UN ANÁLISIS DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA: HISTORIA Y CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO

MAUREEN ELIANA CASTAÑEDA CORTÉS

JOSÉ EDUARDO NOVOA OLAYA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRIA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

BOGOTÁ, D.C.

2015

UN ANÁLISIS DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA: HISTORIA Y CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO

MAUREEN ELIANA CASTAÑEDA CORTÉS 2013185004

JOSÉ EDUARDO NOVOA OLAYA 2012185018

Trabajo de grado presentado ante el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional para optar el título de Magister en Docencia de la Matemática.

Asesor:

____

EDWIN ALFREDO CARRANZA VARGAS
Magister en Educación y Tic

Coasesor:

____

JEANNETTE VARGAS HERNÁNDEZ
Doctora en Educación Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRIA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

BOGOTÁ, D.C.

2015

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"Un análisis de la representación gráfica de la función logarítmica: historia y conocimiento didáctico del contenido"** Presentado por los estudiantes:

Maureen Eliana Castañeda Cortés - 2013185004 - 1070949133
José Eduardo Novoa Olaya - 2012185018 - 79546454

Como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado** con 45 Puntos.

Observaciones: ____

En constancia se firma a los 5 dias del mes de marzo de 2015.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Asesor: EDWIN ALFREDO CARRANZA

Co-Asesora: JEANNETTE VARGAS

Jurados: Profesor MAURICIO BAUTISTA BALLÉN

Profesora Alicia Guzmán
ALICIA GUZMAN

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, se han dado los respectivos créditos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no habría sido posible sin la influencia directa o indirecta de muchas personas a las que agradecemos profundamente por estar presentes en las distintas etapas de su elaboración.

Le agradecemos al Profesor Edwin Carranza por la preocupación, supervisión e interés en dirigir nuestro trabajo de grado, hizo posible que se desenvolviera de manera satisfactoria, a nivel personal y académico.

A la profesora Jeannette Vargas por su confianza, colaboración y apoyo primordial en el proceso de realización del trabajo, y el permitirnos como estudiantes aprender de sus conocimientos.

A todos los docentes de la Universidad Pedagógica Nacional que nos compartieron sus conocimientos, dentro y fuera de clase, haciendo posible que nuestra formación profesional se resuma en satisfacciones académicas e inquietudes insatisfechas en continua indagación.

Como compañeros nos agradecemos el trabajo realizado durante dos años poniendo lo mejor de nuestra energía, empeño y sacrificio por el bien de nuestra formación profesional.

Por último a nuestras familias y seres más queridos, en especial a nuestros padres por no perderse un sólo día de nuestras vidas alegrándola con sus particulares modos de ver, de ser y hacer en su constante y difícil labor.

Maureen Eliana y José Eduardo.

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado en maestría de profundización
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Un análisis de la representación gráfica de la función logarítmica: historia y conocimiento didáctico de contenido.
Autor(es)	Castañeda Cortés, Maureen Eliana; Novoa Olaya, José Eduardo
Director	Carranza Vargas, Edwin Alfredo
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2015.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Representación gráfica de la función logarítmica, historia, conocimiento didáctico del contenido y teoría APOS.

1. Descripción

Este trabajo presenta un análisis de información de documentos de la literatura en Educación Matemática, consistente en un aporte, analizado a la luz de la teoría del Conocimiento Didáctico de Contenido, de los conocimientos con respecto a la representación gráfica de la función logarítmica vista desde su desarrollo histórico, que deberían integrar el conocimiento del profesor en formación. Con el objetivo que sea un compendio de conocimientos y elementos que permita que el profesor no solo apropiarse del objeto matemático, sino también proponer actividades para el aula fundamentadas en la caracterización que se hace de las construcciones de la representación gráfica de la función logarítmica, contenida en los documentos, a través los mecanismos de construcción y las construcciones mentales, propuestas en la teoría APOS,

2. Fuentes

Se consultaron varios documentos, dentro de estos, 8 tesis y 1 libro y más de 11 publicaciones. A continuación se mencionan 16 de las fuentes más relevantes:

Abrate, R., & Pocholu, M. (2007). Los logaritmos, un abordaje desde la Historia de la Matemática y las aplicaciones actuales. Experiencias, Propuestas Y Reflexiones Para La Clase de Matemáticas, 111–136.

Berezovski, T. (1991). An inquiry into high school students ’ understanding of logarithmis. M. Sc, Lviv State University.

Escobar, N. (2012). Elementos históricos para la enseñanza de la función logarítmica en la educación básica. Universidad del Valle.

Ferrari, M. (2001). Una Visión Sociopeistemológica. Estudio de la Función Logaritmo. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México D.F.

Ferrari, M., & Farfán, R. (2008). Un Estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 11 (3), 309–354.

Gacharná, O. (2012). Algunas consideraciones didácticas sobre el concepto de logaritmo y de función logarítmica y sus posibilidades en la educación básica y media. Universidad Nacional de Colombia.

González, M., & Vargas, J. (2007). Segmentos de la historia : la función logarítmica. Matemáticas: Enseñanza Universitaria: Universidad Del Valle., XV (002), 129–144.

López, R., & Ferrari, M. (2007). La Función Logaritmo bajo la Perspectiva de la Construcción dada por Agnesi (1748). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 20, 450–455.

Martínez, Ó. F., Sales, M. C. D., & Gumbau, M. F. (2013). La construcción de los logaritmos.: Historia y proyecto didáctico (Vol. 39). Universitat Jaume I.

Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la Teoría APOE. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 6 (3), 221–271.

Oliveira, A. (2005). O ensino dos logaritmos a partir de uma perspectiva histórica. Universidad Federal do Rio Grande do Norte.

Pinto, J. (2010). Conocimiento Didáctico del Contenido sobre la representación de datos estadísticos: Estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación. Universidad de Salamanca.

Tapia, J. (2003). Historia de los logaritmos. Apuntes de Historia de Las Matemáticas, 2 (2), 5–22.

Vargas, J. (2012). Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales. Universidad de Salamanca.

Vargas, J., Castañeda, M., & Novoa, J. (2014). Un análisis de la representación gráfica de la función logarítmica. Historia y conocimiento didáctico de contenido. In Investigación en Educación Matemática XVIII. Salamanca: SEIEM. (p. 605). Salamanca, España.

Vargas, J., Pérez, M., & González, M. (2011). El logaritmo: ¿cómo animar un punto que relacione una progresión geométrica y una aritmética? In P. Perry (Ed.), Memorias del 20o Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (pp. 129–138). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

3. Contenidos

El documento está organizado en tres capítulos y previos a ellos se encuentra la descripción del contexto general del estudio. En esta primera sección se contextualiza y ubica la investigación dentro del marco del Conocimiento Didáctico del Contenido concerniente a la representación gráfica de la función logarítmica, además se propone la pregunta, objetivos y metodología de la investigación.

En el capítulo 1, se presentan los referentes teóricos en los cuales se sustenta el estudio; este se encuentra dividido en cuatro secciones. En primer lugar, se tiene la Teoría del Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC), seguido de la Teoría de Construcción del Conocimiento APOS: Acción, Proceso, Objeto y Esquema; las dos últimas secciones de este capítulo se concentran en el objeto matemático, iniciando por la explicación del concepto de logaritmo a través de la relación entre una progresión geometría y otra aritmética, posterior a eso se encuentra una descripción del desarrollo histórico del objeto representación gráfica de la función logarítmica.

