos, la metodología utilizada y la importancia de este estudio en el campo de investigación en Educación Matemática.

En el Capítulo 2 se presentan los referentes teóricos que sustentan el estudio (acompañados de ejemplos ilustrativos) clasificados en tres grupos: definiciones y proceso de conceptualización, argumentación y relación argumentación-definición.
En el Capítulo 3 se expone el tipo de estudio realizado, la descripción del contexto y de la población y el proceso general que se siguió desde el diseño del Taller hasta el establecimiento y presentación de resultados. Se incluyen, además, algunas definiciones utilizadas en el análisis de tareas y de datos, así como la descripción y análisis de cada una de las tareas del Taller.
En el Capítulo 4 se hace el análisis de los argumentos surgidos en cada una de las 16 tareas del Taller, incluyendo la estructura de cada argumento según el modelo de Toulmin. Para cada tarea se elabora al final una tabla con los resultados obtenidos.
En el Capítulo 5 se analizan los resultados obtenidos en el análisis de los datos y con base en ellos se obtienen las conclusiones del estudio. Se plantean, además, algunas preguntas que surgieron a lo largo del trabajo.

5. Metodología

El presente estudio es cualitativo, descriptivo, con un modelo de diseño emergente. Se recoge información a través de la observación, los datos son los argumentos de los estudiantes que surgen durante el proceso de solución del Taller aplicado y están expresados en el lenguaje propio de los estudiantes. Los elementos cualitativos que se incluyen son solo como apoyo para organizar y presentar los resultados. El estudio describe y analiza los argumentos surgidos durante los procesos argumentativos en torno a la definición de simetría axial.
Los pasos seguidos durante el estudio fueron: diseño y aplicación de un taller inicial, búsqueda y análisis de referentes teóricos, diseño y aplicación del Taller final, análisis de los datos recogidos, análisis de resultados y redacción de conclusiones.
Para el diseño del Taller final se elaboró un taller inicial que fue aplicado en un curso de la asignatura Elementos de Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional. Con base en las observaciones hechas durante su aplicación, se hicieron modificaciones y se diseñó el Taller final, compuesto por 16 tareas, que se aplicó a un grupo de 18 estudiantes de otro curso de la misma asignatura, con la colaboración de la profesora titular. Los datos analizados corresponden al trabajo de uno de los grupos conformado por tres estudiantes.
Para el análisis de los datos se tomó como guía la propuesta presentada en Fernández (2006), siguiendo los pasos de recoger, organizar, codificar e integrar información. Después de una primera versión de las categorías de análisis se determinan las categorías finales para análisis de datos y de tareas. Se presentan resultados cuantitativos relacionados con el tipo y la clase de argumento, y con la relación argumento-definición.

6. Conclusiones

Algunas de las conclusiones obtenidas fueron:

- Parece que para favorecer la argumentación no es significativo si el problema es o no abierto, sino que sea un problema de argumentación y, preferiblemente, de construcción.
- Las tareas no abiertas generaron más argumentos relacionados con la definición que las

tareas abiertas y las de argumentación más que las de no argumentación, mientras que las tareas de construcción no generaron diferencias en el promedio de argumentos relacionados con una definición • Las tareas que pertenecen simultáneamente a los procesos de argumentar para definir y definir para argumentar o las que pertenecen únicamente al segundo proceso parecen ser las que más favorecen la argumentación.

Elaborado por:	Silva Calderón, Luz Helena
Revisado por:	Samper de Caicedo, Carmen

Fecha de elaboración del Resumen:	07	10	2013

CONTENIDO

pág.

LISTA DE TABLAS

pág.

INTRODUCCCIÓN

El presente trabajo de grado se propone determinar el tipo de tareas para el aula, relacionadas con la definición de un objeto geométrico, que favorecen la argumentación. Para hacerlo, se diseñó un Taller en torno a la definición de simetría axial, que fue aplicado en un curso de la asignatura Elementos de Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional. Se definieron categorías de análisis para las tareas y para los argumentos dados por los estudiantes durante la solución del Taller. A partir del análisis de los resultados se obtuvieron conclusiones para este estudio.

Entre los referentes teóricos que sustentan el estudio se encuentran los planteamientos de Vinner y de Villiers sobre proceso de conceptualización y construcción de definiciones en geometría, la propuesta para la construcción y análisis de definiciones del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional, los planteamientos sobre argumentación de Leitão, Boero, Pedemonte, Douek y Ferrari, el modelo de Toulmin para argumentos y la relación entre argumentación y definición propuesta por Kublikowski.

Este trabajo se organiza en cinco capítulos donde se plantea el problema, se presentan los referentes teóricos que lo sustentan, la metodología utilizada, el análisis de datos, y finalmente, el análisis de resultados y conclusiones.

En el Capítulo 1 se hace la presentación del problema. Incluye los antecedentes, la pregunta de investigación, la hipótesis de trabajo, los objetivos generales y específicos, la metodología utilizada y la importancia de este estudio en el campo de la Educación Matemática.

En el Capítulo 2 se presentan los referentes teóricos que sustentan el estudio, clasificados en tres grupos: definiciones y proceso de conceptualización, argumentación y relación argumentación-definición. Se incluyen ejemplos ilustrativos.

En el Capítulo 3 se expone el diseño metodológico: tipo de estudio realizado, descripción del contexto y de la población y el proceso general que se siguió desde el diseño del Taller hasta el establecimiento y presentación de resultados. Se incluyen, además, algunas definiciones utilizadas en el análisis de tareas y de datos, así como la descripción y análisis de cada una de las tareas del Taller.

En el Capítulo 4 se hace el análisis de datos, que son los argumentos surgidos en cada una de las 16 tareas del Taller, incluyendo la estructura de cada argumento según el modelo de Toulmin.

En el Capítulo 5 se analizan los resultados obtenidos en el análisis de los datos y con base en ellos se obtienen las conclusiones del estudio. Se plantean, además, algunas preguntas que surgieron a lo largo del trabajo.

En los anexos aparece información complementaria para los lectores interesados en profundizar en detalles relacionados con los talleres y las guías para el profesor, o con lo ocurrido a lo largo del trabajo del grupo analizado (respuestas escritas, transcripción completa y resumen de las dos clases durante las cuales se aplicó el Taller).

El título del presente trabajo no coincide con el título *Argumentar para definir en libros de texto de matemáticas* correspondiente al Anteproyecto aprobado por el Consejo de Posgrados del Departamento de Matemáticas. Inicialmente, el objetivo general del estudio era aprovechar procesos argumentativos en la construcción de definiciones de objetos geométricos en libros de texto de matemáticas. Posteriormente, la propuesta fue ampliada para aprovechar la argumentación a partir de una definición, así que se incluyó el proceso de definir para argumentar. Finalmente, se vio la importancia de validar la propuesta aplicándola en el aula de clase. En la construcción y aplicación de las tareas para el aula, el enfoque se centró en una propuesta para el profesor y no para autores y editores de libros de texto. Por estas razones, el título inicial fue modificado por *Argumentar para definir y definir para argumentar*.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

> El profesor y el autor de libros de texto pueden creer que han completado su tarea al introducir una definición formal. Pero no deberían hacerse ilusiones sobre el poder cognitivo que esta definición tiene en el pensamiento matemático del estudiante (Vinner, 1991)[*]

En este capítulo se presenta la preocupación a partir de la cual surge este trabajo y algunos antecedentes teóricos de educadores e investigadores que se han referido al tratamiento que se da a las definiciones en educación. Luego se formula la pregunta de investigación y la hipótesis de trabajo, los objetivos propuestos y la metodología utilizada. Finalmente, se hace un recuento de los principales asuntos de los que se ocupa la línea de investigación en la que está inscrito el trabajo y la importancia de este estudio en el campo de investigación en Educación Matemática.

En las clases de geometría es habitual que se inicie un tema dando a los estudiantes una definición a partir de la cual se resuelven ejercicios. Los estudiantes no tienen la oportunidad de participar en la construcción y elección de definiciones, lo cual los puede llevar a pensar que las definiciones están preestablecidas, que hay una única manera de enunciarlas o que no es necesario comprenderlas, sino únicamente memorizarlas.

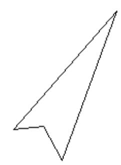
El presente estudio surge de la preocupación generada por el tratamiento que se da a las definiciones en la clase de geometría. Esta preocupación ha sido expresada por varios investigadores como de Villiers (1995) quien señala la importancia de dar a los estudiantes la oportunidad de participar en la formulación y elección de las definiciones. De Villiers considera que, aunque definir con precisión no es una tarea fácil, es importante animar a autores de libros de texto y maestros a repensar seriamente su tratamiento de las definiciones en geometría.

Vinner (1991) pone de manifiesto la importancia de un nuevo tratamiento de las definiciones cuando afirma que la habilidad para construir una definición es un posible indicio de comprensión, mientras que saber de memoria una definición no garantiza la

[*] Traducción propia

comprensión del concepto. Por ejemplo, una estudiante de sexto grado repitió la definición de triángulo estudiada en clase (polígono de tres lados), pero afirmó que un polígono como el de la Figura 1 era un triángulo; al preguntársele la razón dijo: “porque mírale la forma”.

Figura 1. Polígono considerado triángulo por una estudiante de grado sexto



Por razones como esta, matemáticos y educadores como Freudenthal, de Villiers, Vinner, entre otros, han criticado que la enseñanza de definiciones de geometría se haga de forma directa sin hacer énfasis en el proceso subyacente de definir.

Vinner (1991) considera que la presentación y la organización de las matemáticas en muchas clases y libros se basan, parcialmente, en creer que los conceptos se adquieren principalmente por medio de sus definiciones y que los estudiantes las usarán para resolver problemas y probar teoremas, desde un punto de vista matemático. Cuando se presentan las matemáticas deductivamente como ocurre, por lo general, en los libros de texto de bachillerato y universidad, es posible que el profesor haga lo mismo en sus clases dando definiciones, teoremas y demostraciones en una secuencia que podría ser pedagógicamente incorrecta al no tener en cuenta el proceso psicológico común de adquisición de conceptos y de razonamiento lógico (Vinner, 1991). Como lo plantea de Villiers (1996), la mayoría de profesores y libros de texto siguen dando a los estudiantes contenido ya elaborado que simplemente tienen que asimilar y regurgitar en los exámenes. Hans Freudenthal (1973) expresa esta misma idea diciendo que en lugar de dar al niño la oportunidad de organizar experiencias espaciales, un tema se ofrece como una estructura preorganizada con todos los conceptos, definiciones y deducciones preconcebidas por el profesor o por el autor de libros de texto.

De Villiers (1998) plantea un asunto que debe considerarse en la enseñanza de la geometría: ¿enseñar definiciones ya hechas o enseñar a definir, permitiendo a los estudiantes que se involucren en la construcción y elección de las definiciones? Una práctica que comenzó a defenderse desde comienzos del siglo XX es la aproximación genética de los temas matemáticos que parte de la hipótesis de que el estudiante debe ser sometido al proceso matemático típico a través del cual se descubren, inventan y organizan los contenidos matemáticos, en contraste con la presentación de los temas matemáticos como sistemas axiomático-deductivos completos (Klein (1924), Wittmann (1973), Polya (1981), Freudenthal (1973), citados por de Villiers, 1998). La aproximación genética –o reconstructiva– no implica necesariamente aprendizaje por descubrimiento ya que puede ser una reconstrucción hecha por el profesor o por el libro de texto. De Villiers agrega que la motivación didáctica para una aproximación reconstructiva es, entre otros factores, que resalta el significado del contenido y permite a los estudiantes participar activamente en su construcción y desarrollo. Como afirma Freudenthal (1973), las definiciones no tienen que ser consideradas por los estudiantes como reglas arbitrarias; con una aproximación reconstructiva no se presenta el conocimiento como un producto terminado, sino que se enfoca en el proceso matemático por medio del cual se puede desarrollar o reconstruir el contenido. Para de Villiers, la construcción de definiciones es una actividad matemática no menos importante que otros procesos como resolver problemas, hacer conjeturas, generalizar, demostrar, entre otros, y por eso considera extraño que no sea incluida en la enseñanza de las matemáticas.

Para Leikin y Winicki-Landman (2001), definir es mucho más que asignar un nombre; es el proceso de escoger un enfoque, una construcción y una formulación de una definición, es capturar el significado y el carácter de un concepto.

Además de permitir a los estudiantes participar en la construcción y elección de las definiciones, una definición también se puede aprovechar para favorecer la argumentación a partir de ella, lo cual podría fortalecer el proceso de conceptualización, que va más allá de conocer una definición formal.

Las consideraciones anteriores, entre otras, llevan a la formulación de la siguiente pregunta: ¿Qué características tienen las tareas para el aula que propician la argumentación en torno a la definición de un objeto geométrico? La hipótesis de trabajo es que aquellos problemas donde se requiere identificar o analizar propiedades de un concepto y establecer relaciones entre ellas promueven la argumentación, que puede ser aprovechada para construir una definición o para argumentar a partir de ella.

Para responder la pregunta de investigación se planteó el siguiente objetivo general: Determinar qué tipo de tareas para el aula, relacionadas con la definición de un objeto geométrico, propician la argumentación.

Los objetivos específicos son:

- Fundamentar el asunto de estudio (proceso de conceptualización, argumentación y relación entre definición y argumentación) a partir de la lectura de literatura especializada.
- Diseñar tareas para el aula, en torno a la definición de un objeto geométrico, y aplicarlas.
- Analizar los datos recogidos en la aplicación de las tareas para determinar en qué casos se propició la argumentación.
- Agrupar e interpretar los resultados del análisis de datos.
- Analizar las tareas que propiciaron la argumentación para determinar sus características generales.
- Obtener conclusiones a partir del análisis de datos y de tareas.
- Redactar un documento final acerca del estudio realizado.

Este estudio es cualitativo, descriptivo y se realizó con un modelo de diseño emergente. Se utilizan elementos cuantitativos como ayuda para la presentación y análisis de resultados.

El estudio está inscrito en la línea de investigación de Argumentación y Prueba. Esta línea se ocupa de investigar la enseñanza de la demostración en cuanto a su relación con el currículo, tipos de demostración, dificultades, concepciones, aspectos cognitivos, intervenciones de enseñanza (Mariotti, 2006), así como los retos que enfrentan los profesores para ayudar a los estudiantes a razonar en formas disciplinadas acerca de asuntos matemáticos (Ball, Hoyles, Jahnke, & Movshovitz-Hadar, 2003).

Con respecto a la argumentación, algunas preguntas investigativas de la línea de investigación de Argumentación y Prueba indagan acerca de cómo se pueden describir los discursos argumentativos desarrollados en la enseñanza de las matemáticas, cuál es el papel de la argumentación y la prueba en el proceso de conceptualización en matemáticas y en educación matemática, cómo podrían los educadores hacer explícitas las diferentes clases de razonamiento usadas en demostraciones matemáticas y en discursos argumentativos, qué condiciones y limitaciones afectan el desarrollo de situaciones apropiadas para la construcción de la argumentación y la prueba en el aula de matemáticas, y qué actividades y entornos de aprendizaje ayudan a mejorar la habilidad de los estudiantes para argumentar y demostrar (Hanna et al., 2009). El presente trabajo se ubica, principalmente, en la rama de investigación que se ocupa de aspectos relacionados con el uso de la argumentación en el proceso de conceptualización en Educación Matemática.

Este estudio es importante para el campo de investigación en Educación Matemática porque hace un aporte a la investigación relacionada con el manejo de las definiciones en geometría, y para la línea de investigación de Argumentación y Prueba porque propone un vínculo entre argumentación y definición en geometría. Además, aunque el estudio se realizó en primer semestre de universidad, los fundamentos teóricos que lo sustentan son aplicables también en nivel escolar, de manera que este trabajo hace un aporte a la propuesta del Ministerio de Educación Nacional (2006) de enfatizar "en el diseño de situaciones matemáticas que posibiliten a los estudiantes tomar decisiones; exponer sus opiniones y ser receptivos a las de los demás; generar discusión y desarrollar la capacidad de justificar las afirmaciones con argumentos".

Una vez planteado y justificado el problema se requiere dar fundamento teórico al estudio. El capítulo siguiente presenta los referentes teóricos clasificados en tres grupos y acompañados de ejemplos ilustrativos.

2. REFERENTES TEÓRICOS

En este capítulo se hace un recuento del proceso de documentación y selección de los referentes teóricos que sustentan este estudio, los cuales están clasificados en tres grupos: definiciones y proceso de conceptualización, argumentación y relación argumentación-definición. Posteriormente se desarrolla cada uno de estos aspectos, incluyendo ejemplos ilustrativos, algunos de los cuales son tomados de clases analizadas como parte del proceso de elaboración del presente trabajo.

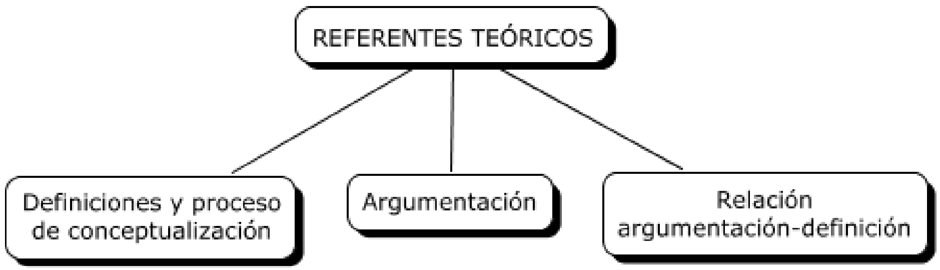
2.1 DOCUMENTACIÓN Y SELECCIÓN DE REFERENTES TEÓRICOS

Inicialmente se hizo un proceso de búsqueda de documentos relacionados con definiciones, proceso de conceptualización en geometría y argumentación. Fue así como se obtuvo una lista de documentos clasificados en dos grandes categorías: una sobre definiciones y, en general, proceso de conceptualización, y otra sobre argumentación. En la primera categoría se decidió centrar la atención en los trabajos liderados por dos autores: de Villiers y Vinner (de Villiers, 1994, 1996, 1998, 2004; Govender & de Villiers, 2002; Vinner, 1991; Hershkowitz & Vinner, 1982; Tall & Vinner, 1981) y en la tesis doctoral de Calvo (2001). Posteriormente se estudió la propuesta para la construcción y análisis de definiciones que hace el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$), de la Universidad Pedagógica Nacional (Camargo, Samper, Perry, & Molina, 2011; Perry, Samper, Camargo, & Molina, 2012; Samper, Molina, & Echeverry, 2011).

En lo relacionado con argumentación, inicialmente se asumieron como referentes los trabajos de Leitão (2007), Boero, Douek y Ferrari (2008) y Douek y Scali (2000). Luego se vio la conveniencia de contar con una estructura para los argumentos y se incluyó también el modelo de Toulmin (2007). Finalmente, se estudió la relación entre argumentación y definición propuesta por Kublikowski (2009).

Además de los referentes teóricos mencionados anteriormente, el marco teórico se fue complementando de acuerdo con las necesidades que iban surgiendo, de manera que incluyera los elementos necesarios para dar una base teórica sólida al estudio.

Figura 2. Clasificación de los referentes teóricos



2.2 DEFINICIONES Y PROCESO DE CONCEPTUALIZACIÓN

2.2.1 Definiciones. En el *Diccionario esencial de la lengua española* se define mesa como "Mueble, por lo común de madera, compuesto de un tablero horizontal liso y sostenido a la altura conveniente, generalmente por una o varias patas, para diferentes usos, como escribir, comer, etc." (Real Academia Española, 2006, p. 967). No se puede afirmar con total certeza que cualquier cosa que cumpla las condiciones de la definición anterior sea una mesa y tampoco que todas las mesas cumplen estas condiciones. Esta definición no corresponde al tipo de definiciones utilizadas en matemáticas porque en esta disciplina las definiciones deben referirse a condiciones necesarias y suficientes que caracterizan exactamente lo que es y no es el objeto matemático definido.

Una *definición matemática* es un enunciado verbal que predetermina al concepto de manera no circular y consistente, es decir, sus elementos son nociones primitivas o definidas previamente y no tiene contradicciones lógicas (Calvo, 2001). Calvo menciona dos características de las definiciones matemáticas: convencionalidad y minimalidad.

La *convencionalidad* se refiere a que las definiciones no están preestablecidas, sino que son seleccionadas por el matemático, el autor de un libro de texto o el profesor, dependiendo de dos factores principales: el tipo de caracterización del concepto matemático que se requiera en un momento dado y las convenciones en el grado de restricción utilizado para definir un concepto matemático (Calvo, 2001). Un ejemplo de un proceso en donde la convencionalidad fue un factor para escoger una definición ocurrió en una clase de la asignatura Geometría Plana en la Universidad Pedagógica Nacional. Para demostrar que dado un ángulo, existe un plano que lo contiene utilizan la definición de ángulo para afirmar que $\angle ABC = \overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{BA}$ y que $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BA}$ son no colineales. En ese momento ven que necesitan la definición de rayos colineales para saber qué propiedades no cumplen los rayos que no son colineales. Los estudiantes enuncian una definición y, con la orientación de la profesora, escriben otras dos:

- Definición 1. Dos rayos son colineales si todo punto de un rayo está en la recta que contiene al otro rayo.
- Definición 2. Dos rayos son colineales si un rayo es subconjunto de la recta que contiene al otro.
- Definición 3. Dos rayos son colineales si existen dos puntos de uno de los rayos que están en la recta que contiene al otro.

Como ven que las definiciones 1 y 2 se refieren a la misma propiedad escrita de manera diferente, utilizan únicamente las definiciones 1 y 3 para enunciar las características de rayos no colineales:

- Negación de la definición 1. Dos rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ no son colineales si existe $X \in \overrightarrow{AB}$ tal que $X \notin \overleftrightarrow{CD}$.
- Negación de la definición 3. Para todo par de puntos *X*, *Y* del $\overrightarrow{AB}$, no se tiene que $X \in \overleftrightarrow{CD}$ y $Y \in \overleftrightarrow{CD}$.

Analizando la negación de cada una de las definiciones, ven que la primera requiere la existencia de un punto que cumpla cierta condición, mientras que, en la segunda, la condición dada se cumple para cualquier par de puntos de un rayo y, en particular, para los puntos *A* y *B* que ya aparecen en la demostración. Además, la negación de la definición 3 permite incluir en la demostración el Postulado de la recta*, que hace parte del sistema teórico utilizado. Por las dos razones anteriores, deciden tomar como definición de rayos colineales la número 3.

Otro aspecto relacionado con la convencionalidad es el grado de restricción utilizado para definir un objeto matemático. Según este aspecto, de Villiers (1994) clasifica las definiciones en jerárquicas y particionales. Una *definición jerárquica* permite que los conceptos más particulares sean subconjuntos de los más generales, mientras que en una *definición particional* los subconjuntos de conceptos se consideran disyuntos. Por ejemplo, cuando se define paralelogramo como un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos, se está dando una definición jerárquica porque permite que conceptos más particulares como rectángulo, rombo o cuadrado sean paralelogramos; mientras que al definir paralelogramo como un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos y ningún par de ángulos ni lados adyacentes congruentes, se está dando una definición particional porque rectángulos, rombos o cuadrados no pertenecen al conjunto de los paralelogramos (de Villiers, 1998).

En el diseño de tareas, la característica de convencionalidad permite escoger la definición que se quiere sea construida colectivamente por la comunidad de la clase, a partir de las propuestas dadas por los estudiantes al resolver las tareas.

La *minimalidad* se refiere a que se espera que una definición no incluya información redundante. Cuando este es el caso se considera que es una *definición económica*; sin embargo, a una definición se le puede agregar más información de la necesaria sin que pierda el formato de definición matemática (Calvo, 2001). De esta manera, una *definición correcta* es aquella que contiene un conjunto suficiente de propiedades para que quede determinado quién es y quién no es el objeto definido (Govender & de Villiers, 2002). En este caso las condiciones pueden ser todas necesarias o algunas pueden ser innecesarias. Por ejemplo, un rectángulo se puede definir como un paralelogramo que tiene un ángulo recto o como un cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos. Las dos condiciones dadas en

* Dados dos puntos, existe una única recta que los contiene.

la primera definición (ser paralelogramo y tener un ángulo recto) son suficientes para decir que el objeto definido es un rectángulo. La segunda definición también es correcta, aunque no es necesario decir que los cuatro ángulos son rectos; con tres ángulos rectos es suficiente. Otro ejemplo de definiciones correctas para un mismo objeto es la de triángulo; en primaria es usual definirlo como un polígono "de tres lados, tres vértices y tres ángulos" (Segura, 2003, p. 143), pero en secundaria como "la unión de tres segmentos determinados por tres puntos no colineales" (Castiblanco et al., 2011, p. 190).

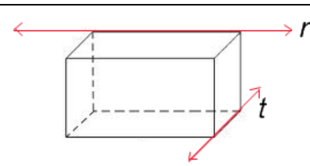
Si una definición correcta puede contener propiedades innecesarias, ¿cuándo se considera que una definición es incorrecta? Una *definición incorrecta* es aquella que contiene una propiedad incorrecta o que contiene insuficientes propiedades (Govender & de Villiers, 2002). Por ejemplo, la definición

> Una figura presenta simetría de rotación si existe un punto, denominado centro de rotación, alrededor del cual se puede efectuar una rotación menor o igual que 360°, de tal manera que la imagen de la figura coincida con la preimagen (Urrego, Silva, Ortiz, González, & Carvajal, 2011, p. 174)

es una definición incorrecta porque la propiedad *igual que 360°* es incorrecta.

Otro ejemplo de definición incorrecta es la siguiente: "dos rectas son paralelas si no se cortan" (Molina & Guzmán, 2008, p. 94). Esta definición contiene insuficientes propiedades porque, por ejemplo, las rectas *r* y *t* en la Figura 3 no se cortan, pero no son paralelas. Falta agregar que las dos rectas deben estar en el mismo plano.

Figura 3. Rectas que no se cortan, pero no son paralelas



La definición anterior es un ejemplo del tipo de definición incorrecta llamada *definición incompleta*, que contiene un conjunto de propiedades necesarias pero insuficientes (Govender & de Villiers, 2002).

Resumiendo, es posible, entonces, que una definición correcta tenga condiciones que no son necesarias pero no condiciones que no son suficientes.

El profesor debe tener en cuenta la característica de minimalidad en el proceso de construcción de definiciones a partir de los aportes de los estudiantes. Esto le permite guiar el proceso argumentativo para determinar si una definición propuesta es o no correcta o si alguna de las propiedades incluidas se puede eliminar. Este análisis permite a los estudiantes comprender el papel de cada propiedad en dicha definición.

Las discusiones que ocurren en pequeños grupos de estudiantes para proponer una definición o cuando se analizan socialmente las propuestas pueden girar en torno a la equivalencia o no de dos definiciones. En este caso, los ejemplos de objetos que cumplen cada definición pueden ser un aspecto decisorio. Cada definición determina un conjunto de objetos, llamado *conjunto de ejemplos*, que cumplen las condiciones dadas en la definición (Winicki-Landman & Leikin, 2000). *Definiciones equivalentes* son aquellas que determinan el mismo conjunto de ejemplos (Calvo, 2001; Winicki-Landman & Leikin, 2000). Por ejemplo, las dos definiciones siguientes de ángulo recto (Moise & Downs, 1964, p. 87)[*] son equivalentes porque determinan el mismo conjunto de ejemplos:

- Si los ángulos en un par lineal[**] tienen la misma medida, cada uno de ellos es llamado un ángulo recto.
- Un ángulo recto es un ángulo cuya medida es 90°.

Las definiciones se pueden enunciar de dos maneras diferentes según su estructura lingüística: explícita e implícita (Kublikowski, 2009). En una *definición explícita* (completa) hay una palabra que se va a definir y las propiedades que determinan el objeto, relación, condición, que se está definiendo. Estos dos elementos están conectados por expresiones como *es* o *si y solo si* cuando lo que se define está expresado verbalmente. Ejemplos de definiciones explícitas son: “Un rombo es un cuadrilátero con cuatro lados

[*] Traducción propia.

[**]Dos ángulos son par lineal si comparten un lado, y los lados no comunes son rayos opuestos.

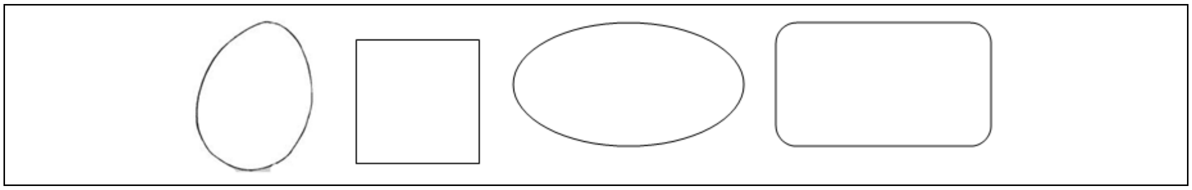
congruentes” (Samper et al., 2011, p. 36) y “Dos círculos son concéntricos si y solo si están en el mismo plano y tienen el mismo centro” (Quintero & Costas, 1994, p. 277). Una *definición implícita* (parcial) se presenta en la forma de una condicional (si-entonces). Por ejemplo, “Dos ángulos son adyacentes si son coplanares, tienen en común uno de sus lados y no tienen puntos interiores en común” (Samper et al., 2011, p. 31).

2.2.2 Proceso de conceptualización. Un concepto no se limita a una definición, sino que se compone también de otros elementos. Por esta razón, en el aprendizaje y la enseñanza de un concepto, además de la definición, se requiere una serie de situaciones y problemas –teóricos o prácticos– a través de los cuales el concepto adquiere sentido para los estudiantes (Vergnaud, 1990). La construcción de un concepto implica considerar simultáneamente ejemplos y no ejemplos del concepto, una o más definiciones y probar su equivalencia, así como diferentes representaciones y situaciones (Ouvrier-Buffet, 2006). En este trabajo se considera que un *concepto* está compuesto por un objeto geométrico, la definición formal de ese objeto, sus representaciones y sus relaciones con otros objetos. En adelante, la expresión *definición del concepto* se refiere a la definición formal del objeto.

Viendo la complejidad de lo que es un concepto, es necesario indagar sobre procesos que lleven a su formación. Una de las teorías sobre la formación de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes es la desarrollada por el grupo de investigadores encabezado por Vinner, la cual es considerada como una de las más importantes en el campo de la enseñanza de la geometría (Jaime, Chapa, & Gutiérrez, 1992).

Vinner (1991) propone la distinción entre concepto e imagen del concepto. Para él, un concepto es el objeto matemático determinado por una definición formal, mientras que la *imagen del concepto* es algo no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual del concepto o una colección de impresiones o experiencias. Solo es posible hablar de una imagen del concepto en relación con un individuo específico y un mismo individuo puede reaccionar de manera diferente frente a cierto término (nombre del concepto) en diferentes situaciones. La imagen del concepto de un individuo puede ser incorrecta, parcial o completa. Una imagen del concepto parcial no contiene todos los aspectos del concepto que se ajustan a la definición (Hershkowitz & Vinner, 1982). Por ejemplo, en una clase de geometría de grado cuarto, después de estudiar la definición de circunferencia, la profesora muestra las siguientes figuras y pregunta si son o no circunferencias:

Figura 4. Figuras mostradas a niños de grado cuarto para decidir si son o no circunferencias



Cuando la profesora pregunta por la segunda figura, Simón dice que no es circunferencia:

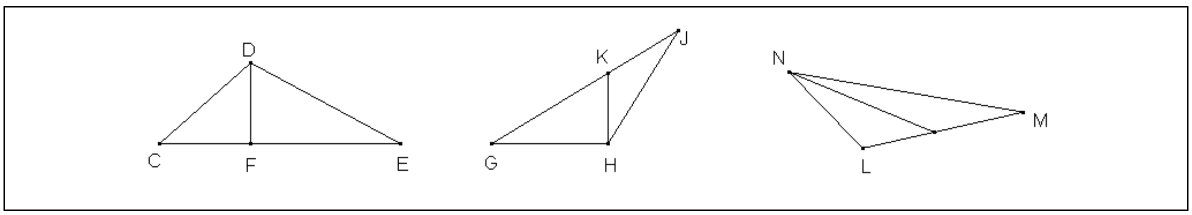
306.	Profesora:	Pero ¿por qué no es circunferencia?
307.	Simón:	Porque no tiene la misma… porque la circunferencia no tiene puntas….no tiene… no tiene puntas, esquinas… esquinas de 90 grados.
308.	Profesora:	Siempre es…
309.	Simón:	Redondito.

Simón tiene en su mente algo no verbal asociado con el nombre del concepto circunferencia: es una imagen en la cual la figura no tiene puntas y siempre es redondita. Es posible que su imagen del concepto sea incorrecta si incluye figuras como la primera y la tercera, o que sea parcial porque aunque no las incluya cuando las ve, no puede explicar por qué no lo son, ya que su imagen no contiene todos los aspectos del concepto circunferencia que se ajustan a la definición, como la equidistancia de todos sus puntos a un punto fijo.

En contextos no técnicos, en el momento en que se forma la imagen del concepto la definición parece ser innecesaria; sin embargo, en matemáticas la definición sigue siendo indispensable ya que tiene el potencial de salvar de muchas trampas creadas por la imagen del concepto (Vinner, 1991). Por ejemplo, es común que los estudiantes no consideren dos polígonos congruentes también como semejantes porque su imagen del concepto de semejanza solo incluye ampliación o reducción del polígono, lo cual podría generar errores en la solución de tareas. Sin embargo, consultando la definición de semejanza se podría evitar caer en la "trampa" generada por la imagen del concepto.

Tall y Vinner (1981) afirman que no siempre la imagen del concepto es coherente durante su proceso de desarrollo porque estímulos diferentes pueden activar diversos aspectos de la imagen del concepto, desarrollándolos de distintas maneras que no necesariamente conforman un todo coherente. Tall y Vinner llaman *imagen del concepto evocada* a la porción de la imagen del concepto que es activada en un momento particular. En diferentes momentos se pueden evocar distintas imágenes, algunas de las cuales pueden ser conflictivas, pero sólo cuando estos aspectos son evocados de manera simultánea se hace evidente el conflicto. Por ejemplo, un estudiante puede utilizar diferentes procesos para trazar la altura de un triángulo dependiendo del tipo de triángulo o de su posición (Figura 5) y es posible que no vea conflicto entre ellos si las construcciones las hace en diferentes momentos, pero que estas tres imágenes del concepto altura sean conflictivas si hace las construcciones en un mismo momento.

Figura 5. Diferentes imágenes que se podrían evocar al trazar la altura de un triángulo



Se espera que en el proceso de formación de conceptos se presente una relación óptima entre la imagen del concepto y la definición del concepto. Para explicar esta relación, Vinner (1991) asume la existencia de dos “células” diferentes en nuestra estructura cognitiva. Una es para la definición del concepto y la otra para la imagen del concepto. Una o ambas células podrían estar vacías. Se considera que la célula de la imagen del concepto está vacía cuando no se asocia significado alguno con el nombre del concepto, lo cual puede ocurrir cuando la definición del concepto se memoriza. Puede haber alguna interacción entre las dos células, aunque se pueden formar independientemente. Un estudiante puede tener una imagen de un concepto y más adelante recibir una definición formal. Como resultado, afirma Vinner, pueden ocurrir tres cosas:

- La imagen del concepto puede ser cambiada (reconstrucción satisfactoria o acomodación).

- La imagen del concepto puede permanecer como está. La célula de la definición contendrá la definición del profesor por un tiempo, pero pronto será olvidada o distorsionada y cuando se le pida al estudiante definir el concepto se referirá a su imagen del concepto. En este caso la definición formal no ha sido asimilada.
- Ambas células permanecen como están. Cuando se le pide al estudiante definir el concepto, repetirá la definición del profesor, pero en todas las demás situaciones pensará en la imagen del concepto.

Puede ocurrir un proceso similar cuando un concepto es introducido inicialmente por medio de una definición. Aquí, al comienzo, la célula de la imagen del concepto está vacía. Después de varios ejemplos y explicaciones, se va llenando gradualmente; sin embargo, no necesariamente refleja todos los aspectos de la definición del concepto. En este caso pueden ocurrir escenarios similares a los tres mencionados arriba.

Lo anterior destaca otro aspecto que se debe tener en cuenta para el diseño de las tareas en torno a una definición. Con las tareas se pretende que los estudiantes manifiesten y cuestionen no solo sus imágenes conceptuales, sino las de otros, para que argumenten sobre su relación con la definición del concepto.

Según Vinner (1991), parece que muchos profesores de bachillerato y universidad esperan que el estudiante siga alguno de los siguientes caminos cuando se le plantea una tarea cognitiva:

- Acudir a la definición del concepto y a partir de ella dar una respuesta, utilizando o no la imagen del concepto.
- Acudir a la imagen del concepto y luego utilizar la definición para dar una respuesta.

En ambos casos se asume que el estudiante formula su solución consultando la definición del concepto. Aunque este es el proceso deseable, no es el que habitualmente se sigue. Lo que generalmente ocurre en la práctica es que ante una tarea, el estudiante consulta únicamente la imagen del concepto y da una respuesta, como suele suceder con conceptos en la vida diaria, sin ser consciente de la necesidad de consultar la definición. Esto puede ocurrir porque en la mayoría de los casos las tareas están planteadas de tal manera que es suficiente acudir únicamente a la imagen del concepto. Problemas no rutinarios en los cuales imágenes del concepto incompletas podrían ser engañosas animarían a los estudiantes a referirse a la definición (Vinner, 1991). El gran reto para los profesores es favorecer la articulación entre la definición del concepto y la imagen del concepto para avanzar en la construcción de objetos geométricos. ¿Y cómo se puede favorecer esta construcción?

- Considerando propiedades relevantes e irrelevantes en las representaciones, las cuales juegan un importante papel en la comprensión del concepto, como se evidenció en el estudio de Hershkowitz y Vinner (1982).
- Construyendo y analizando definiciones como lo propone el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$), de la Universidad Pedagógica Nacional (Camargo et al., 2011; Samper et al., 2011) a través de diferentes acciones realizadas por los estudiantes como:
    - Descubrir características esenciales de la figura o relación geométrica nombrada a partir de la observación de representaciones que muestran lo que es y lo que no es el objeto correspondiente.
    - Comparar definiciones usuales, no necesariamente correctas, para determinar en qué difieren y si realmente definen el concepto.
    - Deducir propiedades a partir de una definición.
    - Determinar si una figura o una relación cumple o no una definición.
    - Construir ejemplos y no ejemplos de una definición y justificar por qué lo son.
    - Analizar qué pasa si se elimina una condición de una definición.

Este análisis se puede aprovechar para mostrar que las definiciones son arbitrarias y que dependen del contexto teórico en que se encuentren. A través de él se pueden modificar la imagen del concepto y el espacio de ejemplos que tienen los estudiantes. La propuesta del grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ incluye el uso de la geometría dinámica.

- Construyendo un espacio de ejemplos que les permita a los estudiantes familiarizarse con un concepto y adoptar nuevos conceptos (Watson & Mason, 2005).

Las tres propuestas anteriores apuntan a aspectos específicos de los distintos elementos que aglomera un concepto y sugieren acciones que pueden dar lugar a la argumentación. Por ello, se constituyen en una guía para el diseño de las tareas.

El proceso de conceptualización se apoya en conocimientos implícitos de los estudiantes, llamados conocimientos en acto, los cuales son considerados ciertos con base en la experiencia del estudiante (Vergnaud, 1990). Por ejemplo, un grupo de estudiantes definió altura de un triángulo como “segmento que parte de un vértice hacia su segmento opuesto dividiendo el triángulo en dos partes iguales”. Esta se puede considerar como una definición en acto, pues los estudiantes generalizan algo que ven en su imagen conceptual de triángulo y que sí se da en el triángulo isósceles.

Las definiciones en acto, teoremas en acto y, en general, los conocimientos implícitos de los estudiantes, son importantes en el análisis del trabajo realizado para solucionar las tareas planteadas ya que en algunos casos estos conocimientos en acto hacen parte de la estructura de los argumentos formulados por los estudiantes.

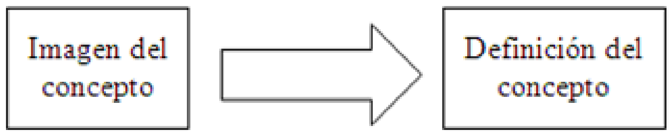
2.2.3 La actividad de definir. La sección anterior brinda información fundamental acerca de los aspectos que juegan un papel importante en un proceso de conceptualización y provee directrices para el diseño de tareas que apunten a los distintos elementos de un concepto. Además de lo anterior, también es necesario indagar sobre el proceso mismo de definir.

Sin importar si a un estudiante se le ha dado una definición o si ha sido construida por él mismo, él usa sus propias palabras para dar su explicación de la imagen del concepto. Esta es la definición que Tall y Vinner (1981) llaman *definición personal*, mientras que una *definición formal* es una definición aceptada por la comunidad matemática en general. Por ejemplo, cuando a dos estudiantes, una de grado sexto y otra de grado tercero, se les preguntó qué es el área de una figura, la primera respondió: “área es base por altura” y la segunda dijo: “es lo que te dice qué tan grande es una figura”. Aunque ambas habían estado previamente en contacto con definiciones del concepto de área, parece que tenían imágenes del concepto totalmente diferentes y cada una tenía su propia definición personal de área.

En matemáticas se distinguen, entre otros, dos procesos diferentes para definir conceptos: descriptivo (a posteriori) y constructivo (a priori), descritos por de Villiers (1998, 2004).

Definir de manera descriptiva un concepto (a posteriori) significa que se define después de haber conocido propiedades del concepto por algún tiempo. En otras palabras, la imagen del concepto está desarrollada antes de formular una definición del concepto.

Figura 6. Definir de manera descriptiva



Fuente: de Villiers (2004, p. 709). Traducción propia

Una definición a posteriori generalmente se hace seleccionando unas propiedades del concepto a partir de las cuales se pueden deducir las demás. Ese subconjunto de propiedades se convierte en la definición, y las propiedades restantes se derivan como teoremas (de Villiers, 2004).

Un ejemplo de construcción de una definición de manera descriptiva se hizo en una clase de Elementos de Geometría en la Universidad Pedagógica Nacional. En esta clase se partió de la imagen del concepto que tenían los estudiantes de la figura geométrica altura de un triángulo pues se les solicitó inicialmente que construyeran un triángulo y una de sus alturas, primero con papel y lápiz y luego usando un *software* de geometría dinámica. Luego debían escribir una definición de altura de un triángulo[*]. En la discusión que este ejercicio generó, se pusieron de manifiesto las imágenes del concepto que tenían los estudiantes, quienes consideraron algunas propiedades irrelevantes como la posición del triángulo y omitieron otras necesarias como la ubicación de los extremos de la altura, como lo muestran los siguientes ejemplos.

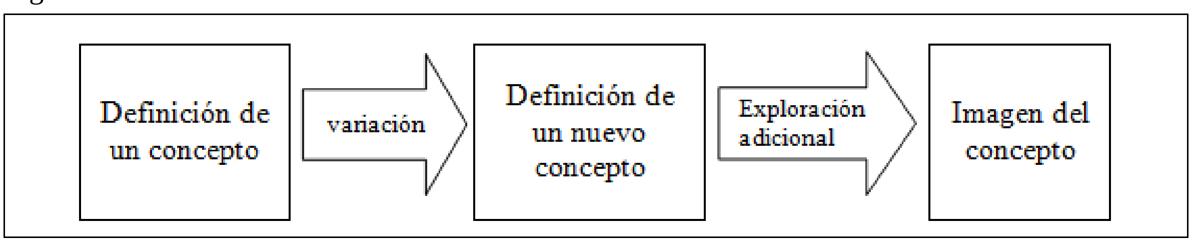
[*] Una altura de un triángulo es un segmento que tiene uno de sus extremos en un vértice del triángulo, es perpendicular a la recta que contiene el lado opuesto a ese vértice y tiene el otro extremo en esa recta.

81.	Luis:	La altura va para arriba. ¿Hay altura para los lados?
82.	Juan:	No, eso ya es longitud. La altura solo va…
83.	Luis:	…de arriba para abajo.
84.	Juan:	Sí

Al usar la función de arrastre los estudiantes pudieron ver cómo, en algunos casos, el segmento que había sido construido como una altura desaparecía, dado que había sido construido perpendicular al lado opuesto al vértice en que tiene uno de sus extremos y no a la recta que contiene al lado opuesto. A partir del análisis de estas construcciones y de las definiciones escritas en cada uno de los grupos, se construyó la definición de altura de un triángulo. Finalmente, los estudiantes construyeron no ejemplos de altura de un triángulo al ir eliminando una o más de las propiedades mencionadas en la definición; de esta manera pudieron ver la necesidad de cada una de ellas.

Definir de manera constructiva (a priori) significa que cierta definición de un concepto se cambia a través de la exclusión, generalización, especialización, sustitución o adición de propiedades, construyendo un nuevo concepto en el proceso. En este caso, la definición de un nuevo concepto precede a la posterior exploración de las propiedades adicionales y al desarrollo de la imagen del concepto (de Villiers, 2004), como se muestra en la Figura 7.

Figura 7. Definir de manera constructiva



Fuente: de Villiers (2004, p. 709). Traducción propia

Un ejemplo de definir de manera constructiva ocurrió en otra clase del curso de Elementos de Geometría mencionado anteriormente. Se definió trapecio como *cuadrilátero con exactamente un par de lados paralelos* y trapecio isósceles como *trapecio que tiene un par de lados opuestos congruentes*. Se cuestionó si en esta última definición debía especificarse cuál par de lados son los congruentes. Para resolver la duda, los estudiantes construyeron un trapecio usando un *software* de geometría dinámica, exploraron las posibilidades para que tuviera un par de lados opuestos congruentes y vieron que si los lados paralelos son congruentes ya no se tiene un trapecio porque los otros dos lados opuestos también son paralelos. Así descubrieron que en este caso la figura resultante era un paralelogramo, dando lugar a la definición de otro objeto: el paralelogramo (cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos y congruentes). Además, el resultado mostró que la definición de trapecio isósceles que se dio es económica, es decir, cumple la característica de minimalidad.

Las dos maneras de definir descritas por de Villiers (1998, 2004) complementan el panorama para el diseño de tareas. El profesor puede decidir si realiza una construcción descriptiva o constructiva de una definición dependiendo, entre otros factores, del conocimiento que los estudiantes tienen del objeto y de la definición que se quiere instaurar.

2.3 ARGUMENTACIÓN

Con el fin de establecer un vínculo entre definición y argumentación a través de este estudio, es necesario considerar aspectos teóricos relacionados con la argumentación y su importancia en el proceso de conceptualización.

La argumentación es una práctica común en diversos ámbitos de la vida diaria. Cada vez que alguien defiende su punto de vista o da razones para justificar un comportamiento o una decisión está argumentando; sin embargo, la manera de argumentar y el tipo de argumentos utilizados en matemáticas son diferentes a los que se utilizan en los demás contextos de la actividad social (Llanos & Otero, 2009). Por ejemplo, una madre le dice a su hija que no puede salir a montar bicicleta y el argumento que le da es que ella es la autoridad y así lo decidió, o podría decirle que es peligroso porque algunas personas han sido arrolladas cuando van en bicicleta por la vía que la hija quiere tomar. Este tipo de argumentos utilizados en la vida cotidiana difieren de los argumentos matemáticos porque estos requieren garantías validadas en un sistema teórico.

Un *argumento* es considerado como una razón que se ofrece a favor o en contra de una proposición u opinión (Boero et al., 2008) con el propósito de convencerse a sí mismo o de convencer a otros. La *argumentación* es una actividad discursiva que se caracteriza por la defensa de puntos de vista y la consideración de perspectivas contrarias (Leitão, 2007). Exige actuar de manera "razonable" con el fin de lograr acuerdos para una determinada situación o conocimiento (León & Calderón, 2001). La argumentación no solo es el proceso que produce un discurso conectado lógicamente –aunque no necesariamente deductivo–, sino también el texto producido en ese proceso (Boero et al., 2008).

A través de la argumentación se pueden producir razones para respaldar la verdad o falsedad de un enunciado matemático. Las razones –que pueden ser enunciados, evidencias empíricas, dibujos, entre otras– son tomadas de un marco de referencia como, por ejemplo, el conocimiento compartido de los estudiantes de un curso; de esta manera, la argumentación puede ser usada para justificar, refutar o deducir nuevas conclusiones (Boero et al., 2008).

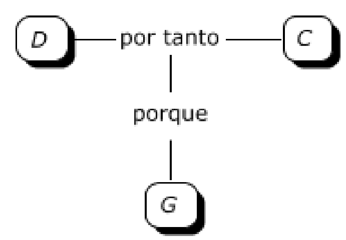
La argumentación favorece la conceptualización (Boero et al., 2008) y tiene un importante papel durante el desarrollo de actividades en geometría en el proceso de construcción de conceptos (Douek & Scali, 2000). Según Douek y Scali (2000), algunas de las ventajas de la argumentación en el proceso de conceptualización son que permite discriminar conceptos, establecer vínculos entre ellos y hacer explícitos teoremas y definiciones en acto para asegurar su uso consciente. Este proceso se da cuando se comparan diferentes procedimientos para resolver un problema dado o cuando se pide a los estudiantes describir procedimientos eficientes así como las condiciones para ser usados de manera apropiada en la solución de problemas.

Cuando se presenta la necesidad de defender un punto de vista y de dar respuesta a posiciones contrarias se genera un proceso de negociación en el cual no solo se deben formular las ideas propias, sino que puede ser necesario revisarlas o transformarlas. Este proceso de negociación le confiere a la argumentación el potencial de promover conocimiento al involucrar al sujeto que argumenta en un proceso de revisión de sus propios puntos de vista y de su conocimiento (Leitão, 2007).

La propuesta que se hace en este trabajo tiene dos momentos: trabajo en pequeños grupos y socialización de los resultados para discutirlos bajo la orientación del profesor. Se espera que en cada uno de estos momentos se generen procesos de negociación donde los estudiantes den razones para respaldar o refutar ideas, consideren perspectivas contrarias o lleguen a conclusiones en torno a una definición. Para analizar estos procesos es útil estudiar la estructura de un argumento.

2.3.1 Modelo de Toulmin. La estructura de un argumento se puede analizar con un modelo propuesto por Toulmin (2007) que es útil para identificar los elementos de un argumento y las relaciones entre ellos. En este modelo se tiene un enunciado o afirmación que se establece como cierto, llamado conclusión (C). Para justificar la conclusión se ofrecen los datos (D), y para mostrar que el paso de los datos a la conclusión es legítimo, se utilizan proposiciones –reglas, teoremas, principios, etcétera– que permitan deducir. Este tipo de proposiciones son las garantías (G), que se pueden enunciar en la forma si-entonces permitiendo relacionar los datos y la conclusión, es decir, según Toulmin, si se da D, puede asegurarse –por medio de G– que se da C.

Figura 8. Elementos principales de un argumento en el modelo de Toulmin



Fuente: Toulmin (2007, p. 135)

El siguiente es un ejemplo de argumento que surgió en la clase de grado cuarto mencionada anteriormente, cuando la profesora preguntó si la primera figura es o no circunferencia (véase Figura 4):

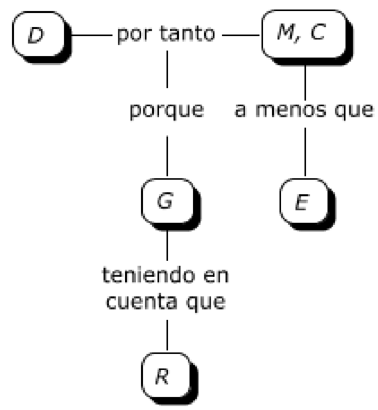
258.	Profesora:	[…] ¿Es la primera figura una circunferencia? Sí, no y por qué.
		[…]
267.	Sergio:	Miss, yo sé por qué no.
268.	Profesora:	Sergio: ¿por qué no?
269.	Sergio:	Porque no es una circunferencia porque el centro no tiene la misma distancia hacia arriba o hacia los lados.

Sergio está usando como datos la figura que tiene dibujada en la hoja, un punto que llamó centro y que la distancia del centro a puntos de la figura no siempre es la misma. Su garantía es la definición de circunferencia estudiada en la clase anterior (conjunto de puntos que están a la misma distancia de un punto fijo, llamado centro). Como la figura no cumple la condición de la definición, Sergio concluye que no es una circunferencia.

Además de los tres elementos principales en el modelo de Toulmin –conclusión, datos y garantía–, hay otros elementos que surgen de las diferentes clases de garantías y de la necesidad de respaldarlas. Las diferentes clases de garantías justifican las conclusiones con distintos grados de fuerza. Con algunas, la conclusión se da necesariamente a partir de los datos, pero con otras es posible que la conclusión sea provisional, dependa de condiciones o excepciones. En este caso, hay que acompañar a la conclusión de un término como *probablemente* o *presumiblemente*. Por esta razón, es posible que además de mencionar los datos, la conclusión y la garantía, sea también necesario mencionar el grado de fuerza que tiene la conclusión con la garantía dada, a través de los calificativos o matizadores modales (M). Por otra parte, las condiciones de refutación o de excepción (E) indican las condiciones que pueden hacer que se descarte o rechace la conclusión (Toulmin, 2007).

La garantía requiere un respaldo que le dé autoridad y vigencia. El respaldo (R) es alguna teoría de la cual se deriva la garantía y sirve para justificarla. Una diferencia entre el respaldo y la garantía es que los enunciados de las garantías son hipotéticos mientras que el respaldo se puede expresar como un enunciado sobre hechos, de la misma manera que se hace con los datos. Aunque el respaldo y los datos puedan enunciarse de maneras similares, tienen papeles diferentes en un argumento. Si hay una conclusión sin datos que la apoyen, no se tiene un argumento; sin embargo, es posible que no sea necesario hacer explícito el respaldo de las garantías y que se admitan sin dudar de ellas. El esquema completo, con los seis elementos mencionados, se muestra en la Figura 9.

Figura 9. Elementos de un argumento en el modelo de Toulmin



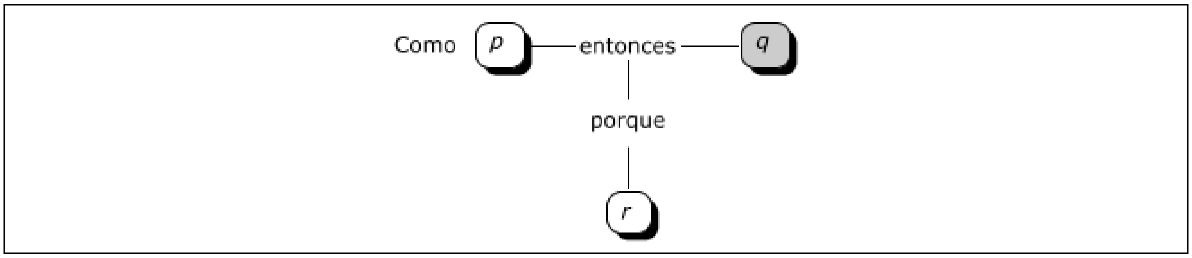
Fuente: Toulmin (2007, p. 141)

En educación, el modelo de Toulmin se ha utilizado como herramienta metodológica para analizar la argumentación de los estudiantes. Por ejemplo, Pedemonte (2007) utiliza este modelo para comparar las estructuras de la argumentación y la prueba en un experimento de enseñanza, y Yackel (2001) lo utiliza para analizar el progreso del aprendizaje en la clase de matemáticas.

2.3.2 Tipos de argumentos. El modelo de Toulmin puede ser utilizado para analizar la estructura de un argumento. Siendo los datos y la conclusión proposiciones particulares (p y q, respectivamente) y la garantía una proposición de carácter general $(r : p \rightarrow q)$, se pueden definir tres tipos de argumentos dependiendo de la forma como se relacionen estos tres elementos: deductivo, inductivo y abductivo (Pedemonte, 2007; Perry et al., 2012). A continuación se define cada tipo de argumento y se muestra un diagrama donde se resalta el elemento que se obtiene en cada caso:

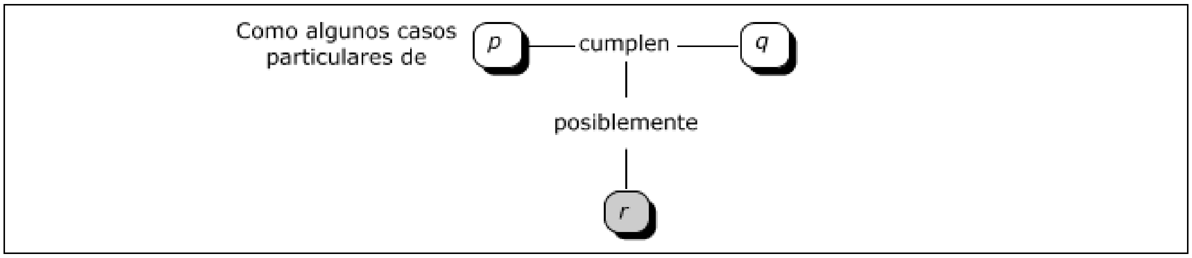
- Un *argumento deductivo* parte de los datos y por medio de la garantía deduce una conclusión; es decir, parte de la proposición p y a través de r deduce la proposición q.

Figura 10. Argumento deductivo



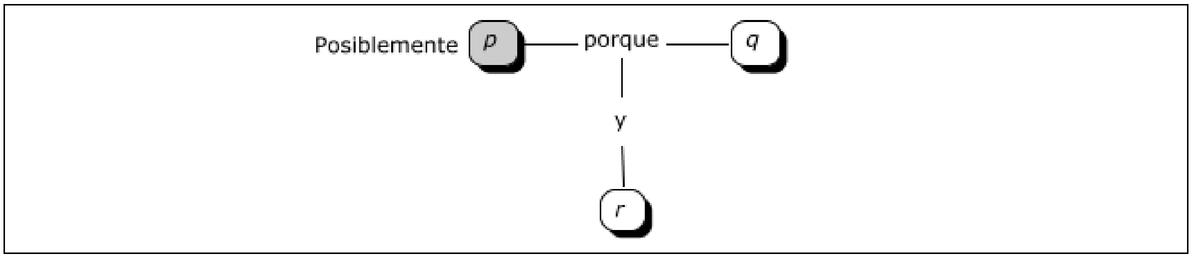
- En un *argumento inductivo* los datos son casos particulares de la proposición *p* que cumplen la proposición *q*; a partir de estos casos particulares se concluye que posiblemente se cumple $r: p \to q$.

Figura 11. Argumento inductivo



- En un *argumento abductivo* se tiene la proposición particular *q* y la proposición general $r: p \to q$ y se concluye que es posible que se cumpla la proposición *p*.

Figura 12. Argumento abductivo



En este trabajo se usará el modelo de Toulmin para identificar los argumentos de los estudiantes, analizar su estructura y determinar el tipo de relación que un argumento tiene con una definición. Para precisar esto último es necesario indagar sobre las posibles relaciones entre los procesos de argumentar y definir.

2.4 RELACIÓN ENTRE ARGUMENTACIÓN Y DEFINICIÓN

Según Kublikowski (2009), la argumentación y la definición están conectadas de diferentes formas; tres de ellas son: argumentación acerca de la definición, argumentación desde la definición y argumentación por definición. Aunque Kublikowski presenta estas relaciones en un contexto filosófico, las dos primeras pueden ser adoptadas en la educación matemática. A continuación se describe y se muestra con ejemplos cómo son entendidas en este trabajo la argumentación acerca de la definición y desde la definición, y por qué no se considera aquí la argumentación por definición.

2.4.1 Argumentación acerca de la definición. Una argumentación acerca de la definición tiene como fin llegar a una definición, que es el punto final, la conclusión de una discusión. El proceso argumentativo termina cuando se obtiene la definición (Kublikowski, 2009). Por ejemplo, en la clase de Elementos de Geometría en la Universidad Pedagógica Nacional, mencionada en la sección 2.2.3, se llegó a la definición de altura de un triángulo a partir de una discusión previa. Inicialmente, los estudiantes representaron un triángulo y una de sus alturas en una hoja de papel y después lo hicieron usando un *software* de geometría dinámica. Luego, escribieron una definición que surgió de la discusión en cada grupo. Esta fue una primera etapa del proceso de argumentar acerca de la definición de altura. Después de esta primera parte, la profesora recogió las definiciones escritas por cada grupo, las leyó y las aprovechó para argumentar y construir una definición. En primer lugar aclara que la instrucción se refería a construir una figura geométrica, así que no se estaba refiriendo a una distancia:

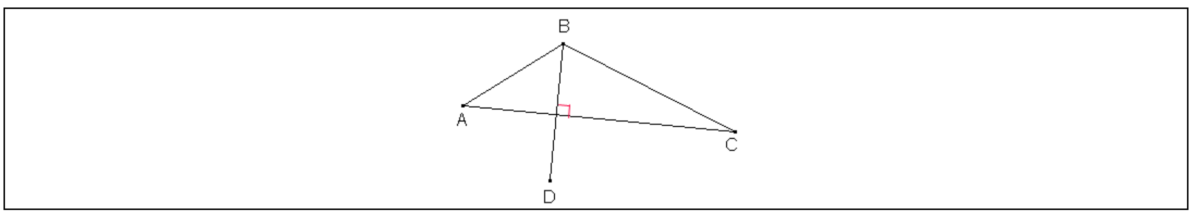
141.	Profesora:	[…] Ustedes dicen que se puede definir altura como la distancia desde un vértice del triángulo a un punto en el lado opuesto al vértice, tal que se forma una perpendicular al unir el punto con el vértice ya nombrado.
		[…]
145.	Profesora:	[…] yo les dije que construyeran una figura geométrica. Dije, representación de la figura geométrica anterior y una figura geométrica no puede ser un número…
		[…]
175.	Profesora:	[…] Los demás grupos me dicen que la altura es un segmento […]

Cuando se establece que la altura es un segmento, se analizan algunas representaciones hechas con el *software*. La profesora pide a uno de los estudiantes que arrastre un vértice del triángulo que construyó para ver qué ocurre:

201.	Profesora:	[…] Quiero que arrastres a *B* hasta que *C* sea un ángulo obtuso [Antonio arrastra el punto *B*] ¿Y qué pasa? […] ¿Qué pasó?
202.	Antonio:	Cuando el ángulo *C* es obtuso ya no es perpendicular a ese segmento.
203.	Profesora:	Se desaparece ese segmento, ¿no? Se desaparece el segmento. […]

Luego discuten sobre las razones por las cuales desaparece el segmento cuando el ángulo es obtuso y se ve la necesidad de referirse a la recta que contiene el lado opuesto. Así surge la siguiente definición: "Dado un vértice de un triángulo y el lado opuesto, la altura es el segmento perpendicular a la recta que contiene el lado opuesto con extremo en ese vértice". Sin embargo, los estudiantes ven que con la definición anterior puede ocurrir el caso mostrado en la Figura 13, donde $\overline{BD}$ cumple las condiciones dadas en la definición pero no es altura.

