ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES CUANDO PROPONEN UNA DEFINICIÓN PARA UNA FIGURA GEOMÉTRICA CON EL APOYO DE GEOMETRÍA DINÁMICA

CLAUDIA MARCELA VARGAS GUERRERO
JORGE ARMANDO BETANCUR AGUIRRE

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2015

ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES CUANDO PROPONEN UNA DEFINICIÓN PARA UNA FIGURA GEOMÉTRICA CON EL APOYO DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Autores:
Claudia Marcela Vargas Guerrero
Jorge Armando Betancur Aguirre

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE MAGISTER EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

Director: Carmen Samper de Caicedo
Profesora Titular Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
2015

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"Análisis del comportamiento de los estudiantes cuando proponen una definición para una figura geométrica con el apoyo de geometría dinámica"** Presentado por los estudiantes:

Jorge Armando Betancour Aguirre - 2013185003 - 80755953
Claudia Marcela Vargas Guerrero - 2013185025 - 1014211083

Como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado** con 47 Puntos.

Observaciones: ______________________________

En constancia se firma a los 5 días del mes de marzo de 2015.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesora Carmen Samper de Caicedo
CARMEN SAMPER DE CAICEDO

Jurados:

Profesor Camilo Sua Flórez
JEISON CAMILO SUA FLÓREZ

Profesora
JENNY ACEVEDO

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, se han dado los respectivos créditos.

AGRADECIMIENTOS

A Carmen Samper de Caicedo, profesora titular del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y asesora de este trabajo de grado, por contribuir con su experiencia y conocimiento en la consolidación de este estudio, y por su constante apoyo.

A los profesores de la Maestría en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, por su compromiso en la formación de docentes.

A las directivas y profesores del colegio Cafam, por permitir el desarrollo de este proyecto, y a los estudiantes que de forma voluntaria decidieron participar en el mismo.

A nuestras familias y amigos, por su constante e incondicional apoyo.

RESUMEN ANÁLITICO DE EDUCACIÓN (RAE)

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado en maestría de investigación
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Análisis del comportamiento de los estudiantes cuando proponen una definición para una figura geométrica con el apoyo de geometría dinámica
Autor(es)	Betancur Aguirre, Jorge Armando; Vargas Guerrero, Claudia Marcela
Director	Samper, Carmen
Publicación	Bogotá D.C., 2015, págs.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional UPN
Palabras Claves	Definir, argumentar, comportamiento racional

2.Descripción

El presente estudio, de las prácticas discursivas de un grupo de siete estudiantes de grado décimo de un colegio privado ubicado en Bogotá, pretende describir el proceso que realizan cuando construyen definiciones de una figura geométrica apoyados en lo que descubren a través de tareas realizadas con un software de geometría dinámica. En dicho estudio se analizó el comportamiento racional y argumental de los estudiantes cuando trabajaban de forma grupal en un ambiente diseñado para favorecer la construcción y evaluación de definiciones de figuras geométricas. Para dicho análisis, se empleó la adaptación propuesta por Boero, Douek, Morselli y Pedemonte (2010) de los modelos de Toulmin y de Habermas. Con el primer modelo, se analizaron los argumentos producidos por los estudiantes (comportamiento argumental); con el segundo modelo, se estudiaron las actuaciones de los estudiantes en los tres aspectos que caracterizan el comportamiento racional (epistémico, teleológico y comunicativo).

3.Fuentes

Entre las fuentes bibliográficas consultadas se destacan:

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. In M. F. F. Pinto & y T. F. Kawasaki (Eds.), Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 179–205). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Calvo, C. (2001). Un estudio sobre el papel de las definciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Herbst, P., Gonzalez, G., & Macke, M. (2005). How Can Geometry Students Understand What It Means to Define in Mathematics ? The Mathematics Educator, 15(2), 17–24.

Molina, Ó., Samper, C., Perry, P., & Camargo, L. (2011). Actividad demostrativa: participar en la producción de un teorema. Revista Integración, 29(1), 73–96.

Perry, P., Molina, Ó., Camargo, L., & Samper, C. (2011). Analyzing the proving activity of a group of three students. Retrieved from http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/Cerme7_WG1_Perry.pdf

4.Contenidos

El presente trabajo se ha organizado en cinco capítulos. En el Capítulo 1 se presenta el problema que guió el estudio, la justificación de su pertinencia basada en algunos antecedentes provenientes de investigaciones en educación matemática, las preguntas de indagación que orientaron la consolidación y desarrollo de la propuesta, y el planteamiento del objetivo general y los objetivos específicos de este. En el Capítulo 2 se exhibe el marco de referencia que sustenta este estudio estructurado en torno a cuatro constructos teóricos: la definición en geometría, el modelo de Toulmin para la argumentación, el modelo Habermas para el comportamiento racional y el uso de la geometría dinámica. La metodología de la investigación se presenta en el Capítulo 3. En particular, se describe el tipo de investigación, y el contexto y población donde se llevó a cabo el estudio. Luego, se describen las fases de la investigación: diseño e implementación de una secuencia didáctica, recolección de información, construcción de las categorías de análisis y el análisis de los datos. En el Capítulo 4, se expone el análisis del comportamiento racional y argumental de siete estudiantes de grado décimo cuando resolvían la última tarea de la secuencia didáctica, acompañado por una síntesis de los resultados obtenidos. Este trabajo termina con el Capítulo 5, en el que se presentan las conclusiones que se derivan del desarrollo de este estudio.

5. Metodología

Dados los intereses del estudio, se adoptó como metodología de investigación el experimento de enseñanza, de tipo cualitativo- descriptivo. Esta metodología fue adecuada ya que el interés principal del estudio era constituir un ambiente de aprendizaje que favoreciera la comprensión del proceso de definir en geometría.

Se diseñaron unas actividades que se implementaron durante siete sesiones de clase con un grupo de siete estudiantes de grado décimo. La actividades de las primeras seis sesiones tenían como propósito que los estudiantes analizaran sus definiciones personales de algunas figuras que ya conocían (triángulo isósceles y cuadrado), para determinar si estas cumplían con los criterios establecidos para una definición en geometría, y en caso contrario, propusieran las modificaciones necesarias. La última sesión, que fue grabada en audio y video, buscaba que los estudiantes construyeran la definición de una figura geométrica para ellos desconocida (cometa) teniendo en cuenta esos criterios. Es la transcripción de esta última sesión la que provee los datos para el análisis.

6.Conclusiones

Las conclusiones del estudio se organizan teniendo en cuenta cuatro aspectos: el comportamiento argumental de los estudiantes al resolver la última tarea de la secuencia, las actuaciones de los estudiantes en los tres aspectos que caracterizan el comportamiento racional (epistémico, teleológico y comunicativo), el uso de la geometría dinámica en el proceso de aprender a definir y acerca del diseño experimental. Por último, se presentan algunas preguntas pendientes para futuras investigaciones. Algunas de las conclusiones obtenidas fueron:

- A partir de las respuestas y justificaciones expresadas por los estudiantes, encontramos tres evidencias que permiten afirmar que los estudiantes comprendieron la importancia de argumentar sus resultados. La primera es que autónomamente los estudiantes formulaban argumentos, sin que la profesora interviniera, cuando interactuaban entre ellos. La segunda, la reformulación de argumentos informales que hacían los estudiantes en un argumento formal cuando la profesora le solicitaba la justificación de lo que aseguraban. La tercera, la predominancia de argumentos deductivos teóricos en sus intervenciones.
- El comportamiento racional y argumental de los estudiantes permite concluir que el haber participado en la construcción de definiciones equivalentes para diversas figuras geométricas incidió en su concepto de qué significa definir. Creemos que las actividades propuestas permitieron que los estudiantes comprendieran que una figura se puede definir de diferentes formas. Además, el hecho de que los estudiantes recurrieran al uso de contraejemplos es evidencia de que ellos comprendieron que la definición tiene como propósito no solamente identificar las figuras que son ejemplos de lo definido, sino también excluir aquellas que no lo son. Es decir, comprendieron que si se puede construir un contraejemplo, el conjunto de propiedades no puede ser una definición para la figura geométrica en cuestión. A su vez, los estudiantes se dieron cuenta que definir es realmente una actividad matemática.

Elaborado por:	Betancur Aguirre, Jorge Armando; Vargas Guerrero, Claudia Marcela		
Revisado por:	Samper , Carmen		
Fecha de elaboración del Resumen:			

TABLA DE CONTENIDO

Lista de tablas

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado está en sintonía con los intereses del grupo de investigación de Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) y surge con el propósito de contribuir a la línea de investigación de Argumentación y Prueba con elementos que permitan explorar los procesos de conceptualización en geometría. Para tal fin, nos propusimos analizar las prácticas discursivas de un grupo de estudiantes de décimo grado de educación secundaria, cuando construyen definiciones de una figura geométrica, apoyados en lo que descubren a través de tareas realizadas con un software de geometría dinámica.

Para ello nos pareció pertinente analizar el comportamiento racional y argumental de los estudiantes cuando trabajan de forma grupal en un ambiente diseñado para favorecer la construcción y evaluación de definiciones de figuras geométricas. Para dicho análisis, empleamos la adaptación propuesta de Boero, Douek, Morselli y Pedemonte (2010) de los modelos de Toulmin y de Habermas. Con el primer modelo, se analizaron los argumentos producidos por los estudiantes (comportamiento argumental); con el segundo modelo, se estudiaron las actuaciones de los estudiantes en los tres aspectos que caracterizan el comportamiento racional (epistémico, teleológico y comunicativo).

En el Capítulo 1, presentamos el problema que guió nuestro estudio, la justificación de su pertinencia basada en algunos antecedentes provenientes de investigaciones en educación matemática, las preguntas de indagación que orientaron la consolidación y desarrollo de la propuesta, y el planteamiento del objetivo general y los objetivos específicos de este estudio.

En el Capítulo 2, presentamos el marco de referencia que sustenta este estudio de acuerdo con cuatro constructos teóricos: la definición en geometría, el modelo de Toulmin para la argumentación, el modelo Habermas para el comportamiento racional y el uso de la geometría dinámica.

A continuación, en el Capítulo 3 presentamos la metodología de la investigación. En particular, describimos el tipo de investigación, el contexto y población donde se llevó a cabo el estudio. Luego, describimos las fases de la investigación: diseño e implementación de una secuencia didáctica, recolección de información, construcción de las categorías de análisis y el análisis de los datos.

Posteriormente, en el Capítulo 4, presentamos el análisis del comportamiento racional y argumental de siete estudiantes de grado décimo cuando resolvían la última tarea de la secuencia didáctica. Se finaliza el capítulo con una síntesis de los resultados obtenidos.

Este trabajo termina con el Capítulo 5 presentando las conclusiones que se derivan del desarrollo de este estudio, las cuales organizamos en relación con cinco aspectos: el comportamiento argumental de los estudiantes, el comportamiento racional, el uso de la geometría dinámica en el proceso de aprender a definir y acerca del diseño experimental. Al final de este documento se encuentran los anexos que incluyen: la secuencia didáctica y las transcripciones del proceso de construcción de la definición de una figura geométrica desconocida.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se describen las razones que motivaron la realización de este trabajo de investigación, y está conformado por la justificación, delimitación del problema, y los objetivos general y específicos.

1.1. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

En las últimas décadas, ha existido un aumento en el número de investigaciones que indagan por el tratamiento de las definiciones en la educación matemática escolar. Algunos investigadores (Hershkowitz, 1990; Vinner, 1991) señalan que es habitual que en las clases de matemáticas las definiciones sean presentadas de manera directa por el profesor o el libro de texto. Esta aproximación no permite al estudiante participar en la construcción de definiciones y análisis de diferentes definiciones de un mismo objeto, lo cual lo lleva a pensar que las definiciones están preestablecidas, que son únicas y que basta con memorizarlas para usarlas correctamente.

Linchevski, Vinner y Karsenty (1992) han informado que la introducción de las definiciones a través de la presentación de un enunciado que debe ser aprendido y aplicado, ha tenido como consecuencia que estudiantes y profesores no entiendan cabalmente muchas de las definiciones de los objetos de estudio; esto trae consigo una cadena de imprecisiones que contribuye, a la larga, a hacer más difícil el aprendizaje de la matemática. Estas ideas están en concordancia con lo propuesto por Vinner (1991) quien además justifica que es pedagógicamente incorrecto presentar las matemáticas deductivamente, como suelen hacer los profesores y como ocurre, por lo general, en los libros de texto de bachillerato y universidad, porque no se tiene en cuenta los procesos de adquisición de conceptos y de razonamiento lógico.

Investigadores como Tall (2002) y Vinner (2002) (citados por Aya, Echeverry, y Samper, 2014) sostienen como hipótesis que el paso de las ideas intuitivas de los estudiantes sobre objetos matemáticos requiere el mismo proceso desarrollado por la humanidad a lo largo de la historia, esto es, desde la construcción de definiciones en contextos empíricos al establecimiento de una definición formal mediante aproximaciones por refinamiento. Además, ellos afirman que para los estudiantes el conflicto entre las ideas intuitivas y la definición formal constituye un obstáculo real para la comprensión del concepto. Es por esto que las definiciones emergen como objetos de estudio en el contexto de la matemática escolar, lo cual exige una reflexión acerca del proceso de conformación de un concepto, el rol de la definición en este proceso, y el tratamiento que se le debe dar en este contexto.

Teniendo en cuenta los planteamientos presentados, consideramos pertinente analizar las practicas discursivas de estudiantes de grado decimo cuando trabajan de forma grupal en un ambiente diseñado para favorecer la construcción y evaluación de definiciones de figuras geométricas. De acuerdo a la problemática presentada nos surgen los siguientes cuestionamientos: ¿La participación en la construcción de definiciones promueven la formulación de argumentos?, ¿Qué tipos de argumentos establecen los estudiantes?, ¿se preocupan por validar sus ideas?, ¿la comunicación de sus argumentos es de forma clara y concisa?

Estos cuestionamientos nos llevaron a formular la siguiente pregunta de indagación en nuestro estudio:

¿Qué características tiene el comportamiento de los estudiantes cuando intentan construir definiciones equivalentes de una figura geométrica o cuando están involucrados en la práctica matemática de definir?

1.2. JUSTIFICACIÓN

Una de las acciones que permiten identificar la competencia matemática de un estudiantes es el uso de “la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración” (Ministerio de Educación Nacional, 2006). En el caso de la geometría, para que esto sea posible es necesario que el estudiante use las definiciones para construir argumentos, para razonar y para comunicar sus ideas, y que a la vez, use la argumentación para evaluar y validar diferentes propuestas de definición de una figura geométrica.

Para que esto sea posible es necesario modificar el paradigma de la enseñanza de las matemáticas como la memorización de definiciones y teoremas, para dar lugar a estrategias de enseñanza que permitan que el estudiante repersonalice y recontextualice su conocimiento, lo que permitirá no solo una mejor comprensión sino un mejor hacer, es decir, un conocimiento significativo. Calvo (2001) señala el papel mediador del docente, resaltando que no es suficiente, para aprender un concepto, dar ejemplos y contraejemplos de este, porque puede llevar a caracterizaciones del concepto que no incluyen las condiciones suficientes o que no poseen las características lógicas de la definición matemática, por ejemplo, el no ser cíclica ni redundante.

Además de la importancia de permitir a los estudiantes participar en la construcción de definiciones, estas deben ser aprovechadas para favorecer la argumentación a partir de ella. Por ejemplo, Furinghetti y Paola (2002) afirman que involucrar a los estudiantes en la actividad de definir tiene un valor didáctico invaluable para la comprensión de la estructura lógica de una proposición condicional, los cual es un elemento indispensable para la argumentación matemática. Un resultado similar es reportado por Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou (2008) quienes señalan la interdependencia entre el conocimiento de la definición de un cuadrilátero y los argumentos que despliegan los estudiantes para justificar enunciados relacionados a estos que han establecido.

Para Boero et al., (2010) la argumentación favorece la conceptualización y tiene un importante papel durante el desarrollo de actividades en geometría, que tiene como fin contribuir en los proceso de construcción de conceptos. Boero resalta además que alguna de las ventajas de la argumentación en los procesos de conceptualización es que permite discriminar conceptos, establecer vínculos entre ellos y hacer explícitos teoremas y definiciones en acto para asegurar su uso consciente.

En el desarrollo de nuestra investigación, partimos del supuesto de que el uso de programas de geometría dinámica contribuye al desarrollo de la comprensión de las ideas asociadas con la construcción de una definición y al desarrollo de la actividad demostrativa en geometría. Frente al papel de estos ambientes en el proceso de conceptualización, De Villiers (1998) señala que para realizar la construcción de una figura geométrica, los estudiantes usan aquellos elementos o características que consideran son parte de la definición. Perry, Samper, Camargo y Molina (2012) argumentan que un ambiente de geometría dinámica favorece la construcción de representaciones de figuras, permitiendo la exploración empírica de estas, y con ello un acercamiento informal a conceptos, relaciones y propiedades geométricas. Furinghetti y Paola (2002) estudian el problema de la consistencia entre la representación de una figura hecha por un estudiante construida con Cabri y su definición. Emplean este ambiente para que los estudiantes evalúen si es apropiada la definición que están usando.

Teniendo en cuenta los planteamientos propuestos en las investigaciones relacionadas anteriormente, reconocemos que este estudio es importante para el campo de la Educación Matemática porque hace un aporte a la investigación relacionada con el tratamiento de las definiciones en el aula de clase.

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. OBJETIVO GENERAL

Analizar las prácticas discursivas de un grupo de estudiantes de décimo grado de educación secundaria, cuando construyen definiciones de una figura geométrica apoyados en lo que descubren a través de tareas realizadas con un software de geometría dinámica.

1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Diseñar e implementar una serie de tareas con un programa de geometría dinámica, que propicien la interacción y la argumentación en torno a la evaluación y construcción de definiciones de figuras geométricas.
- Identificar y clasificar los argumentos que formulan los estudiantes cuando construyen la definición de una figura geométrica desconocida.
- Caracterizar las actuaciones de los estudiantes cuando realizan tareas en torno a la definición de una figura geométrica.
- Identificar el uso que se da a las representaciones gráficas en la formulación de argumentos.
- Determinar el papel de la geometría dinámica en el proceso de aprender a definir.

2. MARCO DE REFERENCIA

Con respecto a la actividad de definir en geometría, nuestro trabajo de grado está orientado a analizar el comportamiento de los estudiantes durante el proceso para proponer y estudiar una definición para una figura geométrica con ayuda de geometría dinámica. Por ello, los referentes conceptuales que se reportan en este capítulo están orientados en tres direcciones. Por una parte, se estudian aquellos que dan cuenta de lo que significa definir en geometría. Estos son imprescindibles al momento de elaborar las actividades. Por otra parte, para analizar el comportamiento de los estudiantes, nos centramos principalmente en dos referentes teóricos, el modelo de comportamiento racional de Habermas y el modelo de Toulmin para la argumentación, acorde con la propuesta que hacen Boero, Douek, Morselli y Pedemonte (2010). Finalmente, dado que la propuesta involucra el uso de geometría dinámica, nombraremos algunas características del software que favorecen los procesos de proponer y estudiar definiciones, y de argumentar en geometría.

2.1. DEFINIR EN GEOMETRÍA

2.1.1. ¿QUÉ SIGNIFICA DEFINIR EN GEOMETRÍA?

Una definición en geometría puede entenderse como un enunciado que contiene las propiedades necesarias y suficientes para que una figura o relación pueda ser etiquetada por una expresión o una palabra (Herbst, Gonzalez, & Macke, 2005). De manera general, las definiciones predeterminan al concepto dentro de un sistema teórico de una manera no circular y consistente (Calvo, 2001). Para definir en geometría es necesario establecer las diferencias de un objeto con otros objetos similares, pues una definición agrupa a un conjunto de figuras que cumplen con un conjunto de propiedades específico (Herbst et al., 2005).

Al considerar el papel de las definiciones en matemáticas, (Vinner, 1991) evidencia las siguientes posturas de autores de libros de texto e incluso de profesores en el aula de clase: 1) Los estudiantes usarán las definiciones para resolver problemas y demostrar teoremas cuando sea necesario; 2) Las definiciones deben ser económicas, es decir, contener solo las propiedades suficientes y necesarias para definir el objeto; 3) Es deseable que las definiciones sean elegantes; y 4) Las definiciones son arbitrarias, pues se escogen de acuerdo a sus fines (p. 66). Respecto a esta última característica, para un objeto o concepto matemático pueden existir muchas definiciones equivalentes (Chesler, 2012); no obstante en las matemáticas escolares las definiciones se caracterizan por ser convencionales, es decir, se eligen respondiendo a fines estéticos, didácticos u operativos, y adicionalmente, para determinar el significado y la naturaleza de un objeto (Calvo, 2001). Las definiciones en matemáticas se construyen con base en conceptos que se han definido y se han estudiado con anterioridad, teniendo en cuenta que no debe ser contradictorias ni ambiguas (Chesler, 2012).

Para ilustrar lo expuesto anteriormente, tomaremos como referencia las siguientes definiciones que surgieron durante una sesión de clase:

> *A un grupo de siete estudiantes se les pidió que escribieran qué es un cuadrado. Para realizar la tarea, se conformaron dos grupos. Las definiciones que propusieron, producto de su interacción fueron las siguientes:*
>
> - *Definición 1: Todos sus lados son iguales.*
> - *Definición 2: Un cuadrado es un polígono regular de cuatro lados y todos sus lados son congruentes.*
>
> *Posteriormente, la profesora le solicita a cada uno de los grupos que den una opinión acerca de la definición dada por el otro grupo. El Grupo 2, establece que la definición 1 no tiene todas las propiedades suficientes, puesto que en ese caso podría incluir un triángulo equilátero. Un estudiante propone agregarle las condiciones de que tenga cuatro lados y que cada ángulo mida 90 grados. La definición propuesta es modificada, obteniendo la siguiente definición.*
>
> - *Definición 3: Es un cuadrilátero con todos sus lados congruentes y todos sus ángulos de 90 grados.*
>
> *Respecto a la definición 2, el grupo concluye que es redundante y la reformulan de la siguiente forma:*
>
> - *Definición 4: Un polígono regular de cuatro lados.*
>
> Durante las siguientes sesiones de clase, se realizaron actividades que permitieron establecer que las siguientes proposiciones son también definiciones de cuadrado:
>
> - *Definición 5: Un cuadrilátero con tres lados congruentes y dos ángulos rectos.*
> - *Definición 6: Un cuadrilátero con dos lados congruentes y tres ángulos rectos.*
> - *Definición 7: Un cuadrilátero con diagonales congruentes, perpendiculares y que se bisecan.*

Al analizar la definición 1, estamos de acuerdo con la objeción que presentaron los estudiantes, la cual es acertada porque solo se menciona una propiedad necesaria, pero no es suficiente. Es decir, aunque todos los cuadrados cumplen esa propiedad, no todas las figuras que cumplen esta propiedad son cuadrados. Era necesario mencionar en la definición que la figura es un cuadrilátero y que los ángulos son rectos. Esto conllevaría a un conjunto de propiedades suficientes y necesarias. Si además hubieran agregado que las diagonales deben ser congruentes, entonces tendría más condiciones de las necesarias.

Por su parte, la definición 2 aunque es una proposición matemáticamente correcta, incluye más condiciones de las mínimas requeridas para definir la figura, puesto que la propiedad “cuatro lados congruentes” puede deducirse del hecho de que sea un polígono regular. Por tanto no cumple la condición de ser económica.

Las definiciones 3, 4, 5, 6 y 7 son proposiciones matemáticas que efectivamente definen la figura. Si una de estas proposiciones se elige como definición, entonces las otras cuatro proposiciones podrían ser teoremas de un sistema teórico local. Al analizar estas definiciones, se puede decir que la definición 3 no es económica, puesto que se evidencia que en las definiciones 5 y 6 se exigen menos condiciones para definir un cuadrado. Además, la definición 7 no es elegante, porque no habla de las partes que conforman la figura, lados y ángulos, sino de elementos adicionales.

Como se dijo anteriormente, las definiciones son arbitrarias. Por ejemplo, en primaria habitualmente se trabaja con la definición 3, porque a esa edad parece primar la forma sobre las partes (el nivel de razonamiento geométrico en este grado de escolaridad está asociado con la descripción). Establecer la definición 3 como definición en lugar de la 5 o la 6 que son más económicas, es un acto arbitrario que obedece a fines didácticos, como tener en cuenta que en los primeros niveles se busca que los estudiantes identifiquen las figuras. En niveles superiores, en los cuales se desea que los estudiantes aprendan a demostrar, resulta más conveniente la elección de las definiciones 5 o 6, puesto que requiere la comprobación de menos propiedades.

La discusión acerca de diferentes formas de definir un concepto es importante porque permite comprenderlo de forma más profunda y flexible abordar temas relacionados con la construcción de la matemática, entender el papel de la justificación matemática y de las convenciones y comprender que las matemáticas están determinadas por una cultura y una sociedad (Leikin & Winicki-Landman, 2001).

Finalmente, Escudero, Gavilán y Sánchez (2014) desarrollan una investigación con un grupo de estudiantes de segundo de bachillerato y de futuros profesores de primaria, que indaga sobre el aprendizaje del proceso de definir , mediante el análisis de los cambios en el discurso matemático asociados a este proceso. Dentro de las conclusiones, destacan que un estudiante ha aprendido a definir cuando realiza alguno de los siguientes cambios en su discurso: 1) pasa de asumir la definición como un nombre a entenderla como una lista de características del objeto; 2) reconocen que una definición incluye unas características mínimas del objeto, y no una lista exhaustiva; 3) reconocen que a partir de un listado de características pueden encontrar definiciones equivalentes.

2.1.2. RECOMENDACIONES PARA UN BUEN APRENDIZAJE DE LAS DEFINICIONES

Respecto al trabajo con definiciones, Herbst et al. (2005) reportan los resultados de una investigación en la cual se concluye que la comprensión del proceso de definir por parte de los estudiantes implica la creación de escenarios en los cuales, por una parte, el estudiante deba describir figuras geométricas, para determinar características comunes que permitan definirla y diferenciarlas de otras figuras geométricas, y por otra, generar figuras a partir de un conjunto de propiedades específicas. Vinner (1991) por su parte considera que es necesario presentar varios ejemplos y contraejemplos para que el estudiante pueda formar el concepto imagen, y posteriormente, haga uso de la definición. Finalmente, Govender (2003) lleva a cabo una investigación centrada en la comprensión, que un grupo de profesores en formación, tiene de la naturaleza de las definiciones y del desarrollo de habilidades para evaluar y construir definiciones trabajando con Sketchpad. Concluye que el trabajo con este software le permite al estudiante asumir el proceso de definir como una actividad creativa y no como un cuerpo teórico inmutable.

Las anteriores investigaciones están enmarcadas en el trabajo de un conjunto de autores que abogan en favor de que el estudio de las definiciones en el aula de clase sea diferente al tratamiento que tradicionalmente se le ha dado. Para ello, consideran que es necesario que los estudiantes se involucren en situaciones que permitan la construcción de una definición. Por ejemplo, Borasi (citado por Ouvrier-Buffet, 2004) propone tres heurísticas instruccionales que se deben tener en cuenta al momento de diseñar actividades relacionadas con el proceso de definir: analizar diferentes definiciones incorrectas de un concepto, utilizar las definiciones para resolver problemas matemáticos o para realizar pruebas, e interpretar una definición familiar en diferentes contextos. Ouvrier-Buffet, (2004) indica los siguientes tipos de situaciones que propician la construcción de definiciones: clasificación, redefinición y situaciones problema.

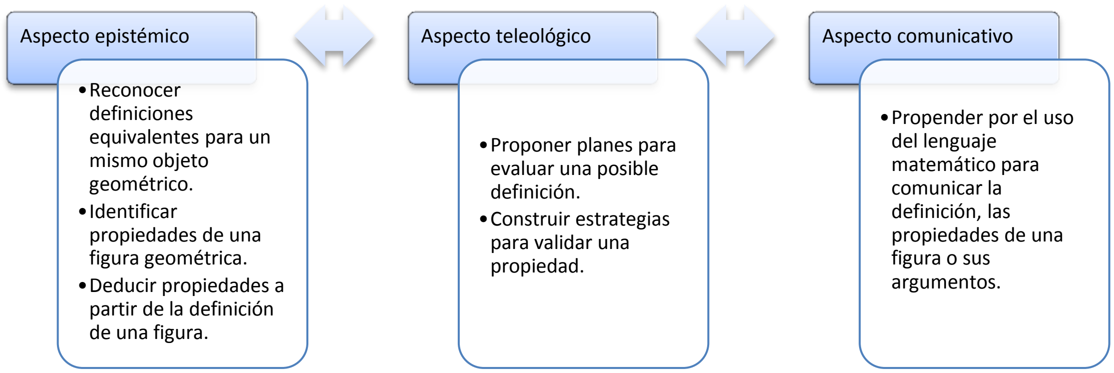
2.2. MODELO DE COMPORTAMIENTO RACIONAL DE HABERMAS

El modelo de comportamiento racional en prácticas discursivas, propuesto por Habermas (P Boero et al., 2010), distingue tres componentes interrelacionados de comportamiento: el *epistémico*, que consiste en el control de la validez de proposiciones y la manera de relacionarlas dentro de una teoría y con formas válidas de razonamiento; el *teleológico*, que hace referencia a la formulación de un plan y la elección consciente de herramientas o elementos teóricos con el fin de lograr el objetivo planteado, y a la determinación de las estrategias que pueden contribuir a la ejecución y culminación de la meta propuesta; y el *comunicativo*, que consiste en la elección adecuada de términos, aceptados por la comunidad para comunicar ideas.

El modelo propuesto por Habermas ha sido utilizado como una herramienta analítica para analizar los componentes del proceso de demostración en matemáticas (P Boero et al., 2010). Por otra parte, Perry, Molina, Camargo y Samper (2011) utilizan el modelo para caracterizar el aprendizaje participacionista de la actividad demostrativa y para evaluar el comportamiento de los estudiantes durante la actividad demostrativa realizada al resolver un problema. Estos autores, consideran que aprender a demostrar significa involucrase en la actividad demostrativa de forma autónoma, relevante y genuina. Estas tres características se las asocian con los aspectos comunicativo, teleológico y epistémico del comportamiento racional del modelo de Habermas. Más exactamente, la autonomía se asocia con el aspecto comunicativo y epistémico, y la relevancia con el teleológico.

En nuestra investigación, haremos uso del modelo de Habermas para evaluar la interacción de los estudiantes cuando están proponiendo o evaluando definiciones para un objeto geométrico. Teniendo en cuenta que una definición se caracteriza por el lenguaje (una definición es un discurso específico), el sistema axiomático en el cual se construye y las heurísticas utilizadas en el proceso de construirla (Ouvrier-Buffet, 2004), consideramos que el modelo de Habermas es pertinente porque cada uno de sus componentes puede relacionarse con cada una de las características de una definición matemática. Concretamente, consideramos que en el proceso de definir, los comportamientos enunciados en el modelo de Habermas tienen las siguientes características:

Figura 1: Comportamiento racional en el proceso de definir

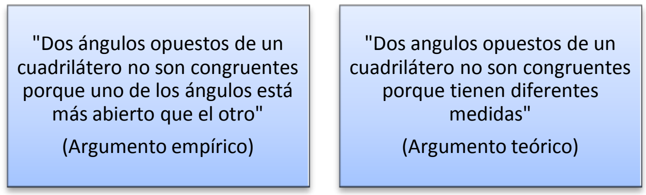


2.3. ARGUMENTACIÓN

La argumentación consiste en cualquier medio retórico que se emplea con el fin de convencer a alguien de la verdad o la falsedad de una afirmación particular. En matemáticas, argumentar hace referencia a esgrimir razones o puntos de vista, identificar enunciados o proponer referentes teóricos, en pro de una afirmación, con el objeto de buscar ideas que conformarán la demostración del enunciado matemático (Douek, 2007). La argumentación requiere no solo una producción de razonamientos, tal y como sucede en la explicación, sino que incluye también su aceptabilidad dentro de una comunidad.

Sobre la naturaleza de los argumentos, Boero (1999) distingue entre argumentos empíricos y teóricos. En un argumento empírico la validez recae en las mediciones, en la evidencia visual y las referencias corporales. Mientras los argumentos teóricos, se basan en el uso de elementos que conforman una teoría: definiciones, postulados, teoremas. Por ejemplo:

Figura 2: Ejemplos de argumentos empíricos y teóricos



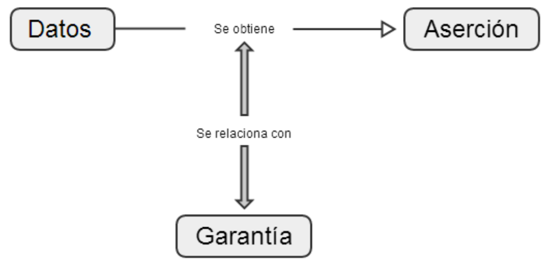
Douek & Scali (2000) señalan que la argumentación tiene un papel importante en el proceso de construcción de conceptos, puesto que cuando se trabaja en grupo, es por medio de ella que se llega a acuerdos sobre las propiedades que definen los conceptos, los vínculos entre los conceptos y las propiedades que se deducen.

De acuerdo con Toulmin (1958) un argumento consta de una estructura ternaria que relaciona dos proposiciones, datos y aserción, por medio de una regla general denominada garantía. Los *datos* son unas propiedades que en algún momento se asumen como verdaderos, los cuales se convierten en el antecedente de la afirmación condicional que se está tratando de validar. La *aserción* es una propiedad que se considera como consecuencia de los datos y la *garantía* son los principios o enunciados que permiten realizar inferencias que relacionan los datos con la aserción. En el modelo de Toulmin se presentan tres componentes secundarios asociados a los anteriores, el *soporte*, la *refutación* y *el cualificador*. El *soporte* es el respaldo de la garantía, el cual le da autoridad y vigencia a esta; la *refutación* es una objeción o excepción a la aserción y el *cualificador* es el grado de certeza que se tiene de la aserción (Lavy, 2004).

De acuerdo con Perry, Samper, Camargo y Molina (2012), los tipos de argumentos que se presentan en la actividad matemática están determinados por el componente principal de la estructura ternaria que se concluye. De acuerdo con ello, clasifican los argumentos en deductivos, abductivos e inductivos.

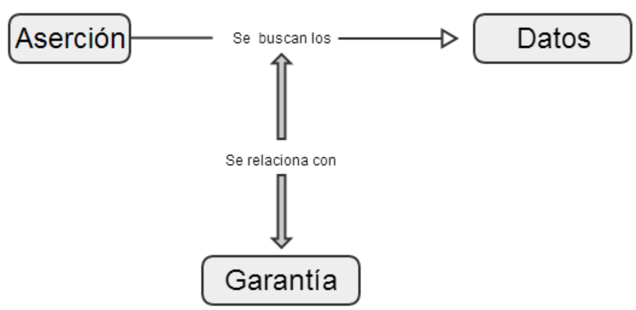
Un *argumento deductivo* surge cuando partiendo de los datos, se utiliza una regla general como garantía para obtener la aserción (Figura 3). Este tipo de argumentos surge principalmente en el proceso de justificación.

Figura 3: Esquema de un argumento deductivo



Un *argumento abductivo* puede surgir en el proceso de conjeturación o de justificación. En este tipo de argumento se asume que la *aserción* (A) es verdadera. A partir de esto y de posibles garantías conocidas que podrían justificar a la aserción, se concluyen unos *datos* (D) adecuados. Los datos así obtenidos son provisionales. Es importante mencionar que la naturaleza de la regla general (*garantía*) puede ser diferente: puede ser una regla hipotética que proviene de una exploración empírica o puede ser una regla extraída, por una exploración teórica, del sistema teórico en el que se trabaja (Figura 4).

Figura 4: Esquema de un argumento abductivo



Finalmente, un *argumento inductivo de descubrimiento* surge principalmente en los procesos de conjeturación. En este tipo de argumentos, se tienen varios datos o proposiciones particulares D_1, D_2, D_3,… D_n de una proposición general D que producen un mismo resultado, que corresponde a la *aserción* (A). Ello conlleva a la formulación de una proposición o regla general. La regla obtenida en este tipo de argumento es provisional, es decir, es una proposición plausible. En este caso, lo que se concluye es la garantía (Figura 5).

Figura 5: Esquema de un argumento Inductivo

En este estudio, adoptamos por utilizar el modelo de argumentación de Toulmin como una herramienta para analizar el tipo de argumento, de acuerdo a su estructura, que producen los estudiantes.

2.4. GEOMETRÍA DINÁMICA

Los programas de geometría dinámica ofrecen una aproximación al estudio de la geometría que permite la manipulación dinámica de la representación de objetos geométricos, abriendo así posibilidades de descubrir relaciones que difícilmente se encontrarían con los recursos que usualmente se manejan en las clases. Por ejemplo, Perry et al. (2012), Arzarello, Micheletti, Olivero y Robutti (1998) y Olivero (2003) encontraron que el arrastre permite la exploración y la validación de una construcción para producir y validar conjeturas y, a la vez, ayuda a su formulación como un enunciado condicional, porque se reconoce la dependencia entre las propiedades dadas y el resultado descubierto.

Govender (2003) señala que los programas de geometría dinámica pueden servir como contexto para favorecer los procesos de conceptualización de los estudiantes, a través de actividades en los cuales participen plenamente y que den lugar a la justificación y al razonamiento. Estos programas ofrecen la posibilidad de construir definiciones, permitiendo que estas no sean un conocimiento impuesto, sino uno en desarrollo y cambio.

Hoyles & Jones (1998) identifican la necesidad de diseñar actividades innovadoras y encontrar nuevos contextos que permitan a los estudiantes realizar vínculos entre los razonamientos empíricos y los deductivos, y a su vez, les proporcionen la oportunidad de formular enunciados y conectar sus justificaciones empíricas con justificaciones teóricas. En un ambiente de geometría dinámica se facilita la construcción de representaciones de figuras, permitiendo la exploración empírica de estas, dándole oportunidad al estudiante para establecer relaciones entre sus observaciones y su inmediata verificación. De esta manera los procesos exploratorios permiten un acercamiento informal a conceptos, relaciones y propiedades geométricas (Perry et al., 2012).

El proceso de definir figuras geométricas a partir del descubrimiento de sus propiedades suficientes y necesarias ha sido objeto de estudio por parte de algunos investigadores. De Villiers (1994) señala el gran potencial de la geometría dinámica para que los estudiantes comprendan la caracterización jerárquica de los cuadriláteros. Es a través de la geometría dinámica que pueden clasificar un conjunto de conceptos, de tal manera que los conceptos más particulares forman subconjuntos de los conceptos más generales. Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou (2008) muestran como un software de geometría dinámica (Geometer's Sketchpad) se convierte en una herramienta para realizar el paso conceptual entre un dibujo y una figura geométrica. Haciendo uso del arrastre y de la animación, los estudiantes pueden encontrar con mayor facilidad interrelaciones jerárquicas que permiten clasificar una figura geométrica, lo cual permitirá evidenciar el avance de los estudiantes en la conceptualización de lo que significa definir una figura geométrica a partir de sus propiedades suficientes y necesarias.

El uso de geometría dinámica, en particular de la función de arrastre, tiene estrecha relación con los tipos de argumentos; los argumentos empíricos se presentan cuando el estudiante corrobora sus resultados, midiendo y usando la función de arrastre para mostrar hechos. Los argumentos teóricos se utilizan para dirigir la función arrastre para explorar su construcción en busca de regularidades o patrones que le expliquen el porqué de su conjetura.

La construcción, con geometría dinámica, de figuras asociados a objetos geométricos que no se deforman bajo el arrastre, es posible ya que el programa ha sido diseñado teniendo en cuenta el sistema teórico de la geometría euclidiana; por ello las propiedades geométricas que se usaron en la construcción se mantienen. Ello permite que el estudiante reconozca las características invariantes del objeto y por tanto sus propiedades suficientes y necesarias. Por ejemplo, si se construye un paralelogramo a partir de la herramienta *rectas paralelas* de un programa de geometría dinámica, al arrastrarlo sus lados y ángulos opuestos permanecerán congruentes. El estudiante puede comprobar que este es un invariante tomando las respectivas medidas. Igualmente, construyendo un cuadrilátero con ambos pares de lados opuestos congruentes, se dará cuenta que el cuadrilátero es un paralelogramo. Así, cuadrilátero y ambos pares de lados opuestos congruentes son propiedades necesarias y suficientes de un paralelogramo.

En este sentido, el uso de geometría dinámica se puede aprovechar en los procesos de definición al realizar un análisis de los objetos geométricos, estudiando por qué cada propiedad incluida en la definición es necesaria, ilustrando que las definiciones de un objeto geométrico son arbitrarias y que ellas dependen del contexto teórico en el que se esté trabajando. El uso de la geometría dinámica para explorar y experimentar favorece la generación de un ambiente de indagación y, si se usa para buscar ideas para la argumentación, se convierte en herramienta de mediación en el desarrollo de procesos de conceptualización. En este estudio asumimos que el uso de los programas de geometría dinámica permite analizar figuras y encontrar propiedades de esta, lo cual es indispensable para construir una definición de una figura geométrica.

3. METODOLOGÍA

3.1. CLASIFICACIÓN DEL ESTUDIO

Nuestra hipótesis de investigación era que el uso de un software de geometría dinámica contribuye a que los estudiantes puedan proponer y evaluar definiciones de figuras geométricas. Para validar nuestra hipótesis, se llevó a cabo un experimento de enseñanza. Este tipo de investigación está enmarcada en los paradigmas de investigación de diseño y se caracteriza por incluir una secuencia de episodios de enseñanza, en los cuales participan un docente-investigador, un grupo de alumnos y un investigador-observador. Los experimentos de enseñanza se realizan para evaluar hipótesis de investigación, y dado que es un experimento, es posible que se deba reformular la hipótesis a partir de los datos obtenidos. El objetivo de un experimento de enseñanza es describir una trayectoria de aprendizaje en relación con un contenido específico (Molina, Castro, Molina, & Castro, 2011). En el estudio se realizó una caracterización de las actuaciones de los estudiantes, lo cual es indispensable para poder plantear una trayectoria.

Esta metodología de investigación fue pertinente para este estudio por dos razones. Por una parte, se buscaba analizar cómo un objeto de estudio, la construcción de definiciones de figuras geométricas, que habitualmente no se encuentra en los currículos escolares de matemáticas, podría trabajarse en un aula de clase. Por ello era indispensable plantear una secuencia de actividades de acuerdo con una trayectoria de aprendizaje presupuestada. Por otra parte, el objetivo del estudio era analizar las prácticas discusivas de los estudiantes cuando proponen definiciones de una figura geométrica a partir de su trabajo con un software de geometría dinámica. Para ello, era necesario el diseño de una secuencia que fomentara el uso de la geometría dinámica, se centrará en las definiciones de figuras geométricas y contribuyera a generar una ambiente de participación y de interacción en el aula. Por esta razón, se diseñaron tareas que se implementaron con un grupo de siete estudiantes. Cada episodio de clase fue liderado por un profesor-investigador, y en ocasiones se contó con la presencia de un investigador-observador, y fue grabado en audio y video. Después de cada sesión, el profesor, el observador y la asesora se reunieron para comentar los sucesos y hacer modificaciones, si era el caso.

3.1.1. DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO Y DE LA POBLACIÓN

El estudio se llevó a cabo en el Colegio Cafam de la localidad de Barrios Unidos, con siete estudiantes de grado décimo de educación básica secundaria (14 – 16 años). En total se realizaron siete sesiones, cada una con una duración de cuatro horas, los días sábados durante el segundo semestre de 2013. Durante el desarrollo de la secuencia, estos estudiantes trabajaron en dos grupos: el Grupo 1 conformado por Saúl, Noé y Néstor, y el Grupo 2 constituido por Andrea, Martin, Leonardo y Armando[1]. Los estudiantes participaron voluntariamente en esta investigación, siendo ello parte de las actividades de servicio social obligatorias que tenían que realizar.

Como ninguno de los docentes había sido profesor de los estudiantes, no se tenía información acerca del conocimiento geométrico de los estudiantes. Antes de diseñar la secuencia de tareas para el experimento, se realizó una revisión del plan de estudios de geometría de la institución; se encontró que en grado noveno se deberían haber abordado temas relacionados con la identificación de figuras geométricas y el cálculo de áreas y perímetros. De acuerdo a lo reportado por el profesor responsable de dicho curso, en las clases de geometría el paso inicial para estudiar una figura geométrica era presentar la definición y las propiedades de esta, con el fin de que el estudiante posteriormente pudiese hacer uso de ellas para resolver tareas que se centraban en las características métricas de una figura: longitud de sus lados, perímetro, área, cálculo de la razón de proporcionalidad de figuras semejantes, entre otros. De acuerdo a lo reportado por el profesor titular, en ningún momento propuso actividades que propiciaran el desarrollo de habilidades para evaluar y construir definiciones de objetos geométricos, ni actividades que fomentaran el desarrollo de actividad demostrativa.

Respecto a la metodología de este curso, el profesor comentó que en algunas sesiones los estudiantes trabajaban en grupos, aunque no era de su interés centrar su atención en los argumentos de los estudiantes, sino en la capacidad para resolver los problemas propuestos. Las clases en su gran mayoría eran magistrales. En los cuadernos de los estudiantes pudimos observar que cuando el grupo de estudiantes que participó en el experimento se encontraba cursando noveno grado, justificaron propiedades de figuras utilizando las propiedades de triángulos congruentes y semejantes.

Pese a que la institución cuenta con amplios recursos tecnológicos y varias aulas especializadas, tres de los estudiantes que participaron en este experimento nunca antes habían tenido la oportunidad de usar el programa de geometría dinámica GeoGebra, y los otros estudiantes habían utilizado este programa para tareas que requerían la realización de gráficas de funciones. Por lo anterior, es posible afirmar que ninguno de los estudiantes sabía cómo utilizar las herramientas de geometría dinámica que ofrece el programa GeoGebra.

[1] Seudónimos

En términos generales, los estudiantes tenían un rendimiento académico promedio y uno de ellos era repitente. Provienen de familias de estratos tres y cuatro, por lo cual contaban con la facilidad de utilizar un computador en casa y por ello tenían un buen uso de herramientas tecnológicas.

3.1.2. DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA

Para que un programa de geometría dinámica pueda contribuir al desarrollo del pensamiento geométrico de un grupo de estudiantes, es necesario contar con diseños de enseñanza y aprendizaje cuidadosamente realizados (Patricia Perry, Camargo, Samper, & Rojas, 2006). Herbst, Gonzalez y Macke (2005) proponen dos tipos de tareas cuando el tema es definiciones: 1) a partir de varios ejemplos de una figura geométrica, determinar características comunes que permitan definirla y diferenciarla de otras figuras geométricas; y 2) proponer figuras que representen un conjunto de propiedades específicas. Esto fue tenido en cuenta al momento de diseñar la secuencia didáctica.

El proceso de diseño de la secuencia se vio afectado por sucesos que se dieron durante la aplicación de las actividades. En las primeras dos sesiones se evidenció que los estudiantes no contaban con las herramientas teóricas necesarias para desarrollar las tareas planteadas, motivo por el cual se hicieron dos modificaciones en el diseño del experimento.

Para estructurar la secuencia de enseñanza, se propusieron cuatro partes descritas a continuación. Las sesiones de la parte I, II y III fueron dirigidas alternadamente por uno de los autores de este trabajo, quienes asumieron el rol de profesor o profesora.. En la sesión final, cada investigador acompañó todo el tiempo a un grupo mientras trabajaban autónomamente, Como la profesora fue la que trabajó más tiempo con los estudiantes, asumió ese rol durante el desarrollo de las actividades , y dirigió los momentos de socialización de esta parte de la secuencia.

3.1.2.1. Parte 1: definir en geometría

Para esta etapa se diseñaron dos tareas en torno a la definición de triángulo isósceles (Anexo I: Actividad 1 y 2). Inicialmente los estudiantes debían reportar su definición personal de triángulo isósceles; luego debían realizar la construcción de un ejemplo con geometría dinámica y describir los pasos de su construcción. El objetivo de esta tarea era que los estudiantes evidenciaran que en la construcción realizada con el software posiblemente no se reportaban todas las condiciones de la definición personal que ellos dieron. Por ejemplo, si la definición de triángulo isósceles era aquel con dos lados congruentes y dos ángulos congruentes, solamente una de las dos condiciones mencionadas se tenía que construir pues con ello quedaba determinado el triángulo. Con ello pretendíamos que los estudiantes se dieran cuenta de que su definición personal no es económica. En la segunda parte de la actividad 1, se le pedía a cada grupo de estudiantes que con geometría dinámica exploraran la representación dada de un triángulo isósceles para buscar propiedades y que posteriormente justificaran que esas propiedades se cumplían. Algunas de las propiedades que surgieron en esta etapa fueron: 1) dos lados congruentes; 2) dos ángulos congruentes.

En la Actividad 2, se propuso a los estudiantes una definición diferente para el triángulo isósceles con el fin de que ellos determinaran si efectivamente lo era. Esto implicaba poder demostrar, a partir de la definición propuesta, algunas de las propiedades del triángulo isósceles. Fue aquí donde se evidenció que los estudiantes presentaban grandes inconvenientes para construir demostraciones. Por tal motivo, se decidió realizar unas sesiones centradas en los criterios de congruencia y el uso de estos criterios para demostrar.

3.1.2.2. Parte II: Conformación de un sistema teórico local

Esta etapa se llevó a cabo en tres sesiones. En las dos primeras sesiones se realizó la tarea "Encuentre el triángulo" cuyo objetivo era descubrir los criterios de congruencia de triángulos, tarea propuesta por Samper, Molina y Echeverry (2011). En esta se contaba con las seis piezas correspondientes a las partes de un triángulo específico desconocido para ellos (reglas de la misma longitud de los lados y moldes con la misma abertura de los ángulos). Paulatinamente, se entregaban subconjuntos de estos elementos con los cuales los estudiantes tenían que tratar de construir la mayor cantidad de triángulos diferentes posibles. Al finalizar, el profesor les entregaba una representación del triángulo original para que cada grupo lo comparara con los triángulos que habían construido y determinaran cuando se obtenía un triángulo congruente al original. De esta forma evidenciaron que las condiciones que generaban triángulos congruentes eran aquellas correspondientes a los criterios de congruencia (Anexo I: actividad 3).

En la tercera sesión, se propuso como actividad un conjunto de tareas. En algunas de estas tareas se daba la congruencia de algunas partes de dos triángulos y los estudiantes debían determinar si que los triángulos eran congruentes y demostrarlo. En otras tareas, los estudiantes debían hacer uso de los criterios de congruencia para demostrar una propiedad de una figura geométrica. La finalidad de esta actividad era la construcción de un sistema teórico local conformado por hechos geométricos que los estudiantes recordaban al resolver las tareas, o aquellos que se requerían para resolver la tarea y que se consideraban útiles para justificar las definiciones de triángulo isósceles que se habían propuesto (Anexo II).

3.1.2.3. Parte III: Cuadrado

Para esta fase, de dos sesiones, se diseñó una actividad compuesta por dos tareas, una para cada sesión. En la primera cada grupo de estudiantes debía presentar su definición personal de cuadrado, luego realizar la representación con geometría dinámica con el fin de que determinaran si su definición era incompleta, porque reportaba condiciones necesarias pero no suficientes, o si no era económica, porque reportaba más condiciones de las suficientes y necesarias. Luego de la construcción se solicitó a los estudiantes completar cada argumento de la demostración que probaba la equivalencia de la definición económica resultante de la construcción y la definición usual (Anexo I: Actividad 4). En la segunda tarea, se le pidió a los estudiantes proponer definiciones alternativas para el cuadrado y comprobar con geometría dinámica que la figura resultante era un cuadrado (Anexo I: Actividad 5).