El Capítulo 2 está dedicado a describir la metodología empleada en la investigación. Se resalta la intención de realizar un análisis de información, centrado en las fases de definición y limitación, búsqueda y clasificación de documentos y desarrollo del análisis; se expone el tratamiento que se le dio al conjunto de datos que se tomaron como unidades de análisis y el planteamiento de las categorías de análisis.

El Capítulo 3 presenta el análisis, considerando la información obtenida de los documentos, del marco de referencia y de las categorías de análisis; e inmerso en este se expone una caracterización de las construcciones propuestas por los autores de los documentos a través de la teoría de comprensión APOS.

El Capítulo 4. Está dedicado a las conclusiones y proyección del trabajo.

4. Metodología

El estudio está enmarcado en una dimensión de investigación cualitativa y desde ahí, se hace una análisis de información, como técnica directa de recolección de información; esta metodología es un proceso mediante el cual se definen las necesidades del estudio, se busca la información, validando las fuentes, se procesa la información, se procesa la información y se realiza el análisis integrando el contenido de la información con los referentes del estudio y por último se presentan los resultados.

El proceso se desarrolla en tres fases que son: definición y limitación, búsqueda y clasificación de los documentos, y finalmente el desarrollo del análisis.

La búsqueda de los documentos, se realizó mirando aquellos que evidenciaran un análisis, propuesta o contenido respecto al concepto de logaritmo o función logarítmica, en los cuales se consideró que se puede encontrar evidencia de la construcción de la representación gráfica de la función logarítmica, basada en su desarrollo histórico. La limitación radica en que fueran documentos enmarcados en la Educación Matemática, se clasificaron de acuerdo a categorías propuestas y se realizó a través del software Atlas.ti.

5. Conclusiones

El desarrollo de esta investigación, permitió obtener una red de conocimientos desde una caracterización de la información contenida en los documentos analizados y el empalme con los conocimientos reconocidos desde la teoría del conocimiento didáctico de contenido. Los elementos específicos de la representación gráfica de la función logarítmica identificados en cada categoría de análisis constituyen un sistema de análisis que permite poner en evidencia (en este caso desde la literatura en Educación Matemática) un conjunto de conocimientos propuestos para integrar el conocimiento didáctico de contenido del profesor de matemáticas en formación.

El sistema puede trasladarse y complementarse, como un mecanismo de caracterización de los conocimientos que deban poseer los profesores respecto a otros conceptos y objetos matemáticos vistos desde su desarrollo histórico, lo anterior propendería por (1) el conocimiento por el desarrollo histórico de un concepto, (2) pero no solo a nivel de conocer sino de herramienta para proponer actividades de aula desde el mismo desarrollo.

Elaborado por:	Castañeda Cortés, Maureen Eliana; Novoa Olaya, José Eduardo.
Revisado por:	Carranza Vargas, Edwin Alfredo.

Fecha de elaboración del Resumen:	19	02	2015

TABLA DE CONTENIDO

ILUSTRACIONES

TABLAS

REDES

CONTEXTO GENERAL DEL ESTUDIO

En este capítulo planteamos y describimos el problema de investigación. El punto de partida son las motivaciones personales y profesionales, seguido del acercamiento al estudio desde los antecedentes teóricos que nos permiten circunscribir este trabajo en el marco del conocimiento didáctico del contenido concerniente a la representación gráfica de la función logarítmica. Para ello recurrimos a una revisión de literatura del concepto, desde su génesis histórica. Finalizamos el capítulo, con la pregunta de investigación y los objetivos.

MOTIVACIÓN Y APROXIMACIÓN AL PROBLEMA

En el marco del programa de Maestría en Docencia de las Matemáticas, y en particular en el seminario de innovación e investigación, se decidió unir intereses personales para forjar un proyecto que aporte a la formación profesional del docente de matemáticas. Inicialmente son tres los incentivos, que desde la formación profesional nos inquietan. El primero de ellos está dado por la necesidad de indagar en los conocimientos de y para la formación de los docentes, el segundo interés corresponde a la forma en que un concepto se ha desarrollado históricamente; y finalmente el tercer elemento, está dado por el objeto matemático a estudiar, este se propone a partir de nuestros conocimientos teóricos, la experiencia en la práctica docente y con la ayuda de la investigadora Jeannette Vargas H., quien sugiere que ella tiene un proyecto de investigación[1] que estudia la función logarítmica y por lo tanto se puede centrar el foco de esta investigación en la representación gráfica de dicha función desde la génesis histórica .

La importancia de las funciones en la modelación de los fenómenos y especialmente la aplicabilidad de la función logarítmica a un gran número de ellos han llevado a un auge de investigaciones en Educación matemática sobre los procesos de aprendizaje de los estudiantes respecto al logaritmo y su función (Vargas, Pérez, & González, 2011). Estas investigaciones evidencian problemas que se presentan en la enseñanza de los logaritmos y la función logarítmica, y dificultades de los estudiantes para su comprensión. Como un aporte a dichas investigaciones, en este trabajo, se pretende utilizar algunas de las publicaciones existentes en Educación Matemática (EM) para identificar elementos que facilitarían una visión y conocimiento más amplio al profesor sobre cómo enseñar la construcción gráfica de la función logarítmica y cómo el mismo, en su formación puede dar un significado diferente y más completo al logaritmo y a la función logarítmica, partiendo de elementos históricos para la comprensión de dichos conceptos matemáticos.

Estudios como el de Ferrari (2001) evidencian la problemática que presentan los estudiantes a la hora de comprender y apropiarse de la noción de logaritmo y la función logarítmica, debido en gran parte a la manipulación errónea de los mismos, por lo cual se sugiere estrategias de enseñanza que retomen el desarrollo histórico y la naturaleza del

[1] Proyecto *Historia y Epistemología de la función logarítmica; conceptualización y marco teórico para la enseñanza de la función logarítmic*a. GRUPO BIOMA de la Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca.

concepto en su enseñanza, puesto que la forma actual de abordarlos genera una dislexia entre los logaritmos en su forma operativa y su concepción como función (Ferrari, 2001, p. 43).

Por otra parte, los libros de texto donde se trata la función logarítmica muestran una tendencia a abordarla a partir de su expresión algebraica, como duplas en una tabla, como una función inversa o a partir del teorema fundamental del cálculo. Todas estas formas de aproximación no cuentan con elementos suficientes que permitan comprender y asimilar la construcción de la función logaritmo llevándonos a aceptar que es indispensable conocer la expresión algebraica para construir la gráfica de una función, hecho que se reafirma con las actividades que se proponen para explorar la función (Ferrari & Farfán, 2008).

A partir del conocimiento de estudios como los mencionados, se consideró importante en esta investigación revisar la bibliografía existente en cuanto a la construcción gráfica de la función logarítmica y tomar de ella aquellos casos que presentan una propuesta de enseñanza diferente a la tradicional; que se basa en las expresiones algebraicas. De tal forma que pueda permitir a los docentes comprenderla y potencialmente contribuir a solucionar en parte, los problemas que los estudiantes presentan en la comprensión de la función logaritmo y su naturaleza.