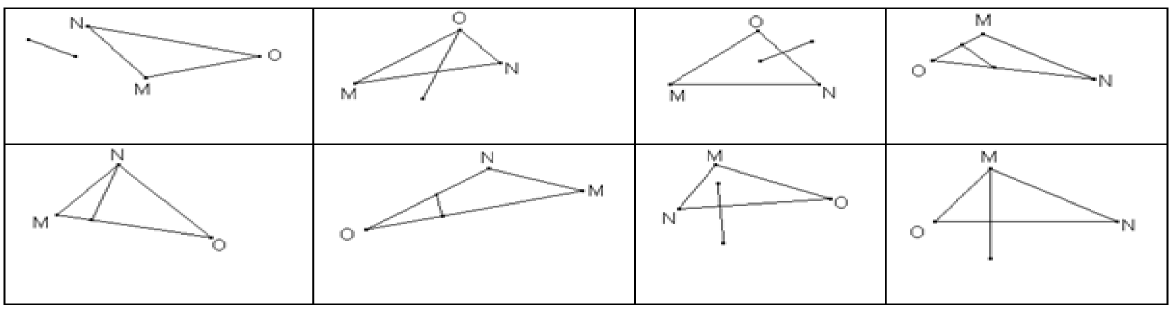
Figura 13. Contraejemplo para la definición de altura dada inicialmente



Viendo que es necesario agregarle una condición que se refiera al otro extremo del segmento, la definición queda de la siguiente manera: "Dado un vértice de un triángulo y el lado opuesto, la altura es el segmento perpendicular a la recta que contiene el lado opuesto con un extremo en ese vértice y el otro extremo en un punto de dicha recta". Con esta segunda etapa se completó el proceso de argumentación acerca de la definición de altura.

2.4.2 Argumentación desde la definición. Según Kublikowski (2009), en la argumentación desde la definición, una definición es el punto inicial de una discusión. Ocurre cuando se construyen argumentos usando definiciones bien establecidas e indiscutibles –para la comunidad de clase, en el caso de la educación–. Por ejemplo, a partir de la definición de altura de un triángulo construida en la clase mencionada anteriormente, se llegó a una conclusión con respecto a un segmento del cual se afirma no es altura del ΔMNO: si el segmento no es altura del triángulo, entonces el segmento no es perpendicular a la recta que contiene a un lado del triángulo o ningún vértice del triángulo es extremo del segmento o ningún extremo del segmento pertenece a una recta que contiene a un lado. Los estudiantes pasaron al tablero y dibujaron los ejemplos que se muestran en la Figura 14.

Figura 14. Ejemplos de segmentos que no son altura de un triángulo



2.4.3 Argumentación por definición. En la argumentación por definición una definición juega el papel de una premisa en una estructura argumentativa (Kublikowski, 2009). Aunque esta argumentación es similar a la argumentación desde la definición, según McGee (1999) una manera de distinguirlas es que en la argumentación desde la definición se razona a partir de una definición indiscutible –como lo son las definiciones matemáticas–, mientras que en la argumentación por definición se razona a partir de una definición polémica como, por ejemplo, la definición de la muerte o de la libertad humana. En algunas áreas del conocimiento puede ser difícil determinar cuáles definiciones son indiscutibles y por esta razón algunos autores como McGee prefieren no hacer distinción entre argumentación desde la definición y argumentación por definición. Por las características de las definiciones matemáticas, en este trabajo no se considera la argumentación por definición.

La relación entre argumentación y definición planteada por Kublikowski (2009) puede ser aprovechada para diseñar tareas en torno a una definición de manera que incluyan los dos procesos considerados en este trabajo (argumentación acerca de la definición y argumentación desde la definición). A partir de estas relaciones, más adelante se define argumento acerca de la definición y argumento desde de la definición que se usarán como herramientas para analizar los argumentos dados por estudiantes en la solución de las tareas.

Hasta el momento se han expuesto los referentes teóricos que sustentan el presente trabajo, con ejemplos en el contexto de la geometría a nivel escolar y universitario. En el siguiente capítulo se presenta el diseño metodológico del estudio.

3. DISEÑO METODOLÓGICO

En este capítulo se expone el tipo de estudio realizado, la descripción del contexto y de la población y el proceso general que se siguió desde el diseño del Taller hasta el establecimiento y presentación de resultados. Se incluyen, además, algunas definiciones utilizadas en el análisis de tareas y de datos, así como la descripción y análisis de cada una de las tareas que componen el Taller.

3.1 CLASIFICACIÓN DEL ESTUDIO

El presente estudio es cualitativo, descriptivo, con un modelo de diseño emergente. Se recoge información a través de la observación, los datos son los argumentos de los estudiantes que surgen durante el proceso de solución del Taller aplicado y están expresados en su lenguaje tal como se evidencia en el Capítulo 4 y en la transcripción completa de las grabaciones de las dos clases (Anexo G). Los elementos cualitativos que se incluyen (tablas de frecuencias y diagramas) son solo como apoyo para organizar y presentar los resultados. El estudio describe y analiza –a la luz de los referentes teóricos– los argumentos surgidos durante los procesos argumentativos en torno a las definiciones de simetría axial y figura con simetría axial.

El modelo de diseño es emergente ya que se fue construyendo durante el proceso. La primera versión de las categorías surgió después un análisis preliminar y, a partir de allí, se hicieron los ajustes para determinar las categorías finales utilizadas para análisis de datos y de cada una de las tareas que componen el Taller. Para construir el Taller se hizo un diseño previo y con base en observaciones generales sobre su aplicación, se hicieron ajustes y se llegó a la versión final.

Dentro de los riesgos previstos estaban que durante el desarrollo del Taller los estudiantes no expresaran sus ideas, no se involucraran en el trabajo o no lo entendieran; que no se contara con tiempo suficiente para desarrollarlo o que las intervenciones del profesor guiaran mucho el trabajo, limitando la exploración por parte de los estudiantes.

3.2 DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO Y DE LA POBLACIÓN

El programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional forma profesionales en educación matemática para los niveles básico y medio, considerando tres disciplinas: la matemática, la educación matemática y la tecnología informática en la educación. El plan de estudios se compone de dos ciclos: fundamentación y profundización.

La asignatura Elementos de Geometría es la primera de las cinco que componen la línea de Geometría en el ciclo de fundamentación y se cursa en el primer semestre. A través de un acercamiento informal, pero sin perder la rigurosidad del lenguaje geométrico, pretende complementar la formación escolar y proporcionar las herramientas necesarias que permitan a los estudiantes hacer un estudio formal de la geometría euclidiana en cursos posteriores (Samper et al., 2011). El estudio y tratamiento de las definiciones –que es un foco de la asignatura– se hace de acuerdo con la propuesta del grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ (véase página 32). En esta asignatura se hace énfasis en que los estudiantes adquieran el hábito de cuestionar y justificar ideas.

Los datos de este estudio se obtuvieron de las grabaciones hechas en uno de los cursos de Elementos de Geometría en la última semana de clase del primer semestre del año 2013. Los estudiantes ya habían participado en actividades en torno a definiciones y sabían manejar el programa de geometría dinámica Cabri. Era un curso compuesto por 18 estudiantes entre 16 y 20 años a quienes, en general, les gustaba participar en clase y aportar ideas para la solución de las actividades planteadas. El grupo cuyo trabajo se analiza en este estudio estaba compuesto por tres estudiantes quienes, en general, tenían buenas ideas, cumplían con el trabajo asignado y participaban en clase.

3.3 DISEÑO DEL TALLER

El diseño del Taller se hizo siguiendo la propuesta hecha por de Villiers (1998, 2004) de construir definiciones a partir de las propiedades del concepto que se identifican. Se incluyen tareas para determinar propiedades relevantes e irrelevantes a partir de ejemplos y no ejemplos (Hershkowitz & Vinner, 1982), tareas en las que se promueve la argumentación acerca de la definición y otras desde la definición (Kublikowski, 2009) y en las que se aprovecha la imagen conceptual (Vinner, 1991).

El Taller se construyó en torno a una definición de simetría axial. Inicialmente se hizo una versión previa, se aplicó y después se diseñó el Taller final para los estudiantes y la guía para la profesora. En ambos casos (diseño previo y Taller final) las tareas están separadas para ir entregándolas por escrito a los estudiantes según los cortes establecidos. Estos cortes tienen dos razones: hacer la socialización de los resultados antes de continuar o evitar que una pregunta posterior pueda dar información para responder las anteriores.

En el diseño previo del taller (Anexo A), la primera parte pretende hacer una construcción descriptiva-constructiva[*] de la definición de simetría axial. Los estudiantes exploran las características de dos figuras, siendo una la imagen de la otra bajo una simetría axial; luego hallan la imagen de un punto y de una figura bajo una simetría axial dada y, a partir de este trabajo, escriben una definición de simetría axial (Tareas 1 a 8). En la segunda parte se incluyen tareas donde se espera que los estudiantes argumenten desde la definición de simetría axial y de eje de simetría (Tareas 9 a 16). Este diseño previo del taller viene acompañado de una guía para la profesora (Anexo B).

La aplicación del taller anterior mostró que era muy extenso y requería demasiado tiempo para su ejecución. Por otro lado, faltaba hacer mayor énfasis en argumentación desde la definición e incluir enunciados que generaran argumentos inductivos. Además, el uso de los colores en las figuras no era significativo en este nivel y podían identificarse de otra manera. Por las razones anteriores, se hicieron modificaciones al taller inicial obteniendo el diseño final (Anexo C) y la guía para la profesora (Anexo D) que incluye instrucciones generales y las definiciones propuestas para la transformación simetría axial y figura con simetría axial. En el diseño previo, la profesora introducía la noción de transformación, pero no se daba una definición formal, que sí se incluyó en la versión final del taller. En la

[*] En la sección 3.4 se explica qué se entiende en este trabajo por construcción descriptiva-constructiva de una definición y se dan las razones por las cuales fue necesario considerar esta nueva manera de definir, no incluida en los referentes teóricos.

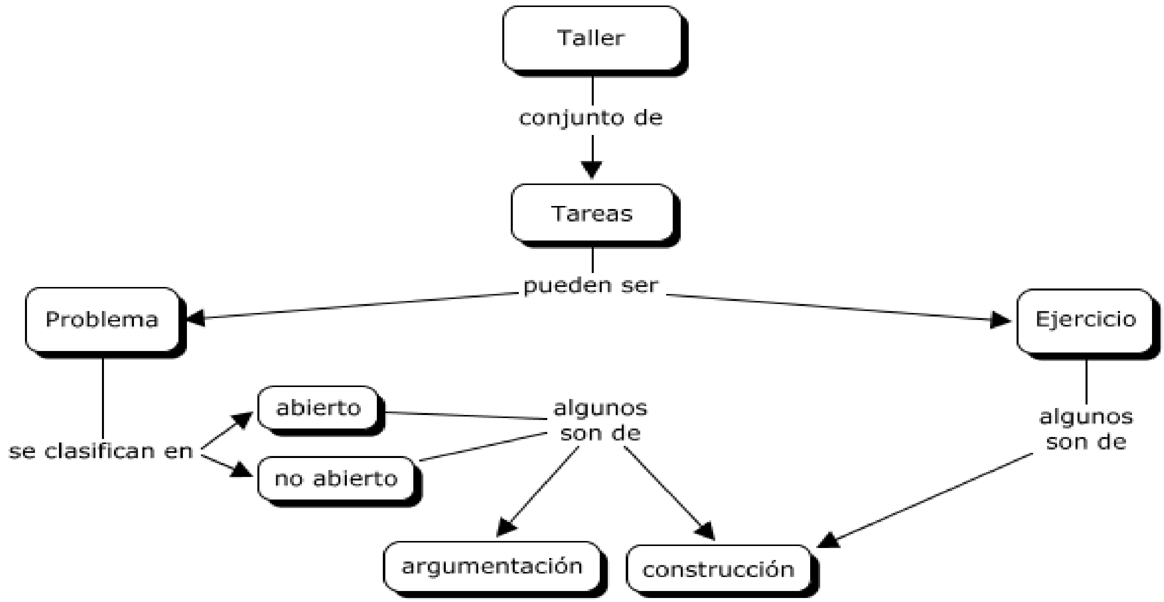
sección 3.6 se describe y analiza el Taller, después de presentar algunas definiciones previas y las categorías de análisis de tareas.

3.4 DEFINICIONES PREVIAS AL ANÁLISIS DE TAREAS Y DE DATOS

Antes de describir el proceso de análisis de datos y de las tareas que conforman el Taller, se define lo que se entiende por taller y tarea en este trabajo y se presentan otras definiciones relacionadas.

- Un *taller* es un conjunto de tareas.
- Una *tarea* consiste en enunciados que exigen respuestas o acciones, e indicaciones explícitas o implícitas sobre lo que se espera que los estudiantes hagan (resolver, justificar, leer y hacer un resumen, representar, conjeturar, entre otras). Las indicaciones implícitas se refieren a las normas de clase previamente establecidas y que no se mencionan en el enunciado, como consignar la información sobre el proceso seguido para resolver un problema o describir la construcción realizada. Una tarea puede incluir representaciones gráficas o tablas. Responder una tarea es hacer la actividad indicada en ella, incluyendo acciones y/o resultados. Las tareas pueden ser problemas o ejercicios.
- Una tarea es un *problema* para alguien si no tiene claro cómo establecer matemáticamente las relaciones expresadas en el enunciado o si aun sabiendo cómo establecerlas no tiene claro cómo ellas permiten encontrar una solución, es decir, los conocimientos que tiene la persona determinan si la tarea es o no problema para ella.
- Un *ejercicio* es una tarea cuya respuesta se encuentra aplicando un algoritmo.
- Una *tarea de construcción* es aquella que requiere, para su solución, el uso de instrumentos geométricos como regla, compás o un *software* de geometría dinámica.
- Un *problema abierto* es un problema que no sugiere una respuesta esperada ni un método para llegar a ella. En caso contrario se considera un *problema no abierto*.
- Un *problema de argumentación* es un problema en el que, además de tener que dar la solución, se debe incluir uno o más argumentos generados a partir de la información dada en el problema o de información externa, para justificar o explicar la respuesta.

Figura 15. Clasificación de las tareas



Después de un primer análisis de los datos de la Parte 1 del Taller final se vio que el proceso de construcción de la definición de simetría axial no corresponde a ninguna de las dos maneras de definir mencionadas por de Villiers: descriptiva y constructiva. Aunque se construye una definición del concepto a partir del reconocimiento de sus propiedades, no se considera una manera descriptiva de definir porque no se nombra el concepto que se quiere definir y el punto de partida no es la imagen conceptual de los estudiantes. Por estas razones se decidió considerar otra manera de definir que se inicia con la exploración de propiedades con base en la experiencia cultural previa de los estudiantes y que tiene como objetivo matematizar las ideas asociadas a esta experiencia cultural para construir una definición del concepto. Esta manera de definir se denominó *descriptiva-constructiva* porque se construye una definición a partir de la descripción y matematización de propiedades del concepto.

3.5 RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

En esta etapa se siguieron pasos para análisis de datos cualitativos tomando como guía la propuesta presentada en Fernández (2006): recoger, organizar, codificar e integrar información.

3.5.1 Recolección de información. La recolección de información se hizo en tres momentos. Un primer momento fue antes de diseñar el taller previo y el final. En esta etapa se grabó una clase de la asignatura Elementos de Geometría, que corresponde al primer semestre de Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional, en un curso donde la profesora era una de las investigadoras. Esta clase, en la que se hizo una construcción de la definición de altura (secciones 2.2.3 y 2.4.1), sirvió como ejemplo de la metodología que se podría utilizar como base para el posterior diseño de los talleres. También se diseñaron talleres para grado cuarto en torno a las definiciones de circunferencia, cuerda, diámetro y radio de los cuales la profesora –quien no hacía parte del grupo de investigadoras– aplicó las partes que consideró convenientes dadas las necesidades del curso y las limitaciones de tiempo. De estas clases se obtuvieron únicamente grabaciones de audio.

En un segundo momento, el diseño previo del taller se aplicó en el mismo curso de Elementos de Geometría mencionado anteriormente y se obtuvieron grabaciones de video del trabajo realizado en uno de los grupos. Tanto en esta clase como en la anterior (construcción de la definición de altura) la segunda investigadora fue observadora no participante.

En un tercer momento se hizo la aplicación de la versión final del Taller en otro curso de la asignatura Elementos de Geometría, donde la profesora no hacía parte del grupo de investigadoras de este estudio. Durante las dos clases utilizadas para aplicar el Taller, los estudiantes se organizaron en grupos de máximo tres integrantes y se realizaron grabaciones en tres grupos. En el grupo 1 se hicieron grabaciones de audio y video durante las dos clases, en el grupo 2 se hizo grabación de audio en la primera clase y en el grupo 3 se obtuvieron grabaciones de audio y video en la segunda clase. También se hicieron grabaciones de audio de las interacciones de la profesora con los estudiantes y se recogió el trabajo escrito de cada grupo. En este curso una de las investigadoras fue observadora no participante.

3.5.2 Organización de la información. Después de la recolección de información se hicieron las transcripciones de las grabaciones y se organizó el material escrito. En primer lugar se hizo la transcripción de la clase donde se construyó la definición de altura y las transcripciones de las grabaciones de audio en grado cuarto. Todas estas transcripciones se utilizaron únicamente para obtener algunos de los ejemplos presentados en el Capítulo 2. Los datos obtenidos en grado cuarto no fueron analizados ya que no proporcionaban información completa de los argumentos de los estudiantes al no contar con las figuras construidas por ellos, por tratarse únicamente de grabaciones de audio. Además, los talleres no fueron aplicados en su totalidad y algunas partes no fueron desarrolladas según la propuesta.

Posteriormente, se hizo la transcripción del trabajo del grupo grabado durante la aplicación de la versión previa del taller, pero estos datos solo fueron utilizados como guía general para hacer algunas de las modificaciones y obtener la versión final del Taller; después no se volvieron a utilizar y tampoco se analizaron.

Finalmente, se hicieron las transcripciones de las grabaciones hechas durante la aplicación del Taller final a los tres grupos mencionados anteriormente y de la interacción de la profesora con cada uno de los grupos. Las hojas de respuestas del Taller final pertenecientes a los tres grupos donde se hicieron grabaciones fueron escaneadas y los trabajos de los demás grupos fueron archivados para acudir a ellos en caso de ser necesario.

3.5.3 Codificación de la información. En esta etapa no se incluyó la información recogida en los dos primeros momentos ya que fue utilizada solo con los propósitos descritos anteriormente. El análisis de datos se inició con la transcripción del grupo que se grabó en video durante las dos clases de aplicación del Taller final. Como los datos obtenidos de este grupo fueron suficientes, no se hizo análisis de los datos recogidos en los grupos 2 y 3.

Un primer paso en la etapa de codificación de la información fue determinar las unidades básicas de análisis buscando y resaltando en las transcripciones aquellos segmentos en los que se presenta argumentación por parte de los estudiantes. El siguiente paso fue hacer un análisis cualitativo de estos segmentos a la luz de los referentes teóricos, para lo cual se hizo necesario determinar las categorías de análisis.

La primera versión de las categorías surgió a través de una técnica de codificación inductiva (Fernández, 2006) a partir de los datos y de la relación entre diferentes aspectos incluidos en los referentes teóricos. De esta manera inicialmente se consideraron, por una parte, el tipo de construcción de la definición que se hace en la clase (a priori o a posteriori), así como los tipos de argumentos utilizados (abductivo, deductivo, inductivo) y relaciones que se establecen entre argumentación y definición (argumentación acerca de la definición y argumentación desde la definición). Como el Taller no incluía construcciones a priori de definiciones, la primera versión de las categorías de análisis se refería únicamente al tipo de argumento y a la relación argumentación-definición. Con estas categorías se inició un primer análisis de los datos. Sin embargo, para poder determinar más adelante el tipo de tareas que propician la argumentación, se vio la necesidad de clasificar también las tareas que conforman el Taller. La primera clasificación fue la siguiente: problema, ejercicio, problema abierto y problema abierto de argumentación. A partir de los aspectos mencionados, las categorías de análisis se identificaron inicialmente con tres elementos: tipo de argumento, relación argumentación-definición, tipo de tarea (Tabla 1).

Tabla 1. Categorías de análisis definidas inicialmente

TIPO DE ARGUMENTO	RELACIÓN ARGUMENTACIÓN-DEFINICIÓN	TIPO DE TAREA
Deductivo (Ded) Inductivo (Ind) Abductivo (Abd)	Argumentación acerca de la definición (AAD) Argumentación desde la definición (ADD)	Problema (P) Ejercicio (E) Problema abierto (PA) Problema abierto de argumentación (PAA)

Después de hacer un primer análisis de la Tarea 1, una nueva revisión de los referentes teóricos permitió ver que la argumentación acerca de la definición no se refiere a argumentos individuales, sino que está concebida como un proceso argumentativo que concluye cuando se construye una definición (sección 2.4.1). Algo similar puede decirse de la argumentación desde la definición, donde la definición es el punto inicial de una discusión que no necesariamente consiste en un único argumento (sección 2.4.2). Teniendo en cuenta lo anterior, se vio que estas dos categorías son aplicables al proceso y no a argumentos individuales. Sin embargo, como es importante relacionar cada argumento con la definición y describir esta relación, se decidió clasificar también la relación entre argumento y definición en dos categorías: Argumento acerca de la definición y Argumento desde la definición, que son categorías que se aplican a argumentos individuales y no al proceso. Para evitar confusiones con los procesos de Argumentación acerca de la definición y Argumentación desde la definición, en el análisis se denominan estos procesos como *Argumentar para definir* (APD) y *Definir para argumentar* (DPA), respectivamente y se conservan para ellos las definiciones que aparecen en la sección 2.4. A continuación se definen las dos nuevas categorías que relacionan argumento con definición:

- Un *argumento acerca de la definición* (AAD) es un argumento que está relacionado con propiedades del concepto que se quiere definir.
- Un *argumento desde la definición* (ADD) es un argumento en el cual la garantía es una definición establecida en un libro o conjuntamente en clase con la profesora como representante de la comunidad matemática.

En este primer análisis también pudo verse que en algunos argumentos la garantía es implícita. Cuando este sea el caso, se reporta como un *argumento implícito* (I); de lo contrario se considera un *argumento explícito* (E). De aquí surgió una nueva categoría de análisis que se refiere a la clase de argumento: implícito y explícito. Con relación a la clasificación de las tareas, se encontró que algunas eran de construcción y se vio la necesidad de referirse a los problemas no abiertos, así que se agregaron nuevas categorías que incluyeran este tipo de tareas. Después de las modificaciones se determinaron las categorías de análisis definitivas para las tareas (Tabla 2) y para los argumentos (Tabla 3). La clasificación de las tareas en el Taller final se hace teniendo en cuenta el nivel de los estudiantes que lo resolvieron, para quienes todas estas tareas eran problemas. Por esta razón las categorías para el tipo de tarea que aparecen en la Tabla 2 se refieren únicamente a problemas.

Tabla 2. Categorías finales para análisis de tareas

Clasificación de las tareas	Proceso argumentativo	• Argumentar para definir (APD) • Definir para argumentar (DPA)
	Tipo	• Problema abierto (PA)* • Problema no abierto (PNA)** • Problema abierto de argumentación (PA-A) • Problema abierto de construcción (PA-C) • Problema abierto de argumentación y construcción (PA-AC) • Problema no abierto de argumentación (PNA-A) • Problema no abierto de construcción (PNA-C) • Problema no abierto de argumentación y de construcción (PNA-AC)

Tabla 3. Categorías finales para análisis de argumentos

Clasificación de los argumentos	Tipo	• Deductivo (Ded) • Inductivo (Ind) • Abductivo (Abd)
	Relación argumento-definición	• Argumento acerca de la definición (AAD) • Argumento desde la definición (ADD) • No hay relación argumento-definición (NRAD)
	Clase	• Argumento explícito (E) • Argumento implícito (I)

Cuando un argumento se relacione con propiedades del concepto que se quiere definir y, además, su garantía sea una definición, se clasifica como ADD.

En el análisis de datos, que se realiza por tareas, los segmentos de las transcripciones donde aparecen argumentos son identificados con las tres categorías anteriores en el siguiente orden: tipo argumento, relación argumento-definición, clase de argumento, y se muestran los tres elementos principales de un argumento según el modelo de Toulmin. Así, por ejemplo, un segmento de las transcripciones donde aparezca (Ded, AAD, I) significa que allí hay un argumento deductivo, que es un argumento acerca de una definición y que es implícito. Después del argumento, en algunos casos se explica por qué se clasificó en cada categoría, teniendo en cuenta los siguientes criterios:

*Cuando una tarea se clasifique como PA, significa que es un problema abierto que no es de construcción ni de argumentación, ya que en esos casos la tarea se clasificaría como PA-C o PA-A, respectivamente, o como PA-AC si es tanto de construcción como de argumentación.

**Aclaración similar a la que se hizo para el caso PA.

- **Tipo de argumento**: Cuando el argumento es inductivo o abductivo se explica la razón. Para los argumentos deductivos no se requiere aclaración porque es claro que se obtiene la conclusión a partir de los datos y de la garantía.
- **Relación argumento-definición**: Si la relación es AAD, se mencionan las propiedades del concepto cuya definición se está construyendo y que se relacionan con el argumento. Para el caso ADD no se requiere aclaración adicional porque cuando se presente la estructura del argumento se dirá cuál es la definición utilizada como garantía. Sin embargo, para este caso y para NRAD se hacen aclaraciones cuando se considere conveniente.
- **Clase de argumento:** No requiere explicaciones porque cuando la garantía del argumento sea implícita, se dirá al mostrar su estructura; sin embargo, cuando sea conveniente, se aclara por qué se considera implícita o explícita.

Cuando los datos de un argumento surjan de una construcción, de una medida o, en general, no sean datos teóricos, se aclara, como información adicional, que son datos empíricos, aunque esta distinción no es relevante en el proceso de codificación.

A continuación se presenta como ejemplo un argumento tomado del análisis de la Tarea 8.a, cuando en el grupo de tres estudiantes están tratando de definir figura con simetría axial. Afirman que dada una figura y una recta, a cada punto de la figura le corresponde un punto al otro lado de la recta. Una de las estudiantes dice que solo tienen que considerar algunos puntos (los vértices de la figura que no están sobre el eje de simetría) y Julia, su compañera, refuta esta afirmación con un argumento:

<table>
<tr><td>812.</td><td>Julia:</td><td>No porque igual a todos los puntos les corresponde… [señala puntos de la Figura b que no son vértices y sus correspondientes imágenes].</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, AAD, E)
Datos: Puntos de la Figura b, la Figura b tiene simetría axial, puntos de la Figura b que no son vértices y sus imágenes.
Garantía (visual): Si un punto que no es vértice tiene imagen en la figura, entonces todos los puntos tienen imagen en la figura (apareamiento).
Conclusión: Todos los puntos tienen imagen en la figura.</td></tr>
</table>

Después del argumento aparece la siguiente aclaración:

Se considera un argumento acerca de la definición porque se refiere a una de las propiedades de figura con simetría axial, cuya definición se está construyendo (todo punto de la figura tiene imagen en la figura). Aunque Julia no dice la garantía, se considera explícita porque señala puntos de la figura que no son vértices y sus correspondientes imágenes para llegar a la conclusión.

No se hace aclaración sobre el tipo de argumento porque es claro que a partir de los datos y la garantía se obtiene la conclusión. Como se considera un argumento acerca de la definición, se indica la propiedad relacionada con el concepto cuya definición se está construyendo. Finalmente, se aclara por qué la garantía se considera explícita.

Las expresiones y vocabulario utilizados en la presentación de la estructura del argumento y en la redacción del análisis no siempre coinciden con los usados por los estudiantes. Sus intervenciones se reportan en la transcripción (Anexo G), de la cual se presentan algunos apartes en el análisis. En otros casos, solo se indica entre corchetes la línea o líneas de la transcripción que corresponden a la parte mencionada, para aquellos lectores que deseen consultarlas.

3.5.4 Integración de la información. Un primer paso en el proceso de integración de la información es construir una tabla, que aparece al final del análisis de cada tarea, donde se resume la información sobre el tipo y número de argumentos, tipo de tarea que lo generó y proceso argumentativo al que pertenece, clase de argumento, líneas de la transcripción donde aparece, relación argumento-definición y las definiciones involucradas en estas relaciones, si las hay (Tabla 4).

Tabla 4. Argumentos generados por una tarea

TA	NA	PrA	TT	CA	LÍNEAS	RAD	DI
Deductivos							
Inductivos							
Abductivos							
Total							

TA: Tipo de argumento NA: Número de argumentos PrA: Proceso argumentativo TT: Tipo de tarea
CA: Clase de argumentos RAD: Relación argumento-definición DI: Definición involucrada

A partir de los resultados para cada tarea se elabora una tabla final (Tabla 5) donde se presentan los resultados generales del Taller. Con esta información se construyen otras tablas y diagramas como apoyo para el análisis de resultados.

Tabla 5. Tabla final utilizada en el análisis de resultados

TA	NA	PrA		TT						CA		RAD		
		APD	DPA	PA	PNA	PA-A	PA-C	PNA-A	PA-AC	E	I	AAD	ADD	NRAD
Ded.														
Ind.														
Abd.														
Total														

TA: Tipo de argumento NA: Número de argumentos PrA: Proceso argumentativo TT: Tipo de tarea
CA: Clase de argumentos RAD: Relación argumento-definición DI: Definición involucrada

A partir de esta integración de la información se establece si existen vínculos entre las diferentes categorías (Fernández, 2006) y se analizan los resultados con el fin de determinar los tipos de tareas que promovieron la argumentación y el proceso argumentativo al que pertenece cada una. Como resultado de este análisis se obtienen conclusiones y se plantean algunas preguntas. La Tabla 6 muestra las etapas para el análisis de datos y de resultados en lo relacionado con los pasos de codificación e integración de la información.

Tabla 6. Etapas del análisis de datos y de resultados

ETAPA	CRITERIOS/ACCIONES
Determinación de unidades de análisis	¿En qué segmentos de la información se presenta argumentación por parte de los estudiantes?
Determinación de la estructura de cada argumento	¿Cuáles son los datos, la garantía y la conclusión?
Clasificación del tipo y clase de argumento en cada segmento	¿Es un argumento deductivo, inductivo o abductivo? ¿Es implícito o explícito?
Clasificación de la relación argumento-definición en cada segmento	¿Es un argumento acerca de la definición, desde la definición o no hay relación argumento-definición?
Determinación del tipo de tarea que generó el argumento y proceso argumentativo al que pertenece	¿La tarea que generó el argumento pertenece a un proceso de argumentar para definir o de definir para argumentar? ¿Qué tipo de tarea es? (véase Tabla 7 en la página 71)
Organización de resultados	Elaboración de tablas y diagramas que permitan visualizar los resultados por tarea y por tipo de tarea.

ETAPA	CRITERIOS/ACCIONES
Integración de la información	¿Existen vínculos entre las diferentes categorías?
Obtención de resultados	¿Qué tipo de tareas favorecen la argumentación en torno a la definición de un objeto? ¿Hay otros resultados no esperados?
Redacción de conclusiones y posibles preguntas	¿Cuál es la respuesta a la pregunta de investigación? ¿Coincide con la hipótesis planteada? ¿Qué otras conclusiones se obtienen? ¿Qué preguntas surgen a partir de los resultados?

3.6 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL TALLER

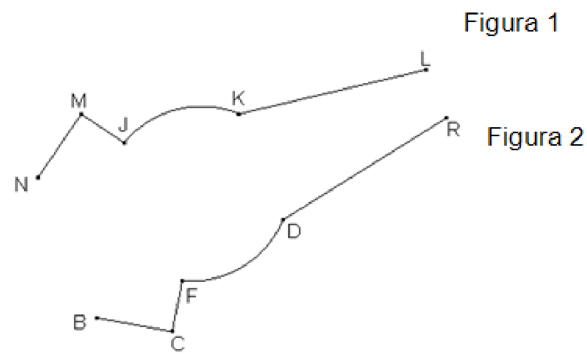
Todas las tareas del Taller final son problemas (teniendo en cuenta el nivel de los estudiantes que lo resolvieron) que pretenden generar procesos de argumentación relacionados con el concepto simetría axial; además, se espera que durante su desarrollo se establezcan vínculos con otros conceptos relacionados. Las tareas aparecen separadas en tres partes de acuerdo con los cortes propuestos para su aplicación. A continuación se describen las tareas en cada una de las partes del Taller.

3.6.1 Parte 1. La Parte 1 está compuesta por siete tareas (1, 2, 3.a, 3.b, 3.c, 3.d y 3.e). Esta parte pretende que los estudiantes construyan una primera versión de la definición de la transformación simetría axial partiendo de su imagen conceptual del simétrico o de reflexión, que se va fortaleciendo al pedir que construyan otro trozo o que busquen la imagen de un punto cualquiera. La pregunta 3, que se compone de cinco tareas, se incluye para establecer la relación de los resultados de las tareas anteriores con una transformación y llegar a una definición previa.

Todas las tareas de esta parte corresponden a un proceso de argumentar para definir (APD) ya que pretenden generar argumentos que permitan construir una definición de la transformación simetría axial. En este proceso los estudiantes comienzan a formarse una primera idea del concepto que están estudiando –aunque todavía no saben cuál es– y que más adelante puede formar parte de su imagen conceptual. Con base en las definiciones escritas por los estudiantes se espera que con la mediación de la profesora, se construya una definición de simetría axial.

3.6.1.1 Tarea 1. Tipo de tarea: PNA. Proceso argumentativo: APD.

> *Compare las dos figuras. Encuentre semejanzas y diferencias entre las partes que componen cada figura.*



Se considera que esta tarea es un problema no abierto porque indica el método que se debe seguir para encontrar la respuesta: comparar las figuras.

Con la Tarea 1 se da inicio a un proceso descriptivo-constructivo de la definición de simetría axial a partir de la exploración de similitudes y diferencias entre dos figuras (una figura es imagen de la otra bajo una simetría axial). Pretende que los estudiantes encuentren relaciones entre las dos figuras como correspondencia entre sus partes (puntos, segmentos, ángulos, arcos), congruencia de ángulos y segmentos correspondientes, similitudes en la forma y diferencias en las posiciones. Se espera que estas relaciones permitan dar un primer paso en el reconocimiento de propiedades de la transformación que se pretende definir. Algunas de las semejanzas que se pueden encontrar en la primera tarea son: el arco está entre el segmento más corto y el segmento más largo de cada figura, los segmentos más cortos en cada figura miden lo mismo, $\angle M$ y $\angle C$ tienen la misma medida, entre otras. Las diferencias se relacionan con las posiciones de las figuras.

3.6.1.2 Tarea 2. Tipo de tarea: PA-C. Proceso argumentativo: APD.

> *Añada un trozo más a la Figura 1 a partir del punto N. Busque una manera de encontrar el trozo correspondiente en la Figura 2 y trácelo. Describa un proceso geométrico para encontrar el trozo correspondiente.*

Esta tarea se clasifica como problema abierto porque no sugiere un método para encontrar el trozo correspondiente; por el contrario, los estudiantes deben crear y describir uno. Es un problema de construcción porque requiere el uso de instrumentos como regla y compás.

La Tarea 2 tiene como objetivo generar una imagen previa del concepto simetría axial haciendo que los estudiantes utilicen los resultados de la tarea anterior para construir una parte adicional en las figuras que tenga las mismas características antes encontradas. De esta manera se reconocen esas características como propiedades que se cumplen al construir una figura a partir de la otra. Al responder la Tarea 2 podría ocurrir alguno de los siguientes casos:

- Los estudiantes encuentran el eje de simetría de la figura (si no lo han encontrado antes) y pliegan el papel para hallar la parte correspondiente.
- Los estudiantes reproducen el trozo a partir de la medición de ángulos y de segmentos. Ese método se puede aprovechar para analizar las propiedades de la transformación aplicada.

3.6.1.3 Tarea 3.a. Tipo de tarea: PNA-A Proceso argumentativo: APD. La tarea aparece después de la definición de transformación.

> *Considere la siguiente definición.*
>
> ***D.*** *Una **transformación** es una correspondencia entre los puntos de un plano tal que:*
>
> *i) todo punto del plano tiene imagen*
> *ii) todo punto del plano es imagen de un punto del plano*
> *iii) ningún par de puntos tienen la misma imagen*
> *iv) ningún punto tiene dos imágenes*

¿Es posible considerar que la Figura 2 es imagen de la Figura 1 bajo alguna transformación t? Explique su respuesta.

Esta tarea se considera un problema no abierto porque sugiere una manera de llegar a una conclusión: verificando las condiciones que aparecen en la definición de transformación. Es de argumentación porque exige explicación de la respuesta.

Con esta tarea se busca que los estudiantes reconozcan la relación entre las dos figuras como resultado de una transformación. Surge la pregunta: ¿Podrían los estudiantes decir que la Figura 2 no es imagen de la Figura 1 bajo una transformación porque no todos los puntos del plano hacen parte de la Figura 1?

3.6.1.4 Tarea 3.b. Tipo de tarea: PA-C. Proceso argumentativo: APD.

Si su respuesta anterior es afirmativa, ¿cómo encontraría la imagen de un punto X, que no está en las figuras, bajo la transformación t?

Si la respuesta en la tarea anterior es afirmativa, la Tarea 3.b. se considera un problema abierto porque no sugiere cómo encontrar la imagen del punto indicado, sino que los estudiantes deben encontrar un método para hallarla. Es un problema de construcción porque requiere el uso de instrumentos como regla y compás.

Esta tarea pretende que los estudiantes vean que dado cualquier punto del plano, aunque no pertenezca a la Figura 1, tiene imagen bajo esa transformación y que es posible encontrarla a través de un proceso geométrico. Se espera que al hacer la construcción los estudiantes apliquen las propiedades encontradas, de manera que se fortalezca la imagen del concepto simetría axial que se ha empezado a formar.

Dependiendo de las propiedades encontradas hasta el momento, se consideran dos maneras generales de hallar la imagen del punto *X*: conectándolo con la Figura 1 o haciendo un procedimiento independiente de ella.

3.6.1.5 Tarea 3.c. Tipo de tarea: PA-A. Proceso argumentativo: APD.

> *Escoja dos puntos cualesquiera W y Y en el plano que contiene las figuras anteriores, pero que no estén en ninguna de ellas. Para su caso, ¿es Y imagen de W bajo la transformación t? Justifique su respuesta.*

Se considera que esta tarea es un problema abierto porque no sugiere una respuesta ni un método de solución. Como las respuestas varían dependiendo de los puntos escogidos por los estudiantes, las razones por las cuales uno de los puntos no es imagen del otro (si este el caso) pueden variar. Es un problema de argumentación porque además de determinar si *Y* es imagen de *W*, se debe justificar la respuesta.

Se espera que con esta tarea los estudiantes reconozcan la importancia de la recta en esta transformación y vean que dados dos puntos cualesquiera, siempre es posible encontrar una recta de manera que uno de los puntos sea imagen del otro bajo una transformación como la que se está estudiando. En el caso en el cual un punto no sea imagen del otro bajo la transformación *t* (lo cual es casi seguro por la forma de seleccionar los puntos), los estudiantes podrán ver que al menos una de las condiciones encontradas anteriormente no se cumple y así reconocer la necesidad de cada una de ellas.

3.6.1.6 Tarea 3.d. Tipo de tarea: PA-A. Proceso argumentativo: APD.

> *¿Existe una transformación similar s para que Y sea imagen de W? Justifique su respuesta.*

Esta tarea se considera un problema abierto porque no sugiere la respuesta –la transformación *s* podría no existir– ni la manera para llegar a ella. Las tareas anteriores tampoco indican, de manera directa, cuál es la respuesta en esta tarea. Para llegar a ella es necesario que los estudiantes utilicen las conclusiones obtenidas en las tareas anteriores y que establezcan relaciones con otros conceptos estudiados en el curso. La solicitud de justificar la respuesta hace que el problema sea de argumentación.

En esta tarea se aprovechan los resultados de la tarea anterior para construir una transformación de manera que uno de los puntos escogidos por los estudiantes sea imagen del otro. Para hacerlo, los estudiantes necesitan tener claras las condiciones que debe cumplir la recta que se va a construir, lo cual les permite determinar las propiedades que tiene este tipo de transformación y utilizarlas para definirla, que es lo que se pretende con la tarea en el literal e.

3.6.1.7 Tarea 3.e. Tipo de tarea: PA. Proceso argumentativo: APD.

Defina la transformación t.

Esta tarea es un problema abierto porque no sugiere la manera de definir la transformación. Se espera que a partir de las propiedades encontradas en la exploración, cada grupo pueda definir la transformación estudiada en las tareas anteriores.

Al final de esta primera parte hay una intervención de la profesora para decir que una transformación como la que definieron recibe el nombre de simetría axial. Se espera que se haga la socialización de las definiciones de los alumnos para construir una definición conjunta a partir del análisis. En la guía para la profesora (Anexo D) se incluye la definición de simetría axial que se propone.

3.6.2 Parte 2. Después de la socialización de la Parte 1 se entregan las tareas 4, 5, 6, 7 y 8.a. que corresponden a la Parte 2. No se entrega completa la pregunta 8 (que tiene tres tareas) para no dar implícitamente la definición de figura con simetría axial a través de las otras tareas. Cuando los estudiantes hayan escrito su definición de figura con simetría axial, se entrega la Parte 3 (Tareas 8.b, 8.c, 9 y 10).

La Parte 2 del Taller tiene como propósito que los estudiantes argumenten desde la definición de simetría axial y que, utilizando un razonamiento inductivo, construyan de manera descriptiva-constructiva una definición de figura con simetría axial. Esta parte, por lo tanto, incluye los procesos de definir para argumentar (DPA) y argumentar para definir (APD).

3.6.2.1 **Tarea 4**. Tipo de tarea: PA-A. Proceso argumentativo: DPA.

> *Si M' es la imagen de M bajo una transformación simetría axial respecto a una recta r, es M' también la imagen de M bajo una simetría axial con respecto a otra recta p? Justifique su respuesta*.

La Tarea 4 se considera un problema abierto porque no hay indicios, ni en esta tarea ni en las anteriores, que sugieran si esa otra recta existe o no. Es un problema de argumentación porque pide justificar la respuesta.

A partir de las tareas en la primera parte los estudiantes concluyen que dados dos puntos, siempre existe una recta que permita definir una simetría axial de manera que uno de los puntos sea imagen del otro. Con la Tarea 4 se espera que los estudiantes puedan ver que esta recta es única y que para llegar a esta conclusión argumenten desde la definición de simetría axial y posiblemente, desde otros conceptos, teoremas o hechos geométricos estudiados en el curso. De esta manera se establecen relaciones no solo entre diferentes aspectos de concepto estudiado (simetría axial), sino también con otros conceptos, lo cual hace parte del proceso de conceptualización.

3.6.2.2 **Tarea 5**. Tipo de tarea: PA-A. Proceso argumentativo: DPA.

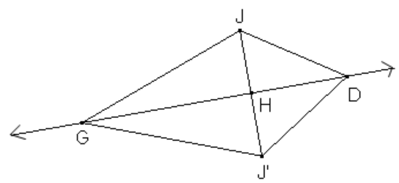
> *¿Es posible que en una simetría axial algún punto sea imagen de sí mismo? Justifique la respuesta.*

Es un problema abierto porque no hay nada que sugiera si la situación planteada es o no posible. Es de argumentación porque requiere justificar la respuesta.

Hasta este momento los estudiantes han considerado el caso donde un punto del plano tiene como imagen *otro* punto del plano bajo una transformación simetría axial. Con esta tarea se pretende que los estudiantes determinen si la imagen de un punto siempre será *otro* punto. De esta manera se considera un aspecto importante del concepto simetría axial que no ha sido tratado explícitamente.

3.6.2.3 Tarea 6. Tipo de tarea: PA-A. Proceso argumentativo: DPA.

El punto J' es la imagen del punto J bajo la simetría axial respecto a $\overleftrightarrow{GD}$. *Además, J y J' no pertenecen a la mediatriz del* $\overline{GD}$. *Justifique por qué el cuadrilátero GJDJ' es una cometa.*



En esta tarea la respuesta que se espera es una justificación. Se considera un problema abierto de argumentación porque no sugiere cuál es la justificación ni cómo hacerla. Para argumentar los estudiantes necesitan explorar y establecer relaciones entre la información.

Se espera que con la Tarea 6 los estudiantes argumenten desde la definición de simetría axial y utilicen otras definiciones y propiedades para hacer una justificación. Con esta tarea se pretende que los estudiantes puedan establecer y aprovechar vínculos entre el concepto de simetría axial y otros conceptos relacionados, que es parte importante del proceso de conceptualización.

3.6.2.4 Tarea 7. Tipo de tarea: PA-A. Proceso argumentativo: DPA y APD.

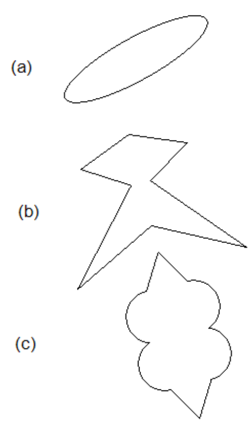
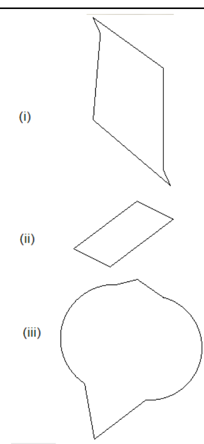
¿Existen una figura geométrica y una recta r tal que la imagen bajo la simetría axial con respecto a la recta r de la figura geométrica sea ***ella misma****? Explique su respuesta.*

Esta tarea se considera un problema abierto porque no hay nada que sugiera si la recta y la figura mencionadas existen o no. Se espera un proceso de definir para argumentar (desde la definición de simetría axial) y hace parte de un proceso de argumentar para definir porque los argumentos que aquí se generen serán útiles en la construcción de una definición de figura con simetría axial.

Con esta tarea se pretende que los estudiantes descubran o usen su experiencia cultural para proponer una o varias figuras con la propiedad mencionada. En su justificación pueden resultar asuntos sobre la definición de simetría axial que no se hayan considerado antes y que permitan fortalecer el proceso de conceptualización.

En el diseño de la tarea surge una duda con respecto al significado que los estudiantes pueden dar a la expresión *ella misma*. Podrían pensar en que al aplicar una simetría axial se obtiene una figura congruente con la inicial, pero que no necesariamente coincide con ella. En el diseño previo (Anexo A), en esta pregunta aparecía un polígono que tenía un eje de simetría (no dibujado) y, como estaba planteada, los estudiantes solo tenían que trazar el eje. Por eso, a pesar de la duda con respecto a lo que significa que una figura sea ella misma, se decidió escribir la tarea como aparece en el Taller final y dejar abiertas diferentes posibilidades que pudieran surgir a partir de la exploración. Para resaltar la importancia de considerar cuidadosamente lo que significa que una figura sea *ella misma*, a estas dos últimas palabras se les dio el formato negrita.

3.6.2.5 Tarea 8.a. Tipo de tarea: PA. Proceso argumentativo: APD.

Estas figuras tienen simetría axial	*Estas figuras no tienen simetría axial*
	

Defina figura con simetría axial.

Esta tarea se considera un problema abierto porque no sugiere una manera de definir figura con simetría axial; por el contrario, los estudiantes tienen que observar y analizar las figuras para llegar a conclusiones sobre las condiciones necesarias para definir. Hace parte del proceso de argumentar para definir figura con simetría axial.

En esta tarea se espera que a través de un razonamiento inductivo, y aprovechando la respuesta dada en la tarea anterior, los estudiantes definan figura con simetría axial. Las figuras que no tienen simetría axial fueron construidas de tal manera que fuera posible trazar una recta y establecer una correspondencia entre puntos de la figura en semiplanos diferentes determinados por la recta, pero donde no se cumple al menos una de las condiciones de la simetría axial. Con estas figuras se están incluyendo posibles imágenes del concepto engañosas y se espera que, como lo plantea Vinner (1991), lleven a los estudiantes a acudir a la definición (de simetría axial o la definición que ellos construyan de figura con simetría axial).

En el caso de la Figura i es posible trazar una recta y establecer correspondencia entre puntos de manera que la distancia de un punto a la recta es la misma distancia de su imagen a la recta, pero el segmento cuyos extremos son un punto y su imagen no es perpendicular a la recta. La Figura ii –en la que se puede establecer una correspondencia similar a la mencionada para la Figura i– se incluyó para poner de manifiesto el error que comenten algunos estudiantes al creer que para que una figura tenga simetría axial es suficiente trazar una recta que divida a la figura en dos partes congruentes, lo cual también se puede hacer en la Figura i aunque no es una figura con simetría axial. En la Figura iii es posible trazar una recta y establecer una correspondencia entre puntos de manera que el segmento cuyos extremos son un punto y su imagen sea perpendicular a la recta, pero las distancias de un punto y su imagen a la recta no son iguales. Estas observaciones permitirían definir figura con simetría axial a partir de la definición de la transformación simetría axial. Otra opción es establecer un vínculo con la Tarea 7 para decir que una figura tiene simetría axial si existe una recta tal que la imagen de la figura bajo la transformación simetría axial con respecto a esa recta es la misma figura.

3.6.3 Parte 3. La parte 3 de Taller se diseñó para generar argumentos desde la definición de figura con simetría axial que escriben en cada grupo (definir para argumentar). Incluye una tarea donde se requiere razonar de manera inductiva para tomar una decisión con respecto a una posible propiedad de los polígonos regulares. Al final de esta parte se espera que con la mediación de la profesora, y a partir de los aportes de los estudiantes y de las definiciones escritas en cada grupo, se construya una definición de figura con simetría axial.

3.6.3.1 Tarea 8.b. Tipo de tarea: PNA-A. Proceso argumentativo: DPA y APD.

Para cada figura (a), (b), (c):

- *Explique por qué sí tiene simetría axial. ¿Tiene simetría axial con respecto a más de una recta?*
- *Ilustre el eje o los ejes en la figura*

Esta tarea se considera un problema no abierto porque en la tarea anterior los estudiantes definieron figura con simetría axial, así que puede ser claro para ellos que se espera que hagan explícitos los argumentos que usaron para llegar a la definición que escribieron y que deben argumentar desde esa definición. Es un problema de argumentación porque deben explicar la respuesta. Esta tarea pertenece a dos procesos argumentativos: definir para argumentar porque se espera que se argumente desde la definición de figura con simetría axial que escribieron en los grupos y, a la vez, que argumenten para construir entre todos los estudiantes del curso una definición final de figura con simetría axial.

Con esta tarea se pretende que los estudiantes hagan explícitas las propiedades de las figuras que tienen simetría axial, según la definición que escribieron en la tarea anterior.

3.6.3.2 Tarea 8.c. Tipo de tarea: PNA-A. Proceso argumentativo: DPA y APD.

Para cada figura (i), (ii) y (iii): explique por qué no tiene simetría axial.

Esta tarea se considera un problema no abierto porque puede ser claro para los estudiantes que se espera que determinen cuáles condiciones de la definición que dieron en la Tarea 8.a no se cumplen. Es un problema de argumentación porque deben explicar la respuesta. Por las mismas razones de la tarea anterior, se considera que esta tarea pertenece a dos procesos argumentativos: APD y DPA.

Con la tarea 8.c se pretende que los estudiantes puedan determinar cuál o cuáles de las propiedades escritas en la definición de figura con simetría axial no se cumple en cada una de las figuras en la segunda columna. Este trabajo y la tarea anterior, ayudará a los estudiantes a poner a prueba su definición de figura con simetría axial y a clarificar cuáles son las condiciones necesarias para que una figura tenga este tipo de simetría.

3.6.3.3 Tarea 9. Tipo de tarea: PA-A. Proceso argumentativo: DPA.

> *¿Existe algún triángulo que tenga simetría axial? Justifique la respuesta.*

La Tarea 9 se considera un problema abierto porque no incluye información que pueda sugerir si existe o no un triángulo con la condición dada. Se espera que los estudiantes exploren y justifiquen la respuesta que den, por lo cual se clasifica como un problema de argumentación.

Esta tarea, que requiere argumentación desde la definición de figura con simetría axial, se diseñó, además, para que los estudiantes no se limiten solo a determinar si una figura dada tiene o no simetría axial, sino que encuentren figuras que tengan este tipo de simetría.

3.6.3.4 Tarea 10. Tipo de tarea: PA-AC. Proceso argumentativo: DPA.

> *Geometría dinámica: Decida si la respuesta a la siguiente pregunta es Sí, No o No se sabe. Justifique su respuesta.*
>
> *Q es un polígono regular de n lados,* $n \geq 4$. *¿Tiene Q n ejes de simetría?*

Esta tarea es un problema abierto porque aunque la respuesta es alguna de las tres opciones dadas, no hay información que sugiera cuál de ellas es ni cómo determinarla. Es un problema de argumentación porque los estudiantes deben justificar la respuesta y es de construcción porque se usa geometría dinámica en el proceso de exploración.

En la Tarea 10, que requiere razonar de manera inductiva, se formula una proposición para polígonos regulares de cuatro o más lados –el caso del triángulo equilátero podría haber surgido en la tarea anterior–. Se espera que en la justificación se mencionen las diferencias que se presentan cuando el número de lados del polígono es par y cuando es impar.

La clasificación de las tareas en el Taller final según las categorías definidas (Tabla 2) se muestra en la Tabla 7.

Tabla 7. Clasificación de las tareas en el Taller final

TAREA	CLASIFICACIÓN		TAREA	CLASIFICACIÓN	
	Tipo de tarea	Proceso argumentativo		Tipo de tarea	Proceso argumentativo
1	PNA	APD	5	PA-A	DPA
2	PA-C	APD	6	PA-A	DPA
3.a	PNA-A	APD	7	PA-A	DPA y APD
3.b	PA-C	APD	8.a	PA	APD
3.c	PA-A	APD	8.b	PNA-A	DPA y APD
3.d	PA-A	APD	8.c	PNA-A	DPA y APD
3.e	PA	APD	9	PA-A	DPA
4	PA-A	DPA	10	PA-AC	DPA

El análisis de tareas, las categorías finales para análisis de datos y las definiciones presentadas en este capítulo serán utilizadas para analizar cada uno de los argumentos generados por la versión final del Taller, a la luz de los referentes teóricos presentados en el Capítulo 2. Este es el contenido del Capítulo 4.

4. ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo se analizan los argumentos surgidos en cada una de las 16 tareas del Taller, incluyendo la estructura de cada argumento según el modelo de Toulmin. Para cada tarea se presenta al final una tabla con los resultados obtenidos.

Para el desarrollo del Taller (Anexo C), el primer día los estudiantes se organizaron en cinco grupos de tres y un grupo de dos integrantes (un estudiante ausente) y el segundo día en seis grupos de tres. Los datos analizados corresponden al trabajo, durante los dos días, de uno de los grupos de tres estudiantes conformado por Julia, Sonia y Felipe[*]. En el Anexo E se presenta un resumen del trabajo hecho por este grupo en cada tarea y de las socializaciones lideradas por la profesora durante las dos clases empleadas para resolver el Taller. Las respuestas escritas que dieron en el grupo y la transcripción completa de las dos clases pueden consultarse en los Anexos F y G, respectivamente.

4.1 TAREA 1

En la exploración, el grupo de estudiantes utiliza los conceptos de circunferencia, segmentos perpendiculares y segmentos congruentes. Hay percepción del concepto de reflexión y la visualización juega un papel importante. Encuentran correspondencia entre puntos de la Figura 1 y puntos de la Figura 2 [79-82, 88][**] y congruencia de ángulos correspondientes [93-96]. No escriben diferencias.

A partir de esta tarea surgieron tres argumentos, todos ellos deductivos. El primero cuando uno de los estudiantes sospecha que cuatro puntos (dos de cada figura) pertenecen a una misma circunferencia:[***]

[*]Para proteger la identidad de los estudiantes, sus nombres reales fueron cambiados.

[**]Los números entre corchetes corresponden a la línea o líneas de la transcripción.

[***]Esta característica encontrada por los estudiantes solo se presenta cuando el centro de los arcos es el mismo, caso en el cual es un punto del eje de simetría.

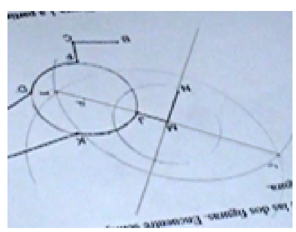
<table>
<tr><td>9.</td><td>Felipe:</td><td>Sí, parece como si J, K, F y D pertenecieran a… o sea, fueran puntos equidistantes a una circunferencia, como con centro acá [señala el posible centro]. Es como si hubiera una circunferencia acá [mueve el lápiz sobre la figura mostrando la posible circunferencia].</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, ADD, I)
Datos: puntos J, K, F y D parecen ser equidistantes de un mismo punto.
Garantía (implícita): Definición de circunferencia.
Conclusión: J, K, F y D posiblemente están en una circunferencia.</td></tr>
</table>

Se considera que la garantía es implícita porque utilizan la definición de circunferencia para concluir, pero no la expresan explícitamente. La verificación empírica les permite afirmar que la conclusión del argumento anterior es segura al encontrar un centro y la equidistancia de los cuatro puntos a ese centro [12-15].

Otro argumento deductivo surgió cuando querían verificar si los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{MJ}$ eran perpendiculares, construyendo la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{MN}$ por *M* para ver si esta perpendicular contenía al $\overline{MJ}$:

39.	Sonia:	Y se traza la perpendicular.
40.	Felipe:	Y si pues las dos, o sea, si la recta que vamos a hacer y el segmento coinciden, entonces sí son perpendiculares […]

Cuando construyen la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{MN}$ por *M*, Felipe llega a una conclusión:

<table>
<tr><td>42.</td><td>Felipe:</td><td>[…] Y… pues sí, sí son perpendiculares.
</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, NRAD, E)
Datos (empíricos): Recta perpendicular (construida) a $\overleftrightarrow{MN}$ por M contiene al $\overline{MJ}$.
Garantía: Si la recta construida y el segmento $\overline{MJ}$ coinciden, entonces los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{MJ}$ son perpendiculares.
Conclusión: $\overline{MN} \perp \overline{MJ}$</td></tr>
</table>

Se considera que los datos son empíricos porque surgen de la construcción que hicieron. Felipe no dice de manera explícita que la recta contiene al segmento, pero, como lo ve en la construcción, llega a una conclusión apoyándose en la garantía que enunció en la línea 40. Como la garantía no es una definición y el argumento no se relaciona con propiedades de la definición que se está construyendo, no hay relación argumento-definición.

El tercer argumento surgió cuando en el grupo concluyeron que $\overline{BC}$ y $\overline{CF}$ son perpendiculares sabiendo que $\overline{MN} \perp \overline{MJ}$:

43.	Sonia:	Entonces, la otra [señala la Figura 2], como es el reflejo, también.
44.	Felipe:	Sí. Si son el reflejo, entonces también serán perpendiculares [silencio] ¿Sí?

(Ded, AAD, I)

Datos: $\overline{BC}$ imagen de $\overline{MN}$, $\overline{CF}$ imagen de $\overline{MJ}$, $\overline{MN} \perp \overline{MJ}$

Garantía (implícita): Teorema en acto (si una figura es imagen de otra, conserva las mismas propiedades).

Conclusión: $\overline{BC} \perp \overline{CF}$

Respaldo: Experiencia cultural y percepción.

Se considera un argumento acerca de la definición porque está relacionado con una propiedad del concepto simetría axial cuya definición se está construyendo (una figura y su imagen conservan las mismas propiedades). La propiedad que consideran en este argumento es la de ser una isometría, en particular, que se conservan las medidas de los ángulos.