3.1.2.4. Parte IV: Cometa

Esta fue la sesión de evaluación y análisis (Anexo I: Actividad final), la cual tenía como objetivo que los estudiantes encontraran, con el uso de geometría dinámica, todas las propiedades de una figura dada que era desconocida para ellos (la cometa). Luego se les propuso que determinaran conjuntos de propiedades de la figura que la definieran. Para ello se les pidió realizar la construcción en GeoGebra usando las propiedades escogidas. De esta manera se buscaba que los estudiantes establecieran que las propiedades que proponían eran suficientes y necesarias para definir la figura. De no ser así, debían indicar qué propiedades hacían falta para definir la figura. También se pretendía establecer que alguna de las definiciones propuestas no eran comunes porque hacían referencia a partes de la figura que no la constituyen. Por ejemplo, referirse a propiedades de las diagonales en lugar de las de los lados.

3.2. RECOLECCIÓN DE DATOS

En cada una de las sesiones se tomó registro en audio y video de la actividad de los dos grupos de estudiantes y de la puesta en común que se realizaba. A su vez, se recogió el reporte escrito que realizó cada grupo de las actividades realizadas. Dado que la última sesión era la que usaríamos para analizar la hipótesis de investigación que se pretendía comprobar con el experimento de enseñanza, se realizó la transcripción de los registros de audio y video del trabajo conjunto de cada grupo (Anexo III y Anexo IV) y de la socialización que se llevó a cabo (Anexo V). Cada una de las transcripciones está numerada de forma independiente con respecto a las otras dos.

3.3. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Dado que queríamos caracterizar la actuación de los estudiantes cuando estaban inmersos en el proceso de definir en geometría, centramos nuestro interés en la argumentación, el comportamiento racional, las características de una definición geométrica y el papel de la geometría dinámica en la actividad demostrativa. Para analizar las acciones realizadas por los estudiantes durante el desarrollo de la secuencia didáctica y poder determinar si la hipótesis que dirigió nuestro estudio era correcta, fue necesario establecer unas categorías de análisis. Tomando como referencia el marco teórico revisado se propuso la primera versión de las categorías de análisis (Tabla 1).

Tabla 1: ***Primera versión de las categorías de análisis***

Argumentación	Estructura	1. Deductivo dinámico No visual Visual 2. Deductivo Teórico	3. Abductivo dinámico 4. Abductivo teórico 5. Inductivo
	Finalidad en relación con la definición	Argumentos para criticar una definición Argumentos para proponer una definición Argumentación por medio de contraejemplos Argumentos a favor o en contra de la inclusión de una condición como una propiedad de la figura Argumentos para decidir si la propiedad es de la definición	
Comportamiento racional	Aspecto epistémico Aspecto teleológico Aspecto comunicativo		

Con esta versión de las categorías de análisis se realizó el análisis de la transcripción del Grupo 1. En este pudimos observar que la clasificación de los argumentos de acuerdo a la relación con la definición no era pertinente para el análisis, pues la finalidad estaba determinada por la actividad que estaban realizando. Esto llevó a eliminar esta categoría de análisis, construyendo así la segunda versión de las categorías (Tabla 2).

Tabla 2: ***Versión final de las categorías de análisis***

Argumentación	Forma como se estructura	Deductivo Inductivo Abductivo
	Estructura	Implícito Explícito
	Naturaleza	Teórico Empírico
Comportamiento racional	Aspecto epistémico Aspecto teleológico Aspecto comunicativo	

Con estas categorías se revisó el análisis de la actividad del Grupo 1 y se realizó el análisis del Grupo 2 y de los momentos de socialización. A continuación se explicará cada una de las categorías.

3.3.1. ARGUMENTAR EN EL PROCESO DE DEFINIR

La argumentación es una acción retórica que generalmente se realiza con el fin de convencer a otra persona de la veracidad de una afirmación. En el proceso de definir una figura geométrica, la argumentación se convierte en evidencia de la comprensión de los estudiantes de lo que es una definición. Para analizar sus argumentos tuvimos en cuenta tres aspectos: su estructura, su forma y su naturaleza.

3.3.1.1. Forma como se estructura

Hace referencia a cómo se organizan los tres elementos básicos de un argumento según el modelo del Toulmin para la argumentación: datos, garantía y aserción. Si a partir de los *datos* y utilizando una *garantía* se infiere la aserción, entonces el argumento es deductivo. Si a partir de una *aserción* se evalúa la posibilidad de usar una *garantía* e inferir los datos, entonces el argumento es *abductivo*. Y finalmente, si evidenciando que con varios ejemplos de datos la aserción es la misma, y con ello se establece una garantía entonces el argumento es *inductivo.*

3.3.1.2. Estructura

Esta categoría hace referencia a cuántos de los tres elementos básicos de un argumento están presentes en lo que dicen los estudiantes. Si explícitamente mencionan los tres elementos, entonces es un *argumento explícito.* Si uno de los tres elementos no se menciona, entonces es un *argumento implícito*.

3.3.1.3. Naturaleza

La naturaleza de un argumento hace referencia al origen de su *garantía*. Si esta hace parte de un sistema teórico local, entonces es un *argumento teórico.* Si la garantía se refiere a evidencia obtenida de una figura construida con geometría dinámica o a herramientas del programa, entonces es un *argumento empírico.* Este tipo de argumentos puede surgir principalmente del uso de la geometría dinámica para determinar la validez de una afirmación.

3.3.2. COMPORTAMIENTO RACIONAL EN EL PROCESO DE DEFINIR

En este estudio se decidió observar y analizar la disposición y el comportamiento de los estudiantes cuando proponían o evaluaban definiciones para un objeto geométrico. Para ello se adoptó el modelo de comportamiento racional formulado por Habermas, de acuerdo con la interpretación de Boero, Douek, Morselli y Pedemonte (2010).

3.3.2.1. Aspecto epistémico

Se refiere al control de los requerimientos establecidos por la comunidad de clase para realizar un argumento de acuerdo a premisas compartidas y formas legítimas de razonamiento, unas que son propias de la comunidad y otras que concuerdan con aquellas que la comunidad de discurso matemático acepta. Con relación al proceso de argumentar y definir implica:

- Aceptar al arrastre como una herramienta de control teórico que permite determinar la validez de un hecho geométrico.
- Identificar propiedades geométricas de una figura geométrica.
- Validar las ideas de acuerdo con las premisas compartidas y las formas legítimas de razonamiento.
- Proporcionar elementos teóricos como garantías de sus argumentos.

3.3.2.2. Aspecto teleológico

Está relacionado con la solución de problemas y la elección de una meta. Consiste en la formulación de planes o el desarrollo de uno, en proponer estrategias que puedan contribuir a llevar a cabo el plan, o en tener la meta bajo control. En este caso específico las acciones serías:

- Proponer planes para evaluar una posible definición.
- Construir estrategias para decidir si una propiedad hace parte de la definición.
- Proponer qué y cómo hacer, en términos de *visualización* y *exploración* (dinámica, empírica y teórica), para resolver una tarea.
- Proponer un camino a seguir para construir la justificación de una afirmación.

3.3.2.3. Aspecto comunicativo

Relacionado con la adherencia consciente de las reglas que permiten comunicar claramente argumentos, usando los términos adecuados que conforman el lenguaje matemático y las normas que en este se establecen. Está relacionado con la preocupación de formular clara y concisamente las ideas desde el punto de vista matemático.

- Usa el lenguaje y la notación geométrica precisa cuando se refiere a elementos geométricos involucrados en una situación o representación dada.
- Se refiere a elementos del sistema teórico local con los nombres correctos.
- Registra correctamente, en una representación gráfica, la información que conoce.

4. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD DE LOS ESTUDIANTES

El análisis corresponde a las interacciones de los estudiantes durante la última sesión. En esta se les propuso una actividad cuyo propósito era que ellos construyeran y evaluaran posibles definiciones para la figura cometa. Para el desarrollo de la actividad, los estudiantes trabajaron en grupos, como lo venían haciendo: el conformado por Néstor, Noé y Saúl (Grupo 1), y el integrado por Andrea, Martín, Leonardo y Armando (Grupo 2).

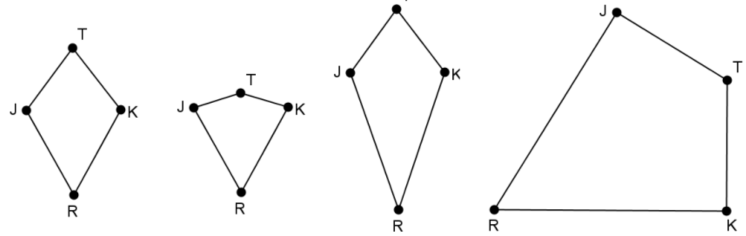
La actividad estuvo dividida en cuatro partes. En la primera parte, se les solicitó a los estudiantes descubrir la mayor cantidad posible de propiedades de la figura cometa. En la segunda, determinar conjuntos de propiedades que no definen la figura. En la tercera, construir posibles definiciones y justificarlas. Finalmente, en la última parte la debían determinar entre un grupo de diferentes cuadriláteros cuáles correspondían a una cometa. Las tres primeras partes de la actividad fueron desarrolladas por cada grupo, para luego comunicar sus resultados en la puesta en común. La última parte de la actividad fue realizada de manera conjunta por todos.

Es importante aclarar que Néstor, integrante del Grupo 1, rara vez se involucró en el desarrollo de cada actividad, pues asumió el rol de consignar por escrito lo que sus compañeros le pedían. Aunque Saúl y Noé discuten continuamente acerca de cómo reportar las propiedades encontradas, las conclusiones de esta discusión rara vez quedan plasmadas en el reporte escrito, pues Néstor por lo general espera a que alguno de sus compañeros le confirme lo que debe escribir.

4.1. LOS ESTUDIANTES DESCUBREN PROPIEDADES DE LA COMETA (ETAPA 1)

Se solicitó a los estudiantes que explorarán la representación robusta en GeoGebra, construida con anterioridad por la profesora, de una cometa. Cuando los estudiantes arrastraban la figura, esta siempre tenía dos pares de lados adyacentes congruentes y ningún par de lados opuestos congruentes.

Figura 6: Diferentes vistas obtenidas al arrastrar la figura en GeoGebra



4.1.1. NOÉ, SAÚL Y NÉSTOR DESCUBREN LAS PROPIEDADES DE LA COMETA

4.1.1.1. Primera aproximación al problema

Noé arrastra el punto T y establece que la figura corresponde a un rombo [2]. Saúl está de acuerdo con Noé en que la figura es un rombo. No obstante, Noé continúa arrastrando los vértices de la figura y empieza a dudar de su afirmación, pues se da cuenta que la medida de los lados no parece ser la misma. Saúl por su parte sigue creyendo que sí es un rombo, y ante la objeción de su compañero comenta que "… de cualquier punto que lo movamos siempre se va a mantener un rombo… No de iguales medidas pero siempre va a ser un rombo" [15]. Noé continúa arrastrando los vértices de la figura y observan que siempre se mantiene la misma forma. Por ello, Saúl le indica a Néstor: "Ponga que de cualquier punto que lo movamos… se va a mantener la misma figura" [19-21]. Saúl arrastra el punto *J*, tratando de que uno de los ángulos sea recto. Como no logra hacerlo reporta como propiedad que "…ninguno de sus ángulos es de noventa grados [24]".

Noé continúa dudando que la figura construida sea rombo, y discute con Saúl acerca de ello.

27. Noé: ¿Es que sabe qué es lo que no me convence?

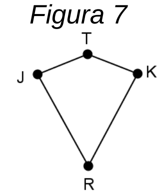
28. Saúl: Que para que sea un rombo tendría que ser esto [señala el $\overline{JT}$] igual a esto [señala el $\overline{JR}$].

29. Noé: Sí, porque si… vea… ¿Se acuerda lo del cuadrado? Cuando un cuadrado se estira forma un rombo. Lo cual no hace esto [señala la pantalla] porque estos dos lados [señala al $\overline{JT}$ y al $\overline{KT}$] no son iguales a estos dos lados [señala al $\overline{RJ}$ y al $\overline{\mathrm{RK}}$]. El lado JR y KR no es igual a JT… Espere, espere, espere…

[…]

45. Noé: De todos modos la figura se mantiene. O sea, eso es lo importante. Pero es que si fuera un rombo [arrastra el punto K] tendría que ser como un cuadrado estirado [arrastra el punto R]… Y es que acá [señala la figura] no se forma como un cuadrado. ¿Ve?

Figura 7



Un análisis de las intervenciones realizadas por Saúl [15] y Noé [2] permite inferir que la imagen conceptual de rombo de estos dos estudiantes está asociada, inicialmente, a la forma de esta figura. El arrastre que realizan les permite darse cuenta de que la imagen de la calculadora no corresponde del todo con la representación que conforma parte de su imagen conceptual de rombo. Aunque no lo expresan explícitamente, el grupo ha descubierto dos propiedades que son importantes para definir la figura: tiene dos lados adyacentes congruentes y dos lados adyacentes no congruentes [28 y 29]. Por otra parte, en la intervención de

Saúl [28] se evidencia que su definición de rombo está asociada a un cuadrilátero con lados de igual medida, mientras que la definición personal de Noé [29 y 45] es un “cuadrado que se estira” [29]. Estas definiciones personales son la *garantía* de los argumentos realizado por cada uno de los estudiantes, cuyos *datos* son la no congruencia de dos pares de lados [28 y 29] y cuya *aserción* es que la figura no es un rombo; la garantía es la contrarrecíproca de la definición usual de rombo. Noé propone arrastrar para ver si en algún momento la figura se convierte en un cuadrado [45]. En su argumento, establece como *datos* las figuras que obtiene bajo el arrastre, que visualmente nunca resultaron ser un cuadrado, como aserción que la figura no es un rombo y como *garantía* su definición personal. El argumento de Saúl es *deductivo teórico implícito*, mientras que el argumento de Noé es *deductivo empírico implícito*.

Respecto al comportamiento racional, se puede observar el uso de las definiciones para tomar decisiones respecto a los objetos geométricos. En este caso, aunque la forma de la figura les evoca al rombo, para ellos no es suficiente, pues reconocen que para que sea rombo se deben cumplir un conjunto de propiedades [2,45]. Lo anterior corresponde al *aspecto epistémico* del comportamiento racional porque es una preocupación de índole teórica. Para verificar la hipótesis de que la figura es un rombo deciden arrastrar la figura. El plan consiste en determinar si durante el arrastre la figura se convierte en un cuadrado, lo que permitiría confirmar su hipótesis. (*Aspecto teleológico*) [2-45].

El grupo reporta por escrito, como primera propiedad de la figura, que ninguno de sus ángulos es de noventa grados. Esta no es una propiedad de la figura y en este caso obedece a una exploración limitada realizada con el software.

4.1.1.2. Descubren la primera propiedad válida

Después de discutir por qué la figura no corresponde a un rombo, el grupo identifica una propiedad que involucra una de las diagonales del cuadrilátero. Aunque en las intervenciones [28] y [29], Saúl y Noé no mencionan explícitamente que la figura tiene dos pares de lados adyacentes congruentes, las siguientes afirmaciones son el resultado de haberse percatado de esta propiedad:

30. Saúl: Un triángulo isósceles es el que tiene dos lados iguales, ¿verdad?

31. Noé: Aja.

32. Saúl: Entonces ahí hay dos triángulos isósceles.

33. Noé: Si. Acá se forma uno [señala al $\overline{RJ}$ y al $\overline{RK}$ varias veces seguidas].

34. Saúl: Y este es otro [señala al $\overline{JT}$ y al $\overline{KT}$] .

35. Noé: Sí. Cuando se traza un segmento se forman dos [triángulos isósceles].
[…]

42. Saúl: [Dirigiéndose a Néstor.] Cuando se traza un segmento del punto G al punto K…

43. Noé: J…

44. Saúl: … J y K… se forman dos triángulos isósceles. [Néstor escribe.]

En las anteriores intervenciones se evidencia un argumento *deductivo teórico explícito*, construido colectivamente entre Saúl y Noé. Los *datos* son la congruencia del $\overline{RJ}$ con $\overline{RK}$, y del $\overline{JT}$ con $\overline{KT}$ (comunicados a partir de la señalización), la *garantía* es la definición de triángulo isósceles [30] y como *aserción* concluyen que se forman dos triángulos isósceles, aunque no los nombran [32]. En este caso, los datos son el resultado de una visualización matemática de la figura, puesto que los estudiantes descomponen la figura en sus elementos sin que estos estén dibujados. No obstante, en ningún momento se realiza una comprobación empírica para determinar la veracidad de los mismos. Adicionalmente, la intervención realizada por Saúl [30] es evidencia de *aspecto epistémico*, puesto que recurre a un elemento teórico para poder concluir la aserción.

4.1.1.3. Construyen nuevos elementos de la figura

Para descubrir otras propiedades de la figura, Saúl propone construir las diagonales del cuadrilátero: "Trácele este segmento [$\overline{JK}$] y trace una perpendicular [con el dedo indica una perpendicular a $\overline{JK}$ que coincide con la diagonal $\overline{TR}$]. Entonces aquí salen dos triángulos… salen tres triángulos rectángulos" [49]. Noé corrige a Saúl indicando que: "Salen cuatro triángulos rectángulos. Sí, porque si se divide en la mitad… Espere [50]". Para concretar la construcción, Noé establece que la recta debe ser perpendicular a la base, refiriéndose a $\overline{JK}$ [52], y Saúl le indica que primero debe construir el punto medio y posteriormente construir la recta perpendicular. No obstante, cuando Noé realiza la construcción con GeoGebra construye el punto medio A de $\overline{JK}$ y luego la $\overleftrightarrow{TR}$ seleccionando los puntos T y R para construirla. Posteriormente, Noé y Saúl discuten acerca de cómo reportar la propiedad descubierta, mientras le van dictando a Néstor escríbalo que debe escribir.

55. Saúl: [Dirigiéndose a Néstor.] Ponga que al trazar…

56. Noé: Espere, espere, espere. Ponga que se trazó un segmento en la mitad de la gráfica.

57. Saúl: No, es que esa no es la mitad [señala la gráfica.]

58. Noé: Digamos: se trazó un segmento del punto J al…

59. Saúl: ¡Ah! No, mentiras. Es del punto J al punto K.

60. Noé: Ponga que se trazó un segmento del punto J al punto K …

[…]

65. Saúl: [Lee lo que ha escrito Néstor.] Se traza un segmento… entre paréntesis una diagonal… Ponga que a esa diagonal se le trazó…

66. Noé: Se le halló el punto medio.

67. Saúl: [Dictándole a Néstor.] Se le halló el punto medio y sobre el punto medio se trazó la perpendicular.

68. Noé: Después se trazó la perpendicular a la base [señala $\overleftrightarrow{TR}$]. ¿Sí? ¿A la base? Porque si se traza…

69. Saúl: Se traza una perpendicular a la diagonal.

70. Noé: O sea. No me hago entender. A lo que me refiero con base, me refiero a esta línea también [señala diagonal $\overline{JK}$] pero diciéndolo como… como… es que toda línea es perpendicular cuando hay… es perpendicular a la base… O sea…

71. Saúl: No, pues ponga que es perpendicular con la diagonal.

72. Noé: Ponga que forma dos ángulos rectos… cuatro… No…

73. Saúl: ¿Sabe también que podríamos poner?

74. Noé: Cuando se traza la perpendicular se están formando ángulos rectos…

75. Saúl: … y cuatro triángulos rectángulos. Biseca…

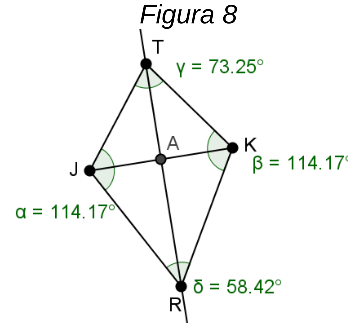
En las intervenciones [49] y [50] se evidencia un plan para descubrir nuevas propiedad (*Aspecto teleológico*). No obstante, no lo realizan como lo habían descrito, sino que construyen la recta que contiene la diagonal. Aunque no lo explicitan, los estudiantes proponen realizar la construcción de las diagonales teniendo como referencia dos propiedades que visualmente imaginan de la figura: sus diagonales son perpendiculares entre si y una diagonal biseca a la otra.
Concretamente, el plan propuesto por Noé y Saúl consiste en realizar un proceso de exploración análogo al que habían realizado, en sesiones anteriores, con el cuadrado, lo cual corresponde al *aspecto teleológico* de su comportamiento racional. Por otra parte, en las intervenciones [55-75] hay evidencia del *aspecto comunicativo*, puesto que Noé y Saúl discuten sobre cómo expresar sus ideas de la mejor forma posible y utilizando adecuadamente el lenguaje matemático. Por ejemplo, en las intervenciones [65], [70] y [71], Saúl le indica a Noé que utilice la palabra diagonal para referirse al $\overline{JK}$, en lugar de la palabra base, y en [65] Noé se corrige a sí mismo.

4.1.1.4. Descubren propiedades acerca de sus ángulos

Saúl observa detenidamente la figura y establece que: “También se puede demostrar que tiene… O sea, vea: estos dos ángulos [$\angle JTK$ y $\angle JRK$] son iguales. Igual que estos dos [$\angle TJR$ y $\angle RKT$]. Es que cómo los biseca, entonces estos dos son iguales [$\angle JTK$ y $\angle JRK$] y estos también [$\angle TJR$ y $\angle RKT$]” [90]. La profesora le pide a Saúl que justifique su afirmación, a lo que él responde: “Porque digamos como estos segmentos tienen la misma medida. O sea, este [$\overline{JT}$] tiene la misma medida que este [$\overline{TK}$] y este [$\overline{JR}$] tiene la misma medida que este [$\overline{RK}$], entonces la medida de los ángulos… O sea digamos si, como tienen la misma medida implica que los ángulos tienen que ser iguales [93] […] O sea, digamos si este ángulo [con el dedo señala la amplitud del $\angle TJR$], no sé, da 60, entonces este [$\angle TKR$] también tendría que dar 60. Si este [$\angle JTK$] da 45, este [$\angle JRK$] también tiene que dar 45 [96]".

A partir de un cuestionamiento de la profesora acerca de la utilidad de GeoGebra para comprobar las afirmaciones realizadas, los estudiantes deciden tomar las medidas de los ángulos del cuadrilátero [97-108]. Debido a que se evidencia que lo que ellos proponen no es totalmente cierto (Figura 8), Saúl y Noé empieza a buscar justificaciones para este hecho.

Figura 8



109. Saúl: ¿Eso por qué no da? (Figura 8)

110. Noé: ¡Ah! Es porque, esperé. Es porque en uno el ángulo está más abierto que en el otro. O sea, acá [$\angle JTK$] el ángulo está más abierto que acá [$\angle KRJ$].

111. Saúl: Por lo que está más unido a la diagonal… Porque vea, digamos…

112. Noé: No. No, porque vea: estos triángulos [señala el centro de la figura]…

113. Saúl: Digamos, mientras este punto [T] este más, o sea, con menos distancia hacia esta diagonal [$\overline{JK}$], el ángulo va a ser más abierto.
[…]

114. Noé: Vea, si…si agrandamos… [Arrastra R] ¡Ah! Mira, otra condición. Si movemos el punto R, los ángulos que forma la diagonal, qué son congruentes entre sí, así se mueva esto [punto R], siempre van a ser iguales… Siempre van a ser congruentes.
[…]

126. Saúl: Escriba. Si movemos el punto R, los ángulos que se están formando por la diagonaaal… No, no se forman por la diagonal, porque si se formaran por la diagonal sería solo está mitad [$\angle TKJ$ y $\angle TJK$] y la otra de acá [$\angle KJR$ y $\angle JKR$]. No. Escriba los ángulos J y K permanecen congruentes. No iguales. O sea, no tienen la misma medida, pero siempre van a ser congruentes. […]

138. Saúl: No, o sea, es que cambia la medida de los ángulos. Cuando usted, vea… Cuando usted abre esto va a cambiar. O sea, no siempre va a permanecer un ángulo igual. Pero siempre, o sea, al cambiar siempre los dos ángulos van a tener la misma medida. Porque pues inicialmente son congruentes, y cuando se mueven… Digamos este punto [arrastra R], o sea, ¿si ve? Ya no se mantiene, acá. Digamos acá. Acá está 119 [medida del $\angle TKR$ y $\angle TJR$], si usted mueve este punto [arrastra R] no se mantiene esa medida del ángulo, sino cambia, digamos a 123 [medida de $\angle TKR$ y $\angle TJR$ después del arrastre].

[…]

142. Saúl: Que al arrastrar el punto R los ángulos J y K permanecen congruentes. [Néstor escribe.]

En el primer argumento, que es de Saúl [90], los *datos* son que las diagonales bisecan a los ángulos, aunque no explicita que se está refiriendo a las diagonales, y la *aserción* es que los ángulos del cuadrilátero son congruentes. La *garantía* no la dan, por lo cual este argumento es *deductivo teórico implícito*. Debido que el argumento de Saúl es incompleto, la profesora le pide la garantía. Saúl modifica su argumento inicial, generando un segundo argumento *deductivo teórico* [90-93], esta vez *explícito* aunque no legítimo dentro del sistema teórico local que se está construyendo, puesto que se inventa una propiedad que no logra relacionar correctamente los datos con la aserción. En este caso, los *datos* son la congruencia $\overline{JT}$ con $\overline{TK}$ y de $\overline{JR}$ con $\overline{RK}$; la *garantía* es una proposición inventada que en general no se cumple: si hay dos ángulos determinados por segmentos respectivamente congruentes entonces los ángulos son congruentes; la *aserción* es la congruencia de $\angle JTK$ con $\angle JRK$, y de $\angle TJR$ con $\angle RKT$. En el segundo argumento, la intervención de la profesora hace que Saúl pase de un argumento de garantía implícita a un argumento *deductivo teórico explícito* aunque no legítimo.

Al realizar la comprobación en GeoGebra [109], obtienen varios contraejemplos, los cuales invalidan la aserción del anterior argumento. Ello generó en él el deseo de determinar porqué. Esto es importante en la metodología del curso. Esta comprobación genera dos nuevos argumentos construidos colectivamente entre Saúl y Noé. El primero es un argumento *inductivo empírico explícito* en el cual los *datos* son la congruencia de los dos pares de lados adyacentes del cuadrilátero, la *aserción* [109] es la no congruencia de $\angle JTK$ y $\angle JRK$. La *garantía en acto* la determinan a partir de la manipulación de la figura en el software, la cual es que entre más cerca esté un vértice a la diagonal, mayor va a ser la amplitud del ángulo (*Garantía* en acto: Dado ΔABC, entre más cerca esté A al $\overline{BC}$, mayor va a ser la medida del $\angle BAC$) [113]. La forma como reportan su argumento es dinámica (*empírica*) porque los estudiantes no tienen herramientas teóricas que les permita expresarlo en términos no dinámicos y porque es producto de lo que están viendo. El segundo argumento cuenta con los mismos *datos* del argumento anterior. No obstante, en este caso la *aserción* es la congruencia de $\angle J$ y $\angle K$ al arrastrar R, y la *garantía,* que no verbalizan, es una generalización de varios casos observados con GeoGebra. Esta es que dos ángulos de una cometa son congruentes [138]. En este caso el argumento es de tipo *inductivo empírico implícito*.

Resulta de interés analizar el papel que juega la geometría dinámica en el desarrollo de la tarea. En la primera parte, la geometría dinámica se utiliza para comprobar una propiedad y descartarla [97-109]. Posteriormente, el software es utilizado para buscar una explicación a un resultado obtenido que los sorprende [110-118]. Finalmente, el programa es empleado por Saúl para verificar su conjetura [138].

Respecto al comportamiento racional, en las anteriores intervenciones se encuentra evidencia del *aspecto epistémico* y del *comunicativo.* El primero, se observa en la preocupación de Saúl por establecer por qué los resultados obtenidos con geometría dinámica no concuerdan con la aserción del primer argumento, el cual creían haber justificado correctamente a través del uso de elementos teóricos [109]. Por su parte, el *aspecto comunicativo* se evidencia en las afirmaciones que realiza Saúl respecto a la forma correcta de expresar la propiedad encontrada, evitando ambigüedades y utilizando adecuadamente el lenguaje matemático [126]. En las intervenciones de Noé, se observa también *el aspecto comunicativo*, pues se auto corrige con respecto a las palabras congruencia e igual [114]. Saúl es menos cuidadoso con el uso del lenguaje; a veces habla de iguales y a veces de congruencia. Sin embargo en la intervención [142] se expresa bien.

4.1.1.5. Especifican la congruencia de los lados

La profesora le recuerda al grupo que previamente habían mencionado la existencia de dos triángulos isósceles; les pide que a partir de esta información determinen una propiedad para los lados del cuadrilátero. Saúl explicita que los lados son congruentes, señalando cuáles lo son ($\overline{TK}$ con $\overline{JT}$ y $\overline{JR}$ con $\overline{RK}$) [147]. Noé le pregunta a Saúl cómo escribir la propiedad [148] e indica que: “Pues sería que el lado JT es congruente con el lado… Parce, ¿usted se acuerda cómo se pone eso de congruencia?” [150]. Néstor le recuerda el símbolo de congruencia. Finalmente reportan la propiedad como: “$\overline{JT} \cong \overline{TK}$ y $\overline{JR} \cong \overline{RK}$”.

Se evidencia el *aspecto comunicativo* a través del interés por reportar la propiedad descubierta con la notación matemática adecuada.

4.1.1.6. Explican por qué la figura no es un rombo

Noé dibuja un rombo con una diagonal en el tablero (Figura 9) y afirma que la figura “no es un rombo [158]”. Cuando Saúl le comenta que eso ya lo habían establecido, Noé establece que “…hay que explicar por qué no es un rombo, no es solo decir que no es un rombo [162]”. Para ello, indica las condiciones que deberían cumplir los triángulos isósceles determinados por una de las diagonales. Noé pasa al tablero para explicarle a sus compañeros su idea.

163.	Saúl:	Pero es que usted ya lo dijo al comienzo, que cuando usted estiraba un cuadrado tenían que ser todos sus lados iguales…

164. Noé: Oye, ¿cómo es que se llamaba este triángulo que tenía sus tres lados iguales? ¿Equilátero?

165. Profesora: Equilátero.

166. Noé: Pienso yo…

167. Saúl: Tendrían que formar dos triángulos equiláteros.

168. Noé: Exacto. Tendría que tener dos triángulos equiláteros.

169. Profesora: ¿Y por qué?

170. Noé: Porque, es que, digamos el rombo también se puede dar a través de la forma, o sea, digo yo, no sé si esté bien, digamos como un cuadrado cuando el cuadrado se comprime, ¿sí? Como el cuadrado tiene todos sus lados iguales, que nos formaría eso, dos triángulos equiláteros.
[…]

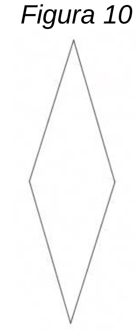
174 Saúl: Yo diría que un rombo se forma también con dos triángulos isósceles.

175. Profesora: ¿Por qué? Cuéntame.

176. Saúl: Se necesitaría que los dos triángulos isósceles fueran congruentes. O sea… si fueran dos triángulos equiláteros, implicaría que esta medida [señala la diagonal del rombo dibujado por su compañero, Figura 9] sea igual a esta [señala un lado del rombo de la Figura 9]. Pero, pues también… Pero, pues con esta [dos triángulos equiláteros] también se puede hacer un rombo. Pero con dos triángulos isósceles también se podría hacer un rombo. Pero no necesariamente esta medida [la de la diagonal] tiene que ser igual a esta [medida de un lado del rombo]. Digamos,

Figura 9

Figura 10



puede ser así y así [dibuja la Figura 10]… Solo implica que estas dos medidas… [señala dos lados del rombo de la Figura 10] sean igual a estas [señala los otros dos lados del rombo de la Figura 10]; porque como esta es la diagonal [dibuja la diagonal del rombo de la Figura 10], esta se comparte entre los dos triángulos, entonces pues también sería congruente y pues tendría que ser los dos…

177. Noé: Por la reflexiva.

178. Saúl: Los dos triángulos isósceles.

La preocupación de Noé [162] es evidencia del *aspecto epistémico* de su comportamiento racional, pues busca validar su conclusión con una justificación teórica, al contrario de lo que hace Saúl, para quien una justificación basada en las propiedades visualizadas es suficiente. Esta acción de Noé obedece a una norma socio-matemática de la clase: todas las proposiciones deben ser justificadas con base en el sistema teórico de referencia o de la evidencia empírica que ofrece el programa. Para justificar por qué la figura no es un rombo, los dos estudiantes proponen como plan evaluar qué condiciones se necesitaría que cumpliera la figura para que esta fuese un rombo (*aspecto teleológico*) [163-174].

En la justificación que realizan Noé y Saúl se evidencian varios argumentos. El primer argumento tiene como *datos* que entre las diagonales no se forman triángulos equiláteros [167], y como *aserción* que la figura no es un rombo [158]. Aunque inicialmente, no se da una *garantía,* las siguientes intervenciones forman una cadena de argumentos que se convierten en la demostración, usando la contrarrecíproca del primer argumento, por lo cual este argumento es *deductivo teórico explícito* [158-170].

El primero argumento de la cadena tiene como *datos* que la figura es un rombo. El propósito es argumentar que si esto ocurre necesariamente los triángulos determinados por la diagonal son equiláteros (*aserción*) [170]. La *garantía* de este argumento es otra cadena de argumentos en las cuales partiendo del hecho de que un cuadrado tiene sus lados congruentes (*datos*) y utilizando una *garantía* en acto, la cual es que si se comprime un cuadrado no se afecta la congruencia, se llega a la *aserción* de que los lados se mantienen congruentes [163]. Esta aserción se convierte en los *datos* de un nuevo argumento, en el cual, usan como *garantía* la definición de triángulo equilátero [164] para establecer como *aserción* que los triángulos son equiláteros [167-168]. Esta nueva aserción se convierte en los *datos* de un argumento que tiene como *aserción* que la figura es un rombo. La *garantía* correspondiente es una definición personal de rombo que Noé ha manifestado desde el inicio de la discusión: si un cuadrado se estira o se comprime, entonces se forma un rombo [170]. Todos los argumentos, a excepción del último, son de tipo *deductivo teórico explícito*. El último es de tipo *deductivo empírico explícito*.

Para complementar el argumento de Noé, Saúl indica que para asegurar que la figura es un rombo (*aserción*) es suficiente con garantizar la existencia de dos triángulos isósceles congruentes con un lado común sobre una diagonal de la figura (*datos*) [174]. Con el propósito de justificar su afirmación, Saúl construye una cadena de argumentos que al final termina justificando la recíproca de la afirmación que quería justificar [176-178]. El primer argumento es una ampliación del argumento desarrollado por Noé; Saúl establece que si la diagonal del cuadrilátero determina dos triángulos equiláteros (*datos*) entonces la medida de la diagonal sería igual a la medida de los lados (*aserción*). La *garantía implícita* de este argumento es la definición de triángulo equilátero. El segundo argumento parte del hecho de que si la figura es un rombo (*datos),* entonces solo se garantiza la congruencia de los lados, y no de la diagonal (*aserción*). La *garantía implícita* de este argumento es la definición de rombo. En el tercer argumento, Saúl toma como *datos* que si la figura es un rombo, entonces utilizando como *garantía* (implícita) la definición de rombo, se puede establecer como *aserción* que el cuadrilátero tiene dos pares de lados congruentes. Esta *aserción* se convierte en los *datos* de un cuarto argumento, que tiene como *aserción* la congruencia de dos triángulos isósceles. Para este último argumento, los estudiantes intentan utilizar como *garantía implícita* el criterio de congruencia de triángulos lado-lado-lado. Todos los argumentos planteados durante estas intervenciones son de tipo *deductivo teórico implícito*. Se resalta el uso que hacen de los dibujos para comunicar sus ideas.

4.1.1.7. Explicitan su definición de rombo

Debido a que las intervenciones de los estudiantes han girado en torno a explicar porque la figura no es un rombo, la profesora les pregunta qué condiciones se deben cumplir para que lo sea. Saúl especifica: "Que sus lados sean iguales [182]" y Noé amplia la intervención de Saúl aclarando que la figura no llega a formar un rombo porque "si este [arrastra T] baja y este [arrastra R] baja, no se forma nada. Y este [arrastra punto R] no sube más [189]". Posteriormente, la profesora les pide que busquen otras propiedades, por lo que Noé y Saúl vuelven a retomar una propiedad que habían nombrado anteriormente.

189. Noé:	Estamos mirando. […] ¿Otra propiedad? […] ¿No podríamos sacar un criterio para esta figura? Ya escribió lo de… [toma la hoja donde están reportando].
190. Profesora:	¿Cuál criterio?
191. Noé:	Lado-Ángulo-Lado… Saldría en uno de los triángulos.
192. Saúl:	Pero no. Sería mejor si sacáramos el criterio de los dos triángulos isósceles.
193. Profesora:	¿El criterio de los dos triángulos isósceles?… O sea, tú me dices que teniendo los dos triángulos isósceles, ¿podemos demostrar qué?
194. Saúl:	Pero tendría que… O sea, esos dos triángulos isósceles no tendrían que ser congruentes, porque si fueran congruentes se formaría el rombo.

En la intervención [182], Saúl hace explícita la definición de rombo. Para explicar qué condiciones no cumple la figura, Noé comenta que la figura presenta una restricción en el movimiento de sus vértices, que impide que se pueda formar un rombo. Esta explicación la da por medio de dos argumentos entrelazados. El primero es *inductivo empírico explícito*; tiene como *datos* la figura, como *garantía* los infinitos ejemplos obtenidos al arrastrar la figura [189], en los cuales nunca se llega a la congruencia de todos los lados, y como *aserción* que los lados de la figura no son congruentes. Esta *aserción* se convierte en los *datos* de un segundo argumento de tipo *deductivo teórico explícito*, que tiene como *aserción* que la figura no es un rombo y como *garantía* explícita la definición de rombo [182].

Saúl intenta demostrar que si una diagonal del cuadrilátero determina triángulos isósceles congruente entonces la figura es un rombo, pero termina demostrando lo contrario [reciproca]. En su argumento establece como *datos* la figura, junto con las propiedades demostradas anteriormente, y como *aserción* que los triángulos isósceles determinados por la diagonal no son congruentes. Como *garantía* en acto intenta utilizar "su criterio del triángulo isósceles", pero termina utilizando la *contrarrecíproca* [194]. Este argumento es de tipo *deductivo teórico explícito*.

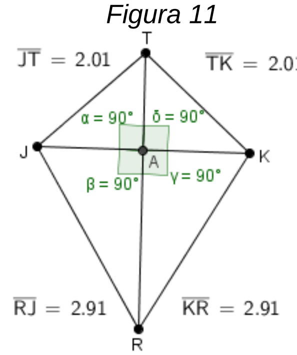
Respecto al *aspecto teleológico* del comportamiento racional, en las intervenciones [191] y [192] se observan planes de los estudiantes para descubrir nuevas propiedades, al especificar que podrían usar el criterio lado-ángulo-lado y lo que ellos han denominado el criterio de los dos triángulos isósceles.

4.1.2. ANDREA, MARTÍN, LEONARDO Y ARMANDO DESCUBREN LAS PROPIEDADES DE LA COMETA

4.1.2.1. Descubren la congruencia de los lados

Armando arrastra el punto T [4-5] y establece que: "Al ángulo…bueno el ángulo JR es congruente con el ángulo KR. Bueno el ángulo TJR es congruente con el ángulo TKR [los señala]" [6]. El profesor solicita que vayan registrando cada una de las propiedades y Andrea asume la tarea de registrar los acuerdos del grupo.

Figura 11



7. Profesor: Vayan registrando lo que van diciendo. [Dirigiéndose a Andrea]. Ella escribió fue segmentos. ¿Es sobre los ángulos o sobre los segmentos?

8. Armando: Sí, segmento JR con RK y TJ con KT; ahora el ángulo TJR con TKR.

9. Leonardo: [Mientras Armando habla, Leonardo toma las medidas de los segmentos y traza las diagonales de la figura y arrastra el punto T].
[…]

18. Leonardo: Fuera de eso, se están bisecando. Hay cuatro ángulos rectángulos, hay dos lados congruentes y dos lados congruentes…

19. Profesor: [Dirigiéndose al grupo.] Pero esperen. En orden para que lo vayamos registrando. ¿Qué fue lo primero que dijeron?

20. Armando: Tiene cuatro triángulos…

21. Profesor: ¿Cómo son esos triángulos?

22. Armando Son rectángulos.

23. Leonardo: Hay dos lados congruentes y dos lados congruentes…

El análisis de las intervenciones anteriores permite identificar dos argumentos. En el primero, Armando [4-6], a partir de la visualización establece las propiedades de la figura, construyendo un argumento *inductivo implícito empírico*. Los *datos* son los ejemplos de cometas que ve al arrastrar la figura, la *garantía* es que observan la congruencia de $\overline{RJ}$ con $\overline{RK}$, y es precisamente esta congruencia la *aserción* de su argumento. No enuncia una regla general de lo que están percibiendo visualmente (*garantía*). En el segundo argumento de Armando, [20] y [21], los *datos* son las medidas de los ángulos cuyos vértice es la intersección de sus diagonales, la *garantía* implícita es la definición de triángulo rectángulo y la *aserción* es que ΔTAJ, ΔTAK, ΔKAR y ΔJAR son rectángulos. Este es un argumento *deductivo implícito teórico*.

Se evidencian los *aspectos teleológico* y *comunicativo* del comportamiento racional. El primero se observa en el plan de Leonardo [9] de medir los lados de la figura para descubrir nuevas propiedades de la figura al trazar las diagonales, y el segundo en la necesidad de Armando [6] de referirse al ángulo usando el formato adecuado.

4.1.2.2. Reconocen la existencia de triángulos isósceles

Andrea establece que la figura tiene dos triángulos isósceles [25]. Por solicitud del profesor el grupo explica esta afirmación:

30. Armando: Porque hay dos lados congruentes y uno distinto.

31. Profesor: ¿Cuáles son los lados congruentes ahí? [Dirigiéndose a Armando].

32. Armando: Este de 4.82 que son JR con RK y lo mismo arriba. [Señala $\overline{TJ}$ y $\overline{TK}$].

33. Profesor: Entonces, ¿cuántos triángulos isósceles hay?

34. Armando: Hay dos. [Señala ΔJTK y ΔJRK].

En esta intervención se evidencia un argumento *deductivo explicito teórico* en el cual los *datos* son la congruencia del $\overline{RJ}$ con el $\overline{RK}$, y del $\overline{JT}$ con $\overline{KT}$, la *garantía* es la definición personal de Armando de triángulo isósceles, y la *aserción* es que el ΔJTK y el ΔJRK son isósceles. La definición de triángulo isósceles de Armando es personal, porque le añade una condición que no se había incluido en clase.

4.1.2.3. Descubren propiedades sobre las diagonales

Como Leonardo ya había trazado las diagonales de la figura, en este episodio de la actividad deciden centrar su análisis en el estudio de ellas.

35. Leonardo: [Dirigiéndose a Andrea.] Diagonales que se bisecan. ¿Eso ya lo pusiste también?

36.	Andrea:	Ya.
37.	Profesor:	[Dirigiéndose a Leonardo]. ¿Qué quiere decir que se bisecan?
38.	Armando:	Que se encuentran acá en la mitad. [Señala el punto de intersección de las diagonales]. El punto medio. […]
40.	Andrea	El punto medio de las dos diagonales [dirigiéndose al profesor].
41.	Leonardo:	¡Ah! En este caso no podría ser porque de acá a acá [señala el segmento entre T y el punto de intersección] no es la misma medida que de acá a acá [señala el segmento entre R y el punto de intersección]. Entonces no se bisecaría. […]
43.	Leonardo:	¿Y en la otra? Sí…sí se bisecaría porque tanto acá [señala el segmento de extremos J y el punto de intersección de las diagonales] como acá [señala el segmento de extremos K y el punto de intersección de las diagonales] tienen la misma distancia.
44.	Andrea:	Entonces, ¿coloco que no son diagonales que se bisecan?
45.	Leonardo:	¡No! Tienes que poner que hay un punto medio y que en la otra ya no se bisecan porque hay un lado que mide más que otro.
46.	Andrea:	[Escribe en la hoja: "*solo se biseca en una diagonal la cual es exactamente la mitad*"].
47.	Leonardo:	[Toma la hoja y lee lo escrito por Andrea]. Solo se bisecan en una diagonal. Hasta ahí bien. Ahora dice: *la cual es exactamente la mitad*. Es que eso no es.
48.	Andrea:	[Dirigiéndose a Leonardo.] Exactamente la mitad. O sea, es el punto medio exacto solo de una.
49.	Leonardo:	[Dirigiéndose a Andrea.] Pero entonces ahí faltó… Bueno, lo que yo te dije que ahí ya no se bisecarían porque esta distancia, acá [señala la distancia entre R y el punto de intersección de las diagonales] es mayor que esta distancia [señala distancia entre T y el punto de intersección de las diagonales].
50.	Andrea:	[Dirigiéndose a Leonardo]. Por eso.
51.	Leonardo:	[Dirigiéndose a Andrea]. Pero no lo pusiste.
52.	Andrea:	Pues es que es lo mismo que decir que solo en una diagonal. Es el punto medio exacto y ya. Por ende en la otra diagonal…
53.	Leonardo:	Pero ponlo.
54.	Andrea:	No. Es súper redundante. No lo voy a poner.

En las intervenciones [35-40] se evidencia un primer argumento *deductivo explícito teórico* en el cual los *datos* son que las diagonales se intersecan en sus respectivos puntos medios, la *garantía* es la definición de bisecar y la *aserción* que las diagonales se bisecan. En este argumento los datos se hacen explícitos cuando Armando señala el punto de intersección de las diagonales [38]. Un segundo argumento presentado por Leonardo [41,43] es de tipo *deductivo implícito teórico* que tiene por *datos* que las distancias de los puntos R y T a la intersección de las diagonales no son iguales, la *aserción* es que no se bisecan y como *garantía*, la cual no verbaliza, es la definición de punto medio.

En las intervenciones [46-54] hay evidencia del *aspecto comunicativo*, puesto que la discusión que mantienen Leonardo y Andrea es en torno a que Andrea considera que su forma de decirlo es económica; sin embargo Leonardo considera que lo que ella escribe no da a entender lo que ellos quieren comunicar.

4.1.2.4. Descartan que la figura sea un rombo

El grupo discute sobre qué figura podría ser la representación presentada en GeoGebra. Inicialmente, Armando hace referencia a la figura usando el término rombo. Cuando el profesor lo cuestiona cambia de parecer, por lo que el profesor le pide la justificación.

60. Armando: Por qué se tiene que mantener el rombo.
61. Andrea: En cambio mueve J y si ve que se mantiene todo. [Mueve el punto J].
62. Profesor: Pero esperen. ¿Ya lo definieron como si fuese un rombo?
63. Andrea: No.
64. Armando No. Esto no es un rombo.
65. Profesor: ¿Por qué no es un rombo?
66. Armando Porque no tiene los lados congruentes.

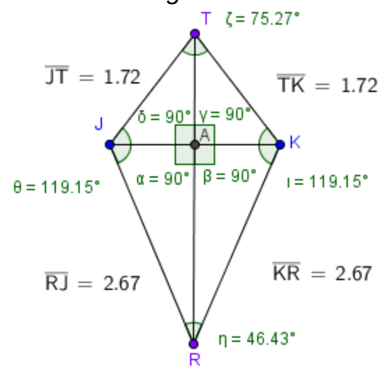
En la intervención realizada por Armando [60] es posible evidenciar que su imagen conceptual de rombo está asociada inicialmente a la forma de la figura. No obstante, en las respuestas dadas por Armando se evidencia que su definición personal de rombo es correcta. Con su definición personal Armando construye un argumento *deductivo teórico explícito* en el cual los *datos* son la información que provee la figura con las medidas de los lados, la *garantía* explicita es su definición de rombo y la *aserción* es que la figura no es un rombo [63-66]. Es un argumento en el cual usan la contrarrecíproca de la definición de rombo.

4.1.2.5. Descubren propiedades sobre los ángulos

Anteriormente el grupo había nombrado la propiedad de la congruencia de los ángulos TJR con TKR. Sin embargo no habían comprobado que realmente lo eran.

Leonardo [67] toma las medidas de los ángulos y Armando encuentra otra propiedad de la figura [76]: una de las diagonales es bisectriz del $\angle TJR$ y del $\angle TKR$.

Figura 12



70. Armando: [Toma la medida de $\angle TJK$, $\angle TRK$, $\angle JTK$ y $\angle JRK$]. [Figura 13]
[…]

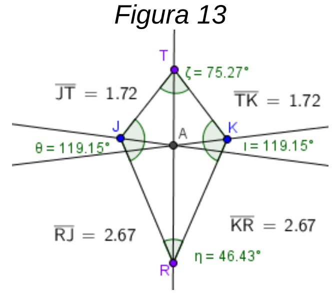
76. Armando: Las diagonales son las bisectrices de los ángulos.

77. Profesor: Y entonces pruebe que son las bisectrices de los ángulos. ¿Qué es una bisectriz?

78. Armando: Una línea que pasa… eee… que interseca por la mitad exactamente del ángulo. O sea, que pasa por toda la mitad del ángulo [señala $\angle JTK$].

79. Profesor: Vamos a probar. Y miremos cómo definimos anteriormente bisectriz.

Figura 13



80. Armando: [Traza la bisectriz de $\angle JTK$, $\angle TJR$ y $\angle RKT$] [Figura 13]

81. Profesor: Miremos las bisectrices. [Dirigiéndose a Armando.] ¿Son las diagonales bisectrices?

82. Armando: [Señala la bisectriz del ángulo $\angle JTK$]. Esta diagonal sí coincide con la bisectriz.

83. Profesor: ¿Que podríamos decir?

84. Armando: Que una diagonal de la figura es la bisectriz de dos de sus ángulos.

Es posible determinar dos argumentos en las intervenciones de Armando [67-84]: uno respecto a la congruencia de los ángulos y otro en torno a que una de las diagonales es bisectriz de ángulos de la figura. El primer argumento es de tipo *inductivo implícito empírico*. Los *datos* son información interpretada de la figura (empírico), la *garantía*, que no la verbaliza (implícito), es que los ángulos se mantienen congruentes mediante el arrastre y la *aserción* que el $\angle TJR$ es congruente con $\angle TKR$. El segundo argumento es de estructura *deductivo explícito empírico* en el cual los *datos* son las diagonales y la bisectriz construida, la *garantía* es que al arrastrar la figura una de las diagonales coincide con la bisectriz de dos ángulos y la *aserción* que una diagonal de la figura es la bisectriz de los $\angle TJR$ con $\angle TKR$. El segundo argumento es empírico porque la garantía se obtiene arrastrando la figura para tratar de hacer coincidir las diagonales con la bisectriz de los ángulos.