Se pretende realizar un aporte y se considera que es importante que estos análisis sean conocidos por los docentes en formación como alternativa en el abordaje de los logaritmos y profundización en la comprensión de la función logarítmica y posible aplicación en sus estrategias de enseñanza. En este sentido es significativo que el profesor en su formación y durante su práctica docente, se pregunte por las diferentes maneras de lograr que los estudiantes se aproximen a la comprensión de un objeto matemático, por lo cual es conveniente que cuente con material que le permita referenciar, analizar y aplicar diferentes maneras de abordar un concepto, con base en las diferentes teorías del aprendizaje. "Si se considera como tarea del profesor, por excelencia, el acercar a sus estudiantes al estudio de una ciencia, se deben propiciar actividades de estudio que ayuden a los estudiantes a hacer conexiones entre ideas y descubrir sus interrelaciones lógicas. Esto, puede hacer más plausible contextualizar la enseñanza de las matemáticas mediante la presentación de un concepto en donde se exploran respuestas a preguntas tales como ¿de dónde vino?, ¿quién, por qué y cómo alguien pudo mencionar esto? (Vargas et al., 2011). Esto sugiere la necesidad de que el profesor conozca la historia de un concepto matemático y posibles estrategias de enseñanza que involucren elementos de la misma.

Es importante reconocer que las contribuciones de los investigadores en EM al docente, pueden darse bajo criterios diferentes, regidos desde perspectivas socioculturales, epistemológicas, cognitivas, entre otras; pero como iniciativa autores como Nava, M. y Reyes, A. (2009, p. 128) reconocen que:

> "La falta del conocimiento de la materia a impartir constituye la principal dificultad para que los profesores se impliquen en actividades innovadoras; esto se complementa considerando que un buen conocimiento de la materia para un docente supone también, entre otros aspectos: Estar al corriente de la historia de

> las ciencias, no sólo como cultura científica general, sino, como una forma de asociar los conocimientos científicos con los problemas que originaron su construcción. Así se pueden comprender también cuáles fueron las dificultades y los obstáculos epistemológicos que hubo que superar, lo que constituye una ayuda imprescindible para entender las dificultades de los estudiantes. Ser consciente de las estrategias empleadas en la construcción de los conocimientos. Conocer las interacciones Ciencia, Tecnología y Sociedad asociadas a la construcción de saberes. Tener algún conocimiento de los desarrollos científicos recientes y sus perspectivas. Adquirir conocimientos de otras disciplinas relacionadas". (Nava & Reyes, 2009, p. 128)

Teniendo en cuenta lo planteado por estos autores y la experiencia propia en el desempeño docente, se reconoce la ausencia de material estructurado de la perspectiva histórica de la construcción de los conceptos matemáticos que muestren al estudiante la cercanía de los conceptos matemáticos con contextos socioculturales y generen un mayor interés hacia el aprendizaje de la matemática. Por ello el trabajo pretende indagar al interior de algunas propuestas de enseñanza que involucren el desarrollo histórico del concepto de función logarítmica, específicamente en su representación gráfica, de tal manera que los profesores en formación puedan consultar este análisis, estudiarlo y determinar si las involucran en sus prácticas.

Este ejercicio investigativo, pretende ir más allá de la mera exposición y descripción de las propuestas de enseñanza mencionadas anteriormente. A partir del conocimiento de varias teorías de enseñanza y aprendizaje, durante los estudios de pregrado y especialización, nace el interés e inclinación por la teoría Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC), que presenta un análisis de los elementos que la formación de un docente debería involucrar. Adicional a ello también se encuentra la teoría APOS, como herramienta que permite determinar en alguna forma, cómo los individuos aprenden matemáticas. Al respecto Asiala *et al.,* (1996 citado en Vargas, 2012) afirma que una forma de entender la construcción del conocimiento matemático en el aula es a través del modelo APOS que considera distintas maneras de conocer los conceptos matemáticos y diferentes mecanismos de construcción de éstos.

Por lo expuesto en los párrafos anteriores la intención del trabajo, consiste en realizar un aporte, analizando a la luz de la teoría del CDC, qué elementos con respecto a la representación gráfica de la función logarítmica es posible que hagan parte del conocimiento del profesor, y por otra parte, cómo estas propuestas de aproximación a la representación gráfica de la función logarítmica; que involucran su desarrollo histórico, se pueden caracterizar a través los mecanismos de construcción y las construcciones mentales, propuestas en la teoría APOS, con la opción de que sea un conocimiento que permita que el profesor no solo apropiarse del objeto matemático, sino la propuesta de actividades para el aula fundamentadas en esta caracterización.

PREGUNTA Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Pregunta:

¿Qué del desarrollo de las construcciones de la representación gráfica de la función logarítmica propuestas con elementos de su desarrollo histórico, potencia un proceso de la comprensión y, es necesario integrarlo al conocimiento didáctico del contenido?

Objetivo general:

Constituir a la luz de la teoría del CDC un compendio de elementos propuestos para hacer parte del conocimiento del profesor, en lo concerniente al desarrollo histórico de la representación gráfica de la función logarítmica y caracterizar la construcción de dicho objeto de acuerdo con las formas de conocer planteadas en la teoría APOS.

Objetivos específicos:

- Sistematizar un análisis de información a partir de la literatura existente en Educación Matemática en lo concerniente a la construcción de la representación gráfica de la función logarítmica asociado a su desarrollo histórico; la relación entre una progresión geometría y una progresión aritmética.
- Caracterizar las construcciones de la representación gráfica de la función logarítmica, desde las formas de conocer acción, proceso y objeto que pueden potenciar el estudio de dichas construcciones.
- Organizar un compendio de elementos, que se propone como parte del conocimiento didáctico del contenido de los profesores de matemáticas.

ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO

El documento está organizado en tres capítulos y previos a ellos se encuentra la descripción del contexto general del estudio, en esta sección se contextualiza y ubica la investigación dentro del marco del conocimiento didáctico del contenido concerniente a la representación gráfica de la función logarítmica, además se propone la pregunta, objetivos y metodología de la investigación.

En el capítulo 1, se presentan los referentes teóricos en los cuales se sustenta el estudio, se encuentra dividido en cuatro secciones. En primer lugar, se tiene la Teoría del Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC), y en ella los elementos extraídos de esta teoría que permiten identificar un conjunto de componentes que se consideran fundamento para hacer parte del conocimiento del profesor de matemáticas.

El segundo referente, es la Teoría de Construcción del Conocimiento APOS: Acción, Proceso, Objeto y Esquema, que es la teoría que permite caracterizar las construcciones de la representación gráfica de la función logarítmica, propuestas en los documentos analizados.

Como tercer referente se presenta el concepto de logaritmo como la relación entre una progresión aritmética y una geométrica, esta explicación se expone basada en el contenido de uno de los documentos encontrados en la etapa de busque da y clasificación.

Finalizando el capítulo y como cuarto referente, se describe el desarrollo histórico del objeto representación gráfica de la función logarítmica, realizando una descripción de los hechos que los investigadores en EM resaltan como parte del desarrollo histórico del objeto.

El Capítulo 2 está dedicado a describir la metodología empleada en la investigación. Se resalta la intención de realizar un análisis de información, centrado en las fases de definición y limitación, búsqueda y clasificación de documentos y desarrollo del análisis; se expone el tratamiento que se le dio al conjunto de datos que se tomaron como unidades de análisis y el planteamiento de las categorías de análisis.