Tabla 8. Argumentos generados por la Tarea 1

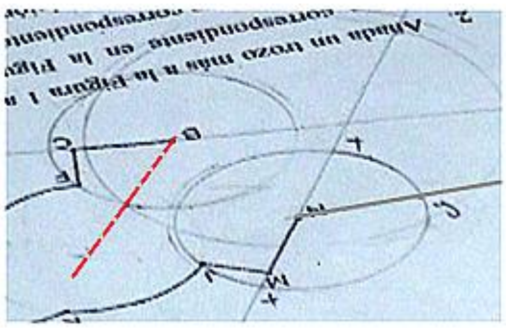
TA	NA	PrA	TT	CA	LÍNEAS	RAD	DI
Deductivos	3	APD	PNA	I	9	ADD	Circunferencia
		APD	PNA	E	39-40, 42	NRAD	-
		APD	PNA	I	43-44	AAD	Simetría axial
Inductivos	0	-	-	-	-	-	-
Abductivos	0	-	-	-	-	-	-
Total	3						

TA: Tipo de argumentos NA: Número de argumentos PrA: Proceso argumentativo TT: Tipo de tarea
CA: Clase de argumentos RAD: Relación argumento-definición DI: Definición involucrada

4.2 TAREA 2

A partir de las propiedades de isometría que descubrieron en la tarea anterior, los estudiantes concluyen que para trazar el trozo correspondiente en la Figura 2 deben copiar ángulos y la longitud de los segmentos [95-96, 171-172].

En esta tarea se generó un argumento deductivo con el que los estudiantes hicieron una prueba indirecta. Al añadir un trozo a la Figura 1 ($\overline{NZ}$) y tratar de construir el trozo correspondiente en la Figura 2, se equivocan y en lugar de copiar el $\angle ZNM$ copian otro. Concluyen, a partir de la ubicación del segmento correspondiente resultante en la Figura 2, que hay un error porque no quedó ubicado donde ellos esperaban:

<table>
<tr><td>144.</td><td>Julia:</td><td>[…] Pero ¿y ahí? Hay algo mal. Quedaría por acá [indica con el dedo la ubicación aproximada del segmento, que se muestra en la imagen con la línea roja punteada].
</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, AAD, I)
Datos empíricos: $\angle CBW \ncong \angle MNZ$, $\overline{NM}$ es imagen de $\overline{BC}$.
Garantía (implícita): Teorema en acto (conservación de medidas de ángulos).
Conclusión: $\overline{BW}$ no es la imagen de $\overline{NZ}$.</td></tr>
</table>

El teorema en acto de conservación de medidas de segmentos y ángulos surge a partir de la exploración en la Tarea 1 y lo mencionan cuando reportan su trabajo a la profesora [62] y después cuando están decidiendo qué hacer para resolver la Tarea 2 [93-96]; sin embargo, no es explícito en el argumento, por lo cual se considera un argumento implícito. Es un argumento deductivo usando la contrarrecíproca de la proposición que utilizan como teorema en acto, el cual parece ser el siguiente: si $\overline{BC}$ es imagen de $\overline{NM}$ y $\overline{BW}$ es imagen de $\overline{NZ}$, entonces $\angle MNZ \cong \angle CBW$.

Cometer el error y darse cuenta de él a partir de la figura, fortalece la imagen que se están formando del concepto de simetría axial por lo cual se considera como un argumento acerca de la definición (está relacionado con propiedades de la definición que se está construyendo, como la propiedad de ser una isometría).

Tabla 9. Argumentos generados por la Tarea 2

TA	NA	PrA	TT	CA	LÍNEAS	RAD	DI
Deductivos	1	APD	PA-C	I	144	AAD	Simetría axial
Inductivos	0	-	-	-	-	-	-
Abductivos	0	-	-	-	-	-	-
Total	1						

TA: Tipo de argumentos NA: Número de argumentos PrA: Proceso argumentativo TT: Tipo de tarea
CA: Clase de argumentos RAD: Relación argumento-definición DI: Definición involucrada

4.3 TAREA 3.a

La Tarea 3.a aparece en el Taller después de la definición de transformación. Los estudiantes verifican que se puede considerar que la Figura 2 es imagen de la Figura 1 bajo una transformación porque hay una correspondencia entre los puntos y se cumplen todas las condiciones dadas en la definición de transformación [178-182, 194-196].

Esta tarea generó ocho argumentos deductivos que se presentaron en la verificación de las propiedades que definen una transformación y en la respuesta. En primer lugar, comprueban la primera propiedad de la definición de transformación con respecto a un subconjunto de puntos del plano (los puntos *N*, *M*, *J*, *K*, *L*, *B*, *C*, *F*, *D*, *R*):

178.	Sonia:	[Leyendo] *Todo punto del plano tiene imagen*. Tiene, tiene, tiene, tiene, tiene [a medida que dice tiene, señala un punto en la Figura 1 (*L*, *K*, *J*, *M*, *N*) y su imagen en la Figura 2 (*R*, *D*, *F*, *C*, *B*)]. Sí. [Leyendo] *Todo punto del plano es imagen de…*
(Ded, AAD, I) Datos: A los puntos *N*, *M*, *J*, *K*, *L* les corresponden los puntos *B*, *C*, *F*, *D*, *R*,		

respectivamente Garantía (implícita): Teorema en acto (si se cumple para estos puntos se cumple para todos los puntos). Conclusión: Se cumple que todo punto del plano es imagen de un punto.

Sonia no está descubriendo una propiedad, caso en el cual enunciaría una regla general y su argumento sería inductivo; ella está verificando la propiedad. Como los puntos que Sonia señala (vértices) sí tienen imagen, concluye que todos los puntos la tienen; sin embargo, no se sabe si cuando piensa en todos los puntos, está incluyendo también los que no son vértices. El argumento está relacionado con una de las propiedades de la definición que se está construyendo (la simetría axial es una transformación), por lo tanto se considera un argumento acerca de la definición. Parece que los estudiantes hacen un proceso similar al anterior para concluir que se cumplen las propiedades ii, iii y iv de la definición de transformación, pero no hay evidencia. Su conclusión es visual [179-180].

El segundo argumento se da cuando concluyen que la Figura 2 es imagen de la Figura 1 bajo alguna transformación *t* [179-183]. Después Felipe lo expresa nuevamente de otra manera [196]:

<table>
<tr><td>179.</td><td>Julia:</td><td>[Leyendo] Todo punto del plano es imagen de algún punto del plano. Sí.</td></tr>
<tr><td>180.</td><td>Sonia:</td><td>[Leyendo] Ningún par de puntos tienen la misma imagen. Sí [señala las dos figuras]. [Leyendo] Ningún punto tiene dos imágenes. Sí.</td></tr>
<tr><td>181.</td><td>Felipe:</td><td>[Leyendo] ¿Es posible considerar que la Figura 2 es imagen de la Figura 1 bajo alguna transformación ?</td></tr>
<tr><td>182.</td><td>Sonia:</td><td>Sí es posible porque cumple las condiciones de la transformación.</td></tr>
<tr><td>183.</td><td>Felipe:</td><td>De la definición. Y bajo una transformación t que fue la que nosotros hicimos. Más o menos, ¿sí?</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, ADD, E)
Datos: Puntos correspondientes que cumplen las partes i, ii, iii y iv de la definición de transformación.
Garantía: Definición de transformación.
Conclusión: Existe transformación t.</td></tr>
</table>

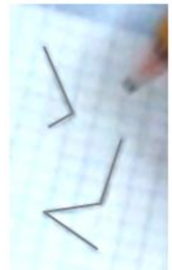
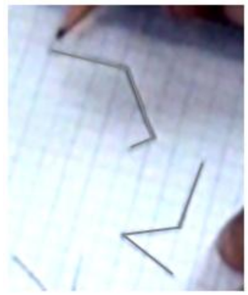
Luego tratan de explicar mejor la conclusión obtenida anteriormente y se generan tres argumentos deductivos más:

197.	Julia:	Entonces hay una correspondencia entre las figuras [silencio]. Es que mira, si encontramos la correspondencia entre un punto de esta Figura 1 y la correspondencia… [señala el punto *Z* y luego el punto *W* de la Tarea 2], o sea, si hacemos esto que está acá en el Punto 2 [se refiere a la Tarea 2] pues vamos a tener una transformación y se van a cumplir esas condiciones [señala las condiciones dadas en la definición].
(Ded, AAD, I) Datos: Correspondencia entre puntos de la Figura 1 y puntos de la Figura 2. Garantía (implícita): Si se pueden encontrar en la Figura 2 los correspondientes de puntos de la Figura 1, entonces hay correspondencia entre las dos figuras. Conclusión: Hay correspondencia entre las dos figuras.		
(Ded, AAD, E) Datos: Hay correspondencia entre las dos figuras. Garantía: Si hay correspondencia entre figuras como se hizo en el Punto 2, entonces hay una transformación. Conclusión: Hay una transformación.		
(Ded, ADD, I) Datos: Hay una transformación. Garantía (implícita): Definición de transformación. Conclusión: Se cumplen las propiedades de una transformación.		

Los dos primeros argumentos se refieren a propiedades de la transformación simetría axial, cuya definición se está construyendo, por lo cual se consideran argumentos acerca de la definición. Estos argumentos se repiten más adelante cuando están reportando a la profesora lo que hicieron para resolver la tarea [214].

Felipe dice no estar totalmente de acuerdo con la conclusión final de Julia y presenta su argumento, que es el sexto argumento deductivo generado por esta tarea:

200.	Felipe:	Pero es que mira que eso no se cumple siempre porque si digamos tú tienes esta figura y acá tienes esta  y tu acá hallas, no sé, lo mismo que acabamos de hacer, un trozo acá

<table>
<tr><td></td><td></td><td>
y luego allá haces ese mismo trozo acá

o sea este punto [señala el punto indicado con el lápiz] tal vez es correspondiente con este ¿sí? [señala el que considera punto correspondiente en la primera figura], pero las dos figuras no van a ser… esta figura no es imagen de esta [señala la figura de arriba y luego la de abajo]. A eso es a lo que yo me refiero.</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, AAD, I)
Datos: Figuras correspondientes, las figuras no tienen la misma forma.
Garantía (implícita): Teorema en acto (si son figuras correspondientes y una es imagen de la otra bajo una transformación, entonces tienen la misma forma).
Conclusión: Una figura no es imagen de la otra.</td></tr>
</table>

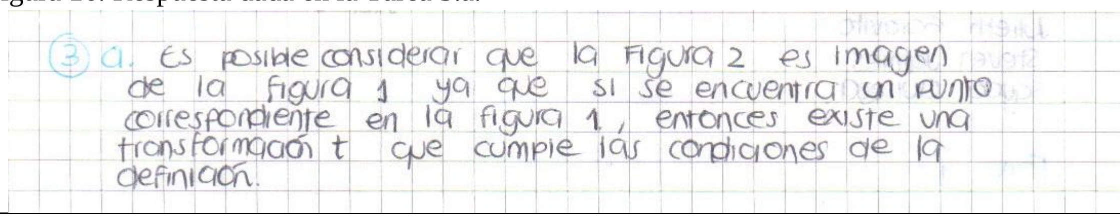
Como el argumento se relaciona con una propiedad de la simetría axial, cuya definición se está construyendo (una figura y su imagen tienen la misma forma), se considera un argumento acerca de la definición. Este argumento fue refutado por Julia con otro argumento deductivo (séptimo):

<table>
<tr><td>201.</td><td>Julia:</td><td>Pero en este caso no estás considerando la transformación t. O sea, es considerando t.</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, AAD, I)
Datos: Figuras dibujadas que no tienen la misma forma.
Garantía (implícita): Si la transformación es t, entonces las figuras tienen la misma forma.
Conclusión: No es la misma transformación t.</td></tr>
</table>

Como este argumento se relaciona con una de las propiedades de la simetría axial (bajo una transformación simetría axial, una figura y su imagen tienen la misma forma), se considera un argumento acerca de la definición.

En la respuesta que escribieron puede identificarse el octavo argumento deductivo con la estructura que se muestra:

Figura 16. Respuesta dada en la Tarea 3.a.


3 a. Es posible considerar que la Figura 2 es imagen de la figura 1 ya que si se encuentra un punto correspondiente en la figura 1, entonces existe una transformación t que cumple las condiciones de la definición.

(Ded, ADD, E)
Datos: Existe correspondencia entre puntos de las dos figuras.
Garantía: Definición de transformación.
Conclusión: La Figura 2 es imagen de la Figura 1.

En la respuesta no se ve reflejado el proceso de argumentación que se dio para llegar a ella: verificar si se cumplen las condiciones de una transformación [177-183], decidir cómo explicar la respuesta [192-199] y considerar un posible contraejemplo (correspondencia que no cumplía las condiciones de la transformación explorada) [200]. Analizando el proceso para resolver la tarea, puede verse que no es suficiente para un profesor leer la respuesta escrita ya que esta, por sí sola, no revela todo lo ocurrido para llegar a ella.

Tabla 10. Argumentos generados por la Tarea 3.a

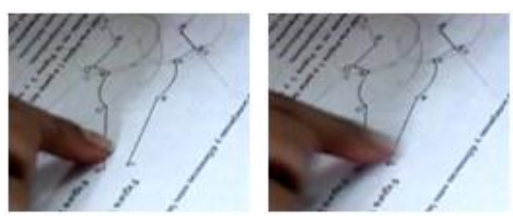
TA	NA	PrA	TT	CA	LÍNEAS	RAD	DI
Deductivos	8	APD	PNA-A	I	178	AAD	Simetría axial
		APD	PNA-A	E	179-183	ADD	Transformación
		APD	PNA-A	I	197	AAD	Simetría axial
		APD	PNA-A	E	197	AAD	Simetría axial
		APD	PNA-A	I	197	ADD	Transformación
		APD	PNA-A	I	200	AAD	Simetría axial
		APD	PNA-A	I	201	AAD	Simetría axial
		APD	PNA-A	E	Respues.	ADD	Transformación
Inductivos	0	-	-	-	-	-	-
Abductivos	0	-	-	-	-	-	-
Total	8						

TA: Tipo de argumentos NA: Número de argumentos PrA: Proceso argumentativo TT: Tipo de tarea
CA: Clase de argumentos RAD: Relación argumento-definición DI: Definición involucrada

4.4 TAREA 3.b

Los estudiantes encuentran tres métodos para hallar la imagen de un punto *X* que no está en las figuras. El primero es el método utilizado en las tareas anteriores de copiar ángulos y longitudes de segmentos [234, 329], el segundo consiste en hallar un punto de corte de una circunferencia y una recta [266, 350-353], y el tercero es trazando una perpendicular a la recta que contiene los puntos medios de los segmentos cuyos extremos son un punto y su imagen y copiando una distancia [364-370]. Escribieron como respuesta este último método.

Con esta tarea se generaron seis argumentos: cinco deductivos y uno inductivo. Los dos primeros se presentaron cuando Felipe ubicó un punto *X* que no pertenece a las figuras y Julia dice que el punto no se puede ubicar allí:

<table>
<tr><td>223.</td><td>Julia:</td><td>Pero sí, pero es que no porque si este punto está acá [señala el punto que ubicó Felipe] ya no se cumplirían las condiciones de la transformación [señala las condiciones de la definición de transformación].</td></tr>
<tr><td>224.</td><td>Profesora:</td><td>¿Por qué?</td></tr>
<tr><td>225.</td><td>Julia:</td><td>Porque digamos, a este punto le corresponderían dos puntos, ¿no? [señala un punto en la Figura 1 y otro en la Figura 2]
</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, NRAD, I)
Datos: Punto X que no pertenece a las figuras.
Garantía (implícita): Teorema en acto (si el punto no pertenece a las figuras, entonces le corresponden dos imágenes).
Conclusión: Al punto X le corresponden dos puntos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, ADD, I)
Datos: A X le corresponden dos puntos.
Garantía (implícita): Definición de transformación.
Conclusión: No se cumplen las condiciones de una transformación.</td></tr>
</table>

El primer argumento no tiene relación con la definición porque no es un argumento desde la definición ni sobre propiedades de la simetría axial.

Sonia expresa su desacuerdo con Julia (tercer argumento):

<table>
<tr><td>228.</td><td>Sonia:</td><td>No, el correspondiente sería uno. Sería hacia acá [señala un punto hacia arriba de la Figura 1].</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, AAD, I).
Datos: Punto X que no está en las figuras.
Garantía (implícita): Teorema en acto (si un punto es imagen de otro bajo la transformación t, entonces las posiciones respecto a las figuras del punto y su imagen son similares).
Conclusión: X tiene una única imagen que no está en las figuras.</td></tr>
</table>

El teorema en acto usado como garantía se refiere a una propiedad de la simetría axial, por lo que se considera un argumento acerca de la definición. Aunque este teorema en acto no se menciona, por lo que se ve en el video parece que Sonia determina la ubicación aproximada del punto imagen de manera que su posición respecto a la Figura 2 sea similar a la de *X* con respecto a la Figura 1. Con este argumento se evidencia que ya está comenzando a tomar forma la idea de equidistancia de un punto y su imagen al eje, aunque hasta el momento no lo han encontrado.

Cuando la profesora sugiere buscar relaciones entre los puntos de manera que puedan encontrar la imagen de un punto cualquiera sin copiar ángulos, a Julia le surge otra duda similar a la anterior [223-225] y es que si se ubica un punto *X* que no pertenece a las figuras, habría dos puntos con la misma imagen porque el punto *X* y un punto en la Figura 2 tendrían como imagen el mismo punto de la Figura 1. Su argumento (cuarto) fue el siguiente:

250.	Julia:	Me confundió la profe [silencio]. Encontrar la relación… [silencio]. Es que digamos, si tenemos este punto acá [señala el punto *X*], ¿no habría dos puntos con la misma imagen? O sea, este tendría imagen acá [traza una recta por *X* que corta a los segmentos *DR* y *KL* y señala el punto de intersección con el segmento *KL*] y este punto de acá [señala el punto de intersección de la recta con el segmento *DR*] tendría la misma imagen [señala la intersección de la recta con el segmento *KL*].

(Ded, NRAD, I) Datos: Figura 1, Figura 2, punto *X*, recta por *X* que interseca a $\overline{DR}$ y $\overline{KL}$. Garantía (implícita): Teorema en acto (la imagen de un punto que no está en la Figura 1 ni en la Figura 2 pertenece a alguna de las figuras y se obtiene trazando una recta por ese punto que se interseque con las dos figuras). Conclusión: El punto *X* y el punto de intersección de la recta y $\overline{DR}$ tienen la misma imagen, que es el punto de intersección de la recta y $\overline{KL}$.

En la intervención anterior [250], aunque Julia traza la recta de manera informal, no es una recta cualquiera, sino que parece perpendicular al eje de simetría que encontrarán más adelante. Esto podría sugerir que, aunque no han encontrado el eje, ya han detectado relaciones importantes entre una figura y su imagen.

Para poder encontrar una manera de determinar la imagen de *X* que no sea utilizando copia de ángulos, recurren al punto *P* que es el centro de la circunferencia a la que pertenecen los puntos *J*, *K*, *D* y *F*. Surge un argumento inductivo cuando Felipe sospecha que siempre se cumple que cualquier punto y su imagen equidistan de *P*.

266.	Felipe:	Bueno, hagámosle. Tenemos que componer mucho eso [silencio]. Mira que pues, o sea, no sé, no sé si de pronto se pueda así. Pero miren: nosotros hallamos que estos dos puntos [*J* y *F*] y estos dos puntos [*K* y *D*], o sea, estos puntos [señala los cuatro puntos] equidistan a una circunferencia, ¿cierto? Acá [señala el centro de la circunferencia mencionada, llamado *P*] podría haber otra circunferencia con centro en *P*, pues o sea, tal vez, igual que esta [señala la circunferencia que contiene los puntos *J*, *K*, *D* y *F*], no está, pero que digamos que *R* y *L* pertenezcan a esa circunferencia, ¿sí? Y entonces estos dos puntos [*R* y *L*] equidistarían a este [señala a *P*]. Lo mismo para estos dos puntos [*M* y *C*]. Estos dos puntos equidistarían a este [señala a *P*] y lo mismo para este y este [*N* y *B*] y para este y este [*Z* y *W*]. O sea siempre…
(Ind, AAD, E) Datos: *J* y *F* equidistan de *P*; *D* y *K* equidistan de *P*; *F* imagen de *J* y *D* imagen de *K*; un punto cualquiera y su imagen. Garantía: Podría ser que dados un punto y su imagen, existe una circunferencia con centro en *P* que los contiene. Conclusión: El punto y su imagen equidistan de *P*.		

Este argumento es inductivo porque a partir de dos casos particulares para los que se puede concluir que un punto y su imagen equidistan de *P*, Felipe sospecha que hay una regla (garantía) que se cumple para cualquier punto y su imagen: existe una circunferencia con centro en *P* que los contiene. Aunque el argumento se refiere a un punto particular *P* que existe solo bajo ciertas condiciones (cuando la figura y su imagen tienen arcos de circunferencia cuyo centro está sobre el eje de simetría), puede considerarse un argumento acerca de la definición (de simetría axial) ya que un punto y su imagen tienen la propiedad de ser equidistantes a cualquier punto que pertenezca al eje. Este argumento se confirma cuando le reportan a la profesora lo que están haciendo [286].

Más adelante se dan cuenta de que *P* es el punto medio del segmento cuyos extremos son un punto en la Figura 1 y su imagen en la Figura 2 [293-299]. Con la ayuda de la profesora ven que el punto medio de un segmento cuyos extremos son un punto y su imagen puede ser importante [304-305] y construyen la mediatriz de $\overline{DK}$ [309]. Aquí surge otro argumento:

<table>
<tr><td>310.</td><td>Sonia:</td><td>[Ubica el punto medio del segmento DK] La medida de acá a acá es la misma [señala el punto medio y K y luego el punto medio y D].</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, ADD, I)
Datos: Punto medio de $\overline{DK}$.
Garantía (implícita): Definición de punto medio.
Conclusión: La distancia de K al punto medio del segmento es la misma distancia de D al punto medio del segmento.</td></tr>
</table>

Tabla 11. Argumentos generados por la Tarea 3.b

TA	NA	PrA	TT	CA	LÍNEAS	RAD	DI
Deductivos	5	APD	PA-C	I	223-225	NRAD	-
		APD	PA-C	I	223-225	ADD	Transformación
		APD	PA-C	I	228	AAD	Simetría axial
		APD	PA-C	I	250	NRAD	-
		APD	PA-C	I	310	ADD	Punto medio
Inductivos	1	APD	PA-C	E	266	AAD	Simetría axial
Abductivos	0	-	-	-	-	-	-
Total	6						

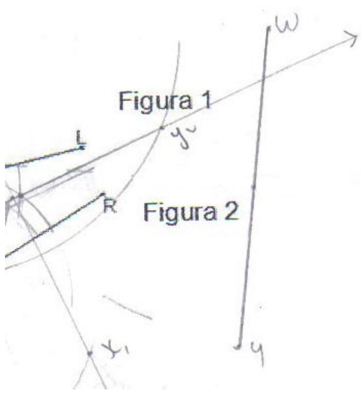
TA: Tipo de argumentos NA: Número de argumentos PrA: Proceso argumentativo TT: Tipo de tarea
CA: Clase de argumentos RAD: Relación argumento-definición DI: Definición involucrada

4.5 TAREA 3.c

Durante el proceso de solución de esta tarea la profesora interactúa con los tres estudiantes y orienta un proceso de argumentar para definir [377-412] y de construcción de las condiciones para la definición [380-387]. El uso de las palabras *tendría* y *debería* [380, 382], muestra que los estudiantes tienen clara la necesidad de las dos condiciones que están mencionando y que harán parte de la definición (distancia al eje y perpendicularidad).

Esta tarea generó un argumento deductivo con el que los estudiantes justifican por qué, para los dos puntos *Y* y *W* que ubicaron al azar (Figura 17), *Y* no es imagen de *W*:

Figura 17. Puntos *Y* y *W* ubicados por los estudiantes



380.	Julia:	Pues tendría que tener la misma distancia de acá a acá [de la recta a *W*] y de acá a acá [de la recta a *Y*].
381.	Profesora:	Sí. ¿Qué más?
382.	Felipe:	*W* debería pertenecer a una recta que es perpendicular a esta [señala la mediatriz de los segmentos].
383.	Profesora:	¿Solo *W*?
384.	Felipe:	*W* y *Y* deberían pertenecer a la recta.
385.	Julia:	*W* y *Y*.
386.	Profesora:	O sea, la recta *WY* debería ser…
387.	Julia:	Perpendicular…
388.	Profesora:	Perpendicular. ¿*Y* es imagen de *W*?
389.	Felipe:	No.

(Ded, AAD, E) Datos: La distancia de *Y* a la recta es diferente de la distancia de *W* a la recta y $\overleftrightarrow{YW}$ no es perpendicular a la recta. Garantía: Si *Y* es imagen de *W* entonces $\overleftrightarrow{YW}$ es perpendicular a la recta y la distancia de *Y* a la recta es igual a la distancia de *W* a la recta. Conclusión: *Y* no es imagen de *W*.

Es un argumento deductivo utilizando la contrarrecíproca de la garantía y es acerca de la definición porque se refiere a dos propiedades que harán parte de la definición de simetría axial. Más adelante llaman *l* a la recta que define la transformación *t* y repiten el argumento anterior cuando leen nuevamente la pregunta para escribir la respuesta [419].

Tabla 12. Argumentos generados por la Tarea 3.c

TA	NA	PrA	TT	CA	LÍNEAS	RAD	DI
Deductivos	1	APD	PA-A	E	380-389	AAD	Simetría axial
Inductivos	0	-	-	-	-	-	-
Abductivos	0	-	-	-	-	-	-
Total	1						

TA: Tipo de argumentos NA: Número de argumentos PrA: Proceso argumentativo TT: Tipo de tarea
CA: Clase de argumentos RAD: Relación argumento-definición DI: Definición involucrada

4.6 TAREA 3.d

Para hallar una transformación bajo la cual *Y* sea imagen de *W* piensan en que $\overleftrightarrow{YW}$ debe ser perpendicular a *l* (el eje de simetría de la transformación *t*) y que la distancia de *Y* y de *W* a la recta *l* debe ser la misma, pero no saben qué hacer porque esas condiciones no se cumplen para los puntos que ubicaron [404-405]. Cuando la profesora les aclara que se trata de buscar una transformación similar *s*, que no tiene que ser la misma transformación *t*, ven que necesitan encontrar otra recta que pase por el punto medio de $\overline{YW}$ y que sea perpendicular a ese segmento [409-411]. Construyen la mediatriz del segmento y de esa manera *Y* es imagen de *W* bajo la transformación definida por la recta construida [413-416].

Esta tarea generó un argumento deductivo cuando la profesora dice que ya deben estar escribiendo la definición de la transformación *t* (Tarea 3.e):

421.	Julia:	Y ahora es que hay que poner las características que tenía la transformación *t*. Equidistan de esta [señala la recta *l*] y son perpendiculares, ¿sí?
422.	Sonia:	¿Y en [la tarea] **d**?
423.	Julia:	Pues sí, trazamos *WY*, hallamos punto medio y una recta que sea perpendicular a él [señala la recta *n* que es la mediatriz de $\overline{WY}$], entonces van a ser, van a cumplir la condición de ser equidistantes [señala los puntos *W* y *Y*, luego la recta *n*].
(Ded, AAD, I). Datos: Puntos *Y* y *W*. Garantía (implícita): Si *n* es perpendicular al $\overline{YW}$ y contiene su punto medio, entonces *Y* es imagen de *W* bajo una transformación similar a *t*. Conclusión: Existe una transformación *s* para que *Y* sea imagen de *W*.		

Se considera que la garantía es implícita porque cuando Julia concluye menciona solo “la condición de ser equidistantes” y no la de perpendicularidad, aunque en su explicación anterior [421] sí la menciona. Es un argumento acerca de la definición (de simetría axial) porque describe la manera de hallar el eje de simetría dados un punto y su imagen. Este argumento se repitió más adelante en la socialización, cuando Julia explica cómo construir la recta que define la transformación *s* para el caso que tienen en el tablero [514].

Tabla 13. Argumentos generados por la Tarea 3.d

TA	NA	PrA	TT	CA	LÍNEAS	RAD	DI
Deductivos	1	APD	PA-A	I	421-423	AAD	Simetría axial
Inductivos	0	-	-	-	-	-	-
Abductivos	0	-	-	-	-	-	-
Total	1						

TA: Tipo de argumentos NA: Número de argumentos PrA: Proceso argumentativo TT: Tipo de tarea
CA: Clase de argumentos RAD: Relación argumento-definición DI: Definición involucrada

4.7 TAREA 3.e

Julia comprende qué es definir: encontrar propiedades [421, 427]. Para definir la transformación *t* deciden escribir las propiedades que han encontrado.

Esta tarea generó un argumento deductivo cuando verifican si en la hoja de respuestas escribieron todas las condiciones necesarias para definir la transformación *t*:

446.	Felipe:	¿Pusiste lo de equidistancia?
447.	Sonia:	Sí, es que con punto medio ya hay equidistancia.

(Ded, ADD, I)
Datos: Punto medio de un segmento.
Garantía (implícita): Definición de punto medio.
Conclusión: El punto medio es equidistante de los extremos del segmento.

Tabla 14. Argumentos generados por la Tarea 3.e

TA	NA	PrA	TT	CA	LÍNEAS	RAD	DI
Deductivos	1	APD	PA	I	446-447	ADD	Punto medio
Inductivos	0	-	-	-	-	-	-
Abductivos	0	-	-	-	-	-	-
Total	1						

TA: Tipo de argumentos NA: Número de argumentos PrA: Proceso argumentativo TT: Tipo de tarea
CA: Clase de argumentos RAD: Relación argumento-definición DI: Definición involucrada

Nota: Al terminar la Parte 1 del Taller la profesora hace la socialización y a partir de las respuestas dadas por los estudiantes, establece las respuestas para las Tareas 1 a 3.d [449-514]. Luego, lee las definiciones de la transformación *t* escritas por los estudiantes [515, 517] y se refiere a que todos tienen la idea de la recta perpendicular y del punto medio. Le da a esta transformación el nombre de simetría axial y resalta que lo importante para tener este tipo de simetría es que haya una recta que va a ser la mediatriz de todos los segmentos determinados por un punto y su imagen. Luego, da la definición de simetría axial propuesta en la guía para la profesora (Anexo D) y termina la clase [517]. En la siguiente clase se resuelven las Partes 2 y 3 del Taller (Tareas 4 a 10).

4.8 TAREA 4

Con esta tarea se da inicio a un proceso de definir para argumentar a partir de la definición de simetría axial y más adelante, de manera simultánea, se desarrolla un proceso de argumentar para definir figura con simetría axial. Cuando los estudiantes leen la tarea lo primero que hacen es buscar la definición de simetría axial que tienen en sus cuadernos; saben que deben acudir a la definición para poder responder la pregunta. Como respuesta dicen que *M'* puede ser imagen de *M* bajo una transformación simetría axial respecto a otra recta *p* si esta recta cumple las condiciones dadas en la definición de simetría axial. No se dan cuenta de que en este caso *r* y *p* son la misma recta. Más adelante, durante la socialización, la profesora les pregunta si es posible cambiar la recta y ellos dicen que sí [841-844].

Esta tarea generó un argumento abductivo cuando estaban determinando las condiciones que deberían cumplirse para que *M'* fuera la imagen de *M* bajo una simetría axial respecto a una recta *r* y a otra recta *p*:

<table>
<tr><td>522.</td><td>Felipe:</td><td>Yo digo que sí si la recta p tiene ciertas características, las que habíamos anotado respecto a la simetría axial, ¿no? [Silencio]. O sea que r sea perpendicular al segmento M'M.</td></tr>
<tr><td>523.</td><td>Julia:</td><td>p.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>[…]</td></tr>
<tr><td>537.</td><td>Sonia:</td><td>[Escribiendo] Si X es el punto de intersección…</td></tr>
<tr><td>538.</td><td>Felipe:</td><td>Entre p y el segmento MM' […]</td></tr>
<tr><td>539.</td><td>Sonia:</td><td>[…] entonces MX…</td></tr>
<tr><td>540.</td><td>Julia:</td><td>Es igual a MX'</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Abd, ADD, E)
Datos: Debe suceder que la recta p sea perpendicular al $\overline{MM'}$ y que si X es el punto de intersección del $\overline{MM'}$ y p, entonces MX=MX'.
Garantía: Definición de simetría axial.
Conclusión: M' es imagen de M bajo simetría con respecto a la recta p.</td></tr>
</table>

Este es un argumento abductivo porque los estudiantes encuentran lo que debe suceder (datos) para que, a partir de la definición de simetría axial, se pueda concluir que *M'* es imagen de *M* bajo una simetría con respecto a la recta *p.*

Tabla 15. Argumentos generados por la Tarea 4

TA	NA	PrA	TT	CA	LÍNEAS	RAD	DI
Deductivos	0	-	-	-	-	-	-
Inductivos	0	-	-	-	-	-	-
Abductivos	1	DPA	PA-A	E	522-540	ADD	Simetría axial
Total	1						

TA: Tipo de argumentos NA: Número de argumentos PrA: Proceso argumentativo TT: Tipo de tarea
CA: Clase de argumentos RAD: Relación argumento-definición DI: Definición involucrada

4.9 TAREA 5

Para responder esta tarea, los estudiantes utilizan la figura de la Tarea 6 para mostrar allí un punto que es imagen de sí mismo y dicen que esto ocurre cuando el punto pertenece al eje de simetría [545].

Esta tarea generó tres argumentos: uno abductivo y dos deductivos. El primero surge cuando Felipe lee la tarea y da una respuesta:

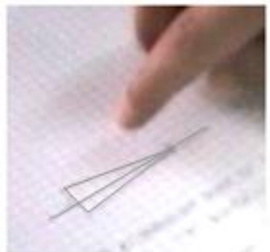
<table>
<tr><td>545.</td><td>Felipe:</td><td>[Leyendo la Tarea 5] ¿Es posible que en una simetría axial algún punto sea imagen de sí mismo? Justifique la respuesta [silencio]. Yo digo que sí, por ejemplo en este, acá [señala el punto G en la Tarea 6].

¿No? Digamos acá, o sea, es un punto G que pertenece a la recta GD [señala la recta] y pues este punto G sería la misma imagen del punto G. Pues, lo pienso así, ¿sí?</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Abd, NRAD, E).
Datos: Debe cumplirse que el punto esté en el eje de simetría.
Garantía: Un punto G con $\overleftrightarrow{GD}$ como eje de simetría es imagen de sí mismo.
Conclusión: El punto es imagen de sí mismo.</td></tr>
</table>

Este es un argumento abductivo porque Felipe encuentra lo que debe ocurrir (datos) para poder concluir que un punto es imagen de sí mismo, usando como garantía lo que sucede con el punto *G*. Aunque el argumento se relaciona con una de las propiedades de la simetría axial (todo punto que pertenezca al eje de simetría es imagen de sí mismo), la garantía no es la definición, por lo tanto no se considera un argumento desde la definición. Después Julia expresa de otra manera la condición encontrada por Felipe [554].

Más adelante, cuando están escribiendo la respuesta, se equivocan al construir la figura que usarán como ejemplo ya que la recta dibujada no es eje de simetría (Figura 18).

Figura 18. Error al construir el ejemplo en la Tarea 5



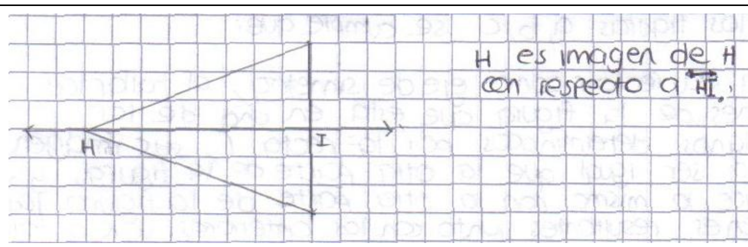
Aquí surge un argumento donde parece que la garantía es la imagen conceptual, ya que es bastante probable que Felipe no esté pensando en que una de las condiciones dadas en la definición no se cumple, sino que la representación no coincide con su imagen conceptual:

<table>
<tr><td>559.</td><td>Felipe:</td><td>Pero entonces esto estaría mal porque digamos, estas dos, esta… debe estar más arriba, mejor dicho.</td></tr>
<tr><td>560.</td><td>Julia:</td><td>Ah, sí, sí, deben ser simétricas [borra y arregla la figura]. […]</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, NRAD, I)
Datos: Representación en la cual no hay equidistancia al eje.
Garantía (implícita): imagen conceptual de simetría axial (equidistancia al eje).
Conclusión: la representación es incorrecta.
Respaldo: [las figuras] deben ser simétricas.</td></tr>
</table>

La afirmación de Julia es un respaldo al argumento de Felipe al tratarse de un enunciado sobre los hechos que da fuerza a la garantía. Además, en su afirmación muestra que está comenzando a utilizar vocabulario propio del concepto que se está estudiando.

En la respuesta, que viene acompañada de un ejemplo, hay un argumento deductivo, donde la garantía es el teorema en acto que enunciaron en la línea 545, aunque no lo usan aquí de manera explícita:

Figura 19. Ejemplo dado en la respuesta de la Tarea 5



565.	Julia:	*H* es imagen de *H* con respecto a la recta *HI*.

(Ded, NRAD, I)

Datos: *H* pertenece a la $\overleftrightarrow{HI}$ que es el eje de simetría (dado en la representación).

Garantía (implícito): Teorema en acto (si un punto pertenece al eje de simetría, entonces es imagen de sí mismo).

Conclusión: El punto *H* es imagen de sí mismo bajo la simetría axial respecto a la $\overleftrightarrow{HI}$.

La garantía se relaciona con una propiedad de la simetría axial; sin embargo no es su definición, por eso el argumento se clasifica como NRAD.

Tabla 16. Argumentos generados por la Tarea 5

TA	NA	PrA	TT	CA	LÍNEAS	RAD	DI
Deductivos	2	DPA	PA-A	I	559-560	NRAD	-
		DPA	PA-A	I	565	NRAD	-
Inductivos	0	-	-	-	-	-	-
Abductivos	1	DPA	PA-A	E	545	NRAD	-
Total	3						

TA: Tipo de argumentos NA: Número de argumentos PrA: Proceso argumentativo TT: Tipo de tarea
CA: Clase de argumentos RAD: Relación argumento-definición DI: Definición involucrada

4.10 TAREA 6

La profesora da la instrucción de escribir únicamente los pasos generales para hacer la demostración porque no hay tiempo suficiente para hacerla completa. Los estudiantes buscan en sus cuadernos las definiciones de cometa y de mediatriz de un segmento; sin embargo, la definición de cometa que tienen no es correcta porque se refiere a dos lados adyacentes congruentes y no a dos pares de lados adyacentes congruentes [567, 570].

Esta tarea generó nueve argumentos, todos ellos deductivos. Los dos primeros surgen cuando Sonia y Felipe llegan a sus primeras conclusiones. Aunque Sonia no lo dice, antes de exponer su argumento ha concluido que si *J’* es la imagen de *J* bajo la simetría axial respecto a $\overleftrightarrow{GD}$, entonces $\overline{J'D}$ es imagen de $\overline{JD}$ y $\overline{J'G}$ es imagen de $\overline{JG}$:

<table>
<tr><td>574.</td><td>Sonia:</td><td>Pues estos dos son congruentes [señala los segmentos JD y J’D] y obviamente los opuestos no van a ser congruentes. Si es simétrico pues obviamente este es igual a este [JD y J’D] y este es igual a este [JG y J’G] o sea, van a ser congruentes como lo habíamos sacado en la otra.</td></tr>
<tr><td>575.</td><td>Felipe:</td><td>J’ es la imagen de J, o sea que H es punto medio del segmento JJ’.</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, NRAD, I) [574]
Datos: $\overline{J'D}$ es imagen de $\overline{JD}$ y $\overline{J'G}$ es imagen de $\overline{JG}$ bajo la simetría axial respecto a $\overleftrightarrow{GD}$.
Garantía (implícita): Teorema en acto (en simetría axial segmentos correspondientes son congruentes).
Conclusión: $\overline{J'D} \cong \overline{JD}$ y $\overline{J'G} \cong \overline{JG}$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, ADD, I) [575]
Datos: J’ es la imagen de J.
Garantía (implícita): Definición de simetría axial.
Conclusión: H es punto medio de $\overline{JJ'}$.</td></tr>
</table>

Sonia repite sus argumentos más adelante [578]. Para justificar que el eje de simetría es la mediatriz de $\overline{JJ'}$, Julia y Felipe construyen un argumento deductivo con la ayuda de la profesora, quien les pregunta qué han concluido:

<table>
<tr><td>587.</td><td>Felipe:</td><td>Eh… que H es punto medio del segmento JJ’.</td></tr>
<tr><td>588.</td><td>Profesora:</td><td>Bueno, ¿y qué más?</td></tr>
<tr><td>589.</td><td>Felipe:</td><td>Que… [silencio]</td></tr>
<tr><td>590.</td><td>Profesora:</td><td>Si H es punto medio de GD [parece que se equivoca y se está refiriendo al segmento JJ’] y se supone que la primera condición era que fueran…</td></tr>
<tr><td>591.</td><td>Julia:</td><td>Perpendiculares.</td></tr>
<tr><td>592.</td><td>Profesora:</td><td>Perpendiculares, ¿cómo se llama…? ¿La recta JD [se está refiriendo a la recta GD] qué es respecto del segmento JJ’?</td></tr>
<tr><td>593.</td><td>Julia:</td><td>¿La recta GD? ¿Sí? [señala la recta GD]</td></tr>
<tr><td>594.</td><td>Felipe:</td><td>¿La recta GD?</td></tr>
<tr><td>595.</td><td>Julia:</td><td>Respecto a este [segmento JJ’] es la mediatriz, ¿no?</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, ADD, I)
Datos: H es punto medio de $\overline{JJ'}$, el eje de simetría y $\overline{JJ'}$ son perpendiculares.
Garantía (implícita): Definición de mediatriz
Conclusión: $\overleftrightarrow{GD}$ es mediatriz de $\overline{JJ'}$.</td></tr>
</table>

La profesora le pregunta a Julia qué garantiza que *H* sea punto medio de $\overline{JJ'}$ y que el eje de simetría y $\overline{JJ'}$ sean perpendiculares. Se esperaba que Julia contestara que lo justifica la definición de simetría axial; sin embargo, dijo que por definición de mediatriz [600-603].

Para probar que $\overline{JD}$ y $\overline{J'D}$ son congruentes, primero prueban que $\angle JHD \cong \angle J'HD$. Cuando Julia le explica a la profesora qué tienen que decir para hacer la demostración, surge el cuarto argumento deductivo:

633.	Julia:	Que este ángulo y este son congruentes [hace las marcas de ángulo recto en los ángulos *JHD* y *J'HD*] porque… perpendicular [señala la recta *GD*].
(Ded, ADD, E) Datos: $\overleftrightarrow{DH} \perp \overline{JJ'}$ Garantía: Definición de rectas perpendiculares. Conclusión: $\angle JHD \cong \angle J'HD$.		

Aunque Julia garantiza su argumento con la definición de rectas perpendiculares, falta un paso para justificar la conclusión porque esta definición les garantiza que los dos ángulos son rectos; después hay que garantizar que son congruentes. Luego prueban que $\overline{JH} \cong \overline{J'H}$ por definición de punto medio de un segmento:

635.	Julia:	Y este lado [segmento *JH*] y este [segmento *J'H*] también son congruentes.
636.	Profesora:	¿Por qué?
637.	Julia:	Pues porque como *H* es punto medio, pues son congruentes.
(Ded, ADD, E) Datos: *H* es el punto medio de $\overline{JJ'}$. Garantía: Definición de punto medio. Conclusión: $\overline{JH} \cong \overline{J'H}$.		

Este argumento se repite cuando están escribiendo la respuesta [664-666]. Después dicen que $\overline{DH}$ es congruente con él mismo [639-641].

El paso que omitieron en el argumento de la línea 633 lo hacen cuando están redactando la respuesta:

659.	Sonia:	Entonces tenemos que el ángulo *H*[*] es recto pues entonces ángulo *H* es congruente con ángulo *H* [por la explicación que le hicieron antes a la profesora, se refieren a que el ángulo *JHD* es congruente con el ángulo *J'HD*].
(Ded, NRAD, I) Datos: $\angle JHD$ es recto y $\angle J'HD$ es recto. Garantía (implícita): Dos ángulos rectos son congruentes. Conclusión: $\angle JHD \cong \angle J'HD$		

Cuando están redactando la respuesta, dicen que *H* es el punto medio de $\overline{JJ'}$ y lo justifican con la definición de mediatriz; sin embargo, para concluir que el eje de simetría es la mediatriz del segmento $\overline{JJ'}$, utilizaron esa conclusión (*H* es el punto medio de $\overline{JJ'}$) que obtuvieron a partir de la definición de simetría axial. Se esperaba que en el siguiente argumento dieran como garantía la definición de simetría axial –como lo hizo Felipe en la línea 575, donde llega a la conclusión sabiendo que *J'* es la imagen de *J*– y no la de mediatriz:

662.	Julia:	Pues ponle que *H* es punto medio de… Por definición de mediatriz… Así: por definición de mediatriz, *H* es punto medio del segmento [señala el segmento *JJ'*].
(Ded, ADD, E) Datos: $\overleftrightarrow{GD}$ es la mediatriz de $\overline{JJ'}$, $H \in \overleftrightarrow{GD} \cap \overline{JJ'}$ (esta parte corresponde a datos empíricos). Garantía: Definición de mediatriz. Conclusión: *H* es el punto medio de $\overline{JJ'}$.		

La segunda parte de los datos no la dicen pero la obtienen observando la figura. La conclusión de este argumento se convierte en los datos de otro [664-666], que es el mismo argumento que habían dado antes [635-637].

Finalmente concluyen que por el Criterio lado-ángulo-lado, $\overline{JD}$ y $\overline{J'D}$ son congruentes sin mencionar el paso intermedio que se debe hacer para llegar a esta conclusión. En los datos

[*] Durante la explicación los estudiantes llaman ángulo *H* a cada uno de los cuatro ángulos formados por $\overline{J'J}$ y $\overleftrightarrow{GD}$.

incluyen las conclusiones de las líneas 659 (aunque no se estaban refiriendo al mismo ángulo, en la hoja escribieron $\angle H \cong \angle H$) y 635-637. Primero mencionan los dos triángulos a los que se van a referir:

671.	Julia:	[Triángulos] *JHD* y *DHJ'* [Sonia escribe]. Entonces *HD* congruente con *HD*.
672.	Sonia:	Bueno, ahora sí [sigue escribiendo en la parte de abajo].
673.	Julia:	Entonces por criterio ángulo, ángulo…
674.	Sonia:	Lado, ángulo, lado.
675.	Julia:	Lado, ángulo, lado, perdón.
676.	Sonia:	*JD* congruente con *J'D*. Y pues también el otro.
(Ded, NRAD, E) Datos: $\angle H \cong \angle H$, $\overline{JH} \cong \overline{J'H}$, $\overline{HD} \cong \overline{HD}$. Garantía: Criterio de congruencia lado-ángulo-lado. Conclusión: $\overline{JD} \cong \overline{J'D}$.		

Antes de la conclusión del argumento anterior hay una conclusión que no mencionaron: los dos triángulos son congruentes. Esa conclusión se utilizaría como dato de un nuevo argumento y, por definición de triángulos congruentes, se concluiría que $\overline{JD} \cong \overline{J'D}$.

Para probar que $\overline{JG}$ y $\overline{J'G}$ son congruentes, usan pasos similares a los seguidos para probar que $\overline{JD} \cong \overline{J'D}$. Deciden que aunque la justificación es análoga a la anterior, es mejor escribir todo:

683.	Julia:	Igual toca escribir todo. Entonces ponle que ángulo *H* es congruente con ángulo *H*.
684.	Felipe:	Segmento *JH* congruente con *J'H*.
685.	Sonia:	*HG* congruente con *HG*.
686.	Julia:	Y pues, por criterio lado, ángulo, lado… lo mismo del otro.
687.	Sonia:	*GJ* congruente con *GJ'*
(Ded, NRAD, E) Datos: $\angle H \cong \angle H$ (no son los mismos ángulos del argumento anterior), $\overline{JH} \cong \overline{J'H}$, $\overline{HG} \cong \overline{HG}$. Garantía: Criterio de congruencia lado-ángulo-lado. Conclusión: $\overline{GJ} \cong \overline{GJ'}$		

Para llegar a esta conclusión faltó el mismo paso intermedio del argumento anterior. Aquí terminan la demostración. No prueban la no congruencia de los lados opuestos ni escriben una conclusión general con respecto al cuadrilátero.

Tabla 17. Argumentos generados por la Tarea 6

TA	NA	PrA	TT	CA	LÍNEAS	RAD	DI
Deductivos	9	DPA	PA-A	I	574	NRAD	-
		DPA	PA-A	I	575	ADD	Simetría axial
		DPA	PA-A	I	587-595	ADD	Mediatriz
		DPA	PA-A	E	633	ADD	Rectas perpendiculares
		DPA	PA-A	E	635-637	ADD	Punto medio
		DPA	PA-A	I	659	NRAD	-
		DPA	PA-A	E	662	ADD	Mediatriz
		DPA	PA-A	E	671-676	NRAD	-
		DPA	PA-A	E	683-687	NRAD	-
Inductivos	0	-	-	-	-	-	-
Abductivos	0	-	-	-	-	-	-
Total	9						

TA: Tipo de argumentos NA: Número de argumentos PrA: Proceso argumentativo TT: Tipo de tarea
CA: Clase de argumentos RAD: Relación argumento-definición DI: Definición involucrada

4.11 TAREA 7

En esta tarea dos definiciones jugaron un papel importante: la definición de ser la misma figura y la definición de figura. En sus argumentos, los estudiantes recurrieron a definiciones en acto y a teoremas en acto. Parece que no fue conveniente dar la Tarea 7 y las figuras de la Tarea 8 en la misma hoja. Sin estas figuras los estudiantes habrían tenido que buscar sus propios ejemplos, como inicialmente lo hicieron Sonia y Julia cuando pensaron en un rectángulo o en un cuadrado [697-698]. Queda la pregunta: ¿qué habría ocurrido si en el grupo hubieran creado sus propios ejemplos? ¿El análisis hecho por los estudiantes habría tomado un rumbo diferente?

Esta tarea generó siete argumentos deductivos. Como los estudiantes tienen dificultad con la interpretación de lo que significa que una figura sea ella misma, la profesora les sugiere que observen las figuras con simetría axial de la Tarea 8. Al hacerlo, surge el primer argumento cuando Sonia concluye por qué la Figura **a** tiene simetría axial:

705.	Sonia:	Estas tienen simetría axial [señala las figuras de la primera columna en la Tarea 8]. Hay que ponerle la recta de tal manera que quede la misma figura [Julia ubica la regla en lo que sería uno de los ejes de simetría de la Figura **a**]. Pero queda al revés, ¿sí? Es la misma pero queda al revés. Es decir, la posición cambia pero la figura sí es la misma.
(Ded, AAD, I) Datos: Recta que divide la Figura **a** por la mitad, dos mitades de la Figura **a** en posición distinta. Garantía (implícita): Definición (en acto) de figura con simetría axial (si existe una recta tal que la mitad de la figura es igual pero tiene diferente posición a la otra mitad –queda al revés–, entonces la figura tiene simetría axial). Conclusión: La Figura **a** tiene simetría axial.		

Este argumento no se clasifica como ADD porque la garantía es una definición en acto. Como se relaciona con una propiedad de las figuras con simetría axial, se considera argumento acerca de la definición. Aquí puede identificarse la definición en acto que está usando Sonia de lo que es ser la misma figura: dos figuras son la misma si son congruentes. Más adelante expresa esta definición en acto diciendo explícitamente que las figuras son congruentes y aclara que lados y ángulos son congruentes [719].

Después Sonia repite el argumento anterior de otra manera; en lugar de decir que la figura es la misma pero queda al revés, dice que las dos figuras son congruentes [707]. Felipe no está de acuerdo porque dice que puede que se trate de una figura congruente con la inicial, pero no es la misma. Aquí está usando una definición en acto que no coincide con la de Sonia. Parece que para él dos figuras son la misma si están formadas por los mismos puntos. Felipe explica por qué no está de acuerdo con Sonia a través de dos argumentos deductivos. En el segundo responde la pregunta del problema diciendo que no:

715.	Felipe:	Porque por ejemplo, esta imagen [señala la parte de la Figura **b** que está a un lado del eje de simetría] no sería la misma que esta [señala el otro lado de la figura]. Tal vez serían semejantes o congruentes pero no serían la misma [silencio]. Entonces no. Pues, creo yo.
(Ded, NRAD, I) Datos: Recta que divide la Figura **b** por la mitad, dos mitades de la Figura **b**. Garantía (implícita): Definición (en acto) de figuras que son la misma (dos figuras son la misma si están formadas por los mismos puntos). Conclusión: El pedazo de la izquierda no es el pedazo de la derecha, aunque son congruentes.		

(Ded, NRAD, I)
Datos: En la Figura **b**, el pedazo de la izquierda no es el pedazo de la derecha.
Garantía (implícita): Si existe un contraejemplo, entonces no se cumple para ninguna figura.
Conclusión: No existe una figura geométrica y una recta tal que la imagen bajo la simetría axial con respecto a la recta sea ella misma.

El primer argumento no se clasifica como ADD porque Felipe utiliza como garantía una definición en acto.

Cuando Julia dice que no sabe si lo que afirma Felipe está bien, Sonia dice que ella tampoco lo sabe y vuelve a exponer su idea con un argumento:

717.	Sonia:	Yo tampoco. Ya me confundí. Tenía una idea pero no, ya no [silencio]. Yo decía que sí pero porque yo decía que esta es la misma pero al otro lado [señala un lado de la Figura **b**, mueve la mano para indicar que se refleja y señala el otro lado de la figura]. [Silencio]. No, pues sí es la imagen, pero… [silencio].
(Ded, NRAD, I) Datos: Recta que divide la Figura **b** por la mitad, dos mitades de la Figura **b**. Garantía (implícita): Definición (en acto) de figuras que son la misma (dos figuras son la misma si son congruentes). Conclusión: Sí existe una figura geométrica y una recta tal que la imagen bajo la simetría axial con respecto a la recta sea ella misma.		

La diferencia entre el argumento de Felipe [715] y el de Sonia [717] radica en la definición de figuras que son la misma. En estos argumentos hay una definición que juega un papel importante y como sus definiciones (garantías) son diferentes, sus conclusiones también lo son.

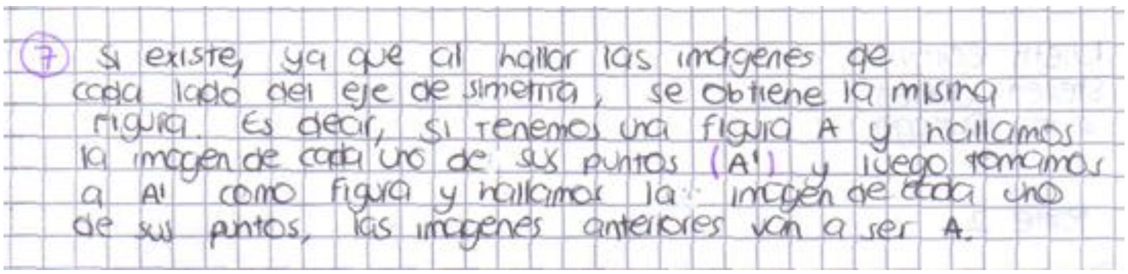
Luego, Felipe defiende nuevamente su idea [723]. Aunque no lo expresa explícitamente, parece estar asumiendo que la única manera para que una figura sea imagen de sí misma es que cada punto sea imagen de sí mismo, caso en el cual la figura debería ser subconjunto del eje de simetría. Pero como Felipe parece asumir que en una figura geométrica no todos sus puntos son colineales, concluye que no existe una figura que sea imagen de sí misma. Aunque Felipe llega a una conclusión (*una figura como tal no existiría*), no se reportan aquí argumentos porque no hay evidencia suficiente sobre los datos y las garantías que estaría usando. Después da ejemplos de objetos geométricos que son imagen de sí mismos (segmentos y rayos contenidos en el eje de simetría) pero según su definición de figura, no son ejemplos de figuras que son imagen de sí mismas:

<table>
<tr><td>723.</td><td>Felipe:</td><td>¿Pues es que te acuerdas lo que te había dicho? O sea, digamos, para que este punto sea imagen de él mismo tiene que pertenecer a la recta [señala el punto G en la figura de la Tarea 6] y pues para… o sea, una figura como tal no existiría. Digamos, ¿no? Existiría un segmento que es imagen de él mismo o, no sé, un rayo que es imagen de él mismo, pero es que como tal una figura… no, no creo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, NRAD, I)
Datos: Punto en eje de simetría.
Garantía (implícita): Si un punto está en el eje de simetría, entonces es imagen de sí mismo.
Conclusión: El punto es imagen de sí mismo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, NRAD, I)
Datos: Segmentos y rayos (contenidos en el eje de simetría).
Garantía (implícita): Teorema en acto (si un objeto geométrico está contenido en el eje de simetría, entonces es imagen de sí mismo).
Conclusión: Segmentos y rayos contenidos en el eje de simetría son imagen de sí mismos.</td></tr>
</table>

En el segundo argumento, Felipe no dice explícitamente que los segmentos y los rayos estén contenidos en el eje de simetría, pero por lo que dice antes (*para que este punto* [*G*] *sea imagen de él mismo tiene que pertenecer a la recta*), parece que estos son los segmentos y los rayos a los cuales se refiere. Parece que en el segundo argumento Felipe usa como garantía una generalización de la proposición que usó como garantía en el primero.

Cuando Sonia y Julia le explican su idea a Felipe, quien no está convencido de que sea posible obtener la misma figura al aplicar una simetría axial, le dicen que "al hallar las imágenes de cada lado del eje de simetría se obtiene la misma figura" [769]. Esta afirmación será utilizada en el próximo argumento (que aparece en la respuesta escrita) como una garantía en la forma de una definición en acto: una figura es imagen de sí misma bajo una simetría axial si al hallar las imágenes de cada lado del eje de simetría se obtiene la misma figura. El argumento es el siguiente:

Figura 20. Respuesta para la Tarea 7


7 Si existe, ya que al hallar las imágenes de cada lado del eje de simetría, se obtiene la misma figura. Es decir, si tenemos una figura A y hallamos la imagen de cada uno de sus puntos (A') y luego tomamos a A' como figura y hallamos la imagen de cada uno de sus puntos, las imagenes anteriores van a ser A.

(Ded, AAD, I)

Datos: La imagen de cada punto de *A* está en *A'* y la imagen de cada punto de *A'* está en *A*.

Garantía (implícita): Definición (en acto) de ser imagen de sí mismo.

Conclusión: La figura es imagen de sí misma con respecto a una recta.

En el argumento se menciona una propiedad de las figuras con simetría axial (la figura es imagen de sí misma con respecto a una recta). Por eso se clasifica como AAD.

Cuando terminaron de resolver la Tarea 7 se le pidió a Julia que explicara nuevamente cómo la resolvieron porque algunas partes no se pudieron grabar en video, sino solo en audio. Julia repite el argumento anterior [828].

Tabla 18. Argumentos generados por la Tarea 7

TA	NA	PrA	TT	CA	LÍNEAS	RAD	DI
Deductivos	7	APD y DPA	PA-A	I	705	AAD	Figura con simetría axial
		APD y DPA	PA-A	I	715	NRAD	-
		APD y DPA	PA-A	I	715	NRAD	-
		APD y DPA	PA-A	I	717	NRAD	-
		APD y DPA	PA-A	I	723	NRAD	-
		APD y DPA	PA-A	I	723	NRAD	-
		APD y DPA	PA-A	I	Respuesta	AAD	Figura con simetría axial
Inductivos	0	-	-	-	-	-	-
Abductivos	0	-	-	-	-	-	-
Total	7						

TA: Tipo de argumentos NA: Número de argumentos PrA: Proceso argumentativo TT: Tipo de tarea
CA: Clase de argumento RAD: Relación argumento-definición DI: Definición involucrada

4.12 TAREA 8.a

Para solucionar esta tarea los estudiantes no establecieron relación alguna con el resultado de la anterior, aunque al resolver la Tarea 7, Sonia dio un argumento para explicar por qué la Figura **b** de la pregunta 8 tiene simetría axial [707]. Cuando están decidiendo cómo escribir la respuesta parece que para Sonia la definición es que una figura tiene simetría axial si a cada vértice de la figura le corresponde otro vértice de la figura. Para Julia la definición es que a cada punto de la figura les corresponde un punto de la figura. En la respuesta no mencionan que la imagen de un punto *A* también es un punto de la figura, aunque antes han señalado con el lápiz el punto imagen en la figura [786, 811-814].

Cuando Sonia dice que solo tienen que considerar algunos puntos y señala las parejas de vértices correspondientes de la Figura **b** que no están sobre el eje de simetría [811], Julia refuta la afirmación de Sonia y surge el único argumento generado por esta tarea:

<table>
<tr><td>812.</td><td>Julia:</td><td>No porque igual a todos los puntos les corresponde… [señala puntos de la Figura b que no son vértices y sus correspondientes imágenes].</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, AAD, E)
Datos: Puntos de la Figura b, la Figura b tiene simetría axial, puntos de la Figura b que no son vértices y sus imágenes.
Garantía (visual): Si un punto que no es vértice tiene imagen en la figura, entonces todos los puntos tienen imagen en la figura (apareamiento).
Conclusión: Todos los puntos tienen imagen en la figura.</td></tr>
</table>

Se considera un argumento acerca de la definición porque se refiere a una de las propiedades de figura con simetría axial, cuya definición se está construyendo (todo punto de la figura tiene imagen en la figura). Aunque Julia no dice la garantía, se considera explícita porque señala puntos de la figura que no son vértices y sus correspondientes imágenes para llegar a la conclusión.