Es importante resaltar el papel de la geometría dinámica en el desarrollo de la tarea como herramienta de mediación en los procesos de justificación de los estudiantes. En las intervenciones de este grupo era constante el uso de las herramientas y funciones de geometría dinámica, en especial la función arrastre, la cual les permitía establecer conjeturas sobre las propiedades que se mantenían invariantes. En este caso en particular, determinaron la congruencia del $\angle TJK$ y del $\angle TRK$ a través de las múltiples representaciones que les proporcionaban la calculadora y, para comprobar que una de las diagonales era bisectriz, utilizaron la herramienta de geometría dinámica bisectriz del ángulo para ver si la diagonal estaba contenida en bisectriz de los ángulos, como respuesta a una pregunta realizada por el profesor. No obstante, se desaprovechó una oportunidad para permitir la evolución de la definición personal de bisectriz de Armando, puesto que no tuvo que recurrir a esta definición para comprobar la propiedad. Consideró como autoridad la representación que hace el programa de bisectriz.

La respuesta de Armando [78] es una muestra del *aspecto epistémico* puesto que inicialmente se evidencia su intención de involucrar un elemento teórico para su aserción, en este caso su definición personal. Además, porque acepta como autoridad la información que provee la geometría dinámica al construir la bisectriz. Es una acción necesaria, puesto que es un proceso que antecede a la demostración de un hecho geométrico. Por otro lado, en el desarrollo de un plan que requiere el uso de GeoGebra para determinar si las diagonales eran bisectrices [80] es evidencia el *aspecto teleológico* del comportamiento racional.

4.1.2.6. Descartan que la figura sea un paralelogramo

Después de discutir por qué la figura no es un rombo, Leonardo plantea la posibilidad de definir la figura como un paralelogramo [86].

87. Armando: ¿Cómo es un paralelogramo? Son dos líneas paralelas o sea cuatro, o sea dos lados paralelos.

88. Profesor: Para esta figura, ¿cuáles tendrían que ser paralelas?

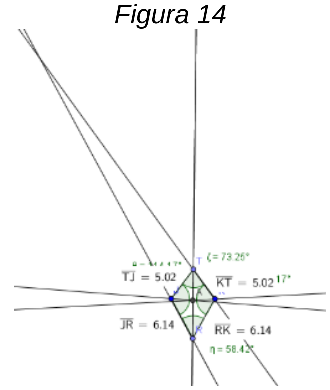
89. Leonardo: Esta y esta [señala $\overline{TJ}$ y $\overline{TK}$] y esta y esta [señala $\overline{JR}$ con $\overline{RK}$]. O sea, que sea como un triqui pero al revés.

90. Armando: [Traza $\overleftrightarrow{TK}$ y $\overleftrightarrow{JR}$].

91. Profesor: [Dirigiéndose a Armando] ¿Usted va intentar mostrar que es un paralelogramo?

92. Andrea: Pero no es porque se encuentran en un punto. Mira [dirigiéndose al profesor al señalar las rectas construidas por Armando].

Figura 14



93. Leonardo: Al parecer se encuentran en un punto. Mira [Armando da zoom y reduce la pantalla y muestra el punto de intersección de las rectas]. No. En este caso ya descartamos que no es un paralelogramo. [Figura 14]

94. Armando: O sea, no es un paralelogramo.

En las intervenciones de Armando [87] y Andrea [92], se evidencia la construcción de un argumento colectivo, el cual es *deductivo explícito empírico*. Los *datos* son la información visual de las rectas $\overleftrightarrow{TK}$ y $\overleftrightarrow{JR}$ que contienen dos lados pues se intersecan, la *garantía* es la definición personal de Armando de paralelogramo y la *aserción* es que la figura no es un paralelogramo. En el argumento usan la contrarrecíproca. El argumento es colectivo porque Armando provee la garantía, Andrea los datos y Leonardo la aserción. Es importante resaltar que la exploración dinámica permitió que los estudiantes establecieran nexos entre las propiedades de la figura y su saber previo respecto a paralelogramos.

La intención de Armando [93] de llevar a cabo un plan para comprobar que la figura no es un paralelogramo al trazar las rectas $\overleftrightarrow{TK}$ y $\overleftrightarrow{JR}$ y comprobar que se intersecan es evidencia del *aspecto teleológico* del comportamiento racional. A su vez, se evidencia el *aspecto epistémico* al basarse en su definición personal para argumentar.

4.1.3. COMUNICACIÓN DE LAS PROPIEDADES DESCUBIERTAS POR LOS DOS GRUPOS

4.1.3.1. Nombran las propiedades respecto a los lados de la figura

Terminada la etapa en la cual los estudiantes tenían que descubrir algunas propiedades de la cometa, la profesora realiza una puesta en común de lo que encontraron con el fin de ponerse de acuerdo en cuáles de esas propiedades realmente corresponden a propiedades de la cometa [1]. Ella pide a los estudiantes nombrar las propiedades que involucran los lados de la figura. En este momento surge una interacción entre Andrea y Leonardo para justificar que los lados de la figura no son paralelos.

48. Andrea: Los lados no son paralelos porque se encuentran en un punto.
[…]

50. Leonardo: Profe, yo si lo sé decir. No son paralelos pues se encuentran en un punto determinado.

51. Andrea: Son las mismas palabras.

52. Leonardo: ¿Me puedo parar y mostrarte?
[…]

54. Leonardo: [Lee.] “Sus lados no son paralelos pues se encuentran en un punto determinado”. ¿Esto cómo lo comprobamos? En GeoGebra hicimos esto: pusimos una paralela tanto acá [sobre la cometa que se había dibujado en el tablero, dibuja $\overleftrightarrow{TK}$] tanto acá [dibuja $\overleftrightarrow{RJ}$] y pues demostramos que se encuentran en un punto. [La profesora escribe en el tablero los lados opuestos no son paralelos.]
[…]

62. Leonardo: ¿Si está bien dicho lo que escribiste ahí en el de los lados opuestos no son paralelos? Porque en este caso con todos los lados pasa lo mismo.

63. Profesora: Y entonces tú me dices, los lados no son paralelos [tacha la palabra opuestos] . Entonces quitémosle esto, ¿sí?

Andrea formula un argumento *deductivo teórico explicito*, en el cual los *datos* son la intersección de las rectas que determinan los lados del cuadrilátero, la *garantía* es la definición de rectas paralelas y la *aserción* que los lados no son paralelos [48]. Cuando Leonardo repite lo que dice Andrea, se evidencia su preocupación por hacer que su argumento sea convincente para la profesora, por lo cual expone el plan que siguieron. La explicación que realiza Leonardo es el *respaldo* de los datos del argumento de Andrea [54]. La preocupación de Leonardo por explicar el proceso que realizaron es una evidencia del *aspecto epistémico*, en el cual el uso de la geometría dinámica fue relevante [52- 54].

Se observa el *aspecto comunicativo* en la intervención [50], ya que Leonardo repite la información que da Andrea, de una manera que él considera que es más clara. Leonardo quiere comunicar mucho más, pasa al tablero a explicar lo que hicieron, haciendo uso de un dibujo para explicar sus ideas. Otra evidencia del *aspecto comunicativo* se evidencia en la intervención [62], pues Leonardo cuestiona el uso de la palabra opuesto ya que no incluye todos los casos de segmentos que no son paralelos. Él solicita que se elimine esa palabra.

4.1.3.2. Nombran las propiedades que involucran las diagonales de la figura

La profesora solicita otras propiedades y Andrea indica que sólo una diagonal es bisecada por la otra, propiedad que la profesora escribe en el tablero. Leonardo explica que: “En este caso lo dijimos fue porque [76]… pues hicimos las dos rectas [realiza un movimiento vertical de su mano derecha y luego uno horizontal] y al hacer las dos rectas [refiriéndose a las diagonales], en una, la distancia de arriba [refiriéndose a la distancia del punto T al punto A] no es congruente a la de abajo [distancia de R a A], mientras que en la otra [diagonal $\overline{JK}$] si se cumple lo que acabamos de decir; sí se bisecan [78]”. Saúl establece otra propiedad “que al trazar la diagonal que no es bisectriz se forman dos triángulos isósceles [82]”. Sin embargo, la propiedad la reporta la profesora en el tablero como “una diagonal forma dos triángulos isósceles”. Finalmente, Noé indica que una a diagonal es perpendicular a la otra [97].

En la intervención [78] de Leonardo, vuelve a evidenciarse una vez más su preocupación por transmitir a sus compañeros, no solo la propiedad descubierta sino también cómo llegaron a establecerla. Esto es evidencia del *aspecto epistémico*. Leonardo formula dos argumentos *deductivos teóricos implícitos*. El primero tiene como *datos* que uno de los segmentos en que queda dividida una diagonal por la otra tiene mayor longitud que el otro, como *aserción* que la diagonal no está siendo bisecada y como *garantía* implícita la definición de bisecar. De nuevo, es con la contrarrecíproca de la definición que llegan a su aserción. El segundo argumento tiene la misma *garantía*, como *datos* la congruencia de los $\overline{JA}$ y $\overline{AK}$ y como *aserción* que una diagonal está bisecada.

Por otra parte, en la intervención de Saúl [82] se encuentra evidencia del *aspecto comunicativo*, al aclarar cuál es la diagonal que cumple con la propiedad mencionada. Saúl se está refiriendo a una propiedad que ellos habían descubierto acerca de las diagonales: una de ellas biseca dos ángulos de la cometa pero no lo reportaron explícitamente en la puesta en común de los resultados. Además, se evidencia el *aspecto comunicativo* porque lo que escribieron en su reporte escrito fue "al trazar un segmento del punto J a K se forman dos triángulos isósceles", pero Saúl, al comunicar la propiedad ante todo el grupo, aclara que la diagonal que determina los triángulos isósceles es aquella que no es bisectriz de los respectivos ángulos de la figura.

El listado de propiedades que dieron los estudiantes, y que la profesora reportó en el tablero se muestra a continuación:

1. Tiene un par de lados adyacentes congruentes.
2. Tiene otro par de lados adyacentes congruentes.
3. Solo una diagonal biseca a la otra.
4. Diagonales perpendiculares.
5. Tiene dos ángulos opuestos congruentes.
6. Tiene dos ángulos opuestos no congruentes.
7. Una diagonal determina triángulos isósceles.
8. Ninguno de sus ángulos es de 90 grados.
9. La diagonal biseca los ángulos opuestos no congruentes.
10. Los lados no son paralelos.
11. Tiene dos pares de lados adyacentes no congruentes.

4.2. LOS ESTUDIANTES DETERMINAN CONJUNTOS DE PROPIEDADES QUE NO DEFINEN LA FIGURA (ETAPA 2)

En la segunda parte de la clase, después de la socialización de las propiedades de la figura descubiertas por cada uno de los grupos, se le pidió a cada grupo que determinaran qué propiedades o conjuntos de propiedades, de la lista que conformaron conjuntamente, que no definen la figura.

4.2.1. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD DE SAÚL, NOÉ Y NÉSTOR (GRUPO 1)

4.2.1.1. Evalúan el primer conjunto de propiedades que no definen la figura

Saúl y Noé deciden escoger al azar las propiedades “diagonales perpendiculares” y “las diagonales determinan dos triángulos isósceles” para determinar si son suficientes para definir la figura.

265.	Saúl:	Sabe qué, vamos dibujando acá [en la hoja.]
		[…]
267.	Saúl:	¡Aja! “Diagonales perpendiculares”. Ahí están perpendiculares [dibuja dos segmentos perpendiculares]. “Las diagonales forman dos triángulos isósceles”. Entonces vamos a hacer dos triángulos isósceles congruentes [dibuja uno de los triángulos, sobre una de las diagonales, y alarga la otra diagonal para que el otro triángulo se vea congruente].
268.	Profesora:	¿Y esa por qué no lo define? ¿Qué propiedades no cumpliría?
269.	Saúl:	Pues no cumple las propiedades de la figura porque en esto podría dar un rombo. No dicen que no sean congruentes. Entonces digamos uno puede poner que los triángulos isósceles que forman la figura sí sean congruentes.
		[…]
284.	Saúl:	[Debido a un problema con la grabación, la profesora le pide que repita lo que habían concluido]. Entonces cuando se coge la Propiedad [dibuja dos diagonales] 4, que “es diagonales perpendiculares”, y la propiedad 7, que es que “las diagonales forman dos triángulos isósceles” [dibuja un rombo sobre las diagonales perpendiculares], entonces con esas dos propiedades no podría formarse la figura porque no específica que no sean congruentes, los triángulos isósceles, que no sean congruentes. Entonces si uno pone los triángulos isósceles congruentes, pues va a dar un rombo.

Las intervenciones realizadas por Saúl en [265] y [267] son evidencia del *aspecto teleológico* de su comportamiento racional, porque en ellas propone un plan para determinar si un conjunto de propiedades definen la figura: construir contraejemplos. Saúl es consciente de que si, a partir de la construcción de un conjunto de propiedades, encuentra una figura que no cumpla con las propiedades de la figura que trata de definir, entonces este conjunto de propiedades no es suficiente para definir la figura. Esto es a su vez evidencia del *aspecto epistémico* puesto que reconoce que el uso de un contraejemplo invalida una posible definición. En la ejecución del plan [267], se evidencia también el *aspecto epistémico*, puesto que usan como teorema para justificar su contraejemplo los resultados de una discusión que había tenido anteriormente, en la cual concluyeron que los triángulos determinados en una cometa por una diagonal no pueden ser isósceles congruentes (seudo-teorema emergente). Además también se evidencia *el aspecto epistémico* en la intervención [284], pues Saúl presenta un argumento, en el cual cada afirmación trata de justificarla.

Precisamente, el dibujo realizado guiado por el seudo-teorema de esa discusión es el *garante implícito* de un primer argumento desarrollado por Saúl [269]. En este, los *datos* son las dos propiedades que está evaluando más la condición de que los triángulos determinados por una de sus diagonales son congruentes, y la *aserción* es que en ese caso la figura podría ser un rombo. La palabra "podría" en la aserción realizada por Saúl, parece indicar que el cae en cuenta que de la misma forma como dio un rombo podría haber dado una cometa, por lo tanto lo vemos como un *refutador* de este argumento. La primera frase de [269] nos muestra que él está tratando de dar un argumento para justificar por qué las propiedades no definen la figura. Este argumento es *deductivo teórico implícito.*

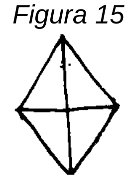
No obstante, cuando la profesora le pide repetir lo que habían concluido, Saúl comunica su razonamiento por medio de un argumento *deductivo teórico explícito* y de mayor claridad [284], en el cual los *datos* son dos propiedades de la figura ("diagonales perpendiculares" y "una de sus diagonales determina triángulos isósceles"), la *aserción* es que esas dos propiedades no necesariamente forman la figura y la *garantía* es un teorema meta-matemático según el cual si existe un contra-ejemplo, entonces la propiedad no define. Este teorema guiará todo su proceder de aquí en adelante, por lo cual no lo volveremos a mencionar, pues centraremos el análisis en mostrar cómo el grupo llega al contraejemplo o a mostrar por qué no logran construirlos.

4.2.1.2. Evalúan un segundo conjunto de propiedades

Para continuar analizando qué propiedades no definen la figura, los estudiantes evalúan otras dos propiedades: "un par de lados adyacentes congruentes" y "diagonales perpendiculares".

303. Saúl: [Dibuja.] No se comprueba.

Figura 15



304. Profesora: ¿Por qué no se comprueba? ¿Qué construiste ahí? [Figura 15].

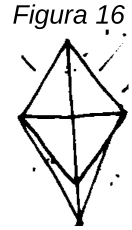
305. Saúl: Pues es que en casi todas las que no son definiciones da como un rombo entonces tiene "un par de lados adyacentes", estos dos [señala dos lados adyacentes en la figura] y, "diagonales perpendiculares".

306. Profesora: Y en el rombo, ¿cómo sabes que [las diagonales] son perpendiculares? Pues porque el rombo no lo hemos trabajado mucho. ¿Cómo sabrías que son perpendiculares?

307. Saúl: Pues… Pues eso depende de la medida de esta diagonal.

308. Profesora: ¿De esa diagonal?

Figura 16



309. Saúl: Porque digamos si esta diagonal va por acá [alarga una de las diagonales de la Figura 16] ahí si se cumpliría [ser cometa]. Pero o sea, no especifica que, o sea… es que como solo estamos haciendo esas dos propiedades, pues no especifica que la medida de estos lados [señala el par de lados superiores congruentes] con estas [señala dos lados laterales no congruente] no sea congruente. [Figura 16].

Saúl vuelve a construir un rombo para explicar por qué las propiedades "diagonales perpendiculares" y "un par de lados adyacentes congruentes" no son suficientes para definir la figura. El plan que había utilizado en el anterior episodio se mantiene [303 y 305], esta vez haciendo explícito que el plan consiste en construir un rombo (*aspecto teleológico*).

La forma como procede es explicada por Saúl por medio de dos argumentos [305]. El primer argumento indica que si la figura es un rombo (*datos*) [305] entonces tiene un par de lados adyacentes congruentes y diagonales perpendiculares (*aserción*). La garantía es la figura, por lo cual es *deductivo empírico explícito*. El segundo argumento tienen como *datos* la perpendicularidad de las dos diagonales (implícito) y que solo una de las diagonales es bisecada por la otra diagonal (explicito). Como *aserción* que en tal caso la figura es una cometa [309] y como *garantía* la figura dibujada. Este argumento es *deductivo empírico implícito*. Al igual que en el anterior episodio, Saúl defiende los planes utilizados para determinar que un conjunto de propiedades no define la figura, al indicar que las dos propiedades que está evaluando no especifican que solo una diagonal biseca a la otra.

El dibujo realizado por Saúl [Figura 16] es una muestra de que el grupo ha identificado que aunque "las diagonales perpendiculares" y "un par de lados adyacentes" no son propiedades suficientes para definir la figura, si son propiedades necesarias, pues dieron un ejemplo de un cuadrilátero que es cometa y que no es cometa.

4.2.1.3. Utilizan el programa de geometría dinámica por insistencia de la profesora

Saúl vuelve a realizar un dibujo para comprobar que solo la propiedad "un par de ángulos opuestos no congruentes", no es suficiente para definir la figura [313 – 317]. Debido a que Saúl no tiene claridad acerca de los ángulos que no son congruentes, retoman el trabajo con la figura que inicialmente se les había dado construida en geometría dinámica [326]. La profesora les sugiere que ellos hagan construcciones, no que analicen la que ya tienen.

330. Noé: Estos. [Señalan $\angle T$ y $\angle R$, ángulos congruentes]. Sí, porque acá dice biseca a los ángulos opuestos no congruentes. En los ángulos que no son congruentes, las diagonales bisecan esos ángulos. Aquí no son congruentes y los biseca [señalando la cometa del computador]. Tiene dos ángulos opuestos no congruentes. Un ángulo puede ser este [$\angle T$] y el otro ángulo puede ser este [$\angle R$]. ¿Este ángulo [$\angle TRJ$] no es congruente con este [$\angle TRK$]?

331. Saúl: Sí. Este mide 29,21 y este también.

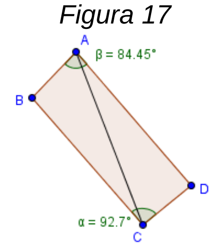
332. Profesora: ¿Existirá algún cuadrilátero en el cuál se bisequen ángulos opuestos no congruentes? De los que ya hemos trabajado.

333. Noé: Sí. Debe haber.

334. Profesora: Pero ustedes podrían tratar de dibujarlo, ya sea en el programa o acá [en la hoja]. […]. Por ejemplo, ¿podrías utilizar el programa para construir un cuadrilátero que cumpla esas condiciones? Puedes hacer una construcción robusta o puedes hacer una construcción blanda. O sea que se deforme con el arrastre, pero que en un momento dado te permita ver si se cumple o no.

[…]

Figura 17



346. Noé: Pues es que mira: yo construí un rectángulo [Figura 17], y en un rectángulo los ángulos opuestos, que serían el ángulo A y el ángulo C… Lo que pasa es que no se si la diagonal, digamos, los biseque… O sea, biseque los ángulos que sean opuestos y no sean congruentes.

[…]

Figura 18

348. Saúl: Pues yo estaba haciendo acá un ángulo [dibuja un ángulo con su bisectriz, Figura 18]… Como no dice que necesariamente tienen que ser opuestos, entonces el otro ángulo que no es congruente yo lo puse por acá [dibuja otro ángulo en la parte superior del dibujo que ya tenía]. Entonces pues esta diagonal biseca ya un ángulo que no es congruente. No tendría que ser…

349. Profesora: ¿El programa me podría ayudar a hacer eso que tú me estás diciendo?

[…]

352. Saúl: No tendría que ser en el punto medio de esta diagonal. [Construye $\overline{EF}$ en GeoGebra] Se traza un segmento que vaya de acá a acá. [Constuye $\overline{EG}$ y $\overline{EH}$] Entonces, vamos a sacar la medida del ángulo [mide $\angle HEG$ y $\angle HEF$]. Ahí lo biseca, ¿no? [Arrastra $\overline{EF}$ hasta que aparentemente $\angle HEF$ y $\angle FEG$ son congruentes].

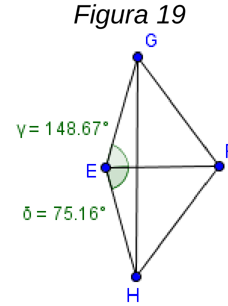
353. Profesora Aproximadamente los biseca.

354. Saúl: Entonces la otra diagonal no tendría que pasar por el punto medio, porque si no daría la misma figura.

355. Profesora Entonces hagamos una figura que cumpla esa condición.

356. Saúl: Como estos ángulos no tienen que ser congruentes [$\angle G$ y $\angle H$], entonces si estos dos ángulos no son congruentes implica que estos dos tienen que ser iguales.

Figura 19



357. Profesora ¿Y por qué?

358. Saúl: Porque pues… Pues solo estamos cogiendo la propiedad 9 [la diagonal biseca los ángulos opuestos no congruentes]. Entonces podemos colocar que todos los ángulos no sean congruentes.

Hasta el momento, los estudiantes habían realizado representaciones a mano alzada si necesidad de utilizar el programa [313-317]. Es a raíz de la duda de Saúl, que Noé ve la necesidad de retomar la información que encontraron acerca de la figura presentada a los estudiantes originalmente en el software para explicarle a su compañero cuáles eran los ángulos no congruentes que se bisecaban [330]. La profesora aprovecha la ocasión, para pedirles a los estudiantes que intenten utilizar el programa para construir el contraejemplo. Con geometría dinámica, Noé construye una figura que parece un rectángulo; no obstante su construcción no está guiada por ningún elemento teórico acerca de esta figura, pues ignora que en esta figura los ángulos opuestos son congruentes [346]. Además, muestra poca instrumentalización en el uso del software, pues no sabe cómo utilizar el programa para comprobar si las diagonales bisecan a los ángulos. La acción de intentar construir un contraejemplo, es evidencia de que la exploración de Noé está guiada por la visualización. La acción de intentar construir un rectángulo como contraejemplo, es evidencia del *aspecto teleológico.* A su vez, el plan de Saúl de construir un contraejemplo está guiado por elementos teóricos, pues utiliza la definición de bisectriz para intentar construirlo [Figura 18]. Esto es evidencia del *aspecto epistémico*.

En la intervención [356] de Saúl se evidencia el *aspecto comunicativo*, al establecer que lo escrito en la propiedad no establece que los ángulos tengan que ser opuestos, por lo que el infiere que puede realizar un contraejemplo de esta forma. Por lo que dice, parece haber establecido que existe una relación entre que una diagonal se biseque y que el punto medio de una diagonal sea el punto de intersección las diagonales.

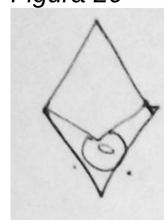
A pesar de que Saúl propone el plan de construir un contraejemplo, no logra construirlo. Por lo que la profesora les dice que si no logran construir un contraejemplo, quiere decir que esa podría ser una definición. Los estudiantes se demoraron mucho en el análisis, por lo que la profesora tuvo que pedirles que analizaran otro ejemplo.

4.2.1.4. Encuentran una posible definición

La profesora le sugiere al grupo que evalúen si las propiedades un par de lados adyacentes congruentes y otro par de lados adyacentes congruentes definen o no la figura.

361. Saúl: [Lee del tablero.] Tiene “un par de lados adyacentes congruentes” y “otro par de lados adyacentes congruentes”. En esa puede y no puede dar. Tiene “un par de lados adyacentes congruentes” y “otro par de lados adyacentes congruentes”. También puede dar un rombo. Y si, digamos que la medida de estos dos fueran diferentes, ahí son adyacentes no congruentes. [Dibuja primero un rombo, y luego una cometa. Con el circulo indica que no necesariamente tienen que ser congruentes]

Figura 20



362. Profesora: Entonces tú me estás diciendo que 1 y 2 no definen, pero si le agrego otra propiedad, si define. ¿Qué otra propiedad tendría que agregarle para poder definir?

363. Noé: Que la medida de sus lados adyacentes sea diferente a las otras.

[…]

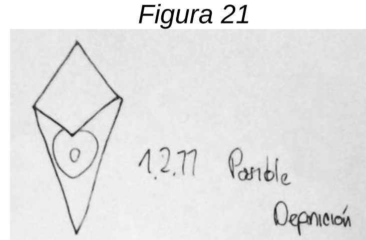
365. Saúl: Tiene dos pares de lados adyacentes no congruentes. Es que lo que dice la propiedad 11 es que el primer par no sea congruente con el otro par.

366. Noé: Entonces si hacen la definición.

367. Profesora: ¿Por qué?

368. Saúl: Porque estos [señala dos pares de lados congruentes de su dibujo] no tienen que ser congruentes con estos dos [señala el otro par de lados congruentes]. Entonces tienen que ser de diferente medida, pero a la misma vez tienen que ser congruentes con estos. [Realiza la explicación sobre un dibujo.]

Figura 21



En la intervención [361] de Saúl, se evidencia un argumento *deductivo empírico implícito* apoyado en un dibujo. En este, los *datos* son “dos pares de lados adyacentes congruentes” y la *aserción* es que la figura podría ser rombo o cometa. En este caso, la *garantía* es la figura que dibuja. Este argumento tiene como propósito criticar una posible definición.

A partir de este argumento, Saúl y Noé construyen un segundo argumento con el propósito de ampliar el primero, indicando que si el cuadrilátero tiene “dos pares de lados adyacentes congruentes” y “un par no congruente” (*datos*) entonces la figura sería una cometa (*aserción*). En este argumento, la *garantía* continúa siendo la figura, pues en la intervención [368] Saúl describe la conexión entre los datos y la aserción tomando como referencia la figura. Por tanto es un argumento *deductivo empírico explícito*. Este argumento tiene como finalidad argumentar a favor de la inclusión de una propiedad en la definición de la figura.

Es importante destacar que aunque ellos no están trabajando con geometría dinámica, Saúl y Noé si están pensando dinámicamente.

4.2.2. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD DEL GRUPO DE ANDREA, MARTÍN, ARMANDO Y LEONARDO (GRUPO 2)

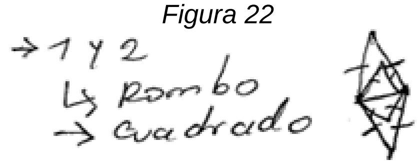
4.2.2.1. Evalúan un primer conjunto de propiedades

Martin propone evaluar inicialmente las propiedades “un par de lados adyacentes congruentes” (Propiedad 1) y “otro par de lados adyacentes congruentes” (Propiedad 2). Al notar que estas propiedades definen la figura, deciden evaluar las propiedades “diagonales perpendiculares” (Propiedad 4) y “las diagonales forman dos triángulos isósceles” (Propiedad 7).

102. Martin: Mm la [Propiedad] 1 y la [Propiedad] 2 no definen la cometa. [Dirigiéndose al profesor].

[…]

Figura 22



104. Martin: Porque vea. [Dibuja en la hoja]. Si tiene un par de lados congruentes y otro par de lados congruentes puede ser mmm…. un rombo o también un cuadrado.

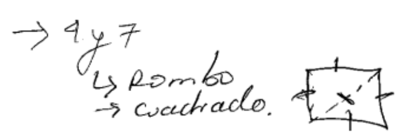
105. Andrea: Siii… Es verdad. Ahí se ve que cumple con las Propiedades 1 y 2 y no es una cometa.

106. Martin: Y, por ejemplo, mire: si tomamos la [Propiedad] 4 [“diagonales perpendiculares”] y la 7 [“las diagonales forman dos triángulos isósceles”] también puede ser un cuadrado o un rombo. [Dibuja en la hoja un cuadrado]

107. Profesor: ¿Y cómo lo justifica?

108. Armando: Pues fácil… porque como es un cuadrado, este lado y este lado son iguales. [Señala dos lados adyacentes del cuadrado y marca la congruencia de los lados]. Entonces los triángulos que quedan ahí son isósceles.

Figura 23



En la intervención de Martin [102] se observan dos argumentos. El primero, tiene como *datos* la existencia de dos pares de lados congruentes; como *aserción* que la figura es un rombo o un cuadrado y como *garantía* la posibilidad de representar que tanto el rombo como el cuadrado tienen estas dos propiedades. El segundo argumento tiene los mismos *datos* del primer argumento, como *garantía* la aserción del argumento anterior*,* y como *aserción* que no definen cometa. Ambos argumentos son de tipo de *deductivo teórico*, el primero *implícito* y el segundo *explícito*.

En las intervenciones de Martín [106] y Armando [108] se observan dos argumentos. El primer argumento [106] es de tipo *deductivo empírico explicito* se tiene como *datos* las propiedades "diagonales perpendiculares" y "una diagonal determina triángulos isósceles", como *garantía* la figura y como *aserción* que esas dos propiedades no son suficientes para definir la figura. Cuando el profesor les pide justificar esta aserción, Armando hace un argumento en el cual justifica por qué el cuadrado cumple una de las propiedades y no porque las dos propiedades generan el cuadrado o el rombo, es decir, justifica la recíproca. Este segundo argumento tiene como *datos* un cuadrado, como *garantía* la figura y como *aserción* que una diagonal determina triángulos isósceles [108]. Este argumento es *deductivo empírico explícito.*

Las intervenciones de Martin y Armando permiten evidenciar un plan para determinar que un conjunto de propiedades no definen la figura: construir contraejemplos. Entienden que si dicho conjunto define otra figura estas propiedades no son suficientes para definir la cometa, lo cual da cuenta del *aspecto epistémico* de su comportamiento racional [102-108].

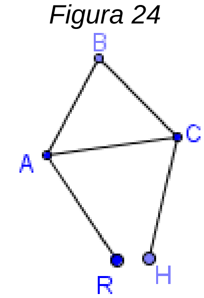
4.2.2.2. Dificultad en encontrar un contraejemplo

Leonardo propone evaluar las propiedades "dos pares de lados adyacentes congruentes" y "solo una diagonal biseca a la otra" [113]. Sin embargo al realizar una construcción blanda busca que las propiedades determinen la cometa. Finalmente, el grupo no llega a establecer si estas propiedades definen o no la figura.

118. Profesor: [Dirigiéndose a Leonardo] ¿Qué vas hacer? ¿Los dos lados congruentes?

119. Leonardo: ¡Ah! Sí, es que… es que para intentar demostrar que con la 1, la 2 y la 3 si se puede hacer y pues, ¿cómo se pude hacer?… De primeras, haciendo los dos lados que son congruentes. [Construye dos pares de segmentos utilizando la herramienta segmento de longitud fija, de tal forma que $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AR} \cong \overline{HC}$ arrastra un par de segmentos determinando el lugar donde se intersecan].

Figura 24



La intervención de Leonardo [119] se evidencia la preocupación por defender su afirmación (*aspecto epistémico*), y escoge como camino para ello, la posibilidad de construir la figura a partir de las tres propiedades (*aspecto teleológico*). Al haber escogido la herramienta de GeoGebra "segmento con longitud fija" no pudieron modificar las longitudes de los lados, y adicionalmente, incluyeron la Propiedad 11 sin darse cuenta: dos pares de lados adyacentes no congruentes. A su vez, la selección de esta herramienta del programa para garantizar la congruencia de los lados es evidencia del *aspecto teleológico,* puesto que es la puesta en marcha del plan anterior.

En la intervención se evidencia un argumento *deductivo empírico explícito* por parte de Leonardo [113-119] en el cual los *datos* son las propiedades "dos pares de lados adyacentes congruentes" y "una diagonal biseca a la otra", la *garantía* es la construcción realizada en GeoGebra y la *aserción* es que las propiedades definen la figura. Este argumento no es válido, puesto que en la construcción no tuvieron en cuenta la propiedad "solo una diagonal biseca a la otra", y sin darse cuenta, asumieron la no congruencia de un par de lados.

4.2.2.3. Finalizan la segunda etapa de la actividad

En la siguiente intervención, el profesor pretende sembrar la duda respecto al argumento anterior, al pedirles que piensen en otras figuras que cumplan las propiedades que estaban evaluando.

129.	Profesor:	Imagínense ustedes una figura que no sea la cometa, que tenga dos lados adyacentes congruentes. ¿Cuál se les ocurre? En un cuadrilátero. Si quieren rayen.
130.	Armando:	[Dibuja un rectángulo].
131.	Profesor:	¿Cuáles ahí son congruentes?
132.	Armando:	[Señala los lados opuestos].
133.	Profesor:	¿Y son adyacentes?
134.	Armando	¡Ah! No.
135.	Profesor:	¿En qué figura lo serían?
136.	Armando:	En un cuadrado. [Dibuja cuadrado].
137.	Profesor:	Ahí, ¿los dos lados adyacentes son congruentes y los otros dos lados adyacentes son congruentes?
138.	Armando:	¡Sí!
139.	Profesor:	Entonces ya tenemos la Propiedad 1 y 2. Ahora miremos si cumple la Propiedad 3. Una diagonal biseca la otra.

140. Armando: [Dibuja las diagonales del cuadrado].

141. Leonardo: Pues en este momento se está cumpliendo la 1, la 2 y la 3. [Dirigiéndose al profesor.] Pero es cierto lo que usted dice: si uno no pensara pues… si uno no supiera que es así, sale de otra forma.

142. Profesor: Lo que intentó Leonardo fue construir la figura con esas propiedades. Pero lo que está diciendo él [Leonardo] es que otras figuras pueden cumplir las propiedades. Entonces, en esta figura que usted construyó [señala el cuadrado de la hoja], comprobó que el cuadrado cumplía con las dos primeras propiedades. ¿Cumple la tercera? ¿Que una sola diagonal biseca la otra?

143. Armando: No. Las dos se bisecan.

En las intervenciones anteriores se evidencian dos argumentos. El primero *deductivo empírico implícito*, en el cual los *datos* es el cuadrado, la *aserción* es que dos pares de lados son congruentes y la *garantía* es la figura que ellos dibujan. En el segundo argumento *deductivo empírico implícito*, los *datos* son la figura, la *aserción* es que el cuadrado no cumple la propiedad que una sola diagonal biseque la otra y la *garantía* si es un cuadrado las dos diagonales se bisecan.

En esta ocasión fue desafortunada la intervención del profesor, porque es él quien propone estudiar una figura y comprobar si cumplía las condiciones, lo cual es un proceso reciproco al que debían haber realizado.

4.2.3. ANÁLISIS DE LA PUESTA EN COMÚN DE LAS PROPIEDADES QUE NO DEFINEN LA FIGURA

4.2.3.1. Explican por qué la figura no se puede definir como un cuadrilátero con dos pares de lados adyacentes congruentes

Como ningún grupo espontáneamente reportó lo que había encontrado, la profesora empieza a cuestionarlos solicitando un contraejemplo para el caso “dos pares de lados adyacentes congruentes”.

125. Leonardo: Es que hicimos varias. Es que cuando uno trabajaba las que ustedes dijeron habían muchas posibilidades que nada que ver. O sea no salía la figura que nosotros esperábamos.

126. Profesora: Pero en el caso de estas dos propiedades, ¿[existe] alguna figura conocida que cumpla estas dos propiedades y que no sea la que estamos trabajando? Aquí me dicen, ¿cuál? ¿Cuál era la que me decías?
[…]

128. Saúl: El rombo.

129. Profesora: Listo. Entonces acá me dicen el rombo. Porque un rombo tiene “un par de lados adyacentes congruentes” y tiene “otro par de lados adyacentes congruentes”. Perfecto. ¿Qué otro encontraron? ¿Encontraron otro ejemplo?
[…]

130. Martín: [En el tablero.] Hicimos también el cuadrado. Acá está el cuadrado [dibuja un cuadrado en el tablero]… Entonces lo que yo dije es que esta medida [una diagonal del cuadrado] siempre iba a ser igual. Pero como nosotros sabemos o como dijo el profesor, no importaba si las cuatro medidas fueran iguales, sino que esta medida que está acá sea igual a la que está acá [dibuja un rombo y señala sus lados]. También seguiría siendo estas dos medidas iguales [coloca marcas de congruencia sobre los lados del rombo], igual que lo van a ser en el cuadrado [coloca marcas de congruencia sobre los lados del cuadrado], aunque no tenga la misma forma del cuadrado.

Figura 25

En la intervención [125] de Leonardo se evidencia el *aspecto teológico*, al indicar que estudiaron la situación construyendo varias figuras. A pesar de que en el grupo de Saúl se presentaron varios argumentos al momento de proponer el rombo como contraejemplo, él solamente comunica al grupo que encontraron que el rombo es un contraejemplo. En cambio, Martín además de indicar que el cuadrado es un contraejemplo, explica por qué es contraejemplo tanto el cuadrado como el rombo. Para ello construye dos argumentos *deductivos teóricos implícitos* [132], pues carecen de *garantía*. El primero tiene como *datos* “dos pares de lados adyacentes congruentes” y como aserción que el cuadrado es un contraejemplo. El segundo tiene como *datos* que el rombo y el cuadrado tiene esas propiedades y forma diferente. Su *aserción* es que tanto el cuadrado y el rombo son contraejemplos diferentes.

4.2.3.2. Establecen que las propiedades diagonales perpendiculares y una diagonal determina triángulos isósceles no define cometa

La profesora les pide a los estudiantes que nombren otro conjunto de propiedades que no definen la figura.

136. Saúl: La [Propiedad] 4 es “diagonales perpendiculares” y la [Propiedad] 7, “las diagonales forman dos triángulos isósceles”. Pero entonces si esos dos triángulos son congruentes, entonces forman un rombo.

137. Profesora: Ellos decían: si esos dos triángulos son congruentes, también se forma un rombo. Entonces aquí también estaba el rombo. ¿El cuadrado será que también cumple esas dos propiedades?

138. Saúl: Sí.

139. Profesora: ¿Por qué?

140. Saúl: Porque las medidas de los lados del cuadrado son iguales y la diagonal se comparte con los dos triángulos.

141. Profesora: [Dibuja un cuadrado.] Entonces él me dice: la medida de los lados son iguales [coloca marcas de congruencia] y la diagonal se comparte. O sea que, ¿qué criterio utilizaríamos ahí?

142. Martín: LLL.

En la intervención [136], Saúl desarrolla dos argumentos encadenados que se presentaron durante el trabajo con su grupo. El primero, tiene como *datos* un cuadrilátero con "diagonales perpendiculares", en el cual una de las diagonales determina triángulos isósceles congruentes y como *aserción* que la figura podría ser un rombo. La palabra "podría" en la aserción del argumento de Saúl es el *cualificador* del argumento. En esta ocasión no verbalizan la *garantía*, por lo cual es un argumento *deductivo teórico implícito*.

El segundo argumento [140] tiene como *dato* al cuadrado, como *garantía* la definición de cuadrado y como *aserción* las medidas de los lados del cuadrado son iguales. Esta aserción se convierte en los *datos* de otro argumento [140,142] junto con la congruencia de la diagonal con sí misma, que tiene como *garantía* el criterio de congruencia lado, lado, lado y como *aserción* la congruencia de dos triángulos. Estos dos últimos argumentos son *deductivos teóricos explícitos*.

4.3. JUSTIFICAN POSIBLES DEFINICIONES DE COMETA (ETAPA 3)

Terminada la etapa en la cual los estudiantes han construido conjuntos de propiedades que no definen la figura, los estudiantes debían determinar conjuntos de propiedades que sí la definen.

4.3.1. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD DEL GRUPO DE SAÚL, NOÉ Y NÉSTOR

4.3.1.1. Analizan un primer conjunto de propiedades que definen la figura

Saúl y Noé empiezan analizando un cuadrilátero con las propiedades "diagonales perpendiculares" y "solo una diagonal biseca a la otra".

394. Saúl: Biseca a la otra diagonal. Entonces esta [señala la diagonal $\overline{TR}$] la parte por la mitad [a la diagonal $\overline{JK}$].
[…]

396. Saúl: Entonces la [Propiedad] 4 dice que son "diagonales perpendiculares", ¿no? Entonces tiene que ir así [dibuja dos segmentos perpendiculares], pero no nos dicen las medidas de esas diagonales. Entonces puede que la medida de los lados de la figura sea igual. Entonces puede dar como un cuadrado.

397. Profesora: ¿Y esa figura que tú me acabas de decir cumple la condición de que solo una diagonal biseque a la otra?

398. Saúl: O sea que tendría que ser… [Dibuja dos diagonales con las Propiedades 3 y 4].

399. Noé: Es que para que se bisequen tiene que pasar por el punto medio. Entonces se tiene digamos esto acá [un segmento]. Y si se pasa por acá [diagonal perpendicular que no pasa por el punto medio], no la está bisecando porque no la está cortando en dos partes iguales.
[…]

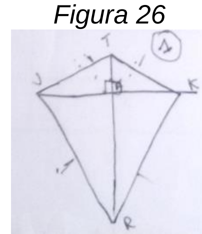
401. Saúl: Pero si cumple. O sea la 3 y la 4, si cumple.

En la intervención [394] se evidencia un argumento *deductivo teórico implícito*, que tiene como datos que una diagonal del cuadrilátero biseca a la otra diagonal, como *garantía* implícita la definición de bisecar un segmento, y como *aserción* que la diagonal queda divida en dos segmentos congruentes. Posteriormente, Saúl trata de construir un contraejemplo para indicar que las dos propiedades que están analizando no definen la figura [396]. Simultáneamente, va explicando su contraejemplo por medio de un argumento que tiene como *datos* "diagonales perpendiculares", como *garantía* implícita la figura que se está imaginando, y como *aserción* que la figura podría ser un cuadrado. Este argumento es de tipo *deductivo empírico implícito*, en el cual su aserción es una plausibilidad (*cualificador*).

Debido a que Saúl está atendiendo a las dos propiedades pero, sin ser consciente de ello, está involucrando otra (la otra diagonal también se biseca), la profesora lo interroga acerca de la relación entre las diagonales. Esto hace que Saúl construya un nuevo bosquejo de la figura [398] (*aspecto teleológico*). Noé construye dos argumentos *deductivos teóricos implícitos* para explicarle a Saúl qué significa que las diagonales sean perpendiculares y se bisequen [399]. El primero tiene como *datos* la bisección de un segmento, como garantía implícita la definición de bisecar y como *aserción* contener al punto medio. El segundo argumento tiene como datos una reinterpretación de los datos del anterior argumento, pues Noé indica que si la diagonal no es cortada en partes iguales (*datos*) entonces no está siendo bisecada (*aserción*).

4.3.1.2. Deducen la primera propiedad

Figura 26



La profesora les recuerda a los estudiantes que para establecer un conjunto de propiedades como definición, deben poder deducir a partir de ella las otras propiedades [402]. Para empezar, Saúl realiza un bosquejo [Figura 26] de una figura que cumple las propiedades "solo una diagonal biseca a la otra" y 4 "diagonales perpendiculares". En su dibujo colocan marcas de congruencia para indicar que van a demostrar que la figura tiene dos pares de lados adyacentes congruentes. Debido a que tienen dificultades para deducir la primera propiedad, la profesora les recuerda el proceso que realizaron para demostrar la congruencia de ángulos en un triángulo isósceles.

409. Saúl: Porque como acá esta diagonal [$\overline{TR}$] biseca a esta [$\overline{KJ}$], implica que estos dos lados tienen que ser iguales. Entonces si los dos lados son iguales… Bueno, estos dos lados son iguales [segmentos determinados los extremos de la diagonal $\overline{JK}$ y su punto medio]. Este segmento [señala el segmento cuyo extremo es el punto T y el punto de intersección de las diagonales] parte del mismo punto y van hacia el mismo punto.
[…]

414. Profesora: ¿Recuerdas qué hacíamos cuando definíamos? Por ejemplo, cuando trabajamos con triángulos isósceles, entonces dijimos: si yo lo defino como [triángulo con] dos lados congruentes yo puedo demostrar que los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes. Entonces aquí dijimos: voy a definirlo [la cometa] con las Propiedades 3 y 4. Es decir, parto de que esas propiedades se cumplen. Y tengo que poder, a partir de esto, demostrar por qué la Propiedad 1 se cumple. ¿Sí? ¿Qué podrían utilizar para demostrar eso?

415. Saúl: La bisección de la diagonal.

416. Profesora: Es uno de los datos que necesitan. ¿Qué otra cosa necesitan?

417. Saúl: Lo de perpendicular.

418. Profesora: Ok. Entonces hay otra información: que son perpendiculares.

419. Saúl: Que los ángulos de las perpendiculares son congruentes.

420. Profesora: Entonces tengo ángulos congruentes, de noventa grados. Listo, ¿qué más tengo?

421. Noé: Que cumplen la propiedad reflexiva.

422. Profesora: Ok. Tú me hablas de propiedad reflexiva, ¿para quién?

423. Noé: Para este [señala el segmento cuyos extremos son T y el punto medio de $\overline{JK}$].

424. Profesora: Para ese. Listo. Entonces tengo un lado congruente…

425. Saúl: Tendríamos lado…

426. Noé: Podríamos utilizar un criterio, el criterio lado-ángulo-lado.

427. Profesora: Claro. Y con eso, ¿puedo asegurar qué?

428. Saúl: La congruencia de los dos triángulos.

En las intervenciones de Saúl y Noé se evidencian varios argumentos. El primero, construido por Saúl, tiene como *datos* que “una diagonal biseca a la otra”, como *garantía implícita* la definición de bisección y como *aserción* que se determinan en esa diagonal dos segmentos congruentes [409]. El segundo [417-420] tienen con *datos* la perpendicularidad de la diagonal, como *garantía implícita* la definición de rectas perpendiculares, y como *aserción* la congruencia de los ángulos determinados por la diagonal. Estos argumentos son *implícitos* debido a que faltan pasos intermedios para establecer la aserción, por ello la profesora interviene para ayudar a los estudiantes a completar su argumento y hacerles caer en cuenta de la necesidad de usar elementos teóricos. Ambos argumentos son *deductivos teóricos*.

El tercer argumento [421-423] tiene como *dato* el segmento cuyos vértices son el punto T y el punto de intersección de las diagonales, como *aserción* la congruencia del segmento consigo mismo y como *garantía* la propiedad reflexiva de congruencia de segmentos, aunque ellos no ofrecen esa información como garantía; . es la forma como ellos dan a conocer que un segmento es congruente consigo mismo.

Los dos primeros argumentos son de Saúl y el tercero de Noé. Las aserciones de estos tres argumentos se convierten en los *datos* de un cuarto argumento, construido colectivamente, que tiene como *garantía* el criterio de congruencia lado-ángulo-lado y como *aserción,* la congruencia de dos triángulos. Los cuatro argumentos desarrollados por los estudiantes tienen como propósito argumentar a favor de la inclusión de una propiedad dentro de la definición de una figura. Los cuatro son *deductivos teóricos*, los dos primeros implícitos respecto a la garantía, y los otros dos, explícitos. A pesar de que no concluyen el proceso diciendo que por lo tanto los lados correspondientes de los triángulos son congruentes y que por lo tanto los lados adyacentes de la figura lo son, lo cual era la intención de ellos. Hay una comprensión tácita entre los estudiantes y la profesora.

4.3.1.3. Escriben la demostración de la primera propiedad

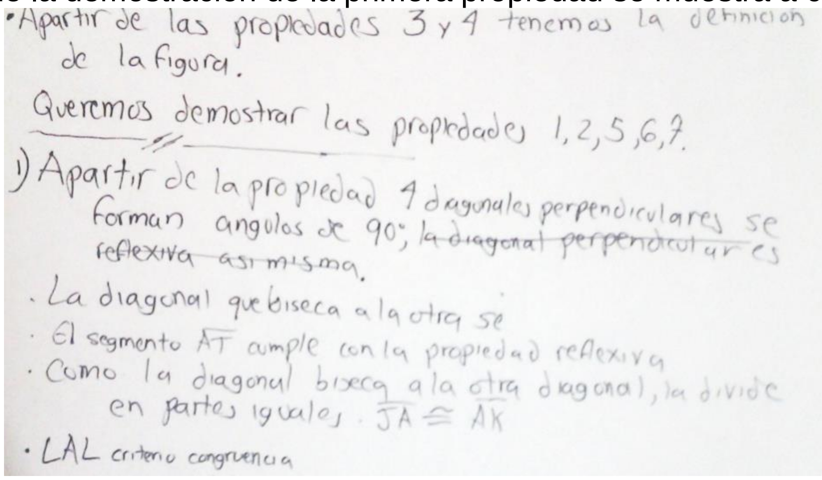
Noé y Saúl discuten acerca de cómo reportar la demostración realizada. Su discusión se centra en dos aspectos: el orden en que deben escribir los argumentos de su demostración [434 – 437] y la forma correcta de escribirlos.

450.	Noé:	La propiedad reflexiva se cumple para el segmento AT [A es punto medio de $\overline{JK}$].
451.	Profesora:	Por tanto, ¿uno qué puede decir de [segmento] AT? Busquen en esa hoja [haciendo referencia a la hoja en la cual se encuentra reportado el sistema teórico que tienen a su disposición].
452.	Saúl:	Que es semejante.

453. Noé: Que es igual a sí mismo.

454. Saúl: [Lee la hoja que contiene los elementos del sistema teórico que tienen a su disposición.] Si se tiene $\overline{AB}$, se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{AB}$. Entonces ya tenemos los ángulos congruentes de noventa grados… Tenemos que cómo la diagonal biseca entonces tenemos un criterio que es lado-ángulo-lado.

El reporte de la demostración de la primera propiedad se muestra a continuación:



• Apartir de las propiedades 3 y 4 tenemos la definición de la figura.

Queremos demostrar las propiedades 1, 2, 5, 6, 7.

1) Apartir de la propiedad 4 diagonales perpendiculares se forman angulos de 90°, ~~la diagonal perpendicular es reflexiva asi misma~~.

. La diagonal que biseca a la otra se

. El segmento $\overline{AT}$ cumple con la propiedad reflexiva

. Como la diagonal biseca a la otra diagonal, la divide en partes iguales. $\overline{JA} \cong \overline{AK}$

. LAL criterio congruencia

Los argumentos que reportan son los que se suscitaron en el episodio anterior. Todas las intervenciones que se realizaron en este episodio son muestra del *aspecto comunicativo* del comportamiento racional de los estudiantes. El reporte escrito de la demostración, permite observar que Néstor escribía todo lo que sus compañeros de grupo le pedían que reportará, sin analizar el contenido de la misma. A este grupo de estudiantes les hace falta entender que un argumento requiere una garantía. Sin embargo, se están dando cuenta de cuáles son los datos y para poder usar el criterio y concluir la congruencia de los triángulos.

4.3.1.4. Deducen la congruencia de otro par de lados adyacentes congruentes

La profesora les solicita al grupo de estudiantes que justifiquen la propiedad “otro par de lados adyacentes congruentes”.