El Capítulo 3 presenta el análisis, considerando la información obtenida de los documentos, del marco de referencia y de las categorías de análisis; se divide en dos secciones y se comienza por presentar cuáles fueron los documentos seleccionados y cómo quedaron catalogados; en la segunda parte se muestran las redes resultantes del análisis de los dos documentos de acuerdo con las categorías propuestas a través de los elementos de la teoría del CDC, e inmerso en este se expone una caracterización de la construcciones propuestas por los autores de los documentos a través de la teoría de comprensión APOS.

El Capítulo 4. Está dedicado a las conclusiones y proyección de la investigación.

1. CAPÍTULO 1. REFERENTES TEÓRICOS

El contenido que se expone en este capítulo, tiene el propósito de contextualizar y describir brevemente la teoría en la cual se fundamenta esta investigación. Se encuentra dividido en cuatro partes y en cada una de ellas se describen los referentes que se consideran para el desarrollo de este análisis, el cual se enfoca en publicaciones concernientes a propuestas de construcción de la representación gráfica de la función logarítmica a partir de elementos de su desarrollo histórico.

En primer lugar, se tiene la Teoría del Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) cuyo iniciador es Lee Shulman (1986), quien la propone con el fin de darle un valor adecuado al conocimiento que debe tener el profesor para la enseñanza; integrando en ella el conocimiento del contenido disciplinar con el conocimiento pedagógico.

Los elementos extraídos de esta teoría permiten identificar un conjunto de componentes que se consideran fundamento para hacer parte del conocimiento del profesor de matemáticas.

El segundo referente, es la Teoría de Construcción del Conocimiento APOS: Acción, Proceso, Objeto y Esquema, desarrollada por Ed Dubinsky (2000), la cual trata de dar una explicación a cómo en la mente del sujeto se desarrolla la comprensión de un concepto; esta teoría permite caracterizar las construcciones de la representación gráfica de la función logarítmica, propuestas en los documentos analizados, desde las formas de conocer acción, proceso, objeto.

Como tercer referente se presenta el concepto de logaritmo como la relación entre una progresión aritmética y una geométrica, esta explicación se expone basada en el contenido del documento publicado por González, M., & Vargas, J. (2007). Segmentos de la historia : la función logarítmica. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria: Universidad Del Valle.*, *XV (002)*, 129–144, y con el fin de exponer matemáticamente la definicion del concepto de logaritmo.

Finalizando el capítulo y como tercer referente, se describe a través de los documentos revisados, el desarrollo histórico del objeto representación gráfica de la función logarítmica, realizando una descripción de los hechos que los investigadores en EM resaltan como parte del desarrollo histórico del objeto.

1.1. TEORÍA DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO

La perspectiva teórica de Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) la plantea Lee Shulman en la década de los 80´s y ha evolucionado gracias a la importancia e implicaciones que tiene en la formación de profesores y en las investigaciones, particularmente en la Educación Matemática (EM) (Pinto, 2010); dicha evolución, le ha dado espacio a varias interpretaciones, adaptaciones, investigaciones y componentes de esta teoría.

Jesús Pinto (2010) en su tesis doctoral, presenta una reseña de cómo ha evolucionado el concepto CDC, desde que lo plantea Lee Shulman hasta el 2010, evidenciando el desarrollo de este constructo teórico, sus concepciones, características y componentes.

Por lo anterior, lo presentado en este apartado se apoya en el contenido de la citada tesis de Pinto, con el fin de tener una mirada más amplia de la teoría, permitiendo describir el CDC que el profesor debería tener para la enseñanza de un concepto.

En lo que sigue, la intención es exponer cómo se entenderá en esta investigación la noción CDC; las categorías y componentes que funcionan como organizadores de los elementos a proponer para hacer parte del CDC del profesor. Resulta importante en este punto aclarar que para efectos del desarrollo de este trabajo no se hará uso de todos los componentes que Pinto (2010) propone.

1.1.1. Noción de Conocimiento Didáctico del contenido

Entendiendo el CDC, como el conocimiento que el profesor debe poseer para la enseñanza de un concepto; éste vincula los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza, que no consisten simplemente en el conocimiento del contenido disciplinar matemático, sino que va más allá, ya que debe abarcar los aspectos del contenido más relevantes y necesarios para su escolaridad (Pinto, 2010); por ejemplo: el conocimiento de estrategias de enseñanza, el conocimiento del currículo, el conocimiento de los alumnos y sus características, entre otras.

Los significados del CDC, se pueden constituir de distintas maneras, que pueden ser, a partir de los resultados de investigaciones, de las implicaciones o relaciones obtenidas en los diferentes análisis hechos por investigadores. Para comenzar, Shulman (1993, p. 56 citade en Pinto, 2010, p. 13) lo caracteriza así:

> “1. el CDC es una forma de comprender o conocer lo que los profesores poseen (o deberían poseer) que distingue su pensamiento y razonamiento de las meras características de un experto en la materia en cuestión, siendo éste un ejemplo de “sabiduría de los practicantes”, con lo cual diferencia al matemático y al educador, del profesor de matemáticas,
>
> 2. el CDC es una parte del conocimiento base para la enseñanza, un cuerpo de conocimientos, habilidades y -para algunos- una disposición, que distingue a la enseñanza como una profesión y que incluye aspectos como técnicas racionales y capacidades de juicio, improvisación e intuición; lo que Schön (1983) denominó como “reflexión-en-la-acción” y “reflexión-sobre-la-acción”, con lo cual justifica su naturaleza, su interrelación con otros dominios de conocimiento y su metodología para la formación, y
>
> 3. el CDC es un proceso de razonamiento pedagógico y acción a través del cual los profesores crean sus conocimientos cuando se enfrentan a problemas de enseñanza en contextos particulares, expresando sus planes y corrigiendo espontáneamente incluso improvisando ante los inevitables momentos impredecibles que surgen de

> la enseñanza, con lo cual estos profesores desarrollan nuevos conocimientos, intuiciones y disposiciones.” (Shulman, 1993, p. 56 citado en Pinto, 2010, p. 13)

Mientras que Pinto (2010) en su investigación, agrupa las conceptualizaciones derivadas de las investigaciones y de su evolución en cuatro categorías de la siguiente manera:

> “(1) el CDC es contextualizado, tanto con base en la naturaleza del contenido de la asignatura, como de la instrucción; (2) consiste en la transformación, transferencia o transposición didáctica del contenido para la enseñanza (o al ámbito escolar), (3) es diferente al conocimiento de la materia y no es una simple conjunción o mezcla de pedagogía y contenido ni tampoco un modelo único de desarrollo, por lo cual requiere de características especiales para su formación y estudio con los profesores; y (4) para la formación de los profesores, se requiere la reflexión y aplicación sobre la acción, la integración de psicología y contenido, la investigación en didáctica de la disciplina y el estudio de los diferentes modos de representar el contenido a enseñar. Características que explican con mayor profundidad y que amplían la comprensión del significado del CDC.” (Pinto, 2010, p. 12)

Para el caso de la presente investigación vamos a entender que la teoría del CDC es contextualizada, con base en la naturaleza de un contenido de la asignatura, así mismo esta teoría permite reconocer bajo sus componentes, lo que los profesores poseen y deberían poseer para la enseñanza de un concepto. Esta noción admite un proceso de razonamiento a través del cual los profesores sean conscientes de las formas de enseñanza de un concepto, su interrelación con otros dominios de conocimiento y su metodología para la formación de profesores.

Es importante precisar que esta investigación se enmarca en las implicaciones relacionadas con la formación inicial y permanente del profesor. Desarrollando sólo algunos aspectos y componentes del CDC.