Tabla 19. Argumentos generados por la Tarea 8.a

TA	NA	PrA	TT	CA	LÍNEAS	RAD	DI
Deductivos	1	APD	PA	E	812	AAD	Figura con simetría axial
Inductivos	0	-	-	-	-	-	-
Abductivos	0	-	-	-	-	-	-
Total	1						

TA: Tipo de argumentos NA: Número de argumentos PrA: Proceso argumentativo TT: Tipo de tarea
CA: Clase de argumento RAD: Relación argumento-definición DI: Definición involucrada

Nota: Aunque no se había planeado una socialización al terminar la Tarea 3.a, la profesora recoge las hojas y propone el análisis de las respuestas. Como en la Tarea 5 algunos grupos dijeron que un punto no puede ser imagen de sí mismo porque si A y A' fueran el mismo punto, no sería posible trazar $\overleftrightarrow{AA'}$ (o $\overline{AA'}$), la profesora dice que la definición de simetría axial que se dio en la clase anterior sí se cumple pero solo para puntos que no pertenezcan a la recta y que si el punto pertenece a la recta, su imagen va a ser él mismo [856].

La profesora aprovecha la Tarea 8.a para analizar lo que significa que una figura sea ella misma (Tarea 7), lee las definiciones de figura con simetría axial que dieron los grupos, analiza con los estudiantes la definición escrita en un grupo (*una figura tiene simetría axial si y solo si bajo una transformación con respecto al eje de simetría cada punto tiene una única imagen tal que la figura formada es imagen de sí misma*) y, finalmente, concluye el análisis de esta parte diciendo que en una figura con simetría axial las imágenes –bajo la transformación simetría axial– forman la misma figura original, pero no da una definición formal [878-916].

Después de la socialización se reparte la hoja con la Parte 3 y otra hoja con algunos polígonos regulares que será utilizada en la Tarea 10, ya que no se dispone de geometría dinámica para resolverlo.

4.13 TAREA 8.b

Los estudiantes dicen que para explicar por qué una figura tiene simetría axial solo deben copiar lo mismo que escribieron de respuesta en la Tarea 7. Redactan una respuesta [933] y trazan los ejes de simetría en las figuras [942-950].

Esta tarea generó cuatro argumentos deductivos. El primero surge cuando en el grupo leen la parte de la Tarea 8.b. acerca de las Figuras **a**, **b** y **c**. En la socialización se concluyó que si *M'* es imagen de *M* bajo la simetría axial respecto a una recta *r* y respecto a una recta *p*, entonces las rectas *r* y *p* son la misma. Parece que Julia generaliza el teorema anterior y lo utiliza como garantía de un argumento deductivo para concluir que no es posible que una figura tenga simetría axial con respecto a más de una recta:

919.	Julia:	Aquí no, ¿cierto que no? [señala la pregunta que se refiere a si tiene simetría axial con respecto a más de una recta]. Mira, [leyendo] *explique por qué si tiene simetría axial*… pues, lo que dijimos ahoritica, y que si tiene simetría axial con respecto a más de una recta, pues no, es lo que estaban diciendo ahoritica, ¿no? Que la recta *p* tiene que ser la misma recta *r*, ¿sí? [silencio]
(Ded, NRAD, E) Datos: Figuras **a**, **b** y **c** que tienen simetría axial con respecto a una recta. Garantía: Si una figura es imagen de sí misma con respecto a una recta *r* y con respecto a una recta *p*, entonces las rectas *r* y *p* son la misma. Conclusión: Las Figuras **a**, **b** y **c** no tienen simetría con respecto a más de una recta.		

En este argumento Julia obtiene una conclusión falsa porque la garantía es falsa. Aquí está confundiendo que una figura tenga simetría axial con respecto a dos rectas con que un punto sea imagen de otro respecto a dos rectas diferentes. Cuando Felipe le explica a Julia que sí es posible que una figura tenga simetría axial con respecto a dos rectas, surgen otros dos argumentos:

924.	Felipe:	Porque digamos, tú tomarías acá este [indica con el movimiento del lápiz un eje de simetría en la Figura **a**] o si no al revés [indica de la misma manera el otro eje de simetría] y seguiría siendo la <u>misma</u> figura. Esta parte sería imagen de esta y esta de esta [señala las dos partes correspondientes primero con respecto a un eje de simetría y luego con respecto al otro] y sí se podría [silencio]. O acá en este [señala la Figura **c** y sus dos ejes de simetría]. Bueno, en el [dibujo] **b** no. En este sí y en este también [señala las Figuras **a** y **c**], pero en el [dibujo] **b** no. ¿Sí? ¿De acuerdo?
(Ded, ADD, E) Datos: Figura **a**; dos rectas para las cuales, al hallar la imagen de la figura respecto a esas rectas se obtiene la misma figura. Garantía: Definición (establecida a partir de la socialización) de figura con simetría axial.		

Conclusión: La Figura **a** tiene simetría con respecto a dos rectas. (Argumento similar para la Figura **c** aunque no lo dice explícitamente).
(Ded, ADD, I) Datos: Figura **b**; una única recta para la cual, al hallar la imagen de la figura respecto a esa recta se obtiene la misma figura. Garantía (implícita): Definición (establecida a partir de la socialización) de figura con simetría axial. Conclusión: la Figura **b** tiene simetría con respecto a una sola recta.

En estos argumentos Felipe está utilizando como garantía una definición de figura con simetría axial; sin embargo, no es la misma que escribieron en la Tarea 8.a (*Una figura tiene simetría axial si: Dada r como eje de simetría, a cada punto A de la figura le corresponde un punto A' que es su imagen*). Parece que la definición que está utilizando Felipe es la que surgió a partir de la conclusión de la profesora en la socialización (en una figura con simetría axial las imágenes forman la misma figura original). Por esta razón, aunque no se dio una definición formal, los dos argumentos anteriores se clasifican como ADD. En el segundo argumento la garantía se considera implícita porque Felipe no dice, para este caso, que al hallar la imagen de la figura con respecto a la recta se obtiene la misma figura, lo que sí menciona en el primer argumento.

El siguiente argumento se presenta cuando Julia explica por qué las Figuras **a**, **b** y **c** tienen simetría axial:

<table>
<tr><td>931.</td><td>Julia:</td><td>Pues que, teniendo una figura inicial y una recta r [dibuja uno de los ejes de simetría en la Figura a] que es el eje de simetría, entonces si hallamos las imágenes de este lado, va a ser este lado [señala los dos lados de la Figura a respecto al eje dibujado] y si hallamos las imágenes de este lado, pues va a ser este [señala los mismos lados de la figura, ahora en diferente orden], entonces las imágenes van a ser igual que la figura. Pues esta explicación sirve para todos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, ADD, E)
Datos: En la Figura a las imágenes de puntos a un lado del eje están en la figura al otro lado del eje.
Garantía: Definición (establecida a partir de la socialización) de figura con simetría axial.
Conclusión: La Figura a tiene simetría axial.</td></tr>
</table>

En este argumento Julia está usando la misma definición que utilizó Felipe en los argumentos de la línea 924. Se considera que la garantía es explícita porque menciona la definición que está utilizando, cuando dice: *…las imágenes van a ser igual que la figura.* Julia repite este argumento cuando están redactando la respuesta [940].

Tabla 20. Argumentos generados por la Tarea 8.b

TA	NA	PrA	TT	CA	LÍNEAS	RAD	DI
Deductivos	4	DPA y APD	PNA-A	E	919	NRAD	-
		DPA y APD	PNA-A	E	924	ADD	Figura con simetría axial
		DPA y APD	PNA-A	I	924	ADD	Figura con simetría axial
		DPA y APD	PNA-A	E	931	ADD	Figura con simetría axial
Inductivos	0	-	-	-	-	-	-
Abductivos	0	-	-	-	-	-	-
Total	4						

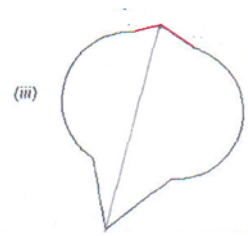
TA: Tipo de argumentos NA: Número de argumentos PrA: Proceso argumentativo TT: Tipo de tarea
CA: Clase de argumentos RAD: Relación argumento-definición DI: Definición involucrada

4.14 TAREA 8.c

Después de ubicar la regla en diferentes posiciones, los estudiantes explican por qué las figuras no tienen simetría axial, primero a partir de su imagen conceptual [956, 959] y después a partir de la definición de simetría axial (respuesta).

Esta tarea generó dos argumentos deductivos. El primero de ellos cuando Julia les explica a sus compañeros por qué la Figura iii no tiene simetría axial:

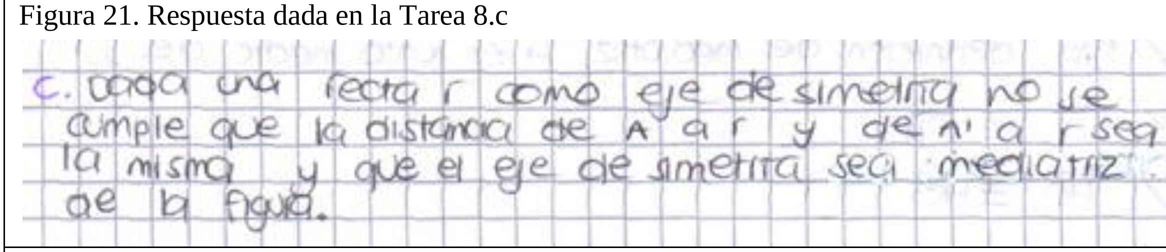
959.	Julia:	O sea, digamos acá [señala la Figura iii]. Si trazamos este eje [traza un segmento cuyos extremos son vértices de la figura], (iii)  este no es congruente con este [señala los segmentos resaltados con rojo en la figura siguiente]

<table>
<tr><td></td><td></td><td>

y estos tampoco [señala las dos partes en que el segmento inicial divide a la figura].</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, NRAD, E)
Datos: Figura iii, segmento trazado en la Figura iii, los dos lados de la figura determinados por el segmento trazado no son congruentes.
Garantía: Teorema en acto (en una simetría axial, las partes correspondientes son congruentes).
Conclusión: La Figura iii no tiene simetría axial.</td></tr>
</table>

Este es un argumento deductivo utilizando la contrarrecíproca de la proposición utilizada como garantía. No se considera que sea un argumento desde la definición porque están usando una de las propiedades de la simetría axial y no su definición.

Cuando piensan cómo escribir la respuesta, Julia se da cuenta de que en el caso de la Figura iii hay una propiedad de la simetría axial (que aparece en la definición que les dio la profesora) que no se cumple: dada la recta (que contiene al segmento que ella trazó), no se cumple que la distancia de un punto de la figura a esa recta y la distancia del punto “correspondiente” a la recta sean iguales [964]. En la respuesta, para explicar por qué las Figuras i, ii y iii no tienen simetría axial, utilizan la observación anterior en un argumento deductivo donde incluyen, además, que el “eje” no es mediatriz de la figura, aunque en el desarrollo de esta tarea no mencionaron la mediatriz:

<table>
<tr><td>Figura 21. Respuesta dada en la Tarea 8.c

c. Dada una recta r como eje de simetria no se cumple que la distancia de A a r y de A' a r sea la misma y que el eje de simetria sea mediatriz de la figura.</td></tr>
<tr><td>(Ded, ADD, I)
Datos: Figura iii, recta r que contiene dos vértices de la figura, las distancias de A y A’ a</td></tr>
</table>

r son diferentes. Garantía (implícita): Definición de simetría axial. Conclusión: La Figura iii no tiene simetría axial.

Cuando estaban redactando la respuesta se interrumpió la grabación de video y no se sabe si al mencionar las distancias de *A a r* y de *A'* a *r* se estaban refiriendo a los segmentos resaltados en rojo en la línea 959 o realmente a estas distancias. Sin embargo, la parte donde dicen que …*no se cumple* […] *que el eje de simetría sea mediatriz de la figura*, parece indicar que están usando la definición de simetría axial como garantía.

Tabla 21. Argumentos generados por la Tarea 8.c

TA	NA	PrA	TT	CA	LÍNEAS	RAD	DI
Deductivos	2	DPA y APD	PNA-A	E	959	NRAD	-
		DPA y APD	PNA-A	I	Respuesta	ADD	Simetría axial
Inductivos	0	-	-	-	-	-	-
Abductivos	0	-	-	-	-	-	-
Total	2						

TA: Tipo de argumentos NA: Número de argumentos PrA: Proceso argumentativo TT: Tipo de tarea
CA: Clase de argumentos RAD: Relación argumento-definición DI: Definición involucrada

4.15 TAREA 9

Inicialmente Felipe dice que el triángulo rectángulo, el equilátero y el isósceles tienen simetría axial [966-968], pero no lo justifica; luego se concentra en resolver la Tarea 10 y no participa más en la solución de la Tarea 9. Julia y Sonia encuentran que el triángulo equilátero y el isósceles tienen simetría axial.

Esta tarea generó dos argumentos deductivos. El primero cuando Julia concluye que el triángulo isósceles tiene simetría axial:

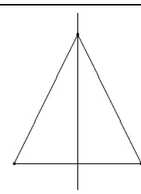
973.	Julia:	Déjame ver. [Leyendo] *¿Existe algún triángulo que tenga simetría axial?* Entonces sí, pues el equilátero.
974.	Sonia:	¿No hay más triángulos?
975.	Julia:	Y el isósceles. Pero es que todo triángulo isósceles es… todo triángulo, eh… todo triángulo equilátero es isósceles.
(Ded, NRAD, E)		

Datos: El triángulo equilátero tiene simetría axial. Garantía: Todo triángulo equilátero es isósceles. Conclusión: El triángulo isósceles tiene simetría axial.

Según el argumento anterior, la conclusión es válida para un tipo particular de triángulos isósceles (equiláteros), aunque en general es válida para todos los triángulos isósceles. También es posible que Julia se estuviera refiriendo a que es suficiente mencionar los triángulos isósceles porque todo triángulo equilátero es isósceles; sin embargo, no hay evidencia suficiente al respecto y queda la duda porque en la respuesta que escribieron mencionan los dos tipos de triángulos.

El segundo argumento surge cuando ven que al trazar una de las medianas en un triángulo isósceles y la recta que la contiene, se determinan dos triángulos congruentes [981]. Aunque no hay imágenes de estos triángulos porque la cámara estaba enfocada en el trabajo que hacía Felipe con los polígonos regulares y la hoja no fue anexada a las que entregó el grupo, la investigadora que estaba presente pudo ver que el triángulo que dibujaron era como el siguiente:

Figura 22. Triángulo dibujado en la Tarea 9



A partir de la observación sobre una de las medianas, Julia le dice a Sonia cómo explicar que el triángulo isósceles tiene eje de simetría:

<table>
<tr><td>981.</td><td>Julia:</td><td>Ponle aquí que porque al trazar esa recta, o sea, al trazar la mediana y una recta que la contenga, que sería esta, se determinan dos triángulos congruentes.</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, NRAD, I)
Datos: Triángulo isósceles, recta que contiene la mediana a la base y dos triángulos congruentes.
Garantía (implícita): Si una recta determina en un triángulo dos triángulos congruentes, entonces la recta es eje de simetría.
Conclusión: El triángulo isósceles tiene eje de simetría.</td></tr>
</table>

Se esperaba que los estudiantes utilizaran la definición de figura con simetría axial que construyeron (o la que usaron después de la socialización) pero no lo hicieron. En lugar de usar la definición de figura con simetría axial se refirieron a una de las propiedades que encontraron antes (congruencia de partes correspondientes).

Tabla 22. Argumentos generados por la Tarea 9

TA	NA	PrA	TT	CA	LÍNEAS	RAD	DI
Deductivos	2	DPA	PA-A	E	973-975	NRAD	-
		DPA	PA-A	I	981	NRAD	-
Inductivos	0	-	-	-	-	-	-
Abductivos	0	-	-	-	-	-	-
Total	2						

TA: Tipo de argumentos NA: Número de argumentos PrA: Proceso argumentativo TT: Tipo de tarea
CA: Clase de argumentos RAD: Relación argumento-definición DI: Definición involucrada

4.16 TAREA 10

Esta tarea se diseñó para ser resuelta usando un *software* de geometría dinámica; sin embargo, el día de la clase no fue posible utilizarlo, así que se entregó una hoja donde aparecían algunos polígonos regulares (desde cuatro hasta once lados). Aunque no se usó geometría dinámica, se sigue considerando un problema de construcción porque requiere el uso de regla y compás para construir los posibles ejes.

Esta tarea generó seis argumentos: cuatro inductivos y dos deductivos. El primero es un argumento inductivo, que surge cuando Felipe traza y cuenta los ejes de simetría en los polígonos de 4, 5, 6 y 7 lados, cuenta los del octágono regular (sin trazarlos) y concluye que sí se cumple que el número de lados coincide con el número de ejes de simetría:

997.	Felipe:	[Contando los ejes de simetría en el octágono regular, pero no los ha trazado] Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho. Sí, sí se cumple.
(Ind, NRAD, E) Datos: Los polígonos regulares de 4, 5, 6, 7 y 8 lados y los ejes de simetría de cada uno. Garantía: Debe cumplirse que si una figura es un polígono regular de *n* lados, $n \geq 4$, entonces tiene *n* ejes de simetría. Conclusión: El número de ejes de simetría de los polígonos regulares de 4, 5, 6, 7 y 8 lados es 4, 5, 6, 7 y 8, respectivamente.		

Este argumento se considera inductivo porque a partir de cinco casos particulares (datos empíricos) para los cuales se cumple una misma conclusión (también empírica), Felipe encuentra una regla general que debe cumplirse: la garantía.

Felipe dice que la regla encontrada tiene algo que ver con la congruencia. Para justificarla, utiliza dos argumentos deductivos:

<table>
<tr><td>1020.</td><td>Felipe:</td><td>Si es un polígono regular, tiene todos los lados congruentes, ¿verdad?</td></tr>
<tr><td>1021.</td><td>Sonia:</td><td>Si es regular, pues sí.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>[…]</td></tr>
<tr><td>1026.</td><td>Felipe:</td><td>Tiene que ver algo con la congruencia. Escribe que pues como son polígonos regulares, pues todos los segmentos son congruentes, entonces sí van a haber n ejes de simetría en la figura. Pues… y los ejes se intersecan en… [señala el punto de intersección de los ejes en el cuadrado y en el pentágono].</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, ADD, E)
Datos: Polígonos regulares dibujados en la hoja.
Garantía: Definición de polígono regular.
Conclusión: Todos los segmentos en los polígonos de la hoja son congruentes.</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ded, NRAD, I)
Datos: Todos los segmentos en los polígonos de la hoja son congruentes.
Garantía (implícita): Si todos los n segmentos de una figura son congruentes, entonces la figura tiene n ejes de simetría.
Conclusión: Cada figura tiene n ejes de simetría.</td></tr>
</table>

La garantía que Felipe parece estar usando en el segundo argumento es una regla que posiblemente obtuvo a través de un argumento inductivo, después de trazar los ejes de simetría de algunos de los polígonos regulares en la hoja: como una figura con 4, 5, 6 y 7 segmentos congruentes tiene 4, 5, 6 y 7 ejes de simetría, respectivamente, debería cumplirse que si los n segmentos de una figura son congruentes, entonces la figura tiene n ejes de simetría.

Cuando Julia formula una pregunta respecto a uno de los ejes del pentágono regular, se generan dos argumentos inductivos:

1027.	Julia:	¿No es el punto medio de este lado [señala uno de los lados del pentágono regular] con el vértice opuesto?

<table>
<tr><td>1028.</td><td>Felipe:</td><td>Sí, eso es cuando el número de lados del polígono es impar [señala el pentágono]. Cuando es par, es… o sea, excepto en el de cuatro lados [señala el hexágono]. Por ejemplo, acá en el de cuatro lados solamente son dos las que pasan por los vértices y las otras dos pasan por los puntos medios de los segmentos [señala el cuadrado y sus ejes de simetría]. Pero en esta no [señala el hexágono regular], en esta sí pasan por el… no mentiras también pasa lo mismo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ind, NRAD, E)
Datos: polígonos regulares de 4 y 6 lados dibujados en la hoja, ejes de simetría.
Garantía: Debe suceder que en un polígono regular de n lados, con n par, unos ejes pasan por el punto medio de dos lados y otros pasan por dos de sus vértices.
Conclusión: En los polígonos regulares de 4 y 6 lados algunos ejes pasan por los vértices y otros pasan por los puntos medios de los segmentos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">(Ind, NRAD, E)
Datos: polígonos regulares de 5 y 7 lados dibujados en la hoja, ejes de simetría.
Garantía: Debe suceder que en un polígono regular de n lados, con n impar, los ejes contienen al punto medio de un lado y al vértice opuesto.
Conclusión: En los polígonos regulares de 4 y 6 lados algunos ejes pasan por los vértices y otros pasan por los puntos medios de los segmentos.</td></tr>
</table>

El primer argumento es inductivo porque como Felipe ve que para un par de casos particulares (polígonos regulares de 4 y 6 lados) se obtiene la misma conclusión, enuncia una regla general que se debe cumplir. Algo similar puede decirse respecto al segundo argumento. Estos argumentos se consideran explícitos porque las garantías (reglas generales) son enunciadas de manera explícita, una por Julia y otra por Felipe. El primer argumento se repite más adelante cuando están escribiendo la respuesta [1034].

Finalmente, tratan de llegar a una regla general para el caso *n* par con respecto al número de ejes que contienen los puntos medios de los lados y el número de ejes que contienen dos vértices, aunque no la dicen completa y surge otro argumento inductivo:

1036.	Julia:	Digamos, *n* sobre dos pasan por los puntos medios de… Digamos, ¿*n* sobre dos da cuatro sobre dos? Bueno, lo que sea.
1037.	Sonia:	Sí, yo lo entiendo, pero ¿cómo lo pongo?
1038.	Felipe:	Eh, tres ejes de simetría contienen a los puntos medios de los segmentos y tres ejes de simetría contienen… bueno, en realidad sería como *n* sobre dos porque eso es solamente cuando se cumple. ¿Cómo lo escribimos?

(Ind, NRAD, I)
Datos: Polígonos regulares de 4 y 6 lados dibujados en la hoja y sus ejes de simetría.
Garantía (implícita): Debe cumplirse que cuando el número de lados de un polígono regular es *n*, con *n* par, *n*/2 ejes de simetría contienen a los puntos medios de los lados y *n*/2 contienen a los vértices.
Conclusión: En los polígonos de 4 y 6 lados, la mitad de los ejes de simetría pasan por los puntos medios de los lados y la mitad por dos de sus vértices.

Se considera un argumento inductivo porque a partir de dos casos particulares donde se observa una misma conclusión, los estudiantes tratan de generalizar y obtener una regla (garantía). Se considera que la regla que encuentran es implícita porque aunque están pensando de manera general, no la dicen explícitamente, sino que se ayudan con el caso particular del hexágono. En la respuesta final de la tarea mencionan el caso de polígonos regulares con un número par de lados y utilizan el hexágono regular como ejemplo.

Tabla 23. Argumentos generados por la Tarea 10

TA	NA	PrA	TT	CA	LÍNEAS	RAD	DI
Deductivos	2	DPA	PA-AC	E	1020-1021, 1026	ADD	Polígono regular
		DPA	PA-AC	I	1020-1021, 1026	NRAD	-
Inductivos	4	DPA	PA-AC	E	997	NRAD	-
		DPA	PA-AC	E	1027-1028	NRAD	
		DPA	PA-AC	E	1027-1028	NRAD	-
		DPA	PA-AC	I	1036-1038	NRAD	-
Abductivos	0	-	-	-	-	-	-
Total	6						

TA: Tipo de argumentos NA: Número de argumentos PrA: Proceso argumentativo TT: Tipo de tarea
CA: Clase de argumentos RAD: Relación argumento-definición DI: Definición involucrada

Una vez finalizado el análisis de los argumentos generados por cada una de las tareas del Taller, los resultados obtenidos serán integrados utilizando diferentes criterios. A partir del análisis de resultados se obtienen conclusiones relacionadas con el objetivo de este estudio y se hacen otros aportes adicionales. Este es el tema del siguiente capítulo.

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este capítulo se analizan los resultados obtenidos en el análisis de los datos. El análisis de resultados se hace teniendo en cuenta tres aspectos. En primer lugar, el tipo de tarea que favorece la argumentación; en segundo lugar, relación de los argumentos generados con una definición y, finalmente, relación de los argumentos generados y el proceso argumentativo. Se analizan además otros aspectos relacionados con el tipo y la clase de argumentos generados. Con base en el análisis de resultados se obtienen las conclusiones del estudio clasificadas según los mismos criterios del análisis. Finalmente, se hacen algunas observaciones generales y recomendaciones.

5.1 ANÁLISIS DE RESULTADOS

En adelante *tareas abiertas* hará referencia al conjunto de tareas de los tipos PA, PA-A, PA-C, PA-AC, mientras que *tareas no abiertas* corresponderá a las tareas de los tipos PNA y PNA-A[*]. *Tareas de no argumentación* hará referencia a las tareas de los tipos PA, PA-C y PNA, las cuales no pedían incluir argumentos en la respuesta.

Para el análisis de resultados se utiliza la información en la Tabla 7 (Clasificación de las tareas en el Taller final) y en las Tablas 8 a 23 donde se reportan los resultados de cada tarea. A partir de ellas se obtuvieron los resultados mostrados en las Tablas 24 y 25.

Tabla 24. Total de argumentos generados por cada tarea

Tareas		1	2	3.a	3.b	3.c	3.d	3.e	4	5	6	7	8.a	8.b	8.c	9	10	Total
Argumentos	Ded	3	1	8	5	1	1	1	0	2	9	7	1	4	2	2	2	49
	Ind	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	5
	Abd	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2
	Total	3	1	8	6	1	1	1	1	3	9	7	1	4	2	2	6	56

[*] No se incluyen los tipos de problemas PNA-C ni PNA-AC ya que ninguna de las tareas del Taller se clasifica en estas categorías.

Tabla 25. Clasificación de los argumentos generados por el Taller

TA	NA	PrA			TT						CA		RAD		
		APD	DPA	APD-DPA	PA	PA-A	PA-C	PA-AC	PNA	PNA-A	E	I	AAD	ADD	NRAD
Ded.	49	21	15	13	2	22	6	2	3	14	17	32	13	17	19
Ind.	5	1	4	0	0	0	1	4	0	0	4	1	1	0	4
Abd.	2	0	2	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	1	1
Total	56	22	21	13	2	24	7	6	3	14	23	33	14	18	24

TA: Tipo de argumentos NA: Número de argumentos PrA: Proceso argumentativo TT: Tipo de tarea CA: Clase de argumentos RAD: Relación argumento-definición

5.1.1 En cuanto al tipo de tarea. Todos los tipos de tareas generaron argumentos. Para determinar los tipos que más argumentos generaron se comparan los resultados para las tareas abiertas y no abiertas, tareas de argumentación y no argumentación y, finalmente, tareas de construcción y no construcción. Como el número de tareas de cada tipo es diferente, se hace el análisis a partir del promedio de argumentos generados por cada uno.

En promedio, los dos tipos de tarea que más argumentos generaron fueron los problemas abiertos que son a la vez de argumentación y construcción, y los problemas no abiertos de argumentación (Tabla 26).

Tabla 26. Promedio de argumentos generados según tipo de tarea

Tipo de tarea	Tareas abiertas				Tareas no abiertas	
	PA	PA-A	PA-C	PA-AC	PNA	PNA-A
Total de argumentos generados	2	24	7	6	3	14
Número de tareas en el Taller	2	7	2	1	1	3
Promedio de argumentos generados	1,00	3,43	3,50	6,00	3,00	4,67

Las tareas no abiertas generaron, en promedio, más argumentos que las abiertas (Tabla 27). ¿Esto podría significar que para generar argumentos no es necesario que las tareas sean abiertas? ¿Qué características tenían las tareas no abiertas para que hayan generado, en promedio, más argumentos que las abiertas? De las cuatro tareas no abiertas, tres eran de argumentación (Tabla 26), que en promedio generaron más argumentos que el problema no abierto que no era de argumentación (PNA).

Tabla 27. Promedio de argumentos generados por las tareas (abiertas y no abiertas)

Tipo de tarea	Tareas abiertas	Tareas no abiertas
Total de argumentos generados	39	17
Número de tareas en el Taller	12	4
Promedio de argumentos generados	3,25	4,25

¿La generación de argumentos depende más de la solicitud explícita de argumentos (problemas de argumentación) que de ser un problema abierto o no abierto? Para responder la pregunta anterior se compara lo que ocurre en las tareas abiertas de argumentación y no argumentación.

Tabla 28. Promedio de argumentos generados por tareas abiertas (argumentación)

Tipo de tarea abierta	de argumentación (PA-A, PA-AC)	no de argumentación (PA, PA-C)
Total de argumentos generados	30	9
Número de tareas en el Taller	8	4
Promedio de argumentos generados	3,75	2,25

En la tabla anterior puede verse que los problemas abiertos de argumentación generaron en promedio más argumentos que aquellos problemas abiertos de no argumentación. En general, los problemas de argumentación generaron más argumentos que aquellos donde no se pide explícitamente que se incluyan argumentos en la respuesta, sin importar si el problema es abierto o no abierto, como se aprecia en la siguiente tabla:

Tabla 29. Promedio de argumentos generados por las tareas (argumentación)

Tipo de tarea	Tareas de argumentación (PA-A, PA-AC, PNA-A)	Tareas no de argumentación (PA, PA-C, PNA)
Total de argumentos generados	44	12
Número de tareas en el Taller	11	5
Promedio de argumentos generados	4	2,4

Así mismo, ¿puede afirmarse que los problemas de construcción generan más argumentos que aquellos que no lo son sin importar si el problema es abierto o no abierto? Como puede verse en la Tabla 30, los problemas de construcción generaron, en promedio, más argumentos que aquellos que no lo son.

Tabla 30. Promedio de argumentos generados por las tareas (construcción)

Tipo de tarea	Tareas de construcción (PA-C, PA-AC)	Tareas no de construcción (PA, PA-A,PNA, PNA-A)
Total de argumentos generados	13	43
Número de tareas en el Taller	3	13
Promedio de argumentos generados	4,33	3,30

En el Taller no hay problemas no abiertos de construcción por lo cual no se puede llegar a conclusiones sobre el efecto que tiene en la argumentación incluir la construcción en problemas no abiertos. ¿Qué puede concluirse al respecto en los problemas abiertos?

Tabla 31. Promedio de argumentos generados por tareas abiertas (construcción)

Tipo de tarea abierta	de construcción (PA-C, PA-AC)	no de construcción (PA, PA-A)
Total de argumentos generados	13	26
Número de tareas en el Taller	3	9
Promedio de argumentos generados	4,33	2,89

En la Tabla 31 se ve que las tareas abiertas que involucran construcción generaron más argumentos que aquellos donde no hay construcciones; sin embargo, no se puede concluir que esto ocurra sin importar si el problema es abierto o no abierto, porque no hay información para el caso de problemas no abiertos de construcción.

Esta primera parte del análisis muestra que las tareas de argumentación generaron más argumentos que aquellas que no lo son, y que las tareas de construcción generaron más argumentos que aquellas que no lo son. ¿Podría pensarse que las tareas que son simultáneamente de argumentación y de construcción son las que más promueven la argumentación? En el Taller había una única tarea de estas características (Tarea 10). Como se concluyó al comienzo del análisis, en promedio, el tipo de tarea que más argumentos generó fue PA-AC.

Las tres tareas que más argumentos generaron fueron las Tareas 6, 3.a y 7 (Tabla 24). La Tarea 6 pide una justificación formal de una propiedad y las Tareas 3.a y 7 se relacionan con verificar si se cumplen condiciones (¿Un objeto geométrico dado cumple las condiciones de una definición? ¿Existe un objeto geométrico que cumpla ciertas condiciones?). Como estas tres tareas son las únicas con esas características, es posible que tareas donde se pida una justificación formal o verificar si se cumplen condiciones promuevan más la argumentación que otro tipo de tareas, pero no hay evidencia suficiente. En la Tarea 7 se presentó una discusión con respecto al significado de una expresión, lo que obligó a los estudiantes a tratar de llegar a un acuerdo sobre su significado. Esto parece indicar que el trabajo en grupo genera más argumentos si los puntos de vista de los participantes no coinciden y tratan de convencerse unos a otros.

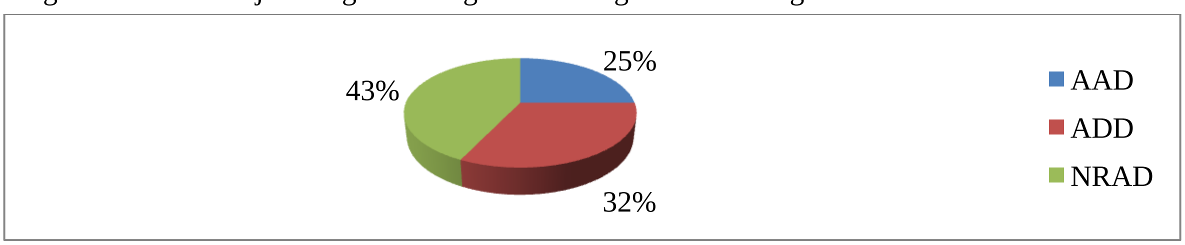
5.1.2 En cuanto a la relación argumento-definición. Los resultados generales para la relación argumento-definición aparecen en la Tabla 32.

Tabla 32. Número de argumentos generados por cada tarea, según RAD

Tareas		1	2	3.a	3.b	3.c	3.d	3.e	4	5	6	7	8.a	8.b	8.c	9	10	Total
RAD	AAD	1	1	5	2	1	1	0	0	0	0	2	1	0	0	0	0	14
	ADD	1	0	3	2	0	0	1	1	0	5	0	0	3	1	0	1	18
	NRAD	1	0	0	2	0	0	0	0	3	4	5	0	1	1	2	5	24
	Total	3	1	8	6	1	1	1	1	3	9	7	1	4	2	2	6	56

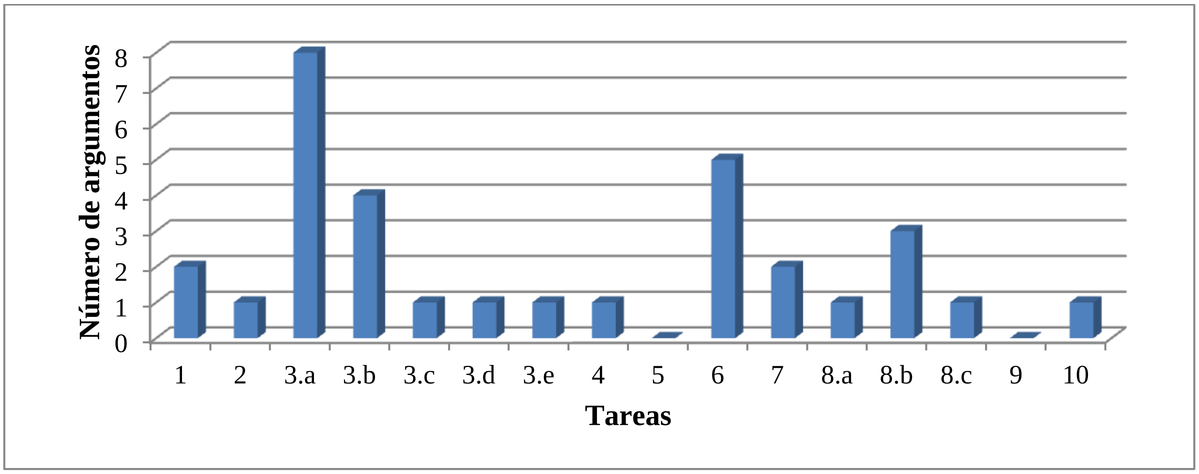
El Diagrama 1 muestra que más de la mitad de los argumentos generados tuvieron relación con alguna definición.

Diagrama 1. Porcentaje de argumentos generados según relación argumento-definición



En el Diagrama 2 puede verse que las tareas que más argumentos generaron relacionados con una definición fueron las Tareas 3.a y 6 que pedían determinar si un objeto geométrico cumple las condiciones dadas en una definición y justificar una propiedad.

Diagrama 2. Argumentos relacionados con una definición, generados por cada tarea



Aunque las Tareas 5 y 9 no generaron argumentos relacionados con una definición, todos los tipos de tareas generaron argumentos clasificados en las categorías AAD o ADD (Tablas 33 y 34).

Tabla 33. Argumentos generados por tipo de tarea, según RAD

Tipo de tarea		PA	PA-A	PA-C	PA-AC	PNA	PNA-A	Total
RAD	AAD	1	4	3	0	1	5	14
	ADD	1	6	2	1	1	7	18
	NRAD	0	14	2	5	1	2	24
	Total	2	24	7	6	3	14	56

Tabla 34. Promedio de argumentos relacionados con una definición (tipo de tarea)

Tipo de tarea	Tareas abiertas				Tareas no abiertas	
	PA	PA-A	PA-C	PA-AC	PNA	PNA-A
Total de argumentos relacionados con una definición	2	10	5	1	2	12
Número de tareas en el Taller	2	7	2	1	1	3
Promedio de argumentos generados	1,00	1,43	2,50	1,00	2,00	4,00

En la Tabla 34 puede verse que, en promedio, los dos tipos de tarea que más argumentos relacionados con una definición generaron fueron los problemas no abiertos de argumentación y los problemas abiertos de construcción.

En promedio, las tareas no abiertas generaron más argumentos relacionados con la definición que las tareas abiertas (Tabla 35).

Tabla 35. Promedio de argumentos relacionados con una definición (t. abiertas o no)

Tipo de tarea	Tareas abiertas	Tareas no abiertas
Total de argumentos relacionados con una definición	18	14
Número de tareas en el Taller	12	4
Promedio de argumentos generados	1,50	3,50

En el numeral anterior se concluyó que las tareas que más argumentos generaron fueron las de argumentación. Este tipo de tarea también fue el que, en promedio, generó más argumentos relacionados con una definición, como puede verse en la Tabla 36.

Tabla 36. Promedio de argumentos relacionados con una definición (argumentación)

Tipo de tarea	Tareas de argumentación (PA-A, PA-AC, PNA-A)	Tareas no de argumentación (PA, PA-C, PNA)
Total de argumentos relacionados con una definición	23	9
Número de tareas en el Taller	11	5
Promedio de argumentos generados	2,09	1,80

¿Los problemas de construcción generaron más argumentos relacionados con una definición que aquellos que no lo son? La Tabla 37 muestra que las tareas de construcción no tuvieron influencia sobre la generación de argumentos relacionados con una definición.

Tabla 37. Promedio de argumentos relacionados con una definición (construcción)

Tipo de tarea	Tareas de construcción (PA-C, PA-AC)	Tareas no de construcción (PA, PA-A,PNA, PNA-A)
Total de argumentos relacionados con una definición	6	26
Número de tareas en el Taller	3	13
Promedio de argumentos generados	2,00	2,00

¿Qué definiciones estuvieron involucradas en los argumentos clasificados como AAD y ADD?

Tabla 38. Definiciones en los argumentos clasificados en AAD y ADD

DEFINICIÓN	AAD	ADD	TOTAL
Simetría axial	11	3	14
Figura con simetría axial	3	3	6
Circunferencia	-	1	1
Transformación	-	4	4
Punto medio	-	3	3
Mediatriz	-	2	2
Rectas perpendiculares	-	1	1
Polígono regular	-	1	1
Total	14	18	32

De estas definiciones, únicamente las de simetría axial y figura con simetría axial se estaban construyendo durante el desarrollo del Taller, por lo cual son las únicas que hacen parte de argumentos acerca de la definición (AAD). Las demás definiciones se habían establecido previamente en el sistema teórico del curso, excepto la de transformación que fue presentada en el Taller.

En los argumentos clasificados como AAD los estudiantes encontraron que en la transformación simetría axial se conservan las medidas de ángulos y segmentos y se conserva la forma de la figura; vieron que si una figura y su imagen no tienen la misma forma, la transformación no es simetría axial; encontraron un punto con respecto al cual un punto y su imagen son equidistantes y encontraron condiciones relacionadas con perpendicularidad y equidistancia que se utilizaron en la definición. Con respecto a figura con simetría axial, los argumentos acerca de la definición se relacionaron con dos propiedades: la figura es imagen de sí misma con respecto a una recta y todo punto de la figura tiene imagen en la figura. Esto muestra que los argumentos en la categoría AAD permitieron a los estudiantes argumentar sobre propiedades incluidas en las definiciones que se estaban construyendo, como equidistancia y perpendicularidad para el caso de simetría axial, y lo que significa que una figura sea imagen de sí misma para el caso de figura con simetría axial.

Los argumentos desde la definición (ADD), donde las garantías fueron las definiciones mencionadas en la Tabla 38, permitieron que los estudiantes establecieran relaciones con otros conceptos, especialmente con el de mediatriz que, a su vez, involucra los conceptos de punto medio y perpendicularidad.

Las definiciones que aparecen en la Tabla 38 no fueron las únicas utilizadas durante el desarrollo del Taller. Otras también estuvieron presentes en algunos argumentos, pero al tratarse de definiciones que no se estaban construyendo, que no fueron utilizadas como garantía en un argumento o que eran definiciones en acto, corresponden a argumentos clasificados como NRAD. Es el caso de las definiciones de ángulo recto, segmentos perpendiculares, segmentos congruentes, ángulos congruentes, triángulo equilátero, triángulo isósceles, cometa, definición en acto de ser la misma figura y definición en acto de figura.

En la categoría NRAD están incluidos los argumentos cuyas conclusiones no son correctas como las obtenidas en algunos argumentos de las Tareas 3.b, 7 y 8.b [223-225, 250, 715, 919]. En los argumentos de estas categorías también se establecieron relaciones con otros conceptos mencionados anteriormente, pero no se clasificaron como ADD ya que las garantías no fueron las definiciones, sino teoremas relacionados. En los argumentos clasificados como NRAD también se utilizaron propiedades de los conceptos simetría axial y figura con simetría axial; sin embargo, una vez construida la definición, ya no se considera que corresponda a un argumento en la categoría AAD.

5.1.3 En cuanto al proceso argumentativo. Los procesos argumentativos considerados en este estudio son argumentar para definir (APD) y definir para argumentar (DPA). En la Tabla 39 se presentan los argumentos que se clasifican únicamente como APD o DPA o como APD y DPA, simultáneamente.

Tabla 39. Promedio de argumentos generados en cada proceso argumentativo

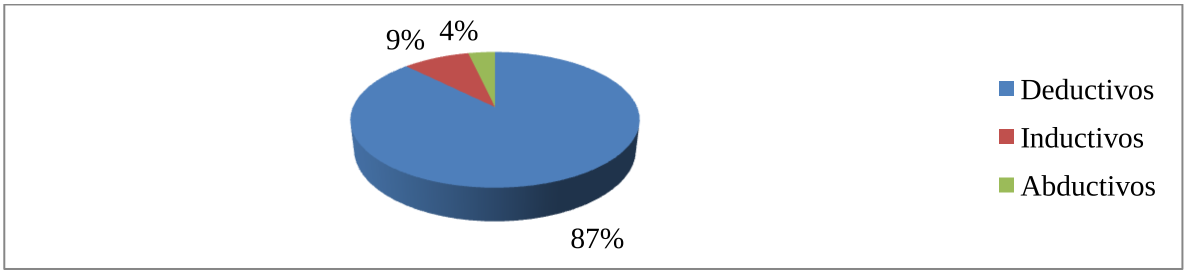
Proceso argumentativo	APD	DPA	APD Y DPA
Total de argumentos generados	22	21	13
Número de tareas en el Taller	8	5	3
Promedio de argumentos generados	2,75	4,20	4,33

Las tareas que pertenecen simultáneamente a los dos procesos o únicamente al de definir para argumentar generaron, en promedio, más argumentos. Analizando las características de las tareas que pertenecen a cada categoría, parece que los problemas donde se pide dar justificaciones formales o explicar por qué un objeto cumple o no cierta definición favorece la argumentación; sin embargo, no hay evidencia suficiente para concluir que al no tener este tipo de tareas en el proceso APD el número de argumentos generados sea necesariamente menor.

5.1.4 En cuanto a otros aspectos. Para facilitar el reporte de la estructura de cada argumento, en las categorías de análisis se incluyeron el tipo y la clase de argumento generado. Aunque los resultados en estas categorías no brindan información relacionada directamente con el tipo de tarea que favorece la argumentación en torno a la definición de un objeto, proveen información complementaria sobre los argumentos generados, que podría ser útil en futuros estudios relacionados.

Con respecto al tipo de argumento, en el Diagrama 3 puede verse que la mayoría de argumentos generados fueron deductivos.

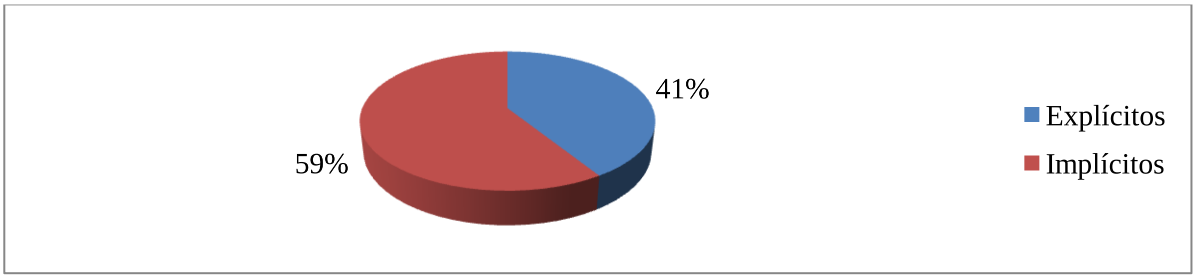
Diagrama 3. Tipos de argumentos generados por el Taller



Los argumentos inductivos y abductivos dependen de lo que se solicita en el problema. Es posible que el número de argumentos deductivos sea mayor si después de descubrir una propiedad se solicita que la justifiquen. Cuatro de los cinco argumentos inductivos fueron generados por una tarea en la cual los estudiantes debían establecer una generalidad a partir del estudio de casos particulares (Tarea 10). Parece natural que una tarea como esta genere argumentos inductivos. Los dos argumentos abductivos fueron generados por tareas en las que se solicita determinar condiciones para obtener un resultado específico (Tareas 4 y 5).

Con respecto a la clase de argumento, puede verse que un alto porcentaje corresponde a argumentos implícitos. ¿Es esto una desventaja para la argumentación? Como pudo verse durante el análisis de datos, en varios casos se menciona que parece que los estudiantes usan como garantía cierto teorema o definición, pero no es claro al no ser explícito. En otros casos, sus intervenciones no fueron clasificadas como argumentos porque no había evidencia suficiente para determinar los tres elementos principales. Por estas razones podría ser mejor que los argumentos de los estudiantes fueran explícitos.

Diagrama 4. Clase de argumentos generados por el Taller



5.2 CONCLUSIONES

Para responder la pregunta de investigación se presentan conclusiones relacionadas con los tres aspectos considerados en el análisis de resultados y se plantean preguntas que invitan a profundizar en cuestiones relacionadas con los resultados obtenidos en esta investigación.

5.2.1 En cuanto al tipo de tarea. Analizando el tipo de tarea se concluye que:

- Las tareas que más argumentos generaron fueron las de argumentación, sin importar si el problema era abierto o no abierto.
- Los problemas de construcción generaron más argumentos que aquellos que no lo son; sin embargo, no hay evidencia suficiente que permita afirmar que esto ocurra sin importar si el tipo de problema es abierto o no abierto.
- En concordancia con las dos conclusiones anteriores, se encontró que la tarea que era simultáneamente de argumentación y de construcción fue la que más argumentos generó.

A partir de las conclusiones obtenidas para el Taller, parece que para favorecer la argumentación no es significativo si el problema es o no abierto, sino que sea un problema de argumentación y, preferiblemente, de construcción. Dentro de estos problemas, parece que los que más generan argumentos son las demostraciones o justificaciones de propiedades, y problemas donde sea necesario determinar si un objeto geométrico o relación cumple ciertas condiciones. Además, tareas que incluyan objetos o relaciones no definidas previamente pueden generar argumentación pues requiere que los estudiantes lleguen a acuerdos sobre su significado.

5.2.2 En cuanto a la relación argumento-definición. Analizando la relación argumento-definición se concluye que:

- Todos los tipos de tareas generaron argumentos relacionados con una definición y más de la mitad de los argumentos generados por el Taller tuvieron relación con alguna definición.
- Las tareas que generaron más argumentos relacionados con una definición fueron las que pedían determinar si un objeto geométrico cumple las condiciones dadas en una definición y justificar una propiedad.
- Los dos tipos de tarea que generaron más argumentos relacionados con una definición fueron los problemas no abiertos de argumentación y los problemas abiertos de construcción.
- Las tareas no abiertas generaron más argumentos relacionados con la definición que las tareas abiertas y las de argumentación más que las de no argumentación, mientras que las tareas de construcción no generaron diferencias en el promedio de argumentos relacionados con una definición.
- Aunque las limitaciones de tiempo no permitieron construir, como comunidad, las definiciones de simetría axial y figura con simetría axial a partir de las definiciones previas escritas en cada grupo, los estudiantes tuvieron la oportunidad de encontrar propiedades de estos conceptos que fueron expresadas a través de argumentos acerca de la definición, antes de tener una definición formal.

- Los argumentos clasificados como AAD y ADD, y algunos en la categoría NRAD, permitieron hacer explícitas propiedades y relaciones de los conceptos que se querían definir y, posiblemente, fortalecieron el proceso de conceptualización que va más allá de conocer una definición formal.
- En el desarrollo del Taller surgieron argumentos desde otras definiciones, lo cual podría fortalecer el proceso de conceptualización al establecer relaciones con otros conceptos.

5.2.3 En cuanto al proceso argumentativo. Analizando el proceso argumentativo se concluye que:

- Las tareas que pertenecen simultáneamente a los procesos de argumentar para definir y definir para argumentar o las que pertenecen únicamente al segundo proceso parecen ser las que más favorecen la argumentación. ¿Podría ser que, en general, el proceso de argumentar para definir favorece menos la argumentación? ¿O que los estudiantes en ese proceso cuentan con menos herramientas para argumentar? ¿O que, en general, el proceso de construir una definición genera más inconvenientes que el de argumentar a partir de ella? Estas son preguntas que quedan planteadas ya que no se pueden responder a partir de los resultados de este estudio.
- En el proceso de definir para argumentar que se dio después de definir simetría axial solo dos de los trece argumentos generados fueron desde la definición de simetría axial, lo cual parece indicar que los estudiantes, además de otras definiciones, utilizan más las propiedades del concepto que su definición. ¿Esto podría estar relacionado con que las propiedades están más cerca de su imagen conceptual que la definición del concepto? Es posible que así sea, especialmente en el caso de la simetría axial donde el concepto tiene un fuerte lazo con experiencias cotidianas; sin embargo, es posible que con otras definiciones esto no ocurra.

5.2.4 En cuanto a la hipótesis de trabajo. El Taller aplicado promovió la argumentación en torno a las definiciones de simetría axial y figura con simetría axial. Las tareas eran problemas donde se requería identificar o analizar propiedades de alguno de los conceptos estudiados y establecer relaciones entre ellas. A través de la argumentación los estudiantes construyeron definiciones de los conceptos estudiados y argumentaron a partir de ellas.

5.2.5 En cuanto a otros aspectos. Analizando otros aspectos relacionados con este estudio, se concluye que:

- En los argumentos se utilizan de manera implícita definiciones que pueden no haberse estudiado en clase pero que juegan un papel fundamental, como qué es una figura geométrica o cuándo se considera que dos figuras son la misma (Tarea 7). Si se considera que definiciones como estas son obvias y no se les da la suficiente atención, es posible que se conviertan en un obstáculo. Algo similar podría ocurrir cuando la imagen conceptual no es correcta.
- De los riesgos previstos se presentaron los relacionados con no entender la tarea (Tarea 7) y con la falta de tiempo. Este último inconveniente no permitió construir las definiciones socialmente en la clase, sino que fue la profesora quien dio la definición formal.
- No siempre se logran los objetivos propuestos, como ocurrió con la primera parte del Taller donde se esperaba que a través de la exploración los estudiantes encontraran las propiedades que les permitirían definir simetría axial. En la primera etapa de la exploración los estudiantes se centraron en la conservación de medidas de segmentos y de ángulos y fue necesaria la intervención de la profesora para que pensaran en la mediatriz de un segmento con extremos un punto y su imagen.
- Las tareas donde se debe establecer una generalidad a partir del estudio de casos particulares generan argumentos inductivos, y las tareas donde se solicita determinar condiciones para obtener un resultado específico generan argumentos abductivos.
- Para analizar la argumentación de los estudiantes, es mejor que sus argumentos sean explícitos. Queda planteada la pregunta: ¿cómo lograr que los estudiantes digan explícitamente todo lo que usan cuando argumentan?

Teniendo en cuenta algunos de los planteamientos de Schoenfeld (2000) con respecto a los resultados y descubrimientos en investigación sobre educación matemática, se considera que las conclusiones obtenidas a partir de este estudio no son definitivas, sino sugestivas.

Los resultados obtenidos entran a formar parte de una evidencia acumulativa para que, a través de otros estudios relacionados, se pueda ir progresando hacia la obtención de nuevas conclusiones. Además, en este estudio, la profesora que aplicó el taller tenía cuatro cursos de Elementos de Geometría a su cargo y, con base en las características de cada uno de ellos, sugirió en cuál curso se podrían hacer las grabaciones y cuáles grupos grabar en ese curso. Los datos así recogidos corresponden a un curso y a un grupo que en general tenían un buen desempeño. Queda abierta la pregunta sobre los resultados de esta propuesta con estudiantes de características diferentes a las del grupo analizado.

5.3 OBSERVACIONES GENERALES Y RECOMENDACIONES

Las siguientes observaciones y recomendaciones, que no son conclusiones a partir del análisis de datos y de resultados, surgieron a lo largo del estudio y pueden ser importantes para una posible implementación de la propuesta.

Una desventaja de esta propuesta es que requiere mayor tiempo del que habitualmente se utiliza, lo cual pudo evidenciarse en diferentes momentos. Inicialmente este estudio se iba a desarrollar en grados cuarto y octavo con otros conceptos; sin embargo, por razones de tiempo, las profesoras que aceptaron realizar el experimento en estos cursos no aplicaron completamente el Taller diseñado, la cual fue una de las razones para buscar otro escenario de aplicación. Además, como ya se mencionó, en nivel universitario la falta de tiempo no permitió la construcción de las definiciones de simetría axial y figura con simetría axial como estaba planeado.

Para que un profesor pueda determinar la argumentación que hacen los estudiantes, no es suficiente que lea las respuestas que ellos escriben. Es el caso de la solución de la Tarea 3.a donde hubo un proceso de argumentación interesante que no se evidencia en la respuesta que el grupo escribió. Dado que el profesor no puede seguir de manera continua el trabajo de cada uno de los grupos, ¿cómo se podría lograr que el reporte escrito de los estudiantes refleje más lo ocurrido?

Es difícil que el profesor pueda aprovechar todo lo que esta propuesta de trabajo podría aportar al proceso de conceptualización dado que no puede estar todo el tiempo con cada grupo. Esto se evidenció en el grupo analizado cuando encontraron un punto P para el cual cualquier punto y su imagen eran equidistantes de él. Este hallazgo habría podido ser aprovechado en el proceso de construcción de la definición de simetría axial; sin embargo, como la profesora no evidenció todo el proceso de este grupo ya que iba pasando por todos los grupos, no supo a qué punto se estaban refiriendo y no pudo reconocer toda su importancia.

Hay que ser cuidadosos en el diseño de los talleres para evitar inconvenientes como los que se presentaron en la Tarea 7 con respecto a lo que significa ser la misma figura. Otro inconveniente relacionado con el diseño de los talleres ocurrió en grado cuarto porque los niños no sabían qué era definir y pensaron que se trataba de explicar cómo habían construido la circunferencia.

También es importante ser cuidadosos con las partes del taller que se van entregando para no suprimir la necesidad de explorar al dar respuestas o ejemplos a través de preguntas posteriores. En la Tarea 5 los estudiantes tomaron el punto G de la Tarea 6 como ejemplo de un punto que es imagen de sí mismo, y en la Tarea 7 los ejemplos de una figura cuya imagen bajo una simetría axial es ella misma fueron tomados de la Tarea 8. En estos casos los estudiantes no tuvieron que generar sus propios ejemplos.

La imagen conceptual juega un papel muy importante que puede ayudar a construir una definición, como ocurrió con el caso de "ser el reflejo de" para construir la definición de simetría axial. Sin embargo, también puede ser un obstáculo como se evidenció en el trabajo desarrollado en grado cuarto donde los estudiantes tuvieron dificultades para diferenciar círculo y circunferencia.

En los argumentos matemáticos de los estudiantes las garantías pueden ser afirmaciones que han sido validadas, teoremas en acto, definiciones en acto o hechos geométricos. Aunque en algunos casos los estudiantes llegan a conclusiones que no son verdaderas, lo importante es que argumentan sobre asuntos de geometría, fortaleciendo el proceso de conceptualización.

Los autores mencionados en los referentes teóricos (Capítulo 2) se interesaron por el proceso de conceptualización como un proceso que va más allá de dar una definición. La definición es importante y por eso se requiere hacerla significativa a través de ejemplos y no ejemplos, destacando propiedades relevantes e irrelevantes, analizándola, construyéndola o favoreciendo la articulación entre concepto e imagen del concepto. Se espera que con este trabajo se haya hecho un aporte para que, además, se aproveche y promueva la argumentación para construir o utilizar definiciones.

En la propuesta que promociona el Taller aplicado, los estudiantes trabajan autónomamente para formar concepciones relacionadas con un concepto y que luego serán transformadas o ratificadas cuando socialmente se discutan los resultados bajo la guía del profesor. Este tipo de trabajo requiere una transformación del paradigma del papel del profesor y de lo que es aprender; requiere que tanto el profesor como las autoridades escolares logren entender el beneficio de la metodología en el aprendizaje de los estudiantes y, por lo tanto, el factor tiempo deje de tener un papel relevante en la manera de hacer las cosas.

Como profesora, la argumentación siempre ha sido el eje fundamental en el desarrollo de mis clases, incluyendo la argumentación desde la definición. Este trabajo me aportó una nueva manera de promover la argumentación en la clase a partir del proceso de argumentar para definir, que no había utilizado. Por otra parte, el trabajo me permitió reconocer la importancia que tiene para los estudiantes considerar diferentes definiciones para un mismo objeto.

Este trabajo dejó grandes aprendizajes a quienes participaron directamente en su elaboración y será aun más útil en la medida en que pueda hacer aportes a otros profesores. Queda abierta la invitación a todos ellos para que incursionen en un manejo diferente de las definiciones en sus clases.

REFERENCIAS

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2003). The Teaching of Proof. *arXiv:math/0305021*. Recuperado a partir de http://arxiv.org/abs/math/0305021

Boero, P., Douek, N., & Ferrari, P. L. (2008). Developing Mastery of Natural Language. En L. D. English (Ed.), *International Handbook of Research in Mathematics Education* (pp. 262-295). New York: Routledge.

Calvo, C. (2001, mayo). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, Barcelona.

Camargo, L., Samper, C., Perry, P., & Molina, Ó. (2011). Enseñar definiciones o aprovecharlas para construir conceptos en geometría. Presentado en XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Bogotá, Colombia.

Castiblanco, G., González, J. G., Ortiz, S., Urrego, N. E., Carvajal, T., & Silva, L. H. (2011). *ZonActiva Matemáticas 6*. Bogotá, Colombia: Editorial Voluntad.

De Villiers, M. (1994). The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 11-18.

De Villiers, M. (1995). The Handling of Geometry Definitions in School Textbooks. *Pythagoras*, *38*, 3-4.

De Villiers, M. (1996). Some Developments in Geometry Education (2). *La lettre de la preuve*. Recuperado a partir de http://www-didactique.imag.fr/preuve/Resumes/deVilliers/deVilliers98/deVilliers983.html

De Villiers, M. (1998). To Teach Definitions in Geometry or Teach to Define. En A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 248-255). Stellenbosch: University of Stellenbosch.

De Villiers, M. (2004). Using Dynamic Geometry to Expand Mathematics Teachers ' Understanding of Proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(5), 703-724.

Douek, N., & Scali, E. (2000). About Argumentation and Conceptualisation. En *Proceedings of PME-XXIV* (Vol. 2, pp. 249-256). Hiroshima.

Fernández, L. (2006). Fichas para investigadores: ¿Cómo analizar datos cualitativos? *Butlletí LaRecerca*, *Ficha 7*.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publisingh Company.

Govender, R., & de Villiers, M. (2002). Constructive Evaluation of Definitions in a Sketchpad Context. Presentado en Associated Mathematics Educators of South Africa AMESA 2002, University of Natal, Durban, South Africa.

Hanna, G., de Villiers, M., Arzarello, F., Dreyfus, T., Durand-Guerrier, V., Jahnke, H. N., Yevdokimov, O. (2009). ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education: Discussion Document. En F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 1, p. 267). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1982). Basic Geometric Concepts - Definitions and Images. En A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 18-23). Anthwerp, Belgium: Universitaire Instelling Antwerpen.

Jaime, A., Chapa, F., & Gutiérrez, Á. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»*, (23), 49-62.