464. Noé: Pues sería lo mismo.

465. Profesora: ¿Por qué?

466. Saúl: Sólo cambia es la medida de… O sea, digamos acá [ángulos que forman las diagonales] también se forman ángulos de noventa grados. Es la misma diagonal la que se biseca, entonces hay también estos lados [$\overline{AJ}$ y $\overline{AK}$] iguales. Y como esta [$\overline{AR}$] también aplica para la propiedad reflexiva, entonces quedaría el mismo criterio lado-ángulo-lado.

En las intervenciones de los estudiantes se evidencia el *aspecto epistémico* de Noé y de Saúl. Por una parte, al reconocer que el proceso de demostración es análogo al realizado en el episodio anterior [464], y por otra parte, al explicar por qué es análogo [466]. Para realizar esta explicación Saúl construye cuatro argumentos *deductivos teóricos implícitos*: el primero, tiene como *datos* implícitos la perpendicularidad de las diagonales, como *garantía* implícita la definición de perpendicularidad y como *aserción* que las diagonales determinan cuatro ángulos rectos. En el segundo, se establece como *datos* que "una diagonal biseca a la otra", como *garantía* implícita la definición de bisecar, y como *aserción* la congruencia de $\overline{AJ}$ y $\overline{AK}$. El tercero toma como *datos* el $\overline{AR}$, como *garantía* la propiedad reflexiva, y como *aserción* (implícita) la congruencia de $\overline{AR}$ consigo mismo. Con las aserciones de los tres argumentos, determina que puede utilizar el criterio lado-ángulo-lado, saben para qué lo hacen pero no lo dicen explícitamente.

4.3.1.5. Demuestran que la cometa tiene dos ángulos opuestos congruentes

La profesora le pide a los estudiantes que demuestren que $\angle TJR \cong \angle TKR$, y les recuerda que pueden utilizar las propiedades que ya demostraron [481].

482.	Noé:	Claro. Vea. Para saber que los ángulos son congruentes necesitamos que… Al principio de las clases, empezamos que para saber si un ángulo es congruente con otro ángulo teníamos que saber primero los lados, y para saber si los lados son congruentes… Entonces aquí tocaría saber eso. Tocaría mirar si los lados son congruentes y aplicar un criterio, que creo que sería el mismo criterio que utilizamos para el 1 y el 2, que sería lado-ángulo-lado.
483.	Profesora:	Entonces acá cuál utilizarías. ¿Con qué triángulos trabajarías?
484.	Noé:	Con estos [refiriéndose a ΔJTR y ΔKRT]. […]
490.	Noé:	Pues, ya sabemos… digamos que… que estos lados son congruentes [$\overline{TJ} \cong \overline{TK}$] ¿sí?
491.	Profesora:	Ok.
492.	Noé:	Entonces como esta diagonal biseca al ángulo… O sea va a partir a esa figura en dos partes iguales, ¿sí?
493.	Saúl:	Pero también ya sabemos que estos dos [$\overline{RJ} \cong \overline{RK}$]
494.	Noé:	Estos dos lados son congruentes [$\overline{RJ} \cong \overline{RK}$].
495.	Profesora:	Entonces miremos. Partíamos de 3 y 4 para definir. Entonces a partir de 3 y 4 ustedes me justificaron 1 y 2.
496.	Saúl:	Y a partir de 1 y 2 vamos a demostrar esta [tiene dos ángulos opuestos congruentes].
497.	Profesora:	Y utilizando 1 y 2, que ya la han justificado, ustedes me van a decir por qué son congruentes. Pero pilas, porque cuando tú me hablas de que biseca el ángulo me estás agregando otra propiedad que todavía no la hemos comprobado, pero ya casi lo tienes. Tienes dos lados. ¿Qué te hace falta?

498. Noé: Ya tenemos los dos lados. Ahora falta, digamos, el criterio. Que sería el mismo que utilizamos para estos triángulos. Que sería lado-ángulo-lado.

499. Profesora: ¿Cuál sería el ángulo?

500. Noé: Este [$\angle TJR$ y $\angle TKR$].

501. Profesora: O sea que todavía no lo tengo congruente.

502. Saúl: Entonces si formamos… O sea si demostramos, digamos, la congruencia entre los triángulos… Digamos que todos los lados son iguales [congruentes], pues ya podríamos decir que todos los ángulos son iguales [congruentes].
[…]

504. Saúl Por lado, lado, lado.

505. Profesora: Por lado, lado, lado. ¿Ahí podemos aplicar lado, lado, lado?

506. Saúl: Sí. Porque ya tenemos este [$\overline{TJ} \cong \overline{TK}$] y este [$\overline{RJ} \cong \overline{RK}$] y este lado [$\overline{RT}$], que es la reflexiva. [Dirigiéndose a Néstor.] Copie… Copie que se toman los dos pares de lados adyacente congruentes… Y el segmento TR cumple con la propiedad reflexiva… Ponga criterio lado, lado, lado… Y acá ponga congruencia de triángulos [después del criterio]… Tenemos ángulos opuestos congruentes, que son estos dos [$\angle TJR$ y $\angle TKR$]… Copie. Con base en esto se demuestra que los ángulos opuestos son congruentes [Repite varias veces.].

Teniendo claro lo que tienen que demostrar, Noé explica su plan [482], el cual es desarrollado abductivamente, puesto que sabe cuál es el resultado que debe obtener y a partir de ello menciona que necesitan congruencia de lados. Esto es evidencia del *aspecto teleológico*, mientras que especificar las propiedades que deben asegurar se cumple y cuál podría ser la garantía correspondiente es evidencia del *aspecto epistémico*.

Noé y Saúl determinan que los triángulos que deben demostrar congruentes son el ΔJTR y el $\angle KRT$ (*aspecto teleológico*). No obstante, al enumerar los datos que les permitirían construir un argumento deductivo para poder concluir la congruencia de dichos triángulos, usando como *garantía* el criterio lado-ángulo-lado, nombran la congruencia de dos lados correspondientes de los triángulos e incluyen la congruencia de los ángulos que estos determinan, propiedad que se quiere demostrar. Cuando la profesora los hace caer en cuenta de su error, Saúl modifica su argumento, sin nombrar una *garantía*, pues indica que para garantizar la congruencia de los ángulos (*aserción*) es necesario tener todos los lados correspondientes congruentes (*datos*). Este argumento es de tipo *abductivo teórico implícito* [506], pues los exponen como una plausibilidad. Cuando la profesora le pregunta si bajo esas condiciones se puede utilizar el criterio lado-lado-lado, Saúl organiza su justificación por medio de una cadena deductiva de argumentos, a la vez, que le pide a Néstor que la vaya reportando.

4.3.1.6. Demuestran que una de las diagonales de la figura forma triángulos isósceles

Saúl establece que dependiendo de la diagonal de cuadrilátero que se elija, se forman triángulos isósceles diferentes [514]. Por ello, Noé interviene para aclarar que solamente una de las diagonales determina triángulos isósceles.

515. Noé: No, estos [ΔRJT y ΔRKT] no pueden ser [isósceles]. Estos no pueden ser, porque este lado [$\overline{RK}$] es más grande que este [$\overline{KT}$]. Estos dos tienen que ser de igual medida. Entonces, serían estos dos [ΔJTK y ΔJRK]. O sea, son isósceles pero no congruentes.

516. Saúl: Se coge el segundo [Propiedad 2], o sea otro par de lados congruentes, que son estos dos [$\overline{RJ} \cong \overline{RK}$] y el primero [Propiedad 1] que se coge este [$\overline{TJ} \cong \overline{TK}$]. Entonces pues ahí ya tenemos… pues para formar el criterio lado, ángulo, lado. O pues el criterio que se requiera.

517. Profesora: ¿Pero ahí sí sería el criterio lado, ángulo, lado? ¿Qué te aseguran que son isósceles?

518. Noé: Que tenga dos lados congruentes.
[…]

520. Saúl: Pues ahí ya tenemos los lados.

521. Profesora: ¿Por qué?

522. Saúl: Pues porque en la primera propiedad dice que estos lados son iguales [$\overline{TJ} \cong \overline{TK}$] y en la segunda, que estos dos son iguales [$\overline{RJ} \cong \overline{RK}$]. Entonces, ahí ya se forman los triángulos isósceles.

523. Profesora: Entonces cuáles serían los triángulos isósceles. Nombrémoslos, por favor. Reportémoslo.

524. Noé: El [ángulo] JTK y el [ángulo] JTK.

525. Saúl: [Néstor escribe $\overline{JTK}$ $\overline{JRK}$. Saúl lo corrige.] No, son triángulos. […] Ponga son triángulos isósceles…

Para explicarle a Saúl por qué solamente una de las diagonales forma triángulos isósceles, Noé construye tres argumentos de tipo *deductivo teórico* [515]. El primero, tiene como *aserción* que los ΔRJT y ΔRKT no son isósceles, como *garantía* la definición de triángulo isósceles y como *datos* la no congruencia de $\overline{RK}$ y $\overline{KT}$. Aunque Saúl pretendía explicar por qué ninguno de los dos triángulos mencionados es isósceles, su argumento solamente logra explicar por qué ΔRKT no lo es. El segundo argumento, tiene la misma *garantía* del primero y como *aserción* que el ΔJTK y el ΔJRK son isósceles. Los datos de este argumento son implícitos, pues Noé da por hecho que Saúl sabe cuáles son los lados congruentes de dichos triángulos, ya que ya lo habían demostrado. Finalmente, el tercer argumento tiene como *datos* que el ΔJTK y el ΔJRK son isósceles y que $\overline{RK}$

y $\overline{KT}$ no son segmentos congruentes y como *aserción* que los triángulos no son congruentes. En este caso la *garantía* implícita es la definición de congruencia de triángulos.

Ni Noé ni Saúl caen en cuenta de que el segundo argumento es la demostración de la propiedad. Por ello, Saúl intenta volver a utilizar la estrategia que había utilizado en episodios anteriores: encontrar triángulos congruentes por medio de la aplicación de un criterio de congruencia (*aspecto teleológico*) [516]. Cuando la profesora les pregunta a los estudiantes qué se necesita para demostrar que dos triángulos son isósceles, Noé da la definición [518]. Esta definición es la *garantía* del argumento final dado por Saúl [522], que tiene como *datos* que $\overline{TJ} \cong \overline{TK}$ y $\overline{RJ} \cong \overline{RK}$ y como *aserción* que "una de las diagonales forma triángulos isósceles". Con esto terminan de justificar porque las propiedades, "una diagonal biseca a la otra", y, "diagonales perpendiculares", sí definen cometa. Aunque la demostración no se hizo de forma rigurosa, sí llegaron a tener certeza de que las otras propiedades de la figura se podían deducir a partir de esas dos propiedades.

Finalmente, la corrección que realiza Saúl a lo escrito por Néstor [525] es evidencia del *aspecto comunicativo*, pues Saúl se preocupa por un buen uso del lenguaje matemático para comunicar sus resultados.

Luego de demostrar esta propiedad, los estudiantes intentaron proponer y justificar otras definiciones para la figura, sin mayor éxito. De forma general, para este grupo de estudiantes fue difícil deducir propiedades a partir de la inclusión, en una de las posibles definiciones, de una propiedad que establecía el no cumplimiento de una condición.

4.3.2. ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD REALIZADA POR ANDREA, MARTÍN, LEONARDO Y ARMANDO

4.3.2.1. Determinan un primer conjunto de propiedades que definen la figura

Andrea propone un conjunto de propiedades [154]: "Soló una diagonal biseca la otra" y "las diagonales son perpendiculares".

155. Leonardo: En este caso lo primordial sería… que los dos lados miden lo mismo…[se refiere a que se bisecan].

156. Profesor: ¿Pero cómo garantiza que se biseque?

157. Armando: Punto medio.[Construye un segmento y ubica el punto medio. Luego construye una recta perpendicular que pasa por el punto medio y un segmento sobre la recta].
[…]

165. Leonardo [Construye segmentos determinados por los extremos de las diagonales].
[…]

170. Martin: Vuélvalo cuadrado.
[…]

173. Armando: [Arrastra la figura hasta hacerlo un cuadrado].

174. Profesor: ¿Cómo prueban que es cuadrado?

175. Leonardo: Mirando las distancias y sí todas las distancias miden lo mismo, podemos comprobar que es un cuadrado.
[…]

179. Armando: [Utiliza distancia y mide los lados y arrastra la figura hasta que parece un cuadrado] Sí da cuadrado. Entonces esas propiedades no lo definen…
[…]

181. Leonardo: Profe, pero no. La embarramos. Usted me corrige ¿no?…porque con la Propiedad 3 y 4 nos están diciendo “solo una diagonal biseca a la otra”, eso quiere decir [muestra las diagonales de la figura] que la otra…

182. Armando: [Interrumpe a Leonardo]. En el cuadrado no se cumple…

183. Andrea: Porque en el cuadrado las dos se bisecan…

184. Leonardo: Entonces lo hicimos mal todo.
[…]

187. Armando: [Arrastra la figura]

188. Leonardo: Vea. Volvimos a la cometa.

189. Andrea: No….Que video. [Risas].

190. Armando: No, la [Propiedad] 3 y la [Propiedad] 4 si son [si definen cometa].

207. Armando [Mide las longitudes de los lados, los ángulos y de los segmentos determinados por los extremos de las diagonales y el punto de intersección para mostrar que se bisecan].

210. Leonardo: Ahí demostramos que solo con esas dos es suficiente para hacer la cometa.

La construcción de la figura con GeoGebra [157-165] realizada por Armando evidencia que él tiene un buen dominio del software que le permite realizar una construcción robusta de un cuadrilátero que cumple las condiciones escogidas. Armando, en todas las actividades en sesiones anteriores, mostró una gran habilidad en el manejo del software y siempre fue quien lideró las construcciones en las tareas propuestas. El plan que propone Martin de arrastrar la figura para tratar de conformar un cuadrado es evidencia del *aspecto teleológico*.

En las intervenciones anteriores se pueden observar tres argumentos. El primero, de tipo *deductivo teórico explícito*, es construido por Armando para descartar que las propiedades “diagonales perpendiculares” y “una diagonal biseca a la otra”, definen la figura [155,-179]. En este los *datos* son dos segmentos que tienen la misma longitud, la *garantía* su definición personal de cuadrado y la *aserción* es la figura es un cuadrado. El segundo argumento es *deductivo implícito teórico* [170-179]. Los *datos* es la figura que parece ser un cuadrado obtenida con el arrastre, la *garantía* es que si las propiedades producen un cuadrilátero que no es cometa entonces no definen cometa, la *aserción* las propiedades no definen cometa. Este argumento es teórico porque es el teorema que se estableció en clase; un contraejemplo invalida la afirmación. Un tercer argumento *inductivo explicito teórico* [190-210] tiene como *datos* un cuadrilátero con "diagonales perpendiculares" y "un diagonal que biseca a la otra", la *aserción* es que la figura es una cometa y como *garantía* que si las propiedades son suficientes para construir la cometa entonces las propiedades definen la figura.

4.3.2.2. Justifican la congruencia de dos pares de lados

Después de haber encontrado una definición de cometa: "solo una diagonal biseca la otra" (Propiedad 3) y "las diagonales son perpendiculares" (Propiedad 4), el profesor les pide que usándolas demuestren que las otras propiedades también se cumplen [261]. Inicialmente Armando [263] justifica la congruencia de $\overline{JR}$ y $\overline{JK}$ y de $\overline{JT}$ y $\overline{KT}$.

272.	Profesor:	¿Qué le permite decir que es de 90°?
273.	Armando:	Eee… las diagonales…
274.	Leonardo:	Que son perpendiculares…
275.	Profesor:	Porque son perpendiculares sabemos que ese es de 90°. ¿Qué más necesitamos?
276.	Armando:	¡Ah! Pues podemos hacerlo con el triángulo isósceles… señala [ΔTRK]
277.	Leonardo:	¡Aaaah! Pues las propiedades de LAL para comprobar que es isósceles y eso [observa la hoja en la que se ha consignado el sistema teórico con el que cuentan].
278.	Andrea:	Mmmm si…
279.	Armando:	Ya tenemos el ángulo… ahora faltan dos propiedades que puede ser AAL, la otra propiedad que tenemos… […]
283.	Armando:	Espere este lado es congruente con este, propiedad reflexiva. [Señala $\overline{RA}$]. Entonces tenemos RA…mmmm puede ser otro ángulo o lado…
284.	Leonardo:	Este de acá abajo es el lado. [Señala el $\overline{JA}$ y el $\overline{KA}$] ayyyy… Si, esa es. […]
287.	Armando:	Pues por el punto medio, porque el punto medio hace que lo parta por la mitad…

[…]

291. Profesor: ¿Entonces concluyen?

292. Armando: Que este lado es congruente con este [señala $\overline{JR}$ y $\overline{RK}$]

293. Profesor: Entonces escríbanlo.

294. Andrea: [Asume la tarea de reportar los argumentos]. ¿Entonces cómo lo escribo?

295. Armando: Entonces al tener lados… lados… las rectas perpendiculares, podemos saber que tenemos ángulos de 90°.

296. Leonardo: Ahí están los dos ángulos de 90°. Después de haber sacado los ángulos de 90°. Sacamos la propiedad reflexiva [señala el $\overline{TA}$]

297. Andrea: mmm…

298. Leonardo Luego de la diagonal que se biseca, por el punto medio…

299. Armando: Sabemos que hay la misma distancia en los dos lados. [Señala el $\overline{JA}$ y el $\overline{KA}$]

300. Leonardo Y ahí comprobamos el criterio ALL.

301. Armando: Nooo, era LAL.

302. Leonardo Y pues esos dos lados [señala $\overline{JR}$ y $\overline{RK}$] son congruentes y ya.

En las intervenciones anteriores se presentan varios argumentos. En el primer argumento [272-274] el *dato* presentado por Armando y Leonardo es "diagonales perpendiculares", y la *aserción* que los ángulos miden 90°. La garantía que no proveen explícitamente es que si las rectas son perpendiculares, entonces los ángulos que se forman miden 90°. Este es un argumento de tipo *deductivo implícito teórico.* Un segundo argumento *deductivo explicito teórico* lo provee Armando [283]; en él el *dato* es el $\overline{RA}$, la *garantía* es la propiedad reflexiva y la *aserción* que el $\overline{RA}$ es congruente a sí mismo. Un tercer argumento de Armando y Leonardo [284-292], presenta como *datos* los segmentos JA y KA, la *aserción* es que esos segmentos son congruentes y la *garantía* es la definición personal Armando de punto medio (*deductivo teórico explicito*).

Los argumentos anteriores los repiten en las intervenciones de 295 a 299, formando con las correspondientes aserciones los *datos* del penúltimo argumento. En este no mencionan la *aserción*, aunque se infiere que es la congruencia de ΔJAR y ΔKAR. La *garantía* es el criterio de congruencia LAL (argumento *deductivo teórico implícito*). Un último argumento se presenta en la intervención [302], en el cual solo se expresa la *aserción*: la congruencia del $\overline{JR}$ con el $\overline{KR}$. Tanto los datos como la *garantía* son tácitos (*deductivo teórico implícito*).

Las actuaciones de los estudiantes, intentar demostrar la congruencia entre $\overline{JR}$ y $\overline{RK}$ a través del criterio de congruencia de triángulos LAL, es posiblemente producto de la exigencia en las tareas de las sesiones anteriores de expresar estrategias para justificar afirmaciones de manera deductiva, basados en el sistema teórico que tenían a su disposición. Pese a que los estudiantes no realizan y explicitan de manera formal su demostración, sí parecen saber cuáles son los pasos necesarios para construir su justificación.

Respecto al comportamiento racional, en las anteriores intervenciones se encuentra evidencia del *aspecto epistémico, teleológico* y *comunicativo*. El aspecto *epistémico* en la preocupación por encontrar los datos para poder usar la garantía que escogieron: el criterio de congruencia lado, ángulo, lado (LAL), por medio de un proceso abductivo y en la intención de los estudiantes de usar elementos teóricos en sus argumentos [272-302]. El plan que se evidencia en las intervenciones anteriores, demostrar la congruencia de dos triángulos para justificar la congruencia del $\overline{JR}$ con el $\overline{KR}$, da cuenta del aspecto *teleológico*. Por último, el aspecto *comunicativo* se evidencia en la intervención de Armando [301] al corregir el nombre del criterio que están usando para demostrar la congruencia de los triángulos.

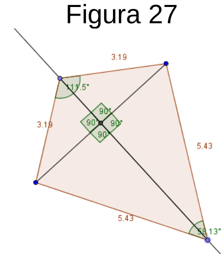
4.3.2.3. Explican por qué la figura tiene ángulos opuestos no congruentes

El profesor propone al grupo justificar la propiedad "dos ángulos opuestos no congruentes" [309], aceptando como definición de cometa ser un cuadrilátero con diagonales perpendiculares y teniendo que una sola diagonal biseca a la otra. Leonardo indica que los ángulos no son congruentes porque solo una diagonal biseca a la otra [313].

314. Armando: Exacto, mire acá nos están diciendo que una diagonal no biseca la otra. Entonces este lado es diferente de este lado [señala $\overline{TJ}$ y $\overline{JR}$] por tanto el ángulo no es igual al de arriba.

[…]

Figura 27



316. Leonardo: Es que usted nos acabó de decir, que cómo comprobar que los dos ángulos opuestos no son congruentes. Este ángulo no es congruente con este ángulo [señala $\angle JTK$ y $\angle JRK$]. Por lo tanto ahí le estamos demostrando que no.

317. Profesor:: Sí, pero debe buscar la manera de mostrar lo que quiere decir…generar una serie de razonamientos como lo hicieron en el ejercicio anterior.

318. Armando: Pues porque… o sea esta si hace que parta esta línea por la mitad [señala $\overline{TR}$] pero este no hace que se parta por la mitad… [señala $\overline{JK}$]. Pero entonces… No sé cómo explicarlo. O sea la recta horizontal si biseca la vertical pero la vertical no biseca la otra.

319. Profesor:: ¿Entonces eso que genera?

320. Armando: Pues que un lado sea más largo, por lo tanto el ángulo es diferente al otro. Por lo tanto el ángulo opuesto es diferente del otro.

321. Profesor:: Bueno espere. Miremos los triángulos. [Señala ΔJTK y ΔJRK] ¿Cómo son?

322. Leonardo En este momento no son congruentes. Los dos triángulos no son adyacentes ni son congruentes... los dos cada uno… Los dos son isósceles. Hasta ahí bien. Pero entre los dos no son adyacentes…

323. Armando: No son congruentes…[Interrumpiendo a Leonardo].

324. Profesor:: Entonces, ¿usted quiere mostrar que los triángulos comparten un lado, pero no son congruentes, para mostrar que los ángulos tampoco son congruentes?

325. Armando: ¿Cómo mostramos que no son congruentes?

326. Leonardo:: Pues es escribir lo que acabamos de decir. Que son isósceles pero no son congruentes entre sí los dos.

329. Armando: O sea la vertical biseca la horizontal, pero la horizontal no biseca la vertical.
[…]

340. Leonardo: Es que la distancia de esta perpendicular [señala $\overline{TR}$] es más larga que la otra…Es que no sé cómo demostrarlo…

341. Armando:: Bueno la propiedad de la figura es que solo una diagonal biseca la otra. Podemos poner definición de cometa (como garantía). Entonces al ser una diagonal bisecar a la otra, obvio un lado es más largo. Al ser un lado más largo, el lado cambia. Y al cambiar un lado no es congruente con el otro.

En este episodio los estudiantes tratan de demostrar la Propiedad 6 (“dos ángulos opuestos no congruentes”) pero les hace falta la experiencia y conocimiento para poder hacerlo. Armando construye un argumento *deductivo explicito teórico* [312-314, 329] en el que el *dato* es que “sólo una diagonal biseca la otra”, la *aserción* es que $\angle JTK$ y $\angle JRK$ no son congruentes, y la *garantía* es que $\overline{TJ}$ y $\overline{JR}$ no son congruentes. Aunque no es un argumento correcto, con él expresan lo que creen sería la causa para que los ángulos no sean congruentes. Un segundo argumento de Leonardo [326] tiene como datos que el ΔJTK y el ΔJRK son isósceles no congruentes, y la *aserción* es que $\angle JTK$ y $\angle JRK$ no son congruentes. Este es un argumento *deductivo implícito empírico*, ya que no da la *garantía* la cual es probablemente lo que ve. Por último Armando y Leonardo [340-341] construyen un argumento *deductivo implícito empírico* en el cual los *datos* son que una diagonal es más larga que la otra y la aserción que $\angle$JTK y $\angle$JRK no son congruentes. La *garantía* no la proveen.

El esfuerzo que hacen los estudiantes por buscar una justificación teórica para la Propiedad 6 es evidencia del aspecto *epistémico* de su comportamiento racional.

En la intervención [323], Armando indica que el término que está usando Leonardo para expresar su idea es incorrecto [322]. Esto es evidencia del aspecto *comunicativo*.

4.3.3. ANÁLISIS DE LA COMUNICACIÓN DE LAS PROPIEDADES QUE DEFINEN LA FIGURA

4.3.3.1. Comunican cómo demostraron que un par de lados adyacentes son congruentes

Armando y Leonardo pasan al tablero para explicar cómo justificaron que "un par de lados adyacentes son congruentes" [166]. Leonardo dibuja las diagonales con las condiciones dadas y luego los lados del cuadrilátero, siguiendo una indicación de Andrea [168, 169]. Sobre los lados que van a demostrar congruentes, $\overline{TK}$ y $\overline{TJ}$, coloca marcas de congruencia. Cuando la profesora les pide que justifiquen por qué se cumple la congruencia, Andrea nombra la propiedad reflexiva y Leonardo el criterio de congruencia que utilizaron. Finalmente, Leonardo organiza la justificación.

179. Leonardo: Este ángulo mide 90 grados. 90 grados, 90 grados y 90 grados [coloca marcas de ángulos rectos en los cuatro ángulos formados por las diagonales]. Después…

180. Profesor: ¿Por qué?

181. Leonardo: Porque se tiene una recta perpendicular y la otra propiedad…

182. Profesor: Espere. Despacio. ¿Porque son qué?

183. Leonardo: Porque la recta perpendicular y la línea que lo biseca forman ángulos de noventa grados.

184. Profesor: Por ser perpendiculares. Listo. Bien.

185. Leonardo: Ese es el primer criterio de ángulo [se refieren al primer dato que necesita para poder usar un criterio]. Lo siguiente que nosotros sacamos fue la propiedad reflexiva que se hace acá [retiñe con el marcador el segmento con extremos en T y A]. Ese lo utilizamos como lado. Y la última, que fue la tercera, nosotros la sacamos del punto medio… Como esta distancia [de J a A] mide igual que esta [de K al punto de intersección de las diagonales] porque se bisecan…

186. Andrea: Ese es el punto medio.

187. Leonardo: Entonces este también es un lado. Tenemos la propiedad de ángulo, lado, lado.

188. Profesora: ¿Esa fue la que utilizaron?

189. Andrea: No. Criterio lado, ángulo, lado.

190. Leonardo: Criterio lado, ángulo, lado. Y pues, de esa forma comprobamos que ese lado es congruente con ese [$\overline{TK} \cong \overline{TJ}$].

Para comunicar cómo justificaron la propiedad, Andrea y Leonardo nombran las garantías diferentes que utilizaron. Luego, empiezan a construir colectivamente, una cadena de argumentos. El *dato* del primer argumento es que "las diagonales son perpendiculares" y la *aserción* es que todos los ángulos determinados por las diagonales miden 90 grados [179]. La *garantía* es un teorema que no se había demostrado: si dos rectas son perpendiculares entonces determinan cuatro ángulos de 90 grados [183]. Al terminar este argumento, Leonardo indica que esto garantiza "el primer criterio de ángulo" [185]. Con esta expresión, él quiere comunicar que ya cuenta con el primer dato, congruencia de ángulos, necesario para poder utilizar uno de los criterios de congruencia de triángulos. Este argumento es *deductivo teórico explícito.*

El segundo argumento establece como *dato* el segmento cuyos extremos son el punto T y la intersección de las diagonales y como *aserción* implícita que el segmento es congruente a sí mismo, por la propiedad reflexiva (*garantía*). La expresión "esto lo utilizamos como lado" indica que este argumento le garantiza la congruencia de un par de lados correspondientes de los triángulos [185]. Este argumento es *deductivo teórico implícito.*

El tercer argumento tiene como *datos* que "una diagonal biseca a la otra", como *garantía* la definición de bisecar y de punto medio, y como *aserción* la congruencia de los segmentos determinados por J y K, con el punto de intersección de las diagonales [185, 186]. Leonardo termina este argumento con la expresión "entonces este también es un lado", indicando que tiene otro par de lados correspondientes congruentes (argumento *deductivo teórico explícito*). Este argumento fue construido colectivamente por Leonardo y Andrea. Es destacable la aclaración que realiza Andrea [186], al indicar que la definición de bisecar no es suficiente para garantizar la aserción, sino que también se necesita la de punto medio.

Las aserciones de cada uno de los argumentos anteriores se convierten en los *datos* de un cuarto argumento *deductivo teórico implícito*, que tiene como *garantía* el criterio de congruencia lado, ángulo, lado, y como *aserción* implícita la congruencia de un par de triángulos (implícitos). Esta aserción se convierte en los *datos* implícitos de un quinto argumento, también *deductivo teórico implícito*, que tiene como *garantía* la definición de congruencia y como *aserción* la congruencia de los lados correspondientes de los triángulos que son lados adyacentes de la figura.

Finalmente, cuando Andrea le corrige a Leonardo el orden en que menciona las palabras del criterio [189] es evidencia del *aspecto comunicativo*.

4.3.3.2. Explican cómo demostraron que la figura tiene un par de ángulos opuestos congruentes

La profesora le pide al Grupo 1 que explique cómo justificaron que la figura tiene "un par de ángulos opuestos congruentes".

211. Saúl: Nosotros, pues de la segunda propiedad sabemos que estos lados son congruentes [coloca marcas de congruencia para indicar que $\overline{RK} \simeq \overline{RJ}$]. Entonces, tenemos esta [diagonal $\overline{RT}$], le sacamos la propiedad reflexiva, y la primera propiedad que está ahí, nos dice que estos lados son congruentes [$\overline{TK} \simeq \overline{TJ}$]. Entonces ahí si se utilizaría el criterio lado, lado, lado, lo que implica pues que sus ángulos también son iguales, porque pues se daría la congruencia de triángulos.

La cadena de argumentos dada por Saúl es una demostración completa para la propiedad dos ángulos opuestos congruentes, pues nombra todos los datos, las garantías y las aserciones de cada uno de sus argumentos. Un primer argumento tiene como *dato* la diagonal $\overline{RT}$, como *garantía* la propiedad reflexiva, y como *aserción* implícita que $\overline{\mathrm{RT}}$ es congruente consigo mismo. El segundo argumento tiene como *dato* la congruencia de tres pares de lados correspondientes de dos triángulos, como *garantía* el criterio de congruencia lado-lado-lado, y como *aserción* la congruencia de los dos triángulos. Esta última aserción se convierte en el *dato* del último argumento que tiene como *garantía* implícita la definición de congruencia de triángulos, y como *aserción* la congruencia de un par de ángulos correspondientes. Los tres argumentos son *deductivos explícitos teóricos*.

4.3.3.3. Explican cómo demostraron que la figura tiene un par de ángulos opuestos no congruentes

La profesora les pide a los grupos justificar por qué la figura tiene "dos ángulos opuestos no congruentes". Un integrante del Grupo 2 hace la explicación respectiva.

216. Armando: Eee bueno, ya tenemos las dos rectas perpendiculares. Entonces decimos que "solo una biseca a la otra". Entonces por consiguiente, los lados son iguales [señala los segmentos que se forman con extremos J y K y la intersección de las diagonales, respectivamente].O sea uno tiene que ser más largo que el otro para que sólo una biseque a la otra [mostrando los segmentos que se forman entre los extremos de $\overline{TR}$ y la intersección de las diagonales]. Entonces al ser uno más largo que el otro, la distancia de aquí [R] hasta aquí [punto de intersección de las diagonales], va a ser mayor, y eso hace que los ángulos pues cambien sus grados. ¿Si me hago entender?

[…]

228.	Armando:	Es que acá hay otros dos triángulos. Si trazamos una línea por acá, así [retiñe la diagonal $\overline{TR}$], y borramos esta [borra $\overline{JK}$], entonces ya sabemos que son congruentes, y todo eso, ¿cierto? Y la suma da 180. […] [Vuelve a dibujar $\overline{JK}$].
		[…]
234.	Profesora:	¿Crees que en algún momento el $\angle TJK$ puede llegar a ser congruente con $\angle JRK$?
235.	Armando:	No. Porque la distancia de la base a la máxima altura pues es diferente.
236.	Profesora:	O sea, la distancia… Nombremos al punto de intersección de las diagonales con una letra, por favor.
237.	Armando:	A.
238.	Profesora:	Entonces tú me estás diciendo porque TA, la medida de TA es diferente a la medida de AR.
239.	Armando:	Por lo que solo una se biseca.
240.	Profesora:	¿Será que en algún momento el $\angle JTK$ va a ser congruentes con el $\angle JRK$?
241.	Armando:	No. En ningún momento porque al ser iguales entonces las dos se bisecarían. O sea, al ser los ángulos iguales tendrían que ser las diagonales… las dos diagonales bisecarse, y la propiedad dice que “solo una diagonal biseca a la otra”.

En la intervención [216], Armando desarrolla dos argumentos. El primero, es una argumento *deductivo teórico implícito*, cuyos *datos* es que “solo una diagonal biseca a la otra” y la *aserción* es que la congruencia de $\overline{KA}$ y $\overline{JA}$ y la no congruencia de $\overline{TA}$ y $\overline{RA}$. La *garantía* implícita es la definición de bisecar. La *aserción* de este primer argumento se convierte en el *dato* del segundo, que tiene como *aserción* que la medida de los ángulos no se mantiene congruente. Este segundo argumento es *inductivo empírico implícito*.

Saúl ya había utilizado los triángulos JTR y KTR para demostrar la congruencia de un par de ángulo opuestos congruentes. Armando trata de utilizar estos triángulos para demostrar la no congruencia del $\angle T$ y el $\angle R$, pero termina repitiendo la explicación que ya había realizado Saúl.

En la intervención [241], Armando intenta justificar que toda cometa debe tener un par de ángulos opuestos que no son congruentes. Su argumento consta de una cadena de contrarrecíprocas, porque parte de tomar como *datos* la negación del consecuente de la condicional que quiere demostrar, es decir, asume que la figura tiene dos pares de ángulos congruentes. Su primera *aserción* es que sus diagonales se tendrían que bisecar y con ello concluye que no podría ser cometa.

Usa como *garantía* el teorema que ya establecieron: si es cometa, entonces solo una diagonal biseca a la otra. Este argumento es *deductivo teórico implícito*.

4.3.3.4. Explican por qué una de las diagonales determina triángulos isósceles

Cuando la profesora les pide demostrar la última propiedad, que “una de las diagonales forman triángulos isósceles”, Armando indica que “ahí se ve [243]”. La profesora le pide que justifique, por lo que él indica que: “Pues porque ya lo habíamos demostrado. Estos dos [pares de lados congruentes] son congruentes, y ya [245]”.

El primer argumento tiene como *dato* la cometa con una diagonal, como *garantía* lo que Armando está observando y como *aserción* que una diagonal determina triángulos isósceles. El argumento de Armando es totalmente *empírico*. Es debido a la solicitud de la profesora que Armando cambia su argumento, convirtiéndolo en uno de naturaleza *teórica* que tiene como *datos* un par de lados congruentes, como *garantía* implícita la definición de triángulo isósceles y como *aserción* que los triángulos determinados por una diagonal son isósceles. Aquí se evidencia que los estudiantes son capaces de dar argumento teóricos cuando se les exige.

4.4. DETERMINAR SI UNA FIGURA ES UNA COMETA (ETAPA 4)

En la última parte de la sesión, a cada grupo se le muestran tres figuras con el propósito de que ellos expliquen por qué cada figura es o no es una cometa. Esta parte de la sesión se realizó de manera simultánea con todo el grupo. Existe un argumento que se repite en cada una de las intervenciones de los estudiantes, que corresponde a un argumento metamatemático: si una figura no cumple una de las propiedades de la cometa, entonces no es cometa

4.4.1. ¿POR QUÉ UN TRAPECIO ISÓSCELES NO ES UNA COMETA?

La profesora solicita a cada grupo que determine si la figura que aparece en las pantallas de sus respectivos computadores es una cometa. Debido a que todos dicen que no, la profesora les pide que indiquen qué propiedades no cumplen. Armando indica que la figura es un trapecio [259], Leonardo que no tienen una diagonal que biseque a la otra [260], Martín que no tiene diagonales que formen triángulos isósceles [262] y Saúl que las diagonales no son perpendiculares [263]. Debido a que los estudiantes estaban basando sus conclusiones en lo que observaban, puesto que las diagonales de la figura no estaban representadas, la profesora interviene para indicarles que no entiende como llegaron a estas conclusiones, si no están construidas las diagonales [264]. Esto lleva a que los estudiantes midan los lados de la figura, los ángulos y las diagonales. Como estaban hablando de diversas propiedades, la profesora decidió organizar la discusión preguntándoles si se cumplían cada una de las propiedades.

279. Profesora: ¿Cuál es la propiedad que no está cumpliendo? Propiedad 1 [un par de lados adyacentes congruentes], ¿la cumple?

280. Armando: Sí. Porque tiene un par de lados adyacentes congruentes.

281. Profesora: ¿Quiénes son los lados adyacentes congruentes en este caso?

282. Armando: [Segmentos] BA y BH.

283. Leonardo: Y BJ.

284. Profesora: Listo, entonces cumple Propiedad 1 y 2 [otro par de lados adyacentes congruentes]. Ahora, la Propiedad 3 [solo una diagonal biseca a la otra], ¿la cumple?

285. Armando: No.

286. Profesora: ¿Por qué?

287. Saúl: Ninguna diagonal se biseca, solo se intersecan.

288. Profesora: Ninguna diagonal se biseca, solo se intersecan. ¿Por qué?

289. Saúl: Porque se tiene que intersecar en el punto medio.
[…]

292. Profesora: ¿Tiene dos ángulos opuestos congruentes?
[…]

295. Saúl: Porque ahí se ve un ángulo obtuso y uno agudo.
[…]

298. Profesora: ¿Las diagonales forman triángulos isósceles?

299. Todos: No.

300. Profesora: ¿Están totalmente seguros?

301. Leonardo: Hay dos.

302. Profesora: ¿Cuáles serían esos triángulos? [murmullos] Aquí me hablan de varios. Los dos [grupos] me están hablando de triángulos isósceles diferentes.
[…]

305. Saúl: [Triángulo] LBA.

306. Noé: [Triángulo] BAH.

307. Profesora: LBA y el BAH. Isósceles. ¿De acuerdo allá [dirigiéndose al otro grupo]? ¿Si? ¿No? ¿Por qué?

308. Armando: Porque dos lados miden igual y uno no.

Desde el primer momento, los estudiantes descartan que la figura dada sea una cometa por la forma que tiene [259] y por las propiedades que aparentemente no se cumplen [260 – 264]. Es la profesora quien solicita a los estudiantes que utilicen el software para no tomar decisiones solo visualmente. Algunas propiedades son descartadas o validadas únicamente con la información suministrada por el software, como por ejemplo que la figura tiene “dos pares de lados adyacentes congruentes” y “dos pares de lados adyacentes no congruentes” [279-283]. Otras propiedades, generan argumentos que no se basan en lo visual.

Dos de estos argumentos son dados por Saúl. El primer argumento, tienen como *aserción* que ninguna diagonal biseca a la otra, solo se intersecan [287]. Como *dato* la representación de la figura construida con el programa de geometría dinámica [277] y la posición del punto de intersección en la diagonal, y como *garantía* la definición de bisecar, pues Saúl indica que las diagonales no se están intersecando en el punto medio [289]. El segundo argumento tiene como *aserción* que un ángulo es agudo y el otro obtuso [295], como *dato* la figura y como *garantía* implícita la definición de ángulo obtuso y ángulo agudo. La aserción de este argumento se convierte en los *datos* de un tercer argumento que tiene como *aserción* la no congruencia de ángulos opuestos congruentes y como *garantía* implícita la definición de congruencia [292]. Los tres argumentos son *deductivos teóricos*, el primero *explícito* y los otros dos *implícitos*. Finalmente, Saúl, Noé y Armando construyen colectivamente un argumento con el que concluyen que los triángulos LBA y BAH son isósceles (*aserción*) porque dos lados miden igual y uno no (*garantía*). En este caso la *garantía* es la definición personal de Armando de triángulo isósceles, mientras que los *datos* son la medida de los lados que ellos encontraron con el programa (argumento *deductivo teórico explícito).*

4.4.2. ¿POR QUÉ UN ROMBO NO ES UNA COMETA?

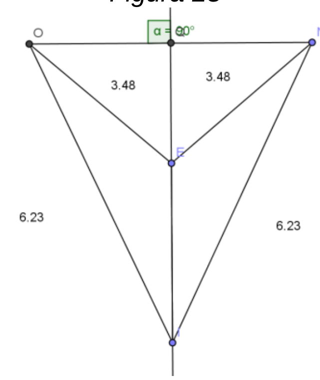
La segunda figura que se presenta el grupo es un rombo, cosa que Saúl declara basado en lo que ve. A partir de las medidas que tomaron de los lados y las diagonales de la figura, los grupos establecen que el cuadrilátero tienen “dos pares de lados adyacentes congruentes” [328, 331], “diagonales perpendiculares” [335] y que “las diagonales forman triángulos isósceles” [339]. Saúl explica que la propiedad “solo una diagonal biseca a la otra” no se cumple porque las dos diagonales se bisecan [333].

Los estudiantes iban aceptando o descartando las propiedades aceptadas para la cometa, porque recurrían a las medidas tomadas con GeoGebra, por lo que no produjeron ningún argumento. Concluyeron que la propiedad “solo una diagonal biseca a la otra” y “un par de ángulos opuestos congruentes” no se cumplen en el rombo.

4.4.3. ¿POR QUÉ UN BUMERÁN NO ES UNA COMETA?

La última figura que se muestra al grupo era un bumerán, es decir, una cometa no convexa. Después de tomar medidas, Armando indica que el cuadrilátero tiene dos pares de lados adyacentes congruentes “porque [dos lados] miden lo mismo [346]”y aclara que $\overline{OE} \cong \overline{EM}$ y $\overline{OI} \cong \overline{IM}$ [348]. La profesora les recuerda a los estudiantes que una diagonal es un segmento que une a vértices no consecutivos del polígono [351], a partir de los cual Saúl y Andrea determinan que las diagonales del cuadrilátero son $\overline{EI}$ y $\overline{ON}$.

Figura 28



354. Profesora: ON sería la otra diagonal. Listo, ¿esas diagonales se bisecan?

355. Varios: No.

356. Andrea: No, porque no se intersecan.

357. Profesora: ¿Diagonales perpendiculares?

358. Armando: Pues si las siguiéramos sí, pero…

359. Profesora: Listo. Entonces efectivamente él me dice si las siguiéramos, es decir, si estuviéramos hablando de la recta que contiene al segmento, serían perpendiculares. ¿Y cómo sabes eso?

360. Armando: Pues porque forman 90 grados.

En este último episodio se evidencian dos argumentos *teóricos deductivos explícitos*. El primero tiene como *dato* que las diagonales de la figura no se intersecan [355], como *garantía* explicita la definición de bisecar [356] y como *aserción* que las diagonales no se bisecan [354]. El segundo argumento tiene como *datos* el bumerán con las construcciones que los estudiantes le añadieron: el $\overline{ON}$ y la $\overleftrightarrow{EI}$. La *garantía* es la definición de perpendicularidad y la *aserción* que las rectas que contienen las diagonales son perpendiculares 360].

En este episodio es destacable el uso de la geometría dinámica, pues es lo que representan lo que los lleva a plantear que aunque las diagonales no se intersecan, las rectas que contienen a dichas diagonales son perpendiculares.

4.5. SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS ENCONTRADOS

4.5.1. ACERCA DEL COMPORTAMIENTO ARGUMENTAL

A continuación se muestra la ubicación de cada uno de los argumentos que se identificaron en la transcripción de la sesión analizada y el tipo de argumento

(Tabla 1, 2, 3 y 4). Dado que para el análisis de datos se realizaron tres transcripciones, una para cada grupo y otra para la socialización, en las tablas se identifica con T1 la transcripción del Grupo 1, con T2 la del Grupo 2 y con T3 la que corresponde a la puesta en común. En los argumentos que se formularon en la puesta en común se especifica el grupo que los formuló cuando el respectivo argumento fue construido por uno o más integrantes de un mismo grupo (G1: Grupo 1 y G2: Grupo2). Los argumentos que no cuentan con esa convención fueron construidos conjuntamente por integrantes de ambos grupos.

Tabla 3: ***Argumentos durante la Etapa 1***

	Deductivo				Inductivo			
	Teórico		Empírico		Teórico		Empírico	
	Implícito	Explícito	Implícito	Explícito	Implícito	Explícito	Implícito	Explícito
Grupo 1	T1[28,29]	T1[30-34]	T1[28-29,45]	T1[170]			T1[138]	T1[109-113]
	T1[90]	T1[90-93]						T1[182-189]
	T1[174_176] T1[176] T1[176] T1[176]	T1[158-170] T1[163,170] T1[164,167,168,170]						
		T1[174,176] T1[182-189] T1 [194]						
Grupo 2	T2[20-21] T2[41,43]	T2[25-34] T2[63-66] T2[35-40]		T2[87,92] T2[80-84]			T2[4-6] T2[68-78]	
Puesta en Común	T3 [78] G2 T3[78]G2	T3[48,54] G2						

Tabla 4: ***Argumentos durante la Etapa 2***

	Deductivo				Inductivo			
	Teórico		Empírico		Teórico		Empírico	
	Implícito	Explícito	Implícito	Explícito	Implícito	Explícito	Implícito	Explícito
Grupo 1	T1[269]	T1[284]	T1[309]	T1[305]				
			T1 [361]	T1[368]				
Grupo 2	T2[106]	T2[106]	T2[136-139] T2 [140, 143] T2 [140, 143]	T2[106] T2[108] T2 [119]				
Puesta en Común	T3[132]G2 T3[132]G2 T3[136]G1	T3 [140] G1 T3 [140, 142]						

Tabla 5: ***Argumentos durante la Etapa 3***

	Deductivo				Inductivo				Abductivo
	Teórico		Empírico		Teórico		Empírico		Teórico
	Implícito	Explícito	Implícito	Explícito	Implícito	Explícito	Implícito	Explícito	Implícito
Grupo 1	T1 [394] T1[399] T1[399] T1[409] T1[417-420] T1[466] T1[466] T1[466] T1[466] T1[515] T1[515]	T1[421-423] T1 [417-428] T1[515] T1[518-522]	T1[396]						T1[506]
Grupo 2	T2 [170-179] T2[272-274] T2 [295-299]	T2[170-179] T2 [295-299 T2 [283] T2 [293] T2[312-314]	T2 [326] T2 [340-341]			T2[190-210]			
Puesta en Común	T3[185]G2 T3[185,186]G2 T3[185,186]G2 T3[216]G2 T3[245]G2 T3[241]G2	T3[179-185]G2 T3[185,186]G2 T3[211]G2 T3[211]G2 T3[211]G2					T3[216]G2		

Tabla 6: ***Argumentos durante la etapa IV***

	Deductivo				Inductivo			
	Teórico		Empírico		Teórico		Empírico	
	Implícito	Explícito	Implícito	Explícito	Implícito	Explícito	Implícito	Explícito
Puesta en Común	T3[295]G1 T3[292]G1 T3 [354-356]G2 T3[360]G2	T3[277,287-289]G1						

La cantidad de argumentos que se suscitaron en cada etapa, por cada grupo, se muestra en las siguientes tablas.

Tabla 7: ***Argumentos producidos cuando los estudiantes descubren propiedades (Etapa 1)***

	Grupo 1		Grupo 2		Socialización		Total
	Implícito	Explícito	Implícito	Explícito	Implícito	Explícito	
Deductivo teórico	6	8	2	3	2	1	22
Deductivo empírico	1	1		2			4
Inductivo teórico							
Inductivo empírico	1	2	2				5
Abductivo teórico							
Abductivo empírico							
Total	8	11	4	5	2	1	31

Tabla 8: ***Argumentos producidos cuando los estudiantes determinan conjuntos de propiedades que no definen la figura (Etapa 2)***

	Grupo 1		Grupo 2		Socialización		Total
	Implícito	Explícito	Implícito	Explícito	Implícito	Explícito	
Deductivo teórico	1	1	1	1	3	2	9
Deductivo empírico	2	2	3	3			10
Inductivo teórico							
Inductivo empírico							
Abductivo teórico							
Abductivo empírico							
Total	3	3	4	4	3	2	19

Tabla 9: ***Argumentos producidos cuando los estudiantes determinan conjuntos de propiedades que definen la figura (Etapa 3)***

	Grupo 1		Grupo 2		Socialización		
	Implícito	Explícito	Implícito	Explícito	Implícito	Explícito	Total
Deductivo teórico	11	4	3	5	6	5	34
Deductivo empírico	1		2				3
Inductivo teórico				1			1
Inductivo empírico					1		1
Abductivo teórico	1						1
Abductivo empírico							
Total	13	4	5	6	7	5	40

Tabla 10: ***Argumentos producidos cuando los estudiantes determinan si una figura es una cometa (Etapa 4)***

	Explícito	Implícito	Total
Deductivo teórico	4	1	5
Deductivo empírico			0
Inductivo teórico			0
Inductivo empírico			0
Abductivo teórico			0
Abductivo empírico			0
Total	4	1	5

4.5.2. ACERCA DEL COMPORTAMIENTO RACIONAL

Las interacciones en las cuales se encontraron evidencias de cada uno de los aspectos del comportamiento racional se muestran en la siguiente tabla. Es importante recordar que en la Etapa IV no se encontraron evidencias de este comportamiento.

Tabla 12: Evidencias del comportamiento racional durante la Etapa 1

	Epistémico	**Teleológico**	**Comunicativo**
Grupo 1	T1[2,45] T1 {30} T1[109] T1[162]	T1[2,45] T1 [49-50] T1[163-174] T1[191-192] T1[201-206]	T1[55-75] T1[114,126,142] T1[147-150]
Grupo 2	T2[78] T2[93]	T2[9] T2[80] T2[93]	T2[6] T2[46-54]
Puesta en común	T3[52,54] G 2 T3 [78] G2		T3[50,62] G 2 T3[82] G1

Tabla 13: Evidencias del comportamiento racional durante la Etapa 2

	Epistémico	**Teleológico**	**Comunicativo**
Grupo 1	T1[265,267] T1[284]	T1[265,267] T1 [303,305] T1 [346]	T1 [356]
Grupo 2	T2 [119]	T2[102-108] T2 [119]	
Puesta en común		T3[125] G 2	

Tabla 14: Evidencias del comportamiento racional durante la Etapa 3

	Epistémico	**Teleológico**	**Comunicativo**
Grupo 1	T1[464]	T1[482]	T1[434-454]
	T1[466]	T1 [516]	T1[525]
	T1[482]		
Grupo 2	T2[211-302]	T2[211-302]	T2[301]

4.5.3. ACERCA DEL USO DE GEOMETRÍA DINÁMICA

El programa de geometría dinámica les permitió a los estudiantes de ambos grupos detectar invariantes de la figura, establecer propiedades de esta, y comprobar y refutar conjeturas. No obstante, la forma como utilizaron el programa fue diferente. A continuación se muestra una caracterización del manejo del software por parte de cada uno de los grupos.