1.1.2. Componentes del Conocimiento Didáctico del Contenido

Para el propósito de este trabajo se tratarán las tres categorías que Shulman propone y que Pinto (2010) denomina como: "Conocimiento del contenido matemático a enseñar, Conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales y Conocimiento de los procesos de aprendizaje del alumno sobre el contenido a enseñar" (Pinto, 2010, p. 20). Tanto las categorías como los componentes de cada una de ellas se conceptualizan de acuerdo con: las consideraciones hechas por investigadores y que Pinto (2010) resume en su trabajo, y con las contemplaciones propias del desarrollo de este ejercicio investigativo, como el uso de sólo algunos componentes de las categorías que plantea Pinto (2010), aquellos considerados como pertinentes para elaboración de esta investigación.

1.1.2.1. Conocimiento del contenido matemático a enseñar

Hace referencia a los contenidos específicos de la materia, que le permita incrementar la capacidad de efectuar actividades diferentes en el aula, así como también justificar la enseñanza y aprendizaje de un tópico.

En este sentido Pinto (2010, p. 23) agrupa en tres grandes conocimientos los componentes de esta categoría

a) *Conocimiento sobre la actividad matemática general*: el cual comprende tópicos como el conocimiento de la historia de la disciplina, la naturaleza de las explicaciones, la heurística y de los valores histórico-filosóficos, el conocimiento de las diferentes posturas o escuelas filosóficas en relación a cómo se crea y se construye el saber científico básico, los cambios en las nociones o conceptos y los principales problemas presentes en la evolución del mismo, entre otros.
b) *Conocimiento por tópico específico matemático:* del cual hacen parte, entre otros, el conocimiento conceptual y procedimental del concepto, las características esenciales, la comprensión de los conceptos en diferentes representaciones, trasladar y formar conexiones entre estos, el conocimiento de las características y propiedades relevantes del concepto y la relación con otros conceptos. Así mismo las formas alternativas de aproximación, consistente en la familiarización con las principales alternativas de aproximación del concepto, sus usos en las diferentes ramas de la matemática, en otras disciplinas y en la vida diaria, así como el estudio de posibles adecuaciones de estas aproximaciones a ciertas situaciones.
c) *Conocimiento sobre el currículo matemático:* este incluye conocimientos como, el de las justificaciones para aprender un tema dado, las ideas importantes para enseñarlo y los prerrequisitos de conocimiento para efectuar su enseñanza; comprender qué es lo que los alumnos necesitan aprender, cómo son los procesos, conceptos del

currículo, la capacidad y esfuerzo del estudiante, formas intuitivas de representación y otros.

1.1.2.2. Conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales de las matemáticas

Como ya se ha manifestado anteriormente, los profesores además de saber y comprender el contenido de su materia, también deben saber cómo enseñarlo, en tanto, no es suficiente con conocer y comprender el contenido de un tópico, sino también el cómo enseñar ese contenido de forma efectiva, y esto incluye: el cómo organizar, secuenciar y presentar el contenido; para ello, se debe tener un conocimiento pedagógico (de métodos de enseñanza y aprendizaje) adaptado al contexto específico de la materia, es decir, el conocimiento de la didáctica específica (Pinto, 2010).

Los elementos de esta categoría Jesús Pinto (2010, p. 30) los clasifica en tres amplios componentes que son:

a) *Conocimientos sobre las representaciones instruccionales:* este incluye entre otros, el conocimiento y comprensión de las representación de un contenido específico de sus relaciones, los fundamentos, los múltiples recursos instruccionales específicos para la disciplina; que conduzcan a rutinas, estrategias, métodos, técnicas instruccionales puntualizadas del contenido matemático.
b) *Conocimiento de los materiales curriculares:* se reconoce como el conocimiento de los materiales para la instrucción (textos, materiales, software, calculadora, etc.), y del

tratamiento y evaluación de ellos como selección adecuada para la enseñanza y aprendizaje de un tópico.

c) *Conocimiento sobre el currículo matemático:* Este componente recoge los elementos sobre el conocimiento de la planificación de la enseñanza de un contenido, que incluye el diseño, evaluación, modificaciones de programas, las características de un currículo, el reconocimiento de un currículo en otras disciplinas y el diseño e implementación de nuevos materiales en la materia.

1.1.2.3. Conocimiento de los procesos de aprendizaje del estudiante sobre el contenido matemático

Esta categoría consiste en el conocimiento que el profesor posee sobre errores, creencias y concepciones de los estudiantes, los procesos de aprendizaje de los estudiantes, en particular los procesos de comprensión del concepto y las formas de justificación; conocer las formas más adecuadas y correctas en que la mayoría de los estudiantes comprende un tópico, conocer los conocimientos particulares de los estudiantes a partir del estudio y observación de su desarrollo y desempeño en el aula.

Los componentes que Pinto (2010, p. 35) describe en esta categoría, se exponen a continuación:

a) Conocimiento del proceso cognitivo del estudiante de matemáticas: Este vincula los conocimientos sobre las necesidades y conocimientos particulares del estudiante de matemáticas, los procesos de aprendizaje de los estudiantes y el conocimiento de las creencias y concepciones inadecuadas comunes para los estudiantes.

b) *Conocimiento del diagnóstico del proceso cognitivo del estudiante:* Este se describe como el conocimiento de las técnicas de medición y diagnóstico de las concepciones de un estudiante.

c) *Conocimiento de estrategias instruccionales:* Este componente se especifica para el conocimiento de las estrategias determinadas para corregir las creencias y concepciones inadecuadas, también, los errores y dificultades; y las estrategias de aprendizaje de los estudiantes.

1.2. LA TEORÍA DE CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO APOS.

El desarrollo de la teoría APOS (Acción-Proceso-Objeto-Esquema), surge en la investigación en Educación Matemática a partir de la propuesta de Piaget sobre el proceso de *abstracción reflexiva,* siendo la clave de la construcción de los conceptos lógico-matemáticos. Dubinsky plantea este modelo de desarrollo de la comprensión (la teoría APOS), basado en el proceso de abstracción reflexiva, en el que consideran tanto los mecanismos de construcción como las diferentes formas de conocer un concepto; acción, proceso, objeto y esquema.

Esta teoría de aprendizaje, considera que el conocimiento matemático de un individuo "es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas; construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones" (Dubinsky, 1996, p.32 citado en Vargas, 2012, p. 34).

Para describir lo que en esta investigación se va a entender por APOS, es importante tener claro que es un modelo de desarrollo de la comprensión y que de esta manera estará definido para ello, en tanto esta teoría será un medio de caracterización del desarrollo de la comprensión, el cual "comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones; las acciones se interiorizan para formar procesos que se encapsulan para formar objetos; los objetos se pueden volver a desencapsular hacia el proceso desde el cual se formaron. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas" (Asiala et al., 1996, p. 8 citado en Meel, 2003, p. 243).

1.2.1. Formas de conocer Acción, Proceso y Objeto

Acción: una acción "se equipara con cualquier operación mental o física repetible que transforma de alguna manera un objeto físico o mental. Como resultado, las acciones tienden a ser algorítmicas por naturaleza y en forma externa" (Clark et al., 1997 citado en Meel, 2003, p. 244), estas se dan como reacción a estímulos externos que indican los pasos a realizar.