Kublikowski, R. (2009). Definition within the Structure of Argumentation. *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, *16*(29).

Leikin, R., & Winicki-Landman, G. (2001). Defining as a Vehicle for Professional Development of Secondary School Mathematics Teachers. *Mathematics Education Research Journal*, *3*, 62-73.

Leitão, S. (2007). Processos de construção do conhecimento: a Argumentação em foco. *Pro-Posições*, *18*(3), 75-92.

León, O. L., & Calderón, D. I. (2001). Validación y argumentación de lo matemático en el aula. *Relime*, *4*(1), 5-21.

Llanos, V. C., & Otero, M. R. (2009). Argumentación matemática en los libros de la enseñanza secundaria: un análisis descriptivo de las características de los libros de texto y de la argumentación. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *4*(1), 37-50.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En Á. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 173-204). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

McGee, B. R. (1999). The Argument from Definition Revisited: Race and Definition in the Progressive Era. *Argumentation And Advocacy*, *35*(4), 141-158.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*.

Moise, E., & Downs, F. (1964). *Geometry*. United States of America: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Molina, A., & Guzmán, L. (2008). *Matemáticas 7* (Primera edición.). Santillana, S.A.

Ouvrier-Buffet, C. (2006). Exploring Mathematical Definition Construction Processes. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(3), 259-282.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 23-41.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., & Molina, Ó. (2012). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En *Geometría plana: un espacio de aprendizaje*. Universidad Pedagógica Nacional.

Quintero, A. H., & Costas, N. (1994). *Geometría* (Primera edición.). San Juan, Puerto Rico: Editorial de la Universidad de Puerto Rico.

Real Academia Española. (2006). *Diccionario esencial de la lengua española*. Espasa Calpe.

Samper, C., Molina, Ó., & Echeverry, A. (2011). *Elementos de geometría*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Schoenfeld, A. (2000). Propósitos y métodos de investigación en educación matemática. (J. D. Godino, Trad.)*Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. Notices of the AMS*, *47*(6), 1-18.

Segura, J. B. (2003). *Matemanía 2* (Primera edición.). Bogotá, Colombia: Migema Ediciones S.A.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, (12), 151-169.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. Barcelona: Ediciones Península.

Urrego, N. E., Silva, L. H., Ortiz, S., González, J. G., & Carvajal, T. (2011). *ZonActiva Matemáticas 7*. Bogotá, Colombia: Editorial Voluntad.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. (J. D. Godino, Trad.). Recuperado a partir de http://ipes.anep.edu.uy/documentos/curso_dir_07/modulo2/materiales/didactica/campos.pdf

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Springer Netherlands.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a Constructive Activity: Learners Generating Examples*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Winicki-Landman, G., & Leikin, R. (2000, marzo). On Equivalent and Non-Equivalent Definitions: Part 1. *For the Learning of Mathematics*, *20*(1), 17-21.

Yackel, E. (2001). Explanation, Justification and Argumentation in Mathematics Classrooms. En M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-25* (Vol. 1, pp. 1-9). Utrecht (Olanda).

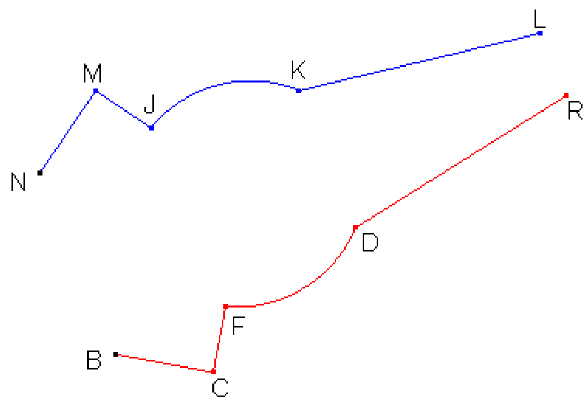
ANEXO A

(Diseño previo del Taller)

PROPUESTA PARA LA DEFINICIÓN DE SIMETRÍA AXIAL

Recortar por las líneas.

1. Compare las dos figuras. Encuentre semejanzas y diferencias entre las partes que componen cada figura.



2. Añada un trozo más a la figura azul a partir del punto *N*. Busque una manera de encontrar el trozo correspondiente en la figura roja y trácelo. Describa un proceso geométrico para encontrar el trozo correspondiente.

3. Una con segmentos los puntos de la figura azul con los puntos correspondientes de la figura roja.

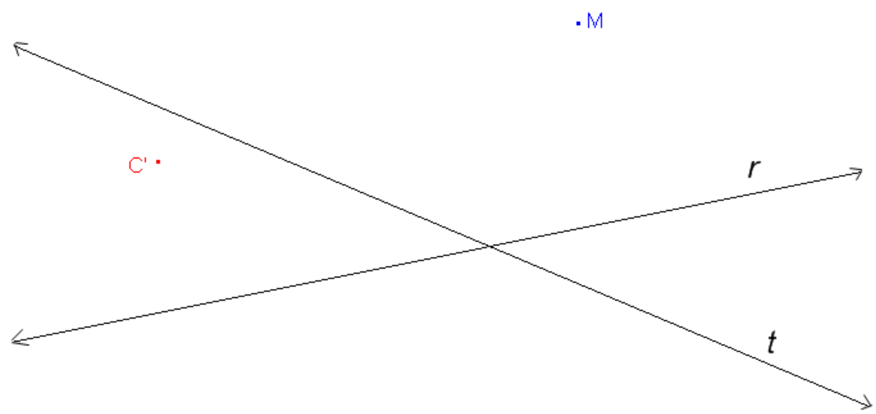
4. ¿Qué relaciones encuentra entre el eje de simetría y cada segmento trazado entre dos puntos correspondientes?

5. Agregue un trozo más a la figura azul y describa, por escrito, cómo trazar la parte correspondiente en la figura roja sin plegar el papel.

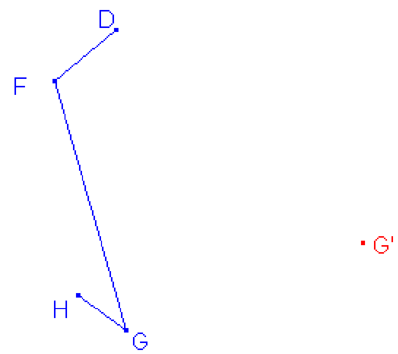
6. a. Usando regla y compás, ubique la imagen del punto *M* si la recta *r* se usa como eje de simetría.

b. Si *C*' es la imagen de *C* con respecto a la recta *r*, ubique el punto *C*.

c. Si la recta *t* se usa como eje de simetría, ubique los puntos *M*' y *C*.

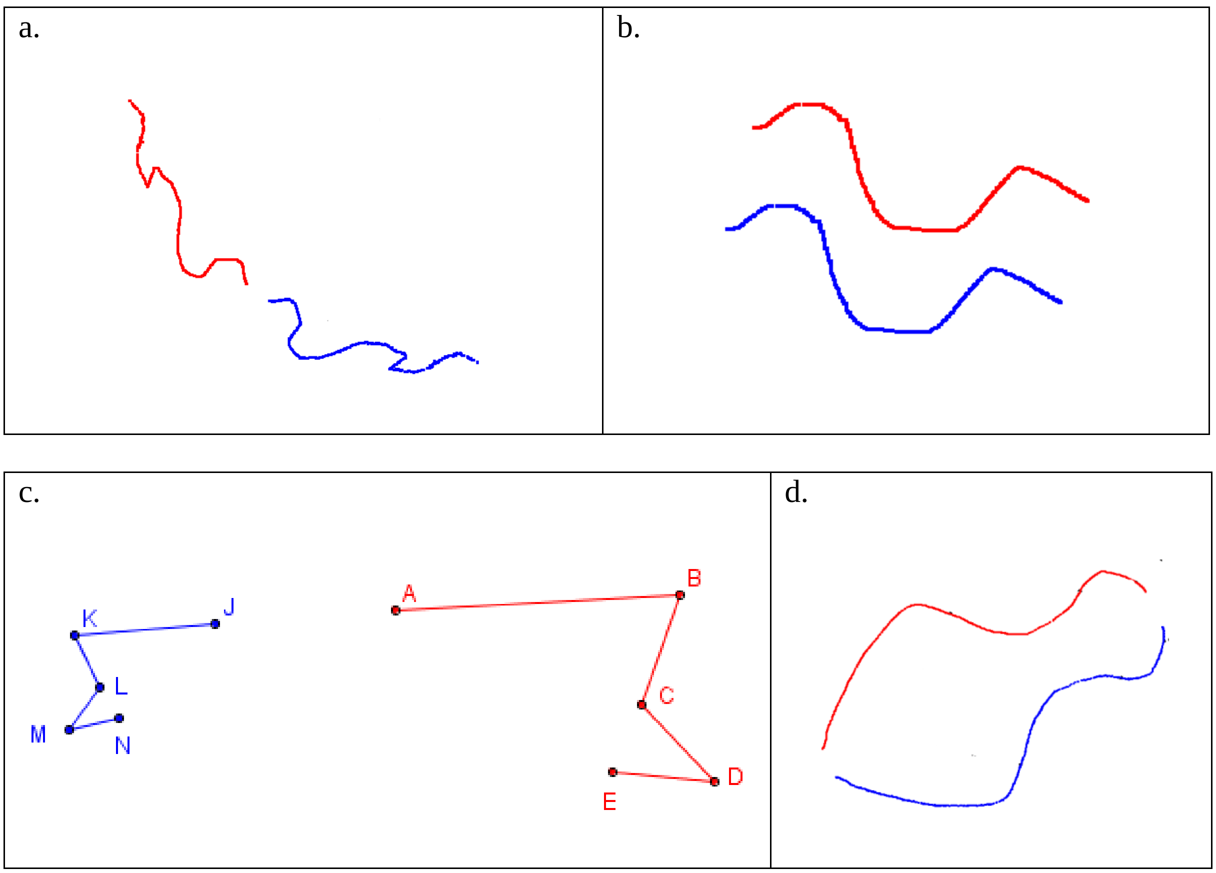


7. Si *G*' es el punto correspondiente a *G*, con regla y compás construya la imagen de la figura completa.



8. Escriba una definición de la transformación simetría axial.

9. En cada uno de los siguientes casos, determine si existe un eje de simetría. Justifique las respuestas.



10. a. En la hoja entregada por la profesora, aplique a la figura *ABCD* una simetría axial con respecto a la recta *m*, nombrando la imagen de *A* con *A*’, la de *B* con *B*’, etc.

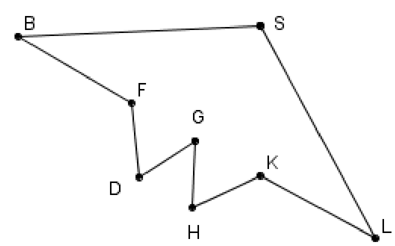
b. Calque la figura *A*’*B*’*C*’*D*’ obtenida y ubíquela en otra posición, manteniendo siempre la misma cara del papel calcante sobre la hoja. Sin importar la posición de la figura *A*’*B*’*C*’*D*’, ¿existe una simetría axial para la cual es imagen de la figura *ABDC*?

c. Determine si hay alguna posición de la figura *A*’*B*’*C*’*D*’ para la cual exista una transformación simetría axial de tal manera que la figura *A*’*B*’*C*’*D*’ sea la imagen de la figura *ABCD*. Describa su resultado.

d. ¿Qué característica tiene el eje de simetría cuando las dos figuras forman un polígono?

---

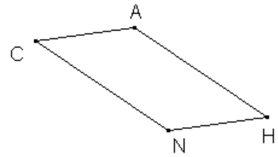
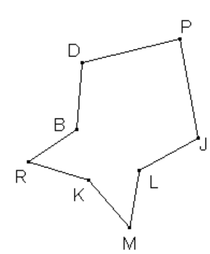
11. ¿Existe alguna recta de tal manera que al aplicarle al polígono la simetría axial respecto a esa recta, el polígono y su imagen coincidan? Justifique la respuesta.



---

12. ¿Es posible que en una simetría axial algún punto sea imagen de sí mismo? Justifique la respuesta.

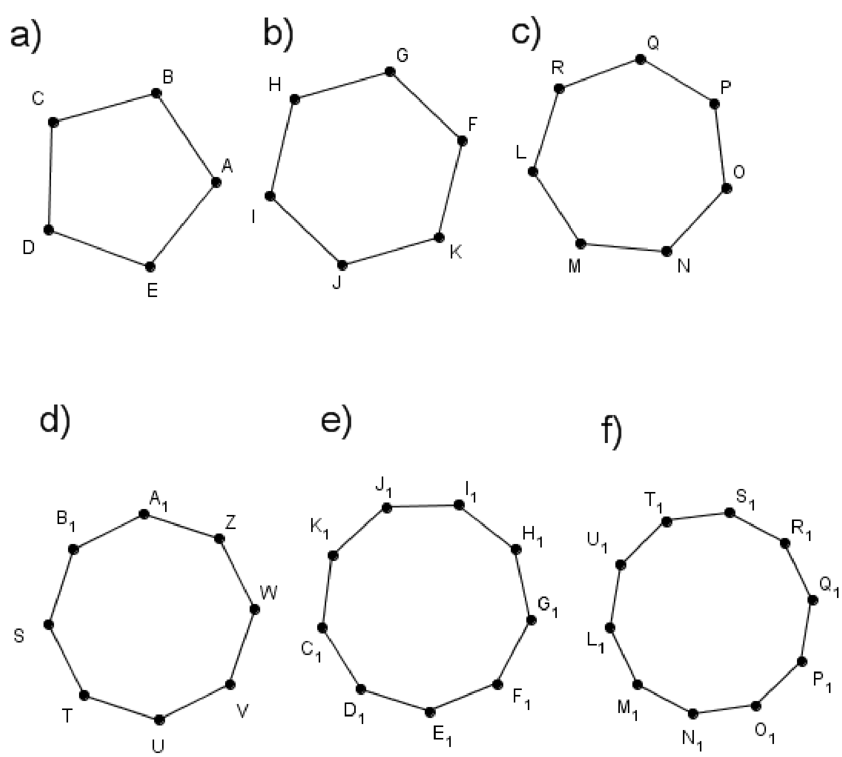
13. Para cada una de las siguientes figuras, determine si tiene simetría axial. Justifique la respuesta.

a.	b.
	

14. Construya un polígono que tenga simetría axial. Explique los pasos seguidos en la construcción.

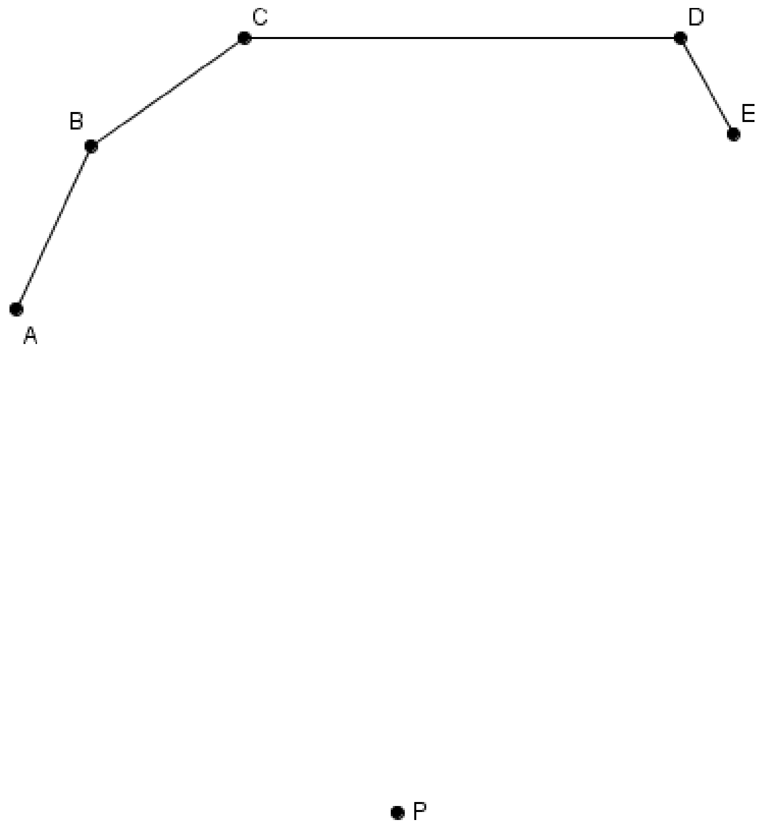
15. Para cada una de las siguientes figuras, determine si tiene simetría axial. Si la tiene, describa los ejes de simetría en forma de conjetura.

- circunferencia
- rectángulo
- polígono regular



16. ¿Existe algún triángulo que tenga simetría axial? Justifique la respuesta.

Hoja para el ejercicio 10



ANEXO B

(Diseño previo del Taller – Guía para la profesora)

PROPUESTA PARA LA DEFINICIÓN DE SIMETRÍA AXIAL

Guía para la profesora

La propuesta se presenta a través de dos guías: una para los estudiantes y otra para el profesor que, además de las instrucciones y preguntas para los estudiantes, incluye comentarios y sugerencias.

Las actividades propuestas están diseñadas para que los estudiantes descubran y describan los elementos de la definición antes de llegar a ella. Durante su desarrollo se recomienda animar a los estudiantes a explorar situaciones, expresar y justificar sus ideas, hacer y verificar conjeturas, de manera que se favorezca la comunicación matemática y la argumentación.

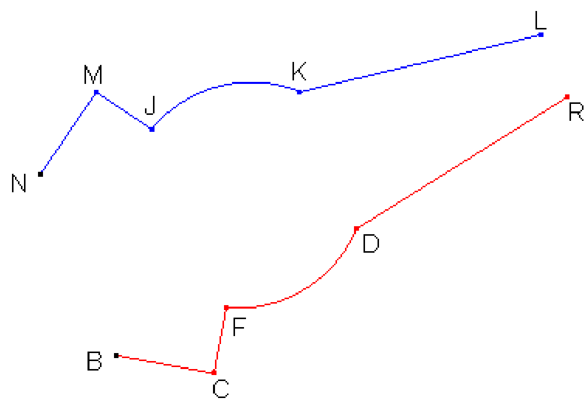
Las preguntas para los estudiantes se entregan por partes, según las divisiones mostradas por las líneas horizontales en la guía diseñada para ellos.

Dependiendo del tiempo disponible y de las dificultades que se presenten, algunas preguntas se pueden asignar como tarea.

Materiales: Regla, compás, transportador, papel calcante y preguntas para los estudiantes, recortadas según se indica.

Las instrucciones para los estudiantes son las siguientes:

1. *Compare las dos figuras. Encuentre semejanzas y diferencias entre las partes que componen cada figura.*



Pueden utilizar el compás para comparar longitudes de segmentos y medir ángulos con el transportador. Orientar una discusión sobre las respuestas dadas por los estudiantes para que lleguen a la noción de puntos correspondientes, que son los puntos que coinciden al superponer las dos figuras. Introducir la palabra imagen para referirse al punto de la figura roja que le corresponde a un punto dado de la azul y explicar que para dar el mensaje de correspondencia, para la imagen se usa la misma letra del punto original acompañado del símbolo prima (por ejemplo, *A*, *A*').

Algunas de las semejanzas que pueden encontrar son: el arco está entre el segmento más corto y el segmento más largo de cada figura, los segmentos más cortos en cada figura miden lo mismo, $\angle M$ y $\angle C$ tienen la misma medida, etc. Las diferencias se relacionan con las posiciones de las figuras.

Terminada esta discusión, se entrega el problema 2.

2. *Añada un trozo más a la figura azul a partir del punto N. Busque una manera de encontrar el trozo correspondiente en la figura roja y trácelo. Describa un proceso geométrico para encontrar el trozo correspondiente.*

Al responder la pregunta anterior podría ocurrir lo siguiente:

- Que los estudiantes encuentren el eje de simetría de la figura (si no lo han encontrado antes) y plieguen el papel para hallar la parte correspondiente. Cuando encuentren esta recta se les dice que se llama eje de simetría y que se definirá formalmente más adelante.
- Es posible también que los estudiantes reproduzcan el trozo a partir de la medición de ángulos y de segmentos. Ese método se aprovecha para analizar las propiedades de la transformación aplicada.

Si en la discusión de la pregunta anterior aparece el segundo método y se discute sobre las características de la transformación, se puede pasar a la pregunta 6. En caso contrario, entregar las preguntas 3, 4 y 5.

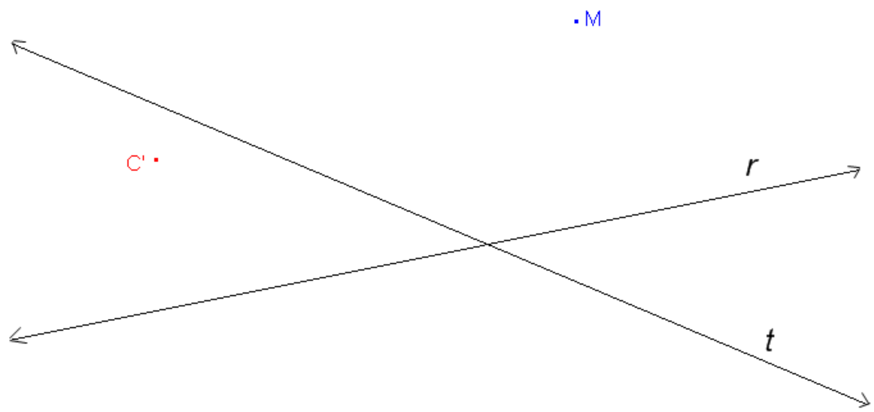
3. *Una con segmentos los puntos de la figura azul con los puntos correspondientes de la figura roja*.
4. *¿Qué relaciones encuentra entre el eje de simetría y cada segmento trazado entre dos puntos correspondientes*?
5. *Agregue un trozo más a la figura azul y describa, por escrito, cómo trazar la parte correspondiente en la figura roja sin plegar el papel*.

Orientar una discusión sobre los métodos utilizados en la pregunta 5 de manera que surjan las características de las figuras, a partir de las cuales se definirá simetría axial:

- cada segmento trazado en la pregunta 3 es perpendicular al eje de simetría
- el eje de simetría interseca a cada segmento en su punto medio.

Entregar la pregunta 6.

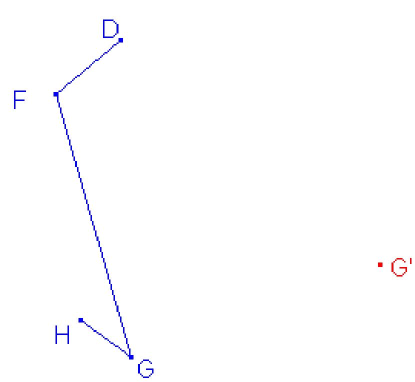
6. a. *Usando regla y compás, ubique la imagen del punto M si la recta r se usa como eje de simetría*.
   b. *Si C' es la imagen de C con respecto a la recta r, ubique el punto C.*
   c. *Si la recta t se usa como eje de simetría, ubique los puntos M' y C*.



Aquí es importante que vean que dada una recta, a cada punto del plano le corresponde un punto como imagen y que cada punto es imagen de algún punto del plano. Mencionar que cuando existe una asignación de exactamente un punto del plano a cada punto del plano como en los ejemplos anteriores, se establece lo que llamamos una transformación. Ver que en el ejercicio 6 cada recta define una transformación diferente.

Entregar la pregunta 7.

7. *Si G' es el punto correspondiente a G, con regla y compás construya la imagen de la figura completa.*



Ver que para construir la figura fue necesario aplicar las características de la transformación mencionadas anteriormente. Decir que esta transformación recibe el nombre de simetría axial.

Entregar la pregunta 8.

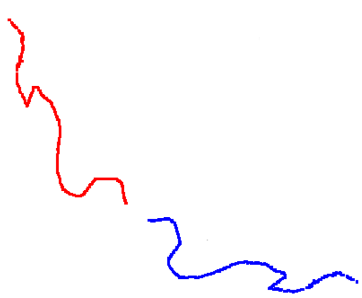
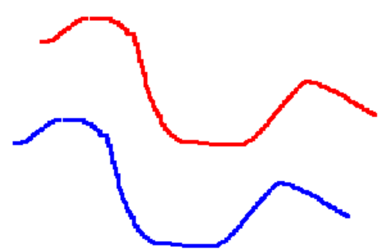
8. *Escriba una definición de la transformación simetría axial*.

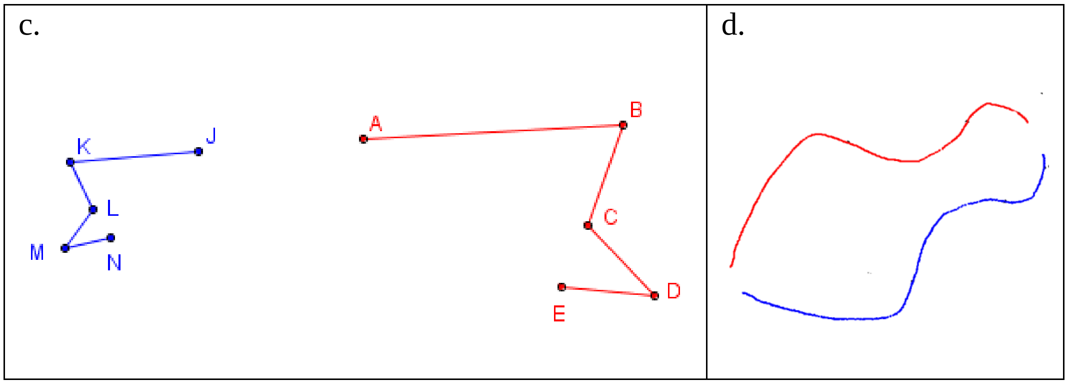
Recoger, comparar y discutir las definiciones escritas por los estudiantes para llegar a la siguiente definición:

La simetría axial con respecto a la recta r es una transformación que a cada punto A del plano le hace corresponder un punto A' de tal manera que: • La recta r es perpendicular al segmento $\overline{AA'}$ • Si P es el punto donde se intersecan la recta r y el segmento $\overline{AA'}$, entonces las distancias AP y $A'P$ son iguales. La recta r recibe el nombre de eje de simetría.

Entregar la pregunta 9.

9. *En cada uno de los siguientes casos, determine si existe un eje de simetría. Justifique las respuestas*.

a.	b.
	



Leer las justificaciones dadas por los estudiantes para determinar cuáles son las condiciones que no se cumplen en las figuras de los literales b y c.

Entregar el problema 10 y la hoja correspondiente (archivo adjunto *hoja para el ejercicio 10.docx*).*

> *10. a. En la hoja entregada por la profesora, aplique a la figura ABCD una simetría axial con respecto a la recta m, nombrando la imagen de A con A', la de B con B', etc.*
>
> *b. Calque la figura A'B'C'D' obtenida y ubíquela en otra posición, manteniendo siempre la misma cara del papel calcante sobre la hoja. Sin importar la posición de la figura A'B'C'D', ¿existe una simetría axial para la cual es imagen de la figura ABDC?*

Aquí pueden encontrar que para cualquier posición elegida, los puntos medios de los segmentos que tienen extremos en puntos correspondientes son colineales pero no en todos los casos la recta que los contiene es perpendicular a los segmentos.

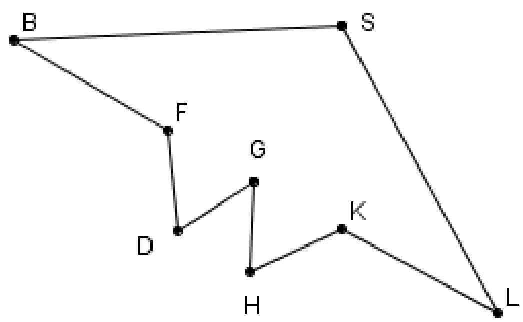
> *c. Determine si hay alguna posición de la figura A'B'C'D' para la cual exista una transformación simetría axial de tal manera que la figura A'B'C'D' sea la imagen de la figura ABCD. Describa su resultado.*
> *d. ¿Qué característica tiene el eje de simetría cuando las dos figuras forman un polígono?*

* Esta es la hoja final del Anexo A que se le entregó a la profesora en un archivo adjunto.

Orientar una discusión donde se vea que si la figura formada se considera como una sola figura (un polígono), este polígono tiene una característica especial: al aplicarle una simetría axial con respecto a la recta *m*, el polígono y su imagen coinciden.

Entregar la pregunta 11.

11. *¿Existe alguna recta de tal manera que al aplicarle al polígono la simetría axial respecto a esa recta, el polígono y su imagen coincidan? Justifique la respuesta*.



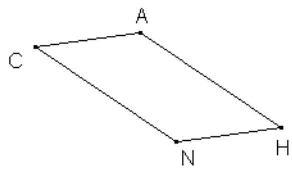
A partir de los ejercicios anteriores definir lo que significa que una figura tenga simetría axial.

Una figura tiene simetría axial si existe una recta tal que la imagen de la figura bajo la transformación simetría axial con respecto a esa recta es la misma figura.

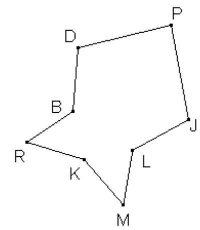
Entregar las preguntas 12 a 17.

12. *¿Es posible que en una simetría axial algún punto sea imagen de sí mismo? Justifique la respuesta*.
13. *Para cada una de las siguientes figuras, determine si tiene simetría axial. Justifique la respuesta*.

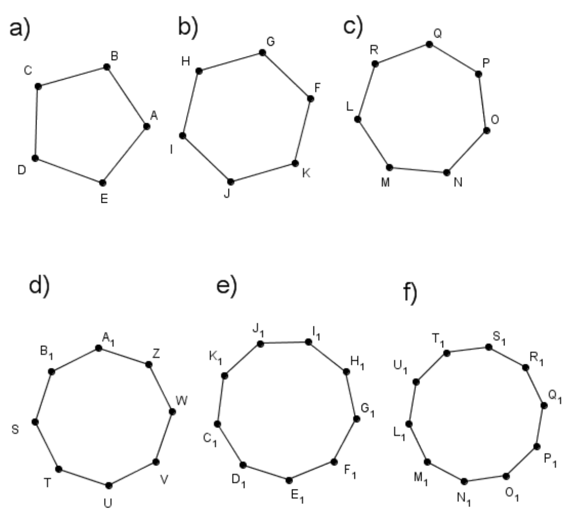
a.



b.



14. *Construya un polígono que tenga simetría axial. Explique los pasos seguidos en la construcción*.
15. *Para cada una de las siguientes figuras, determine si tiene simetría axial. Si la tiene, describa los ejes de simetría:*
    - *circunferencia*
    - *rectángulo*
    - *polígono regular*



16. *¿Existe algún triángulo que tenga simetría axial? Justifique la respuesta*.

Para el caso del rectángulo, discutir sobre el número de ejes de simetría cuando es cuadrado y cuando no es cuadrado.

Para el caso de los polígonos regulares, discutir las diferencias entre las características de los ejes de simetría para polígonos con un número par de lados y con un número impar de lados.

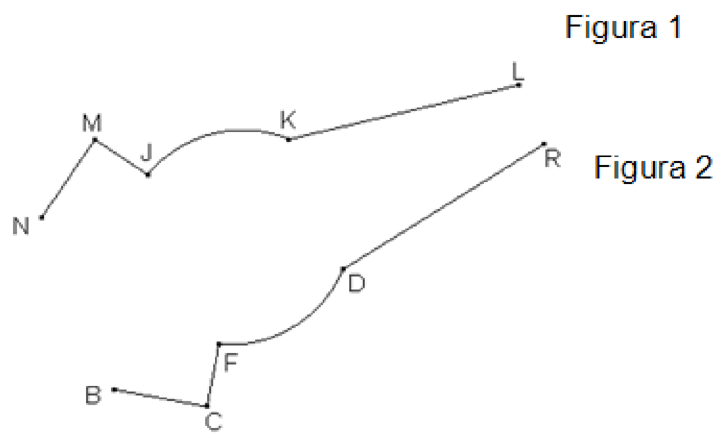
En el triángulo, discutir los casos de triángulos isósceles y escalenos.

ANEXO C

(Diseño final del Taller)

Parte 1

1. Compare las dos figuras. Encuentre semejanzas y diferencias entre las partes que componen cada figura.



2. Añada un trozo más a la Figura 1 a partir del punto *N*. Busque una manera de encontrar el trozo correspondiente en la Figura 2 y trácelo. Describa un proceso geométrico para encontrar el trozo correspondiente.
3. Considere la siguiente definición.

D. Una **transformación** es una correspondencia entre los puntos de un plano tal que:

i) todo punto del plano tiene imagen

ii) todo punto del plano es imagen de un punto del plano

iii) ningún par de puntos tienen la misma imagen

iv) ningún punto tiene dos imágenes

a) ¿Es posible considerar que la Figura 2 es imagen de la Figura 1 bajo alguna transformación *t*? Explique su respuesta.

b) Si su respuesta anterior es afirmativa, ¿cómo encontraría la imagen de un punto *X*, que no está en las figuras, bajo la transformación *t*?

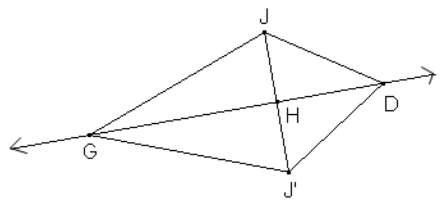
c) Escoja dos puntos cualesquiera *W* y *Y* en el plano que contiene las figuras anteriores, pero que no estén en ninguna de ellas. Para su caso, ¿es *Y* imagen de *W* bajo la transformación *t*? Justifique su respuesta.

d) ¿Existe una transformación similar *s* para que *Y* sea imagen de *W*? Justifique su respuesta.

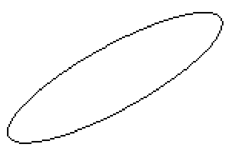
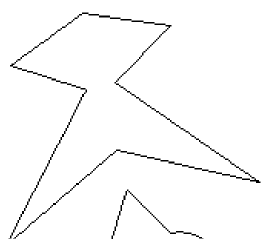
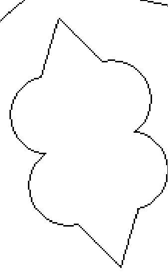
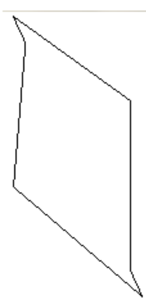
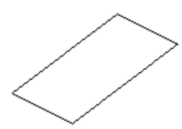
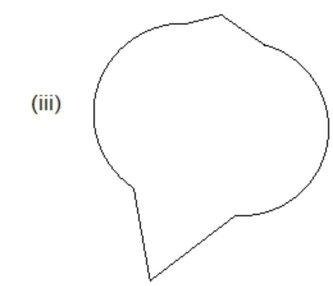
e) Defina la transformación *t*.

Parte 2

4. Si *M’* es la imagen de *M* bajo una transformación simetría axial respecto a una recta *r*, ¿es *M’* también la imagen de *M* bajo una simetría axial con respecto a otra recta *p*? Justifique su respuesta.
5. ¿Es posible que en una simetría axial algún punto sea imagen de sí mismo? Justifique la respuesta.
6. El punto *J’* es la imagen del punto *J* bajo la simetría axial respecto a $\overleftrightarrow{GD}$. Además, *J* y *J’* no pertenecen a la mediatriz del $\overline{GD}$. Justifique por qué el cuadrilátero *GJDJ’* es una cometa.



7. ¿Existen una figura geométrica y una recta *r* tal que la imagen bajo la simetría axial con respecto a la recta *r* de la figura geométrica sea **ella misma**? Explique su respuesta.
8.

Estas figuras tienen simetría axial	Estas figuras no tienen simetría axial
(a)  (b)  (c) 	(i)  (ii)  (iii) 

a. Defina figura con simetría axial.

Parte 3 (continuación ejercicio 8).

b. Para cada figura (a), (b), (c):
   - Explique por qué sí tiene simetría axial. ¿Tiene simetría axial con respecto a más de una recta?
   - Ilustre el eje o los ejes en la figura

c. Para cada figura (i), (ii) y (iii): explique por qué no tiene simetría axial.

9. ¿Existe algún triángulo que tenga simetría axial? Justifique la respuesta.
10. Geometría dinámica: Decida si la respuesta a la siguiente pregunta es Sí, No o No se sabe. Justifique su respuesta.
    Q es un polígono regular de *n* lados, $n \geq 4$. ¿Tiene Q *n* ejes de simetría?

ANEXO D

(Diseño final del Taller – Guía para la profesora)

TAREA SIMETRÍA AXIAL

Guía para la profesora

Materiales: Regla, compás, calculadoras*

El trabajo, que se hace por grupos, está dividido en cuatro partes de la siguiente manera:

Parte 1

Se entregan las preguntas 1, 2 y 3.

Cuando hayan respondido las preguntas 1, 2 y 3, la profesora interviene para decir que una transformación como la transformación *t* se llama simetría axial. Resaltar la importancia de la recta.

A partir de las definiciones escritas por los grupos en el literal e de la pregunta 3, escribir, con los aportes de los estudiantes, una definición de simetría axial. A continuación aparece la que proponemos, donde se incluye también la definición de eje de simetría.

> La simetría axial con respecto a la recta *r* es una transformación que a cada punto *A* del plano le hace corresponder un punto *A*' de tal manera que:
>
> - La recta *r* es perpendicular al segmento $\overline{AA'}$
> - Si *P* es el punto donde se intersecan la recta *r* y el segmento $\overline{AA'}$, entonces las distancias *AP* y *A'P* son iguales.
>
> La recta *r* recibe el nombre de eje de simetría.

Parte 2

Se entregan las preguntas 4 a 8.a. No se entrega completo el ejercicio 8 para no darles implícitamente la definición a través de las otras preguntas.

* Son calculadoras que tienen instalado un *software* de geometría dinámica.

Parte 3

Después de que los estudiantes hayan escrito su definición de figura con simetría axial, se entrega la hoja final (preguntas 8.b, 8.c, 9 y 10).

Parte 4

Cuando terminen, la profesora interviene y, a partir de los aportes de los estudiantes, se llega a una definición de figura con simetría axial. La definición propuesta es la siguiente:

> Una figura tiene simetría axial si existe una recta tal que la imagen de la figura bajo la transformación simetría axial con respecto a esa recta es la misma figura.

ANEXO E

RESUMEN DE LAS DOS CLASES

CLASE 1

Tareas 1 y 2. En la exploración el grupo de estudiantes utiliza los conceptos de circunferencia, segmentos perpendiculares y segmentos congruentes. Hay percepción del concepto de reflexión y la visualización juega un papel importante. Encuentran correspondencia entre puntos de la Figura 1 y puntos de la Figura 2 y congruencia de ángulos y de segmentos correspondientes. No escriben diferencias.

A los estudiantes les parece que los puntos *J*, *K*, *D* y *F* pertenecen a una misma circunferencia y que la Figura 1 es como el reflejo de la Figura 2. Ubican el compás en diferentes posiciones hasta que encuentran el centro de la circunferencia (punto *P*) que contiene los puntos *J*, *K*, *D* y *F*.

Por la figura sospechan que dos de los segmentos de la Figura 1 son perpendiculares. Para verificarlo utilizan la construcción de rectas perpendiculares, y como la Figura 2 es el reflejo de la Figura 1, concluyen que los segmentos correspondientes en la Figura 2 también son perpendiculares.

A partir de las propiedades encontradas, en el grupo concluyen que para trazar el trozo correspondiente en la Figura 2 deben copiar el ángulo y la longitud del segmento. Al añadir un trozo a la Figura 1 y tratar de construir el trozo correspondiente en la Figura 2 se equivocan y concluyen, a partir de la ubicación del trozo correspondiente, que hay un error porque este no quedó donde ellos esperaban. Al darse cuenta de su error, corrigen y construyen correctamente el trozo correspondiente.

Tarea 3.a. La Tarea 3.**a** aparece en el Taller después de la definición de transformación. Los estudiantes verifican que se puede considerar que la Figura 2 es imagen de la Figura 1 bajo una transformación porque hay una correspondencia entre los puntos y se cumplen todas las condiciones dadas en la definición de transformación. Sin embargo, uno de los estudiantes da un ejemplo donde hay una correspondencia entre puntos de dos figuras pero una no es la imagen de la otra según lo que han hecho hasta el momento. Sus compañeras le hacen ver que en este caso no funciona porque no está utilizando la misma transformación que están estudiando.

Tarea 3.b. Los estudiantes hallaron tres métodos para ubicar la imagen de un punto *X* que no está en las figuras. El primero es el método de copiar ángulos que utilizaron en la Tarea 2.

La profesora anima a los estudiantes a buscar relaciones entre un punto y su imagen para que puedan hallar el correspondiente de un punto cualquiera sin usar copia de ángulos. Para hacerlo, recurren al punto *P* encontrado en la Tarea 1. Utilizando un razonamiento inductivo, concluyen que un punto y su imagen siempre equidistan de *P*. Con la orientación de la profesora ven que el punto *P* no es el único para el cual se cumple esa relación y que *P* es el punto medio del segmento cuyos extremos son un punto en la Figura 1 y su imagen en la Figura 2. Toman otros dos segmentos cuyos extremos son un punto y su imagen y construyen la mediatriz de cada uno de ellos. De esta manera ven que todos los puntos medios de los segmentos con extremos en un punto y su imagen pertenecen a una misma recta que es perpendicular a esos segmentos. Para utilizar esta propiedad, deciden trazar la perpendicular por *X* a la recta que contiene los puntos medios de los segmentos y hallar su intersección con la circunferencia de centro *P* y radio *PX*. Este es un segundo método para hallar la imagen de un punto cualquiera.

La profesora les propone hallar otro método para ubicar la imagen de *X* sin usar el punto *P*. Trazan la perpendicular por *X* a la recta que contiene los puntos medios de los segmentos y luego copian la distancia de *X* a la recta para ubicar *X’*. Este es un tercer método para hallar *X’*, que fue el que escribieron como respuesta.

Tarea 3.c. En la solución de esta tarea la profesora orienta un proceso de argumentar para definir y de construcción de las condiciones para la definición. El uso de las palabras *tendría* y *debería* [380, 382], muestra que los estudiantes tienen clara la necesidad de las dos condiciones que están mencionando y que harán parte de la definición.

Los estudiantes ubican dos puntos *W* y *Y* y dicen que *Y* no es imagen de *W* bajo la transformación *t* porque $\overleftrightarrow{YW}$ no es perpendicular a *l* y los puntos *Y* y *W* no equidistan de *l*.

Tarea 3.d. Para hallar una transformación bajo la cual *Y* sea imagen de *W* piensan en que $\overleftrightarrow{YW}$ debe ser perpendicular a *l* y que la distancia de *Y* y *W* a la recta *l* debe ser la misma, pero no saben qué hacer porque esas condiciones no se cumplen. Cuando la profesora les aclara que se trata de buscar una transformación similar *s*, que no tiene que ser la misma transformación *t*, ven que en ese caso tendrían que encontrar otra recta que pase por el punto medio de $\overline{YW}$ y que sea perpendicular a ese segmento. Construyen la mediatriz del segmento y de esa manera *Y* es imagen de *W* bajo la transformación definida por la recta construida.

Tarea 3.e. Para definir la transformación *t* deciden escribir las características que han encontrado:

Una transformación *t* es una correspondencia entre los puntos del plano tal que:

- Existe una recta *l* que contiene los puntos medios de los segmentos cuyos extremos son un punto y la imagen de este.
- Los segmentos deben ser perpendiculares a la recta *l*.

Socialización de la primera parte. La profesora formula preguntas para obtener información relevante para la construcción de la definición de simetría axial. En primer lugar se refieren a las semejanzas y diferencias de las figuras en la Tarea 1. La profesora muestra en el tablero un método usado por todos los grupos para añadir el trozo correspondiente a la figura, que consistió en copiar ángulos. Luego lee la definición de transformación y les hace ver a los estudiantes que se trata de una función biyectiva. Concluyen que la Figura 2 es imagen de la Figura 1 bajo una transformación *t* porque cumple las condiciones dadas en la definición de transformación.

La profesora menciona que para responder la tarea 3.**b** todos los grupos pensaron inicialmente en unir el punto *X* con la Figura 1 a través de un segmento y copiar en la Figura 2 el ángulo formado. Uno de los estudiantes explica en el tablero otro método que usaron para hallar *X'* sin copiar ángulos. Utilizan en la construcción la recta que contiene los puntos medios de los segmentos cuyos extremos son un punto y su imagen. Reconocen esta recta como la mediatriz de los segmentos y la profesora concluye que dados un punto y su imagen, para poder encontrar esa recta se construye la mediatriz del segmento determinado por el punto y su imagen. Luego resume un método para hallar la imagen de *X* dada una recta, que consiste en trazar la perpendicular la recta por *X* y copiar en el otro semiplano la distancia de *X* al punto de intersección de las dos rectas. Finalmente concluyen que dada una recta $\overleftrightarrow{AB}$ y dos puntos cualesquiera *W* y *Y*, para determinar si *Y* es imagen de *W*, se requiere verificar dos condiciones: *W* y *Y* son equidistantes de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overline{WY} \perp \overleftrightarrow{AB}$.

Las profesora lee las definiciones de la transformación *t* escritas por los estudiantes y se refiere a que todos tienen la idea de la recta perpendicular y del punto medio, dice que esa transformación se llama simetría axial y que lo importante para tener simetría axial es que haya una recta que va a ser la mediatriz de todos los segmentos determinados por un punto y su imagen. Luego, da la definición de simetría axial y termina la clase.

CLASE 2

Tarea 4. Los estudiantes dicen que *M'* puede ser imagen de *M* bajo una transformación simetría axial respecto a otra recta *p* si esta recta cumple las condiciones dadas en la definición de simetría axial. No se dan cuenta de que en este caso *r* y *p* son la misma recta.

Tarea 5. En esta tarea los estudiantes dicen que un punto es imagen de sí mismo si pertenece al eje de simetría. Cuando van a representar gráficamente la situación con un ejemplo, la construcción queda mal hecha y por el dibujo se dan cuenta de que la recta trazada no es eje de simetría de la figura.

Tarea 6. Para responder esta tarea buscan en sus cuadernos las definiciones de cometa y de mediatriz de un segmento; sin embargo, la definición de cometa que tienen no es correcta porque se refiere a dos lados adyacentes congruentes y no a dos pares de lados adyacentes congruentes. La profesora da la instrucción de no hacer la demostración completa porque no hay tiempo sino solo decir los pasos generales para hacerla.

A partir de la definición de simetría axial concluyen que hay dos pares de lados adyacentes congruentes y que el eje de simetría es la mediatriz de $\overline{JJ'}$. Como la definición de cometa que tienen es incorrecta, consideran que para probar que el cuadrilátero es una cometa es suficiente probar que hay un par de lados adyacentes congruentes y un par de lados opuestos no congruentes. Con la orientación de la profesora ven que además hay que probar que dos pares de lados adyacentes son congruentes, aunque no mencionan la necesidad de probar que los dos pares de lados opuestos no son congruentes.

Para probar que hay un par de lados adyacentes congruentes ($\overline{JD}$ y $\overline{J'D}$) primero prueban que $\angle JHD \cong \angle J'HD$, por definición de rectas perpendiculares. Luego prueban que $\overline{JH} \cong \overline{J'H}$ por definición de punto medio de un segmento. Finalmente, mencionan que $\overline{DH}$ es congruente con él mismo. Dicen que por el Criterio lado-ángulo-lado concluyen que $\overline{JD}$ y $\overline{J'D}$ son congruentes y no mencionan el paso intermedio que hay para llegar a esta conclusión. Luego prueban que hay otro par de lados adyacentes ($\overline{JG}$ y $\overline{J'G}$) siguiendo pasos similares al caso anterior. Allí terminan la demostración y no prueban la no congruencia de los lados opuestos ni escriben una conclusión general.

Tarea 7. Para responder esta tarea los estudiantes tienen dificultad con la interpretación de lo que significa que una figura sea ella misma. Se preguntan si un segmento es una figura geométrica y como consideran que no, no saben cómo responder la pregunta. Cuando miran las figuras con simetría axial de la Tarea 8.a dicen que al ubicar un eje de simetría se obtiene la misma figura pero al revés. Parece que están entendiendo que la misma figura se refiere a una figura congruente con la inicial, pero no necesariamente formada por los mismos puntos. Uno de los estudiantes no está de acuerdo porque dice que puede que sea una figura congruente con la inicial, pero no es la misma. Al parecer, él entiende que ser la misma figura significa estar formada por los mismos puntos. Luego este estudiante da otro argumento para defender su idea y dice que si utilizan la conclusión de la Tarea 7, la única posibilidad para que un punto sea imagen de sí mismo es que pertenezca al eje de simetría, pero en ese caso no habría ninguna figura que sea imagen de sí misma –solo segmentos o rayos que no los consideran figuras–. Al parecer piensan que la única manera para que una figura sea imagen de sí misma es que cada punto sea imagen de sí mismo. Como no se ponen de acuerdo en estas dos interpretaciones de lo que significa ser la misma figura, la profesora los orienta para que vean que si toman un lado de la figura y le hallan las imágenes y luego toman el otro lado y le hallan las imágenes, van a obtener la figura completa, la misma figura inicial. Finalmente dicen que si le hallan las imágenes a una figura y luego las imágenes a las imágenes, se forma la figura completa.

Tarea 8.a. Cuando los estudiantes pasan a esta tarea no establecen relación alguna con el resultado de la tarea anterior. Una de las estudiantes dice que una figura tiene simetría axial si cada punto tiene la imagen que le corresponde según la simetría axial. Aunque señalan el punto imagen en la figura, no dicen explícitamente que este punto también está en la figura. Finalmente escriben que una figura tiene simetría axial si dado un eje de simetría, a cada punto *A* de la figura le corresponde un punto *A'* que es su imagen (no mencionan que *A'* también es un punto de la figura).

Socialización de la Parte 2. Esta socialización no estaba planeada. La división del trabajo en las Partes 2 y 3 se hizo para separar la entrega de las tareas. En la Tarea 4, cuatro grupos dicen que no es posible porque la recta es única o porque en las rectas *p* y *r* tendrían que ser iguales. El grupo de Julia, Sonia y Felipe dice que sí si la recta *p* cumple las condiciones dadas en la definición de simetría axial, pero no se dan cuenta de que en ese caso las dos rectas serían la misma. Otro grupo dice que sí si la recta *p* es perpendicular al segmento (no mencionan más condiciones). La profesora retoma la idea de uno de los grupos y concluye que *r* y *p* tienen que ser la misma recta porque dada una recta y un punto sobre ella, existe una única recta que es perpendicular por ese punto.

Luego la profesora lee las respuestas que dieron a la Tarea 5. Uno de los grupos asume que cuando la definición de transformación dice que cada punto del plano tiene imagen, esa imagen debe ser distinta del punto original. En otros dos grupos consideran que si A y A' fueran el mismo punto, no sería posible trazar $\overleftrightarrow{AA'}$ (o $\overline{AA'}$). La cuarta respuesta recoge los planteamientos de las tres anteriores. Los otros dos grupos encuentran la condición para que un punto sea imagen de sí mismo.

Después de leer las respuestas, la profesora retoma la definición de transformación dada en la Parte 1 del Taller y concluye que si todo punto del plano tiene imagen, también la deben tener los puntos que pertenecen al eje de simetría y que la imagen de un punto P en el eje es el mismo punto P. Luego dice que la definición de simetría axial que se dio sí se cumple pero solo para puntos que no pertenezcan a la recta y que si el punto pertenece a la recta, su imagen va a ser él mismo. Finalmente muestra que si en esta pregunta la respuesta es negativa, no sería posible, entonces, que una figura fuera imagen de sí misma porque los puntos sobre el eje no tendrían imagen.

Un estudiante pasa al tablero y resuelve la Tarea 6. Utiliza el Criterio lado-ángulo-lado para mostrar la congruencia de dos pares de lados adyacentes. Luego demuestra la no congruencia de los lados opuestos usando el que él llama hecho geométrico de la mediatriz y concluye que el cuadrilátero es cometa.

Finalmente, la profesora leyó las definiciones que dieron los grupos de figura con simetría axial. Uno de los grupos escribió: “Una figura tiene simetría axial si y solo si bajo una transformación con respecto al eje de simetría cada punto tiene una única imagen tal que la figura formada es imagen de sí misma”. Al leer la definición podría creerse que los estudiantes están pensando en que la imagen de la figura completa es ella misma. Sin embargo, después de la explicación dada por una de las integrantes del grupo queda claro que ellos estaban pensando en que la imagen de una parte de la figura (a un lado del eje de simetría) es la misma figura, pero reflejada. No están pensando en la figura completa. Luego la profesora aclara que en una figura con simetría axial, las imágenes forman la misma figura original, pero no se da una definición formal.

Después de la socialización se reparte la hoja con la Parte 3 y otra hoja con algunos polígonos regulares que será utilizada en la Tarea 10, ya que no se dispone de geometría dinámica para resolverlo.

Tarea 8.b. Cuando en el grupo leen la tarea 8.b, Julia dice que no es posible que una figura tenga simetría axial con respecto a más de una recta porque según la conclusión de la Tarea 4, las rectas *p* y *r* tienen que ser la misma –aquí está confundiendo que una figura tenga simetría axial con respecto a dos rectas con que un punto sea imagen de otro respecto a dos rectas diferentes–. Felipe le explica que sí es posible y redactan la respuesta.

Tarea 8.c. En esta tarea los estudiantes dicen que las tres figuras no tienen simetría axial porque no todo punto del plano tiene imagen. Aquí se esperaba que pudieran ver que es posible definir una trasformación de manera que cada punto de la figura tenga imagen en la misma figura, pero que en ese caso alguna de las dos condiciones de la definición de simetría axial no se cumple; sin embargo, no llegaron a esta conclusión. Julia pensó en considerarlo, pero se olvidó del asunto y en lugar de acudir a la definición, recurrió a las propiedades que encontraron en la primera tarea y vio que las partes "correspondientes" no eran congruentes y, en general, la parte a un lado del posible "eje" no era congruente con la parte al otro lado.

Tarea 9. Inicialmente dicen que el triángulo rectángulo, el equilátero y el isósceles tienen simetría axial, pero no lo justifican. Luego, ven que al trazar una de las medianas en un triángulo isósceles y la recta que la contiene, se determinan dos triángulos congruentes. En la justificación de la respuesta no acuden a la definición de figura con simetría axial sino que se refieren a una de las propiedades que encontraron antes.

Tarea 10. Felipe trazó los ejes de simetría en los polígonos de 4, 5, 6 y 7 lados, contó los del octágono regular (sin trazarlos) y concluyó que sí se cumplía que el número de lados coincide con el número de ejes de simetría. Cuando tratan de justificarlo, piensan en mencionar el punto de corte de los ejes, pero se olvidan de la idea. Se dan cuenta de que cuando el número de lados del polígono es impar, el eje de simetría contiene al punto medio de un lado y el vértice opuesto, y cuando el número de lados es par, $n/2$ ejes (siendo *n* el número de lados del polígono) pasan por dos vértices y los otros por dos puntos medios de los lados. Deciden tomar un caso particular (el hexágono regular) y mostrar que la mitad de los ejes cumple una de las condiciones encontradas y la otra mitad cumple la otra condición.

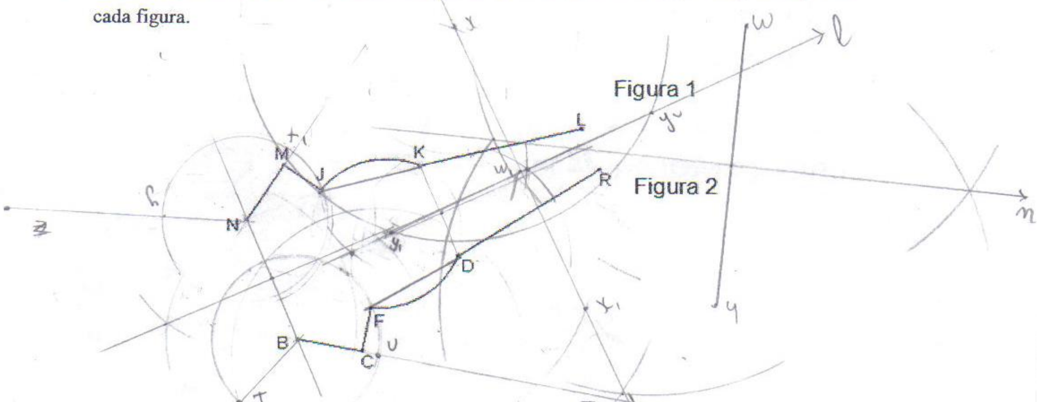
Socialización de la tercera parte. En la socialización de esta parte, la profesora pregunta por el número de ejes de simetría de las figuras **a**, **b** y **c**. Como el tiempo de la clase ya se está acabando, pasa directamente a dar la definición de figura con simetría axial y termina la clase.

ANEXO F

RESPUESTAS DADAS POR EL GRUPO ANALIZADO*

Parte 1

1. Compare las dos figuras. Encuentre semejanzas y diferencias entre las partes que componen cada figura.



2. Añada un trozo más a la Figura 1 a partir del punto N. Busque una manera de encontrar el trozo correspondiente en la Figura 2 y trácelo. Describa un proceso geométrico para encontrar el trozo correspondiente.
3. Considere la siguiente definición.

   D. Una **transformación** es una correspondencia entre los puntos de un plano tal que:
   i) todo punto del plano tiene imagen
   ii) todo punto del plano es imagen de un punto del plano
   iii) ningún par de puntos tienen la misma imagen
   iv) ningún punto tiene dos imágenes

   a) ¿Es posible considerar que la Figura 2 es imagen de la Figura 1 bajo alguna transformación t? Explique su respuesta.
   b) Si su respuesta anterior es afirmativa, ¿cómo encontraría la imagen de un punto X, que no está en las figuras, bajo la transformación t?
   c) Escoja dos puntos cualesquiera W y Y en el plano que contiene las figuras anteriores, pero que no estén en ninguna de ellas. Para su caso, ¿es Y imagen de W bajo la transformación t? Justifique su respuesta.
   d) ¿Existe una transformación similar s para que Y sea imagen de W? Justifique su respuesta.
   e) Defina la transformación t.

*Los nombres de los estudiantes fueron borrados.

Video

Parte 1

(1) semejanzas

- Arco JK (Fig 1) y arco FO (Fig 2) pertenecen $\odot P, r$.
- $\overline{MJ} \perp \overline{MN}$ y $\overline{CF} \perp \overline{BC}$
  Fig 1 Fig 2
- $\overline{KL} \cong \overline{OR}$
- $\overline{MN} \cong \overline{BC}$
- $\overline{FC} \cong \overline{JM}$
- $\overline{NZ} \cong \overline{BW}$

(2) Pasos

1. $\overline{NZ}$
2. $\overrightarrow{NM}$
3. $\overleftrightarrow{BC}$
4. $\odot N, r$
5. $X, Y \in \odot N, r \cap \angle MNZ$
6. $\odot B, r$
7. $U \in \odot B, r \cap \overrightarrow{BC}$
8. $\odot U, XY$
9. $T \in \odot U, XY \cap \odot B, r$
10. $\overrightarrow{BT}$
11. $W \in \overrightarrow{BT}$; $BW = NZ$ 12. $\overline{BW} \cong \overline{NZ}$

3 a. Es posible considerar que la Figura 2 es imagen de la figura 1 ya que si se encuentra un punto correspondiente en la figura 1, entonces existe una transformación t que cumple las condiciones de la definición.

b. Trazando el segmento entre un punto y su punto correspondiente, luego hallando el punto medio de este, realizando el mismo procedimiento con los demás puntos correspondientes, obtuvimos una recta que contiene a los puntos medios de estos segmentos, la cual es perpendicular a los segmentos.
Dado un punto x encontramos la perpendicular a la recta, que pasa por ese punto, donde w_1 pertenece a la intersección entre la recta que contiene a los puntos medios y la perpendicular a ella. Finalmente se toma la medida de w_1 hasta x y se copia

c. y no es imagen de w ya que w y y no equidistan de la recta l y $\overleftrightarrow{wy}$ no es perpendicular a l.

d. Si existe. Trazar $\overline{wy}$, encontrar el punto medio y trazar una recta que sea perpendicular a $\overline{wy}$ y pase por este punto.

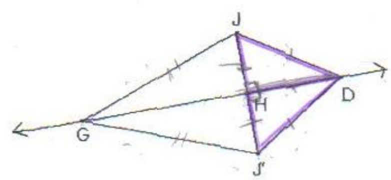
e. Transformación t:
Una transformación t es una correspondencia entre los puntos de un plano tal que:

✓ Existe una recta l que contiene los puntos medios de los segmentos cuyos extremos son un punto y la imagen de este.