Grupo 1:

En este grupo primó el uso de la función arrastre (sin medida) para descubrir propiedades de la figura y para validar conjeturas respecto a la misma. Los estudiantes dedujeron propiedades a partir de lo que veían y, solamente bajo la insistencia de la profesora, tomaron medidas o intentaron construir un contraejemplo utilizando el programa. La geometría dinámica también les permitió construir elementos adicionales de la figura (las diagonales) que permitieron confirmar propiedades que imaginaron y a su vez, descubrir nuevas propiedades. En este grupo de estudiantes se evidenció el deseo de justificar teóricamente lo que observaban. Sin embargo, preferían usar el lápiz y papel para hacer sus ilustraciones.

Grupo 2:
Los estudiantes utilizaron la función arrastre conjuntamente con las herramientas de medición de ángulos y segmentos que ofrece el software de geometría dinámica. Fue así como este grupo de estudiantes determinaron los datos para la mayoría de sus argumentos. Se evidenció también un buen manejo del programa, puesto que para comprobar o descartar hipótesis, realizaron construcciones auxiliares, como construir las rectas que contienen a los lados opuestos de la figura para determinar si son paralelas, o construir la bisectriz de un ángulo para evidenciar si coincidía con la diagonal del cuadrilátero, para establecer si esta bisecaba al ángulo.

5. CONCLUSIONES

5.1. ACERCA DEL COMPORTAMIENTO ARGUMENTAL DE LOS ESTUDIANTES

Teniendo en cuenta los datos de las Tablas 8, 9, 10 y 11, se observa que la mayor cantidad de argumentos fueron formulados durante la Etapa 3, en la cual los estudiantes tenían que proponer y justificar definiciones para la cometa (17 argumentos del Grupo 1, 11 del Grupo y 12 argumentos durante la socialización de los resultados), y durante la Etapa 1, en la cual los estudiantes debían descubrir propiedades de la figura a partir de la exploración con un programa de geometría dinámica (19 argumentos del Grupo 1, 9 argumentos del Grupo 2, y 3 argumentos durante la socialización de resultados).

Durante la Etapa 1, los argumentos proferidos por el Grupo 1 se realizaron con los siguientes propósitos: establecer las propiedades de la figura, justificar los resultados obtenidos tomando con base el sistema teórico de referencia, realizar generalizaciones o extraer información de la figura. Una de las razones por la cual la mayoría de los argumentos de este grupo fueron de tipo teórico deductivo fue que, durante la etapa de exploración, ellos no tomaron medidas. Esto ocasionó que, ante la norma establecida en clase de justificar resultados, recurrieran para tal fin al uso de elementos teóricos. En el Grupo 2 también primaron los argumentos deductivos teóricos durante la Etapa 1. Los argumentos surgieron con la intención de comunicar los resultados, que obtenían con el programa de geometría dinámica, de manera más general. Por ejemplo, si al tomar la medida de los ángulos observaban que esta era de 90, entonces inferían que los triángulos formados por las diagonales eran rectángulos.

El propósito que tenía cada grupo para utilizar el software de geometría dinámica afectó la naturaleza de sus argumentos. El Grupo 1 lo utilizó para construir las diagonales y para arrastrar la figura, con la intención de obtener información visualmente, que luego trataban de justificar teóricamente. Sin embargo, el manejo que tenían del sistema teórico no les permitió hacer argumentos cuyas garantías siempre fueran teóricas y a veces recurrían a lo que veían en la pantalla para justificar sus conclusiones o inventaban teoremas. Por el contrario, el Grupo 2 utilizó el programa para verificar las propiedades que visualizaban y así obtener certeza de la validez de ellas.

En la Etapa 2, los estudiantes debían determinar conjuntos de propiedades que no definieran la figura. El Grupo 1 usó como garantía para la mayoría de sus argumentos la figura que construyeron en lápiz y papel como contraejemplo, por lo cual casi todos fueron de tipo empírico. La manera de proceder para construir un contraejemplo, fue primero asegurar que las propiedades que escogían para la figura se dieran (por ejemplo, diagonales perpendiculares) y a partir de ellas generaban el cuadrilátero, siempre guiados por el convencimiento de que el rombo era el contraejemplo prototípico. Por ejemplo, para explicar porque las propiedades "diagonales perpendiculares" y "una diagonal forma triángulos isósceles" no define la figura, trazaron los dos segmentos perpendiculares, de tal forma que uno bisecará al otro, y escogieron convenientemente el vértice faltante para que el resultado fuera un rombo.

269. Saúl: Pues no cumple las propiedades de la figura porque en esto podría dar un rombo. No dicen que no sean congruentes. Entonces digamos uno puede poner que los triángulos isósceles que forman la figura sí sean congruentes.

En cuanto al Grupo 2, en ocasiones siguió el mismo proceso que el Grupo 1, usando indistintamente geometría dinámica o lápiz y papel, pero en ocasiones procedían de otra forma. Los estudiantes predecían que una figura era contraejemplo, la representaban y mostraban que las propiedades que habían escogido se cumplían en dicha figura. Por ejemplo, para demostrar que la propiedad "dos pares de lados adyacentes congruentes" no define cometa, representaron un cuadrado y mostraron que cumplía la propiedad mencionada.

Para entender la diferencia desde la lógica de la manera de proceder para producir el contraejemplo, siendo las definiciones bicondicionales, partían inconscientemente de la condicional $q \rightarrow p$, donde q es "cumplimento de propiedades escogidas" y p es "ser cometa". El propósito de ambos grupos era mostrar, sin darse cuenta, que esta condicional no era válida. Teniendo en cuenta que la negación de $q \rightarrow p$ es la conjunción $q \wedge \sim p$, podemos describir la diferencia entre la forma de proceder de cada grupo. Lo que hizo el Grupo 1 fue tomar q como verdadero y mostrar que p podía ser falso. En cambio, el proceso del Grupo 2 fue asegurar $\sim p$ y mostrar que se daba q.

En la Etapa 3, los estudiantes debían proponer una posible definición de cometa y justificar que lo era. La naturaleza de la actividad propuesta propiciaba argumentos de tipo deductivo teórico. Varios de los argumentos formulados por los estudiantes de ambos grupos eran una cadena de argumentos deductivos, en los cuales la aserción de un argumento se convertía en los datos para el siguiente. Sorprendentemente, contrario al tipo de argumentos que dieron en la Etapa 1, en esta etapa la mayoría de los argumentos del Grupo 1 fueron implícitos. Esto muestra que los estudiantes no sienten la necesidad de explícitamente proveer la garantía que están usando. Esto también se evidenció en su reporte escrito. La coherencia entre los datos y la aserción nos llevó a inferir que posiblemente sí estaban pensando en la garantía adecuada. Aunque la cantidad de argumentos que formuló el Grupo 2 en esta etapa fue mucho menor, la mayoría eran deductivos teóricos explícitos.

La socialización de los resultados obtenidos en la Etapa 1 se centró en la enunciación de las propiedades de la cometa que cada grupo encontró. Los argumentos que dieron los estudiantes en ese momento fueron formulados por algunos integrantes del Grupo 2, quienes, de forma autónoma, vieron la necesidad de justificar el procedimiento que utilizaron para determinar las propiedades. En la Etapa 2, la socialización se centró en mostrar los contraejemplos que construyó cada grupo para descartar conjuntos de propiedades como definición de la cometa. Los cinco argumentos que surgen son formulados por Martín (del Grupo 2) y Saúl (del Grupo 1), a raíz de información que provee Saúl respecto a los contraejemplos. Los argumentos surgieron porque Martín decidió justificar lo que decía Saúl. En la socialización de la Etapa 3 se produjeron más argumentos que en las previas socializaciones, porque se exigía justificar las definiciones que proponían para la cometa. La mayoría de los argumentos eran relatos de lo que ya habían producido cuando trabajaron con sus respectivos grupos, y por ello implícitos pues no mencionaban las garantías. Sin embargo, los narraban de forma continua lo cual demuestra que sentían seguridad de lo que decían.

Un hecho destacable respecto a los argumentos de los estudiantes es el uso de la contrarrecíproca (en siete argumentos), sin que ello haya sido objeto de enseñanza. Un ejemplo del uso de la contrarrecíproca fue cuando Noé intentó justificar la siguiente afirmación: *"Si las diagonales de un cuadrilátero no forman triángulos equiláteros entonces la figura no es un rombo".* Para ello, construyó una cadena de argumentos tomando como dato inicial que la figura era un rombo y de manera deductiva aseguró que los triángulos determinados por la diagonal eran equiláteros. Aunque la afirmación no siempre se cumple, Noé logra su objetivo usando como garantía una regla inventada que en ocasiones no es válida.

Los resultados anteriores nos permiten concluir que no se logró construir la cultura de siempre formular argumentos deductivos explícitos. Tal vez es un proceso que requiere más tiempo. Sin embargo, existen tres evidencias que permiten afirmar que los estudiantes comprendieron la importancia de argumentar sus resultados. La primera es que autónomamente los estudiantes formulaban argumentos, sin que la profesora interviniera, cuando interactuaban entre ellos. La segunda, la reformulación de argumentos informales que hacían los estudiantes en un argumento formal cuando la profesora solicitaba la justificación. La tercera, la predominancia de argumentos deductivos teóricos en sus intervenciones, aunque fueran implícitos.

Se considera que posiblemente la necesidad que sintieron los estudiantes de validar sus afirmaciones se debe al tipo de tarea que realizaron durante el experimento de enseñanza y la insistencia de la profesora de argumentar la validez de sus conjeturas. De acuerdo con las conclusiones que se han presentado anteriormente, se concluye que posiblemente los estudiantes ganaron confianza en su capacidad de argumentar matemáticamente.

5.2. ACERCA DEL COMPORTAMIENTO RACIONAL DE LOS ESTUDIANTES

En cuanto al aspecto *epistémico* creemos que la alta incidencia de este en la última sesión del experimento es resultado de la norma de clase según la cual todas las afirmaciones debían ser justificadas. Una evidencia que nos lleva a pensar esto es la siguiente intervención de Noé:

> *"…hay que explicar por qué no es un rombo, no es solo decir que no es un rombo [Noé. 162]"*

En la actividad que realizaron los estudiantes con el fin de construir una definición para la cometa se observaron evidencias del aspecto epistémico en situaciones que requirieron: 1) utilizar las definiciones de figuras geométricas para identificar las propiedades observados al arrastrar una figura; 2) evaluar la pertinencia de los elementos teóricos sugeridos como garantía en sus argumentos; 3) aceptar como válida la información que provee el software de geometría dinámica durante el proceso de exploración para validar otras propiedades; 4) fundamentar teóricamente, en la puesta en común, las estrategias de construcción utilizadas; 5) reconocer que un contraejemplo permite descartar una posible definición; 6) identificar en qué momentos de la demostración los pasos requeridos son análogos a unos ya realizados; 7) realizar un proceso abductivo con el propósito de buscar datos y garantías que permitan llegar a una aserción; y 8) preguntarse sobre el porqué de un resultado que va en contravía de lo que habían anticipado.

Respecto al aspecto *teleológico*, los planes y estrategias propuestos por los estudiantes se orientaron en dos direcciones: hacia la explicación de cómo proceder para descubrir o construir un contraejemplo y hacia la búsqueda de elementos teóricos que les permitiera justificar una conclusión. En el primer tipo de estrategias, se evidenciaron los siguientes planes: 1) arrastrar la figura con el fin de encontrar regularidades; 2) construir nuevos elementos asociados de la figura, como las diagonales; 3) tomar medidas de lados y ángulos de la figura; 4) arrastrar la figura con el propósito de convertirla en una figura conocida, como un rombo o un cuadrado. Los planes del segundo tipo fueron: 1) proponer condiciones que necesitaría cumplir la figura para que fuese una figura conocida (e.g. cuando el Grupo 1 establece que si los triángulos determinados por una diagonal fueran isósceles y congruentes entonces la figura sería un rombo); 2) proponer el uso de diferentes elementos teóricos como posibles garantías para justificar propiedades (e.g. enfocarse en la búsqueda de triángulos congruentes para justificar una propiedad); y 3) proponer la realización de construcciones auxiliares para verificar una conjetura (e.g. construir la bisectriz de un ángulo para determinar si la diagonal está contenida en ella).

Finalmente, en relación con el aspecto *comunicativo*, los estudiantes se preocuparon por expresar sus ideas utilizando adecuadamente el lenguaje matemático y evitando ambigüedades. Se evidencia este aspecto en momentos en los cuales: 1) identificaban situaciones en donde se hacia un uso erróneo del lenguaje, y corregían ya sea a sus compañeros o a ellos mismos; 2) ilustraban las estrategias utilizadas para cumplir la tarea de cada etapa cuando comunicaban sus resultados; 3) procuraban que la información reportada por escrito no fuese redundante; y 4) modificaban sus conjeturas cuando las comunicaban durante la socialización para que fueran más claras.

Haber encontrado evidencias del aspecto epistémico, teleológico y comunicativo nos permite afirmar que el comportamiento de los estudiantes en las actividades en los cuales el objetivo era definir, fue racional de acuerdo con los parámetros establecidos por Habermas.

5.3. ACERCA DEL USO DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA EN EL PROCESO DE APRENDER A DEFINIR

Respecto al uso de la geometría dinámica, esta se convirtió en herramienta para descubrir las propiedades de la figura, tarea difícil de realizar con el uso exclusivo de lápiz y papel. No obstante, cuando se les pidió a los estudiantes que determinaran conjuntos de propiedades de la figura que no la definían, predominó la representación de contraejemplos usando papel y lápiz. Esto posiblemente se debió a que era la primera vez que tenían a su disposición el programa de geometría dinámica. Dado el corto tiempo de intervención, los estudiantes no lograron ganar la suficiente habilidad en el manejo del programa ni en la interpretación de los resultados, lo cual evitó que esta se convirtiera en herramienta predominante para su trabajo. Creemos que el software les dio a los estudiantes la confianza que se necesita para comunicar a otros sus ideas, porque tenían evidencias para respaldarlas.

5.4. ACERCA DEL DISEÑO EXPERIMENTAL

El comportamiento racional y argumental de los estudiantes permite concluir que el haber participado en la construcción de definiciones equivalentes para diversas figuras geométricas incidió en su concepto de qué significa definir. Creemos que las actividades propuestas permitieron que los estudiantes comprendieran que una figura se puede definir de diferentes formas. Además, el hecho de que los estudiantes recurrieran al uso de contraejemplos es evidencia de que ellos comprendieron que la definición tiene como propósito no solamente identificar las figuras que son ejemplos de lo definido, sino también excluir aquellas que no lo son. Es decir, comprendieron que si se puede construir un contraejemplo, el conjunto de propiedades no puede ser una definición para la figura geométrica en cuestión. A su vez, los estudiantes se dieron cuenta que definir es realmente una actividad matemática.

Otro mensaje respecto a las definiciones que tal vez se logró con la propuesta es que un conjunto de propiedades de la figura se puede aceptar como definición si todas las demás propiedades se pueden deducir de ellas, tarea que realizaron en la última sesión. Para finalizar, queremos indicar que la intención que se tenía originalmente respecto a la argumentación se basaba en la suposición de que los estudiantes podrían justificar deductivamente la equivalencia de las definiciones, pero al avanzar en la implementación del diseño experimental nos dimos cuenta de que los estudiantes no tenían los conocimientos teóricos necesarios, ni la experiencia de la justificación de manera organizada y basada en la teoría que reportaban sus profesores. Esto conllevo a cambiar el tipo de tarea que se les proponía y a modificar nuestras expectativas.

5.5. CONCLUSIONES PERSONALES Y PREGUNTAS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

El poder realizar este trabajo de grado, con el apoyo del grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* ($\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$), nos permitió involucrarnos en una actividad de investigación en educación matemática, al llevar a cabo tareas como describir, interpretar y analizar las acciones de un grupo estudiantes, todo ello enmarcado en una teoría. Este proceso investigativo nos permitió darnos cuenta que, como docentes, debemos tener presente la complejidad de los procesos involucrados cuando los estudiantes resuelven una tarea en el aula de clase y ampliar nuestra mirada sobre la importancia de los argumentos de los estudiantes en la conceptualización de un objeto geométrico.

En el desarrollo del estudio surgieron preguntas, que aunque no apuntaban al objetivo de nuestra investigación, pueden ser de interés para futuras investigaciones. La primera de ellas surge a partir del comportamiento de Néstor, integrante del Grupo 1, durante la implementación del diseño experimental. Este estudiante asumió la tarea de reportar por escrito los resultados de las discusiones, pero no se involucró en ellas. Partiendo del hecho de que la realización de este reporte era una tarea dispendiosa para este estudiante, nos preguntamos si el asumir esta tarea afectó el desarrollo de su comportamiento argumental y racional. Por otra parte, en el análisis realizado encontramos que los estudiantes proponían, de forma espontánea, justificaciones basadas en la contrarrecíproca. Esto nos lleva a concluir que es un proceso que puede surgir de forma natural, pero vale la pena indagar por el tipo de tareas que favorecen el surgimiento de este tipo de demostraciones. Finalmente, al comparar el reporte escrito de los estudiantes con los argumentos que proferían durante sus discusiones, encontramos que el reporte proveía información insuficiente de la actividad realizada por los estudiantes. Esto nos lleva a preguntarnos si los reportes escritos, que por lo general se constituyen en uno de los instrumentos de evaluación recurrentes en las clases de matemáticas, son adecuados para analizar el aprendizaje de los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., & Robutti, O. (1998). Dragging in Cabri and modalities of transition form conjectures to proofs in geometry. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22th International Conference* (pp. 32–39). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

Aya, O., Echeverry, A., & Samper, C. (2014). Definición de altura de triángulo: ampliando el espacio de ejemplos con el entorno de geometría dinámica. *Tecné, Episteme Y Didaxis: TED.*, (35), 63–86.

Boero, P. (1999). Argumentación y Demostración. Una relación compleja, productiva e inevitable en las Matemáticas y la Educación Matemática. Retrieved from http://www.lettredelapreuve.lt/Newsletter/990708Theme/ES.html.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. In M. F. F. Pinto & y T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 179–205). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral*. Universitat Autònoma de Barcelona.

Chesler, J. S. U. (2012). Pre-service Secondary Mathematics Teachers Making Sense of Definitions of Functions. *Mathematics Teacher Education and Development*, *14*(1), 27–40.

De Villiers, M. (1994). Rol y función de una clasificación jerárquica de cuadriláteros. Retrieved from http://www.geometriadinamica.cl/postimg/clascuadv2.pdf

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the Anual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (2nd ed., pp. 248–255).

Douek, N. (2007). Some remarks about argumentation and proof. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 163–181). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Douek, N., & Scali, E. (2000). About argumentation and conceptualisation. In *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 249–256). Hiroshima: Nakahara, TadaoKoyama, Masataka.

Escudero, I., Gavilán, J., & Sánchez, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *17*(1), 7–32.

Furinghetti, F., & Paola, D. (2002). No TitleDefining within a dynamic geometry enviroment: notes from the classroom. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th European Conference on Mathematical Education* (p. pp 392–399). Norwich.

Govender, R. (2003). Constructive evaluation of definitions in a Sketchpad context. *Learning and Teaching Mathematics*, *9*, 29–32.

Herbst, P., Gonzalez, G., & Macke, M. (2005). How Can Geometry Students Understand What It Means to Define in Mathematics ? *The Mathematics Educator*, *15*(2), 17–24.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nasher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition : A research synthesis by the International Group for the psychology of mathematics education* (pp. 70–95). 70-95: cambridge U.P.

Hoyles, C., & Jones, K. (1998). Proof in Dynamic Geometry Contexts. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 121–128). Dordrecht: Kluwer.

Lavy, I. (2004). KINDS OF ARGUMENTS EMERGING WHILE EXPLORING IN A COMPUTERIZED ENVIRONMENT. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 185–192). Bergen: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Leikin, R., & Winicki-Landman, G. (2001). Defining as a Vehicle for Professional Development of Secondary School Mathematics Teachers. *Mathematics Education Research Journal*, *3*, 62–73.

Linchevski, L., Vinner, S., & Karsenty, R. (1992). To be or not to be minimal? Student teachers' views about definitions in geometry. In K. Graham (Ed.), *Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 48–55). Durham: University of New Hampshire.

Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar! In *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (pp. 46–95).

Molina, M., Castro, E., Molina, J., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de Las Ciencias*, *29*(1), 075–088.

Olivero, F. (2003). *The Proving Process within a Dynamic Geometry Environment*. University of Bristol.

Ouvrier-buffet, C. (2004). CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL DEFINITIONS : AN EPISTEMOLOGICAL AND DIDACTICAL STUDY. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 473–480). Bergen.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., & Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial de profesores de matemáticas* (p. 363). Editorial Nomos.

Perry, P., Molina, Ó., Camargo, L., & Samper, C. (2011). Analyzing the proving activity of a group of three students. Retrieved from http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/Cerme7_WG1_Perry.pdf

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., & Molina, Ó. (2012). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. In *Geometría plana: un espacio de aprendizaje*. Universidad Pedagógica Nacional.

Sáenz-Ludlow, A., & Athanasopoulou, A. (2008). The GSP, as a technical-symbolic tool, mediating both geometric conceptualizations and communication. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education. Epistemology, history, classroom and culture* (pp. 195–214). The Netherlands: Sense Publishers.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learnig of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–80). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

ANEXOS

ANEXO I: SECUENCIA DIDÁCTICA

ACTIVIDAD 1: DEFINICIÓN DE TRIÁNGULO ISÓSCELES

Objetivo de aprendizaje

- Identificar las herramientas y las funciones de GeoGebra.
- Diferenciar los elementos de la definición de una figura geométrica y las propiedades que se deducen a partir de esta.
- Relacionar las construcciones en GeoGebra con las definiciones y las propiedades de una figura geométrica.
- Realizar una primera aproximación a la demostración.

Descripción de la actividad

1. ¿Qué es un triángulo isósceles?
____
____
____
____

2. Construye un triángulo isósceles y reporta los pasos de la construcción:
Paso 1: ____
Paso 2: ____
Paso 3: ____
Paso 4: ____
Paso 5: ____
Paso 6: ____

3. Explora algunas propiedades del triángulo isósceles y repórtalas en la siguiente tabla.

Qué hice para descubrir la propiedad	Que descubrí	Qué puedo afirmar

4. *Realiza la prueba de las propiedades de reportadas utilizando el siguiente formato*:

Propiedad: ____
____
____
__

Qué sé	Qué uso	Qué concluyo

ACTIVIDAD 2: REDEFINICIÓN DEL TRIÁNGULO ISÓSCELES

Objetivo de aprendizaje

- Reconocer las condiciones suficientes y necesarias para definir una figura geométrica.
- Relacionar las construcciones en GeoGebra con las definiciones y las propiedades de una figura geométrica.

Descripción de la actividad

1. ¿Es posible definir un triángulo isósceles como un triángulo en el cual una mediana es perpendicular a la base? Justifica tu respuesta.

Qué sé	**Qué uso**	**Qué concluyo**

2. Propón otras definiciones para el triángulo isósceles. Justifica cada una de ellas.

Definición 1:

Definición 2:

Definición 3:

Definición 4:

ACTIVIDAD 3: DESCUBRE EL TRIÁNGULO

Objetivo de aprendizaje

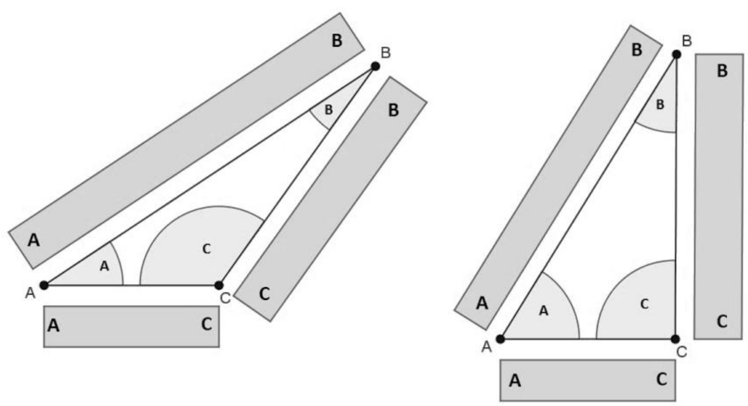
- Construir un sistema teórico local.
- Comprender los criterios de congruencia de triángulos.

Materiales

- Papel pergamino (10 hojas por grupo).
- Piezas en cartón paja para construir un triángulo isósceles (ángulos y lados).

Antes de la actividad

Antes de la clase, el profesor construye las piezas necesarias para formar dos triángulos escalenos (uno de ellos rectángulo). Para cada triángulo, las piezas son tres regletas cada una con la misma longitud de los lados del triángulo y tres moldes cuyos lados determinaban un ángulo congruente a cada uno de los ángulos del triángulo. Los extremos de cada regleta se marcan con los nombres de los respectivos vértices, y los moldes de los ángulos, con el nombre del ángulo al cual corresponden.



Descripción de la actividad

A cada grupo se le asigna un triángulo. En cada etapa, el profesor te hará entrega de por lo menos dos piezas del triángulo asignado. En grupo, determina cuántos triángulo se pueden construir con las piezas que entrega el profesor.

Piezas	Observaciones	Conclusiones
$\angle B$ y $\angle C$		
$\angle A$ y $\overline{BC}$		
$\overline{BC}, \overline{AC}$ y $\overline{BA}$		
$\angle A, \angle B$ y $\angle C$		

$\overline{BC}, \overline{BA}\ \ y\ \angle B$		
$\overline{BC}, \overline{CA}\ \ y\ \angle A$		
$\angle A, \angle C\ y\ \overline{BC}$		

ACTIVIDAD 4: DEFINICIÓN DE CUADRADO

Objetivos

- Diferenciar los elementos de la definición de una figura geométrica y las propiedades que se deducen a partir de esta.
- Relacionar las construcciones en GeoGebra con las definiciones y las propiedades de una figura geométrica.

Descripción de la actividad

1. ¿Qué es un cuadrado?
____
____
____
____

2. Construye un cuadrado y reporta los pasos de la construcción:

Paso 1: ____
Paso 2: ____
Paso 3: ____
Paso 4: ____
Paso 5: ____
Paso 6: ____

3. Compara la definición con la construcción que dio e indique si la definición es económica.
____
____
____
____
____
____

4. Explora algunas propiedades del cuadrado y repórtalas en la siguiente tabla.

Qué hice para descubrir la propiedad	Qué descubrí	Qué puedo afirmar

5. De acuerdo con la construcción realizada, realiza la demostración.

Demostración 1: *Si en □ABCD, ∠ADC y ∠DCB son rectos y* $\overline{AD} \cong \overline{CB} \cong \overline{DC}$ *entonces □ABCD es cuadrado.*

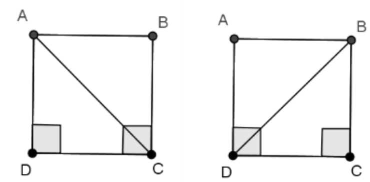
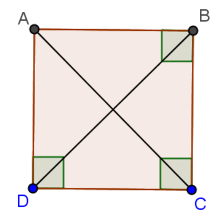


Figura 1 Figura 2

Qué sé	Qué uso	Qué concluyo
□ABCD	Construcción auxiliar	$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ diagonales de □ABCD
∠ADC y ∠DCB son rectos	Hecho geométrico perpendiculares paralelas	
	Teo. Paralelas alternos internos (PAI)	
		$\overline{AC} \cong \overline{AC}$
$\overline{AD} \cong \overline{CB}$		▵ADC ≅▵CBA
		$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ∠ADC ≅ ∠CBA
	Def. congruencia	m∠ADC=m ∠CBA
		m∠ADC=90
m∠ADC=m ∠CBA m∠ADC=90	Propiedad transitiva	
m ∠CBA=90	Def. de ángulo recto	
$\overline{DB}$		
		▵DAB ≅ ▵BCD
	Def. triángulos congruentes	
∠DCB es recto		
∠DAB ≅ ∠DCB		
		m ∠DAB =90
		∠DAB es recto

$\overline{AD} \cong \overline{CD} \cong \overline{BC}$ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	Propiedad transitiva	$\overline{AD} \cong \overline{CD} \cong \overline{BC} \cong \overline{AB}$
		□ABCD es un cuadrado

Demostración 1: *Si en □ABCD, ∠CBA, ∠ADC y ∠DCB son rectos y $\overline{CB} \cong \overline{DC}$ entonces □ABCD es cuadrado*



Qué sé	**Qué uso**	**Qué concluyo**
□ABCD	Construcción auxiliar	$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$
∠CBA, ∠ADC y ∠DCB son rectos	Hecho geométrico perpendiculares paralelas	
	Teorema Paralelas Alternos Internos (PAI)	
		∠BAC ≅ ∠ACD
		$\overline{AC} \cong \overline{AC}$
		△ADC ≅△CBA
		$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ $\overline{AD} \cong \overline{CB}$
$\overline{CB} \cong \overline{CD}$ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ $\overline{AD} \cong \overline{CB}$	Propiedad transitiva	
$\overline{DB}$		
	Criterio LLL	
		∠DAB ≅∠DCB
∠DCB es recto		
∠DAB ≅ ∠DCB		
	Propiedad transitiva	m ∠DAB =90
m ∠DAB =90		
	Def. de cuadrado	□ABCD es un cuadrado

ACTIVIDAD 5: REDEFINIR EL CUADRADO

Objetivo de aprendizaje

- Proponer definiciones alternativas para el rectángulo.

Descripción de la actividad

1. ¿Es posible definir el cuadrado como un cuadrilátero con tres ángulos rectos y dos lados congruentes? Realiza la construcción en GeoGebra y justifica tu respuesta.
2. Evalúa si las siguientes afirmaciones son definiciones para cuadrado:

- Cuadrilátero con 4 lados congruentes y 4 ángulos rectos
- Cuadrilátero con 3 ángulos rectos y dos lados congruentes
- Cuadrilátero con 3 lados congruentes y 2 ángulos rectos
- Cuadrilátero con 4 lados congruentes y un ángulo recto
- Cuadrilátero con diagonales perpendiculares y se bisecan
- Cuadrilátero con diagonales que se bisecan y son congruentes
- Cuadrilátero con diagonales perpendiculares, congruentes y se bisecan.

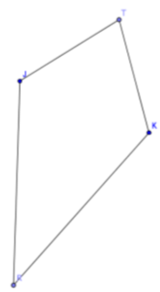
ACTIVIDAD FINAL: LA COMETA

Objetivos

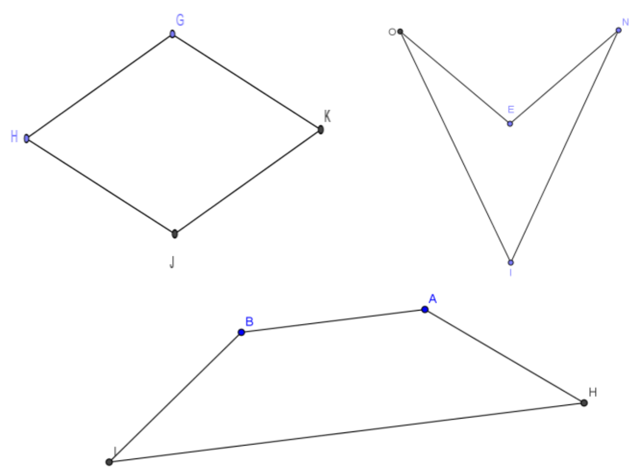
- Comprobar la conceptualización de los estudiantes en torno al proceso de definir en geometría.
- Definir una figura geométrica cuyas propiedades se desconocen.
- Clasificar una figura dentro de un conjunto de propiedades.

Descripción de la actividad

1. Escribe las propiedades de la figura (construcción dada en GeoGebra).



2. Determina conjunto de propiedades que no definen la figura. En cada caso, propón un contraejemplo.
3. Determina conjuntos de propiedades que definan la figura. Justifica tu respuesta.
4. Para cada una de las construcciones suministrada, determina si la figura es una cometa (construcciones dadas en GeoGebra).



ANEXO II: SISTEMA TEÓRICO LOCAL

Definición Segmentos congruentes
$\overline{AB} \cong \overline{DC}$ Si y sólo si $AB = DC$

Propiedad reflexiva de segmentos
Dado el $\overline{AB}$, se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{AB}$

Hecho Geométrico Suma de ángulos de un triángulo
En un triángulo la suma de la medida de sus lados es 180°.

Definición Punto Medio
Si M es punto medio de $\overline{AB}$ entonces M pertenece al segmento $\overline{AB}$ y $\overline{AM} \cong \overline{MB}$

Hecho Geométrico Punto Medio
Todo segmento tiene punto medio.

Definición Triángulos congruentes
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ si y sólo si

$$\begin{gathered}\overline{AB} \cong \overline{DE}\\ \overline{BC} \cong \overline{EF}\\ \overline{AC} \cong \overline{DF}\\ \angle A \cong \angle D\\ \angle B \cong \angle E\\ \angle C \cong \angle F\end{gathered}$$

Criterios de congruencia de triángulos
LLL (Lado, lado, lado)
LAL (Lado, ángulo, lado)
ALA (Ángulo, lado, ángulo)

Definición de rectas perpendiculares
Dos rectas que forman ángulos rectos son perpendiculares

Hecho Geométrico perpendiculares
Dada una recta *k* y un punto P, existe una recta que pasa por P y es perpendicular a *k.*

Definición Bisecar
Dos segmentos se bisecan si se intersecan en su punto medio

Definición Ángulos congruentes
$\angle ABC \cong \angle DEF$ si $m\angle ABC = m\angle DEF$.

Definición Bisectriz de un ángulo:

$\overrightarrow{AD}$ es bisectriz del $\angle$BAC si:

i) D pertenece al interior del $\angle$BAC

ii) $\angle$BAD $\cong\angle$DAC

Definición Recta perpendicular:

Una recta es perpendicular a otra si estas determinan un ángulo recto. (De manera análoga se puede definir recta perpendicular a un rayo, a un segmento, etc.)

Definición Ángulo recto

Un ángulo es recto si y sólo si su medida es 90.

Definición Mediana de un triángulo

Es un segmento con un extremo un vértice y otro extremo en el punto medio del lado opuesto.

Definición Mediatriz de un segmento

Es una recta perpendicular al segmento por el punto medio del mismo.

Definición 1 triángulo isósceles

Un triángulo es isósceles si y solo dos de sus lados son congruentes.

Definición 2 triángulo isósceles

Un triángulo es isósceles si y solo si tiene dos ángulos congruentes.

Definición 3 triángulo isósceles

Un triángulo es isósceles si y solo si la bisectriz de uno de sus ángulos es perpendicular al lado opuesto.

Teorema triángulo isósceles

Si un triángulo es isósceles entonces los ángulos opuestos a sus lados congruentes son congruentes.

Definición 1 de cuadrado

Un cuadrilátero es un cuadrado si y sólo si todos sus ángulos son rectos y todos sus lados son congruentes.

Definición 2 de cuadrado

Un cuadrilátero es un cuadrado si y sólo tiene tres lados congruentes y dos ángulos rectos.

Definición 3 de cuadrado

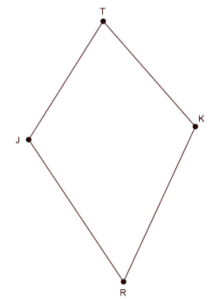
Un cuadrilátero es un cuadrado si y sólo tiene dos lados congruentes y tres ángulos rectos.

Definición 4 de cuadrado

Un cuadrilátero es un cuadrado si y sólo sus diagonales son congruentes, se bisecan y son perpendiculares.

ANEXO III: TRANSCRIPCIÓN GRUPO 1 (NOÉ, SAÚL Y NÉSTOR)

1. Profesora: Lo primero es que en sus pantallas aparece una construcción, ¿cierto? Lo primero que quiero que ustedes hagan es que exploren con la figura y me digan que propiedades tiene esa figura. ¿Listo? Entonces empecemos. Me dicen todas las propiedades que tenga es figura y las van anotando



2. Noé: [Arrastra el punto T] Se mantiene… Es un rombo que se mantiene, con dos lados congruentes… Tiene cuatro lados congruentes…

3. Profesora: Empiecen a escribir todo eso que ustedes me están diciendo.

4. Noé: Escriba [Dirigiéndose a Néstor.]

5. Saúl: [Dirigiéndose a Néstor.] A ver. Es un rombo. [Escribe "rombo"].

6. Noé:: [Arrastra el punto J] Si lo movemos… Si lo movemos de uno de sus… de sus…

7. Saúl: No. Si lo movemos de uno del punto J, porque si lo movemos de este punto [señala el punto T] se…

8. Noé: ¡Ay! Vea que cambia la medida.

9. Saúl: ¿Cómo? ¿Cómo?

10. Noé: Si trazamos… [Arrastra el punto T.] Vea ahí cambia la medida.

11. Saúl: [Dirigiéndose a Néstor.] Ponga que…

12. Noé: [Arrastrando el punto J] Si movemos el punto J …

13. Saúl: No.

14. Noé: No, ¿qué?

15. Saúl: No, que de cualquier punto que lo movamos siempre se va a mantener un rombo… No de iguales medidas pero siempre va a ser un rombo.

16. Noé: [Interrumpiendo a Saúl.] Es que no siempre va a ser un rombo… Porque digamos cuando… [Arrastra el punto J]

17. Profesora: [Saúl mira a la profesora pidiendo aprobación.] Ustedes tres. ¿Por qué crees que es un rombo.

18. Noé: [Arrastra el punto J.] Pues es que… No, no, no. Espere. Se mantiene igual.

19. Saúl: [Dirigiéndose a Néstor.] Ponga que de cualquier punto que lo movamos…

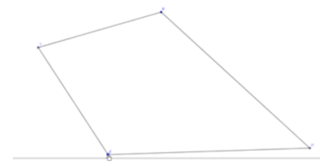
20. Noé: [Dirigiéndose a la profesora.] Oye, ¿puedo rayar en el tablero?

21. Saúl: … se va a mantener la misma figura. [Néstor escribe.]

22. Profesora: Sí. Puedes rayar en el tablero si quieres. No hay ningún problema.

23. Noé: [Se dirige al tablero y dibuja la siguiente figura.]

24. Saúl: [Continúa arrastrando el punto J, tratando de que el ángulo TJR sea recto.] No sé. Ponga que ninguno de sus ángulos es de noventa grados.



25. Noé: Si es un rombo. [Borra la figura que había realizado en el tablero y vuelve al puesto.]

26. Saúl: [Dirigiéndose a Néstor.] O sea, ponga que ninguno de sus ángulos es de noventa grados.

27. Noé: ¿Es que sabe qué es lo que no me convence?

28. Saúl: Que para que sea un rombo tendría que ser esto [señala el $\overline{JT}$] igual a esto [señala el $\overline{JR}$].

29. Noé: Sí, porque si… vea… ¿Se acuerda lo del cuadrado? Cuando un cuadrado se estira forma un rombo. Lo cual no hace esto [señala la pantalla] porque estos dos lados [señala al $\overline{JT}$ y al $\overline{KT}$] no son iguales a estos dos lados [señala al $\overline{RJ}$ y al $\overline{\mathrm{RK}}$]. El lado JR y KR no es igual a JT… Espere, espere, espere…

30. Saúl: Un triángulo isósceles es el que tiene dos lados iguales, ¿verdad?

31. Noé: Aja.

32. Saúl: Entonces ahí hay dos triángulos isósceles.

33. Noé: Sí. Acá se forma uno [señala al $\overline{RJ}$ y al $\overline{RK}$ varias veces seguidas].

34. Saúl: Y este es otro [señala al $\overline{JT}$ y al $\overline{KT}$] .

35. Noé: Sí. Cuando se traza un segmento se forman dos [triángulos isósceles].

36. Saúl: [Dirigiéndose a Néstor.] Ponga que cuando se traza un segmento del punto G [refiriéndose a J] al K se forman…

37. Noé: [Dirigiéndose a la profesora.] Pero, ¿podemos sacar esas conclusiones?

38. Profesora: Por supuesto.

39. Noé: ¿O sólo es acerca de la figura?

40. Profesora: No. Es acerca de la figura y de todas las partes que pueden llegar a componerla. Lo mismo que la vez pasada.

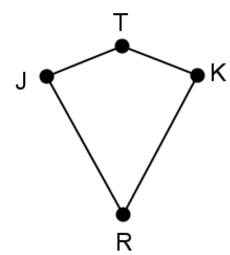
41. Noé: ¡Ah! Bueno.

42. Saúl: [Dirigiéndose a Néstor.] Cuando se traza un segmento del punto G al punto K…

43. Noé: J…

44. Saúl: … J y K… se forman dos triángulos isósceles. [Néstor escribe.]

45. Noé: De todos modos la figura se mantiene. O sea, eso es lo importante. Pero es que si fuera un [arrastra el punto K] tendría que ser como un cuadrado estirado [arrastra el punto R]… Y es que acá [señala la figura] no se forma como un cuadrado. ¿Ve? [Dirigiéndose a la profesora] ¿Podemos empezar a hacer… digamos como a empezar a trazar diagonales?



46. Profesora: Por supuesto.

47. Saúl: Trace esta [señala diagonal JT].

48. Noé: Empecemos…

49. Saúl: Trácele este segmento [$\overline{JK}$] y trace una perpendicular [con el dedo indica una perpendicular a $\overline{JK}$ que coincide con la diagonal $\overline{TR}$]. Entonces aquí salen dos triángulos… salen tres triángulos rectángulos

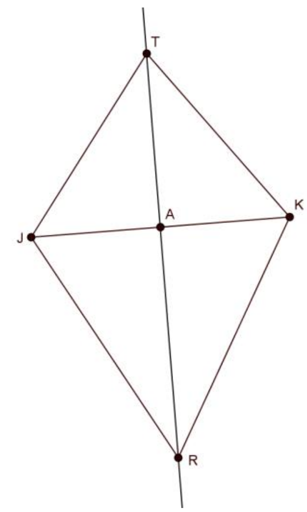
50. Noé: [Para construir la diagonal, selecciona la opción recta y da clic sobre el punto J]. Salen cuatro triángulos rectángulos. Sí, porque si se divide en la mitad… Espere [no ha dado clic en el punto K, por lo cual no ha podido construir $\overleftrightarrow{JK}$.] Tracemos más bien un segmento.

51. Saúl: Ahí le saca la bisectriz.

52. Noé: Que sea perpendicular a la base. A la base que está formando dentro de la figura [Cambia de herramienta de construcción. Selecciona la opción segmento para construir $\overline{JK}$].

53. Saúl: Primero saca el punto medio. Después, traza la perpendicular.

54. Noé: [Construye $\overline{JK}$ y su punto medio. Luego construye $\overleftrightarrow{TR}$.]



55. Saúl: [Dirigiéndose a Néstor.] Ponga que al trazar…

56. Noé: Espere, espere, espere. Ponga que se trazó un segmento en la mitad de la gráfica.

57. Saúl: No, es que esa no es la mitad [señala la gráfica.]

58. Noé: Digamos: se trazó un segmento del punto J al…

59. Saúl: ¡Ah! No, mentiras. Es del punto J al punto K.

60. Noé: Ponga que se trazó un segmento del punto J al punto K …

61. Profesora: ¿Recuerdas cómo se llaman esos segmentos? Que los hemos manejado en el cuadrado, sobre todo.

62. Noé: ¡Eh!... Se me olvidó…

63. Profesora: Diagonales.

64. Noé: ¡Ah! Sí. Diagonales.

65. Saúl: [Lee lo que ha escrito Néstor.] Se traza un segmento… entre paréntesis una diagonal… Ponga que a esa diagonal se le trazó…

66. Noé: Se le halló el punto medio.

67. Saúl: [Dictándole a Néstor.] Se le halló el punto medio y sobre el punto medio se trazó la perpendicular.

68. Noé: Después se trazó la perpendicular a la base [señala $\overleftrightarrow{TR}$]. ¿Sí? ¿A la base? Porque si se traza…

69. Saúl: Se traza una perpendicular a la diagonal.

70. Noé:: O sea. No me hago entender. A lo que me refiero con base, me refiero a esta línea también [señala diagonal $\overline{JK}$] pero diciéndolo como… como… es que toda línea es perpendicular cuando hay… es perpendicular a la base… O sea…

71. Saúl: No, pues ponga que es perpendicular con la diagonal.

72. Noé: Ponga que forma dos ángulos rectos… cuatro… No…

73. Saúl: ¿Sabe también que podríamos poner?

74. Noé: Cuando se traza la perpendicular se están formando ángulos rectos…

75. Saúl: … y cuatro triángulos rectángulos. Biseca…

76. Noé: Y biseca todos los ángulos.

77. Saúl: Y biseca todos los ángulos. ¿No? ¡Ah! Sí. Si, si, si.

78. Noé: Sí. [Néstor termina de escribir.] […] [Arrastra el punto R] ¿Usted se acuerda cómo se llamaban?

79. Saúl: ¿Qué?

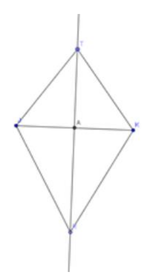
80. Noé: Es que de esta forma se ve… cómo fue que dijo… se acuerda una figura… [dirigiéndose a la profesora] Oye, ¿me prestas otra vez el marcador?

81. Profesora: No me lo has devuelto.

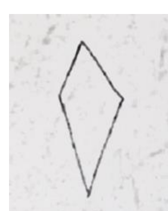
82. Noé: ¿Dónde está?

83. Saúl: Lo dejó allá.

84. Noé: Vea esa figura.



Esa figura está más o menos así y así.



Entonces daría lo mismo que una figura como algo así, pero más formada. ¿Sí me hago entender?

85. Saúl: ¿Por qué?

86. Noé:: Se acuerda… es que no me acuerdo cómo es que nos dijo el profesor [borra la segunda figura del tablero]

87. Néstor: Era algo así, ¿cierto? [Realiza un bosquejo de un trapecio isósceles en una hoja.]

88. Saúl: No, era algo así. Eran dos paralelas. [Dibuja un bosquejo de un paralelogramo en una hoja.]

89. Noé: [Regresa al puesto.]

90. Saúl: También se puede demostrar que tiene… O sea, vea: estos dos ángulos [$\angle JTK$ y $\angle JRK$] son iguales. Igual que estos dos [$\angle TJR$y $\angle RKT$]. Es que cómo los biseca, entonces estos dos son iguales [$\angle JTK$y $\angle JRK$] y estos también [$\angle TJR$y $\angle RKT$].

91. Noé: Podríamos decir que los ángulos opuestos al vértice van a ser congruentes. Pongamos eso.

92. Profesora: ¿Cómo tienes certeza de eso? ¿Cómo sabes que siempre se cumple esa condición que has dicho?

93. Saúl: Porque digamos como estos segmentos tienen la misma medida. O sea, este [$\overline{JT}$] tiene la misma medida que este [$\overline{TK}$] y este [$\overline{JR}$] tiene la misma medida que este [$\overline{RK}$], entonces la medida de los ángulos… O sea digamos si, como tienen la misma medida implica que los ángulos tienen que ser iguales.

94. Profesora: Entonces, ¿qué ángulos serían iguales? De acuerdo con lo que tú me acabas de decir.

95. Noé: Estos dos.

96. Saúl: O sea, digamos si este ángulo [con el dedo señala la amplitud del $\angle TJR$], no sé, da 60, entonces este [$\angle TKR$] también tendría que dar 60. Si este [$\angle JTK$] da 45, este [$\angle JRK$] también tiene que dar 45.

97. Profesora: ¿Será que el programa tiene alguna herramienta que les permita comprobar eso?

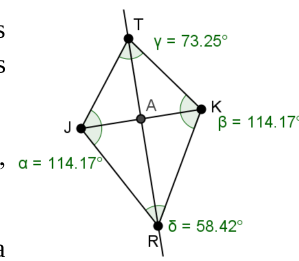
98. Saúl: Sí, claro.

99. Profesora: Comprobémoslo.

100. Noé: [Despliega un menú] ¿Hallo con ángulo? ¿O con ángulo amplitud?

101. Saúl: No, con ángulo.

102.	Noé::	RJ…
103.	Saúl:	[Ángulo] RJT para medir todo esto [señala el interior del ángulo].
104.	Noé:	[Mide $\angle RJT$].
105.	Saúl:	Ahora [ángulo] TKR.
106.	Noé:	[Mide $\angle TKR$].
107.	Saúl:	Ahí coge desde JTK y, el otro, KRJ.
108.	Noé:	[Mide $\angle JTK$y $\angle\angle KRJ$].
109.	Saúl:	¿Eso por qué no da?
110.	Noé:	¡Ah! Es porque, esperé. Es porque en uno el ángulo está más abierto que en el otro. O sea, acá [$\angle JTK$] el ángulo está más abierto que acá [$\angle KRJ$].
111.	Saúl:	Por lo que está más unido a la diagonal… Porque vea, digamos…
112.	Noé:	No. No, porque vea: estos triángulos [señala el centro de la figura]…
113.	Saúl:	Digamos, mientras este punto [T] este más, o sea, con menos distancia hacia esta diagonal [$\overline{JK}$], el ángulo va a ser más abierto.
114.	Noé:	Vea, si…si agrandamos… [Arrastra R] ¡Ah! Mira, otra condición. Si movemos el punto R, los ángulos que forma la diagonal, qué son congruentes entre sí, así se mueva esto [punto R], siempre van a ser iguales… Siempre van a ser congruentes. […]
115.	Profesora:	Pero hay unos [ángulos] que son congruentes, ¿cierto?
116.	Noé:	¡Aja!
117.	Profesora:	¿Y siempre son congruentes?
118.	Noé:	Vea, si…si agrandamos… [Arrastra R] ¡Ah! Mira, otra condición. Si movemos el punto R, los ángulos que forma la diagonal, qué son congruentes entre sí, así se mueva esto [punto R], siempre van a ser iguales… Siempre van a ser congruentes.
119.	Profesora:	Pero recuerda que ahí tienes dos diagonales.
120.	Noé:	Tenemos una diagonal [señala $\overline{JK}$].
121.	Profesora:	Esa es una diagonal, pero la otra es otra diagonal de ese cuadrilátero [$\overline{TR}$].



122. Saúl: O sea, sí. Esas dos son diagonales.

123. Profesora: Sí.

124. Noé: ¡Ah! Ya… El único que no…

125. Profesora: Igual, ahí ya descubrieron una propiedad más. ¿Ya la escribieron?

126. Saúl: Escriba. Si movemos el punto R, los ángulos que se están formando por la diagonaaal… No, no se forman por la diagonal, porque si se formaran por la diagonal sería solo está mitad [$\angle TKJ$ y $\angle TJK$] y la otra de acá [$\angle KJR$ y $\angle JKR$]. No. Escriba los ángulos J y K permanecen congruentes. No iguales. O sea, no tienen la misma medida, pero siempre van a ser congruentes.