Además, son el inicio para lograr comprensión de un concepto, y en definitiva no se pueden excluir del modelo de desarrollo de la comprensión, debido a que las acciones se realizan en objetos matemáticos dentro del ámbito de la experiencia del estudiante.

Conforme una acción se repite de manera manual o mental y no es estimulada externamente, se dice que la acción se *interioriza*, volviéndose una construcción interna llamada proceso.

Proceso: Un proceso es considerado, como una actividad interna y completamente controlada por el sujeto. “El logro de esta concepción de proceso indica que el estudiante puede reflejar el proceso, describirlo e incluso revertir los pasos de transformación sin requerir el estímulo externo” (Meel, 2003, p. 245). La *interiorización* de la acción le permite al sujeto ser consciente de esta y reflexionar sobre ella; también puede *coordinar* dos o más procesos permitiéndole construir un nuevo proceso o un objeto. Cuando el estudiante puede reflejarse en un proceso y transformarlo por medio de una acción, el proceso se considera como *encapsulado* para convertirse en un objeto.

Seguramente, al estudiante le va a resultar necesario encontrar elementos de un nuevo tema y/o reconocerlos en las construcciones anteriormente hechas, para que le permitan la aplicación de otros procesos y objetos en un contexto distinto; de igual manera, en ocasiones le va a tocar realizar la composición de procesos aparentemente no relacionados para crear una estructura más compleja (Meel, 2003).

Objeto: cuando el sujeto puede efectuar transformaciones sobre el proceso, y realizar reflexiones más generales se dice que el proceso está encapsulado y se convierte en Objeto. “Una vez *encapsulado*, el objeto existe en la mente del individuo y necesita la asignación de una etiqueta para el objeto (Duninsky et al, 1994 citade en Meel, 2003, p. 245). La etiqueta resultante permite al estudiante nombrar el objeto y conectar dicho nombre con el proceso a partir del cual se construyó el objeto perseguido; esta visión dual del objeto resulta esencial debido a que el estudiante necesita ser capaz de desencapsular un objeto y regresar al proceso en una forma anterior a su encapsulamiento. El *desencapsulamiento* permite al estudiante utilizar las propiedades inherentes al objeto para realizar nuevas manipulaciones a partir de él" (Meel, 2003, p. 245).

En el caso de la forma de conocer esquema, no será evaluada en este estudio ya que esta se define como una colección que puede ser más o menos coherente, y que el estudiante la utiliza para organizarse, comprender y crear un sentido del fenómeno o concepto observados. Además un esquema contiene generalmente otros esquemas subordinados para abarcar varios puntos de un dominio particular; con el fin de ser utilizados para resolver una situación problemática de esta manera se tendría que mirar el concepto función logarítmica como al esquema, planteamiento que no se propone como objetivo de este estudio.

1.2.2. Mecanismos de construcción

Para realizar la construcción mental de procesos, objetos y esquemas el individuo hace uso de unos mecanismos denominados abstracciones reflexivas. "Los mecanismos para hacer dichas construcciones se llaman abstracciones reflexivas e incluyen la repetición, la interiorización, la encapsulación, la desencapsulación, la coordinación, la inversión, etcétera." (Dubinsky, 2000 p. 60 citado en Vargas, 2012, p. 35).

Se presenta la descripción de los mecanismos de construcción realizada por Bodí, 2006, concerniente a la propuesta del grupo de investigadores de RUMEC así:

Interiorización: "Es la construcción mental de un proceso relativa a una serie de acciones sobre objetos cognitivos. La acción se interioriza en un proceso." (Bodí Pascual, 2006, p. 69)

Cuando el individuo realiza la repetición de la misma acción sobre uno o varios objetos cognitivos, la cual puede ser el seguimiento de una instrucción o un algoritmo; y reflexiona sobre la misma, de tal forma, que llega a pensar en las acciones sin necesidad de realizarlas, entonces ha interiorizado la acción en un proceso.

Coordinación: este mecanismo de coordinación centra la reflexión sobre procesos, "Dubinsky (1991) explica la coordinación volviendo a los procesos, considerando el acto cognitivo de coger dos o más procesos y usarlos para construir un nuevo proceso" (Bodí Pascual, 2006)

Este mecanismo, permite al individuo relacionar diferentes procesos que lo conducen a uno nuevo donde están involucrados todos los que relacionó, de tal forma que obtienen un proceso único y diferente a los involucrados.

Inversión: es un mecanismo de construcción que parte de un proceso, de tal forma que "Una vez que el proceso existe internamente, al sujeto le es posible pensarlo invertido, el sentido de deshacer, como un medio para construir un nuevo proceso que consiste en el inverso del original" (Bodí Pascual, 2006, p. 69).

Este mecanismo posibilita al individuo devolverse en un proceso, de tal forma que puede generar otro diferente al original, mediante la reflexión sobre la forma en que el proceso fue construido.

Encapsulación: este mecanismo se refiere a la reflexión sobre procesos para gestar objetos, "Es la transformación mental de un proceso en objeto cognitivo. Este objeto puede ser visto como una entidad total y puede ser transformado por acciones o procesos." (Bodí Pascual, 2006, p. 69).

Este mecanismo permite transformar un elemento dinámico, como lo es un proceso, en otro estático, como es un objeto. La encapsulación le da la identidad de objeto, con determinadas e invariantes características.

Desencapsulación: Consiste en regresar del objeto al proceso mediante el cual fue encapsulado. Este mecanismo permite construir nuevos objetos, puesto que al volver al proceso, este mediante la coordinación puede relacionarse con otros procesos que podrían terminar en una nueva encapsulación en objeto.

1.3. EL LOGARITMO: RELACIÓN ENTRE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA Y UN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

El hecho de que los logaritmos se construyeran a partir de la relación de una progresión geométrica y una aritmética se cimienta en el contenido de la obra:

"*La Arithmética Integra* (1544) de Stifel (1487-1567), se establece que los términos de la progresión geométrica:

$$1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, ..$$

se corresponden con los términos de la progresión aritmética formada por los exponentes 0, 1, 2, 3, 4, 5, . . . ,

La multiplicación de dos términos de la progresión geométrica produce un término, cuyo exponente es la suma de los términos correspondientes en la progresión aritmética, y la división de dos términos de la progresión geométrica produce un término, cuyo exponente es la diferencia de los correspondientes términos en la progresión aritmética"[2](González & Vargas, 2007, pp. 130–131).

La idea clave en la definición del concepto de logaritmo la propone Napier

"era que para conseguir que los términos de una progresión geométrica formadas por las potencias enteras de un número dado estuvieran muy próximas unas a otras, era necesario tomar esta razón muy próxima a 1; así, los huecos entre los sucesivos términos de la progresión se mantenían pequeños, Napier decidió tomar como razón el número $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$; los términos de la progresión de potencias enteras crecientes así formada, están ciertamente muy próximos entre sí, de hecho, demasiado próximos. Para conseguir un cierto equilibrio y evitar el uso de decimales, multiplico todas las potencias por 10^7.

[2] Esta misma relación la establecen para fraccionarios y negativos.