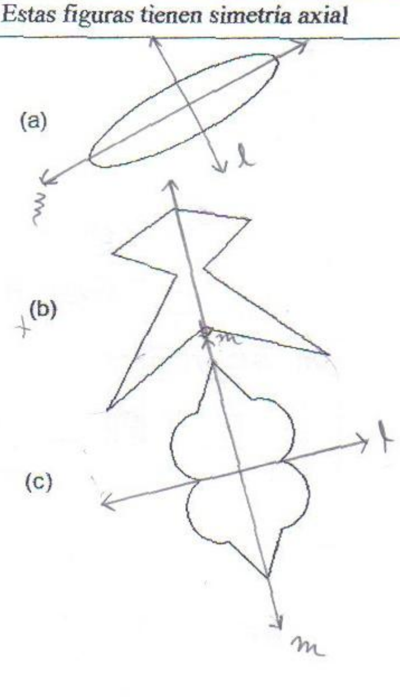
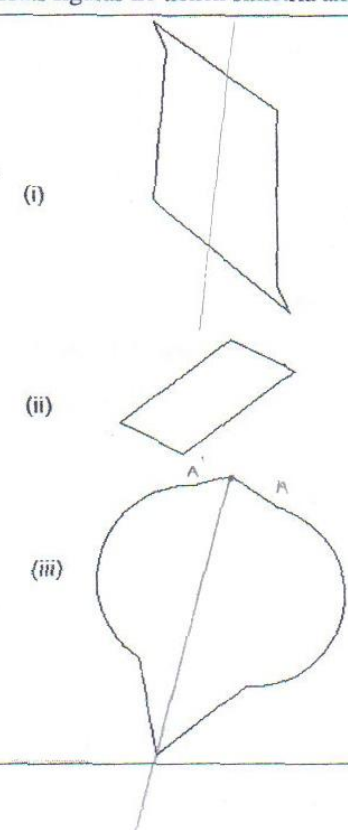
✓ Los segmentos deben ser perpendiculares a la recta l.

Parte 2

4. Si M' es la imagen de M bajo una transformación simetría axial respecto a una recta r, ¿es M' también la imagen de M bajo una simetría axial con respecto a otra recta p? Justifique su respuesta.
5. ¿Es posible que en una simetría axial algún punto sea imagen de sí mismo? Justifique la respuesta.
6. El punto J' es la imagen del punto J bajo la simetría axial respecto a $\overleftrightarrow{GD}$. Además, J y J' no pertenecen a la mediatriz del $\overline{GD}$. Justifique por qué el cuadrilátero $GJDJ'$ es una cometa.



7. ¿Existen una figura geométrica y una recta r tal que la imagen bajo la simetría axial con respecto a la recta r de la figura geométrica sea **ella misma**? Explique su respuesta.
8.

Estas figuras tienen simetría axial	*Estas figuras no tienen simetría axial*
	

a. Defina figura con simetría axial.

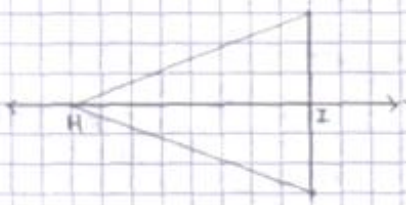
Parte 2.

(4) M' es tambien imagen de M bajo una simetria axial

- Si $p \perp \overline{MM'}$
- Si x es el punto de intersección entre p y $\overline{MM'}$ entonces $MX = XM'$.

(5) → Es posible si:

i El punto pertenece al eje de simetria



H es imagen de H con respecto a $\overleftrightarrow{HI}$.

(6) ✓ Demostrar que $\overline{JO} \cong \overline{J'O}$ ✓ ΔJHO y $\Delta OHJ'$

✓ $\angle H$ recto → $\angle H \cong \angle H$

✓ Por definición de mediatriz, H es punto medio de $\overline{JJ'}$

✓ $\overline{JH} \cong \overline{J'H}$

✓ $\overline{HO} \cong \overline{HO}$

✓ Por criterio LAL, $\overline{JO} \cong \overline{J'O}$

✓ Analogamente para los triangulos

- ΔJGH
- $\Delta J'GH$.

- $\angle H \cong \angle H$ • $\overline{HG} \cong \overline{HG}$
- $\overline{JH} \cong \overline{J'H}$ Por criterio LAL $\overline{GJ} \cong \overline{GJ'}$

(7) Si existe, ya que al hallar las imágenes de cada lado del eje de simetría, se obtiene la misma figura. Es decir, si tenemos una figura A y hallamos la imagen de cada uno de sus puntos (A') y luego tomamos a A' como figura y hallamos la imagen de cada uno de sus puntos, las imágenes anteriores van a ser A.

(8) Figura con simetría axial: una figura tiene simetría axial si:

a. ✓ Cada r como eje de simetría, a cada punto A de la figura le corresponde un punto A' que es su imagen.

Parte 3.

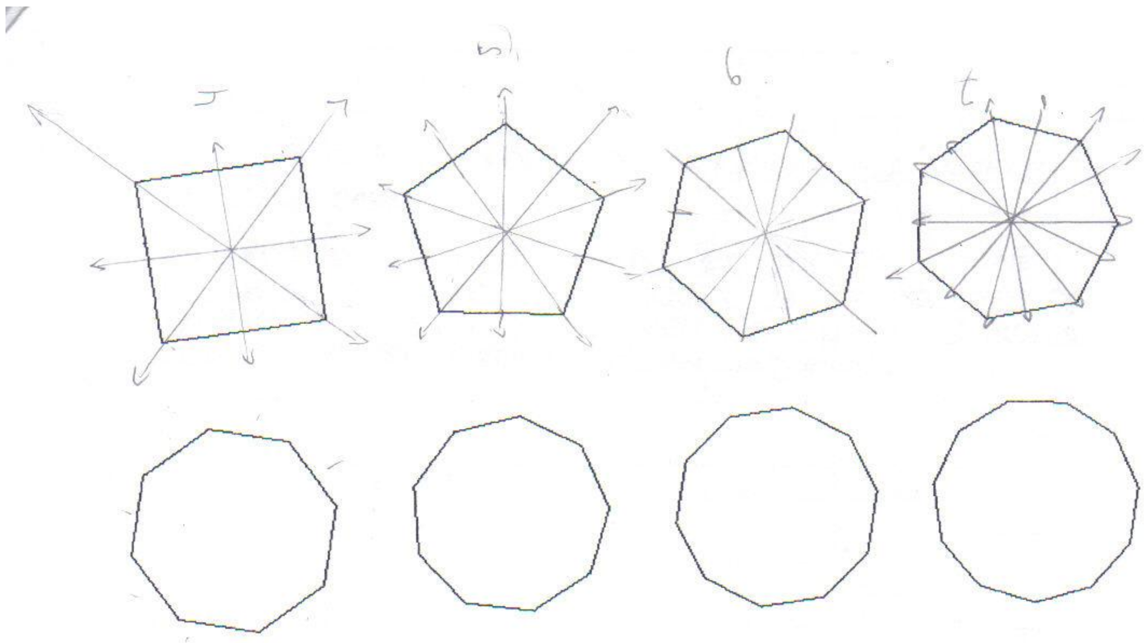
b. Para las figuras a, b, c se cumple que:

✓ Cada una recta r como eje de simetría, al hallar las imágenes de la figura que está en una de las semiplanos determinados por la recta r, sus imágenes van a ser igual que la otra parte de la figura, y si se hace lo mismo con la otra parte de la figura las imágenes resultantes junto con las anteriores van a formar la misma figura inicial.

✓ Las figuras a y c tienen simetría axial con respecto a más de una recta.

c. Cada una recta r como eje de simetría no se cumple que la distancia de A a r y de A' a r sea la misma y que el eje de simetría sea mediatriz de la figura.

(9) El triángulo equilátero y el triángulo isósceles. Ya que al trazar la mediana y una recta que la contenga (eje de simetría) se determinan 2 triángulos congruentes que comparten la mediana, como uno de sus lados.



(10). Debido a que son polígonos regulares, los segmentos son congruentes,

Cuando el número de lados es par, por ejemplo en un polígono de 6 lados, 3 de los ejes de simetría pasarán por los vértices y los otros 3 por los puntos medios de los segmentos.

ANEXO G

TRANSCRIPCIÓN

En este anexo aparece la transcripción del trabajo hecho por el grupo analizado y de los momentos de socialización liderados por la profesora, durante las dos clases empleadas para resolver el Taller.

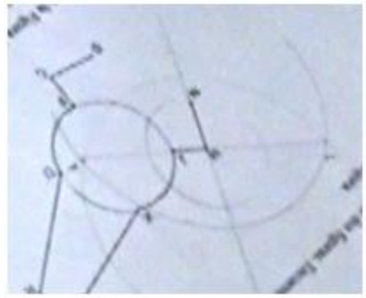
CLASE 1

Los estudiantes se organizaron en cinco grupos de tres y un grupo de dos estudiantes. Se repartieron las hojas con la Parte 1 del Taller y la profesora leyó todas las instrucciones. Luego, comenzaron el trabajo por grupos. Los estudiantes del grupo leen la Tarea 1 y se quedan en silencio; estaban un poco nerviosos y no se atrevían a hablar.

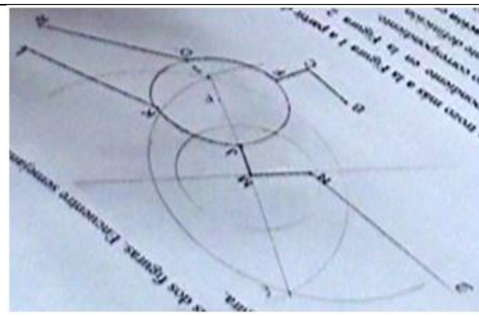
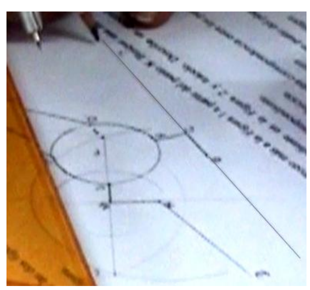
1.	Felipe:	¿No te parece que *J*, *K*, *F*, *D* pertenecieran a una misma circunferencia? Digamos que una circunferencia con centro acá [señala el punto que considera que podría ser el centro de la circunferencia mencionada] [Silencio].
2.	Profesora:	Bueno, sin ponerse nerviosos, hagan de cuenta que Andrea [la camarógrafa] no está ahí.
3.	Julia:	No, es que no entendemos.
4.	Felipe:	Es que no entendemos bien.
5.	Profesora:	Entonces, dice: [leyendo] *Compare las dos figuras. Encuentre semejanzas*, en qué se parecen las figuras, *y diferencias entre las partes que componen cada figura*. Entonces, tienen la Figura 1 aquí arriba y tienen la Figura 2 aquí abajo [señala las dos figuras]. ¿Cuáles son las cosas en las que se parecen y cuáles son las diferencias?
6.	Julia:	Pues es que esta [señala la Figura 1] es como el reflejo de esta [señala la Figura 2], o sea… pero… [silencio].
7.	Profesora:	¿Qué más?
8.	Julia:	Lo que estabas diciendo tú, ¿no? [se dirige a Felipe].
9.	Felipe:	Sí, parece como si *J*, *K*, *F* y *D* pertenecieran a… o sea, fueran puntos equidistantes a una circunferencia, como con centro acá [señala el posible centro]. Es como si hubiera una circunferencia acá [mueve el lápiz sobre la figura mostrando la posible circunferencia].
10.	Profesora:	Ustedes tienen regla, tienen compás. Obviamente la regla no es para

		usarla con los centímetros, sino para otra cosa, ¿cierto? Pero tienen el compás que les permitiría verificar esas cosas que está diciendo Felipe.
11.	Felipe:	Ok.
12.	Julia:	Bueno y aquí, ¿cómo hacemos para buscarle centro a esto? [trata de ubicar el compás de manera que pueda hacer la posible circunferencia a la que se refieren. Sonia toma el compás y lo ubica en un posible centro. Intenta hacer la circunferencia pero ve que no funciona. Va modificando la ubicación del compás hasta que encuentra una que le funciona y comienza a trazar la circunferencia].
13.	Felipe:	¡Ahí es! Entonces, ¿sí ve que sí? Tenía algo de razón.
14.	Sonia:	[Termina de trazar la circunferencia] Sí, tenías razón.
15.	Julia:	[Toma el compás y retiñe la circunferencia] Ahí para que se vea mejor. 
16.	Sonia:	Aquí parece que en algún punto se intersecan [muestra los segmentos *KL* y *DR* y el posible punto de intersección de las rectas que los contienen]. Lo mismo aquí [señala los segmentos *MN* y *BC* y el posible punto de intersección de las rectas que los contienen].
17.	Felipe:	Ajá.
18.	Julia:	Y estas también [señala los segmentos *MJ* y *CF* y el posible punto de intersección de las rectas que los contienen].
19.	Sonia:	Y esta es perpendicular a esta [señala los segmentos *MN* y *MJ*. Sin hacer más comentarios, también señala los segmentos *BC* y *CF*].
20.	Julia	Parece.
21.	Sonia:	Sí, pero si es exactamente, o sea, no se sabe.
22.	Felipe:	Pues hagámosle. Miremos a ver si sí son perpendiculares [Julia busca otra hoja] ¿Ahí en esa misma no se puede?
23.	Sonia:	Sí.
24.	Julia:	Sí, pues hagámosle ahí. ¿Cómo sería?
25.	Felipe:	Mira [toma la hoja y una escuadra]. Acá podríamos trazar esto como una recta [traza la recta *MN*]. Préstame esto un momentico [toma el compás, lo ubica en el punto *M* y comienza a trazar la circunferencia con radio *MN*]
26.	Julia:	Ah, ya, sí.
27.	Felipe:	¿Sí? ¿Ahora sí me entiendes? [termina de trazar la circunferencia] Eh…

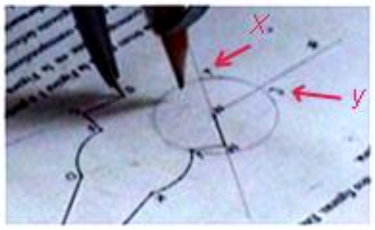
		pues no sé para qué lo hicimos. No sé, puede ser. 
28.	Sonia:	Ahora sería con esta, ¿no? O sea, ¿de centro acá? [señala el punto de intersección de la recta *MN* y la circunferencia con centro en *M* y radio *MN*, que no es *N*]. 
29.	Felipe:	¡Tengo un pulso! Divino [retiñe la circunferencia que hizo].
30.	Julia:	¿Qué? ¿Cómo es que es?
31.	Sonia:	Digamos, se hace esta, ¿no? [señala el punto mostrado anteriormente] Circunferencia con centro en este…
32.	Julia:	Ah, y con radio mayor que ese.
33.	Sonia:	Sí.
34.	Julia:	Ábrelo un poquito más [se refiere al compás].
35.	Felipe:	Ahí, ahí ya está [le pasa el compás a Julia].
36.	Julia:	Lo ponemos acá [comienza a trazar un circunferencia con centro en el punto mencionado por Sonia]. ¡Uy no! [se detiene]
37.	Felipe:	Sí, sí, sí, dale [Julia continúa trazando la circunferencia]. Luego, la intersección de esas dos circunferencias.
38.	Julia:	Ajá. Sí [ubica el compás en el punto *N* y comienza a trazar una circunferencia con el mismo radio anterior].
39.	Sonia:	Y se traza la perpendicular.
40.	Felipe:	Y si pues las dos, o sea, si la recta que vamos a hacer y el segmento coinciden, entonces sí son perpendiculares [Julia termina de trazar la circunferencia]. Listo, ahora, tracemos acá. Este punto llamémoslo… *E* [escribe *E* a uno de los puntos de intersección de las circunferencias] *Y* a este punto llamémoslo… no sé…
41.	Julia:	*J*.
42.	Felipe:	Sí. *J* [llama *J* al otro punto de intersección de las circunferencias. Toma la escuadra y traza la recta que pasa por los puntos de intersección de las

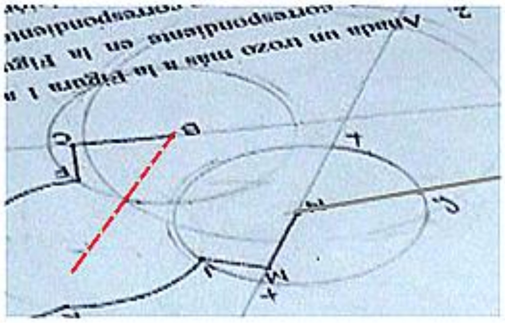
		dos circunferencias] Y… pues sí, sí son perpendiculares. 
43.	Sonia:	Entonces, la otra [señala la Figura 2], como es el reflejo, también.
44.	Felipe:	Sí. Si son el reflejo, entonces también serán perpendiculares [silencio]. ¿Sí?
45.	Julia:	Ajá.
46.	Felipe:	Listo. Entonces, anotemos eso.
47.	Julia:	¿Tienes hojas?
48.	Felipe:	¿Cuadriculadas? Sí [saca una hoja cuadriculada y se la pasa a Sonia].
49.	Sonia:	[Escribe los nombres de los tres estudiantes en la hoja] Entonces, ¿semejanzas?
50.	Julia:	Entonces, ¿esto qué es? [señala el arco *DF*] ¿Sí se puede decir arco? Sí.
51.	Sonia:	Sí.
52.	Julia:	Entonces, que pertenecen a una misma circunferencia con centro *P* [señala los arcos *JK* y *FD* y el punto *P*]. Entonces pon ahí de la Figura 2 y pon de la Figura 1 [señala los arcos *FD* y *JK* mientras Sonia escribe en la hoja].
53.	Julia:	Ahora acá [señala los segmentos]. *MJ* es perpendicular a…
54.	Sonia:	Perpendicular a *MN*.
55.	Felipe:	Pero… una pregunta. ¿La congruencia de segmentos…? ¿También se pueden sacar con el compás?
56.	Julia:	Claro.
57.	Felipe:	Ah sí claro, o sea, tomando la medida del compás. Es que no estaba seguro de eso.
58.	Julia:	Y estos también son perpendiculares [señala los segmentos *BC* y *FC*. Sonia escribe las semejanzas en la hoja de respuestas].
59.	Profesora:	Bueno, ¿ya hicieron el otro…?
60.	Julia:	¿El otro trozo? No, estábamos mirando las características de estos [señala los segmentos *MJ*, *MN* y sus imágenes].
61.	Profesora:	Ok. Bueno, ¿y qué relación hay entre esas dos figuras? [Silencio]

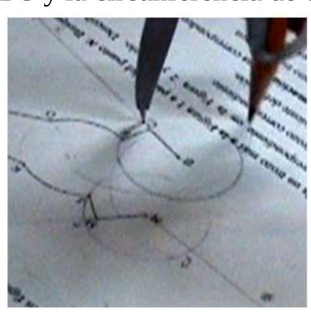
62.	Julia:	Pues aquí, lo que estábamos diciendo, es que es como si fuera una sola figura… Es que es como reflejada, eso es lo que se ve así a… Y pues sí porque mirando digamos los segmentos y eso, son los… los mismos, o sea tienen congruencia los segmentos.
63.	Profesora:	O sea, debe haber una relación entre los puntos de la Figura 1 y los puntos de la Figura 2. ¿Qué relación?
64.	Felipe:	Son congruentes.
65.	Profesora:	¿Los puntos?
66.	Sonia:	Es que al prolongar las líneas se forma una sola.
67.	Profesora:	¿Cómo?
68.	Sonia:	Al prolongar las líneas se formaría una sola figura.
69.	Profesora:	No necesariamente tengo que cerrar la figura. El siguiente trozo que ustedes hagan puede cerrar la figura como puede que no.
70.	Julia:	O sea, ¿el trozo puede ser cualquiera?
71.	Profesora:	Cualquiera [silencio].
72.	Julia:	¿Qué trozo hacemos entonces ahí?
73.	Felipe:	¿A partir del punto *N*? Ok.
74.	Julia:	Pero, ¿cuál hacemos? Pero tiene que ser un punto *N* a la misma Figura [señala la Figura 1] o…
75.	Profesora:	Un trozo cualquiera [silencio].
76.	Julia:	Bueno, ¿este *NJ* podría ser? [toma la escuadra y traza el segmento *NJ*].
77.	Profesora:	Ajá [silencio]. No, haz otro trozo, que no sea *NJ*.
78.	Julia:	¿Uno por acá? [señala a partir de *N* hacia el lado izquierdo de la hoja].
79.	Profesora:	Ajá. Sí porque quiero ver cómo vas a encontrar… o sea, ya sabemos que *J*, ¿se corresponde con quién?
80.	Julia:	Con *F*.
81.	Profesora:	Y *N* se corresponde con…
82.	Felipe:	Con *B*.
83.	Profesora:	O sea que si yo hago ese trozo [señala el segmento *NJ*], pues ya sé cuál es el que se corresponde.
84.	Julia:	¿Acá? [ubica la escuadra en otra posición y traza un segmento con extremo en *N*]. ¿Podría ser así?
85.	Profesora	Sí, otro. Nómbralo.
86.	Felipe:	Nombra ese punto como… [Julia nombra el otro extremo del trozo con *Z*]. Eso.

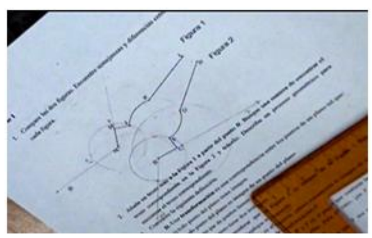
		
87.	Profesora:	¿Y ahora?
88.	Julia:	Y ahora tengo que encontrar el correspondiente acá, ¿sí? [muestra con el dedo la ubicación aproximada del segmento correspondiente al segmento *NZ*].
89.	Profesora:	A *Z*, ¿cierto? Para poder encontrar el trozo correspondiente.
90.	Julia:	Ajá.
91.	Profesora:	¿Cómo lo harían? ¿Qué relaciones encontraron para poder decir, mire, este sería el correspondiente? [se va para otro grupo].
92.	Felipe:	Es que, lo tengo pero no sé cómo. Tiene algo que ver con esta recta [señala la recta *MN*] y con…
93.	Sonia:	El ángulo de acá [señala el ángulo *ZNM*].
94.	Felipe:	Sí.
95.	Sonia:	El ángulo que se forma acá [ángulo *ZNM*] también se debe formar acá [señala la Figura 2] exactamente igual, pero…
96.	Julia:	Pues entonces aquí sería copiar este ángulo [señala el ángulo *ZNM*]… o sea, hacer, copiar este ángulo, copiarlo acá [señala la parte correspondiente en la Figura 2] para que nos dé [muestra con el dedo la posible ubicación del trozo correspondiente].
97.	Felipe:	Exacto, hagamos eso [risas] ¿En la misma figura? ¿Ahí mismo?
98.	Julia:	Sí, ahí mismo porque si no nos tocaría ponernos a copiar toda la figura.
99.	Felipe:	Ok, entonces, espera. Si acá el segmento correspondiente a *MN* entonces será *BC*, entonces allí trazaríamos la recta que va… o sea, que contiene al segmento ese [toma la escuadra y traza la recta *BC*]. A esta recta llamémosla *m*. 

		Y… ¿te acuerdas cómo es que se copian ángulos?
100.	Julia:	Es que no me acuerdo bien. Primero toca hacer una circunferencia acá [toma el compás y lo ubica en *N*] que se interseque con estas dos [señala los lados del ángulo *ZNM*], ¿se copia la medida y se hace acá? [señala la Figura 2] Es que no me acuerdo bien cómo es.
101.	Sonia:	No pero sí es así. Eso fue como lo primero que hicimos.
102.	Julia:	Tocará hacer como otro rayo… es que no me acuerdo.
103.	Felipe:	Sí, ya tenemos que estas dos se intersecan [muestra el punto de intersección de las rectas *MN* y *BC*], que sería la correspondiente a esta ¿verdad? [señala la recta *BC*]
104.	Julia:	Sí.
105.	Felipe:	Entonces…
106.	Julia:	Aquí, es que aquí, bueno toca hacer este, ¿no? [ubica el compás en *N* y lo mueve como si fuera a hacer un arco] Y luego se pone aquí [lo ubica en *B* y hace el mismo movimiento]… con intersección… y la intersección… Es que no me acuerdo cómo es [silencio].
107.	Camarógrafa:	[Dirigiéndose a la profesora] Es que no se acuerdan como copiar el ángulo.
108.	Felipe:	¿Cómo copiamos el ángulo? No… no recordamos bien.
109.	Profesora:	[No se escucha].
110.	Felipe:	[En una hoja dibuja un ángulo y un segmento] Es que mira, tenemos… yo me acuerdo que ese día la profesora dijo: hagan un ángulo cualquiera, ¿sí? Luego tracen un rayo, luego en ese rayo… eh. O sea… [silencio].
111.	Camarógrafa:	Sigue, sigue, sigue. Sigue como me estabas contando.
112.	Felipe:	Es que… es que no me acuerdo bien.
113.	Camarógrafa:	No, dale. ¿Cómo crees que es?
114.	Felipe:	El ángulo, luego trazamos el rayo, después del rayo… es que no me acuerdo bien profe, es que no estoy seguro, no recuerdo bien. Estoy confundido. Después… [silencio]. Era con dos circunferencias.
115.	Julia:	[Abre su carpeta en una hoja donde tenía la construcción de dos ángulos congruentes] ¿Ves que sí era…?
116.	Felipe:	Ah, ya. Ya recordé. Trazamos un ángulo cualquiera, ¿verdad? en este caso ya lo tenemos, una circunferencia… en este punto… digamos que lo llamáramos *A* [escribe *A* en el vértice del ángulo]. Entonces una circunferencia con centro en *A* y radio cualquiera y digamos donde se intersequen los llamamos *X* y *Y* [escribe *X* y *Y* sobre los lados del ángulo], luego, en el otro segmento hacemos eso mismo…
117.	Sonia:	Préstame el compás [traza una circunferencia con centro en *N*]. Más o menos, ahora que se interseque con la recta esa.

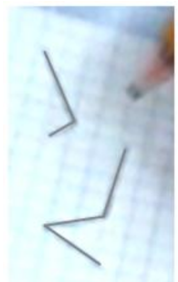
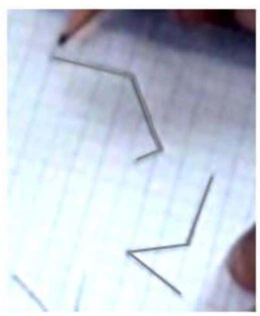
118.	Julia:	Se hace una circunferencia acá [ubica el compás en *B*]…
119.	Felipe:	Entonces…
120.	Julia:	Espera un momentico. No, pero sería con centro acá [ubica el compás en *B*] con el mismo radio [traza la circunferencia]… y luego medimos…
121.	Felipe:	Acá, estos dos puntos [señala los puntos de intersección de la circunferencia de centro *M* y los lados del ángulo *MNZ*].
122.	Julia:	No.
123.	Felipe:	Sí. Estos porque estamos trazando es esta recta [señala la recta *NZ*].
124.	Julia:	Sí, donde se intersecan [utiliza el compás para tomar la distancia entre esos dos puntos]. Y la circunferencia se hace así… [Miran la hoja en la carpeta].
125.	Felipe:	[Mirando la hoja] Circunferencia con centro en… en donde se intersecó con el segmento.
126.	Julia:	¿Con centro acá? [ubica el compás en uno de los puntos de intersección de la recta *BC* y la circunferencia de centro *B*]. *Y* acá se intersecan, ¿sí? [Muestra un punto de intersección con la primera circunferencia]
127.	Felipe:	Dale, hazla completa [Julia dibuja la circunferencia]. Ok, nos quedó mal. Yo creo que deberíamos borrar esto [señala las circunferencias]. ¿Sí? ¿Lo borramos mejor y lo volvemos a hacer? Sí porque es que nos estamos confundiendo con tantas líneas [mientras borra, Julia consulta la hoja donde tiene los pasos para construir un ángulo congruente a un ángulo dado]. El lápiz, el lápiz que tenía [toma el lápiz y la escuadra y traza un segmento con un extremo en *N*]. Entonces, el trozo que nosotros teníamos era este [hace el trozo] A este punto lo habíamos llamado *Z* [llama *Z* al otro extremo del segmento]. Entonces, ahora sí, haz una circunferencia con centro en *N* y radio cualquiera [Julia hace la circunferencia y él toma la escuadra para trazar la recta *MN* de manera que se vean los puntos de corte con la circunferencia trazada. Llama *X* a uno de esos puntos y *Y* al punto de corte de la circunferencia con el segmento *NZ*].  [Julia se dispone a trazar una circunferencia con centro en *B*] Espera, espera trazamos primero la recta [toma la escuadra].
128.	Julia:	¿Cuál recta?
129.	Felipe:	La recta que contiene al segmento *BC*.

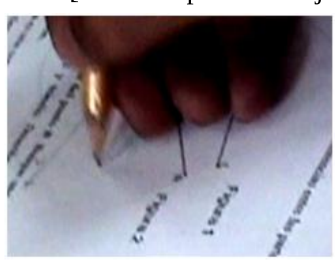
130.	Julia:	Ah, Ok. [Felipe traza la recta *BC*] Pero es un rayo porque es un ángulo [señala el punto *B*].
131.	Felipe:	Pero, pues el rayo sería *CB.*
132.	Julia:	[Traza un circunferencia con centro en *B* y el mismo radio de la circunferencia anterior] Y ahora…
133.	Felipe:	Esta distancia [señala la distancia *XY*].
134.	Profesora:	¿Cuál ángulo están copiando?
135.	Julia:	Este [señala el ángulo *MNZ*].
136.	Profesora:	O sea, ¿están copiando este ángulo [señala el ángulo *MNZ*] o están copiando este ángulo? [señala el ángulo *YNX*].
137.	Julia:	Pues este de acá [ángulo *MNZ*]. Tenemos que medir acá [distancia *MY*].
138.	Felipe:	No porque necesitamos [señala los puntos *X* y *Y*].
139.	Sonia:	Es que es acá [señala el ángulo *MBC*]. Está mal.
140.	Felipe:	Ah, sí porque necesitamos es esto [señala los puntos *M* y *Y*].
141.	Sonia:	Ajá.
142.	Profesora:	¿Están copiando el ángulo *MNZ* o el ángulo *MN*…? No sé ¿Cuál ángulo están copiando?
143.	Felipe:	Yo creo que sería *XNY* [llama *X*' al otro punto de intersección de la recta *MN* y la circunferencia de centro *N* para no confundirlo con el punto *X* que están usando].
144.	Julia:	[Toma la distancia *XY* y comienza a trazar la circunferencia con centro en un punto de intersección de la recta *BC* y la circunferencia de centro *B* que tenían] Pero ¿y ahí? Hay algo mal. Quedaría por acá [indica con el dedo la dirección aproximada del segmento, que se muestra en la imagen con la línea roja punteada]. 
145.	Profesora:	Así a simple vista, ¿dónde debería, dónde debería quedar el segmento?
146.	Felipe:	El segmento debería quedar más o menos… [Sonia ubica la escuadra en la posición aproximada]. Mira, lo que pasa es que… lo que pasa es que nosotros, o sea, nos estamos guiando por este rayo que trazamos acá [rayo *NZ*], o sea, el trozo que trazamos…

147.	Profesora:	Borra esta parte de acá porque eso los confunde [señala el rayo opuesto al rayo *NM* y Julia lo borra]. Bueno, ¿qué se supone que quieren hacer?
148.	Felipe:	Queremos…
149.	Sonia:	Copiar esta medida [*MY*] para que quede acá [señala la Figura 2], pero entonces, invertida.
150.	Profesora:	Listo, entonces, se supone que quieren copiar el ángulo, ¿dónde?
151.	Julia:	Acá [señala el punto *B*].
152.	Profesora:	Acá. ¿Hacía acá o hacia allá? [señala en dos direcciones a partir del punto *B*]
153.	Julia:	Hacia allá [señala la posible dirección del segmento].
154.	Felipe:	O sea, necesitamos que el trozo que vamos a trazar desde *B* nos quede acá [señala la posible ubicación].
155.	Sonia:	O sea, que este ángulo de acá quede igual que el otro acá [señala el ángulo *MNZ* y la posible ubicación del ángulo correspondiente en la Figura 2].
156.	Profesora:	O sea, que ustedes necesitan este rayo *BC*, ¿cierto? Para copiarlo.
157.	Julia:	Ajá.
158.	Profesora:	Entonces, borren el resto, es que se confunde con el resto [borran las rectas y circunferencias hechas en la Figura 2]. Listo, ¿cuál es el rayo que necesitan?
159.	Sonia:	Este [señala el rayo *BC*].
160.	Profesora:	Ese. Rayo *BC*. Ese es el rayo inicial. Ahora, vuelvan a empezar.
161.	Felipe:	La circunferencia ya la tenemos… tenemos el trozo, luego la circunferencia, listo. Tenemos que copiar…
162.	Julia:	Aquí [señala el segmento *BC*]. Te falta aquí [punto *B*], este centro, con este mismo radio [señala la circunferencia con centro en *N*. Felipe toma la medida del radio con el compás y traza la circunferencia con centro en *B* y ese radio]. Y ahora sí, la *MY*.
163.	Felipe:	[Toma la distancia *MY* con el compás y traza la circunferencia con centro la intersección del rayo *BC* y la circunferencia de centro *B*].  Aquí donde es la intersección, por ahí pasa el segmento [señala el punto

		de corte de las dos circunferencias y lo llama *T*]. Espérate que nos estamos confundiendo con tanta recta y tanta circunferencia [Sonia toma la escuadra y traza el rayo *BT*]. Ya está listo.
164.	Sonia:	Listo, perfecto.
165.	Profesora:	¿Ya?
166.	Felipe:	Sí señora.
167.	Profesora:	¿Sí se parece? ¿Ahora sí?
168.	Felipe:	Sí señora.
169.	Profesora:	Bueno, pero ustedes iban a hacer era la correspondiente del segmento *NZ*, ¿no?
170.	Sonia:	Ajá.
171.	Profesora:	El trozo correspondiente a *NZ*. ¿Cómo hacen?
172.	Julia:	Falta copiar esto [señala simultáneamente los puntos *N* y *Z* para indicar el segmento].
173.	Felipe:	*Z* sería acá, ¿sí? [Señala *Z* en el extremo del segmento].
174.	Julia:	Sí.
175.	Felipe:	Ok. Entonces… [Julia toma el compás y transfiere la medida *NZ* en el rayo *BT*] A ese punto llámalo… llámalo *W* [llaman *W* al punto correspondiente a *Z*]. Ahora, escribe ahí que segmento *NZ* y segmento *BW* son congruentes. 
176.	Sonia:	[Escribe en la hoja lo que le dijo Felipe]. Entonces ahora, ¿cuáles pasos? Trazamos un segmento… [Escriben en la hoja los pasos seguidos en la construcción del segmento] […]
177.	Julia:	[Lee la definición de transformación en la pregunta 3 y la tarea 3.a]. […] [Leyendo] *¿Es posible considerar que la Figura 2 es imagen de la Figura 1 bajo alguna transformación ? Explique su respuesta* [silencio].
178.	Sonia:	[Leyendo] *Todo punto del plano tiene imagen*. Tiene, tiene, tiene, tiene, tiene [a medida que dice tiene, señala un punto en la Figura 1 (*L*, *K*, *J*, *M*, *N*) y su imagen en la Figura 2 (*R*, *D*, *F*, *C*, *B*)]. Sí. [Leyendo] *Todo punto del plano es imagen de…*
179.	Julia:	[Leyendo] *Todo punto del plano es imagen de algún punto del plano*. Sí.
180.	Sonia:	[Leyendo] *Ningún par de puntos tienen la misma imagen*. Sí [señala las dos figuras]. [Leyendo] *Ningún punto tiene dos imágenes*. Sí.

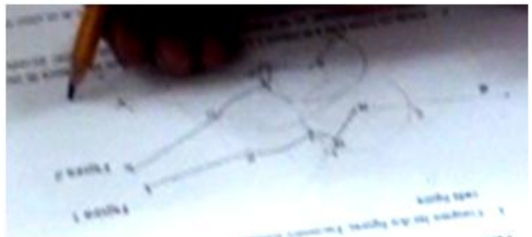
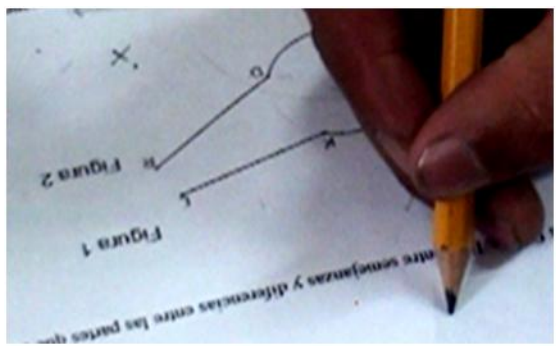
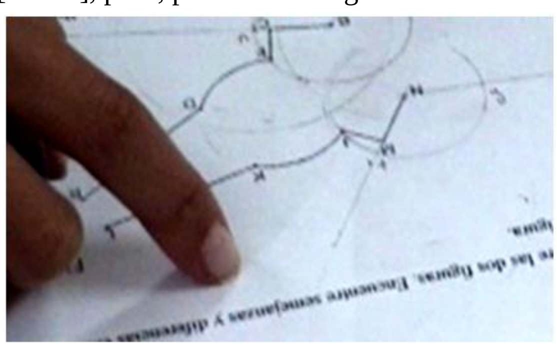
181.	Felipe:	[Leyendo] *¿Es posible considerar que la Figura 2 es imagen de la Figura 1 bajo alguna transformación ?*
182.	Sonia:	Sí es posible porque cumple las condiciones de la transformación.
183.	Felipe:	De la definición. Y bajo una transformación *t* que fue la que nosotros hicimos. Más o menos, ¿sí?
184.	Sonia:	¿Se puede comprobar? Pues sí, digamos aquí nosotros tenemos estas figuras [señala las Figuras 1 y 2]…
185.	Julia:	Sí, pero espera. [Leyendo] *Si su respuesta anterior es afirmativa, ¿cómo encontraría la imagen de un punto X, que no está en las figuras, bajo la transformación t?*
186.	Sonia:	Pues lo mismo que hicimos aquí [señala el trozo que añadieron en la parte anterior]. Pero ahora un punto que no esté en la figura, igual encontramos la imagen gracias a *t*.
187.	Julia:	Ajá.
188.	Felipe:	En el [ítem] **b** dice, ¿cómo encontraría la imagen? Pues la respuesta sería…
189.	Sonia:	Por eso, lo que hicimos ahí [señala las dos figuras].
190.	Felipe:	La respuesta sería: realizando un proceso geométrico en ambas figuras. Realizando el mismo proceso geométrico.
191.	Profesora:	¿Ya? ¿Ya pasaron al siguiente punto? ¿Ya están en las transformaciones?
192.	Sonia:	Pero, ¿cómo así? ¿Cómo lo explicamos?
193.	Julia:	Pues es que sí se cumplen estas condiciones pero no sabemos cómo explicarlo.
194.	Felipe:	Nos están preguntando que si es posible que la Figura 2 sea imagen de la Figura 1, ¿cierto?
195.	Julia:	Sí.
196.	Felipe:	Podemos concluir que sí porque, haciéndole una transformación *t* digamos a la Figura 1 y luego realizando esa misma transformación *t* a la Figura 2, las figuras van a ser correspondientes porque van a haber puntos que son imagen de otros, puntos que… ningún par de puntos tienen la misma imagen, entonces pues de esa forma se podría explicar que sí es posible considerar que la Figura 2 es imagen de la Figura 1 porque al realizarle una transformación *t* a una figura y luego realizarle la transformación *t* a la otra, entonces las figuras van a ser correspondientes.
197.	Julia:	Entonces hay una correspondencia entre las figuras [silencio]. Es que mira, si encontramos la correspondencia entre un punto de esta Figura 1 y la correspondencia… [señala el punto *Z* y luego el punto *W* de la Tarea 2], o sea, si hacemos esto que está acá en el Punto 2 [se refiere a la Tarea 2] pues vamos a tener una transformación y se van a cumplir esas condiciones [señala las condiciones dadas en la definición].

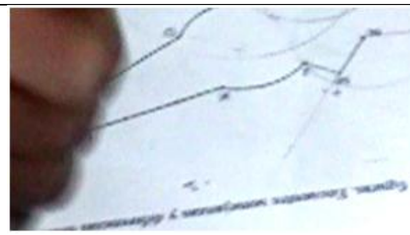
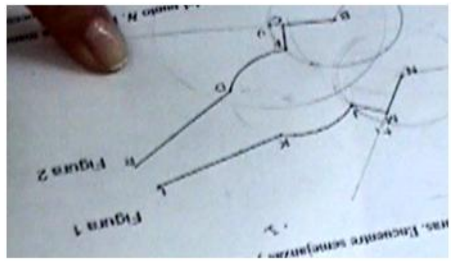
198.	Sonia:	Por eso, ¿y entonces?
199.	Julia:	Pues escribe que si se encuentra un punto correspondiente en la Figura 1… [Sonia escribe]
200.	Felipe:	Pero es que mira que eso no se cumple siempre porque si digamos tú tienes esta figura y acá tienes esta  y tu acá hallas, no sé, lo mismo que acabamos de hacer, un trozo acá  y luego allá haces ese mismo trozo acá  o sea este punto [señala el punto indicado con el lápiz] tal vez es correspondiente con este ¿sí? [señala el que considera punto correspondiente en la primera figura], pero las dos figuras no van a ser… esta figura no es imagen de esta [señala la figura de arriba y luego la de abajo]. A eso es a lo que yo me refiero.
201.	Julia:	Pero en este caso no estás considerando la transformación *t*. O sea, es considerando *t*.
202.	Sonia:	Estamos considerando específicamente esta [señala las Figuras 1 y 2] ¿Sí?
203.	Felipe:	Ok.
204.	Sonia:	[Escribiendo] Entonces existe una transformación *t* que cumple las condiciones de la definición. [Escriben la respuesta completa para la

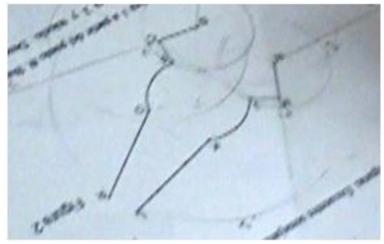
		tarea 3.a]. […]
205.	Felipe:	Profe [llama a la profesora quien se encuentra en otro grupo].
206.	Julia:	¿Le preguntamos este y este? [señala las tareas 3.b. y 3.c.]
207.	Felipe:	[Leyendo] *¿Cómo encontraría la imagen de un punto X, que no está en las figuras, bajo la transformación t?* […] Profe, una pregunta. Es que… mira, esto es lo que planteamos de la respuesta.
208.	Julia:	Del [literal] **a** que dice que si es posible considerar que la Figura 2 es imagen de…
209.	Profesora:	Y ustedes, ¿qué dijeron?
210.	Julia:	Que sí.
211.	Profesora:	Que sí. Listo.
212.	Julia:	Que sí, que consideramos como… la… o sea, teniendo en cuenta como esto… [señala el trozo añadido en la primera parte]
213.	Profesora:	Teniendo en cuenta esto y ojo, la definición, ¿no? [señala la definición de transformación]
214.	Julia:	Sí, claro. Aquí decíamos bueno, aquí nos dice que es una correspondencia entre los puntos, entonces aquí en este ya encontramos la correspondencia entre estos [señala las Figuras 1 y 2]. Entonces, al encontrar esa correspondencia se cumplen estas condiciones de la transformación, entonces sí.
215.	Profesora:	Ajá, listo.
216.	Julia:	¿Sí?
217.	Profesora:	Ahora dice, si ustedes ponen un punto *X* cualquiera, ¿cuál es el punto *X* cualquiera?
218.	Felipe:	No. Pongamos un punto acá [ubica un punto debajo de la Figura 2]. 
219.	Julia:	No, pongámoslo acá [señala otro punto arriba de la Figura 1].
220.	Profesora:	Donde sea, no importa. Con esa misma transformación con la que se hace esta figura [señala las Figuras 1 y 2], ¿cómo encontrarían el punto?
221.	Julia:	O sea tendríamos que encontrar…
222.	Sonia:	La imagen.

223.	Julia:	Pero sí, pero es que no porque si este punto está acá [señala el punto que ubicó Felipe] ya no se cumplirían las condiciones de la transformación [señala las condiciones de la definición de transformación].
224.	Profesora:	¿Por qué?
225.	Julia:	Porque digamos, a este punto le corresponderían dos puntos, ¿no? [señala un punto en la Figura 1 y otro en la Figura 2]  
226.	Profesora:	¿Por qué dos?
227.	Julia:	Este y este [señala nuevamente los dos puntos mostrados anteriormente].
228.	Sonia:	No, el correspondiente sería uno. Sería hacia acá [señala un punto hacia arriba de la Figura 1].
229.	Profesora:	¿Dónde iría el correspondiente?
230.	Sonia:	El correspondiente iría por acá [señala la ubicación aproximada del punto y sus dos compañeros hacen lo mismo]. 
231.	Profesora:	Ok. ¿Y cómo lo harían?
232.	Sonia:	Se puede copiar esta medida de acá [señala la distancia entre el nuevo punto y la Figura 2]… no mentiras.
233.	Profesora:	Nombremos, este sería X_1 para no confundirnos y este sería X [llama X_1 al punto que en la primera parte los estudiantes llamaron X y llama X al nuevo punto ubicado]. ¿Cómo harías para encontrar esa otra figura?
234.	Julia:	Parecido a este [señala el trozo añadido a la Figura 1]. Podríamos hacer también como copiando el ángulo, o sea trazando este trozo primero [señala el segmento *XR*] y luego copiando el ángulo acá [señala el segmento correspondiente en la Figura 1].
235.	Profesora:	Ojo porque si vas a hacer… ¿sería con la Figura 2 o con la Figura 1?
236.	Felipe:	Con la Figura 2.
237.	Profesora:	Acuérdense que vamos a buscar la imagen de *X*.

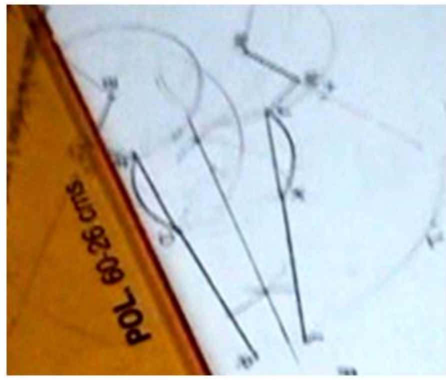
238.	Sonia:	Ajá, sí.
239.	Profesora:	¿F1 es la imagen de F2 o F2 es la imagen de F1? [señala las Figuras 1 y 2 y luego las Figuras 2 y 1].
240.	Felipe:	F2 es la imagen de F1.
241.	Profesora:	¿Qué relaciones pueden encontrar entre estos puntos que están ahí? [señala el punto *X* y la posible ubicación de su imagen]. O sea, ustedes tienen que mirar, si yo cojo cualquier punto de esta Figura 1, ¿qué relación tiene con su imagen?
242.	Sonia:	Equidistan, ¿no?
243.	Profesora:	Aparte de que equidistan. ¿Equidistan? ¿Equidistan de qué?
244.	Sonia:	Uno del otro, de… no, no mentiras, no.
245.	Profesora:	¿Equidistan de qué? O sea, para que equidisten tiene que haber de un punto la misma distancia que a los otros dos.
246.	Julia:	Sí, ya lo teníamos, del punto *L* al punto *R* tiene la misma distancia que de la Figura 1 a la Figura 2, el correspondiente.
247.	Profesora:	¿Siempre tienen la misma? ¿Y este? [señala los puntos *D* y *K*], y entonces este [señala los puntos *F* y *J*] y este [señala los puntos *B* y *N*].
248.	Julia:	No, no, no. Me estoy confundiendo, ya se nos enredó todo lo que teníamos.
249.	Profesora:	Pero es que equidistan no me funciona. Pero, ¿qué más podría pasar? [silencio] Busquen relaciones entre esos puntos correspondientes para que puedan encontrar este [señala la posible ubicación de la imagen de *X*] sin tener que hacer todo lo que hicieron [se retira del grupo].
250.	Julia:	Me confundió la profe [silencio]. Encontrar la relación… [silencio]. Es que digamos, si tenemos este punto acá [señala el punto *X*], ¿no habría dos puntos con la misma imagen? O sea, este tendría imagen acá [traza una recta por *X* que corta a los segmentos *DR* y *KL* y señala el punto de intersección con el segmento *KL*] y este punto de acá [señala el punto de intersección de la recta con el segmento *DR*] tendría la misma imagen [señala la intersección de la recta con el segmento *KL*].
251.	Sonia:	Pero no sería la misma imagen porque digamos, la distancia de acá a acá [de *X* al segmento *DR*] es una sola y la distancia de acá a acá [desde la posible ubicación de la imagen de *X* hasta el segmento *KL*] también va a ser una sola. La imagen es una.
252.	Felipe:	Y de todos modos mira que, o sea…
253.	Julia:	Me refiero es a… teniendo en cuenta…
254.	Felipe:	Pero es que mira que aquí, según lo que nosotros hemos leído, la Figura 2 es la imagen de la Figura 1, o sea que este punto [señala el punto *X*], este punto en este momento es como si perteneciera a la Figura 1, entonces el punto que nosotros tendríamos que hallar en realidad estaría más o menos

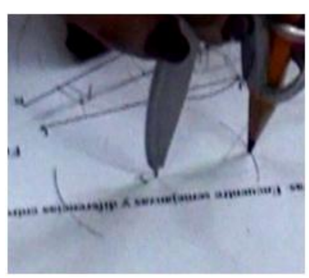
		como por acá [señala con el lápiz]. 
255.	Sonia:	Ajá.
256.	Julia:	Pero debería estar acá [señala la posible ubicación del punto]. 
257.	Sonia:	Sí. Arriba, ¿no?
258.	Felipe:	Ah, eso, está, está más o menos por acá [señala con el lápiz] 
259.	Julia:	No, más acá [señala], pues, para ser la imagen. 
260.	Sonia:	Ajá. Más para acá, ¿no? Para ser la imagen. Por eso la profe nos dijo arriba [borra el punto *X* y lo ubica arriba de la Figura 1].

		
261.	Julia:	Bueno, y ahora sí este quedaría por acá [señala la posible ubicación de la imagen de *X*]. 
262.	Sonia:	Y, ¿ahí qué?
263.	Julia:	Tenemos que… encontrar el correspondiente acá [mueve el dedo para mostrar el segmento cuyos extremos son el punto *R* y la imagen de *X*].
264.	Sonia:	[No se entiende]… es más fácil.
265.	Julia:	¿Sí? Bueno, no sé [silencio].
266.	Felipe:	Bueno, hagámosle. Tenemos que componer mucho eso [silencio]. Mira que pues, o sea, no sé, no sé si de pronto se pueda así. Pero miren: nosotros hallamos que estos dos puntos [*J* y *F*] y estos dos puntos [*K* y *D*], o sea, estos puntos [señala los cuatro puntos] equidistan a una circunferencia, ¿cierto? Acá [señala el centro de la circunferencia mencionada, llamado *P*] podría haber otra circunferencia con centro en *P*, pues o sea, tal vez, igual que esta [señala la circunferencia que contiene los puntos *J*, *K*, *D* y *F*], no está, pero que digamos que *R* y *L* pertenezcan a esa circunferencia, ¿sí? Y entonces estos dos puntos [*R* y *L*] equidistarían a este [señala a *P*]. Lo mismo para estos dos puntos [*M* y *C*]. Estos dos puntos equidistarían a este [señala a *P*] y lo mismo para este y este [*N* y *B*] y para este y este [*Z* y *W*]. O sea siempre…
267.	Julia:	Siempre haciendo esas circunferencias.
268.	Felipe:	Exacto, pero pues o sea, no estoy seguro, pero pues sería una forma que funcionaría.
269.	Julia:	Entonces haríamos una circunferencia con centro *P* y radio *PX* [pone los dedos para indicar la distancia de *P* a *X* y los mueve como si fuera un compás].
270.	Sonia:	Ajá.
271.	Felipe:	Sí [silencio]. Pero pues no, o sea, la verdad no estoy muy seguro.
272.	Julia:	Pues hagamos lo que dice él [toma el compás y comienza a hacer una

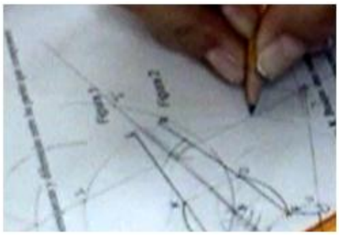
		circunferencia con centro en *P* y radio *PX*]. ¿La hago toda?
273.	Felipe:	No, hasta ahí no más porque es hasta ahí donde la necesitamos. 
274.	Julia:	Sí, y como hacemos para… [señala el punto *X* y una posición aproximada de su imagen sobre el arco que acaba de trazar]. Porqué sí, cualquier punto equidista pero como sabemos dónde va acá [señala nuevamente el arco].
275.	Felipe:	Por eso, necesitamos que el que esté precisamente, no sé… digamos por acá [señala la posible ubicación de la imagen de *X* sobre el arco] sea imagen de este [señala el punto *X*].
276.	Sonia:	¿Y cómo? Una… una perpendicular no sirve [muestra con el dedo la posible recta que contiene el punto y su imagen].
277.	Felipe:	No.
278.	Julia:	Sí porque bueno, ahí ya tenemos la distancia acá que es la misma [señala la circunferencia], pero… ¿y ahora? [silencio].
279.	Felipe:	Iba a decir que un triángulo, pero no porque un triángulo se puede formar de varias formas.
280.	Sonia:	Sí [silencio].
281.	Felipe:	Es que mira que no es fácil.
282.	Profesora:	¿Ya?
283.	Felipe:	Pues, es que no es tan fácil.
284.	Camarógrafa:	Ya lo tienen profe, pero no lo ven.
285.	Profesora:	¿Ya lo tienen pero no lo ven? ¿Qué pasó?
286.	Felipe:	Es que mira profe, yo llegué a un… a algo, o sea, nosotros llegamos a que estos cuatro puntos equidistaban de una circunferencia que era con centro acá en… [señala *P*] o sea, lo miramos así y de cierta forma al hacer la circunferencia, al hacer esa circunferencia, digamos al hacer otra circunferencia con centro acá [en *P*] y radio erre [señala el punto *R*], si estos dos son correspondientes [*L* y *R*] entonces estos dos puntos también van a pertenecer a esta circunferencia y juntos van a equidistar a *P*. Lo mismo para estos dos puntos [*F* y *J*], lo mismo para estos dos puntos [*B* y *N*]. Si digamos, pues no sé, así lo pensé yo. Si digamos hacemos una circunferencia con centro *P* y radio *X* [señala el punto *X*] al hacerla, pues ya tenemos más o menos donde sería el punto, pero pues ahí es donde vamos. Más o menos.

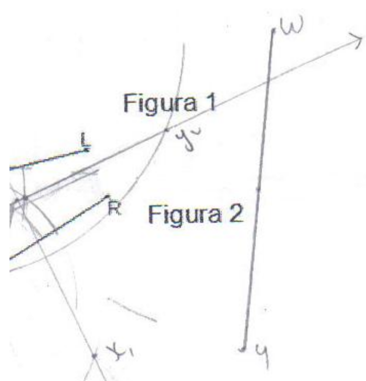
287.	Profesora:	¿Qué relación pueden encontrar [señala los puntos *L* y *R*]…? Miren dos: *L* y *R*. Si no hubieran tenido este segmento ni este [señala los segmentos *KL* y *DR*], ¿cómo hubieran encontrado este *R* a partir de este *L*? [señala los puntos *R* y *L*]
288.	Julia:	¿Si tuviéramos solo el puntico? [señala *L*].
289.	Profesora:	Sí, tienen el *L* y el *R*. Les dicen, bajo una transformación, digamos que *N* y *B*, bajo la transformación encuentre *R*. ¿Cómo lo hubieran hecho? [silencio]. Tú encontraste un punto. ¿Será que es el único punto que cumple eso?
290.	Felipe:	Eh… no sé. No estoy seguro. Es que…
291.	Profesora:	Pues mira a ver si sí existe o no existe. No estás seguro pero trata de mirar si sí o si no. ¿Tú crees que sí o tú crees que no?
292.	Felipe:	Yo creo que no.
293.	Profesora:	Bueno, y si en el caso en que hubiera pasado que en lugar de haber acá un arco [señala los arcos *JK* y *FD*] lo que hubiera habido era otro segmento [traza los segmentos *JK* y *FD*], si no hubiera habido un arco sino un segmento, ¿cómo hubieran encontrado el *P*? [silencio].
294.	Felipe:	¿Cómo hubiéramos encontrado *P*? ¿Este *P* que tenemos acá?
295.	Profesora:	Sí.
296.	Felipe:	Trazando…
297.	Sonia:	Punto medio.
298.	Profesora:	¿Punto medio de quién?
299.	Sonia:	Del segmento acá [mueve el dedo sobre las figuras mostrando un segmento que contiene a *P* y con extremos en las Figuras 1 y 2].
300.	Profesora:	¿En dónde?
301.	Sonia:	Estos puntos nos los dan, *D* y *K*, ¿cierto?
302.	Profesora:	En este momento los tienes.
303.	Felipe:	Y *F*, *J* también.
304.	Profesora:	Y *F*, *J* también [silencio]. *Y* quieren encontrar el *X’* [silencio]. ¿Entre quienes trazarías un punto medio? O sea, ¿qué segmento tendrías que trazar para encontrar el punto medio? [silencio]. Teniendo en cuenta toda esa información que ya tienen acá [silencio]. Traza un segmento [le pasa la escuadra a la Sonia], el que tú consideres que deberías trazar para encontrar el punto medio que tú me dices [Sonia traza el segmento *KD*]. *K* y su imagen. Listo, ¿y qué harías?
305.	Sonia:	Buscar el punto medio.
306.	Profesora:	Hazlo.
307.	Felipe:	Con el compás.

308.	Sonia:	[Toma el compás y lo ubica en *D* con radio *DK*]. ¿Así?
309.	Profesora:	No importa la abertura del compás ahí [Sonia construye la mediatriz del segmento *DK*]. Listo. Ese punto medio quedó como raro, ¿no? Eso quedó como raro [la recta que resultó no era el eje de simetría].  Ensaya con este [la profesora toma otro compás y verifica la construcción]. Mira, aquí se te corrió [Sonia traza una nueva recta y borra la anterior]. Listo. Listo, ¿para qué te sirve ese punto medio?
310.	Sonia:	[Ubica el punto medio del segmento *DK*] La medida de acá a acá es la misma [señala el punto medio y *K* y luego el punto medio y *D*].
311.	Profesora:	Hagan otro, por ejemplo [silencio]. Haz otro segmento.
312.	Sonia:	¿En cualquier lado? [ubica la escuadra sin considerar puntos correspondientes en las dos figuras].
313.	Profesora:	Acuérdate que tienes la imagen… la figura y la imagen. Mira, tienes acá el punto y su imagen [señala los puntos *K* y *D*]. ¿Estás segura que ese es el punto y la imagen? [Sonia retira la escuadra]. Utiliza puntos en los que estés segura que es la imagen [Sonia duda al ubicar la escuadra]. Tienes *B*, *N*, tienes *Z*, *W*, tienes todos. Utiliza el mismo patrón que utilizaste en el anterior [Sonia traza el segmento *BN* y Julia traza los arcos para construir la mediatriz. La profesora se dirige a todo el grupo] Van escribiendo la definición de la transformación que ya voy a recoger, ¿bueno?
314.	Julia:	Esto me quedó como corrido [traza la mediatriz del segundo segmento].
315.	Profesora:	Me da la impresión de que ustedes están haciendo las cosas como corridas, como que no les está saliendo esto [Julia corrige la construcción]. Bueno, ¿qué pasa con esos dos puntos medios?
316.	Sonia:	Están en la misma recta.
317.	Profesora:	Dos puntos pertenecen a una misma recta. ¿Será que si yo hago este pasará lo mismo? [señala el segmento *LR*].
318.	Julia:	Sí.
319.	Profesora:	Bueno. Ahora, ya tienen punto medio, ¿qué significa? [silencio]. Miren que acá, [señala el punto medio de *BN*], esta recta [señala la mediatriz de

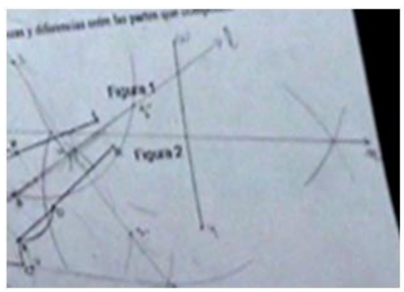
		BN], la distancia de acá a acá pues es la misma porque son puntos medios [señala parejas de puntos *L* y *R*, *K* y *D*, *N* y *B*]. Ahora, ¿cómo hago para hacer el *X*? [señala el punto *X*].
320.	Julia:	Punto medio.
321.	Profesora:	¿Punto medio de quién? [silencio]. No tengo otro punto para hacer el punto medio [silencio]. ¿Qué características tendrá esa recta que les surgió de los puntos medios, para poder hacer el *X*? [silencio] ¿Qué característica tiene esa recta?
322.	Felipe:	Que es una recta perpendicular a los segmentos, entonces tracemos acá la perpendicular [mueve el dedo para mostrar la ubicación aproximada de la perpendicular a la recta determinada por los puntos medios y que contiene al punto *X*] y cuando esa recta se interseque con la circunferencia ya encontramos el punto… la imagen. Pero sí, ya está. Entonces tracemos la perpendicular.
323.	Julia:	Ah… ¡ya!
324.	Felipe:	¿Ya lo entendiste? Casi que no.
325.	Julia:	No, yo no quería así… pero bueno. Lo que pasa es que teníamos otra idea, ¿no es cierto?
326.	Sonia:	Era copia de ángulos.
327.	Felipe:	Sí, es que eso era lo que íbamos a hacer en el primer momento.
328.	Camarógrafa:	¿Me dices eso otra vez?
329.	Julia:	Lo que íbamos a hacer al principio era trazar el segmento *XL* y copiar ese ángulo, copiarlo acá [señala la Figura 2] para tener ese segmento acá igual que trazamos el segmento acá [señala el segmento *BW*], pero bueno. Ahora, ¿lo hacemos entonces con la perpendicular o con el segmento? ¿Con la perpendicular?
330.	Sonia:	Con la perpendicular.
331.	Felipe:	Con la perpendicular, sí.
332.	Julia:	¿Con la perpendicular a dónde? [silencio] Es una que pasa por el punto… A mí se me olvidan esas cosas.
333.	Sonia:	[Toma el compás y hace dos arcos con centro en *X*]  ¿Y ahora qué?