127. Profesora: ¿Cómo así?

128. Saúl: O sea, digamos, si tu mueves este punto [R], o sea, va a cambiar la medida, pero siempre los dos van a tener…

129. Noé: Cambian las medidas de las longitudes.

130. Saúl: Pero de los ángulos también.

131. Noé: No.

132. Saúl: Vea, y lo verá.

133. Noé: No, no cambian.

134. Saúl: [Arrastra el punto R] Vea que cambian las medidas. O sea, cuando usted mueve este punto [R], o sea, el ángulo empieza a abrirse, pero siempre la medida…

135. Noé: Por la congruencia de sus ángulos.

136. Saúl: Por eso. Eso es lo que yo digo.

137. Noé: Pero, es que, ¿cómo así que cambia la medida?

138. Saúl: No, o sea, es que cambia la medida de los ángulos. Cuando usted, vea… Cuando usted abre esto va a cambiar. O sea, no siempre va a permanecer un ángulo igual. Pero siempre, o sea, al cambiar siempre los dos ángulos van a tener la misma medida. Porque pues inicialmente son congruentes, y cuando se mueven… Digamos este punto [arrastra R], o sea, ¿si ve? Ya no se mantiene, acá. Digamos acá. Acá está 119 [medida del $\angle TKR$ y $\angle TJR$], si usted mueve este punto [arrastra R] no se mantiene esa medida del ángulo, sino cambia, digamos a 123 [medida de $\angle TKR$ y $\angle TJR$ después del arrastre].

139. Noé: Por eso.

140. Saúl: Pero cambia la medida.

141. Profesora: Yo entiendo lo que tú me estás diciendo. Es decir, las medidas cambian cuando yo arrastro,

pero hay dos ángulos que siempre son congruentes. Es decir, las medidas cambian porque se está cambiando la amplitud del ángulo. Entonces, ¿cuál sería la propiedad que descubrieron de la figura inicial? ¿Cómo la escribirían?

142. Saúl: Que al arrastrar el punto R los ángulos J y K permanecen congruentes. [Néstor escribe.]

143. Profesora: ¿Qué otras propiedades podemos decir? […] ¿Ustedes al principio hablaban de dos triángulos isósceles? ¿Entonces qué se podría decir acerca de los lados de esa figura?

144. Saúl: Que son congruentes.

145. Profesora: ¿Todos?

146. Noé: No.

147. Saúl: No. Este [$\overline{TK}$] con este [$\overline{JT}$] y este [$\overline{JR}$] con este [$\overline{RK}$]. Los dos triángulos son isósceles.

148. Noé: ¿Y cómo se escribiría?

149. Profesora: Esa es otra propiedad.

150. Noé: Pues sería que el lado JT es congruente con el lado… Parce, ¿usted se acuerda cómo se pone eso de congruencia?

151. Néstor: ¡Ah! Las líneas… ¿J qué?.

152. Noé: JT.

153. Saúl: JT.

154. Néstor: ¿Congruente con quién?

155. Saúl: Con el lado TK. Y el lado JR.

156. Noé: Es congruente con el lado RK […] Necesito otra vez el marcador.

157. Profesora: Dale.

158. Noé: [Realiza el bosquejo de un rombo, con una diagonal, en el tablero.] No es un rombo.

159. Saúl: ¿Qué?

160. Noé: No puede ser un rombo.

161. Saúl: Pues, sí. Eso ya lo vimos.

162. Noé: Pero, es que hay que explicar por qué no es un rombo. Es que no es solo decir que no es un rombo.

163. Saúl: Pero es que usted ya lo dijo al comienzo, que cuando usted estiraba un cuadrado tenían que ser todos sus lados iguales…

164. Noé: Oye, ¿cómo es que se llamaba este triángulo que tenía sus tres lados iguales? ¿Equilátero?

165. Profesora: Equilátero.

166. Noé: Pienso yo…

167. Saúl: Tendrían que formar dos triángulos equiláteros.

168. Noé: Exacto. Tendría que tener dos triángulos equiláteros.

169. Profesora: ¿Y por qué?

170. Noé: Porque, es que, digamos el rombo también se puede dar a través de la forma, o sea, digo yo, no sé si esté bien, digamos como un cuadrado cuando el cuadrado se comprime, ¿sí? Como el cuadrado tiene todos sus lados iguales, que nos formaría eso, dos triángulos equiláteros.

171. Profesora: ¿O sea…?

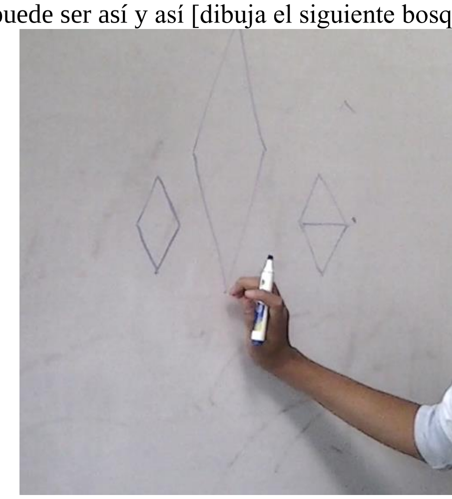
172. Saúl: Yo. Yo quiero pasar.

173. Profesora: Dale.

174. Saúl: Yo diría que un rombo se forma también con dos triángulos isósceles.

175. Profesora: ¿Por qué? Cuéntame.

176. Saúl: Se necesitaría que los dos triángulos isósceles fueran congruentes. O sea… si fueran dos triángulos equiláteros, implicaría que esta medida [señala la diagonal del rombo dibujado por su compañero] sea igual a esta [señala un lado del rombo dibujado]. Pero, pues también… Pero, pues con esta [dos triángulos equiláteros] también se puede hacer un rombo. Pero con dos triángulos isósceles también se podría hacer un rombo. Pero no necesariamente esta media [la de la diagonal] tiene que ser igual a esta [medida de un lado del rombo]. Digamos, puede ser así y así [dibuja el siguiente bosquejo]…



… Solo implica que estas dos medidas [señala dos lados del rombo] sean igual a estas [señala los otros dos lados del rombo], porque como esta es la diagonal [dibuja la diagonal del último rombo dibujado], esta se comparte entre los dos triángulos, entonces pues también sería congruente y pues tendría que ser los dos…

177. Noé: Por la reflexiva.

178. Saúl: Los dos triángulos isósceles.

179. Profesora: ¿Están de acuerdo con el argumento que da?

180. Noé: Sí.

181. Profesora: Ya que ustedes hablaron de rombo, y que creo que conocen varias propiedades del rombo, ¿en algún momento esta figura podría ser un rombo? Cuando ustedes arrastran, ¿qué condiciones se deben cumplir para que sea rombo?

182. Saúl: Que sus lados sean iguales.

183. Noé: Que si se mueve este punto [T]… ¡Ay! No. Este no lo puedo mover.

184. Profesora: Te toca seleccionar el puntero.

185. Noé: Es que este [punto T] ya no sube más, solo baja.

186. Profesora: Exacto.

187. Noé: Entonces, si este [arrastra T] baja y este [arrastra R] baja, no se forma nada. Y este [arrastra punto R] no sube más.

188. Profesora: Sí.

189. Noé: Estamos mirando. […] ¿Otra propiedad? […] ¿No podríamos sacar un criterio para esta figura? Ya escribió lo de… [toma la hoja donde están reportando].

190. Profesora: ¿Cuál criterio?

191. Noé: Lado-Ángulo-Lado… Saldría en uno de los triángulos.

192. Saúl: Pero no. Sería mejor si sacáramos el criterio de los dos triángulos isósceles.

193. Profesora: ¿El criterio de los dos triángulos isósceles?… O sea, tú me dices que teniendo los dos triángulos isósceles, ¿podemos demostrar qué?

194. Saúl: Pero tendría que… O sea, esos dos triángulos isósceles no tendrían que ser congruentes, porque si fueran congruentes se formaría el rombo.

195. Noé: Estamos mirando. […] ¿Otra propiedad? […] ¿No podríamos sacar un criterio para esta figura? Ya escribió lo de… [toma la hoja donde están reportando].

196. Noé: [Lee lo que han escrito.] Ninguno de sus ángulos es de noventa grados.

197. Profesora: ¿Qué ninguno de sus ángulos llegué a ser de noventa grados? ¿O en algún momento llega a ser de noventa grados?

198. Noé: Si, mira acá. Acá forma un ángulo de noventa grados. [Señala los ángulos rectos que se forman entre las diagonales.]

199. Saúl: Pero es que no estamos hablando de las diagonales [en lo reportado en la hoja], sino de…

200. Noé: Es que usted no menciona algo del criterio de los triángulos isósceles que eso es lo que yo estoy ratificando, que si se…

201. Saúl: Pero, acá en esto [señala el reporte realizado], acá estamos hablando de esta figura. No estamos hablando ni de los dos triángulos isósceles. Estamos hablando solo de la figura. Es decir de estos [señala los ángulos de la cometa], aunque tengan cuatro lados congruentes. [Pausa.]

202. Noé: [Lee el reporte que han realizado y la hoja con el sistema teórico construido.] Me acabé de acordar de algo. […] Los ángulooos, suplementarios y complementarios, no. Los ángulooos… ¿cómo es que se llama cuando un ángulo está dentro y cuándo un ángulo está afuera? Digamos que este ángulo… que estos ángulos… que este ángulo que se forma acá es igual a este ángulo que se forma acá [señala dos ángulos opuestos por el vértice que se forman con las diagonales] y este ángulo que se forma acá es igual a este ángulo que se forma acá [señala los otros dos ángulos opuestos por el vértice]. Pero yo no me acuerdo como se llamaban esos ángulos… Ángulos…

203. Saúl: ¿Complementarios?

204. Noé: No. […] Se acuerda que ella hizo una imagen en el tablero en la cual aparecían ángulos…

205. Saúl: ¿No son ángulos complementarios?

206. Noé: No, esos tienen otro nombre… Ángulos internos y alternos…

207. Profesora: Ángulos alternos internos entre…

208. Noé: Eso.

209. Profesora: Entre paralelas. ¿Tenemos acá paralelas? Vayan diciéndome todas las propiedades que han descubierto, que creo que con esas ya tenemos bastantes para empezar a trabajar. Entonces, ¿la primera que descubrieron cuál es?

210. Saúl: Que desde cualquier punto que movamos se va a mantener la misma figura.

211. Profesora: Listo. ¿A qué te refieres con que se mantiene la misma figura?

212. Noé: Pues que no cambia.

213. Profesora: ¿Qué no cambia?

214. Noé: Sí. O sea, si lo movemos cambian las medidas y cambian los ángulos pero no cambia la

figura.

215. Profesora: ¿Cómo qué? ¿La forma?

216. Noé: Sí. La forma.

217. Profesora: Listo. Bien.

218. Saúl: Después sigue ninguno de los ángulos es de noventa grado [lee el reporte].

219. Profesora: Ninguno de los ángulos es de noventa grados. ¿Nunca?

220. Noé: Si y sólo si se traza la diagonal.

221. Profesora: ¡Ah! Entonces, él [Saúl] me está hablando de los ángulos de la figura inicial, mientras que tú me estás hablando de los ángulos que se forman entre diagonales. Bien.

222. Saúl: ¡Eh! Al trazar un segmento del punto J y K se forman dos triángulos isósceles.

223. Profesora: Listo. ¿Cuál es la otra?

224. Saúl: Queee… O sea, se trazó esa diagonal y en esa diagonal se halla el punto medio y sobre el punto medio se traza la perpendicular…

225. Profesora: ¿Ustedes cómo lo construyeron?

226. Noé: Segmento.

227. Profesora: Segmento. O sea, la diagonal.

228. Noé: La diagonal. Usamos "segmento entre dos punto" [herramienta de GeoGebra].

229. Profesora: Listo.

230. Saúl: Le sacamos el punto medio.

231. Noé: Y después trazamos una recta que pasa entre dos puntos.

232. Profesora: Y se dieron cuenta de que concordaba con la diagonal. Listo. ¿Qué otra?

233. Noé: Bisecan los ángulos…

234. Saúl: Al tener esas dos rectas [diagonales] se forman dos ángulos rectos…

235. Profesora: ¿Cuáles…? Espérate que me hablaron de dos. ¿La tuya cuál era?

236. Saúl: Que al tener esas dos rectas se forman dos ángulos rectos.

237. Profesora: Al tener esas rectas… ¿cuáles rectas?

238. Saúl: Las diagonales.

239. Profesora: ¡Ah! Ok.

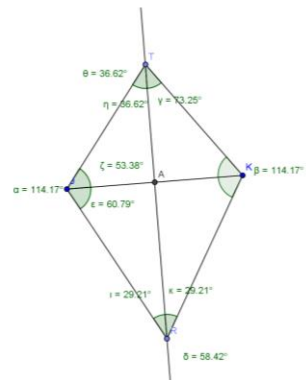
240. Profesora: Se bisecan todos los ángulos. Entonces voy a volver a hacerles la misma pregunta que les hice al principio: ¿están totalmente seguros? […] ¿Cómo podemos comprobarlo? ¿Siempre se bisecan?

241. Noé: ¡Umm! O sea…

242. Saúl: Pues saque [dirigiéndose a Noé] la medida de los ángulos.

243. Noé: Hubiera sido mejor sacar la medida de estos ángulos pequeños [señala $\angle TJK$ y $\angle RJK$]. [Selecciona la herramienta ángulo y oprime punto J y luego el A. Toma la medida de $\angle TJK$ y $\angle RJK$, obteniendo que no son congruentes.] ¡Uy no! Mentiras

244. Profesora: Y en alguno de los que no son congruentes, ¿se cumple esta condición? [Los estudiantes habían estudiado los ángulos congruentes].



245. Noé: [Mide $\angle ATK$.]

246. Saúl: Muévalo [la etiqueta].

247. Noé: [Con la opción ángulo activada, oprime T y luego A.]

248. Saúl: No. JTA [Indica el orden].

249. Noé: Sí. Si se cumple.

250. Profesora: Entonces, ¿Cómo escribirían esa propiedad?

251. Saúl: Pues que en los ángulos que no son congruentes, se bisecan los ángulos.

252. Profesora: ¿Siempre?

253. Néstor: [Escribe la última propiedad.]

254. Saúl: Bueno. Otra propiedad que escribimos es… Al trazar estas diagonales…

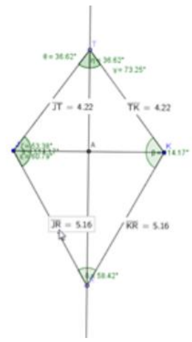
255. Néstor: Esa no. Esta [refiriéndose a las propiedades reportadas en la hoja.]

256. Saúl: Lado JT es congruente con el lado TK.

257. Profesora: Listo.

258. Saúl: Y el lado JR es congruente con el lado RK

259. Noé: [Mide los lados de la figura.] Nunca es un rombo.



260. Saúl: Vea, la 4 [diagonales perpendiculares]… Digamos que escogemos tres propiedades, la 4…

261. Noé: Pero propiedades que no lo definan.

262. Profesora: Que no lo definan.

263. Saúl: Con la 4…

264. Noé: La 4, la 7 [las diagonales forman dos triángulos isósceles]

265. Saúl: Sabe qué, vamos dibujando acá [en la hoja.]

266. Profesora: Puedes darme también contraejemplos.

267. Saúl: ¡Aja! Diagonales perpendiculares. Ahí están perpendiculares [dibuja dos segmentos perpendiculares]. Las diagonales forman dos triángulos isósceles. Entonces vamos a hacer dos triángulos isósceles congruentes [dibuja uno de los triángulos, sobre una de las diagonales, y alarga la otra diagonal para que el otro triángulo se vea congruente].

268. Profesora: ¿Y esa por qué no lo define? ¿Qué propiedades no cumpliría?

269. Saúl: Pues no cumple las propiedades de la figura porque en esto podría dar un rombo. No dicen que no sean congruentes. Entonces digamos uno puede poner que los triángulos isósceles que forman la figura sí sean congruentes.

270. Profesora: Listo. Miremos otra. ¿Cuáles propiedades miraste acá? [Señala el dibujo.]

271. Saúl: La 4 y la 7.

272. Profesora La 4 y la 7.

273. Noé: Hubiera sido mejor haber puesto ahí las diagonales forman cuatro triángulos isósceles.

274. Profesora: ¿Y eso es cierto?

275. Saúl: No.

276. Noé: ¡Ah, no! No, ponga que forman triángulos rectángulos.

277. Profesora: Listo. Miremos otro conjunto de propiedades. 4 y 7 no lo definen.

278. Noé: Entonces… No entiendo la tercera, dice sólo una diagonal biseca a la otra.

279. Saúl: Pues que biseca esta diagonal biseca los ángulos. Parte a está en dos…

280. Noé: Entonces cojamos la 3 [sólo una diagonal biseca a la otra] y la 4 [diagonales perpendiculares].

281. Profesora: Podrías volver a repetir eso [problemas con la grabación].

282. Saúl: ¿Repito lo que dije de la 4 y la 7?

283. Profesora: Por favor.

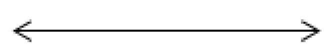
284. Saúl: [Debido a un problema con la grabación, la profesora le pide que repita lo que habían concluido]. Entonces cuando se coge la propiedad [dibuja dos diagonales] 4, que es diagonales perpendiculares, y la propiedad 7, que es que las diagonales forman dos triángulos isósceles [dibuja un rombo sobre las diagonales perpendiculares], entonces con esas dos propiedades no podría formarse la figura porque no específica que no sean congruentes, los triángulos isósceles, que no sean congruentes. Entonces si uno pone los triángulos isósceles congruentes, pues va a dar un rombo.

285. Noé: Un rombo.

286. Profesora: Bien. Ahora miremos otro par de propiedades.

287. Noé: Ponga una diagonal biseca a la otra. O sea que la parte en dos, que la parte en la mitad, ¿no?

288. Saúl: Ahí sería entonces que esta diagonal biseca a estos ángulos. [Realiza el siguiente dibujo.]



¿Qué otra propiedad?

289. Noé: Espere. Espere porque… [Toma las medidas de los ángulos formados por las diagonales con GeoGebra.] Esa es la número 9, las diagonales bisecan los ángulos no congruentes.

290. Saúl: ¡Ah, sí!

291. Noé: Yo no me había dado cuenta de eso.

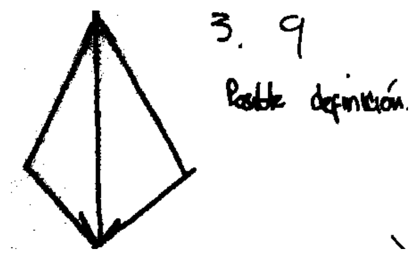
292. Saúl: Con estas si se cumple, pero estamos mirando lo que no se cumple.

293. Profesora: ¿Cuál propiedad estás mirando?

294. Saúl: Cogí la propiedad 3 y la propiedad 9.

295. Profesora: [Propiedad] 3 y [Propiedad] 9. Sólo una diagonal biseca a la otra [3] y las diagonales bisecan los ángulos no congruentes [9].

296. Noé: Implica que este ángulo tendría que ser más grande y este más corto [dibuja]. Ahí está [señala el dibujo.]



297. Profesora: Listo. Entonces escríbeme ahí posible definición, y cuando estemos mirando las propiedades que la definen vamos a mirar esas propiedades. […] Listo. Sigamos mirando otro par que no la definan.

298. Saúl: Entonces, no sé, cojamos la primera propiedad.

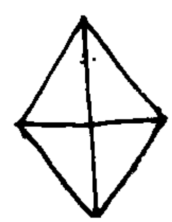
299. Profesora: La primera propiedad…

300. Saúl: Tiene un par de lados adyacentes congruentes, y la…

301. Noé: Y la 4…

302. Profesora: Y la 4. Entonces tú dice que vamos a analizar 1[un par de lados adyacentes congruentes] y 4 [diagonales perpendiculares]. Entonces analicemos 1 y 4.

303. Saúl: [Dibuja.] No se comprueba.

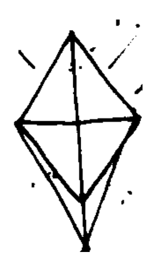


304. Profesora: ¿Por qué no se comprueba? ¿Qué construiste ahí?

305. Saúl: Pues es que en casi todas las que no son definiciones da como un rombo entonces tiene un par de lados adyacentes, estos dos [señala dos lados adyacentes en la figura] y, diagonales perpendiculares.

306. Profesora: Y en el rombo, ¿cómo sabes que [las diagonales] son perpendiculares? Pues porque el rombo no lo hemos trabajado mucho. ¿Cómo sabrías que son perpendiculares?

307. Saúl: Pues… Pues eso depende de la medida de esta diagonal.



308. Profesora: ¿De esa diagonal?

309. Saúl: Porque digamos si esta diagonal va por acá [alarga una de las diagonales de la figura anterior] ahí si se cumpliría [ser cometa]. Pero o sea, no especifica que, o sea… es que como solo estamos haciendo esas dos propiedades, pues no especifica que la medida de estos lados [señala el par de lados superiores congruentes] con estas [señala dos lados laterales no congruente] no sea congruente.

310. Profesora: Entonces otra vez el rombo es un contraejemplo. Bien. ¿Qué otras propiedades vamos a mirar? […] Por ejemplo… ¿cuáles nos faltan ver?

311. Noé: La 5, la 6, la 8, la 10 y la 11. […]

312. Profesora: ¿Cuáles van a mirar? Miremos otro par, por favor. U otros tríos, si quieren, de propiedades.

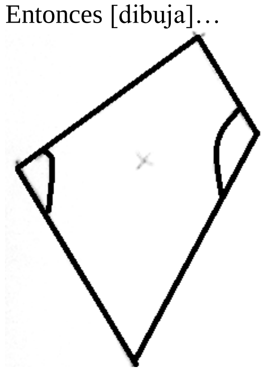
313. Saúl: La de los ángulos no son congruentes.

314. Noé: La de los ángulos opuestos no son congruentes.

315. Saúl: ¿Los lados opuestos son estos? [Señala la figura del computador].

316. Profesora: Sí.

317. Saúl: Entonces [dibuja]…



Y la 11…

318. Noé: Pero vea que también se podría tener… espere…

319. Profesora: Hablen duro. ¿Esa sería para qué propiedad?

320. Noé: Pues es que… Es que yo no sé cómo hacer que me entiendan.

321. Profesora: No importa. Inténtalo.

322.	Noé:	Eee… ¿Usted cuál fue la que tomó acá?
323.	Saúl:	La que tomé fue la 6, tiene dos ángulos opuestos no congruentes. Entonces pues dibujé estos dos que son opuestos y pues no son congruentes.
324.	Noé:	Pues iba a coger otra, pero no sé.
325.	Profesora:	O sea que solo con la propiedad 6, no define. Listo. Ahora miremos otro.
326.	Saúl:	Los ángulos opuestos no congruentes. Digamos, estos son opuestos [$\angle J$ y $\angle K$] o éstos son opuestos y [señalan $\angle T$y $\angle R$].
327.	Profesora:	Dime tú. ¿Cuáles serían los opuestos no congruentes?
328.	Noé y Saúl:	Éstos. [Señalan $\angle T$y $\angle R$].
329.	Profesora:	Esos dos.
330.	Noé:	Estos. [Señalan $\angle T$ y $\angle R$, ángulos congruentes]. Sí, porque acá dice biseca a los ángulos opuestos no congruentes. En los ángulos que no son congruentes, las diagonales bisecan esos ángulos. Aquí no son congruentes y los biseca [señalando la cometa del computador]. Tiene dos ángulos opuestos no congruentes. Un ángulo puede ser este [$\angle T$] y el otro ángulo puede ser este [$\angle R$]. ¿Este ángulo [$\angle TRJ$] no es congruente con este [$\angle TRK$]?
331.	Saúl:	Sí. Este mide 29,21 y este también.
332.	Profesora:	¿Existirá algún cuadrilátero en el cuál se bisequen ángulos opuestos no congruentes? De los que ya hemos trabajado.
333.	Noé:	Sí. Debe haber.
334.	Profesora:	Pero ustedes podrían tratar de dibujarlo, ya sea en el programa o acá [en la hoja]. […]. Por ejemplo, ¿podrías utilizar el programa para construir un cuadrilátero que cumpla esas condiciones? Puedes hacer una construcción robusta o puedes hacer una construcción blanda. O sea que se deforme con el arrastre, pero que en un momento dado te permita ver si se cumple o no.
335.	Saúl:	Y hay que demostrarlo.
336.	Profesora:	No necesariamente que lo demuestres, pues porque cuando tú me construyes un contraejemplo, pues no es necesario hacer un demostración, porque ya con un contraejemplo puedo decir que no se cumple.
337.	Saúl:	[Explora los menús del programa.]
338.	Noé:	Estaba pensando en que… Mire acá [en la hoja] y yo miro acá [en GeoGebra], mientras

tanto. ¿ Tu pregunta fue que si existe la posibilidad de que en un cuadrilátero la diagonal pueda bisecar los ángulos opuestos no congruentes?

339. Profesora: ¿Existe otro cuadrilátero? ¿Se puede construir otro cuadrilátero? Lo que tú estabas haciendo ahorita. ¿Puedes construir un cuadrilátero que cumpla esa condición y que no sea la figura que estoy trabajando?

340. Saúl: Dice que los ángulos opuestos no congruentes.

341. Profesora: Debe tener ángulos que no sean congruentes.

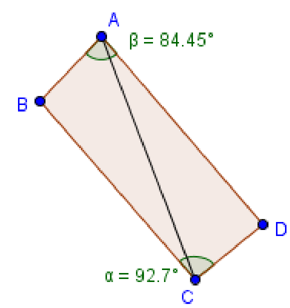
342. Saúl: Necesariamente tiene que ser opuestos, ¿verdad? Para que los biseque la misma diagonal.

343. Profesora: No sé. Sólo estamos mirando esa. Dice: las diagonales bisecan los ángulos que no son congruentes.

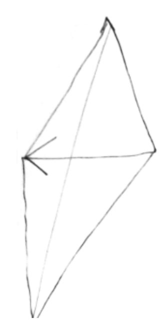
344. Saúl: Pero no tienen que ser opuestos.

345. Profesora: En este caso, no.

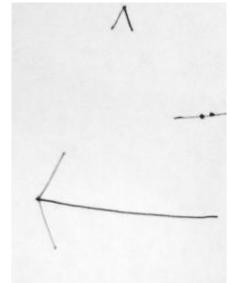
346. Noé: Pues es que mira: yo construí un rectángulo, y en un rectángulo los ángulos opuestos, que serían el ángulo A y el ángulo C… Lo que pasa es que no se si la diagonal, digamos, los biseque… O sea, biseque los ángulos que sean opuestos y no sean congruentes.



347. Profesora: Pero, ¿en un rectángulo sus ángulos opuestos son congruentes? […] Tratemos de construir este ejemplo que tú estabas tratando de construir acá [en la hoja]. Que las diagonales bisequen los ángulos no congruentes. Entonces, tú que estabas tratando de mirar ahí.



348. Saúl: Pues yo estaba haciendo acá un ángulo [dibuja un ángulo con su bisectriz]… Como no dice que necesariamente tienen que ser opuestos, entonces el otro ángulo que no es congruente yo lo puse por acá [dibuja otro ángulo en la parte superior del dibujo que ya tenía]. Entonces pues esta diagonal biseca ya un ángulo que no es congruente. No tendría que ser…

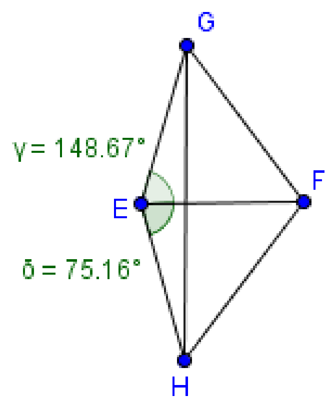


349. Profesora: ¿El programa me podría ayudar a hacer eso que tú me estás diciendo?

350. Saúl: Claro.

351. Profesora: Hagámoslo.

352. Saúl: No tendría que ser en el punto medio de esta diagonal. [Construye $\overline{EF}$ en GeoGebra] Se traza un segmento que vaya de acá a acá. [Constuye $\overline{EG}$ y $\overline{EH}$] Entonces, vamos a sacar la medida del ángulo [mide $\angle HEG$ y $\angle HEF$]. Ahí lo biseca, ¿no? [Arrastra $\overline{EF}$ hasta que aparentemente $\angle HEF$ y $\angle FEG$ son congruentes].



353. Profesora: Aproximadamente los biseca.

354. Saúl: Entonces la otra diagonal no tendría que pasar por el punto medio, porque si no daría la misma figura.

355. Profesora Entonces, hagamos una figura que cumpla esa condición.

356. Saúl: Como estos ángulos no tienen que ser congruentes [$\angle G$ y $\angle H$], entonces si estos dos ángulos no son congruentes implica que estos dos tienen que ser iguales.

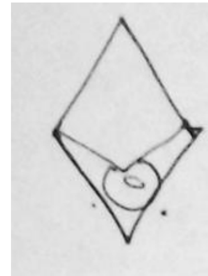
357. Profesora ¿Y por qué?

358. Saúl: Porque pues… Pues solo estamos cogiendo la propiedad 9. Entonces podemos colocar que todos los ángulos no sean congruentes.

359. Profesora: Pero necesito que cumpla que una diagonal biseque. […] Si no encontramos contraejemplo, quiere decir que esa podría definir. Todavía no sabemos. ¿Qué otras podríamos mirar? Por ejemplo miremos la propiedad 1 [tiene un par de lados adyacentes congruentes] y 2 [tiene otro par de lados adyacentes congruentes].

360. Noé: Ok.

361. Saúl: [Lee del tablero.] Tiene un par de lados adyacentes congruentes y otro par de lados adyacentes congruentes. En esa puede y no puede dar. Tiene un par de lados adyacentes congruentes y otro par de lados adyacentes congruentes. También puede dar un rombo. Y si, digamos que la medida de estos dos fueran diferentes, ahí son adyacentes no congruentes. [Dibuja primero un rombo, y luego una cometa. Con el circulo indica que no necesariamente tienen que ser congruentes]



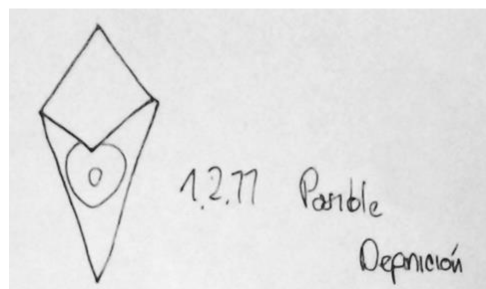
362. Profesora: Entonces tú me estás diciendo que 1 y 2 no definen. Pero si le agrego otra propiedad, si define. ¿Qué otra propiedad tendría que agregarle para poder definir?

363. Noé: Que la medida de sus lados adyacentes sea diferente a las otras.

364. Profesora: O sea 11 [dos pares de lados adyacentes no congruentes], tiene dos pares de lados adyacentes no congruentes. O sea 1, 2 y 11.

365. Saúl: Tiene dos pares de lados adyacentes no congruentes. Es que lo que dice la propiedad 11 es que el primer par no sea congruente con el otro par.

366. Noé: Entonces si hacen la definición.



367. Profesora: ¿Por qué?

368. Saúl: Porque estos no tienen que ser congruentes con estos dos. Entonces tienen que ser de diferente medida, pero a la misma vez tienen que ser congruentes con estos. [Realiza la explicación sobre un dibujo.]

369. Profesora: Listo. Esa sería otra posible definición. 1, 2 y 11. Y de los que hiciste anteriormente, dime, ¿cuáles fueron los que dijiste que no definían? Entonces escribe ahí al lado [de cada figura] cuáles definen y cuáles no definen. Y me escribes por qué, o sea me indicas el contraejemplo [pausa]. Listo, ¿alguna otra propiedad?

370. Noé: ¿Cuáles hemos comprobado? La 1, la 2, la 3, la 4…

371. Saúl: Entonces vamos a probar con la 5 [tiene dos ángulos opuestos congruentes] y la 8 [ninguno de sus ángulos es de noventa grados].

372. Profesora: La 5 y la 8.

373. Saúl: La 5, tiene dos ángulos opuestos congruentes…

374. Noé: Pues la que habíamos dicho….

375. Saúl: [Dibuja dos ángulos opuestos aparentemente congruentes.] Y estos otros dos pueden dar

180.

376. Profesora: De 180 grados. ¿Lo que a veces llamamos ángulo llano?

377. Saúl: Sí.

378. Profesora: ¿Y tiene sentido que en un polígono cualquiera haya un ángulo de 180?

379. Saúl: No.

380. Noé: Oye, pero acá los ángulos opuestos son estos dos [señala $\angle J$ y $\angle K$] o pueden ser estos dos [señala $\angle T$ y $\angle R$].

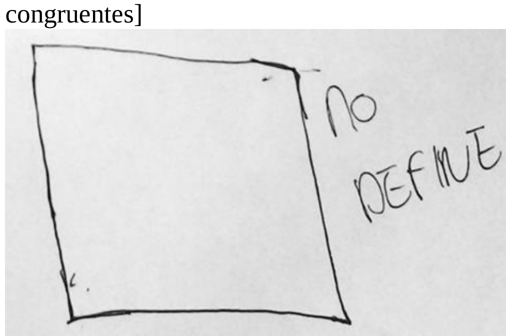
381. Profesora: Ambos. Hay dos pares de ángulos opuestos.

382. Noé: Digamos la… Ahí dice…

383. Saúl: 5 y la 8 no la cumplen.

384. Profesora: ¿Por qué? ¿Qué contraejemplo encontraste?

385. Saúl: Tiene dos ángulos opuestos congruentes, entonces eso implica que la medida de este tiene que ser igual a esta. [Señala en la figura hecha en papel, dos ángulos aparentemente congruentes]



386. Profesora: ¿Recuerdan algún tipo de cuadrilátero que hayan trabajado, no necesariamente acá, que cumpla estas condiciones?

387. Saúl: Eso es un rombo.

388. Profesora: ¿Alguna otra que vayan a mirar?

389. Noé: No. Creo que ya las utilizamos todas.

390. Saúl: La 3 [solo una diagonal biseca a la otra] y la 4 [diagonales perpendiculares] no lo definen.

391. Profesora: La 3 y la 4 no lo definen, ¿por qué?

392. Saúl: Dice: sólo una diagonal biseca a la otra. Entonces necesariamente esta diagonal tiene que bisecar a los ángulos. Pero no dice que biseca…

393. Profesora: Pero, no. Dice: sólo una diagonal biseca a la otra.

394. Saúl: Biseca a la otra diagonal. Entonces esta [señala la diagonal $\overline{TR}$] la parte por la mitad [a la diagonal $\overline{JK}$].

395. Profesora: Exacto. ¿Cómo quedaría?

396. Saúl: Entonces la [Propiedad] 4 dice que son diagonales perpendiculares, ¿no? Entonces tiene que ir así [dibuja dos segmentos perpendiculares], pero no nos dicen las medidas de esas diagonales. Entonces puede que la medida de los lados de la figura sea igual. Entonces puede dar como un cuadrado.

397. Profesora: ¿Y esa figura que tú me acabas de decir cumple la condición de que solo una diagonal biseque a la otra?

398. Saúl: O sea que tendría que ser… [Dibuja dos diagonales que cumplen las propiedades 3 y 4].

399. Noé: Es que para que se bisequen tiene que pasar por el punto medio entonces se tiene digamos esto acá [un segmento] y si se pasa por acá [diagonal perpendicular que no pasa por el punto medio] no la está bisecando porque no la está cortando en dos partes iguales.

400. Profesora: Exacto. Pero entonces acá lo que me están diciendo es supongamos que voy a definir esta figura como un cuadrilátero en el cual sus diagonales son perpendiculares y sólo una biseca a la otra…

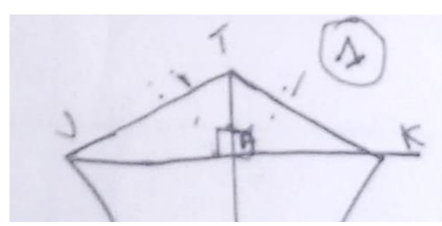
401. Saúl: Pero si cumple. O sea la 3 y la 4, si cumple.

402. Profesora: Sí, pero para decir eso yo tengo que poder demostrar que a partir de esa información puedo justificar por qué se cumple la propiedad 1, por qué se cumple la propiedad 2, por qué se cumple la propiedad 5, la 6 y la 7. Entonces miremos. ¿Cómo lo demostraríamos?

403. Saúl: Entonces escriba que en esta misma figura [figura dibujada a partir de las propiedades 3 y 4] se deben demostrar todas las propiedades.

404. Profesora: Sabiendo que se cumple 3 y 4 tengo que poder demostrar que se cumple 1, 2, 5, 6 y 7. ¿Cómo lo harían? ¿Con qué trabajarían?

405. Saúl: Pues primero se saca la figura con esas dos propiedades [Realiza la siguiente figura en una hoja.] Si sé que una diagonal biseca a la otra, qué información tenemos.



406. Noé: Que biseca también sus ángulos opuestos.

407. Profesora: ¿Eso sí lo tenemos?. No sé. Piensen ustedes. Entre ustedes. Por ejemplo, ¿cómo demostramos la primera propiedad? ¿Que la primera propiedad se cumple.

408. Noé: Dos lados adyacentes congruentes.

409. Saúl: Porque como acá esta diagonal [$\overline{TR}$] biseca a esta [$\overline{KJ}$], implica que estos dos lados tienen que ser iguales. Entonces si los dos lados son iguales… Bueno, estos dos lados son iguales [segmentos determinados los extremos de la diagonal $\overline{JK}$ y su punto medio]. Este segmento [señala el segmento cuyo extremo es el punto T y el punto de intersección de las diagonales] parte del mismo punto y van hacia el mismo punto.
[…]

410. Profesora: Por ahora me has dicho dos segmentos congruentes. Bien. Válido. ¿Qué más necesito?

411. Saúl: Que otros…

412. Profesora: ¿Pero con eso ya lo comprobaste? O sea, simplemente si tú tienes dos segmentos congruentes, ¿ya puedes decir que el otro es congruente?

413. Saúl: Pues es que acá ya comprobamos la primera.

414. Profesora: ¿Recuerdas qué hacíamos cuando definíamos? Por ejemplo, cuando trabajamos con triángulos isósceles, entonces dijimos: si yo lo defino como [triángulo con] dos lados congruentes yo puedo demostrar que los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes. Entonces aquí dijimos: voy a definirlo [la cometa] con las propiedades 3 y 4. Es decir, parto de que esas propiedades se cumplen. Y tengo que poder, a partir de esto, demostrar por qué la propiedad 1 se cumple. ¿Sí? ¿Qué podrían utilizar para demostrar eso?

415. Saúl: La bisección de la diagonal.

416. Profesora: Es uno de los datos que necesitan. ¿Qué otra cosa necesitan?

417. Saúl: Lo de perpendicular.

418. Profesora: Ok. Entonces hay otra información: que son perpendiculares.

419. Saúl: Que los ángulos de las perpendiculares son congruentes.

420. Profesora: Entonces tengo ángulos congruentes, de noventa grados. Listo, ¿qué más tengo?

421. Noé: Que cumplen la propiedad reflexiva.

422. Profesora: Ok. Tú me hablas de propiedad reflexiva, ¿para quién?

423. Noé: Para este [señala el segmento cuyos extremos son T y el punto medio de $\overline{JK}$].

424. Profesora: Para ese. Listo. Entonces tengo un lado congruente…

425. Saúl: Tendríamos lado…

426. Noé: Podríamos utilizar un criterio, el criterio lado-ángulo-lado.

427. Profesora: Claro. Y con eso, ¿puedo asegurar qué?

428. Saúl: La congruencia de los dos triángulos.

429. Profesora: Tienen que escribir. Ustedes deciden cómo escribimos eso. Cómo justificamos eso.

430. Saúl: Escriba [dirigiéndose a Néstor]. A partir de las propiedades 3 y 4...

431. Noé: Se forma la figura.

432. Saúl: [Dictándole a Néstor.] Tenemos la definición de la figura. A partir de esto queremos demostrar las propiedades 1, 2, 5, 6 y 7.

433. Profesora: Listo. Empiecen a escribir. […]

434. Saúl: La 1 se cumple porque tenemos que, vaya escribiendo [dirigiéndose a Néstor], a través de la bisección de una diagonal…

435. Noé: No. Espere. Diga lo de los ángulos primero. Que se forma, empezando…

436. Saúl: No, pues primero…

437. Noé: Diga que dividimos los ángulos… Que nos dimos cuenta de que esos triángulos formaban dos ángulos congruentes que son de 90 grados.

438. Profesora: ¿A partir de que propiedad? ¿De 3 o de 4?

439. Saúl: La 3.

440. Noé: No. Espere. De la 4, porque si son perpendiculares tiene que ser de noventa grados.

441. Saúl: ¡Ah! Sí. [Lee lo que ha escrito Néstor.] Se forman ángulos de 90 grados.

442. Noé: Ponga lo de la perpendicular reflexiva.

443. Saúl: Sí. Lo de reflexiva también. Puede ser esta línea [señala el segmento cuyos extremos son T y el punto medio de $\overline{JK}$].

444. Noé: Escriba que la diagonal perpendicular es reflexiva a sí misma.

445. Profesora: Pero es que la diagonal es toda completa. No sólo ese pedazo que me muestras.

446. Saúl: Ponga: la diagonal que biseca a la otra divide en dos partes no congruentes

447. Profesora: Y si le das nombres, no sería más fácil.

448. Saúl: Bueno.

449. Profesora: Dales los que están acá J, T, K Y R.

450. Noé: La propiedad reflexiva se cumple para el segmento AT [A es punto medio de $\overline{JK}$].

451. Profesora: Por tanto, ¿uno qué puede decir de [segmento] AT? Busquen en esa hoja [haciendo referencia a la hoja en la cual se encuentra reportado el sistema teórico que tienen a su disposición].

452. Saúl: Que es semejante.

453. Noé: Que es igual a sí mismo.

454. Saúl: [Lee la hoja que contiene los elementos del sistema teórico que tienen a su disposición.] Si se tiene $\overline{AB}$, se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{AB}$. Entonces ya tenemos los ángulos congruentes de noventa grados… Tenemos que cómo la diagonal biseca entonces tenemos un criterio que es lado-ángulo-lado.

455. Néstor: ¿Biseca?

456. Saúl: A la otra diagonal la divide en dos partes iguales.

457. Profesora: ¿La 2 [otro par de lados adyacentes congruentes]?

458. Saúl: [Dirigiéndose a Néstor] Entonces ponga que el lado JA es congruente con el lado AK. […] Entonces acá copie el criterio.

459. Noé: Que es lado – ángulo – lado.

460. Saúl: Y eso fue solo para comprobar la primera.

461. Noé: ¿Eso es criterio de congruencia o criterio de semejanza?

462. Profesora: Criterio de congruencia. […] Bien, la 2.

463. Saúl: Otro par de lados adyacentes congruentes.

464. Noé: Pues sería lo mismo.

465. Profesora: ¿Por qué?

466. Saúl: Sólo cambia es la medida de… O sea, digamos acá [ángulos que forman las diagonales] también se forman ángulos de noventa grados. Es la misma diagonal la que se biseca, entonces hay también estos lados [$\overline{AJ}$ y $\overline{AK}$] iguales. Y como esta [$\overline{AR}$] también aplica para la propiedad reflexiva, entonces quedaría el mismo criterio lado-ángulo-lado.

467. Profesora: Listo.

468. Saúl: Entonces, la 5.

469. Noé: Los ángulos congruentes.

470. Profesora: Tiene dos ángulos opuestos congruentes.

471. Saúl: Es que los ángulos opuestos son este [$\angle TJR$] y este [$\angle TKR$].

472. Profesora: ¿Cómo podemos demostrar que esos dos son congruentes?

473. Saúl: Porque esta diagonal [$\overline{TR}$] biseca los ángulos que no son congruentes.

474. Profesora: Organiza todo tu argumento.

475. Saúl: Entonces…

476. Noé: Este tiene otro triángulo diferente al rectángulo y al isósceles.

477. Profesora: ¿Con ese triángulo podrías trabajar para justificar porque tiene dos ángulos opuestos congruentes?

478. Noé: Sí.

479. Profesora: ¿Cómo?

480. Noé: Espera. Déjame pensar.

481. Profesora: Puedes utilizar la información que ya demostraste. O sea, 1 y 2.

482. Noé: Claro. Vea. Para saber que los ángulos son congruentes necesitamos que… Al principio de las clases, empezamos que para saber si un ángulo es congruente con otro ángulo teníamos que saber primero los lados, y para saber si los lados son congruentes… Entonces aquí tocaría saber eso. Tocaría mirar si los lados son congruentes y aplicar un criterio, que creo que sería el mismo criterio que utilizamos para el 1 y el 2, que sería lado-ángulo-lado.

483. Profesora: Entonces acá cuál utilizarías. ¿Con qué triángulos trabajarías?

484. Noé: Con estos [refiriéndose a ΔJTR y ΔKRT].

485. Profesora: ¿Cuáles? Nombrémoslos por los vértices.

486. Noé: [Triángulo] JTR.

487. Profesora: ¿Con quién?

488. Noé: [Triángulo] TKR.

489. Profesora: Listo. Entonces empecemos. ¿Qué información tienes?

490. Noé: Pues, ya sabemos… digamos que… que estos lados son congruentes [$\overline{TJ} \cong \overline{TK}$] ¿sí?

491. Profesora: Ok.

492. Noé: Entonces como esta diagonal biseca al ángulo… O sea va a partir a esa figura en dos partes iguales, ¿sí?

493. Saúl: Pero también ya sabemos que estos dos [$\overline{RJ} \cong \overline{RK}$]

494. Noé: Estos dos lados son congruentes [$\overline{RJ} \cong \overline{RK}$].

495. Profesora: Entonces miremos. Partíamos de 3 y 4 para definir. Entonces a partir de 3 y 4 ustedes me justificaron 1 y 2.

496. Saúl: Y a partir de 1 y 2 vamos a demostrar esta [tiene dos ángulos opuestos congruentes].

497. Profesora: Y utilizando 1 y 2, que ya la han justificado, ustedes me van a decir por qué son congruentes. Pero pilas, porque cuando tú me hablas de que biseca el ángulo me estás agregando otra propiedad que todavía no la hemos comprobado, pero ya casi lo tienes. Tienes dos lados, ¿qué te hace falta?

498. Noé: Ya tenemos los dos lados. Ahora falta, digamos, el criterio. Que sería el mismo que utilizamos para estos triángulos. Que sería lado-ángulo-lado.

499. Profesora: ¿Cuál sería el ángulo?

500. Noé: Este [$\angle TJR$ y $\angle TKR$].

501. Profesora: O sea que todavía no lo tengo congruente.

502. Saúl: Entonces si formamos… O sea si demostramos, digamos, la congruencia entre los triángulos… Digamos que todos los lados son iguales [congruentes], pues ya podríamos decir que todos los ángulos son iguales [congruentes].

503. Profesora: ¿Por cuál criterio?

504. Saúl: Por lado, lado, lado.

505. Profesora: Por lado, lado, lado. ¿Ahí podemos aplicar lado, lado, lado?

506. Saúl: Sí. Porque ya tenemos este [$\overline{TJ} \cong \overline{TK}$] y este [$\overline{RJ} \cong \overline{RK}$] y este lado [$\overline{RT}$], que es la reflexiva. [Dirigiéndose a Néstor.] Copie… Copie que se toman los dos pares de lados adyacente congruentes… Y el segmento TR cumple con la propiedad reflexiva… Ponga criterio lado, lado, lado… Y acá ponga congruencia de triángulos [después del criterio]… Tenemos ángulos opuestos no congruentes, que son estos dos [$\angle TJR$ y $\angle TKR$]… Copie: Con base en esto se demuestra que los ángulos opuestos son congruentes [Repite varias veces.]. […]

507. Noé: [Lee en voz baja la propiedad 6.] Tiene dos ángulos opuestos no congruentes.

508. Profesora: ¿Cómo llegamos a que no son congruentes los otros [ángulos] opuestos?

509. Noé: Por las medidas de los triángulos. Porque este triángulo [ΔJTK], tiene el ángulo [$\angle T$] más abierto… O sea, entre más cerrado esté, menos va a ser la medida, y el otro ángulo mayor va a ser la medida entre más se abra. Entonces eso hace que no sean congruentes. La longitud de los triángulos.

510. Profesora: ¿La longitud de los triángulos?

511. Noé: O sea… los triángulos… los lados que forman el ángulo entre más abiertos estén hacen que el ángulo sea mayor, y entre más cerrados estén, hacen que el ángulo sea menor. Como acá. Acá el ángulo [$\angle R$] cada vez se cierra más, y más, lo cual hace que el ángulo sea menor. Eso hace que los ángulos no sean congruentes.

512. Profesora: Ese es un poquito difícil de argumentar. Miremos el último, el 7.

513. Noé: Las diagonales forman dos triángulos isósceles.

514. Saúl: Pero es que, digamos, si uno se refiere a esta diagonal [$\overline{RT}$] forman estos dos [ΔRJTy ΔRKTisósceles]. Si se refiere a esta [$\overline{JK}$] forman estos dos [ΔJTKy ΔJRKisósceles].

515. Noé: No, estos [ΔRJT y ΔRKT] no pueden ser [isósceles]. Estos no pueden ser, porque este lado [$\overline{RK}$] es más grande que este [$\overline{KT}$]. Estos dos tienen que ser de igual medida. Entonces, serían estos dos [ΔJTK y ΔJRK]. O sea, son isósceles pero no congruentes.

516. Saúl: Se coge el segundo [propiedad 2], o sea otro par de lados congruentes, que son estos dos [$\overline{RJ} \cong \overline{RK}$] y el primero [propiedad 1] que se coge este [$\overline{TJ} \cong \overline{TK}$]. Entonces pues ahí ya tenemos… pues para formar el criterio lado, ángulo, lado. O pues el criterio que se requiera.

517. Profesora: ¿Pero ahí sí sería el criterio lado, ángulo, lado? ¿Qué te aseguran que son isósceles?

518. Noé: Que tenga dos lados congruentes.

519. Profesora: Que tengan dos lados congruentes. Esa fue la definición que dimos de triángulo isósceles.

520. Saúl: Pues ahí ya tenemos los lados.

521. Profesora: ¿Por qué?

522. Saúl: Pues porque en la primera propiedad dice que estos lados son iguales [$\overline{TJ} \cong \overline{TK}$] y en la segunda, que estos dos son iguales [$\overline{RJ} \cong \overline{RK}$]. Entonces, ahí ya se forman los triángulos isósceles.

523. Profesora: Entonces cuáles serían los triángulos isósceles. Nombrémoslos, por favor. Reportémoslo.

524. Noé: El [ángulo] JTK y el [ángulo] JTK.

525. Saúl: [Néstor escribe $\overline{JTK}$ $\overline{JRK}$. Saúl lo corrige.] No, son triángulos. […] Ponga son triángulos isósceles…

526. Profesora: Listo. Vamos a mirar otra forma de definirlo. Entonces ustedes me habían propuesto 1 [un par de lados adyacentes congruentes], 2 [otro para de lados adyacentes congruentes] y 11 [dos pares de lados adyacentes no congruentes]. Listo. Aunque también podían mirar, 1, 2, 5 [tiene dos ángulos opuestos congruentes] y 6 [tiene dos ángulos opuestos no congruentes]. Entonces elijan cuáles otras vamos a mirar. Sí definimos como 1, 2, 5 y 11, podemos demostrar las otras propiedades. ¿Lo definen?