Entonces, si $N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$, L será el "logaritmo" de Napier del número N Eduards (1979, 144) denota este logaritmo (para distinguirlo del logaritmo actual) como Nog, por lo tanto $L = Nog\ N$, de acuerdo con esta definición, se cumple que, el logaritmo de 10^7 será 0, el logaritmo de $10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = 9999999$ sera 1, etc y $Nog\ N$ decrece a medida que N crece contraposición con lo que ocurre con los logaritmos actuales. Además si $N' = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{L'}$, se cumple que:

$$\frac{N}{N'} = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{L-L'}$$

Luego la diferencia entre los logaritmos de L y de L' sólo dependen de la razón entre L y L' y se puede concluir que si $N_1, N_2, \dots, N_n$ es una progresión geométrica entonces la sucesión de logaritmos correspondiente es una progresión geométrica. Además, si se dividen tanto los números como los logaritmos por $\frac{1}{10^7}$, se tiene prácticamente un sistema de logaritmos de base $\frac{1}{e}$, puesto que $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$ no se diferencia ya demasiado del $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

Estudiemos detenidamente esta visión aritmética del logaritmo:

• Se elige un número, $1 - 10^{-7}$, "próximo" a 1

• Se construye la progresión geométrica de razón $1 - 10^{-7}$:

$$(1 - 10^{-7})^0, \qquad (1 - 10^{-7})^1, (1 - 10^{-7})^2, \dots, (1 - 10^{-7})^L, \dots$$

que es una progresión decreciente de términos "próximos" a 1.

• Para reducir la aparición de decimales en la progresión anterior, se multiplica cada término de la sucesión por 10^7 (a los términos de la nueva progresión geométrica se les llama números de Napier: N)

$$10^7(1 - 10^{-7})^0, 10^7(1 - 10^{-7})^1, 10^7(1 - 10^{-7})^2, \ldots, \underbrace{10^7(1 - 10^{-7})^L}_{N}, \ldots$$

• Se hace la asignación:

$$N \rightarrow NogN = L$$

• Así:

$$0 = Nog\, 10^7, 1 = Nog\, 10^7(1 - 10^{-7}), \ldots, L = Nog\, 10^7(1 - 10^{-7})^L$$

• Si se dividen N y L por 10^7, la correspondencia:

$$N/10^7 \rightarrow NogN/10^7 = L/10^7$$

es una correspondencia similar a la correspondencia:

$$\frac{N}{10^7} \rightarrow \log_{\frac{1}{e}} \frac{N}{10^7}$$

$$\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N}{10^7}\right) = \frac{10^7 \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N}{10^7}\right)}{10^7} = \frac{\log_{\frac{1}{e}}\left(10^7(1-10^7)\right)^{10^7}}{10^7}$$

$$= L.\log_{\frac{1}{e}}\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^N = \frac{1}{e} \quad \rightarrow \quad \frac{L.\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{1}{e}\right)}{10^7} = 1/10^7$”(González & Vargas, 2007, pp. 132–134)

La definición de logaritmo como la relación entre una progresión aritmética y una geométrica fue utilizada en el siglo XIX por Serret de la siguiente manera:

“Dadas las progresiones crecientes e indefinidas:

$$1, r, r^2,\ \ r^3,\ \ r^4 \dots$$

$$0, d, 2d, 3d, 4d\ \ \dots$$

> Una por cociente comenzando por 1, y la otra por diferencia d comenzando por cero, se llama logaritmos de los números que forman parte de la progresión por cociente a los números que les corresponden respectivamente en la progresión por diferencia.
>
> Las dos progresiones de las cuales se trata constituyen un sistema de logaritmos sujetos solamente a la condición de comenzar la primera en 1 y la segunda por cero" (1887, p. 270, citado en Vargas et al., 2011).

Si se toma una progresión donde r sea, por ejemplo 2. La progresión por cociente sería:

$$1, 2, 2^2, 2^3,\ \ 2^4, 2^5 \dots$$

Ahora, de manera trivial se toma la progresión por diferencia donde d es 1.

$$0,1,2(1), 3(1), 4(1), 5(1) \dots$$

Recurriendo a la noción de logaritmo de un número a como el exponente al cual elevamos la base b, para obtener el número a, claramente podemos ver que los número de la progresión por aritmética se corresponden con los exponentes de la progresión geométrica. Es posible afirmar que este es un sistema de logaritmos en base 2.

Observando la relación de las dos progresiones, se verifica que en la parte inferior están ubicados los logaritmos en base 2 de los correspondientes números ubicados en la parte superior:

1	2	4	8	16	32
0	1	2	3	4	5

Sin embargo, ¿qué sucede si en la progresión aritmética se toma un d diferente de 1? Por ejemplo tomemos la diferencia d como 2.

La progresión geométrica continúa siendo la misma:

$$1,2,2^2,2^3,2^4,2^5 \dots$$

Y la progresión aritmética es:

$$0,2,2(2),3(2),4(2),5(2) \dots$$

Resolviendo operaciones las progresiones respectivas quedan de la así:

1	2	4	8	16	32
0	2	4	6	8	10

En este caso no es muy claro que la correspondencia entre las progresiones constituya un sistema de logaritmos. Sin embargo recurriendo a las operaciones como la radicación, podemos deducir que efectivamente estas progresiones determinan un sistema de logaritmos de base $\sqrt{2}$.

De acuerdo con estos dos ejemplos observamos que efectivamente como al relacionar una progresión geométrica con una aritmética, según lo afirma Serret y Napier, es posible establecer un sistema de logaritmos.

1.4. Evolución histórica del Concepto representación gráfica de la función logarítmica.

A partir del análisis de los documentos, realizado durante el desarrollo del presente trabajo, donde se fijó el objeto de estudio, representación gráfica de la función logarítmica, fundamentado en el propio desarrollo histórico de este, se considera necesario exponer de manera muy sucinta, la evolución de este objeto; haciendo uso de la información contenida en la bibliografía encontrada de acuerdo con los parámetros de búsqueda del análisis, que bajo el acuerdo de clasificación, (ver Capítulo 2. Aspectos metodológicos) quedaron clasificados en los documentos que solo hacen referencia al desarrollo histórico del concepto de logaritmo y función logarítmica.

La intención de esta descripción, se fundamenta en la necesidad de conocer la evolución del concepto, y las pretensiones de los investigadores en rescatar dichas cosas que son fundamento del concepto; para ello se ha estructurado una tabla de clasificación de algunos segmentos de texto contenidos en los documentos que permiten ver el origen y evolución del concepto.

A continuación, se presentan los resultados en dos tablas independientes de acuerdo con el documento de donde se extraen, los segmentos de texto allí presentados no se editaron. El primer documento es el de Javier Tapia escrito en el año 2003 y titulado *Historia De Los Logaritmos,* el segundo es el de María Teresa Astudillo y Jeannette Vargas escrito en el 2007 y titulado *Segmentos de la historia: La función Logarítmica.*

1.4.1. *Historia De Los Logaritmos.* Apuntes de Historia de las Matemáticas.

El documento, *Historia de los logaritmos* escrito por Javier Tapia, que es analizado en esta investigación, fue publicado en *Apuntes de Historia de Las Matemáticas*, en el Volumen 2. Número 2., de las página 5 a la 22. Mayo 2003. México.