334.	Felipe:	¿Dime?
335.	Sonia:	No tenemos recta.
336.	Felipe:	Por eso. Esa es…
337.	Sonia:	Entonces [no se entiende].
338.	Felipe:	El problema es ese, que no tenemos una…
339.	Sonia:	Una recta
340.	Felipe:	Una recta.
341.	Julia:	[Mirando su carpeta donde tiene los pasos para construir una perpendicular a una recta dada] Pero es que mira, si se usa esto [señala la hoja en la carpeta] se puede hacer con esto que es una recta perpendicular [señala una de las rectas en la hoja], o sea con un punto afuera [señala el punto exterior a la recta en la hoja de la carpeta], primero haces una y… [Sonia toma el compás lo ubica en el punto *X*] y bueno, por este punto, listo. Una circunferencia con centro es ese…
342.	Sonia:	Sí pero no hay una recta.
343.	Julia:	No, no, es que, pues es que este [señala el punto exterior a la recta en la hoja de la carpeta] es el punto que tenemos, ¿no? [silencio] No, no, espérate [toma el compás]. Este que tenemos, entonces, no va a pertenecer a la recta [ubica el compás en *X*] o sea va a ser *X* y vamos a hacer nuestra circunferencia [traza una circunferencia con centro en *X*] y… no pero es que tiene que ser más grande para que se alcance a intersecar con estas [señala las Figuras 1 y 2].
344.	Felipe:	Ahí se alcanza a intersecar.
345.	Julia:	No, toca hacerla más grande para que se alcance a intersecar [abre un poco más el compás y traza la circunferencia]. Y aquí se cortan en algún punto [señala el punto de intersección de la circunferencia con la Figura 1] 
346.	Felipe:	No, no, no. No es en la de abajo, es en la recta [señala la mediatriz de los segmentos. Julia señala los puntos de intersección de la circunferencia con la mediatriz de los segmentos y a ambos los llama *Y'*. Luego traza arcos con centro en los dos puntos señalados y traza la perpendicular a la mediatriz de los segmentos que pasa por *X*].
347.	Profesora:	¡Ay, Dios mío! Se nota que no han estudiado. ¡Qué horror! ¿Qué hicieron?
348.	Sonia:	Trazamos la perpendicular.

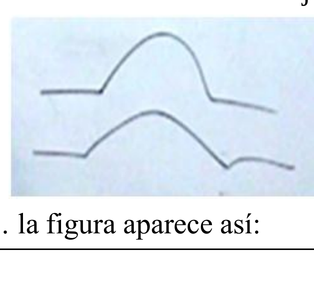
349.	Profesora:	¿Perpendicular de quién a quién?
350.	Sonia:	Perpendicular acá [señala la recta que construyeron y la mediatriz de los segmentos].
351.	Julia:	Y acá entonces sería el punto [señala el punto de intersección de la perpendicular que construyeron y el arco con centro en *P*]. 
352.	Profesora:	¿Cuál perpendicular? ¿De dónde? ¿Como por qué?
353.	Julia:	Es que nosotros teníamos esta recta [la mediatriz] y teníamos el punto *X*, entonces hicimos una perpendicular a esta recta [la mediatriz] que pasara por el punto *X* para sacar el correspondiente, el punto correspondiente de la Figura 2 que es aquí [señala la imagen de *X*].
354.	Profesora:	Sí. ¿Y eso se cumple para todos? O sea, ¿ustedes verificaron que estas eran perpendiculares, estas fueran perpendiculares y esta de acá también? [señala los segmentos *NB*, *MC* y *DK* y la mediatriz de los segmentos].
355.	Sonia:	Únicamente con esta [señala el segmento *NB*] y con esta [segmento *DK*] no lo hemos verificado.
356.	Profesora:	Bueno, pero se cumplió con esta [no señala en la hoja].
357.	Sonia:	Ajá.
358.	Profesora:	¿Y cómo hicieron para hacer el punto *X*? ¿Copiaron de dónde? ¿Cómo hicieron?
359.	Julia:	Vimos dónde la circunferencia se interseca acá con la recta perpendicular, donde se interseque con la circunferencia [señala la intersección mencionada].
360.	Profesora:	¿Con cuál circunferencia?
361.	Julia:	Con esta que hay acá [señala el punto *X*]. Ah, es que no habíamos hecho la circunferencia.
362.	Felipe:	Que era la que teníamos aquí en el punto *P* que habíamos tomado.
363.	Profesora:	¿Y si no tuviera ese punto *P*? ¿Cómo hago para hacer ese *X* prima? [señala la imagen de *X*]. Si solo tengo… hagan de cuenta que borré todo esto. Tengo la recta [señala la mediatriz].
364.	Julia:	Podríamos copiar la…
365.	Felipe:	Copiar el ángulo.
366.	Julia:	Teniendo la recta, pues copiar la medida de la recta a *X* [ubica el compás

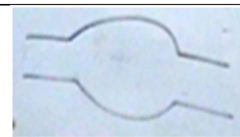
		en el punto medio del segmento cuyos extremos son *X* y su imagen y con radio desde ese punto hasta *X*].
367.	Profesora:	¿Y por qué puedo copiar la medida de la recta a *X*? Bueno, de la <u>intersección</u> a *X*.
368.	Julia:	Porque se supone que eso se da…
369.	Profesora:	Porque se supone que este, ¿qué es? [señala el punto medio del segmento cuyos extremos son *X* y su imagen].
370.	Felipe:	El punto medio.
371.	Profesora:	Ah, Ok. Siguiente punto [se retira a otro grupo].
372.	Felipe:	¿Borramos todo esto para hacer el siguiente?
373.	Julia:	[Leyendo] *Escoja dos puntos cualesquiera W y Y en el plano que contiene las figuras anteriores, pero que no estén en ninguna de ellas. Para su caso, ¿es Y imagen de W bajo la transformación t? Justifique su respuesta.*
374.	Felipe:	¿Borramos todo eso?
375.	Julia:	Es que no sé, qué tal nos sirva [ubica dos puntos *W* y *Y*].
376.	Felipe:	Debemos escribir primero el b. [Escriben la respuesta de la tarea 3.b. Llamaron W_1 al punto medio del segmento *XX'*]. […]
377.	Profesora:	¿Qué paso? *W* y *Y*. ¿*W* es imagen de *Y*? [silencio]  ¿Cómo haríamos para saber si *Y* es imagen de *W* respecto a esto que ustedes hicieron acá? [señala los puntos *W* y *Y* y mueve la mano sobre las Figuras 1 y 2 y las construcciones que hicieron] ¿Qué tendría que cumplir *Y* respecto a *W*?
378.	Sonia:	¿Este? [señala el punto *W*].
379.	Profesora:	*Y* respecto a *W*.
380.	Julia:	Pues tendría que tener la misma distancia de acá a acá [de la recta a *W*] y de acá a acá [de la recta a *Y*].
381.	Profesora:	Sí. ¿Qué más?

382.	Felipe:	*W* debería pertenecer a una recta que es perpendicular a esta [señala la mediatriz de los segmentos]
383.	Profesora:	¿Solo *W*?
384.	Felipe:	*W* y *Y* deberían pertenecer a la recta.
385.	Julia:	*W* y *Y*.
386.	Profesora:	O sea, la recta *WY* debería ser…
387.	Julia:	Perpendicular…
388.	Profesora:	Perpendicular. ¿*Y* es imagen de *W*?
389.	Felipe:	No.
390.	Julia:	Pues ahí no.
391.	Profesora:	No. Listo. O sea que no aplica para cualquiera.
392.	Julia:	Ajá.
393.	Profesora:	¿Qué condiciones debería cumplir? Bueno, entonces…
394.	Julia:	Pero acá dice… [señala el literal **d** de la pregunta 3].
395.	Profesora:	Acá dice: [leyendo] *una transformación similar*, o sea que cumpla las mismas características, *de tal forma que Y sea imagen de W*. ¿Qué harían?
396.	Felipe:	¿Existe una transformación similar? ¿No? [silencio].
397.	Profesora:	¿Cómo hicieron para que *X*’ fuera la transformación de *X*?
398.	Julia:	Trazamos aquí la perpendicular [señala la perpendicular construida].
399.	Profesora:	¿Y ahora cómo hago para hacer que *W* sea la imagen de *Y*?
400.	Julia:	Habría que trazar una perpendicular por *W* y por *Y* a esta [a la mediatriz de los segmentos].
401.	Profesora:	Esta es imagen de esta [señala los puntos *X* y *X*’] ¿utilizando a quién? [señala la mediatriz de los segmentos].
402.	Julia:	A la recta que contiene los puntos medios [señala la recta].
403.	Profesora:	Que contiene los puntos medios. Démosle un nombre a esa recta [Julia escribe *l*]. Listo. Este es con este [señala los puntos *X* y *X*’] porque es perpendicular a esta recta [señala el segmento *XX*’ y *l*] y es el punto medio [señala el punto medio del segmento *XX*’]. Ahora, ¿qué tendré que hacer para que *Y* sea la imagen de *W*?
404.	Felipe:	La recta *YW* debe ser perpendicular a la recta *l*.
405.	Julia:	Pero tienen que tener la misma distancia también [señala la distancia de *Y* a *l* y de *W* a *l*].
406.	Profesora:	Pero miren, les dicen construyan, o existe o hagan una transformación similar *s*, o sea, no tiene que ser la misma. No sería respecto a *l*. Tendrían

		que encontrar otra, ¿otra qué? [silencio].
407.	Julia:	¿Otra recta?
408.	Profesora:	¿Otra recta que me cumpla qué condición?
409.	Julia:	Una que sea… que sea punto medio de este segmento, ¿no? De *WY* [señala el segmento *WY*].
410.	Profesora:	¿Y qué más? [silencio] O sea, que pase por el punto medio, y ¿qué otra condición?
411.	Julia:	Que sea perpendicular.
412.	Profesora:	Que sea perpendicular [se retira a otro grupo].
413.	Julia:	[Toma la escuadra y traza el segmento *WY*]  [Ubica el compás en *Y*, con radio *YW*]. Sería aquí [señala el punto *W*] para que sea perpendicular [traza dos arcos. Luego ubica el compás en *W* y con el mismo radio hace los otros dos arcos y traza la mediatriz del segmento *WY* y la llama *n*].  Listo. O sea que aquí hay que hacer una recta perpendicular a esta [recta *YW*] que pase por el punto medio.
414.	Sonia:	Pues esa fue la que hicimos [señala la recta *n*].
415.	Julia:	Entonces aquí, con respecto a la recta *n*, *W* y *Y*…
416.	Sonia:	*Y* es imagen de *W*.
417.	Julia:	¿Sí? Ya. [Leyendo] *Defina la transformación t.*
418.	Felipe:	Escribamos primero lo de c. [Leyendo] *¿es Y imagen de W bajo la transformación t? Justifique su respuesta.* No.
419.	Julia:	No porque con respecto a la recta *l*, *W* y *Y* no equidistan de *l* y no, tampoco es perpendicular a la recta *l*.
420.	Profesora:	[Dirigiéndose a todo el curso] Bueno, definan la transformación, la

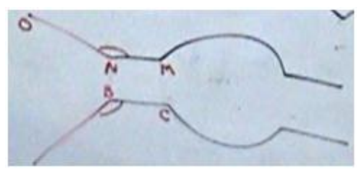
		definición de la transformación que acaban de encontrar, por favor. La escriben en una hoja y ya la voy a recoger.
421.	Julia:	Y ahora es que hay que poner las características que tenía la transformación *t*. Equidistan de esta [señala la recta *l*] y son perpendiculares, ¿sí?
422.	Sonia:	¿Y en [la tarea] **d**?
423.	Julia:	Pues sí, trazamos *WY*, hallamos punto medio y una recta que sea perpendicular a él [señala la recta *n*], entonces van a ser, van a cumplir la condición de ser equidistantes [señala los puntos *W* y *Y*, luego la recta *n*].
424.	Felipe:	Bueno, defina la transformación.
425.	Julia:	Dada una recta *l* que contiene los puntos medios de los segmentos… Pero, ¿qué vamos a hacer? Porque así no.
426.	Felipe:	No entiendo. ¿Cómo así defina la transformación? No lo entiendo bien.
427.	Julia:	Pues yo me imagino que en las características que tenían los puntos *X*, o sea lo que estábamos diciendo, que todos los puntos equidisten de la recta, los que sean puntos correspondientes [señala puntos en la Figura 1 y su imagen en la Figura 2]. Creo que es eso [silencio]. O sea, aquí la transformación *t* es una transformación porque cumple las características que dijimos que tenía una transformación [señala de definición de transformación en el numeral 3].
428.	Camarógrafa:	¿Ustedes ya habían visto geometría antes? ¿Así o…?
429.	Felipe:	Pues así no. Lo básico: triángulos, cuadrados y rectángulos.
430.	Sonia:	Entonces tocaría poner que… que hay una recta *l* que contiene todos los puntos medios de…
431.	Felipe:	De un segmento cuyos extremos son un punto y su imagen.
432.	Julia:	Sí, sí, eso. Existe una recta *l* que contiene los puntos medios…
433.	Felipe:	De un segmento…
434.	Sonia:	De los segmentos porque son varios.
435.	Felipe:	Eso, de los segmentos cuyos extremos son…
436.	Sonia	Un punto *A* y…
437.	Felipe:	Un punto cualquiera y su imagen.
438.	Sonia:	Y la imagen de este [del punto cualquiera].
439.	Felipe:	Exacto. Listo. ¿Qué más debemos poner?
440.	Sonia:	Eh… lo de la perpendicular.
441.	Felipe:	Ah, sí.
442.	Profesora:	[Dirigiéndose a todo el curso] Listo, ¿me entregan por favor la definición de la transformación?

443.	Sonia:	Es que los segmentos deben ser perpendiculares a la recta [escribe en la hoja de respuestas].
444.	Felipe:	Deben ser perpendiculares a la recta. Eh… ¿algo más? ¿No?
445.	Julia:	No pues ya cuando decimos que son punto medio ya…
446.	Felipe:	¿Pusiste lo de equidistancia?
447.	Sonia:	Sí, es que con punto medio ya hay equidistancia.
448.	Felipe:	Ah, sí ya. Creo que ya. Perpendiculares, equidistan. ¿Nada más? Listo. [Escriben la definición de la transformación *t*]
449.	Profesora:	[Recoge las hojas e inicia la socialización de esta parte del trabajo] Bueno, la primera parte de la actividad era mirar las dos figuras, la Figura 1 y la Figura 2 y mirar cuáles eran las semejanzas y diferencias. ¿Cuáles eran las semejanzas?
450.	Natalia:	Las congruencias.
451.	Profesora:	¿La congruencia de qué?
452.	Daniel:	De ángulos y de segmentos.
453.	Profesora:	De ángulos y de segmentos. ¿Sólo había ángulos y segmentos? [silencio]. ¿Sólo había ángulos y segmentos? [silencio] Pregunta: ¿Sólo había ángulos y segmentos?
454.	Natalia:	Y arcos.
455.	Profesora:	También había arcos de circunferencia, ¿cierto? entonces por acá dice, por aquí hablan del arco *JK* congruente con el arco *FD*, hablan de perpendicularidad, determinaron que este ángulo *NMJ* era recto, hablan por acá de congruencia entre los segmentos, entonces dicen *MN* es congruente con *BC*, *KL* es congruente con *DR*, por aquí también hablan de las congruencias. ¿En que se diferenciaban las figuras? [Leyendo las hojas que entregaron los estudiantes] Por acá dicen: *la figura 1 y la figura 2 se encuentran en diferentes semiplanos determinados por la recta m*. ¿Quién es la recta *m*? Todavía no sabemos ahí quién es la recta *m*. Me dicen que están en diferentes semiplanos. Dice: *los puntos de la figura 1 y de la figura 2 están*, bueno *están nombrados diferente*. Diferencias: muestran un dibujo, muestran este como si estuviera uno debajo del otro:  y en el otro muestran… la figura aparece así:

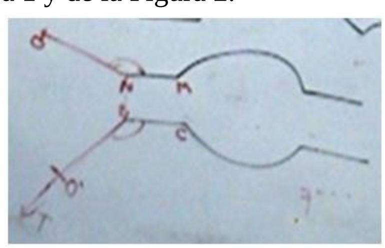


O sea dice, debería aparecer así para que se vea igualita pero aparece así, están en diferente posición en el plano. Las figuras están hacia lados opuestos. ¿Cuándo hablamos de lados opuestos? O sea, ¿cuándo hablamos de opuestos? Bueno, hablamos de lados opuestos en los polígonos, pero también hablamos de están en lados opuestos, están en lados diferentes, están en semiplanos diferentes. Por acá dice… no hay diferencias, por acá tampoco hay diferencias y por acá tampoco.

La segunda parte de la actividad decía: [Leyendo] *Añada un trozo más a la Figura 1 partir del punto Busque una manera de encontrar el trozo correspondiente en la Figura 2 y trácelo. Describa un proceso geométrico para encontrar el trozo correspondiente.* Entonces, todos me decían pues tiene que ser de igual medida el segmento *NO*, ¿cierto? al segmento que salga, tienen que ser congruentes y además el ángulo que se forma entre *MN* y ese otro punto *O* tiene que ser congruente con *CB* y el punto *O'* que encontraban. ¿Cierto? Todos afirmaron eso. ¿Qué decían? Bueno, pues copiemos el ángulo y copiemos el segmento. Entonces, la explicación que todos dan es el proceso para construir un ángulo congruente… Por aquí dice ángulo congruente, ángulo congruente y luego hacen el segmento congruente. Entonces, la mayoría lo que hizo fue por acá fue segmento *NO*, copió este ángulo [ángulo *MNO*] aquí [dibuja el segmento correspondiente en la segunda figura], copiaron el ángulo más o menos por aquí.



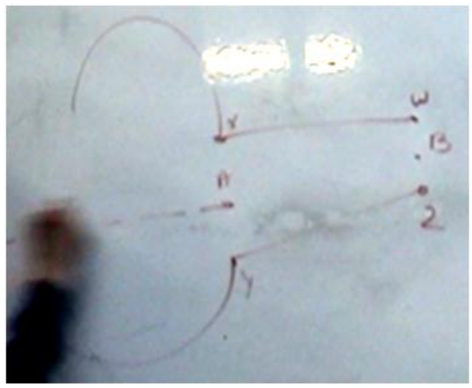
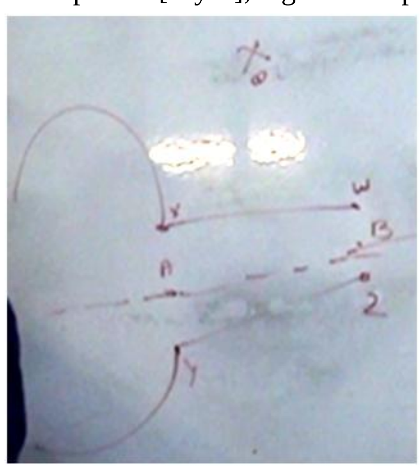
¿Cómo copiaron el ángulo? Pues haciendo una circunferencia aquí [señala el punto *N]*, luego la copiaron aquí [señala el punto *B*] Bueno, el proceso de copiar ángulos y luego lo que hicieron fue tomar la medida de *ON* y copiarla sobre este rayo *BT* y encontrar el *O'* de tal forma que se formara este ángulo congruente [señala los ángulos *MN*O y *CBO'*] y estos dos lados fueran congruentes [señala los lados *NO* y *BO'*]. Estos dos lados de la Figura 1 y de la Figura 2.

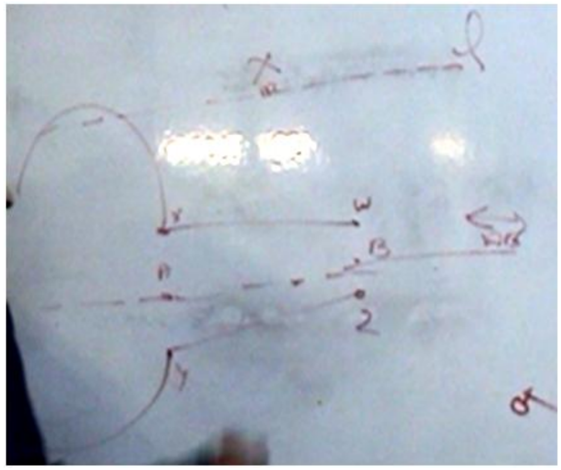
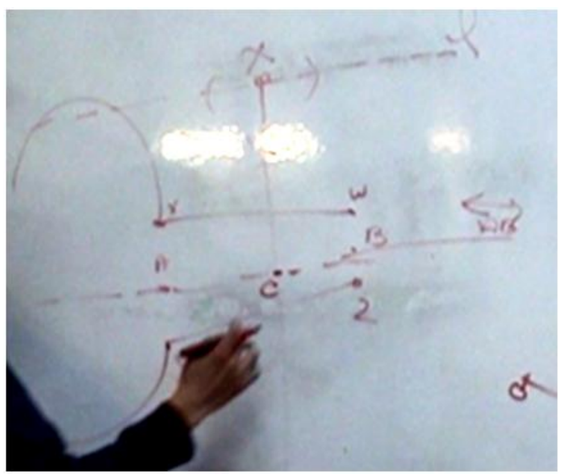


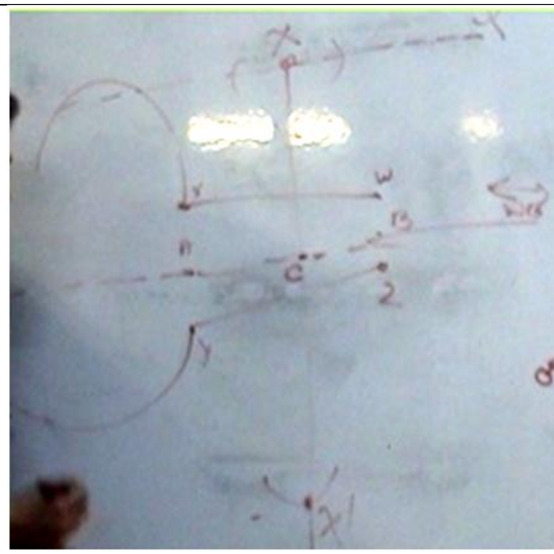
Todos hicieron lo mismo, ¿cierto? ¿Aquí hizo algo diferente?

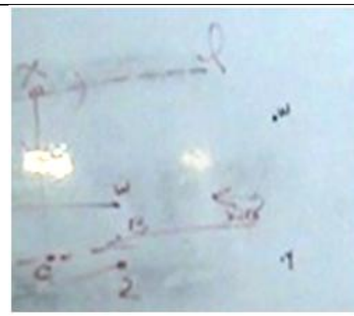
Para la parte 3, [leyendo] *considere la siguiente definición: Una*

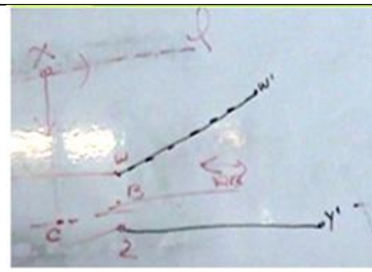
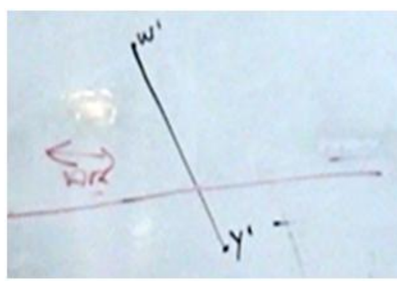
		transformación es una correspondencia entre los puntos de un plano tal que: todos los puntos del plano tienen imagen, entonces *B* es imagen de *N; todo punto del plano es imagen de un punto del plano*, *B* es imagen de *N;* ningún par de puntos tienen la misma imagen, *N* y *R* no podrían tener la misma imagen, *B* es imagen de *N* y *C* imagen de *N* y, *ningún punto tiene dos imágenes*. Si tuviera dos imágenes no se podría encontrar la figura que tuviera la congruencia, ¿cierto? Misma forma, mismo tamaño, mismos ángulos sino que están en posición diferente. ¿Alguien tiene alguna pregunta sobre la definición de transformación? Miren que es lo mismo que una función. Es una función que hay entre los puntos que cumple que… ¿qué tipo de función sería?
456.	Estefanía:	Biyectiva.
457.	Profesora:	Biyectiva. ¿Cierto? [Leyendo] *¿Es posible considerar que la Figura 2 es imagen de la Figura 1 bajo alguna transformación ? Explique su respuesta.* ¿La Figura 2 era imagen de la Figura 1?
458.	Camilo:	Sí.
459.	Profesora:	¿Por qué? ¿Quién me explica? [silencio] ¿Por qué?
460.	Yolanda:	Porque cumple las condiciones.
461.	Profesora:	¿Cuáles condiciones?
462.	Yolanda:	Pues las que nos da la definición. La que cada punto tiene imagen, cada punto es imagen de uno solo y que ningún punto es imagen de otros dos.
463.	Profesora:	Listo. Cumple la definición de transformación. [Leyendo] *Si su respuesta es afirmativa, ¿cómo encontraría la imagen de un punto X, que no está en las figuras, bajo la transformación t?* Ahí fue donde casi todos se demoraron un poquito más. Si yo ubico el punto *X* aquí [dibuja un punto con el marcador rojo]:  El punto rojo sería el punto *X*, entonces surgieron varias ideas. Pues mire, yo trazo aquí este segmento [segmento cuyos extremos son *L* y el punto rojo] y entonces copio el ángulo *KLX*, lo copio en *DRX*', bueno *Y* y luego copio la medida del segmento. Entonces yo les decía, bueno, ¿será la única forma de hacerlo? Y si yo le quito todo esto y solo le dejo *L* y *R* yo le digo *R* es imagen de *L*, ¿cómo hacen para encontrar *X*' allí, el punto *X*'? Entonces me decían no pues tenemos que… todos había un grupo que quería siempre construir el ángulo congruente, siempre querían construir el ángulo congruente. Pero después se dieron cuenta de que no era necesario construir el ángulo congruente. ¿Qué procedimiento se podría realizar para encontrar *X*'? [silencio] ¿Qué procedimiento

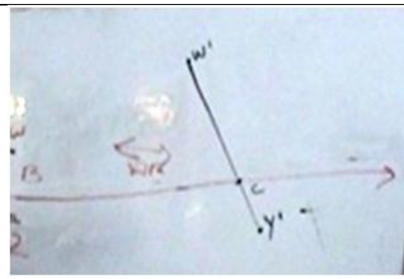
		utilizaron?
464.	Camilo:	Pues nosotros utilizamos ahí, le sacamos la línea simétrica. La recta simétrica…
465.	Profesora:	No sé que es una recta simétrica.
466.	Camilo:	Entonces, digamos de ahí sacamos el punto medio de dos… de cuatro puntos.
467.	Profesora:	¿De quienes?, por ejemplo *LR* y *KD*.
468.	Camilo:	No. [Pasa al tablero] De acá sacábamos el punto medio [punto medio del segmento *XY*] y después el punto medio [punto medio de *WZ*]. 
469.	Profesora:	Nómbralos [Llama *A* y *B* a los puntos medios de los segmentos *XY* y *WZ*, respectivamente].
470.	Camilo:	Digamos, sacamos la línea simétrica.
471.	Profesora:	No sé qué es una línea simétrica.
472.	Camilo:	Entonces, hacíamos una recta entre estos dos puntos [señala *A* y *B*]…
473.	Profesora	Ah, es la recta *AB*.
474.	Camilo:	Que pasara por estos dos puntos [*A* y *B*], digamos un punto *X*, ¿sí?  Digamos lo que hacíamos era una línea paralela…

475.	Profesora:	¿Una qué?
476.	Camilo:	Una <u>recta</u> paralela que pasara por este punto [señala el punto *X*] 
477.	Profesora:	¿Paralela? ¿A quién?
478.	Camilo:	A la recta…
479.	Profesora:	*AB*
480.	Camilo:	*AB*. Que pasara por el punto *X* y la llamábamos *l*. De aquí sacábamos la recta perpendicular que pasara por el punto *X* y con el compás… nombramos un punto *C*, ¿sí? 
481.	Profesora:	La intersección entre la recta perpendicular a *AB* y *AB*.
482.	Camilo:	Y aquí *X*, con el compás [señala la distancia *CX*] y sacábamos la circunferencia [traza un arco sobre la recta perpendicular a *AB* con radio *CX*] y encontramos el punto [llama *X*’ al punto hallado].

		
483.	Profesora:	Pregunta: ¿Es necesario hacer esa recta paralela?
484.	Estudiantes:	No.
485.	Camilo:	Para poder hacer esta perpendicular [recta *XC*].
486.	Profesora:	Ojo, hay dos procesos para sacar perpendicular. Dado un punto y una recta tal que el punto no pertenece a la recta o dado un punto y una recta tal que el punto pertenece a la recta, entonces es utilizado el otro procedimiento, utilizando solo esta recta [recta *AB*]. Por allá decían algo, ¿cómo se llama esta recta *AB* respecto a *XY* y respecto al segmento *W*Z?
487.	Andrea:	Es la mediatriz.
488.	Profesora:	O sea que ustedes lo que hicieron fue encontrar la mediatriz. ¿Por qué era la mediatriz?
489.	Daniel:	Porque pasa por el punto medio.
490.	Profesora:	O sea, para poder encontrar la recta si solo me dan el punto y su imagen encuentro la mediatriz del segmento determinado por el punto y su imagen, o el segmento cuyos extremos son el punto y la imagen. Estamos hablando como mal, ¿no? Estamos dándole los nombres que son. Entonces si me decían, encuentre la imagen de *X*, hacía la perpendicular a *AB* y copiaba la medida de este punto de intersección de la perpendicular [punto *C*] con la recta *AB* en el otro semiplano, ¿cierto? ¿Alguien hizo algo diferente? [silencio] Listo, les decían después: tiene aquí un punto *W* y tiene aquí un punto *Y* [dibuja dos puntos *Y* y *W*].

		 Pregunta: ¿*Y* es imagen de *W*?
491.	Camilo:	No.
492.	Profesora:	Por qué no. ¿Cómo sé que *Y* no es imagen de *W*?
493.	Camilo:	No se sabe.
494.	Profesora:	No se sabe. ¿Por qué no se sabe?
495.	Sergio:	Porque no se sabe a qué distancia está de la mediatriz.
496.	Profesora:	De la recta *AB*, no hablemos de la mediatriz sino de la recta *AB*.
497.	Sergio:	Pues sí, pero es que no se sabe.
498.	Profesora:	¿Por qué no se sabe?
499.	Juan:	No se sabe porque *Y* puede tener diferente distancia a *W*, puede que estén en la misma recta pero puede que tengan diferente distancia. O puede que tengan la misma distancia, no sé.
500.	Profesora:	¿Y ahí? [cambia la ubicación de los puntos *Y* y *W*] 
501.	Camilo:	Profe, ¿estamos hablando de que los puntos pertenecen a esa figura o son puntos cualquiera?
502.	Profesora:	No yo solamente quiero, podría, podría tener el segmento [traza el segmento cuyos extremos son los dos puntos llamados *W*, llama a los dos últimos puntos dibujados *W*' y *Y'* así que los extremos del segmento dibujado son *W* y *W*'], podría tener este segmento [segmento *WW*'] y yo les pregunto: ¿este segmento [segmento Z*Y'*] es imagen de este [segmento *WW*'] con la transformación *t*?

		
503.	Camilo:	No.
504.	Profesora:	Y si no tengo el segmento [borra el segmento Z*Y'*], puedo hacer la misma pregunta con los puntos. ¿*Y'* es imagen de *W*'?
505.	Julia:	Pues no porque se supone que la transformación *t* dice que respecto a la recta *AB* tienen que ser… pues, tener la misma distancia *W* a la recta *AB* y *Y* a la recta *AB*, entonces ahí no se cumple.
506.	Profesora:	Y cuál es la otra condición.
507.	Julia:	Que el segmento *WY* sea perpendicular a la recta *AB*.
508.	Profesora:	A simpe vista, ¿podemos saber si sí o si no? ¿A simple vista o tendríamos que verificar? Depende, ¿no? Pues aquí a simple vista, no pero si yo hubiera puesto el punto *Y* por acá, podría ser que sí o podría ser que no. O sea, lo que dice Juan es cierto, no se sabe hasta verificar las condiciones. ¿Cómo haríamos para verificar? ¿Quién pasa y nos muestra? Pasa.
509.	Julia:	[Pasa al tablero] Tendríamos que trazar este segmento [traza el segmento *W*'*Y'*] y luego tendríamos que… [La profesora prolonga la representación de la recta *AB*]. 
510.	Profesora:	Entonces mirarías si es…
511.	Julia:	Si son perpendiculares pero… no es.
512.	Profesora	No son perpendiculares. Y tendría que verificarse si la distancia de *C* a *W* y *CY* es la misma.

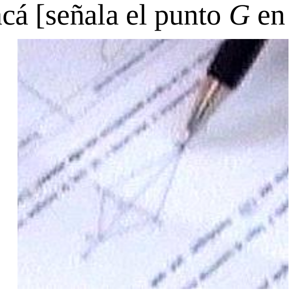
		 Como no son la misma, entonces *Y* no es imagen de *W* con la transformación *t*, en este caso.
513.	Profesora:	Ahora, la siguiente pregunta decía: [Leyendo] *¿Existirá una transformación similar,* que le cambiamos el nombre por *s*, *para que Y sea imagen de W?*
514.	Julia:	Ahí tendríamos en cuenta que antes decíamos que *AB* tenía que ser perpendicular y que equidistara de los dos, entonces lo que hacemos es trazar una recta por el punto medio de *WY* y que sea perpendicular a *WY*. Si hacemos que cumpla esas condiciones, entonces la transformación *s* haría que sí fueran imágenes.
515.	Profesora:	O sea, tocaría encontrar otra recta para que se cumpliera una transformación, una recta que fuera perpendicular y que pasara por el punto medio. El último punto decía defina transformación *t*, defina esa transformación. [Lee las siguientes definiciones escritas por los estudiantes] *Imagen de un punto en el plano que a través de procesos geométricos es correspondiente y tiene semejanzas con el punto del cual es imagen en el plano.* Por aquí dice: *una transformación t es una correspondencia entre los puntos de un plano tal que existe una recta l que contiene los puntos medios de los segmentos cuyos extremos son un punto y la imagen de este. Los segmentos deben ser perpendiculares a la recta l.* *Dada una recta l y un punto X, para hallar su imagen se debe trazar una perpendicular a la recta l que pase por X, siendo Q el punto de intersección entre l y su perpendicular, luego se hace circunferencia centro Q y QX para copiar la medida del segmento en el otro semiplano determinado por l.* *Figura 2 es una transformación de la Figura 1 si y solo si cada punto de la Figura 1 tiene como imagen un solo punto de la Figura 2 y la mediatriz de los segmentos cuyos extremos son un punto y su imagen es la misma recta para todos estos segmentos.* *Transformación: dos puntos son una transformación si y solo si primero, la recta l es simétrica,* no sé a qué se hace referencia con recta simétrica, *XM es congruente con XW, X y W pertenecen a l.* Por aquí dice: [silencio] no escribieron. ¿Ya listo?
516.	Verónica:	Está en la última hoja.

517.	Profesora:	[Continúa leyendo las definiciones]. *Transformación t: bajo esta transformación un punto es imagen de otro si y solo si hay una recta perpendicular al segmento cuyos extremos son el punto y su imagen tal que esa recta pasa por el punto medio del segmento*. Todos tienen la idea de… este sería, este se transforma en este [señala los puntos *W*' y *Y'*] si hay una recta que es perpendicular y que pasa por el punto medio. En general, vamos a hablar de la transformación para cada punto. Por eso se les puso de *X*, cuál sería la transformación de *X*'. No vamos a hablar en general de la transformación de una figura completa. Esta transformación, miren acá de *W* y *Y* se llama simetría axial, simetría axial. Definición de simetría axial [los estudiantes sacan sus cuadernos para escribir la definición]. Entonces, para utilizar la simetría axial yo les decía bueno, si no tuvieran nada en la figura sino solo la recta y el punto *X*, ¿cómo lo harían? Lo principal para que haya simetría axial es que haya una recta que se va a convertir en la mediatriz, o bueno, que no se va a convertir, que va a ser la mediatriz de todos los segmentos determinados por el punto y su imagen. Entonces, [dictando] con respecto a una recta *r*, simetría axial con respecto a una recta *r* es una transformación que a cada punto *A* del plano le corresponde un punto *A'* tal que primero: la recta *r* es perpendicular al segmento *AA'*, y segundo, si *P* es el punto de intersección entre *r* y el segmento *AA'*, entonces *AP* es igual a *A'P*, entonces *AP* es igual a *A'P*, o sea las distancias tienen que ser iguales. Ojo, no se llama recta simétrica, se llama eje de simetría. Esa recta *r* recibe el nombre de eje de simetría [Fin de la clase].

CLASE 2

Los estudiantes se organizaron en los mismos grupos de la clase anterior y se les entregó la Parte 2 del taller. En el grupo analizado leen la Tarea 4, buscan en sus cuadernos la definición de simetría axial escrita en la clase anterior y la leen.

518.	Felipe:	Sí, pues en el primero podemos escribir lo que te dije.
519.	Julia:	¿Qué?
520.	Felipe:	Que la… ¿cuál es la otra recta?
521.	Julia:	Dice que [leyendo]: *si es la imagen de bajo una transformación simetría axial respecto a una recta , ¿es también la imagen de bajo una simetría axial con respecto a otra recta ? Justifique su respuesta* [silencio].
522.	Felipe:	Yo digo que sí si la recta *p* tiene ciertas características, las que habíamos anotado respecto a la simetría axial, ¿no? [silencio]. O sea que *r* sea perpendicular al segmento *M'M.*

523.	Julia:	*p*.
524.	Sonia:	Sí, puede ser, sí. Entonces [escribiendo] *M'* es también imagen de *M* bajo una simetría axial… entonces, ¿aquí qué?
525.	Felipe:	Si *p* perpendicular…
526.	Julia:	A *MM'*
527.	Sonia:	Si estas características se cumplen. Si *p* es perpendicular a *MM'* segmento…
528.	Julia:	Tienes que ponerle otro nombre a un punto.
529.	Felipe:	Sí porque es que hay un punto *P*… pero *p* se llama…
530.	Julia:	Si *X* es el punto de intersección entre *p* y…
531.	Sonia:	Espere.
532.	Felipe:	[Dictando] Coma, si *X*…
533.	Sonia:	[Hace viñetas para separar las condiciones] Hagámoslo así: si tal cosa [señala la primera viñeta], si tal otra cosa [señala la segunda viñeta].
534.	Felipe:	Está bien.
535.	Sonia:	¿Si *X* qué?
536.	Felipe:	Si *X*…
537.	Sonia:	[Escribiendo] *Si X es el punto de intersección*…
538.	Felipe:	Entre *p* y el segmento *MM'* [Sonia escribe]. Deberías escribir eso como: si *X* pertenece a… ¿no?
539.	Sonia:	Pues no. [Escribiendo] Entonces, espérate que falta, entonces *MX*…
540.	Julia:	Es igual a *MX'*
541.	Sonia:	Sí. ¿Lo escribimos de la otra forma?
542.	Julia:	¿Así? ¿No?
543.	Felipe:	Como quieras.
544.	Julia:	Déjalo así.
545.	Felipe:	[Leyendo la Tarea 5] *¿Es posible que en una simetría axial algún punto sea imagen de sí mismo? Justifique la respuesta* [silencio]. Yo digo que sí, por ejemplo en este, acá [señala el punto *G* en la Tarea 6]. 

		¿No? Digamos acá, o sea, es un punto *G* que pertenece a la recta *GD* [señala la recta] y pues este punto *G* sería la misma imagen del punto *G*. Pues, lo pienso así, ¿sí?
546.	Julia:	Sí [silencio] ¿Y cómo ponemos eso?
547.	Felipe:	Que si este punto pertenece a la recta… eh, no, que si ese punto pertenece al eje de simetría, como lo habíamos anotado la clase pasada.
548.	Julia:	Listo.
549.	Sonia:	¿Entonces?
550.	Felipe:	[Dictando] Sí es posible que un punto sea…
551.	Sonia:	Pero…
552.	Julia:	No, sí, o sea, es posible si…
553.	Sonia:	[Escribiendo] Es posible si… y ahí da la condición.
554.	Julia:	Es posible si *G* pertenece a la recta *GD* y entre paréntesis eje de simetría.
555.	Sonia:	No, solo eje de simetría.
556.	Julia:	Bueno, entonces normal, sí.
557.	Sonia:	¿Si el punto pertenece al eje de simetría? [Escribe en la hoja].
558.	Julia:	Si quieres pues hazla con esta, ¿no? [le pasa una regla a Sonia y ella comienza a hacer la figura]. No, no, espera [le quita la hoja a Sonia y ella hace la figura].  [En el dibujo, la recta dibujada no es eje de simetría].
559.	Felipe:	Pero entonces esto estaría mal porque digamos, estas dos, esta… debe estar más arriba, mejor dicho.
560.	Julia:	Ah, sí, sí, deben ser simétricas [borra y arregla la figura]. Pero esta es una recta, ¿cierto? [señala el eje de simetría, hace las flechas para representar la recta y le pasa la hoja a Sonia].
561.	Sonia:	Ajá.
562.	Julia:	Pues ya, si quieres escríbelo ya ahí.
563.	Sonia:	Ah, bueno, listo.
564.	Felipe:	Pues ahí escribe *H* imagen de *H*.
565.	Julia:	*H* es imagen de *H* con respecto a la recta *HI*.

566.	Felipe:	[Leyendo el enunciado 6] *El punto J' es la imagen del punto J bajo la simetría axial respecto a la recta GD. Además, J y J' no pertenecen a la mediatriz del segmento GD. Justifique por qué el cuadrilátero GJDJ' es una cometa.* Cometa… [buscan en sus cuadernos la definición de cometa].
567.	Julia:	[Leyendo en su cuaderno]: *cometa es un cuadrilátero con exactamente dos lados adyacentes congruentes y ningún par de lados opuestos congruentes*.
568.	Sonia:	¿Y ahí qué?
569.	Felipe:	Y la definición de mediatriz… ¿la tienes ahí? [buscan en sus cuadernos].
570.	Julia:	[Leyendo] *l es la mediatriz del segmento AF si y solo si l es perpendicular a AF y l intersección AF es igual a D, D es el punto medio de AF*.
571.	Felipe:	Dice [leyendo]: *El punto J' es la imagen del punto J bajo la simetría axial respecto a la recta GD. Además, J y J' no pertenecen a la mediatriz del segmento GD. Justifique por qué el cuadrilátero GJDJ' es una cometa*. ¿Y aquí? [silencio].
572.	Sonia:	¿Tienes el libro? Que ahí estaba lo de cometa.
573.	Julia:	Pues yo tengo aquí la definición [se refiere a su cuaderno]. [Leyendo] Pero no, no sé [busca nuevamente la definición en su cuaderno y la lee] *Cometa es un cuadrilátero con exactamente dos lados adyacentes congruentes y ningún par de lados opuestos congruentes.*
574.	Sonia:	Pues estos dos son congruentes [señala los segmentos *JD* y *J'D*] y obviamente los opuestos no van a ser congruentes. Si es simétrico pues obviamente este es igual a este [*JD* y *J'D*] y este es igual a este [*JG* y *J'G*] o sea, van a ser congruentes como lo habíamos sacado en la otra.
575.	Felipe:	*J'* es la imagen de *J*, o sea que *H* es punto medio del segmento *JJ'*.
576.	Julia:	Ajá.
577.	Felipe:	[Leyendo] *J y J' no pertenecen*… [silencio]
578.	Sonia:	Por lo de la simetría, mejor dicho, este sería congruente a este [*JD* y *J'D*] y el ángulo sería el mismo [no señala ningún ángulo]. Y estos son adyacentes congruentes [*JD* y *J'D*] y adyacentes congruentes [señala los segmentos *JG* y *J'G*]. ¿Sí?
579.	Felipe:	Pues sí. ¿Te parece? [preguntándole a Julia].
580.	Julia:	Sí.
581.	Felipe:	Perfecto [silencio].
582.	Profesora:	[Se acerca al grupo] ¿Cómo van? ¿En cuál van?
583.	Julia:	En este [señala la figura de la tarea 6]. En el sexto.
584.	Profesora:	Bueno, ¿qué tienen?

585.	Felipe:	Tenemos que el punto *J'* es la imagen del punto *J* bajo la simetría axial respecto a la recta *GD* y que además *J* y *J'* no pertenecen a la mediatriz del segmento *GD* y hay que justificar por qué…
586.	Profesora:	O sea que también tienen, ¿qué más?
587.	Felipe:	Eh… que *H* es punto medio del segmento *JJ'*.
588.	Profesora:	Bueno, ¿y qué más?
589.	Felipe:	Que… [silencio]
590.	Profesora:	Si *H* es punto medio de *GD* [parece que se equivoca y se está refiriendo al segmento *JJ'*] y se supone que la primera condición era que fueran…
591.	Julia:	Perpendiculares.
592.	Profesora:	Perpendiculares, ¿cómo se llama…? ¿La recta *JD* [¿*GD*?] qué es respecto del segmento *JJ'*?
593.	Julia:	¿La recta *GD*? ¿Sí? [señala la recta *GD*]
594.	Felipe:	¿La recta *GD*?
595.	Julia:	Respecto a este [segmento *JJ'*] es la mediatriz, ¿no?
596.	Profesora:	Ah, es la mediatriz. ¿Y por qué sabes que es la mediatriz?
597.	Julia:	Porque… porque… porque se intersecan en un solo punto, pues aquí [señala el punto *H*]. Se intersecan en *D*… no, me perdí.
598.	Profesora:	O sea, yo digo: listo, tengo tales características, entonces yo concluyo que es mediatriz. ¿Qué debo saber para concluir que es la mediatriz?
599.	Julia:	Pues esto que es punto medio [señala el punto *H* y mueve el lápiz sobre el segmento *JJ'*], que *H* que es punto medio de *JJ'*
600.	Profesora:	Eso es lo que sé, ¿no? Que *H* es punto medio… que son…
601.	Julia:	Perpendiculares.
602.	Profesora:	Que son perpendiculares. ¿Y qué me lo justifica?
603.	Julia:	Pues que es mediatriz, por definición de mediatriz.
604.	Profesora:	Ah, entonces, ¿qué me está permitiendo decir que eso…? La definición de mediatriz me permite decir: pues esta recta [señala la recta *GD*] que es el eje de simetría pues es la…
605.	Julia:	Mediatriz.
606.	Profesora:	Es la mediatriz del segmento. Listo. ¿Qué más tienen? [silencio] ¿Qué necesitan mostrar?
607.	Julia:	Que es una cometa, justificarlo.
608.	Felipe:	Que el cuadrilátero es un cometa.
609.	Profesora:	¿Y qué es un cometa?

610.	Sonia:	Que tiene los lados adyacentes congruentes [señala *JD* y *J'D*] y que los opuestos no son congruentes.
611.	Profesora:	Ah, bueno. Y entonces, ¿cómo van a hacer para demostrar eso? [silencio] O sea, ¿qué tienen que demostrar?
612.	Sonia:	Por qué es una cometa. Justificar que sí es una cometa.
613.	Profesora:	Listo. O sea, ya me dijeron la definición de cometa: dos lados adyacentes congruentes y los lados opuestos no son congruentes.
614.	Julia:	Hay que mostrar que estos son congruentes [señala los segmentos *JD* y *J'D*] y que este y este [*JG* y *J'D*] y este y este [*JD* y *J'G*] no son congruentes.
615.	Profesora:	¿Pero son solo un par de lados adyacentes congruentes?
616.	Sonia:	No, no, no, son este [segmentos *JD* y *J'D*] y este [segmentos *JG* y *J'G*].
617.	Profesora:	O sea, ¿qué tienes que demostrar?
618.	Sonia:	Que este y este son congruentes [segmentos *JD* y *J'D*].
619.	Profesora:	Muéstramelo con figuras.
620.	Julia:	Que este y este son congruentes [señala los segmentos *JD* y *J'D* y hace las marcas que indican congruencia].
621.	Profesora:	¿Ese es el símbolo de congruencia? [no se ve qué símbolo hizo. Julia borra y corrige] ¿Y qué más?
622.	Sonia:	Y esos otros dos también, ¿no? [Felipe hace las marcas de congruencia en los segmentos *JG* y *J'G*].
623.	Profesora:	Cuando a mí me dicen cometa siempre tengo que, es decir, si me lo muestran gráficamente tengo que poner los símbolos, si no, es un cuadrilátero cualquiera. Bueno, ¿y cómo vamos a demostrar que esos dos segmentos son congruentes? [No señala segmentos. Silencio]. Hay muchas opciones para demostrar eso.
624.	Julia:	Pues es que se podría decir también tomando este punto, ¿no? [señala el punto *D*], pues este sería como, pues formaría como… [señala el triángulo *DJJ'*]… un triángulo isósceles y como estos dos son congruentes [segmentos *HJ* y *HJ'*] pues de ahí se pueden sacar estos dos [señala los segmentos *JD* y *J'D*].
625.	Profesora:	¿Por qué? [silencio]. Muéstrame… Resalten, si quieren, con otro color cuáles son los triángulos que dices, o qué triángulo van a utilizar.
626.	Julia:	Los dos estos [señala los triángulos *JHD* y *J'HD*].
627.	Sonia:	O sea, sería por acá, ¿sí? [toma la regla y la ubica sobre el segmento *JJ'* y lo resalta con otro color]
628.	Profesora:	Sí.
629.	Julia:	[Sonia resalta los segmentos *HD*, *J'D* y *JD* y le pasa la hoja a Julia]. Pues aquí tenemos que decir dos cosas: que este y este son congruentes [señala

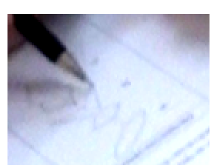
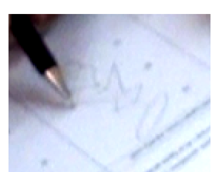
		los ángulos *JHD* y *J'HD*] y que este y este son congruentes [segmentos *JH* y *J'H*].
630.	Profesora:	¿Cómo? ¿Cómo? Otra vez, no vi.
631.	Julia:	Que tenemos que decir que este ángulo [señala el ángulo *JHD*]…
632.	Profesora:	Muéstralo con símbolos.
633.	Julia:	Que este ángulo y este son congruentes [hace las marcas de ángulo recto en los ángulos *JHD* y *J'HD*] porque… perpendicular [señala la recta *GD*].
634.	Profesora:	Bueno, porque esa es una perpendicular, listo.
635.	Julia:	Y este lado [segmento *JH*] y este [segmento *J'H*] también son congruentes.
636.	Profesora:	¿Por qué?
637.	Julia:	Pues porque como *H* es punto medio, pues son congruentes.
638.	Profesora:	Listo. ¿Y qué más tienes?
639.	Julia:	Y este lado también, ¿sí? [señala el segmento *DH*].
640.	Profesora:	¿Congruente con quién?
641.	Julia:	Con él mismo.
642.	Profesora:	Con él mismo.
643.	Julia:	Ajá
644.	Profesora:	¿Qué pueden utilizar ahora? ¿Con qué…?
645.	Julia:	Eh… un criterio.
646.	Profesora:	Criterio lado, ángulo…
647.	Julia:	Lado.
648.	Profesora:	Lado, ángulo, lado. Aquí no nos sirve el hecho hipotenusa-cateto porque lo que conocemos son los catetos y no la hipotenusa.
649.	Julia:	Ajá.
650.	Profesora:	¿Y en este? [señala el triángulo *JGH*]
651.	Felipe:	Pues lo mismo.
652.	Sonia:	Podríamos utilizar lo mismo, ¿no?
653.	Profesora:	Lo mismo. Listo. Escribamos los pasos generales. O sea, escriban más o menos los pasos que utilizarían para demostrarlo. [Dirigiéndose a todo el grupo]: Para el Punto 6 no vamos a hacer el diagrama deducción. No alcanzamos. Van a escribir los pasos generales, ¿sí? Entonces, un ejemplo de pasos generales: si yo tengo que demostrar que… los triángulos cuando trazo el segmento cuyos extremos son los puntos medios de los lados es paralelo al otro pues lo que tengo que… son

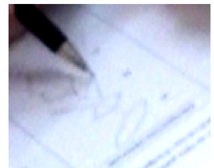
		paralelos, ¿cierto? entonces voy a demostrar que los triángulos son semejantes. En general, los pasos que tengo que hacer es encontrar los ángulos correspondientes, decir que son congruentes y luego utilizar el criterio ángulo-ángulo, entonces eso es lo que vamos a hacer, vamos a escribir los pasos generales, no vamos a hacer la demostración como tal, pero quiero que me pongan lo que ustedes pondrían en un qué se, en un qué uso, más o menos. ¿Qué cosas utilizarían? Entonces mire, pues yo tendría que demostrar que son… eh… adyacentes, entonces yo coloco: demostrar que tal y tal son adyacentes, pero no vamos a hacer todos los pasos, ¿listo?
654.	Julia:	Entonces pues sería, aquí tenemos que… pues como *J*, que como *GD* es perpendicular al segmento *JJ'*...
655.	Sonia:	Demostrar que…
656.	Julia:	Pues ahí ponle que demostrar que *JD* y *J'D* son congruentes [Sonia escribe].
657.	Sonia:	Adyacentes congruentes.
658.	Julia:	Que son congruentes.
659.	Sonia:	Entonces tenemos que el ángulo *H* es recto pues entonces ángulo *H* es congruente con ángulo *H* [por la explicación que le hicieron antes a la profesora, se refieren a que el ángulo *JHD* es congruente con el ángulo *J'HD*].
660.	Julia:	Y que *JH*… pues ponle que *H*… ah, pero ya tenemos que *H* es punto medio, ¿sí?
661.	Felipe:	Eh… no.
662.	Julia:	Pues ponle que *H* es punto medio de… Por definición de mediatriz… Así: por definición de mediatriz, *H* es punto medio del segmento [señala el segmento *JJ'*].
663.	Sonia:	[Escribiendo] Segmento *JJ'*.
664.	Julia:	Entonces, segmento *JH*…
665.	Felipe:	*JH* congruente con…
666.	Sonia:	Con *JH'*. Con *J'H* [escribe]. Listo. Ah, pero no pusimos los triángulos [silencio]. Pues eso a lo último, ¿no?
667.	Julia:	Pues ponlos aquí [señala el primer renglón de esa respuesta].
668.	Sonia:	Ah, bueno.
669.	Julia:	O sea, después de esto [lo que tenían escrito en el primer renglón] como un punto aparte.
670.	Sonia:	Bueno, pongámoslo así [hace una viñeta como las que está usando para cada uno de los pasos]. ¿Triángulo qué?

671.	Julia:	*JHD* y *DHJ*' [Sonia escribe]. Entonces *HD* congruente con *HD.*
672.	Sonia:	Bueno, ahora sí [sigue escribiendo en la parte de abajo].
673.	Julia:	Entonces por criterio ángulo, ángulo…
674.	Sonia:	Lado, ángulo, lado.
675.	Julia:	Lado, ángulo, lado, perdón.
676.	Sonia:	*JD* congruente con *J'D*. Y pues también el otro.
677.	Julia:	Lo mismo, ¿no?
678.	Sonia:	Lo mismo.
679.	Julia:	¿Qué hacemos? ¿Lo volvemos a escribir o ponemos que son las mismas partes pero con los otros triángulos?
680.	Sonia:	Sí, análogamente [escribe].
681.	Julia:	Para los triángulos *JGH* y *J'GH.*
682.	Camarógrafa:	Pero tienen que tener la correspondencia, ¿no?
683.	Julia:	Igual toca escribir todo. Entonces ponle que ángulo *H* es congruente con ángulo *H*.
684.	Felipe:	Segmento *JH* congruente con *J'H.*
685.	Sonia:	*HG* congruente con *HG*.
686.	Julia:	Y pues, por criterio lado, ángulo, lado… lo mismo del otro.
687.	Sonia:	*GJ* congruente con *GJ'*
688.	Julia:	[Leyendo] *Siete. ¿Existen una figura geométrica y una recta r tal que la imagen bajo la simetría axial con respecto a la recta r de la figura geométrica sea ella misma?* [silencio]. No entendí.
689.	Sonia:	Bueno, una figura de estas [señala la tabla de la Tarea 8], no sé. Digamos que fuera esta [señala la Figura ii].
690.	Julia:	[Leyendo] *una recta r tal que la imagen bajo la simetría axial con respecto a la recta r de la figura geométrica sea ella misma.*
691.	Sonia:	¿Sea ella misma? [silencio]
692.	Felipe:	Es que confunde [silencio]. ¿Un segmento es una figura geométrica?
693.	Julia:	Yo creo que no.
694.	Felipe:	¿No? Pues yo tampoco, ¿entonces?
695.	Julia:	No, no sé.
696.	Felipe:	Porque, o sea…
697.	Sonia:	Yo pensé en un rectángulo.
698.	Julia:	O un cuadrado.

699.	Sonia.	O sea, la figura geométrica viene siendo la misma. O sea, que digamos acá [señala la Figura **b**], pues sí, es el espejo, pero está complejo.
700.	Felipe:	Pues no sé. Pues es que confunde.
701.	Julia:	[Dirigiéndose a la profesora que se acaba de acercar al grupo] No entendemos esto [señala la Tarea 7].
702.	Profesora:	¿Cómo?
703.	Julia:	Nos confundimos con este punto. No entendemos.
704.	Profesora:	[Leyendo] *¿Existen una figura geométrica y una recta r tal que la imagen bajo la simetría axial con respecto a la recta r de la figura geométrica sea ella misma?Explique su respuesta* [silencio]. Eh… ¿cómo hago para no decirles todo? [silencio]. Yo tengo una figura, hago la recta. Cuando yo hago simetría axial, ¿puedo obtener la misma figura original? [silencio]. Miren el Punto 8 y el Punto 7 al tiempo [se retira del grupo].
705.	Sonia:	Estas tienen simetría axial [señala las figuras de la primera columna en la Tarea 8]. Hay que ponerle la recta de tal manera que quede la misma figura [Julia ubica la regla en lo que sería uno de los ejes de simetría de la figura **a**]. Pero queda al revés, ¿sí? Es la misma pero queda al revés. Es decir, la posición cambia pero la figura sí es la misma.
706.	Julia:	[Traza un eje de simetría en cada una de las otras dos figuras] Es la misma.
707.	Sonia:	¿Si ves? Digamos, está diciendo, tienes esta figura [señala la Figura **b**], al otro lado te va a quedar la misma, solo que están en diferente posición pero es la misma figura. Este va a ser congruente con este [señala la parte de la figura a un lado del eje de simetría y luego la parte al otro lado. Silencio].
708.	Julia:	Espérate que la profe está ocupada [silencio].
709.	Camarógrafa:	¿Y entonces?
710.	Julia:	No sé explicarlo [silencio].
711.	Felipe:	Yo digo que no.
712.	Camarógrafa:	Que no ¿qué?
713.	Felipe:	Que no, o sea, que no existe una figura geométrica y una recta tal que la imagen bajo la simetría axial con respecto a la recta sea… o sea, la imagen sea ella misma. Yo creo que no.
714.	Sonia:	Ah, ¿la imagen? Ah, ya, ya. Lo había entendido mal.
715.	Felipe:	Porque por ejemplo, esta imagen [señala la parte de la Figura **b** que está a un lado del eje de simetría] no sería la misma que esta [señala el otro lado de la figura]. Tal vez serían semejantes o congruentes pero no serían la misma [silencio]. Entonces no. Pues, creo yo.
716.	Julia:	Pues… no sé.