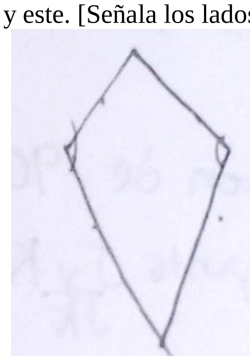
527. Noé: Sí.

528. Profesora: Entonces lo mismo de antes. Si yo digo es tengo que poder demostrar 3, 4 y 7.

529. Saúl: Lo dibujo.

530. Profesora: Si te es útil hacer el dibujo, dibújalo.

531. Saúl: Entonces, dos lados adyacentes congruentes [dibuja dos lados aparentemente congruentes]. Otro par de lados adyacentes congruentes [dibuja otro par de lados aparentemente congruentes, de diferente medida con respecto a los dos primeros]. Ángulos opuestos congruentes. Estos dos [señala dos ángulos] y tiene dos pares de lados adyacentes no congruentes. Este y este. [Señala los lados en la siguiente figura.]



Con eso tenemos que sacar la 3 [solo una diagonal biseca a la otra], la 4 [diagonales perpendiculares], la 6 [dos ángulos opuestos no congruentes] y la 7[las diagonales forman triángulos isósceles]. Escriba [dirigiéndose a Néstor.] Escriba que a partir de la propiedad 1, 2, 5 y 11. Entonces escriba acá 3. Escriba que la diagonal que biseca es la TR que pasa por perpendicular…

532. Noé: Pero en la 3 dice: sólo una diagonal biseca a la otra.

533. Saúl: Inicialmente, tenemos el 1, el 2, el 5 y el 11. ¿Las podemos construir?

534. Profesora: Claro.

535. Saúl: Entonces tracemos la diagonal acá y acá. De J a K.

536. Noé: ¿Para decir que se traza un segmento de J a K sería… [escribe en la hoja $\overline{JK}$]?

537. Profesora: Sí.

538. Saúl: Se pone el punto medio.

539. Profesora: Entonces pilas, porque cuando tú empiezas a hacer eso es porque vas a utilizar las propiedades 3 y 4. Y esas son las que tienes que demostrar.

540. Saúl: Se traza otro segmento del punto T al punto R [escribe]. Y copie que esa diagonal biseca a la otra.

541. Profesora: ¿Y eso ya lo demostraste?

542. Noé: Eso no lo hemos… Espere […] Bueno, podemos decir que trazando… es que tampoco sé cómo explicarlo. Es que vea… Sabemos que trazamos este segmento y este segmento [diagonales], ¿verdad? Entonces esos dos lados son los que no son congruentes, que son adyacentes. Y tenemos los ángulos opuestos que son congruentes, ¿verdad?

543. Profesora: Y tenemos los ángulos opuestos que son congruentes. Pero es que lo que trataba de decirles es que, miren que dependiendo de la forma como lo definamos, nosotros podemos tomar como válidas unas propiedades, y de lo contrario, tendríamos que demostrar las otras o justificarlas, por lo menos. Entonces decíamos, vamos a partir por 1, 2, 5 y 11. Pero, digamos que hay una cosa, y es que ustedes están introduciendo una nueva propiedad, entonces por lo general hablan de que bisecan. Entonces empecemos a mirar, si lo defino como 1, 2, 5 y 9, que es la que me habla de bisecar los ángulos.

544. Noé: Pero es que lo que yo quería decir es que está línea [$\overline{TR}$], se formarían dos triángulos. Y pues, cómo esta línea [$\overline{JK}$] y esta la corta en la mitad [$\overline{TR}$], para las dos partes. Entonces estos dos triángulos [ΔJTAy ΔKTA] tendrían que tener las mismas medidas.

545. Profesora: Claro. Pero es que mira que eso es lo que necesitamos justificar. Que se bisecan. O sea, que se interceptan ahí en ese punto medio. Y eso es lo que tú estás utilizando para justificar. Entonces te voy a cambiar la pregunta, digamos que no lo voy a definir así, pero qué inconveniente se presentó acá para poder decir que las diagonales eran perpendiculares, o que solamente una…

546. Saúl: El punto medio.

547. Profesora: El punto medio. O sea no hay nada que te asegure que sea punto medio.

548. Noé: Que tuvimos que partir del punto medio de esa diagonal para saber que la otra diagonal la biseca.

549. Profesora: Entonces ahora van a mirar que pasa si lo defino con 1, 2, 5 y 6. ¿Por qué van a mirar esas? Porque cuando ustedes estaban construyendo, ustedes dijeron varias cosas que son útiles, y que involucraban todo lo de triángulo isósceles. Lo que habíamos estudiando de triángulos isósceles.

550. Saúl: No, porque tendríamos que tener por lo menos una propiedad que involucre las diagonales.

551. Profesora: ¿Qué hemos visto de triángulos isósceles? ¿Qué hay en esa hojita que les dimos? ¿Teoremas, definiciones?

552. Noé: Que tenemos dos lados iguales. Que tiene dos ángulos iguales. [Leen todos los teoremas y definiciones de triángulo isósceles, de bisección y de rectas perpendiculares].

553. Saúl: [Se detiene en una definición.] Mira esta definición: un triángulo es isósceles sí y sólo sí la bisectriz de uno de sus ángulos es perpendicular al lado opuesto.

554. Profesora: ¿Será que la puedo utilizar acá?

555. Saúl: [Relee la definición.] Sí.

556. Profesora: ¿Cómo lo utilizarías?

557. Saúl: Pues digamos esta bisectriz [señala $\overline{TR}$]… O sea, cuál es la bisectriz, ¿es está? Entonces ahí dice que la bisectriz de uno de sus ángulos es perpendicular al lado opuesto. O sea que esta bisectriz [$\overline{TR}$] es perpendicular a esta [$\overline{JK}$]. Y ahí se utilizaría la definición de triángulo isósceles.

558. Profesora: Y entonces sí tienes la definición de triángulo isósceles, ¿cómo la estás utilizando?

559. Saúl: Pues la estoy utilizando para comprobar que una diagonal biseca a la otra.

560. Profesora: Que una diagonal biseca a la otra… Pero mira que estamos hablando de bisectrices, por ahora.

561. […]

562. Profesora: Miremos la última. 1, 2, 6 y 7.

563. Saúl: [Dibuja a medida que va leyendo]. Tiene dos pares de lados adyacentes congruentes… tiene otro par de lados adyacentes congruentes… Tiene un par de ángulos opuestos congruentes… y las diagonales forman dos triángulos isósceles. Entonces vamos a demostrar que sólo una diagonal biseca a la otra [refiriéndose a la propiedad 3] Sería comprobar que estos lados son iguales.

564. Profesora: ¿Cómo lo haríamos?

565. Noé: ¿Cuáles dos lados?

566. Saúl: Este y este [señala en una de las diagonales los segmentos que se determina el punto intersección en una de las diagonales].

567. Noé: Porque la perpendicular que la biseca la va a partir en dos partes…

568. Saúl: Pero es que es necesario decir por qué la biseca.

569. Noé: Porque pasa por el punto medio.

570. Saúl: ¿Por qué? O sea, no. Tenemos el 1, el 2, el 6 y el 7. Tenemos que partir de uno de esos para encontrar que sólo una diagonal biseca a la otra. […] Pues cogeríamos la 7. Esta diagonal tiene que necesariamente pasar por el punto J y K y forma estos dos triángulos isósceles. Entonces…

571. Profesora: Si sé que son isósceles, ¿qué información tengo?

572. Saúl: Lados iguales.

573. Profesora: ¿Qué otra información tengo?

574. Saúl: Ángulos iguales.

575. Profesora: ¿Cuáles serían los ángulos iguales?

576. Noé: Este [$\angle TKJ$y $\angle TJK$].

577. Saúl: Y este [$\angle RKJ$y $\angle RJK$].

578. Profesora: Con lo de los ángulos, ¿será que puedo demostrar otra de las propiedades?

579. Saúl: Pues el otro lado. El otro lado es reflexivo [$\overline{TA}$].

580. Profesora: Pero acá hay otra cosa. Mira que tú me dijiste que [ángulo] TJA era congruente con [ángulo] TKJ**.** Y luego me dijeron que [ángulo] RJK era congruente con [ángulo] JRK. Podemos utilizar esa información, para demostrar la propiedad 5.

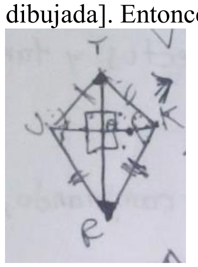
581. Saúl: Sí.

582. Profesora: ¿Por qué?

583. Saúl: Porque estos ángulos son opuestos [$\angle J$ y $\angle K$] y son congruentes porque, digamos, esta medida de este triángulo isósceles [se refiere al $\angle TJK$] es congruente con este [$\angle TKJ$]. Y este [$\angle\angle RKJ$] es congruente con este [$\angle RJK$]. Entonces esa suma de esos dos ángulos, nos da que este es congruente con este [$\angle J \cong \angle K$].

584. Profesora: Listo. Entonces ya tenemos una. Ahora. Entonces ya 5 la demostramos. Veamos 3 o 4, que es en las que más dificultades presentamos. ¿Cómo podríamos mirarla? Ya tenemos otros triángulos congruentes que en algún momento tenemos que poder utilizar. ¿Qué información tenemos?

585. Saúl: No podemos utilizar los triángulos rectángulos que hay. Utilizando la 4 que dice diagonales perpendiculares, entonces como tenemos los triángulos rectángulos. Entonces, los triángulos rectángulos deben tener ángulos de 90 grados. Entonces acá este ángulo es de 90 grados. Este es de 90. Este y este [realiza marcas de ángulo recto sobre una figura dibujada]. Entonces eso implica que las rectas sean perpendiculares…



586. Profesora: Entonces tú me estás diciendo que tengo que poder formar ángulos rectos para que las diagonales puedan ser perpendiculares. ¿La misma pregunta de siempre? ¿Cómo garantizamos eso? […]

587. Saúl: Pues estos dos lados son congruentes [$\overline{JR} \cong \overline{KR}$] y estos dos son congruentes [$\overline{JT} \cong \overline{KT}$]. Entonces deben quedar en un punto exacto para que cuando se trace la otra diagonal sea perpendicular con la otra… Que es la bisectriz.

588. Profesora: Tú me hablas de bisectriz. Entonces vámonos con la bisectriz y miramos qué podemos hacer con la bisectriz. Habíamos dicho, en lo que ustedes habían mirado, que en un triángulo isósceles, ¿qué pasaba con la bisectriz?

589. Noé: Era reflexiva.

590. Profesora: ¿Eso decía?

591. Saúl: La bisectriz de uno de sus ángulos es perpendicular al lado opuesto.

592. Profesora: Entonces, ¿esa bisectriz siempre va a concordar con la diagonal?

593. Saúl: Sí.

594. Profesora: ¿Por qué?

595. […]

596. Saúl: [Realiza un nuevo bosquejo].

597. Profesora: ¿A qué llegaste cuando utilizaste la definición de triángulo isósceles que involucra la bisectriz-perpendicular?

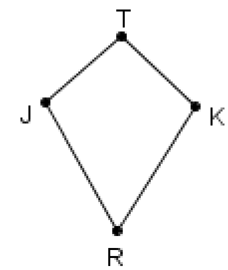
598. Noé: A que la bisectriz es perpendicular al lado opuesto.

599. Saúl: Que como es perpendicular se forma el ángulo de noventa grados.

600. Profesora: Ok. Se forman ángulos de 90 grados. Listo. Y lo que yo les preguntaba era si esa bisectriz siempre iba a ser diagonal. ¿Creen que hay algún momento en el cual eso no vaya a ser diagonal?

601. Saúl: Sí. Que sea diagonal no implica que sea perpendicular. Digamos si la propiedad de diagonales perpendiculares no estuviera, pues la bisectriz podría ser digamos de este punto a este punto [dos puntos que se encuentran en $\overline{TJ}$ y $\overline{RK}$, respectivamente].

ANEXO IV: TRANSCRIPCIÓN GRUPO 2 (LEONARDO, ARMANDO, MARTÍN Y ANDREA)



1. Profesora: Lo primero es que en sus pantallas aparece una construcción, ¿cierto? Lo primero que quiero que ustedes hagan es que exploren con la figura y me digan que propiedades tiene esa figura. ¿Listo? Entonces empecemos. Me dicen todas las propiedades que tenga es figura y las van anotando.[Imagen en pantalla.]

2. Armando: [Arrastra el punto T] [Señala el $\angle TJK$ y el $\angle TKR$] ¿Qué esto es con esta?

3. Andrea: Que J es congruente con K.

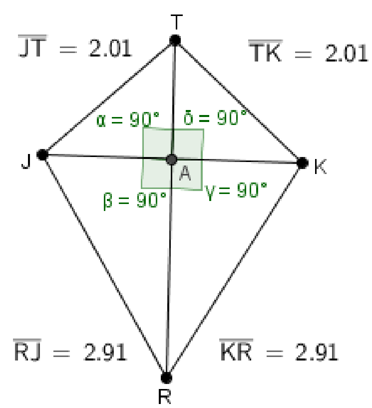
4. Armando: Sí, que J [$\angle TJK$] es congruente con K [$\angle TKR$].

5. Profesor: ¿A qué se refieren con J?

6. Armando: Al ángulo…bueno el ángulo JR es congruente con el ángulo KR. Bueno, el ángulo TJR es congruente con el ángulo TKR [los señala].

7. Profesor: Vayan registrando lo que van diciendo. [Dirigiéndose a Andrea]. Ella escribió fue segmentos. ¿Es sobre los ángulos o sobre los segmentos?

8. Armando: Sí, segmento JR con RK y TJ con KT; ahora el ángulo TJR con TKR.



9. Leonardo: [Mientras Armando habla, Leonardo toma las medidas de los segmentos y traza las diagonales de la figura y arrastra el punto T].

10. Armando: [Se dirige a Leonardo] No, no haga eso… ¿Para qué es eso? [Señala las diagonales]

11. Andrea: [Dirigiéndose a Leonardo.] ¿Usted qué va hacer?

12. Leonardo: Pues para poder escribir ahorita que con cuatro…[duda y no responde]

13. Profesor: ¿Qué líneas trazo ahí?, ¿Qué líneas son esas?

14. Leonardo: Son… esas que se trazaron ahí son…[dirigiéndose al profesor] pues son las diagonales.

15. Profesor: Y, ¿qué propiedades tienen?

16. Leonardo: ¿Fuera de ser las diagonales?

17. Armando: [Interrumpe a Leonardo.] Forman cuatro triángulos rectángulos…

18. Leonardo: Fuera de eso, se están bisecando. Hay cuatro ángulos rectángulos, hay dos lados congruentes y dos lados congruentes…

19. Profesor: [Dirigiéndose al grupo.] Pero esperen, en orden para que lo vayamos registrando, que fue

lo primero que dijeron.

20. Armando: Tiene cuatro triángulos…

21. Profesor: ¿Cómo son esos triángulos?

22. Armando Son rectángulos.

23. Leonardo: Hay dos lados congruentes y dos lados congruentes…

24. Profesor: ¿Esos ya los tenemos? [Dirigiéndose a Andrea]

25. Andrea: Ya, hay dos triángulos isósceles ¿no? ¿Estoy viendo mal?

26. Profesor: ¿Cuáles son los isósceles?

27. Andrea: El de abajo [señala al ΔJRK].

28. Armando: Si, si, sí. Dos triángulos isósceles.

29. Profesor: ¿Por qué son isósceles? [Dirigiéndose al grupo].

30. Armando: Porque hay dos lados congruentes y uno distinto.

31. Profesor: ¿Cuáles son los lados congruentes ahí? [Dirigiéndose a Armando].

32. Armando: Este de 4.82 que son JR con RK y lo mismo arriba. [Señala $\overline{TJ}$ y $\overline{TK}$].

33. Profesor: Entonces, ¿cuántos triángulos isósceles hay?

34. Armando: Hay dos. [Señala ΔJTK y ΔJRK].

35. Leonardo: [Dirigiéndose a Andrea.] Diagonales que se bisecan. ¿Eso ya lo pusiste también?

36. Andrea: Ya.

37. Profesor: [Dirigiéndose a Leonardo.] ¿Qué quiere decir que se bisecan?

38. Leonardo: Que se encuentran acá en la mitad [señala el punto de intersección de las diagonales]. En el punto medio.

39. Sarmiento: ¿Y ambas se encuentran en el punto medio de quién?

40. Andrea El punto medio de las dos diagonales [dirigiéndose al profesor]

41. Leonardo: ¡Ah! En este caso no podría ser porque de acá a acá [señala el segmento entre T y el punto de intersección] no es la misma medida que de acá a acá [señala el segmento entre R y el punto de intersección]. Entonces no se bisecaría.

42. Profesor: [Dirigiéndose a Leonardo] ¿Y sobre la otra diagonal?

43. Leonardo: ¿Y en la otra? Sí…sí se bisecaría porque tanto acá [señala el segmento de extremos J y el punto de intersección de las diagonales] como acá [señala el segmento de extremos K y el punto de intersección de las diagonales] tienen la misma distancia.

44. Andrea: Entonces, ¿coloco que no son diagonales que se bisecan?

45. Leonardo: ¡No! Tienes que poner que hay un punto medio y que en la otra ya no se bisecan porque hay un lado que mide más que otro.

46. Andrea: [Escribe en la hoja: "*solo se biseca en una diagonal la cual es exactamente la mitad*"].

47. Leonardo: [Toma la hoja y lee lo escrito por Andrea]. Solo se bisecan en una diagonal. Hasta ahí bien. Ahora dice: *la cual es exactamente la mitad*. Es que eso no es.

48. Andrea: [Dirigiéndose a Leonardo.] Exactamente la mitad. O sea, es el punto medio exacto solo de una.

49. Leonardo: [Dirigiéndose a Andrea.] Pero entonces ahí faltó… Bueno, lo que yo te dije que ahí ya no se bisecarían porque esta distancia, acá [señala la distancia entre R y el punto de intersección de las diagonales] es mayor que esta distancia [señala distancia entre T y el punto de intersección de las diagonales].

50. Andrea: [Dirigiéndose a Leonardo]. Por eso.

51. Leonardo: [Dirigiéndose a Andrea]. Pero no lo pusiste.

52. Andrea: Pues es que es lo mismo que decir que solo en una diagonal. Es el punto medio exacto y ya. Por ende en la otra diagonal…

53. Leonardo: Pero ponlo.

54. Andrea: No. Es súper redundante. No lo voy a poner.

55. Profesor: Sigamos.

56. Armando: Bueno. Sigamos con las propiedades.

57. Andrea: [Dirigiéndose a Armando]. Mueve T.

58. Armando: Pero solo se puede mover de arriba abajo. [Mueve el punto T].

59. Andrea: Por eso. Pero, ¿por qué?

60. Armando: Por qué se tiene que mantener el rombo.

61. Andrea: En cambio mueve J y si ve que se mantiene todo. [Mueve el punto J].

62. Profesor: Pero esperen. ¿Ya lo definieron como si fuese un rombo?

63. Andrea: No.

64. Armando No. Esto no es un rombo.

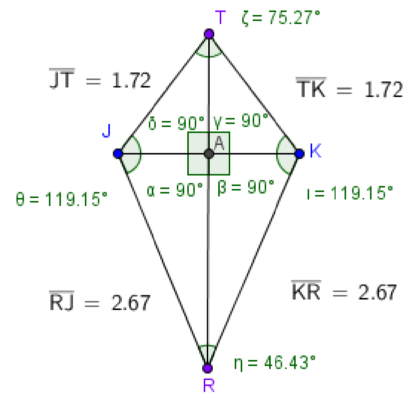
65. Profesor: ¿Por qué no es un rombo?

66. Armando Porque no tiene los lados congruentes.

67. Leonardo: Otra propiedad. [Dirigiéndose a Armando.] Midamos los ángulos.

68. Armando: Pero eso ya lo dijimos: que los ángulos $\angle TKR$ y $\angle TJR$ son congruentes.

69. Profesor: Pero podemos hacer lo que dice Leonardo. [Dirigiéndose a Armando] Midamos.



70. Armando: [Toma la medida de $\angle TJK$, $\angle TRK$, $\angle JTK$ y $\angle JRK$].

71. Leonardo: ¡Ah! Pere, pere, pere… ¿entonces estos triángulos que serían? [Señala ΔTJR y ΔTKR].

72. Andrea: ¿Cómo se llaman esos que los lados miden diferente? [Señala ΔTJR]

73. Armando: Pues busquemos. [Mira las hojas del sistema teórico construido en sesiones anteriores] ¿Ese es obtusángulo? Porque un ángulo mide más de 90. [Dirigiéndose al profesor].

74. Profesor: Esa es una propiedad. Esos triángulos se llaman escalenos. Continuemos con las propiedades de las figuras.

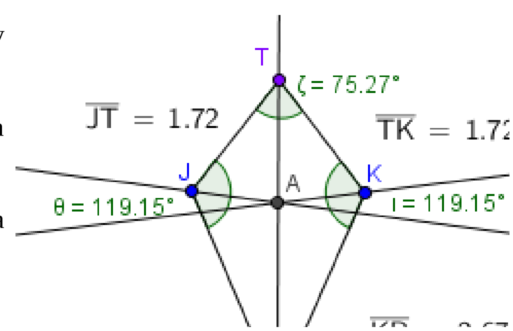
75. Andrea: ¿Cómo se llaman esos que los lados miden diferente? [Señala ΔTJR]

76. Armando: Las diagonales son las bisectrices de los ángulos.

77. Profesor: Y entonces pruebe que son las bisectrices de los ángulos. ¿Qué es una bisectriz?

78. Armando: Una línea que pasa… eee… que interseca por la mitad exactamente del ángulo. O sea, que pasa por toda la mitad del ángulo [señala ∠JTK].

79. Profesor: Vamos a probar. Y miremos como definimos anteriormente bisectriz.



80. Armando: [Traza la bisectriz de $\angle JTK$ y $\angle JRK$ [$\angle TJR$ y $\angle RKT$]

81. Profesor: Miremos las bisectrices. [Dirigiéndose a Armando.] ¿Son las diagonales bisectrices?

82. Armando: [Señala la bisectriz del ángulo $\angle JTK$]. Esta diagonal sí coincide con la bisectriz.

83. Profesor: ¿Que podríamos decir?

84. Armando: Que una diagonal de la figura es la bisectriz de dos de sus ángulos.

85. Profesor: ¿Cómo podríamos llamar esta figura? ¿Qué se les ocurre?

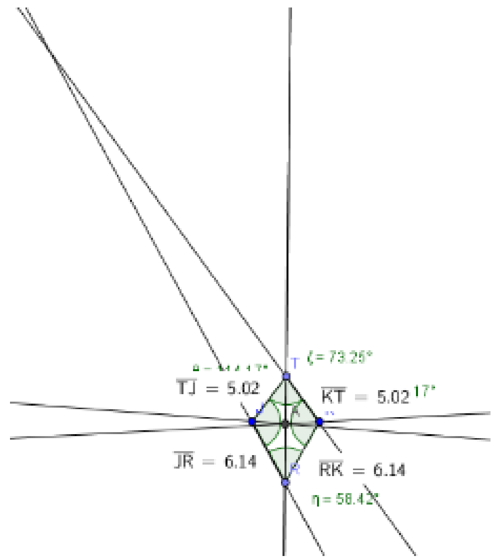
86. Leonardo: Ya sabemos que no es un rombo. [Dirigiéndose al profesor] ¿Podría ser un paralelogramo?.

87. Armando: ¿Cómo es un paralelogramo? Son dos líneas paralelas o sea cuatro.

88. Profesor: Para esta figura, ¿Cuáles tendrían que ser paralelas?

89. Leonardo: Esta y esta [señala $\overline{TJ}$ y $\overline{TK}$] y esta y esta [señala $\overline{JR}$ con $\overline{RK}$]. O sea, que sea como un triqui pero al revés.

90. Armando: [Traza $\overleftrightarrow{TK}$ y $\overleftrightarrow{JR}$].



91. Profesor: [Dirigiéndose a Armando] ¿Usted va intentar mostrar que es un paralelogramo?

92. Andrea: Pero no es porque se encuentran en un punto. Mira [dirigiéndose al profesor al señalar las rectas construidas por Armando].

93. Leonardo: Al parecer se encuentran en un punto. Mira [Armando da zoom y reduce la pantalla y muestra el punto de intersección de las rectas]. No. En este caso ya descartamos que no es un paralelogramo.

94. Armando: O sea, no es un paralelogramo.

95. Profesor: Entonces denle ustedes un nombre. ¿Cómo llamarían esa figura?

96. Armando: Una cometa [risas].

97. Andrea: ¿Una cometa? [Risas]

98. Profesor: Pues llamémoslo cometa. Esa va a ser nuestra cometa. ¿Tiene más propiedades?

99. Armando: Mmm… No.

100. Profesor: Ok. Entonces, miremos nuestra lista de propiedades y enumerémosla.

101. Andrea: [Enuncia y enumera las 12 propiedades encontradas por el grupo

1. $\overline{JR} \cong \overline{RK}$
2. $\overline{TJ} \cong \overline{TK}$
3. $\angle TJR \cong \angle RKT$
4. $\angle TTK \cong \angle JRK$
5. Cuatro triángulos rectángulos

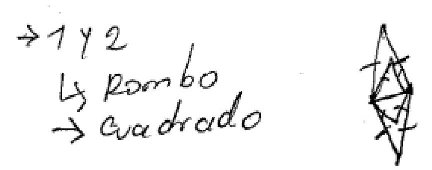
6. Dos triángulos isósceles
7. Hay un punto medio
8. Solo se biseca en una diagonal la cual es exactamente la mitad
9. Dos lados adyacentes congruentes
10. Dos triángulos escalenos
11. Los lados no son paralelos pues se encuentran en un punto determinado
12. Una de las diagonales es bisectriz $\overline{TR}$].

[Se realiza la puesta en común de las propiedades descubiertas por ambos grupos] [Pausa]

102. Martin Mm la [propiedad] 1 y la [propiedad] 2 dos no definen la cometa. [Dirigiéndose al profesor].

103. Profesor: ¿Por qué no la definen?

104. Martin Porque vea. [Dibuja en la hoja]. Si tiene un par de lados congruentes y otro par de lados congruentes puede ser mmm…. un rombo o también un cuadrado.

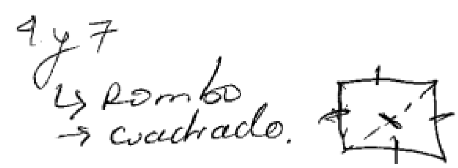


105. Andrea Siii… Es verdad. Ahí se ve que cumple con las propiedades 1 y 2 y no es una cometa.

106. Martin Y, por ejemplo, mire: si tomamos la [propiedad] 4 [diagonales perpendiculares] y la 7 [las diagonales forman dos triángulos isósceles] también puede ser un cuadrado o un rombo. [Dibuja en la hoja un cuadrado]

107. Profesor ¿Y cómo lo justifica?

108. Armando Pues fácil… porque como es un cuadrado, este lado y este lado son iguales. [Señala dos lados adyacentes del cuadrado y marca la congruencia de los lados]. Entonces los triángulos que quedan ahí son isósceles.



109. Leonardo: Yo creo que todas no, excepto la de una sola diagonal biseca la otra y la de los dos triángulos son adyacentes… eee… congruentes. ?. [Dirigiéndose al profesor]

110. Profesor: [Dirigiéndose a Leonardo]. Espere, espere… Entonces usted dice una diagonal que biseque y…

111. Leonardo: O sea, yo estoy diciendo sólo una diagonal que biseca a la otra, la 3, y la 1, que es que tiene un par de lados adyacentes congruentes, y la 2.

112. Profesor: Bueno. Entonces probemos.

113. Leonardo O sea, la 1 [un par de lados adyacentes congruentes], la 2 [otro par de lados adyacentes congruentes] y la 3 [solo una diagonal biseca a la otra] ya hacen la figura y las otras…

114. Profesor: No, pero espere. Empecemos de nuevo. Escuchemos a Leonardo. ¿La [propiedad] 1, la 2 y

la 3 ya hacen la figura? Lo que queremos es… [Dirigiéndose al grupo]

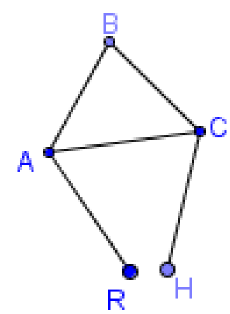
115. Leonardo: Pues demostrémoslo. [Señala la pantalla de GeoGebra y empieza a realizar una construcción en GeoGebra].

116. Profesor: Lo que nos piden es cuáles propiedades no definen nuestra cometa. Listo. ¿Cuáles propiedades? Y que usted diga aquí, aquí y aquí pasa esto y no sería una cometa. Entonces vamos a mirar Leonardo dice 1, 2 y 3. Miremos… si la 1, 2 y 3 no la definen ¿por qué podría ser? Entonces la primera es un par de lados adyacentes congruentes y otro par de lados adyacentes congruentes…

117. Leonardo: [Empieza a realizar una construcción en Geogebra].

118. Profesor: [Dirigiéndose a Leonardo] ¿Qué vas hacer? ¿Los dos lados congruentes?

119. Leonardo: ¡Ah! Sí, es que… es que para intentar demostrar que con la 1, la 2 y la 3 si se puede hacer y pues, ¿cómo se pude hacer?… De primeras, haciendo los dos lados que son congruentes. [Construye dos pares de segmentos utilizando la herramienta segmento de longitud fija, arrastra un par de segmentos determinando el lugar donde se intersecan].



120. Profesor: ¿Si entienden lo que va hacer Leonardo? ¿O no?

121. Armando: Si.

122. Profesor: ¿Qué es lo que va hacer Leonardo?

123. Armando: Dos triángulos…

124. Andrea: Dos lados…

125. Profesor: Dos triángulos. [Dirigiéndose a Leonardo.] ¿Usted habló de triángulos?

126. Leonardo: No, acá estamos hablando en este momento… No solo de triángulos, sino de un triángulo isósceles… No isósceles sino congruentes…

127. Profesor: ¿Pero de donde está tomando esa propiedad? Usted dijo que la 1, 2 y 3 definen la cometa. Vamos a mirar si son suficientes.

128. Leonardo: [Construye dos pares de segmento utilizando la herramienta segmento de longitud fija].

129. Profesor: Imagínense ustedes una figura que no sea la cometa, que tenga dos lados adyacentes congruentes. ¿Cuál se les ocurre? En un cuadrilátero. Si quieren rayen.

130. Armando: [Dibuja un rectángulo].

131. Profesor: ¿Cuáles ahí son congruentes?

132. Armando: [Señala los lados opuestos].

133. Profesor: ¿Y son adyacentes?

134. Armando ¡Ah! No.

135. Profesor: ¿En qué figura lo serían?

136. Armando: En un cuadrado. [Dibuja cuadrado].

137. Profesor: Ahí, ¿los dos lados adyacentes son congruentes y los otros dos lados adyacentes son congruentes?

138. Armando: ¡Sí!

139. Profesor: Entonces ya tenemos la propiedad 1 y 2. Ahora miremos si cumple la 3 propiedad. Una diagonal biseca la otra.

140. Armando: [Dibuja las diagonales del cuadrado].

141. Leonardo: Pues en este momento se está cumpliendo la 1, la 2 y la 3. [Dirigiéndose al profesor.] Pero es cierto lo que usted dice: si uno no pensara pues… si uno no supiera que es así, sale de otra forma.

142. Profesor: Lo que intentó Leonardo fue construir la figura con esas propiedades. Pero lo que está diciendo él [Leonardo] es que otras figuras pueden cumplir las propiedades. Entonces, en esta figura que usted construyó [señala el cuadrado de la hoja], comprobó que el cuadrado cumplía con las dos primeras propiedades. ¿Cumple la tercera? ¿Que una sola diagonal biseca la otra?

143. Armando: No. Las dos se bisecan.

144. Profesor Sí. Exacto. Bien. Entonces, lo que queremos es que ustedes digan una definición que no sea esta figura con esta figura. Que si yo tomo este grupo de propiedades no son la comenta. ¿Cuáles?

145. Leonardo: Sabe que puede ser, estas que yo dije y complementarle algo para que sea más nítida.

146. Profesor: Sí, pero recuerde que el ejercicio no es definirlo ahora, es un conjunto de propiedades que no definan la cometa. ¿Cuáles?

147. Leonardo: ¡Ah! Ya.

148. Profesor: Entonces utilicemos el programa para hacer eso y centrémonos en las propiedades. Entonces tomemos un conjunto de propiedades y recuerden si ya las habíamos trabajado en otra figura.

149. Leonardo: Mmmm si de pronto la de diagonales perpendiculares…

150. Profesor: ¿Diagonales perpendiculares, esa donde la trabajamos?

151. Leonardo Mmm.. Si no estoy mal, en el cuadrado…

152. Profesor: ¿El cuadrado tiene diagonales perpendiculares?

153. Armando: Si

154. Andrea: Tomemos un conjunto de propiedades. Digamos la 3 y la 4. Y construyamos desde el inicio.

155. Leonardo: En este caso lo primordial sería… que los dos lados miden lo mismo…[se refiere a que se bisecan]

156. Profesor: ¿Pero cómo garantiza que se biseque?

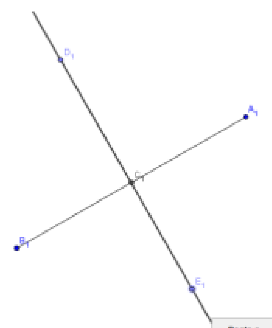
157. Armando: Punto medio.

158. Profesor: Intente construirla. [Dirigiéndose a Armando]

159. Armando: [Construye un segmento y ubica el punto medio. Luego construye una recta perpendicular que pasa por el punto medio y un segmento sobre la recta]

160. Profesor: Pero recuerde que lo que tiene ahí es una recta construya el segmento.

161. Armando: [Construye una segmento en la recta]



162. Profesor: ¿Tenemos dos diagonales Perpendiculares y una biseca a la otra?

163. Armando Sí.

164. Profesor: Entonces construyamos la figura que resulta.

165. Armando: [Construye segmentos entre las diagonales].

166. Profesor: Ok. Observen. ¿Cumple las propiedades de la cometa?

167. Armando: Cuando la diagonal que biseca es más larga que la otra.

168. Profesor: Arrastre la figura para, hasta encontrar que no sea una cometa… digamos…

169. Armando ¡Ay! No. Siempre sigue siendo cometa…[arrastra la figura]

170. Martin: Vuélvalo cuadrado.

171. Profesor: ¿Lo puede volver cuadrado?

172. Martin: Si.

173. Armando: [Arrastra la figura hasta hacerlo un cuadrado].

174. Profesor: ¿Cómo prueban que es cuadrado?

175. Leonardo: Mirando las distancias y sí todas las distancias miden lo mismo, podemos comprobar que

es un cuadrado.

176. Martín: Midiendo los ángulos si son de 90…

177. Profesor: Él dice: ¿midamos los ángulos o midamos los ángulos?

178. Andrea: Midamos los lados…

179. Armando: [Utiliza distancia y mide los lados y arrastra la figura hasta que parece un cuadrado] Sí da cuadrado. Entonces esas propiedades no lo definen…

180. Armando: Si da cuadrado, entonces esas propiedades no lo definen…

181. Leonardo: Profe, pero no. La embarramos. Usted me corrige ¿no?…porque con la propiedad 3 y 4 nos están diciendo solo una diagonal biseca a la otra, eso quiere decir [muestra las diagonales de la figura] que la otra…

182. Armando: [Interrumpe a Leonardo]. En el cuadrado no se cumple…

183. Andrea: Porque en el cuadrado las dos se bisecan…

184. Leonardo: Entonces lo hicimos mal todo.

185. Profesor: No. Espere. ¿Qué puede decir ahí?

186. Leonardo: Pues hagamos otra figura, arrástrela.

187. Armando: [Arrastra la figura].

188. Leonardo: Vea. Volvimos a la cometa.

189. Andrea: No….Que video [Risas]

190. Armando: No, la 3 y la 4 si son.

191. Profesor: ¿Si son qué?

192. Armando: O sea, si definen la cometa.

193. Leonardo: O sea póngame atención… ya sabemos con cuales sí podemos definir la cometa. Eso es una cometa reaspera…
[…]

194. Profesor: No tienen otro ejemplo ¿Qué no sea cometa ahí? Martin usted hablo del rombo… podríamos construir un rombo ahí?

195. Armando: Si, pero es que las diagonales se bisecan…

196. Profesor: ¿‘En el rombo las diagonales se bisecan?

197. Armando: Si, porque tienen las mismas cualidades del cuadrado.

198. Martin: [Dibuja un cuadrado] Si lo volteamos va quedar un rombo, es lo que se desde primaria. Si un cuadrado lo volteo es un rombo. No sé si sea verdad o no.

199. Armando: [Arrastra la figura hasta hacerla un rombo] ufff que man tan clarito yo…

200. Leonardo: Pero ahí también podemos decir que se bisecan.

201. Profesor: ¿Son suficientes esas dos propiedades?

202. Leonardo: Pues hasta el momento parece que si…

203. Armando: Yo digo que ahí está bien [señalando el rombo] porque las dos diagonales si se bisecan…

204. Leonardo: Sabe cómo lo podemos comprobar: midiendo…

205. Armando: [Interrumpe a Leonardo] Pues mida los lados.

206. Leonardo: Eso es lo que yo estoy diciendo [señala las diagonales] estamos volviendo a lo mismo. Eso quiere decir que esas dos servirían.

207. Armando [Mide las longitudes de los lados, los ángulos y de los segmentos determinados por los extremos de las diagonales y el punto de intersección para mostrar que se bisecan].

208. Leonardo: Usshhh buena [aplausos] ya…

209. Profesor: ¿Entonces que mostraron ustedes?

210. Leonardo: Ahí demostramos que solo con esas dos es suficiente para hacer la cometa.
[Puesta en común de las propiedades que definen la figura]

211. Profesor: Bueno. Bien. Entonces recuerden que si ustedes construyeron la figura con las propiedades suficientes y necesarias, por tanto bajo la función arrastre las propiedades se deben mantener. Arrastremos esa figura a ver si se conservan las propiedades. [señala la figura construida en geogebra]

212. Armando: [Arrastra la figura]

213. Profesor:: ¿Se conservan? [Dirigiéndose al grupo]

214. Andrea: Sí .

215. Leonardo: Sí. Están igual…igual [Señala los segmentos congruentes mostrando que las distancias se mantienen congruentes al arrastrar la figura].

216. Profesor: Entonces cuando les pregunten por que la 3 y la 4 la definen ¿Qué van a decir? [Dirigiéndose al grupo]

217. Armando: Porque cumple con el resto de propiedades.
:

218. Andrea:: Solo con esas se pueden hallar las otras [Dirigiéndose al profesor].

219. Armando: Pues es una definición en económica [Dirigiéndose al profesor].

220. Profesor: ¿Y es una definición económica? ¿Por qué es una definición económica?

221. Leonardo: Porque es la más sencilla y cumple con todo

222. Profesor: Bueno ahora. Ahora vamos a mirar si la de ellos [Dirigiéndose a las propiedades dadas por el otro grupo que definen la figura] vamos a mirar la 1,2 y 11. Miremos si con esas podemos definirla o podemos buscar un contraejemplo y decir que no la define. construyan una figura que tenga un par de lados adyacentes y…

223. Armando: ¿Pero cómo hacemos eso? O sea dos pares de lados.

224. Leonardo: Hágalo como lo no lo están diciendo. Como si no supiera nada del anterior…

225. Armando: Puede ser una cuadrado.

226. Profesor: Bien… pero mire la propiedad 11 dice tiene dos adyacentes no congruentes.

227. Leonardo: O sea hacer esa figura con diferentes lados pero que no cumpla la figura

228. Armando Espero yo me lo imagino…

229. Leonardo: [Realiza una construcción blanda utilizando segmento de longitud fija para hacer dos pares de lados congruentes y une los segmentos de manera que queden dos pares de lados adyacentes congruentes y un par no congruentes hasta construir la cometa]

230. Leonardo: Todos los lados miden diferente, pero los de adentro son congruentes. Listo ya tenemos el 11. Ahora tiene un par de lados adyacentes congruentes vea [señala el par de lados congruentes] y acá se repite lo mismo y ahí no estamos cumpliendo lo que estamos haciendo.

231. Armando ¿Cómo así?

232. Leonardo: O sea: esto no cumple con la figura.

233. Profesor: Pero… o sea no basta… no basta, como en la 3 y la 4.

234. Leonardo: Exacto no basta, falta…exacto

235. Andrea: ¡Ah! Somos lo mejor…

236. Leonardo: Ya… acá ya cumplimos…

237. Andrea: Eso no bastan esas tres [refiriéndose a las propiedades] para decir que todas esas forman una cometa

238. Profesor: ¿Por qué?

239. Leonardo:: O sea acá nosotros ya hicimos una figura con la de ellos y estamos demostrando que no es completa…

240. Profesor: ¿Eso no es una cometa?

241. Leonardo: No

242. Profesor: Pero espere…ustedes la construyeron utilizando 1, 2 y 11 y utilizando esas deben mostrar que no se cumplen las otras propiedades para que sea la cometa diga ¿Por qué no se cumple?

243. Leonardo: En este caso pues… nosotros pusimos todas las propiedades pero no se cumple no alcanza a ser la cometa…

244. Profesor: Pero, por eso... ¿pero diga porque no es cometa?

245. Leonardo: Listo le voy a decir porque no es cometa….

246. Armando: No. Yo creo que si es cometa Leonardo…

247. Sarmiento: El problema es que Leonardo la ve de una forma muy incompleta para la cometa que nosotros la hicimos.

248. Martin Sí. No, pero si la tiene solo una diagonal biseca la otra [mirando la construcción]

249. Leonardo: A ellos solo les faltaría la 3 y seria el mismo que nosotros…

250. Profesor: ¿Y no es suficiente con esas?

251. Armando: No sé.

252. Leonardo: Yo digo que no…

253. Profesor: Pero para decir que no es suficiente es porque usted muestre que no siempre va a ser cometa. Muestre algo que no de cometa….

254. Leonardo: Vea yo le voy a mostrar porque... vamos a empezar por la 11tiene dos pares de lados adyacentes no congruentes, hasta ahí está bien, tiene un par de lados adyacentes congruentes, vea hasta ahí no está cumpliendo…

255. Profesor: ¿Pero espere ahí no da cometa con lo que ellos dijeron?

256. Martin Si la da…

257. Armando Sii , si la da…

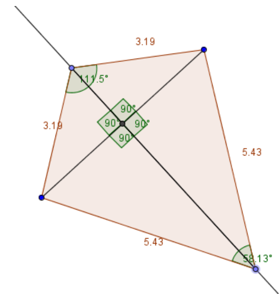
258. Martin Si da porque recuerda profe lo que nosotros habíamos dicho los lados de cada lado de la cometa siempre tienen la misma medida de las que están opuestas mejor dicho entre estas dos de acá y estas dos de acá [señala los segmentos congruentes en la construcción] si siguen siendo iguales, seguiría siendo una cometa pero lo que yo diría sería un rombo si las medidas fueran iguales..

259. Profesor: ¿Pero usted dice un contraejemplo, el rombo nos serviría? Mostrar un contraejemplo que no sea cometa pero que cumpla esas propiedades…

260. Armando Quiero intentar algo… [inicia una construcción]

[El grupo no justifica porque las propiedades 1, 2 y 11 no definen o si la cometa]

261. Profesor: Volamos a la figura que construyeron con las propiedades 3 y 4. Recuerden que nosotros construimos esta con las propiedades 3 y 4. Ahora demostremos a través de unos pasos como en las clases anteriores que las otras propiedades se cumplen.



262. Profesor: Tenemos que en las dos diagonales, en que una biseca la otra. Y son perpendiculares. ¿Cómo muestro que los dos segmentos de arriba son congruentes?

263. Armando Pues porque miden lo mismo [Señalan las medidas de los segmentos]

264. Profesor: Pero miden lo mismo después de construirlas, pero lo tengo esto y esto [Señala las diagonales que se biseca y son perpendiculares] como podría mostrar que miden lo mismo los segmento?

265. Armando Propiedad reflexiva de segmento... ¿algo así? .propiedad reflexiva de segmentos…

266. Profesor: La reflexiva ¿dónde está?

267. Armando [Señalan el segmento de J a el punto de intersección de las diagonales]

268. Profesor: Tenemos un lado congruente a ese lado, ¿Qué más pueden decir para justificar la congruencia de los segmentos?

269. Armando ¿El ángulo?

270. Profesor: ¿Cuál ángulo?

271. Armando: Los ángulos de 90°, estos dos ángulos [Señalan las entre las perpendiculares]

272. Profesor: ¿Qué le permite decir que es de 90°?

273. Armando: Eee… las diagonales…

274. Leonardo: Que son perpendiculares…

275. Profesor: Porque son perpendiculares sabemos que ese es de 90°. ¿Qué más necesitamos?

276. Armando: ¡Ah! Pues podemos hacerlo con el triángulo isósceles… señala [ΔTRK]

277. Leonardo: ¡Aaaah! Pues las propiedades de LAL para comprobar que es isósceles y eso [observa la hoja en la que se ha consignado el sistema teórico con el que cuentan].

278. Andrea: Mmm, si…

279. Armando: Ya tenemos el ángulo… ahora faltan dos propiedades que puede ser AAL, la otra propiedad que tenemos…

280. Leonardo: La bisectriz…

281. Armando: Sí. La bisectriz…

282. Profesor:: ¿Pero nosotros sabemos que es bisectriz? Usted solo tiene una biseca la otra y perpendicular.

283. Armando: Espere este lado es congruente con este, propiedad reflexiva. [Señala $\overline{RA}$]. Entonces tenemos RA…mmmm puede ser otro ángulo o lado…

284. Leonardo: Este de acá abajo es el lado. [Señala el $\overline{JA}$ y el $\overline{KA}$] ayyyy… si esa es

285. Armando: ¡Ahhhh!.. siiii, el lado es el lado…..[Risas]

286. Profesor: ¿Por qué?

287. Armando: Pues por el punto medio, porque el punto medio hace que lo parta por la mitad…

288. Leonardo: Que buena…[Risas]

289. Profesor:: ¿Entonces qué criterio tiene ahí?

290. Armando: .LAL

291. Profesor: ¿Entonces concluyen?

292. Armando: Que este lado es congruente con este [señala $\overline{JR}$ y $\overline{RK}$]

293. Profesor: Entonces escríbanlo.

294. Andrea: [Asume la tarea de reportar los argumentos]. ¿Entonces cómo lo escribo?

295. Armando: Entonces al tener lados… lados… las rectas perpendiculares, podemos saber que tenemos ángulos de 90°

296. Leonardo: Ahí están los dos ángulos de 90°. Después de haber sacado los ángulos de 90°. Sacamos la propiedad reflexiva [señala el $\overline{TA}$]

297. Andrea: mmm…

298. Leonardo Luego de la diagonal que se biseca, por el punto medio…

299. Armando: Sabemos que hay la misma distancia en los dos lados. [Señala el $\overline{JA}$ y el $\overline{KA}$]

300. Leonardo Y ahí comprobamos el criterio ALL

301. Armando: Nooo, era LAL

302. Leonardo Y pues esos dos lados [señala $\overline{JR}$ y $\overline{RK}$] son congruentes y ya.

303. Profesor Ahora estos dos… este lado congruente con este [señala $\overline{JR}\ y\ \overline{JK}$]

304. Armando: Primero rectas perpendiculares entonces esto forma 90° con esto [señala [$\angle JMR$] y [$\angle KMR$]

305. Leonardo Aquí ya tenemos el primer ángulo. Después la propiedad reflexiva [señala $\overline{RM}$] por ultimo…

306. Armando: Como tenemos el punto medio sabemos que este lado [señala $\overline{JM}\ y\ \overline{MK}$] es igual a este

307. Entonces por el mismo argumento [Señalando el argumento descrito en la justificación anterior]

308. Leonardo Comprobamos criterio LAL.

309. Profesor Bien ahora miremos la 6 [Dos ángulos opuestos no congruentes]

310. Armando: Dos ángulos opuestos no congruentes.

311. Profesor:: ¿Cuáles son los ángulos?

312. Armando: Serian este y este [señala $\angle JTK$ y $\angle JRK$]. No son congruentes

313. Leonardo: ¿Y toca demostrar que no son congruentes? Pues no son congruentes porque esta no biseca a la otra [Señala las diagonales]

314. Armando: Exacto, mire acá nos están diciendo que una diagonal no biseca la otra. Entonces este lado es diferente de este lado [señala $\overline{TJ}$ y $\overline{JR}$] por tanto el ángulo no es igual al de arriba.

315. Profesor:: ¿En el triángulo? O en…

316. Leonardo: : Es que usted nos acabó de decir, que cómo comprobar que los dos ángulos opuestos no son congruentes. Este ángulo no es congruente con este ángulo [señala $\angle JTK$ y $\angle JRK$]. Por lo tanto ahí le estamos demostrando que no.

317. Profesor:: Sí, pero debe buscar la manera de mostrar lo que quiere decir…generar una serie de razonamientos como lo hicieron en el ejercicio anterior.

318. Armando: Pues porque… o sea esta si hace que parta esta línea por la mitad [señala $\overline{TR}$] pero este no hace que se parta por la mitad… [señala $\overline{JK}$]. Pero entonces no sé cómo explicarlo. O sea la recta horizontal si biseca la vertical pero la vertical no biseca la otra.

319. Profesor:: ¿Entonces eso que genera?

320. Armando: Pues que un lado sea más largo, por lo tanto el ángulo es diferente al otro. Por lo tanto el ángulo opuesto es diferente del otro.

321. Profesor:: Bueno espere. Miremos los triángulos. [Señala ΔJTK y ΔJRK] ¿Cómo son?

322. Leonardo En este momento no son congruentes. Los dos triángulos no son adyacentes ni son congruentes... los dos cada uno… Los dos son isósceles. Hasta ahí bien. Pero entre los dos no son adyacentes…

323. Armando: No son congruentes…[Interrumpiendo a Leonardo].

324. Profesor:: Entonces, ¿usted quiere mostrar que los triángulos comparten un lado, pero no son congruentes, para mostrar que los ángulos tampoco son congruentes?

325. Armando: ¿Cómo mostramos que no son congruentes?

326. Leonardo:: Pues es escribir lo que acabamos de decir. Que son isósceles pero no son congruentes entre sí los dos.

327. Profesor: Y al no ser congruentes entonces los ángulos correspondientes entre sí no son congruentes. ¿Por qué mire este lo comparte? [Señala $\overline{JK}$].

328. Leonardo:: Lo comparten es porque la diagonal lo biseca a los dos…

329. Armando: O sea la vertical biseca la horizontal, pero la horizontal no biseca la vertical.

330. Leonardo:: Son congruentes…

331. Profesor ¿Son congruentes los triángulos?

332. Armando:: Nooo.. son isósceles pero no son congruentes…

333. Profesor ¿Y al no ser congruentes?

334. Leonardo Al no ser congruentes los ángulos son diferentes…

335. Profesor ¿Y cómo colocar eso en una serie de argumentos?

336. Leonardo Eso lo que acabamos de decir pero organizarlo bien.

337. Armando: O sea no son congruentes ¿Por qué?

338. Leonardo No son congruentes porque los dos son diferentes triángulos… los dos son isósceles pero no son congruentes.