717.	Sonia:	Yo tampoco. Ya me confundí. Tenía una idea pero no, ya no [silencio]. Yo decía que sí pero porque yo decía que esta es la misma pero al otro lado [señala un lado de la Figura **b**, mueve la mano para indicar que se refleja y señala el otro lado de la figura]. [Silencio]. No, pues sí es la imagen, pero… [silencio].
718.	Julia:	Acá nos dicen: [leyendo] *defina figura con simetría axial* [silencio]. ¿No sería la misma definición de simetría axial? ¿Una figura que cumple con esas condiciones? [silencio]. Es que este punto es el que yo no sé [señala la Tarea 7]. Es que era lo que yo había pensado, lo que te dije, pero no sé [silencio]. Es que no entiendo esta parte, que sea ella la misma figura.
719.	Sonia:	Exacto, es que yo lo entendí así, por eso te decía que sí porque acá, así si se voltea [señala la Figura **b** y mueve los dedos indicando que se refleja] pues va a ser la misma figura, ¿no? que van a ser congruentes, lados, ángulos son congruentes.
720.	Julia:	Entonces…
721.	Felipe:	Es que… no sé.
722.	Sonia:	No, sí, es como eso. Que si fuera la misma figura, pues sí [silencio].
723.	Felipe:	¿Pues es que te acuerdas lo que te había dicho? O sea, digamos, para que este punto sea imagen de él mismo tiene que pertenecer a la recta [señala el punto *G* en la figura de la Tarea 6] y pues para… o sea, una figura como tal no existiría. Digamos, ¿no? Existiría un segmento que es imagen de él mismo o, no sé, un rayo que es imagen de él mismo, pero es que como tal una figura… no, no creo.
724.	Sonia:	Pues sí, pues yo lo tomé así porque es que, si se cogiera un espejo, igual se me estaría reflejando la misma vaina, pero… [Silencio]
725.	Julia:	¡Profe! [Se dirige a Felipe]: Pues dile lo que estabas diciendo.
726.	Felipe:	[Se acerca la profesora] Profe es que, o sea, para este punto nosotros nos centramos más o menos en el primero, que nos decían que si un punto podría ser imagen de sí mismo, entonces nosotros dijimos que sí pero ese punto tiene que pertenecer a la recta. Por ejemplo, aquí [señala el punto *G* en la figura de la Tarea 6] *G* sería imagen de *G*, ¿sí? entonces, como acá nos preguntan que si una figura… pues, o sea, yo diría que no, o sea, no existe una figura como tal que sea imagen de ella misma.
727.	Profesora:	Bueno, ¿puedo preguntar qué hicieron acá? [señala la Figura **b**].
728.	Felipe:	Pues ahí, o sea, trazamos la recta que…
729.	Julia:	El eje…
730.	Sonia:	El eje de simetría.
731.	Profesora:	El eje de simetría. Entonces si yo le hago… si yo tengo esta figura [señala una parte de la Figura **b** que queda a un lado del eje de simetría]

		 y le hallo, respecto a ese eje [señala el eje de simetría] sus imágenes, ¿quiénes serían?
732.	Felipe:	Pues la imagen de este punto sería este y la imagen de este punto sería este y la imagen de este punto sería este [señala puntos correspondientes en los dos lados de la Figura **b**].  
733.	Profesora:	Ajá. En general, de todos estos [señala un lado de la figura], serían estos [señala el otro lado de la figura].
734.	Julia:	Ajá.
735.	Profesora:	Y si yo a esta imagen [señala el otro lado de la Figura **b**]  a esta parte de la figura, es una figura completa, primero le hice la imagen a esta [señala un lado de la figura] y ahora me voy a cambiar y le voy a hacer la imagen a esta [señala el otro lado de la figura]. Cuando yo le hago la imagen a esta [señala el mismo lado anterior] ¿qué figura se forma?
736.	Julia y Felipe:	Esta [señalan la imagen, el otro lado de la figura].
737.	Profesora:	O sea que las imágenes, ¿qué figura formaron?
738.	Julia:	La misma, ¿no?
739.	Sonia:	Todo esto [señala toda la Figura **b**]. La figura completa.
740.	Profesora:	La figura completa, ¿no? Cuando yo cogí este eje de simetría y le hice a esta la imagen [señala un lado de la figura] me surgieron estas [señala el otro lado]   Y cuando yo cogí esta [señala el segundo lado] y le hice la imagen me

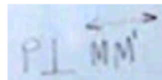
		surgió esta [señala el primer lado].  
741.	Julia:	Ajá.
742.	Profesora:	O sea que la figura era esta [recorre el borde de la Figura **b** con el lápiz] y sus imágenes, ¿quiénes eran?
743.	Julia:	La misma.
744.	Profesora:	Esta misma [recorre el borde de la Figura **b** con el lápiz].
745.	Julia:	Ah, listo, o sea que sí.
746.	Profesora:	¿Sí?
747.	Julia y Sonia:	Sí.
748.	Felipe:	Pues sí.
749.	Profesora:	Obviamente… porque es que lo mismo, cuando ustedes tenían este [señala la Figura 1 de la Tarea 1] pues se suponía que quedaba la misma figura, ¿no?
750.	Julia:	Ajá.
751.	Profesora:	Pero acá está respecto… si yo cojo el eje de simetría respecto a… ¿cómo lo digo? No es respecto… no es aparte, ¿sí? sino el eje de simetría con esta [señala un lado de la Figura **b**] y con esta [señala el otro lado de la figura b] para obtener la misma [silencio] ¿Sí? ¿Más o menos? ¿Él no ha entendido? Explíquenle.
752.	Felipe:	[Sonríe]. Pues…
753.	Sonia:	Haz como lo que yo te decía del espejo. Mira, algo así, si te dan esto… [tapa con la mano un lado de la Figura **b**].
754.	Felipe:	Pues es que según lo que yo le entendí a la profesora, o sea, me dijo que…
755.	Sonia:	Las imágenes, digamos, si buscas estas imágenes te queda esto [quita la mano y señala la parte de la figura que estaba oculta].
756.	Felipe:	Si yo hallo la imagen de esta [señala un lado de la Figura **b**] la imagen sería la de allá [señala el otro lado de la Figura **b**].
757.	Sonia:	Y luego, tienes esta [tapa el otro lado de la figura], pues la imagen es esta [quita la mano y señala la parte que estaba oculta]. ¿Y qué forman las imágenes?
758.	Felipe:	Pues toda la figura.
759.	Sonia:	La figura como tal, o sea, lo que les estaba diciendo.

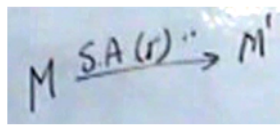
760.	Felipe:	Pues, pues o sea, yo no lo veía de eso modo por lo que habíamos tomado la clase pasada pero bueno, entonces sí.
761.	Sonia:	No, sí.
762.	Felipe:	Pero bueno.
763.	Julia:	O sea, que si tenemos una figura, ¿sí? y hallamos la imagen de esa figura y luego cogemos esa imagen y a esa imagen le hallamos su imagen, se forma toda la figura.
764.	Sonia:	Con las dos imágenes se obtiene la misma figura.
765.	Julia:	¿Sí?
766.	Sonia:	Sí.
767.	Julia:	¿Así lo dejamos? O… no sé.
768.	Sonia:	Sí, pero es que yo no sé redactarlo.
769.	Julia:	Al hallar las imágenes de cada lado del eje de simetría se obtiene la misma figura.
770.	Sonia:	¿Y en esta se obtiene la misma figura? [no se sabe a qué figura se refiere porque la grabación en video se interrumpió por unos minutos].
771.	Julia:	Pues eso era lo que te decía, que toda la figura, si le hallamos sus imágenes y luego hallamos esa imagen como, o sea, las imágenes como otra figura, y le hallamos la imagen, se va a formar la figura completa.
772.	Sonia:	Ajá, sí, se va a formar la figura completa. Sí, pero, ¿cómo lo redactamos?
773.	Julia:	Así, sigue escribiendo.
774.	Sonia:	Bueno, entonces [escribiendo] si tenemos una figura…
775.	Julia:	Ponle *A*.
776.	Sonia:	Una figura *A*.
777.	Julia:	Y hallamos sus imágenes, o la imagen de cada uno de sus puntos, ¿algo así? [silencio] Y luego tomamos *A'* como figura…
778.	Sonia:	Y hallamos sus imágenes… ¿su imagen?
779.	Julia:	Eh… La imagen de cada uno de esos puntos…
780.	Sonia:	Pero queda como… como si *A'* fuera un punto [silencio].
781.	Julia:	Las imágenes serán…
782.	Sonia:	Las imágenes de *A* y *A'* formarán…
783.	Julia:	No, hay que decir que las imágenes de *A'*, de la Figura *A'* van a ser *A* [Sonia escribe]. ¿Ya?
784.	Sonia:	Listo.
785.	Felipe:	Ahora, [leyendo] *Defina figura con simetría axial* [silencio]. Estas tienen simetría axial, estas no tienen simetría axial [se refiere a las figuras de la

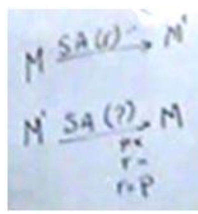
		Tarea 8].
786.	Julia:	Entonces sería decir que una figura tiene simetría axial si dada una recta que sea un eje… pues dado un eje de simetría, cada uno de sus puntos tiene una imagen… cada punto *A* de un semiplano determinado por la recta tiene la misma imagen, pues tiene la imagen, pues la que le corresponde acá según la definición de simetría axial.
787.	Sonia:	Eh… dado un eje de simetría…
788.	Julia:	Primero figura con simetría axial.
789.	Sonia:	[Escribiendo] Bueno, figura con simetría axial.
790.	Felipe:	Yo aún no comparto mucho lo del Punto 7.
791.	Julia:	¿Por qué?
792.	Felipe:	Pues no sé. Yo no lo veo de esa forma.
793.	Julia:	¿Tú cómo lo ves?
794.	Felipe:	Como te había dicho, pero si la profesora dijo que era así…
795.	Julia:	Pues no sé [silencio].
796.	Sonia:	Yo sí lo comparto. Desde el principio dije que era así.
797.	Julia:	Eh… una figura tiene simetría axial si…
798.	Sonia:	Si dado *r* que es eje de simetría…
799.	Julia:	Una recta *r*.
800.	Profesora:	[Dirigiéndose a todo el grupo] Bueno, cinco minutos más para que terminen y propongan la definición de figura con simetría axial, por favor [se acerca al grupo].
801.	Julia:	Pues una figura con simetría axial sería la que cumple estas condiciones, ¿no?
802.	Profesora:	¿Qué? Este es un ejemplo de figura con simetría axial y este es un contraejemplo. Eso es simetría axial desde un punto con respecto a otro punto. Y tú me estás diciendo, la figura tiene que cumplir las mismas condiciones.
803.	Julia:	Pues que todos los puntos, o sea, que todos los puntos de la figura cumplan esa condición.
804.	Profesora:	[Mirando las hojas del trabajo del grupo] Les falta la parte de…
805.	Julia:	¿Escribimos esa definición?
806.	Profesora:	Pues no sé. Escríbela.
807.	Felipe:	Eh… dada una recta como eje de simetría, si todos los puntos de las, del eje…
808.	Julia:	Que dado un eje de simetría axial…

809.	Sonia:	¿Eje de simetría axial o eje de simetría?
810.	Julia:	No, eje de simetría. O sea, es que cómo hacemos para poner que a cada punto de acá [señala un punto de la figura y luego su imagen]… le corresponde un punto de…
811.	Sonia:	Le corresponde un punto del otro lado, ¿no? Pues es que igual, o sea los puntos solo serían este y este, este y este, este y este, ¿no? [señala las parejas de vértices correspondientes de la Figura **b** que no están sobre el eje de simetría].
812.	Julia:	No porque igual a todos los puntos les corresponde… [señala puntos de la Figura **b** que no son vértices y sus correspondientes imágenes].
813.	Sonia:	Y después se van a formar segmentos.
814.	Julia:	A cada punto *A* le corresponde un punto *A'*, ¿no? A cada punto *A* de la figura le corresponde… su imagen *A'*.
815.	Felipe:	No pues pon que cada punto de la imagen, a cada punto de la figura le corresponde…
816.	Sonia:	De una figura… no, espera. Dada *r* como eje de simetría…
817.	Felipe:	A cada punto de…
818.	Sonia:	A cada punto *A* de la figura le corresponde una imagen [escribe] Le corresponde un punto *A'* que…
819.	Julia:	Que es la imagen.
820.	Sonia:	Que es la imagen, sí [escribe].
821.	Felipe:	¡Ah! Ya casi.
822.	Julia:	Ya, ya acabamos. [Se dirige a la camarógrafa]. ¿No grabaste?
823.	Camarógrafa:	No sé, no sé si grabó. Profe: que ya acabaron.
824.	Profesora:	Repitan, repitan lo último que dijeron.
825.	Felipe:	Ok.
826.	Profesora:	O sea, ¿qué hicieron?
827.	Camarógrafa:	Yo alcancé a grabar una parte del 7. Pero entonces, en resumen, ¿qué hicieron?
828.	Julia:	[Dice las conclusiones obtenidas porque esa parte del trabajo no se pudo grabar en video, solo en audio]. Bueno, entonces que, eh… si existe una figura geométrica y una recta *r* tal que la imagen bajo la simetría axial con respecto a la recta *r*, la figura geométrica sea ella misma. Entonces lo que hicimos fue, eh… que si tenemos digamos esta parte de la figura [con un borrador tapa un lado de la Figura **b**]

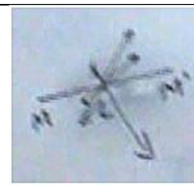
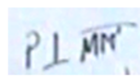
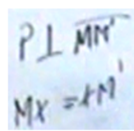
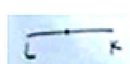
		 y le hallamos las imágenes, va a ser esta parte [muestra la parte de la figura que había tapado] y si hallamos ahora las imágenes de esta figura [muestra el lado que tapó inicialmente y con el dedo tapa el otro]  vamos a tener [señala la parte que había tapado]. Digamos, si le hallamos las imágenes a esta figura [con los dedos recorre la Figura **b** completa] vamos a tener esta [repite el mismo movimiento anterior], o sea que digamos vamos a formar la figura completa. Y ya. Y ahora, pues, la definición de una figura con simetría axial, entonces es que si tenemos una, bueno una recta *r* [señala el eje de simetría de la Figura **b**] que es el eje de simetría, entonces a cada punto *A* de este lado de la figura [muestra una parte de la figura a un lado del eje de simetría] le va a corresponder un punto… bueno, su imagen va a ser el *A’* en este lado de la figura [señala el otro lado de la Figura **b**].
829.	Felipe:	Bien […]
830.	Profesora:	[Dirigiéndose a todo el grupo] ¿Listo muchachos? Me entregan, por favor.
831.	Profesora:	[Después de unos minutos, la profesora ha recogido todas las hojas de la segunda parte del trabajo e inicia la socialización] Bueno, vamos a mirar del punto 4 al punto 8.a que es la segunda parte de la actividad, eh… dice: [Leyendo] *Si M’ es la imagen de M bajo una transformación de simetría axial respecto a una recta r*, pregunta: *¿es M’ también la imagen de M bajo una simetría axial con respecto a <u>otra</u> recta p? Justifique su respuesta.* Voy a leer lo que ustedes escribieron. [Leyendo] *Si p perpendicular a MM’ recta bajo transformación de simetría axial entonces M’ imagen de M con respecto a una recta r.* O sea que… bueno, ¿qué opinan de esto? [silencio] ¿Cierto o no cierto? Dice: que sí que si yo trazo la recta *p* se cumple la perpendicularidad entonces sí va a haber simetría axial. Primera cosa: ¿la única condición para que haya simetría axial es que haya perpendicular?
832.	Estudiantes:	No.
833.	Profesora:	¿Qué le falta a esa definición de simetría axial?
834.	Daniel:	Que haya un punto de intersección entre el segmento y la recta…
835.	Profesora:	Que haya un punto de intersección entre el segmento y la recta. Pero ese punto, ¿es cualquier punto?

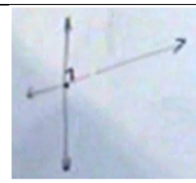
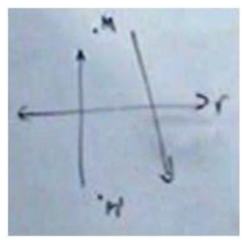
<table>
<tr><td>836.</td><td>Natalia:</td><td>Es el punto medio del segmento.</td></tr>
<tr><td>837.</td><td>Profesora:</td><td>Es el punto medio del segmento. Además, este grupo lo que escribió fue… además este grupo escribió lo siguiente: [escribe en el tablero] p perpendicular a MM’ recta.


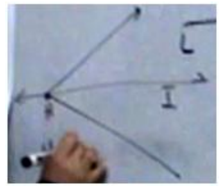
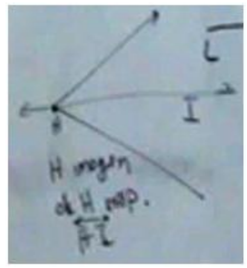
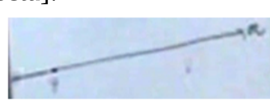
¿Es perpendicular a la recta MM’?</td></tr>
<tr><td>838.</td><td>Natalia:</td><td>No.</td></tr>
<tr><td>839.</td><td>Profesora:</td><td>No. Tiene que ser perpendicular al segmento MM’. Porque o si no, no sería punto medio y no podría hablar de que sí se cumple que sea la imagen de… que M’ sea la imagen de M. Por acá escribieron [leyendo] no porque el eje de simetría tendría que ser el mismo, es decir, la recta r sería la misma recta p. Me están diciendo: tengo un punto M, tengo la imagen y es M’ o el punto y su imagen. Ahora me dicen: esto lo hago bajo la simetría axial utilizando la recta r [escribe en el tablero].


Y ahora yo pregunto: si yo tengo M’, o sea, tengo la simetría axial, obtengo M, ¿bajo qué recta, p o r? Me están diciendo, no puede ser p, tiene que ser r, o r tiene que ser igual a la recta p.


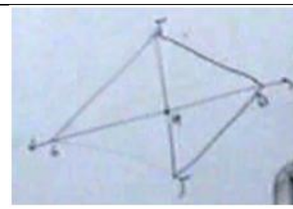
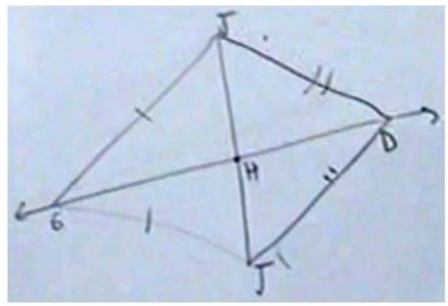
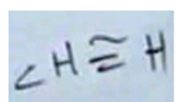
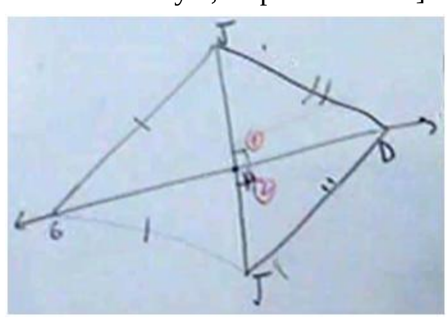
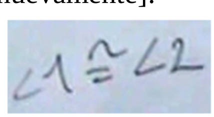
[Leyendo otra hoja] M y M’ no pueden ser imagen de la recta p porque dos puntos solo pueden ser imagen respecto a una recta, en este caso r. No es que M y M’ son la imagen de la recta p. M es imagen respecto a la recta p de M’, ¿listo? Me están diciendo: tendrían que ser dos líneas. Ojo con el vocabulario que están usando y cómo dicen las cosas. No puedo decir que, o sea, la simetría es respecto a la recta.
[Leyendo otra hoja] No porque dado el segmento MM’ existe una única recta r que pasa por el punto medio de MM’ segmento, por tanto no puede existir otra recta p que cumpla las mismas condiciones, por lo que no existe otra transformación axial respecto a la recta p. Ellos están diciendo, no porque todo, porque existe una única recta r que pasa por el punto medio de MM’. Les faltó algo, ¿cierto? [Dibuja en el tablero el segmento MM’] Este es el punto medio [ubica el punto medio de MM’ y lo llama L]. Por ese punto existen infinitas rectas.</td></tr>
</table>

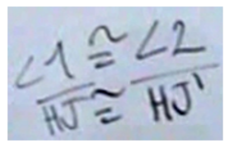
		 ¿Qué les faltó decir ahí?
840.	Estudiantes:	Perpendicular.
841.	Profesora:	Que sea perpendicular. Si yo tengo que sea perpendicular ya estoy diciendo esto. Creo que querían decir eso pero les faltó la perpendicularidad. Si yo lo dejo que pase por el punto medio, existen infinitas rectas. [Leyendo otra hoja] *Sí es imagen M' de M solo si la recta p es igual a la recta r para que haya simetría.* Haya con y, de haber [corrige en la hoja]. Bueno, [leyendo otra hoja] *parte dos, cuatro. M' es también imagen de M bajo una simetría axial si p es perpendicular a MM'* [escribe en el tablero].  *Si X es el punto de intersección entre p y MM', entonces*, bueno, también me están diciendo *MX tiene que ser igual a XM'* [escribe en el tablero].  Es decir que, ¿sí se puede bajo otra recta? [dirige la pregunta al grupo que escribió la respuesta]
842.	Julia, Felipe y Sonia:	Sí.
843.	Profesora:	¿Sí se puede otra?
844.	Julia, Felipe y Sonia:	Sí.
845.	Profesora:	O sea existe la transformación pero la recta se puede cambiar. Bueno, lo que decía el grupo de acá es cierto [señala un grupo]: dado un segmento y su punto medio, por ese punto existe una única recta que es perpendicular al segmento por ese punto [dibuja en el tablero un segmento y su punto medio].  En general, dada una recta y un punto sobre ella existe una <u>única</u> recta que es perpendicular por ese punto [dibuja en el tablero].

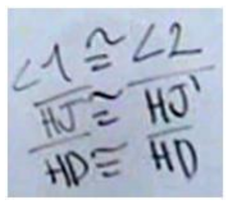
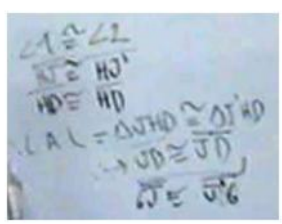
		 Eso es. Luego, *r* y *p* tienen que ser la misma recta, ¿por qué? Porque existe también, al igual que hicimos unicidad con las rectas paralelas, ¿se acuerdan que decíamos dada una recta y un punto existe una única recta paralela a esta recta? Pasa lo mismo con la perpendicular. Dada la recta y un punto sobre ella existe una única perpendicular o dada una recta y un punto fuera de ella existe una única perpendicular que me contiene al punto [dibuja en el tablero].  Por tanto solo puede haber una recta. Si yo tengo *M* y la recta *r* [dibuja en el tablero el punto *M*, la recta *r* y el punto *M'*] funciona que este [*M'*] sea imagen de este [*M*], que *M'* sea imagen de *M* y que *M* sea imagen de *M'* pero tienen que ser bajo la misma, utilizando la misma recta, ¿listo?  [Las flechas son para mostrar que un punto es imagen del otro]. ¿Por qué? Porque existe una única perpendicular. Quinto punto. [Leyendo] *¿Es posible que en una simetría axial algún punto sea imagen de sí mismo? Justifique su respuesta.* [Leyendo una de las hojas de un grupo] *No, cada punto tiene una imagen distinta que cumple las condiciones dadas en una simetría axial.* [Leyendo otra hoja] *Si y solo si el punto está sobre el eje de simetría*. [Leyendo otra hoja] *No es posible que un punto sea imagen de sí mismo en una simetría axial ya que para que exista imagen entre dos puntos se necesita una recta y dos puntos*. [Leyendo otra hoja] *No porque para que un punto sea imagen bajo una transformación simetría axial es necesario hallar el eje de simetría entre un punto y su imagen, luego si es un único punto no es posible hallar un eje de simetría*. [Leyendo otra hoja] *No es posible que en una simetría axial un punto sea imagen de sí mismo porque a cada punto del plano le corresponde un punto A', además por el hecho geométrico de la recta, una única recta la*

		determinan dos puntos: sería RR’ [en la hoja escribieron $\overleftrightarrow{RR'}$]. [Leyendo otra hoja] *Es posible si el punto pertenece al eje de simetría* y mostraban el ejemplo, mostraban lo siguiente [hace un dibujo]:  Y decían: *H es imagen de H respecto a HI* [escribe en el tablero]  ¿Quién me lee la definición? Bueno, hay unos que dicen que sí, hay unos que dicen que no. Los que dijeron que sí dijeron tiene que ser sí, pero solo si pertenece al eje de simetría. Y los que dijeron que no dicen no porque no existiría la recta entonces por tanto no hay distancia, etcétera. ¿Quién me lee la definición de transformación que tienen en la primera hoja que se les entregó?
846.	Felipe:	[Leyendo] *Una transformación es una correspondencia entre los puntos de un plano tal que: todo punto del plano tiene imagen, todo punto…*
847.	Profesora:	Espérate, ahí. Todo punto del plano tiene imagen. ¿Y lo otro qué era? Sigue leyendo.
848.	Felipe:	[Leyendo] *Todo punto del plano es imagen de un punto del plano.*
849.	Profesora:	Todo punto es imagen de otro.
850.	Felipe:	Ningún par de puntos…
851.	Profesora:	Espera. Todo punto es imagen de otro y todo punto tiene imagen. Supongamos que en el plano tengo mi recta [dibuja una recta en el tablero]. Si todo punto del plano tiene imagen, ¿cuál es la imagen de *P*? [ubica un punto *P* en la recta].  [Silencio]. O sea, yo voy a hacer simetría axial, si esa va a ser mi transformación, pero por definición de transformación yo tengo que todos los puntos tienen imagen. Con la simetría axial ya me ubiqué en un tipo de transformación. Me dicen: usted tiene que tener una recta, ¿cierto? Bueno yo tengo esa recta [la recta dibujada en el tablero] y tengo que hacer la transformación, pero todo punto del plano tiene que ser imagen de uno, todo punto tiene que tener imagen, ¿cuál es la imagen de

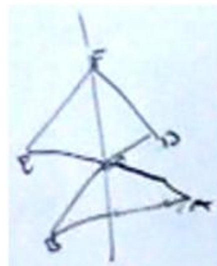
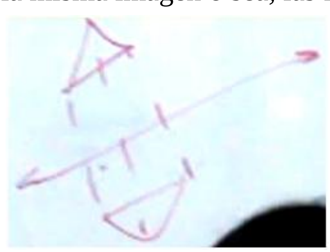
		P? [señala el punto *P* en el tablero]. [Silencio] ¿Cuál es la imagen de *P*?
852.	Luis:	*P*.
853.	Profesora:	Pues tiene que ser el mismo *P*, o sea *P* es igual a *P’* [escribe en el tablero *P*=*P*’]. ¿Por qué? Porque la distancia… ¿cómo lo digo? Si yo fuera a hallar las distancias, las distancia de este *P* a la recta y la distancia de *P’* a la recta, ¿cuál sería?
854.	Estudiantes:	La misma.
855.	Gonzalo:	Cero.
856.	Profesora:	Cero. O sea que la distancia de *P* a la recta es igual a la distancia de *P’* a la recta. Entonces, bajo cualquier transformación todos los puntos tienen que tener una imagen. Si yo digo: este punto no puede tener imagen [señala el punto *P*], quiere decir que hay infinitos puntos, de hecho, porque serían todos los de la recta, que no tendrían imagen y estaría contradiciendo la misma definición de transformación y no hay simetría axial si no se define transformación. Ahora, es correcto decir, un punto es imagen de otro punto bajo una simetría axial respecto a la recta *r* si y solo si el punto pertenece al eje de simetría, es decir, si el punto pertenece a la recta *r*. Tendríamos que decir bueno, entonces esa definición que nos dio de la perpendicular y de la distancia del punto medio a ese no se cumple para este. Bueno, se cumple pero es un caso, eh… ¿cómo se llama eso? Bueno, si se va a cumplir pero solo para puntos que no pertenezcan a la recta. De lo contrario, si el punto pertenece a la recta, pues bajo simetría axial su imagen va a ser él mismo ¿listo? ¿Preguntas hasta ahí? Ahora, si ustedes habían respondido que no, no entiendo cómo hicieron este punto y este punto [Tareas 7 y 8]. Porque en este [Tarea 8.a] implicaba trazar un eje y decir pues la imagen va a ser… esta parte es la imagen de esta [señala una parte de la Figura **b** y su imagen respecto al eje de simetría] y este punto [punto de la figura sobre el eje de simetría] entonces, ¿lo sacamos de la figura? Si usted respondió que no, no es posible en el Punto 5, tendría que decir lo mismo en el Punto 7 porque si no, no podría ser la figura imagen de sí misma. Quedaría un punto vacío o un punto sin incluir. Si usted respondió que sí en este [Tarea 7], necesariamente este también tenía que ser afirmativo [Tarea 5] porque se relacionaban con respecto a un punto que pertenece al eje de simetría. Si no, ustedes debieron haber respondido acá: no porque cada punto no puede ser imagen, o sea, un punto no puede ser imagen de sí mismo, por tanto este punto no existiría, este tampoco y entonces no habría, no se podría decir que la figura imagen es la misma figura inicial. Voy a leer los otros puntos… ah, no mentiras, ¿quién pasa y hace el sexto o nos explica cómo hacer el sexto?
857.	Daniel:	[Pasa al tablero y hace el dibujo de la Tarea 6]

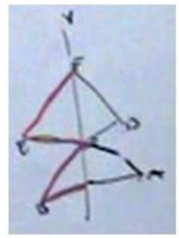
		 Pues, entonces veía que, es decir, que el cuadrilátero *GJDJ’* era una cometa y, ¿por qué era cometa? Entonces primero pues, para marcar que es cometa, la definición de cometa nos dice que los lados adyacentes deben ser congruentes [hace marcas en los lados *GJ* y *GJ’* para indicar que son congruentes y hace lo mismo en los lados *JD* y *J’D*].  y pues que ningún par de lados opuestos sean congruentes, entonces pues, acá por definición de transformación de simetría axial teníamos que esta [señala el segmento *JJ’*] es perpendicular la recta [señala la recta *GD*], ¿no? Entonces por lo tanto este ángulo es, son rectos ambos [hace las marcas de ángulo recto en los ángulos *JHD* y *DHJ*], entonces el ángulo *H* es congruente al ángulo *H*, ¿no? Por reflexiva [escribe en el tablero]: 
858.	Profesora:	¡Ojo! No es el mismo ángulo *H*, este es *JHD*, ponle uno y dos [a los ángulos *JHD* y *DHJ* los llama 1 y 2, respectivamente]. 
859.	Daniel:	Uno y dos. Uno y dos entonces son… [borra lo que escribió y escribe la congruencia de los ángulos nuevamente]: 

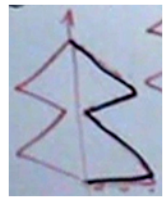
<table>
<tr><td>860.</td><td>Profesora:</td><td>Ángulo uno es congruente con ángulo dos. ¿Por qué?</td></tr>
<tr><td>861.</td><td>Daniel:</td><td>Pues porque ambos son rectos.</td></tr>
<tr><td>862.</td><td>Profesora:</td><td>¿Cómo se llama esa definición o hecho geométrico?</td></tr>
<tr><td>863.</td><td>Estudiantes:</td><td>Ángulos rectos son congruentes.</td></tr>
<tr><td>864.</td><td>Profesora:</td><td>Hecho geométrico ángulos rectos congruentes. Si dos ángulos son rectos, entonces son congruentes. Listo ¿Y ahora?</td></tr>
<tr><td>865.</td><td>Daniel:</td><td>Sabemos que *H* es el punto medio del segmento *JJ’* entonces por lo tanto esta es la misma distancia, es decir, son congruentes [hace marcas para mostrar que los segmentos *JH* y *J’H* son congruentes] o sea tenemos que el segmento *HJ* es congruente con el segmento *HJ’* [escribe en el tablero]:


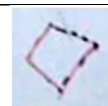
Ahora, tenemos que el segmento *HD* es el mismo para el triángulo *JHD* y *HJ’D*, entonces, pues *HD* por propiedad reflexiva es congruente, o sea las distancias son…

</td></tr>
<tr><td>866.</td><td>Profesora:</td><td>Los segmentos son congruentes por propiedad reflexiva.</td></tr>
<tr><td>867.</td><td>Daniel:</td><td>Eso. Entonces acá tenemos un lado [señala el segmento *JH*], un ángulo y un lado, entonces por criterio LAL…</td></tr>
<tr><td>868.</td><td>Profesora:</td><td>Lado, ángulo, lado.</td></tr>
<tr><td>869.</td><td>Daniel:</td><td>Lado, ángulo, lado, el triángulo *JHD* es congruente con el triángulo *J’HD,* entonces ahí por definición de congruencia de triángulos podemos sacar que *JD*, segmento *JD* era congruente al segmento *J’D*. Y allí ya teníamos demostrado que estos dos eran congruentes [segmentos *JD* y *J´D*]. Pues de esta misma manera se sacaba la congruencia de estos dos [resalta las marcas de congruencia en los segmentos *JG* y *J’G* y escribe en el tablero]:

</td></tr>
<tr><td>870.</td><td>Profesora:</td><td>Y ahora, bueno ya tienes la congruencia de los lados adyacentes. ¿Cómo</td></tr>
</table>

		muestro la <u>no</u> congruencia de los lados opuestos?
871.	Daniel:	Entonces, el ejercicio nos decía que los puntos *J'* y *J* no pertenecían a la mediatriz del segmento *GD*, entonces por hecho geométrico de la mediatriz, decimos que son dos hechos geométricos, uno es, nos decía que es el espacio geométrico que… donde equidistan dos distancias.
872.	Profesora:	Lugar geométrico.
873.	Daniel:	Donde equidistan los puntos.
874.	Profesora:	De los puntos que equidistan de los extremos del segmento. Sí señor.
875.	Daniel:	Ese es el hecho geométrico. Entonces, pues si no era la mediatriz, pues la distancia era diferente [señala los segmentos *GJ* y *JD*].
876.	Profesora:	No equidistan.
877.	Daniel:	No equidistan, entonces si la distancia es diferente pues los segmentos ya no son congruentes. Pues de esta manera llegamos a que no eran… a que era cometa.
878.	Profesora:	A que era cometa. Muchas gracias. ¿Preguntas de este ejercicio? Dice, voy a pasar al octavo. [Leyendo] *Defina figura con simetría axial*. Les presentaban ejemplos de simetría axial y contraejemplos, ¿cierto? Estos ejercicios los hemos hecho, ustedes ya se han preparado para el examen final y ya saben cómo son. Dice: [leyendo una de las hojas de los estudiantes] *Figura con simetría axial: una figura tiene simetría axial si dada r como eje de simetría a cada punto A de la figura le corresponde un punto A' que es su imagen*. No están diciendo mucho. [Leyendo otra hoja] *Unión de puntos que con respecto a la recta r y sus puntos imagen bajo transformación axial cumple las condiciones.* [Leyendo otra hoja] *Dada una figura y una recta el cual va a ser eje de simetría hay una transformación de un punto A de la figura, a un punto A de la figura le debe corresponder un punto A' ya que el eje de simetría es perpendicular a A'.* Por aquí decían, dice [leyendo otra hoja]: *si a cada punto de la figura, si tomamos una figura geométrica y una recta r que divida en semiplanos, que los divide en semiplanos, cada punto P es imagen del punto P' y P' es la imagen*. [Leyendo otra hoja] *Dada una figura y una recta el cual va a ser eje de simetría y una transformación*… ah, no eso ya lo había leído. [Leyendo otra hoja] *Una figura tiene simetría axial si y solo si bajo una transformación con respecto al eje de simetría cada punto tiene una única imagen tal que la figura formada es imagen de sí misma.* ¿Qué quiere decir eso, imagen de sí misma? [le pregunta al grupo que escribió esa respuesta].
879.	Yolanda:	Pues, más o menos lo que está en el… [se levanta y pasa al tablero]
880.	Profesora:	Me dicen: [leyendo la definición escrita por el grupo] *una figura tiene simetría axial si y solo si bajo una transformación con respecto al eje de*

		simetría cada punto tiene una única imagen tal que la figura formada es imagen de sí misma.
881.	Yolanda:	Entonces, digamos como el ejemplo que estaba ahí [señala la hoja] que era sí como algo así, ¿sí? [dibuja la Figura **b** de la tarea 8.a] suponiendo que este sea el eje de… [dibuja la figura y el eje] el eje de simetría entonces, pues digamos este punto es imagen de este de acá [Señala dos puntos pero no se ve a cuáles se refiere. Luego, nombra seis puntos con *F*, *E*, *D*, *C*, *B* y *A*]. Entonces, *A* es imagen de *B*, *D* de *E*, ¿sí? 
882.	Profesora:	*C* de *C* y *F* de *F*.
883.	Yolanda:	Sí.
884.	Profesora:	¿Y qué pasa con que *D* sea imagen de *E*?
885.	Yolanda:	Pues [silencio]. Lo que nosotros, lo que escribimos allí fue que digamos, esta figura, o sea que, digamos, como en el punto anterior.
886.	Profesora:	Eh, decía [lee la respuesta del grupo en la Tarea 7]: *sí. Al haber una recta r que sea eje de simetría de una figura geométrica, existe una única imagen para cada punto por lo que la imagen forma la misma figura*. ¿Cómo así que la imagen forma…? ¿La imagen de quién forma la misma figura?
887.	Yolanda:	Pues esta parte, o sea, esta parte es como la imagen de esta, ¿sí? [señala las dos partes de la figura a cada lado del eje de simetría], entonces es la misma figura [hace con la mano un gesto para indicar que es la misma figura reflejada].
888.	Profesora:	Pero qué pasa si es una simetría. Si yo tengo esta [dibuja una recta], si yo hiciera esto [dibuja un triángulo y su imagen respecto a la recta], trazaría una perpendicular y es la misma imagen o sea, las figuras son iguales. 
889.	Yolanda:	Pero tienen que compartir un… un eje.
890.	Profesora:	¿Cómo así que tienen que compartir un eje?

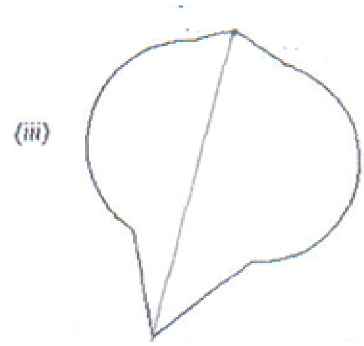
891.	Yolanda:	Digamos estos dos no son… no están ninguno de los dos sobre esta [señala la recta en el dibujo].
892.	Profesora:	Bueno, tú me dices: esta [resalta con rojo un lado de la figura que hizo la estudiante]  es la imagen de este [señala el otro lado de la figura]. ¿Y dónde está la figura que tú me dices?
893.	Yolanda:	Pues…
894.	Profesora:	Si la figura es la mitad.
895.	Yolanda:	Pues contando esto, digamos la parte de acá [parte negra].
896.	Profesora:	¿Quién es la misma figura? ¿Esta es la figura inicial no más? [señala la parte negra].
897.	Yolanda:	Sí, digamos esta…
898.	Profesora:	Pero si yo tengo esta figura [dibuja una línea poligonal],  le trazo el eje de simetría y encuentro los otros pero estas son las imágenes [línea punteada] y esta es la figura [figura inicial]. 
899.	Yolanda:	Sí.
900.	Profesora:	Es diferente a lo que está ahí [señala la hoja de la tarea]. Ahí tú tienes esta figura  y tú me estás diciendo –esta es la figura inicial–, tú trazaste un eje que

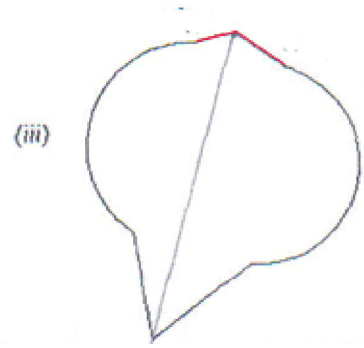
		existe ahí, me estás diciendo: a este lado le hallo la imagen, listo esta es la imagen [señala el lado izquierdo de la figura y resalta el lado derecho], y si yo borro la figura de debajo, ¿qué pasa? [silencio] Préstame el marcador [Yolanda le entrega el marcador negro]. Voy a hacer la imagen de esta [señala el lado izquierdo de la figura y resalta con negro el lado derecho]. Me queda esto.  ¿Me quedó la figura inicial?
901.	Yolanda:	No.
902.	Profesora:	¿Por qué no?
903.	Yolanda:	Porque esta está para acá [con la mano hace un movimiento para indicar que la figura está reflejada].
904.	Profesora:	¿Entonces?
905.	Yolanda:	Pues entonces partiendo de un lado, pues es que es lo mismo.
906.	Profesora:	Explícamelo. ¿Qué quisiste decir? [silencio] Yo tengo esta figura inicial roja, la que hice roja, ¿cierto? [Muestra con la mano la figura completa]. Hice la imagen de este [muestra el lado izquierdo] y quedó esta parte negra. [Julia levanta la mano] ¿Quieres decir algo?
907.	Julia:	Sí, que habría que hallarle ahora, como ya tenemos esta parte, la que está en negro, ahora hay que hallarle las imágenes a esa, entonces sería el otro lado [con la mano hace un movimiento para indicar que la imagen del lado derecho es el lado izquierdo].
908.	Profesora:	Tengo que hallarle la imagen a lo que está debajito en rojo, ¿sí?
909.	Julia:	Sí.
910.	Profesora:	Y me quedaría esta [resalta con negro el lado izquierdo de la figura]
911.	Julia:	Exactamente. Y ahí ya tendría la misma figura.
912.	Profesora:	¿O sea?
913.	Julia:	O sea que hay que hallarle… si tenemos una parte de la figura hay que hallarle las imágenes a esa. Luego de tener las imágenes, pues a esas imágenes les hallamos las imágenes al otro lado.
914.	Profesora:	Sería, no es exactamente a las imágenes, ¿no?
915.	Julia:	Sí pues a la figura que tengamos ahí.
916.	Profesora:	Es, tengo la figura [dibuja un cuadrilátero con el marcador rojo], le hallo la imagen a esta, a la roja [señala el lado izquierdo], me queda esta [resalta el otro lado con líneas punteadas negras].

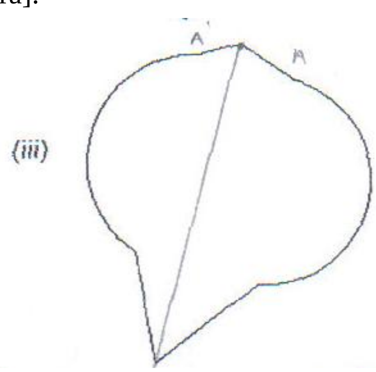
		 Pero yo también tengo esta otra parte de la figura [lado derecho] y le hallo a esta parte, no a las imágenes, sino a la figura inicial que está a este lado [señala el lado derecho y resalta el izquierdo con líneas punteadas negras] y tengo la misma figura [retiñe completamente la figura con color negro].  Las imágenes me forman la misma figura original, ¿listo? Vamos a hacer la tercera parte, les voy a repartir la tercera parte. Les voy a devolver esto, me tienen que devolver por favor todas las hojas hoy, ¿listo? Ella [la investigadora] se las tiene que llevar todas, esas no las voy a calificar, no las voy a devolver. Quince minutos, no ni quince, diez para hacer esa parte de la actividad [Se reparte la hoja con la Parte 3 y otra hoja con algunos polígonos regulares que será utilizada en la Tarea 10 ya que no se dispone de geometría dinámica para resolverlo].
917.	Julia:	Bueno dice, [leyendo] *para cada figura a, b, c*… [busca la hoja donde están las figuras]
918.	Felipe:	[Leyendo] *Explique por qué si tiene simetría axial* [silencio].
919.	Julia:	Aquí no, ¿cierto que no? [señala la pregunta que se refiere a si tiene simetría axial con respecto a más de una recta]. Mira, [leyendo] *explique por qué si tiene simetría axial*… pues, lo que dijimos ahoritica, y que si tiene simetría axial con respecto a más de una recta, pues no, es lo que estaban diciendo ahoritica, ¿no? Que la recta *p* tiene que ser la misma recta *r*, ¿sí? [silencio]
920.	Felipe:	[Leyendo] *Ilustre el eje o los ejes y la figura.*
921.	Julia:	Pues porque…
922.	Felipe:	No, pero mira que no porque por ejemplo en la [figura] **a**. sí. En la [figura] **a** sí se puede.
923.	Julia:	¿Por qué? Ah, ¿este y este? [mueve el dedo a lo largo de los dos ejes de simetría de la Figura **a**].
924.	Felipe:	Porque digamos, tú tomarías acá este [indica con el movimiento del lápiz un eje de simetría en la Figura **a**] o si no al revés [indica de la misma manera el otro eje de simetría] y seguiría siendo la <u>misma</u> figura. Esta parte sería imagen de esta y esta de esta [señala las dos partes correspondientes primero con respecto a un eje de simetría y luego con respecto al otro] y sí se podría [silencio]. O acá en este [señala la Figura **c** y sus dos ejes de simetría]. Bueno, en el [dibujo] **b** no. En este sí y en este también [señala las Figuras **a** y **c**], pero en el [dibujo] **b** no. ¿Sí? ¿De acuerdo?

925.	Julia:	Sí.
926.	Felipe:	Perfecto.
927.	Sonia:	Entonces… [silencio]
928.	Felipe:	Explique por qué sí tiene simetría axial. Entonces, escribe **a**, Figura **a** o algo así [silencio]. ¿Por qué sí tiene simetría axial? Porque… lo que había dicho la profe, ¿no? Tú le entendiste mejor. Es que la verdad es que yo esa parte no la entendí muy bien. Sí la entendí, pero no bien.
929.	Julia:	¿Lo de las imágenes y eso?
930.	Felipe:	Sí, explica eso.
931.	Julia:	Pues que, teniendo una figura inicial y una recta *r* [dibuja uno de los ejes de simetría en la Figura **a**] que es el eje de simetría, entonces si hallamos las imágenes de este lado, va a ser este lado [señala los dos lados de la Figura **a** respecto al eje dibujado] y si hallamos las imágenes de este lado, pues va a ser este [señala los mismos lados de la figura, ahora en diferente orden], entonces las imágenes van a ser igual que la figura. Pues esta explicación sirve para todos.
932.	Felipe:	Sí para todos, para [las figuras] **a**, **b** y **c**.
933.	Julia:	Entonces, esto es lo mismo [señala la respuesta que escribieron en la hoja para la Tarea 7].
934.	Sonia:	¿Copiar?
935.	Felipe:	¿Qué?
936.	Julia:	Eso fue lo que nosotros ya habíamos copiado, ¿sí?
937.	Sonia:	Pero… no pero… tratar de cambiarlo porque copiar dos veces lo mismo, como que no.
938.	Julia:	Bueno, a ver.
939.	Sonia:	Bueno, entonces mejor para las Figuras **a**, **b**, **c** se cumple que… [escribe] al hallar la imágenes de…
940.	Julia:	Pero tiene que haber un eje de simetría. Entonces, al hallar las imágenes de… ¿Cómo ponemos ahí? ¿De un lado de la figura? [silencio] O de la figura… de la parte de la figura que está en uno de los semiplanos… determinados por la recta *r*… sus imágenes van a ser igual que la otra parte de la figura [Sonia escribe]. Y pues se hace lo mismo al otro lado de la figura y pues las imágenes van completar la misma figura [Mientras Sonia escribe, ella borra los ejes de simetría que hicieron a mano en las Figuras **a**, **b** y **c** y hace con regla uno de los de la Figura **a**]. Y aquí, ¿en dónde sería? [Señala la Figura **a**].
941.	Felipe:	En todo el centro de la mitad del medio.
942.	Julia:	[Duda sobre la ubicación de la regla] ¿Más o menos por ahí? [traza el otro eje de simetría] ¿Así?

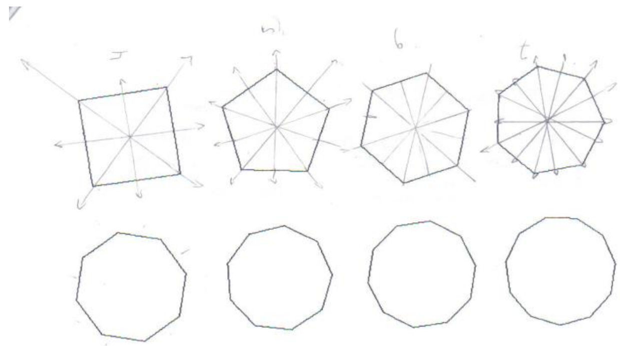
943.	Felipe:	Sí.
944.	Julia:	Ahora, pues aquí [señala la hoja donde Sonia está escribiendo] pon ahí que las Figuras **a** y **c** tienen simetría axial respecto a dos rectas [mientras Sonia escribe, traza con la regla los dos ejes de simetría de la Figura **c** y los llama *l* y *m*].
945.	Felipe:	¿Al trazar esta no se cumple también? [silencio]  No.
946.	Julia:	No [quita la regla]. Entonces, allí hay que escribir que se cumple respecto a la recta *l* y a la recta *m*.
947.	Sonia:	Sí, con respecto a más de una recta [escribe].
948.	Felipe:	Te falta marcar acá el eje [señala la Figura **b**].
949.	Julia:	Pero pues esta no la hice porque… bueno [ubica la regla para trazar el eje].
950.	Felipe:	No pero es que sí, como ahí dice ilustre el eje o los ejes en la figura, ¿sí ves? [Julia traza el eje de simetría en la Figura **b**]. Listo.
951.	Sonia:	Ya. Lee el [literal] **c**.
952.	Felipe:	[Leyendo] *Para cada figura uno, dos y tres, explique por qué no tiene simetría axial* [silencio].
953.	Julia:	[Mueve la regla ubicándola en diferentes posiciones sobre las Figuras i, ii y iii] Pues porque no… ¿Dónde está la hojita, la primera, donde está la definición de transformación? [Felipe la busca y se la entrega].
954.	Profesora:	[Dirigiéndose a todo el grupo] ¿Listo? Ya deberían estar en el décimo punto.
955.	Julia:	¿Cómo le ponemos ahí?
956.	Felipe:	Que bajo una transformación *t* no hay… no hay ¿qué? O sea, no todo punto tiene imagen sobre… no todo punto… no todo punto del plano tiene una imagen.
957.	Julia:	¿Pero ahí también se cumpliría…? Digamos eso de que la recta… o sea, que si está la recta, que no es punto medio…
958.	Felipe:	Exacto.
959.	Julia:	O sea, digamos acá [señala la Figura iii]. Si trazamos este eje [traza un

<table>
<tr><td></td><td></td><td>segmento cuyos extremos son vértices de la figura],


este no es congruente con este [señala los segmentos resaltados con rojo]


y estos tampoco [señala las dos partes en que el segmento inicial divide a la figura].</td></tr>
<tr><td>960.</td><td>Felipe:</td><td>Exacto.</td></tr>
<tr><td>961.</td><td>Julia:</td><td>¿Cómo lo escribimos? [Silencio]. Que si al trazar la recta esta [señala el segmento] no se cumple la congruencia entre los… [señala los dos lados de la figura]</td></tr>
<tr><td>962.</td><td>Felipe:</td><td>Entre dos puntos [silencio].</td></tr>
<tr><td>963.</td><td>Sonia:</td><td>¿Y ahora qué?</td></tr>
<tr><td>964.</td><td>Julia:</td><td>Pues que… que dada una recta r que sería como el eje de simetría [Sonia escribe]… no se cumple, pues primero no se cumple que, que la recta, el punto A, y la distancia aquí sea la misma [llama A y A’ a los dos puntos mostrados en la figura].

</td></tr>
</table>

		[Se interrumpió la grabación de video y no se ve a qué distancia se refiere, pero en la hoja escribieron que la distancia de *A* a *r* y de *A'* a *r* no es la misma].
965.	Sonia:	[Después de escribir la respuesta de la tarea anterior] ¿Qué dice el tercero? ¿El noveno?
966.	Felipe:	[Leyendo] *¿Existe algún triángulo que tenga simetría axial?* [Silencio]. Sí, el triángulo isósceles, el triángulo rec… eh, el triángulo…
967.	Sonia:	Equilátero.
968.	Felipe:	El triángulo rectángulo, el equilátero y ya [silencio]. Yo aquí estoy mirando si es verdad que, que aquí estos… préstame un momentico la regla [está mirando la hoja con los polígonos regulares la Tarea 10]. Un, dos, tres, cuatro. Pues acá son cuatro ejes de simetría [se refiere al cuadrado].
969.	Sonia:	¿El triángulo rectángulo por qué?
970.	Felipe:	Un, dos, tres, cuatro. Acá son cuatro ejes de simetría [en el cuadrado].
971.	Julia:	¿Y aquí que estás haciendo?
972.	Sonia:	Pues un triángulo que es…
973.	Julia:	Déjame ver. [Leyendo] *¿Existe algún triángulo que tenga simetría axial?* Entonces sí, pues el equilátero.
974.	Sonia:	¿No hay más triángulos?
975.	Julia:	Y el isósceles. Pero es que todo triángulo isósceles es… todo triángulo, eh… todo triángulo equilátero es isósceles.
976.	Sonia:	Bueno, ¿y el isósceles cómo?
977.	Felipe:	Uno, dos, tres…
978.	Julia:	Pues que se determinan dos triángulos…
979.	Felipe:	Préstame el borrador que tenías por ahí.
980.	Profesora:	¿Listo muchachos?
981.	Julia:	Ponle aquí que porque al trazar esa recta, o sea, al trazar la mediana y una recta que la contenga, que sería esta, se determinan dos triángulos congruentes [no hay imágenes de estos triángulos porque la cámara estaba enfocando el trabajo que hacía Felipe con los polígonos regulares y la hoja no fue anexada a las hojas que entregó el grupo].
982.	Felipe:	Cuatro, cinco, seis. Un, dos, tres, cuatro, cinco, seis.
983.	Julia:	Se forman dos triángulos que comparten la mediana.
984.	Sonia:	Sí.
985.	Felipe:	[Traza los ejes de simetría en los polígonos regulares de 4, 5, 6 y 7 lados] Sí, siempre se ha cumplido. Acá cuatro ejes, acá cinco, acá seis y acá siete [señala cada polígono a medida que se refiere a ellos y escribe el

		número al lado], pero es que me da pereza seguir [se ríe]. Pero es que podrían existir más. 
986.	Camarógrafa:	¿Qué estas poniendo? ¿Los números de qué?
987.	Felipe:	De cuántos ejes de simetría tienen.
988.	Camarógrafa:	Ah, ejes. ¿Seguro que son…?
989.	Felipe:	Bueno, pues es que hay que alargarlas más [toma la regla y prolonga uno de los ejes dibujados].
990.	Camarógrafa:	¿Ahí son cuatro? [señala el cuadrado]
991.	Felipe:	Sí. Uno, dos, tres y cuatro [señala cada eje a medida que cuenta].
992.	Camarógrafa:	¿Pero si…? [se ríe]
993.	Felipe:	Bueno, sí, es que aquí son rectas. Lo que pasa es que me da pereza hacerlas tan largas [alarga algunas de las rectas].
994.	Camarógrafa:	Bueno, ya deja eso así.
995.	Felipe:	No. Hay que hacer bien todo porque, ¿a qué jugamos? [risas]
996.	Profesora:	[Dirigiéndose a todo el grupo] Bueno, me entregan, por favor. Vamos a socializar esta tercera parte de la actividad. Eh, respondan, con que hagan tres o cuatro de las figuras de la hojita auxiliar es suficiente. Respondan la pregunta, por favor, y me entregan.
997.	Felipe:	[Contando los ejes de simetría en el octágono regular, pero no los ha trazado] Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho. Sí, sí se cumple.
998.	Sonia:	¿Sí? ¿Y qué ponemos? Que sí, ¿por qué?
999.	Felipe:	Eh…
1000.	Julia:	Que tiene el mismo número de ejes que de lados.
1001.	Felipe:	Pues sí pero, ¿cómo se justifica eso?
1002.	Sonia:	¿Cómo se justifica eso?
1003.	Felipe:	Sí [silencio]. Pues sí, o sea [risas]. La respuesta es sí pero, ¿cómo la justificamos?
1004.	Sonia:	Pues…

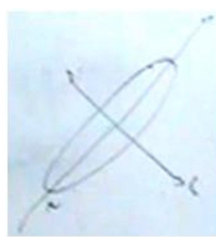
1005.	Felipe:	Eh…
1006.	Profesora:	[Dirigiéndose a todo el grupo] Bueno, me van prestando atención. Aquí, por favor. Vamos terminando la actividad y me van a escuchar. Entonces, ustedes acaban de, ustedes definieron ya figura con simetría axial. Tal vez esa definición no era la más adecuada, ¿cierto? Pero hicieron algo cuando hicieron, cuando Yolanda pasó y cuando Julia participó […] mostró cómo era la simetría en la figura, entonces más o menos como la definieron era lo que quería. En este momento están diciendo por qué sí tienen simetría axial y por qué no y además están explicando si tiene o no más ejes de simetría. Por ejemplo, la Figura **a**, ¿tiene más ejes de simetría?
1007.	Estudiantes:	Sí.
1008.	Profesora:	Sí. ¿Cuáles ejes de simetría tiene? ¿Quién pasa y me grafica uno, por favor? [dibuja la Figura **a** en el tablero] Esa era la figura. [Mientras Felipe dibuja los ejes de simetría, la profesora continúa preguntando por los ejes de simetría de las otras dos figuras]. ¿La Figura **b**?
1009.	Estudiantes:	Uno no más.
1010.	Profesora:	Uno no más. ¿La Figura **c**?
1011.	Estudiantes:	Dos.
1012.	Profesora:	Dos. Tiene uno que va desde los extremos de los… [Felipe le devuelve el marcador después de dibujar un eje de simetría] ¿Cuál más tiene?
1013.	Julia:	[Dirigiéndose a Felipe] Traza los dos.
1014.	Felipe:	¿Lo dibujo? [se devuelve, toma nuevamente el marcador y dibuja el otro eje de simetría]. 
1015.	Profesora:	[Señala en la hoja la Figura **c**]… que va desde los extremos de los segmentos y el otro que va desde los extremos de las curvas, de los arcos. En el otro decía [Felipe le devuelve el marcador], [leyendo] *Justifique su respuesta. Q es un polígono regular de n lados, n es mayor a cuatro. ¿Tiene Q n ejes de simetría?*
1016.	Estudiantes:	Sí.
1017.	Profesora:	¿Por qué?
1018.	Felipe:	[En voz baja] Pues no sé por qué pero sí los tiene.
1019.	Profesora:	Me escriben en el cuaderno, o en la hojita, perdón, en la hoja, por qué consideran que tiene *n* ejes de simetría. Voy a dar la definición de

		imagen bajo simetría axial para que uno del grupo lo vaya anotando, por favor. [Dictando] Una figura tiene simetría axial si existe una recta tal que la imagen de la figura bajo la transformación de simetría axial con respecto a esa recta es la misma figura.
1020.	Felipe:	[Mientras la profesora dicta la definición, Julia la copia en su cuaderno y se da la siguiente conversación entre Felipe y Sonia]. Si es un polígono regular, tiene todos los lados congruentes, ¿verdad?
1021.	Sonia:	Si es regular, pues sí.
1022.	Felipe:	Pues obviamente, ¿no? Ah, ok, entonces si tiene todos los…
1023.	Sonia:	Si el polígono es regular…
1024.	Felipe:	Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho [cuenta los lados del octágono regular]. Uno, dos, tres, cuatro [cuenta los ejes de simetría del octágono que contienen dos vértices y los muestra con el lápiz pero sin dibujarlos].
1025.	Sonia:	Es por el número de lados [silencio].
1026.	Felipe:	Tiene que ver algo con la congruencia. Escribe que pues como son polígonos regulares, pues todos los segmentos son congruentes, entonces sí van a haber *n* ejes de simetría en la figura. Pues… y los ejes se intersecan en… [señala el punto de intersección de los ejes en el cuadrado y en el pentágono].
1027.	Julia:	¿No es el punto medio de este lado [señala uno de los lados del pentágono regular] con el vértice opuesto?
1028.	Felipe:	Sí, eso es cuando el número de lados del polígono es impar [señala el pentágono]. Cuando es par, es… o sea, excepto en el de cuatro lados [señala el hexágono]. Por ejemplo, acá en el de cuatro lados solamente son dos las que pasan por los vértices y las otras dos pasan por los puntos medios de los segmentos [señala el cuadrado y sus ejes de simetría]. Pero en esta no [señala el hexágono regular], en esta sí pasan por el… no mentiras también pasa lo mismo.
1029.	Julia:	Por los vértices y por los puntos medios.
1030.	Felipe:	Sí.
1031.	Julia:	Eh, cuando el número de lados es par… [Silencio].
1032.	Profesora:	[Se acerca al grupo y toma las hojas] ¿Ya?
1033.	Julia:	Esa es la primera parte, ¿donde está todo? […]
1034.	Sonia:	Pero lo del número de lados, cuando el número de lados es par, sería como que la mitad, pero no… porque para decir la mitad de los ejes… Pues, por ejemplo, en este caso particular [señala el hexágono], tres pasan por los vértices y tres pasan por los puntos medios de los lados. Pero, la primera parte, pues para que quede bonito, para que quede bien. ¿Cómo la redacto para que quede bien? Si tomamos un caso particular, pues listo.

1035.	Felipe:	Eh, los ejes de simetría…
1036.	Julia:	Digamos, *n* sobre dos pasan por los puntos medios de… Digamos, ¿*n* sobre dos da cuatro sobre dos? Bueno, lo que sea.
1037.	Sonia:	Sí, yo lo entiendo, pero ¿cómo lo pongo?
1038.	Felipe:	Eh, tres ejes de simetría contienen a los puntos medios de los segmentos y tres ejes de simetría contienen… bueno, en realidad sería como *n* sobre dos porque eso es solamente cuando se cumple. ¿Cómo lo escribimos?
1039.	Sonia:	No sé, es que esa es mi pregunta.
1040.	Profesora:	¿Ya?
1041.	Felipe:	Ya, ya va profe.
1042.	Sonia:	¿Cómo lo escribimos?
1043.	Felipe:	Pues como puedas, pues o sea, es que no se me ocurre nada. Como te digo, sería como eh…
1044.	Sonia:	Bueno, espere. Dado un polígono de seis lados…
1045.	Julia:	La mitad de los ejes pasa por los puntos medios y la mitad por los vértices.

La profesora recoge todas las hojas, incluyendo la Parte 1 hecha en la clase anterior y termina la clase.