339. Armando: Pero demuéstrelo con propiedades. ¿Si me entiende?

340. Armando::: Es que la distancia de esta perpendicular [señala $\overline{TR}$] es más larga que la otra…Es que no sé cómo demostrarlo…

341. Armando:: Bueno la propiedad de la figura es que solo una diagonal biseca la otra, podemos poner definición de cometa…entonces al ser una diagonal bisecar a la otra, obvio un lado es más largo al ser un lado más largo el lado cambia y al cambiar un lado no es congruente con el

otro.

342. Profesor:: Bueno. Hee nosotros vimos que construimos a través de unas propiedades y las otras se generan a partir de la construcción. Ustedes pudieron demostrar la 1 y la 2 en la 6 y la 7 aun no lo han demostrado pero tienen argumentos.

343. Leonardo: : ¿Cómo así?

344. Armando: Demostrar es decir las propiedades como hicimos con LAL

345. Leonardo Bueno yo entiendo eso… como así es. La forma de comprobarlos seria decir como los dos lados la distancia es diferente la única forma de demostrarlo es medirlos y nos dio diferente… es la forma de comprobarlo.

346. Profesor De mostrarlo…

347. Leonardo: Ahí lo demostramos…

348. Profesor Recuerde que por demostrar tenemos una serie de afirmaciones y razones. Que uno genera para llegar a una conclusión…

349. Armando: Haaa entonces ya… toca ver la porpiedad que falta… o sea para que si. O será por decir aquí si cumple [$\angle JTK$] por decir LAL entonces acá no cumple por que….

350. Leonardo: Pero acá no sé cómo demostrarlo para lo que estás diciendo.

351. Profesor: Bien. Vamos a dejar esos argumentos ahí. Nosotros ya lo definimos como 3 y 4 [diagonales perpendiculares y una diagonal biseca la otra] si ven que 3 y 4 no están presentes en la figura... es decir…no constituyen la figura. Esta es la cometa [señala $\overline{JT}$, $\overline{TK}$, $\overline{KR}$ y $\overline{RJ}$] ¿ahí se ven 3 y 4?

352. Armando: : No

353. Profesor: Bien. ¿Con que propiedades está constituida la figura?

354. Armando: : Mm dos lados iguales [señala $\overline{JR} y$ $\overline{RK}$ luego $\overline{JT}\ y\ \overline{KT}$]]

355. Profesor: Ok. 1 y 2 ¿sí o no? ¿la 5 y la 6 también aparecen? ¿Ángulos opuestos congruentes se ve ahí?

356. Armando: : Si y ángulos opuestos no congruentes.

357. Profesor: Miremos si solo con esos podemos definir cometa.

358. Martin: Pues ahí mismo lo mostramos. Porque no vamos a decir sino los procesos que nosotros dimos ahí ya lo podemos dar los ángulos que son iguales de la cometa, entonces

dependiendo de eso ya podemos hacer…

359. Profesor: Entonces construyámoslo con esas propiedades. Listo.

360. Leonardo Pero no. Sabes que no. Porque ustedes nos dijeron a cada criterio fue porque tu dijiste… estamos hablando de una cometa, ¿sí? Pero tú nos dijiste a nosotros que no hiciéramos la cometa… o sea a nosotros no nos están dando nada, nosotros tenemos que armarla a uno no le están diciendo tiene que hacer una cometa. No… es sin la cometa. Venga présteme la hoja. [Dirigiéndose a Andrea]

361. Profesor: O sea a través de las propiedades…

362. Leonardo: O sea hacer la figura con las que tú nos dijiste… pero sin saber que es una cometa a ver si nos da. Ahí si quedamos perdidos, mientras que con la de 3 y 4 sin que nos digan la figura si da.

363. Profesor: No pero es que yo no les estoy dando la cometa, yo les estoy diciendo…

364. Leonardo: Claro usted nos dijo vea la cometa, nos dibujó la cometa… tu hiciste eso…

365. Profesor Pero lo que queremos es mostrar que con 1, 2,5 y 6 da una cometa.

366. Leonardo: Pues si pero a lo que yo voy es a… bueno si eso es cierto. Pero lo que estás diciendo con la otra profesora es que la figura la tenemos que hacer esto sin saber cuál va a ser la figura.

367. Profesor: Si a través de las propiedades debe constituirse.

368. Leonardo Exacto…exacto…exacto estamos hablando de la cometa y ahí si nos dices todo, entonces ahí no entraría lo que nos estas diciendo, porque no están dando la figura.

369. Profesor Pero yo le doy la figura pero usted llega a ella a través de las propiedades

370. Leonardo Pues sí pero se supone que no nos deben dar la figura sino solo con las propiedades llegar a la figura.

371. Profesor No. Porque por ejemplo usted conocía el cuadrado y hayamos otra definición pero usted ya conocía el cuadrado.

372. Leonardo [Risas]

373. Profesor Vamos a 1,2, 5 y 6.

374. Martin: Ya profe…

375. Profesor: ¿1,2,5 y 6 lo construyo?

376. Martin Si

377. Profesor ¿Y da la cometa?

378. Martin: Si da la cometa. El primer paso dice: tiene un par de lados adyacentes congruentes que es $\overline{JT}\ y\ \overline{TK}$ ¿cierto? entonces acá podemos decir que tenemos T, J y K [dibuja tres T, J y K con una distancia aparentemente congruente entre $\overline{JT}\ y\ \overline{TK}$ y traza los segmentos]. Entonces los trazamos y ya nos da un lado adyacente ¿cierto? El segundo paso nos dice que hay dos ángulos que es ∠TJR que es acá [construye un ángulo ∠TJR] y ∠TKR [construye un ángulo ∠TKR aparentemente congruente con ∠TJR]] la cual son congruentes entre sí mismos [traza los segmentos $\overline{JR}\ y\ \overline{RK}$] . Este es el primer paso [escribe el numero 1 sobre los segmentos $\overline{JT}\ y\ \overline{TK}$] El segundo paso fue el de los ángulos estos dos [marca con una línea los ángulos ∠TJR] y ∠TKR] que son congruentes. Y el tercer paso es… ¿Cuál es?... tiene ángulos opuestos no congruentes a ya. Que este ángulo con este ángulo [señala ∠JTK] y ∠JRK] que nos son congruentes debido a que este ángulo [señala ∠JTK]] es mayor de 90° y este [señala ∠KRJ] es menor de 90°. Y ya me da la cometa.

379. Profesor: Ok. Vamos a realizar la construcción de Martin en Geogebra.

380. Martin: Haga dos líneas cerradas.

381. Leonardo: ¿Pero qué es lo que usted quiere hacer?

382. Martin Dos líneas congruentes

383. Leonardo [construye dos segmentos de longitud fijo con un punto común $\overline{AB}\ y\ \overline{BC}$]]

384. Martin Ese el punto 1 y 2 [Segmentos adyacentes congruentes] ahora vamos a hacer el punto 5. Que son estos que van a ir acá [señala los puntos A y C]

385. Leonardo [construye dos ángulos ∠BAB´] y ∠BCB_1] dada la amplitud de 98°]

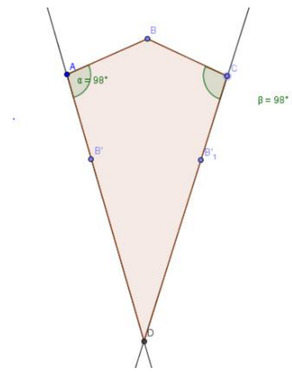
386. Martin Ahora nos dice tiene ángulos opuestos…

387. Leonardo [construye dos rectas una que pasa por los puntos A y B´ y otra que pasa por los puntos C y B_1]

388. Martin Haga un punto ahí . [señala la intersección de las rectas]

389. Profesor Si haga un punto de intersección y luego el polígono [construye punto de intersección entre las rectas]

390. Martin Ahora haga el polígono y une los puntos.


B
A
α = 98°
C
β = 98°
B'
B'1
D

ANEXO V: TRANSCRIPCIÓN DE LA SOCIALIZACIÓN

1.	Profesora:	Bien. Entonces ya cada grupo estuvo trabajando o explorando la figura. Ahora vamos a ponernos de acuerdo para mirar qué propiedades vamos a estudiar. Entonces, voy a ir preguntándole a cada grupo una propiedad. Vamos a empezar por aquellas propiedades que involucran las partes de la figura, es decir, sus lados y sus ángulos. Es decir, todavía no vamos a hablar de sus diagonales. Entonces, respecto a los ángulos y los lados de la figura, ¿qué encontraron? […]¿Qué descubrieron?
2.	Saúl:	Que ninguno de sus ángulos son de noventa grados.
3.	Profesora:	Entonces una primera propiedad que descubrieron es que ninguno de sus ángulos es de noventa grados [Escribe en el tablero].
4.	Andrea:	¿Siempre es menor de noventa sus ángulos?
5.	Profesora:	¿Qué otra propiedad encontraron?
6.	Armando:	Tiene dos ángulos opuestos congruentes
7.	Leonardo:	Yo tengo una pregunta.
8.	Profesora:	Dime.
9.	Martín:	En dado caso de que uno no lo haya visto, ¿uno cómo puede verificar que en este caso que ellos dijeron que ninguno de sus ángulos mide noventa grados… cómo se puede escribir? En este caso sí se cumple lo de noventa grados pero va por dentro, pero en ese caso se está midiendo es lo de afuera…
10.	Profesora:	¿Cuál? […] Supongo que es algo que también me preguntaron acá. Cuando tú dices por dentro, ¿lo dices por las diagonales?
11.	Leonardo:	Sí.
12.	Profesora:	Primero estamos hablando de los ángulos de la figura. Los ángulos de la figura en este caso son TJR, JRK, RKT, KTJ… Esos son los ángulos de la figura. Mientras que los otros ángulos, ya son ángulos que se forman entre sus diagonales. En este caso, ustedes me están hablando de los ángulos de la figura. ¿No es así? […] Tienen dos ángulos opuestos congruentes [escribe en el tablero: "tiene dos ángulos opuestos congruentes $\angle$"].
13.	Profesor:	¿Qué son cuáles? ¿Cuáles son?
14.	Andrea:	TJR y RKT. [Murmullos]
15.	Profesora:	[La profesora completa la propiedad $TJR \cong TKR$] Ahora ustedes, ¿qué otra propiedad descubrieron? Respecto a lados o ángulos.
16.		[Murmullos.]
17.	Profesora:	Me dicen acá que tiene dos ángulos congruentes, ¿qué puedo decir de los otros dos ángulos?

18.	Noé:	Que no son congruentes.
19.	Profesora:	[Escribe en el tablero: "tiene dos ángulos opuestos no congruentes"] Tiene dos ángulos opuestos no…
20.		[Murmullos.]
21.	Profesora:	Listo. Bien. Ahora, respecto a los lados de la figura, ¿qué podemos decir?
22.	Saúl:	Que el lado JT y el lado TK son congruentes.
23.	Profesora:	Entonces, JT…
24.	Saúl:	Es congruente con TK.
25.	Profesora:	… congruente con TK [escribe en el tablero: $\overline{JT} \cong \overline{TK}$] Tiene un par de lados… ¿Qué características tienen esos dos lados? ¿Cómo son?
26.		[Murmullos.]
27.	Profesora:	Tienen un par de lados congruentes. ¿Puedo escribir así o tienen una condición adicional esos dos lados?
28.	Armando:	Tiene otro par.
29.	Profesora:	Ok. Tiene otro par. Pero esos dos, ¿qué características tienen? ¿Cómo son? ¿Será que en algún momento, por ejemplo, yo podría decir que [segmento] TK es congruente con [segmento] JR?
30.	Todos:	No.
31.	Profesora:	No. Entonces, ¿qué condición deben cumplir estos dos lados.
32.	Luis:	¿Qué midan lo mismo?
33.	Profesora:	Y son adyacentes. Listo. Entonces [escribe en el tablero] tiene un par de lados adyacentes congruentes. Y ahorita me estaban hablando del otro, entonces… ¿Cuál es el otro? JR congruente con quién….
34.	Armando:	RK.
35.	Profesora:	… con RK [escribe en el tablero: $\overline{JR} \cong \overline{RK}$].
36.	Andrea:	Otro par de lados adyacentes congruentes. [Hasta aquí… sin registro de video]
37.	Profesora:	[Escribe lo expresado por Andrea.] ¿Qué otra propiedad descubrieron?
38.	Armando:	Entonces sí podrían ser dos pares…
39.	Profesora:	Dos pares…
40.	Armando:	… de lados adyacentes congruentes.

41. Andrea: Dos pares de lados adyacentes congruentes.

42. Profesora: Sí… Ahora sigamos con las diagonales. Entonces de las diagonales, ¿qué descubrieron ustedes? [Dirigiéndose al grupo de Saúl].

43. Saúl: Bisecan los ángulos que no son congruentes.

44. Leonardo: Nosotros tenemos otra.

45. Profesora: Espérame escribo esta y ya.

46. Leonardo: Bueno. Listo.

47. Profesora: Entonces, las diagonales bisecan los ángulos que no son congruentes. Ahora sí.

48. Andrea: Los lados no son paralelos porque se encuentran en un punto.

49. Profesora: Listo. Espérame un momentico, y la escribo.

50. Leonardo: Profe, yo si lo sé decir. No son paralelos pues se encuentran en un punto determinado.

51. Andrea: Son las mismas palabras.

52. Leonardo: ¿Me puedo parar y mostrarte?

53. Profesora: Ok. Te puedes parar y mostrarme. Te toca sobre esta figura [señala una figura dibujada en el tablero].

54. Leonardo: [Lee.] "Sus lados no son paralelos pues se encuentran en un punto determinado". ¿Esto cómo lo comprobamos? En GeoGebra hicimos esto: pusimos una paralela tanto acá [sobre la cometa que se había dibujado en el tablero, dibuja $\overleftrightarrow{TK}$] tanto acá [dibuja $\overleftrightarrow{RJ}$] y pues demostramos que se encuentran en un punto. [La profesora escribe en el tablero los lados opuestos no son paralelos.]

55. Profesora: Ok. Comprobaron.

56. Leonardo: Comprobamos que no son paralelos. [Vuelve al puesto.]

57. Profesora: Ok. ¿Cómo escribimos eso? ¿Cómo escribimos esa propiedad? [Escribe en el tablero.] Los lados opuestos no son paralelos. Listo, ahora si miremos, ¿de las diagonales qué encontraron?

58. Andrea: Una de las diagonales es bisectriz.

59. Profesora: Una de las diagonales es bisectriz. Es igual a esta [señala una de las propiedades escritas en el tablero] que escribieron acá: las diagonales bisecan los ángulos que no son congruentes.

60. Leonardo: Profe, una…

61. Profesora: Dime.

62. Leonardo: ¿Si está bien dicho lo que escribiste ahí en el de los lados opuestos no son paralelos? Porque en este caso con todos los lados pasa lo mismo.

63. Profesora: Y entonces tú me dices, los lados no son paralelos [tacha la palabra opuestos] . Entonces quitémosle esto, ¿sí?

64. Leonardo: Si, es decir no solo pasa con unos…

65. Profesora: Sí, tienes toda la razón. Solo que hay unos que son… uno puede decir prácticamente de una vez que no son paralelos porque comparten un vértice, ¿sí?

66. Leonardo: Exacto.

67. Profesora: Y entonces tú me dices, los lados no son paralelos [tacha la palabra opuestos]. Entonces quitémosle esto, ¿sí?

68. Andrea: Yo, otra.

69. Profesora: A ver.

70. Andrea: [Lee.] Solo se bisecan en una diagonal.

71. Profesora: [Repite.] Solo se bisecan en una diagonal. O sea, las diagonales… ¿Cómo lo escribimos?

72. Leonardo: Así como lo dijo ella.

73. Armando: Solo una diagonal es una bisectriz.

74. Profesor: No, pero esa es la otra.

75. Profesora: Solo una diagonal biseca a la otra.

76. Leonardo: En este caso lo dijimos fue porque…

77. Profesora: ¿Por qué?

78. Leonardo: Porque pues hicimos las dos rectas [realiza un movimiento vertical de su mano derecha y luego uno horizontal] y al hacer las dos rectas [refiriéndose a las diagonles], eee, en una la distancia de arriba no es congruente a la de abajo, mientras que en la otra si se cumple lo que acabamos de decir, sí se bisecan.

79. Profesora: ¿Y eso lo comprobaron con el programa?

80. Leonardo: Lo comprobamos con el programa.

81. Profesora: Listo, válido. ¿Qué otra propiedad?

82. I Saúl: Que al trazar la diagonal que no es bisectriz se forman dos triángulos isósceles.

83.	Profesora:	Listo. Entonces tú me estás hablando de que se forman dos triángulos isósceles … [Escribe en el tablero.] Una diagonal determina dos triángulos isósceles… Listo. Bien. ¿Alguna otra propiedad? ¿De las diagonales? Me han dicho que una diagonal biseca a la otra, que las diagonales bisecan los ángulos no congruentes, ¿Qué otra propiedad?
84.	Profesor:	[Dirigiéndose a Andrea.] ¿Ya nombraste todas las propiedades? Falta una propiedad.
85.	Profesora:	Yo sé que ambos [grupos] lo dijeron. Falta una propiedad.
86.	Noé:	Oye… Podemos decir: como se forman dos triángulos isósceles podemos decir que, cuándo se forman triángulos isósceles los ángulos son opuestos en sus lados congruentes.
87.	Profesora:	Cuando se forman triángulos isósceles, ¿los qué?
88.	Noé:	Los ángulos opuestos a sus lados congruentes son congruentes.
89.	Profesora:	Pero mira que eso nosotros ya los sabemos, pero sí lo vas a necesitar cuando estés justificando porque se forma esa figura. Así que tenlo muy presente. [Dirigiéndose al otro grupo] ¿Qué pasó?
90.	Andrea:	Dijimos que cuatro triángulos rectángulos.
91.	Profesora:	Entonces ustedes dijeron tiene un par de lados adyacentes congruentes, otro par de lados adyacentes congruentes y tiene que tener dos lados adyacentes, dos pares de lados adyacentes no congruentes. [Escribe en el tablero.] Listo. Falta una [propiedad] de las diagonales. Ustedes la dijeron. [Dirigiéndose al grupo de Saúl.] ¿Cómo trazaron ustedes la segunda diagonal?
92.	Saúl:	Sacamos el punto medio…
93.	Profesora:	El punto medio y ¿qué hicieron?.
94.	Saúl:	Trazamos la perpendicular.
95.	Profesora:	Perpendicular. Entonces qué puedo decir de las diagonales.
96.	Saúl:	Que la diagonal pasa por el punto medio…
97.	Noé:	Perpendicular a la otra.
98.	Profesora:	Perpendicular a la otra. [Escribe en el tablero.]
99.	Profesor:	[Dirigiéndose al grupo de Leonardo.] Esa es la que ustedes dijeron. ¿Recuerdan que ustedes trazaron los ángulos de noventa en las diagonales?
100.	Andrea:	[Dirigiéndose a su grupo.] Es que sacando las bisectrices fue que sacamos el punto medio.

101. Leonardo: [Dirigiéndose a la profesora.] Esa fue la primera que dijimos nosotros cuando hiciste la aclaración de que no se podía decir…

102. Profesor: Pero no la nombraron…

103. Profesora: Pero no me la aclaraste.

104. Leonardo: ¡Ah!

105. Profesora: Por eso dije que ambos la habían dicho. Listo chicos. Entonces vamos a mirar. Voy a hacerles una pregunta. Nosotros hemos venido trabajando en definiciones, entonces la pregunta que voy a hacerles es qué propiedades, qué conjunto de propiedades no definirían la figura. ¿Si me hago entender? Entonces empecemos a mirar conjuntos de propiedades para saber cuáles definitivamente no definen la figura, porque no son propiedades suficientes para definirla. Listo, entonces discutan entre ustedes.
[Termina socialización de las propiedades de la figura]

106. Profesora: Antes de salir [al descanso], les habíamos pedido que miraran qué propiedades no definían la figura. Entonces empecemos. Este grupo. El grupo de Leonardo. ¿Cuáles no definen?

107. Leonardo: Profe es que nosotros llegamos a una conclusión.

108. Profesora: A ver. Cuéntame.

109. Leonardo: Que sólo con dos de las propiedades se puede hacer la figura.

110. Profesora: ¿Con cuáles?

111. Leonardo: Y pues con el resto, pues no.

112. Profesor: O sea, la definieron.

113. Leonardo: La definimos.

114. Profesora: Entonces tú la definiste. Entonces quiere decir que… ¿cuáles dijiste que sí definían la figura?

115. є Leonardo: La 3 [solo una diagonal biseca a la otra] y la 4 [diagonales perpendiculares].

116. Profesora: Entonces tú me dices que definen 3 y 4. Ahorita les toca por grupos, decirme por qué la define. Listo. Y por tanto debieron haber mirado unas que no definen y encontrar algunos contraejemplos. Entonces por ejemplo, digamos 1 [tiene un par de lados adyacentes congruentes] y 2 [tiene otro par de lados adyacentes congruentes]. ¿Las miraron?

117. Leonardo: Sí.

118. Profesora: Listo. ¿Por qué no define?

119. Saúl: Porque falta otra propiedad para que sí la defina.

120. Profesora: Porque falta otra propiedad para que si la defina. ¿Qué otra propiedad dijiste tú que faltaba para que la definiera?

121. Saúl: La 11.

122. Profesora: La 1, la 2 y él me dice que la 11[tiene dos lados adyacentes no congruentes]. ¿En este caso [propiedades 1 y 2] encontraron algún contraejemplo? Ambos grupos. Ustedes.

123. Leonardo: Sí.

124. Profesora: ¿Cuál?

125. Leonardo: Es que hicimos varias. Es que cuando uno trabajaba las que ustedes dijeron habían muchas posibilidades que nada que ver. O sea no salía la figura que nosotros esperábamos.

126. Profesora: Pero en el caso de estas dos propiedades, ¿[existe] alguna figura conocida que cumpla estas dos propiedades y que no sea la que estamos trabajando? Aquí me dicen, ¿cuál? ¿Cuál era la que me decías?

127. Profesor: Ustedes la escribieron. Las que habían dibujado en las hojas.

128. Saúl: El rombo.

129. Profesora: Listo. Entonces acá me dicen el rombo. Porque un rombo tiene un par de lados adyacentes congruentes y tiene otro par de lados adyacentes congruentes. Perfecto. ¿Qué otro encontraron? ¿Encontraron otro ejemplo?

130. Leonardo: De la 1 y de la 2 que no la definen. Que salen muchas… Aquí hicimos los dibujos.

131. Profesora: ¡A ver! Miremos. Entonces hicieron también el rombo, igual que el otro grupo…

132. Martín: [En el tablero.] Hicimos también el cuadrado. Acá está el cuadrado [dibuja un cuadrado en el tablero]… Entonces lo que yo dije es que esta medida [una diagonal del cuadrado] siempre iba a ser igual. Pero como nosotros sabemos o como dijo el profesor, no importaba si las cuatro medidas fueran iguales, sino que esta medida que está acá sea igual a la que está acá [dibuja un rombo y señala sus lados]. También seguiría siendo estas dos medidas iguales [coloca marcas de congruencia sobre los lados del rombo], igual que lo van a ser en el cuadrado [coloca marcas de congruencia sobre los lados del cuadrado], aunque no tenga la misma forma del cuadrado.

133. Profesora: Listo. Bien. Entonces de esas [propiedades] encontraron dos opciones: el rombo y el cuadrado. ¿Qué otras propiedades miraron que no definieran?

134. Saúl: La 4 [diagonales perpendiculares] y la 7 [diagonales determinan dos triángulos isósceles].

135. Profesora: La 4 y la 7. ¿Por qué 4 y 7 no definen?

136. Saúl: La 4 es diagonales perpendiculares y la 7, las diagonales forman dos triángulos isósceles, pero entonces si esos dos triángulos son congruentes, entonces forman un rombo.

137. Profesora: Ellos decían: si esos dos triángulos son congruentes, también se forma un rombo. Entonces aquí también estaba el rombo. ¿El cuadrado será que también cumple esas dos propiedades? Es decir, que las diagonales son perpendiculares y que se forman dos triángulos isósceles congruentes.

138. Saúl: La 4 es diagonales perpendiculares y la 7, las diagonales forman dos triángulos isósceles. Pero entonces si esos dos triángulos son congruentes, entonces forman un rombo.

139. Profesora: Ellos decían: si esos dos triángulos son congruentes, también se forma un rombo. Entonces aquí también estaba el rombo. ¿El cuadrado será que también cumple esas dos propiedades?

140. Saúl: Sí.

141. Profesora: ¿Por qué?

142. Saúl: Porque las medidas de los lados del cuadrado son iguales y la diagonal se comparte con los dos triángulos.

143. Profesora: [Dibuja un cuadrado.] Entonces él me dice: la medida de los lados son iguales [coloca marcas de congruencia] y la diagonal se comparte. O sea que, ¿qué criterio utilizaríamos ahí?

144. Martín: LLL.

145. Leonardo: La 11[tiene dos pares de lados adyacentes no congruentes] también.

146. Profesora: ¿De la 11 encontraron algún ejemplo específico?

147. Leonardo: Pues hicimos la figura.

148. Profesora: Bien. Entonces ya miramos varias que no lo definen. Entonces hacíamos contraejemplos que efectivamente nos mostraban que existían otras figuras que cumplían esas propiedades y que no era la que estábamos trabajando. Entonces empezamos a mirar… Algunos ya empezaron a mirar cuáles la definirían. Entonces ustedes hablaron de 3 y 4. Ellos hablaron de 1, 2 y 11.

149. Noé: Puede ser la 3[sólo una diagonal biseca a la otra] y la 9 [las diagonales bisecan los ángulos no congruentes].

150. Profesora: Esta estábamos en duda, si la 3 y la 9. ¿Qué pasaría? El grupo de Leonardo, ¿la 3 y la 9 definirían la figura?

151. Leonardo: Bueno, la 3 dice sólo una diagonal biseca a la otra. Entonces ahí ya sabemos que tenemos una que tiene punto medio, y los dos lados son iguales. Y la perpendicular, pues ahí las dos distancias ya son diferentes [se refiere a la otra diagonal].

152. Profesora: Pero espérate porque tú me has dicho algo que me puede servir para validar o para refutar. Tú me dijiste si bisecan entonces ya tengo una diagonal y tengo otra, y sé que estas dos medidas van a ser iguales. Pero tú, cuando ibas a dar tu argumento, me incluiste otra propiedad, que no era ni 3 ni 9. ¿Qué fue cuál? La perpendicularidad.

153. Leonardo: Sí.

154. Profesora: Entonces tendríamos que mirar, si sólo estoy mirando 3 y 9, porque todavía no estoy mirando 4 [diagonales perpendiculares], ¿qué pasaría?

155. Leonardo: Pues es que en este caso no estamos hablando de esa [propiedad 4]. Estamos hablando de las diagonales que bisecan los ángulos que no son congruentes.

156. Profesora: Pero es que por ejemplo, esta [segunda diagonal] podrían bisecarla así [dibuja un segmento que biseca a otro segmento, pero que no es perpendicular]

157. Leonardo: Profe pero en este caso si la diagonal… Bueno, pongamos las dos, o sea construyámosla.

158. Profesora: Ok.

159. Leonardo: Ahora, la 9, las diagonales bisecan los ángulos que no son congruentes. Hasta el momento, no se cumple.

160. Profesora: Entonces vamos a empezar a mirar cuáles si lo definen. Pero entrar a mirar cuáles sí lo definen quiere decir que a partir de las propiedades que hayan elegido, yo puedo entrar a demostrar o a justificar por qué se cumplen las otras. Listo. Entonces eso es lo que vamos a hacer. Vamos a empezar con la 3 y la 4. Listo. Y qué tenemos que hacer, entonces tenemos que demostrar que se cumplen las otras propiedades. Para simplificar un poco el trabajo, entonces vamos a quitar unas propiedades. Vamos a quitar la 8 [ninguno de sus ángulos es de 90 grados]. Vamos a quitar la 9 [las diagonales bisecan los ángulos que no son congruentes], la 10 [los lados no son paralelos] y la 11 [tiene dos pares de lados adyacentes no congruentes]. Listo. Entonces, si se cumplen estas dos propiedades [resalta 3 y 4], es decir, si yo defino esa figura como un cuadrilátero en el cuál solo una diagonal biseca a la otra y las diagonales son perpendiculares, ¿puedo demostrar o comprobar estas otras propiedades? 1, 2, 5, 6 y 7. Listo. Entonces van a discutirlo en grupos y ya ahorita me dicen que hicieron.
[Termina la puesta en común de las propiedades que definen la figura].

161. Profesora: [Empieza la puesta en común de las diagonales que definen la figura.] Decíamos

que si definíamos la figura como un cuadrilátero que sólo tenía una diagonal que bisecaba a la otra y, cuyas diagonales eran perpendiculares, entonces teníamos que poder demostrar las otras propiedades, o mínimo justificarlas. Entonces, ¿cómo les fue con eso? ¿Qué hicieron?

162.	Profesor:	¿Qué hicieron para demostrar?
163.	Armando:	Que el 3 [sólo una diagonal biseca a la otra] y el 4 [diagonales perpendiculares] cumplen con todas las propiedades.
164.	Profesora:	Que si parto de 3 y 4, definiéndola, puedo demostrar 1, 2, 5, 6 y 7.
165.	Leonardo:	¡Ah! Sí. Nosotros los comprobamos.
166.	Profesor:	Pase al tablero [Leonardo y Armando pasan al tablero].
167.	Armando:	[Lee el tablero] Solo una diagonal biseca a la otra y diagonales perpendiculares.
168.	Andrea:	Haz las diagonales primero.
169.	Leonardo:	[Dibuja en el tablero las diagonales, con las condiciones dadas, y luego los lados de la figura].
170.	Profesor:	Listo. Ya tienen esas dos propiedades. Ahora ustedes tienen que argumentar o demostrar… la primera, digamos. [Segmento] JT y [segmento] TK son adyacentes congruentes. ¿Cómo?
171.	Martín:	[Le indica a Leonardo los nombres de los vértices.] Izquierda J. Arriba T , K y ese R.
172.	Leonardo:	Un par de lados congruentes. [Coloca marcas de congruencia en la figura] Este lado [$\overline{TK}$] es congruente con este lado [$\overline{TJ}$].
173.	Profesor:	Listo. Ahora, ¿por qué? ¿Por qué se da eso?
174.	Leonardo:	Nosotros comprobamos eso con la propiedad…
175.	Andrea:	Con la propiedad reflexiva.
176.	Leonardo:	Primero la propiedad que utilizamos fue lado, ángulo…
177.	Martín:	No.
178.	Andrea:	No, no. Ese es recto.
179.	Leonardo:	Este ángulo mide 90 grados. 90 grados, 90 grados y 90 grados [coloca marcas de ángulos rectos en los cuatro ángulos formados por las diagonales]. Después…
180.	Profesor:	¿Por qué?
181.	Leonardo:	Porque se tiene una recta perpendicular y la otra propiedad…

182. Profesor: Espere. Despacio. ¿Porque son qué?

183. Leonardo: Porque la recta perpendicular y la línea que lo biseca forman ángulos de noventa grados.

184. Profesor: Por ser perpendiculares. Listo. Bien.

185. Leonardo: Ese es el primer criterio de ángulo [se refieren al primer dato que necesita para poder usar un criterio]. Lo siguiente que nosotros sacamos fue la propiedad reflexiva que se hace acá [retiñe con el marcador el segmento con extremos en T y A]. Ese lo utilizamos como lado. Y la última, que fue la tercera, nosotros la sacamos del punto medio… Como esta distancia [de J a A] mide igual que esta [de K al punto de intersección de las diagonales] porque se bisecan…

186. Andrea: Ese es el punto medio.

187. Leonardo: Entonces este también es un lado. Tenemos la propiedad de ángulo, lado, lado.

188. Profesora: ¿Esa fue la que utilizaron?

189. Andrea: No. Criterio lado, ángulo, lado.

190. Leonardo: Criterio lado, ángulo, lado. Y pues, de esa forma comprobamos que ese lado es congruente con ese [$\overline{TK} \cong \overline{TJ}$].

191. Profesora: Listo. Bien. Entonces demostraron 1 [tiene un par de lados adyacentes congruentes]. ¿Cómo miraron 2 [tiene otro par de lados adyacentes congruentes]? ¿$\overline{JR} \cong \overline{RK}$? ¿La segunda propiedad?

192. Todos: Igual. Lo mismo.

193. Leonardo: Lado [muestra el segmento cuyos extremos son el punto de intersección de las diagonales y el punto R]. Otra vez los del punto medio, los ángulos rectos, y nos da estos congruentes [$\overline{JR} \simeq \overline{RK}$].

194. Martín: Y la reflexiva.

195. Profesora: Y la reflexiva. Listo. El 5 [tiene dos ángulos opuestos congruentes], ¿cómo lo demostraron?

196. Martín: ¿El de los opuestos? Teniendo en cuenta que tenemos esta parte de acá [refiriéndose a $\overline{TK} \simeq \overline{TJ}$], debemos conocer que este ángulo [$\angle TJR$] va a ser congruente con este [$\angle TKR$], debido a la [señala la diagonal TR]… por la… Como los lados son iguales acá en esta parte [refiriéndose a $\overline{TK} \simeq \overline{TJ}$] y los de acá [refiriéndose a $\overline{RK} \simeq \overline{RJ}$] , el ángulo que se presenta acá [$\angle J$], obviamente siempre va a ser mayor de noventa grados, igual que este [$\angle K$]. Entonces, pues va a ser opuesto con este.

197. Leonardo: O sea, es decir, tiene dos pares de lados adyacentes no congruentes, de ahí es donde

sale.

198. Profesora: O sea, tú me estás hablando ya de la 6 [tiene dos ángulos opuestos no congruentes].

199. Leonardo: No.

200. Martín: No. Estoy hablando de la 5.

201. Profesor: Por eso…

202. Profesora: Tú me hablas de la cinco. Entonces tú me dices que ese ángulo siempre va a ser mayor de noventa grados.

203. Martín: Va a ser mayor de noventa grados.

204. Profesora: ¿Y por qué?

205. Martín: Porque…

206. Profesora: ¿Cómo lo podemos deducir a partir de las propiedades 3 y 4? ¿O de la 1 y la 2, dado que ya las demostramos?

207. Martín: Porque acuérdate que para que un triángulo sea triángulo, la suma me tiene que dar 180.

208. Profesora: Ok. La suma me tiene que dar 180 grados.

209. Martín: Entonces, en estos la suma tiene que ser mayor a noventa grados.

210. Profesora: Lo mismo, ¿por qué? Lo van a pensar un momento, y mientras tanto, el otro grupo va pasar y me va a decir cómo demostraron la propiedad 5.

211. Saúl: Nosotros, pues de la segunda propiedad sabemos que estos lados son congruentes [coloca marcas de congruencia para indicar que $\overline{RK} \simeq \overline{RJ}$]. Entonces, tenemos esta [diagonal $\overline{RT}$], le sacamos la propiedad reflexiva, y la primera propiedad que está ahí, nos dice que estos lados son congruentes [$\overline{TK} \simeq \overline{TJ}$]. Entonces ahí si se utilizaría el criterio lado, lado, lado, lo que implica pues que sus ángulos también son iguales, porque pues se daría la congruencia de triángulos.

212. Profesora ¿Por qué acá ya podemos utilizar la propiedad 1 y 2?

213. Armando: Porque ya la habíamos demostrado con 3 y 4.

214. Profesora: Porque ya la demostramos partiendo de 3 y 4. Bien, miremos ahora la no congruencia.

215. Profesor: En este caso lo puedes justificar como puedas. ¿Por qué los ángulos [$\angle T$y $\angle R$] no son congruentes?

216. Armando: Eee bueno, ya tenemos las dos rectas perpendiculares. Entonces decimos que solo una biseca a la otra. Entonces por consiguiente, los lados son iguales [señala los

segmentos que se forman con extremos J y K y la intersección de las diagonales, respectivamente].O sea uno tiene que ser más largo que el otro para que sólo una biseque a la otra [mostrando los segmentos que se forman entre los extremos de $\overline{TR}$ y la intersección de las diagonales]. Entonces al ser uno más largo que el otro, la distancia de aquí [R] hasta aquí [punto de intersección de las diagonales], va a ser mayor, y eso hace que los ángulos pues cambien sus grados. ¿Si me hago entender?

217.	Profesor:	En los triángulos, ¿sí? Muestra los triángulos.
218.	Armando:	[Resalta los dos triángulos isósceles].
219.	Profesor:	Entonces esos dos triángulos cómo son.
220.	Armando:	Son isósceles.
221.	Profesor:	Isósceles, bien. Pero, ¿qué le permite decir que los ángulos no son congruentes?
222.	Armando:	Pues, porque sus medidas son diferentes. Pues por lo que ya había dicho que la bisectriz [señala diagonal $\overline{KJ}$] hace que estos dos sean iguales, pero la otra no, o sea esta [señala diagonal $\overline{TR}$]. No sé cómo explicarlo.
223.	Profesora:	Claro. A este grupo también se le dificultó bastante demostrar esa propiedad. Entonces vamos a tratar de mirar. Construiste dos triángulos isósceles, listo. Y si estoy hablando de triángulos isósceles, qué puedo decir de los ángulos de esos triángulos isósceles.
224.	Saúl:	Pues que esos dos ángulos, el J y el K, son congruentes.
225.	Profesora:	El ángulo J y el ángulo K. Pero en el triángulo o en el cuadrilátero.
226.	Armando:	Tacho. Es que se me acabó de ocurrir una.
227.	Profesora:	A ver.
228.	Armando:	Es que acá hay otros dos triángulos. Si trazamos una línea por acá, así [retiñe la diagonal $\overline{TR}$], y borramos esta [borra $\overline{JK}$], entonces ya sabemos que son congruentes, y todo eso, ¿cierto? Y la suma da 180. […] [Vuelve a dibujar $\overline{JK}$].
229.	Profesor:	Entonces volvamos al argumento anterior, listo. En los dos triángulos isósceles, mira el triángulo isósceles de arriba. ¿cuáles son los ángulos congruentes?
230.	Armando:	Este [$\angle TJK$] y este [$\angle TKJ$].
231.	Profesor:	Listo.
232.	Profesora:	Señalémoslos de alguna forma. Y en el de abajo, ¿quién es congruente con quién?
233.	Armando:	[Señala $\angle RJK$congruente con $\angle RKJ$].

234. Profesora: ¿Crees que en algún momento el $\angle TJK$ puede llegar a ser congruente con $\angle JRK$?

235. Armando: No. Porque la distancia de la base a la máxima altura pues es diferente.

236. Profesora: O sea, la distancia… Nombremos al punto de intersección de las diagonales con una letra, por favor.

237. Armando: A.

238. Profesora: Entonces tú me estás diciendo porque TA, la medida de TA es diferente a la medida de AR.

239. Armando: Por lo que solo una se biseca.

240. Profesora: ¿Será que en algún momento el $\angle JTK$ va a ser congruentes con el $\angle JRK$?

241. Armando: No. En ningún momento porque al ser iguales entonces las dos se bisecarían. O sea, al ser los ángulos iguales tendrían que ser las diagonales… las dos diagonales bisecarse, y la propiedad dice que solo una diagonal biseca a la otra.

242. Profesora: Listo. Finalmente la 7, que es la más sencilla. Las diagonales forman dos triángulos isósceles.

243. Armando: Ahí se ve.

244. Profesora: ¿Por qué?

245. Armando: Pues porque ya lo habíamos demostrado. Estos dos [pares de lados congruentes] son congruentes, y ya.

246. Profesor: Saúl, ¿por qué?

247. Saúl: Porque la primera propiedad…

248. Profesora: Ahora, en la pantalla de los computadores tienen una figura, ¿sí? Entonces la pregunta para ustedes es, esa figura que hay en sus computadores… ¡ah! No. Antes de eso, ¿cómo llamamos a esta figura? A la que hemos venido trabajando.

249. Martín: Cometa.

250. Profesora: Cometa. ¿La conocían de antes?

251. Armando: No.

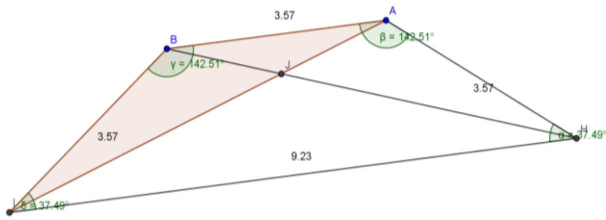
252. Profesora: ¿Y por qué le dieron el nombre de cometa?

253. Martín: Yo la vi y pensé que era un rombo.

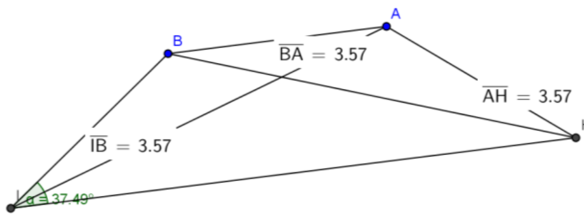
254. Leonardo: Porque llegamos a la conclusión que…

255. Armando: [Risas] Porque tiene forma de cometa.

256.	Profesora:	Tiene forma de cometa. Claro. ¿Por qué les hacíamos esa pregunta? Porque resulta que parte de definir es eso. Hay una figura, que cumple siempre una serie de propiedades, entonces a esa figura que cumple esa serie de propiedades, pues se le da un nombre. En este caso cometa [la profesora da por terminado esta parte de la discusión]. Entonces, la pregunta es: ¿la figura que aparece en la pantalla es una cometa? ¿Sí? ¿No? y ¿por qué? Ustedes, ¿es cometa?
257.	Grupo Leonardo:	No.
258.	Profesora:	¿Por qué? ¿Qué propiedades no cumple?
259.	Armando:	Eso es un trapecio.
260.	Leonardo:	No tiene ni una diagonal que lo biseca. No tiene…
261.	Profesora:	Y, ¿cómo sabes que no lo biseca, si ahí no hay diagonales?.
262.	Martín:	No tiene diagonales que forman triángulos isósceles.
263.	Saúl:	No. No tiene diagonales perpendiculares.
264.	Profesora:	Pero esperen, porque ustedes me están diciendo todo esto sobre diagonales y ni siquiera me han construido las diagonales. Entonces construyamos las diagonales y me dicen qué puedo decir acerca de esas propiedades.
265.	Leonardo:	Nosotros construimos las diagonales.
266.	Profesora:	Listo, entonces me están hablando de las diagonales de este nuevo cuadrilátero. Entonces, ¿qué propiedades cumplen esas diagonales?
267.	Profesor:	Miremos. Les están preguntando si eso es una cometa. ¿Es una comenta?
268.	Armando:	No.
269.	Profesor:	¿Por qué?
270.	Profesora:	Bien. Miremos. La primera propiedad, ¿la cumple?
271.	Leonardo:	No, porque…
272.	Armando:	Porque no tiene lados congruentes. No tiene lados adyacentes congruentes.
273.	Profesora:	Sus lados adyacentes no son congruentes. ¿Seguros?
274.	Armando:	Sí.
275.	Profesora:	¿Comprobaron eso?
276.	Leonardo:	Espere. Ya lo vamos a comprobar.



Construcción grupo Leonardo



Construcción grupo Saúl

277. Leonardo: Si son congruentes [lados].

278. Armando: ¡Uich! Pero no los dos.

279. Profesora: ¿Cuál es la propiedad que no está cumpliendo? Propiedad uno [un par de lados adyacentes congruentes], ¿la cumple?

280. Armando: Sí. Porque tiene un par de lados adyacentes congruentes.

281. Profesora: ¿Quiénes son los lados adyacentes congruentes en este caso?

282. Armando: [Segmentos] BA y BH.

283. Leonardo: Y BJ.

284. Profesora: Listo, entonces cumple propiedad 1 y 2 [otro par de lados adyacentes congruentes]. Ahora, la propiedad 3 [solo una diagonal biseca a la otra], ¿la cumple?

285. Armando: No.

286. Profesora: ¿Por qué?

287. Saúl: Ninguna diagonal se biseca, solo se intersecan.

288. Profesora: Ninguna diagonal se biseca, solo se intersecan. ¿Por qué?

289. Saúl: Porque se tiene que intersecar en el punto medio.

290. Profesora: Sí. Y acá se ve que no se cumple. Listo. Propiedad 4, diagonales perpendiculares.

291. Armando: No.

292.	Profesora:	[…] ¿Tiene dos ángulos opuestos congruentes?
293.	Saúl:	No.
294.	Profesora:	¿Tomaron medidas?
295.	Saúl:	Porque ahí se ve un ángulo obtuso y uno agudo.
296.	Profesora:	6: tiene dos ángulos opuestos no congruentes.
297.	Fabían:	Sí, hay se ve.
298.	Profesora:	¿Las diagonales forman triángulos isósceles?
299.	Todos:	No.
300.	Profesora:	¿Están totalmente seguros?
301.	Leonardo:	Hay dos.
302.	Profesora:	¿Cuáles serían esos triángulos? [murmullos] Aquí me hablan de varios. Los dos [grupos] me están hablando de triángulos isósceles diferentes. ¿Me recuerdan los nombres de la figura.
303.	Andrea:	L, B, A, H. [La profesora dibuja el cuadrilátero en el tablero]
304.	Profesora:	Entonces, ¿ustedes qué triángulos me dan?
305.	Saúl:	[Triángulo] LBA.
306.	Noé:	[Triángulo] BAH.
307.	Profesora:	LBA y el BAH. Isósceles. ¿De acuerdo allá [dirigiéndose al otro grupo]? ¿Si? ¿No? ¿Por qué?
308.	Armando:	Porque dos lados miden igual y uno no.
309.	Andrea:	¿Dónde?
310.	Profesora:	Claro. Mira acá. Este [$\overline{LB}$] tiene la misma medida que este [$\overline{AB}$] y este [$\overline{AB}$] tiene la misma medida que este [$\overline{AH}$]. O sea que efectivamente son isósceles. Pero ustedes [dirigiéndose al grupo de Andrea] me hablaban de otros triángulos. Voy a llamar a esto M [refiriéndose al punto de intersección de las diagonales].
311.	Leonardo:	[Triángulos] BMA y LMH
312.	Profesora:	BMA y LMH. ¿Estos por qué son isósceles? ¿Qué hicieron para comprobar que son isósceles?
313.	Martín:	Los lados.
314.	Profesora:	¿Cuáles serían los lados?

315. Martín: LM…

316. Profesora: LM, ¿sería congruente con?

317. Martín: MH.

318. Profesora: ¿Y?

319. Leonardo: BM con MA.

320. Armando: Yo se unos que son congruentes. [Triángulos] LBM y MAH.

321. Profesora: Si claro, efectivamente si son congruentes. Tendríamos lado, lado y lado. Pero recordemos que estamos sobre las propiedades. Vamos a mirar una nueva figura [abren un nuevo archivo en GeoGebra que contiene la construcción de un rombo]. Listo, entonces lo mismo. ¿Esta figura es una cometa? ¿Qué propiedades cumple y qué propiedades no cumple?

322. Saúl: Eso es un rombo.

323. Profesora: ¿Eso es un rombo? ¿Si es un rombo entonces…?

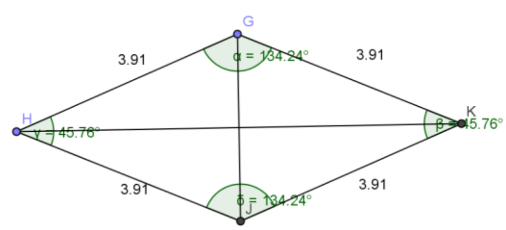
324. Leonardo: No, es un cuadrado.

325. Profesora: ¿O es un cuadrado?

326. Saúl: Puede ser cualquiera de las dos.

327. Leonardo: No, si es un rombo.

328. Profesora: Entonces empecemos a mirar. Propiedad 1, ¿la cumple? [los grupos toman las medidas de los lados]



329. Varios: Sí.

330. Profesora: ¿Propiedad 2?

331. Varios: Sí.

332. Profesora: ¿Propiedad 3?

333. Saúl: Ahí las dos se bisecan.

334. Profesora: ¿Propiedad 4?

335. Leonardo: Sí.

336. Profesora: ¿Propiedad 5? ¿Tienen dos ángulos opuestos no congruentes?

337. Armando: Falso.

338. Profesora: ¿Y las diagonales forman dos triángulos isósceles?

339. Varios: Sí.

340. Profesora: Y finalmente la última figura. [Se muestra a los estudiantes un bumera] Vayan arrastrando la figura.

341. Leonardo: Tiene dos pares de lados adyacentes no congruentes.

342. Profesora: Listo. ¿Tiene un par de lados adyacentes congruentes?

343. Varios: Sí.

344. Profesora: ¿Cómo sabes?

345. Leonardo: Pues, si. Es obvio.

346. Armando: Porque miden lo mismo. Miden 6,23.

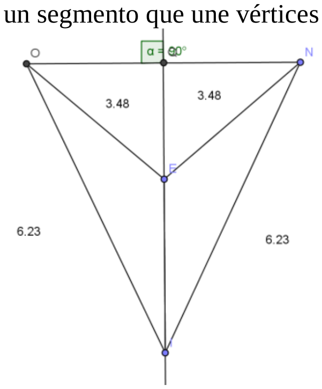
347. Profesora: Entonces los midieron y obtuvieron que si son ocngruentes.

348. Armando: OE con EM y OI congruente con MI.

349. Profesora: Listo. La 3: solo una diagonal biseca a la otra.

350. Armando: No veo diagonales.

351. Profesora: Bueno. Esa es una gran pregunta. ¿Cuáles serían las diagonales? Hay una diagonal que se puede construir fácilmente. ¿Cuál sería la otra diagonal? Si una diagonal es un segmento que une vértices no consecutivos.



352. Saúl: $EI\ldots$

353. Andrea: ON.

354. Profesora: ON sería la otra diagonal. Listo, ¿esas diagonales se bisecan?

355. Varios: No.

356. Andrea: No, porque no se intersecan.

357. Profesora: ¿Diagonales perpendiculares?

358. Armando: Pues si las siguiéramos sí, pero…

359. Profesora: Listo. Entonces efectivamente él me dice si las siguiéramos, es decir, si estuviéramos hablando de la recta que contiene al segmento, serían perpendiculares. ¿Y cómo sabes eso?

360. Armando: Pues porque forman 90 grados.

361. Profesora: Listo. Acá la construyen y forman noventa grados [mientras que la profesora verifica la construcción realizada por el grupo de Armando, el grupo de Saúl realiza también la construcción]. Listo, ¿si vieron? Listo, o sea que la cuatro, si estuviéramos hablando no de las diagonales sino de las rectas que la contienen, se cumple. Dice: ¿tienen dos ángulos opuestos congruentes?

362. Varios: No.

363. Profesora: ¿Cuáles serían en este caso los ángulos opuestos?

364. Martín: IOE y INE.

365. Saúl: OEN y OIN.

366. Profesora: Esos serían los opuestos. Entonces, ¿cumple esta propiedad? ¿tiene un par de ángulos opuestos congruentes?

367. Noé: Si.

368. Profesora: ¿Cuáles serían?

369. Saúl: ION y ENI.

370. Profesora: Finalmente, ¿las diagonales forman dos triángulos isósceles congruentes?

371. Varios: Sí.

372. Profesora: ¿Cuáles?

373. Andrea: OEI y O OIN.

374. Profesora: Bueno, chicos. Entonces. ¿Cuál creen ustedes que es la mejor definición para esta figura? No, perdón. Para la figura que hemos trabajado, la cometa.

375. Armando: 3 y 4 .