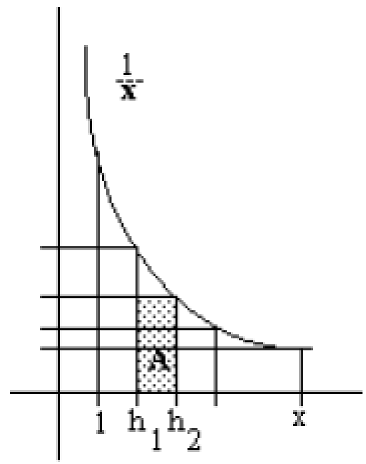
Característica		**Hechos**	**Cronología**
ANTECEDENTES AL CONCEPTO DE LOGARITMO	**Circunstancias**	Los cálculos que se precisaban hacer, debido principalmente a la expansión comercial y al perfeccionamiento de las técnicas de navegación, eran de tal magnitud que surgía la necesidad de encontrar algoritmos menos laboriosos que los utilizados hasta entonces, es decir, algoritmos de la multiplicación, de la división, etc.	Siglo XVI
		Dos caminos condujeron a su hallazgo: los cálculos trigonométricos para las investigaciones astronómicas aplicables a la navegación, y el cálculo de las riquezas acumuladas en lo que se refiere a las reglas de interés compuesto.	Siglo XVI
	Concepto	***Napier*** fue el inventor de la palabra logaritmo (del griego "logos", razón, y "arithmos", número: número de razones, pues en el caso de ser el logaritmo un número entero, es el número de factores que se toman de la razón dada (base) para obtener el antilogaritmo.	1619

CONCEPTO DE LOGARITMO	**Tablas**	El descubrimiento de ***Napier*** fue ávidamente acogido por los astrónomos ***Tycho Brahe y Johann Kepler***. En Edimburgo aparecen sus *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, o “descripción de la maravillosa regla de los logaritmos”, es decir, las primeras tablas de logaritmos; sin embargo, no se describe aquí la forma en que fueron construidas.	1614
		Henry Briggs, publicó sus *Logarithmorum chilias prima*, que comprende los logaritmos de los números 1 a 1.000, con una precisión de 14 decimales.	1617
		En la obra Arithmetica logarithmica, de **Henry Briggs** ya aparece la palabra característica (parte entera). La palabra mantisa (parte decimal), y las tablas que aparecen en la obra contienen los logaritmos decimales de los números 1 a 20.000 y de 90.000 a 100.000, con 14 cifras decimales de precisión.	1624
		Adrián Vlacq y E. Decker, publicaron en Holanda los logaritmos desde 1 a100.000, aproximados hasta 10 cifras decimales.	1628
		Henry Briggs, quien fue el primero que hizo las tablas logarítmicas en base 10, en su obra Logarithmall Arithmetike: "Los logaritmos son números inventados para resolver más	1631

	Tablas	fácilmente los problemas de aritmética y geometría... Con ellos se evitan todas las molestias de las multiplicaciones y de las divisiones; de manera que, en lugar de multiplicaciones, se hacen solamente adiciones, y en lugar de divisiones se hacen sustracciones. La laboriosa operación de extraer raíces, tan poco grata, se efectúa con suma facilidad... En una palabra, con los logaritmos se resuelven con la mayor sencillez y comodidad todos los problemas, no sólo de aritmética y geometría, sino también de astronomía."	
	Concepto	***Napier,*** publica, bajo el título *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, es decir, “construcción de la maravillosa regla de los logaritmos”. La forma en que las tablas fueron construidas	1619
		El inventor de la "Regla de cálculo", **William Oughtred**, establece las propiedades de los logaritmos	s.f
RELACION ENTRE PROGRESIÓN GEOMETRICA Y ARITMÉTICA	**Primeras aproximaciones**	Los orígenes del descubrimiento, o invención, de los logaritmos se remontan hasta ***Arquímedes***, en la comparación de las sucesiones aritméticas con las geométricas. Regla de Arquímedes: "para multiplicar entre sí dos números cualesquiera de la sucesión de abajo, debemos sumar los dos números de la sucesión de arriba situados encima de aquellos	287–212 a.C.

	Primeras aproximaciones	dos. Luego debe buscarse en la misma sucesión de arriba dicha suma. El número de la sucesión inferior que le corresponda debajo será el producto deseado".	
		Miguel Stifel, su obra "Arithmetica integra", se encuentra por primera vez el cálculo con potencias de exponente racional cualquiera y, en particular, la regla de la multiplicación: $a^n \cdot a^n = a^{n+m}$, para todos los números racionales n, m.	1544
		Dos matemáticos daneses, ***Wittich y Clavius***, sugirieron la aplicación de las tablas trigonométricas para abreviar los cálculos, mediante el uso de las fórmulas del seno y del coseno de la suma de dos ángulos.	1593
		Pero para hacer realmente aplicables los logaritmos al cálculo numérico, le faltaba a Stifel todavía un medio auxiliar importante, las fracciones decimales; y sólo cuando se popularizaron éstas, después del año 1600, surgió la posibilidad de construir verdaderas tablas logarítmicas.	1600
	Relación entre las progresiones	Hoy se sabe que el relojero y constructor de instrumentos suizo ***Jobst Bürgi***, se hallaba en posesión de este conocimiento antes que Napier, incluso se afirma que concibió la idea del logaritmo ya en el año 1586	1586

		Napier, introdujo los logaritmos mediante una concepción cinemática, cuyo origen, según él se imaginaba, era un movimiento sincrónico, una especie de fluctuación entre dos sucesiones. A continuación se describe esta concepción.	1614
	Relación entre las progresiones	Sean un segmento AB y una semirrecta HF. Supongamos que los móviles c e i parten simultáneamente de A y H con la misma velocidad inicial y en dirección a B y F, respectivamente. Supongamos que el móvil c tiene una velocidad numérica igual a la distancia y; además, el móvil i se desplaza con una velocidad uniforme numéricamente igual a su velocidad inicial. **Napier** definió la longitud x como el logaritmo de y.	1619
		Bürgi publicó en Praga sus tablas logarítmicas bajo el título *Arithmetische und geometrische Progress Tabulen*. Estas tablas se publicaron en circunstancias exteriores desfavorables, pues el 8 de noviembre de 1620 fue tomada Praga, y permanecieron desconocidas. Reconoció el valor práctico de las sucesiones de ***Stifel*** es aplicable con provecho en el caso de que sus respectivos términos se aproximen uno al otro, lo más posible. A la vez observó que las propiedades logarítmicas no se extendían solamente sobre la sucesión de potencias de base dos, sino sobre sucesiones con cualquier razón racional q.	1620

REPRESENTACIÓN GEOMEÉRICA DEL LOGARITMO		Por otra parte, observemos el gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ y averigüemos el área de cada uno de los "rectángulos inferiores" que dependerá de la partición que hayamos tomado  	
		Pensemos una partición en que $h \rightarrow 0$ para que el valor del área de cada rectángulo se aproxime más a la de la zona sombreada y como el intervalo $[1, x]$ es continuo, integramos para calcular el área $y = \int_1^x \frac{dh}{h} = \ln h_1^x = \ln x - \ln 1$ Pero para poder aceptar esta interpretación del logaritmo debe comprobarse que se cumpla la propiedad fundamental, por la cual el logaritmo del producto es la suma de los logaritmos de los factores; lo que puede demostrarse muy fácilmente. Este último análisis se corresponde también con el proceso histórico. En el año 1650, gracias a los adelantos en geometría analítica y en el cálculo infinitesimal, pudo llegarse a los resultados anteriores. Con estos	1650

		descubrimientos, de principios del siglo XVII, se lograron efectuar operaciones que anteriormente ni siquiera podían pensarse.	
TRANSICIÓN DE LA VISIÓN ARITMÉTICA A LA GEOMÉTRICA		En una parte de su libro, ***Stifel*** hace la siguiente observación: "Se podría escribir todo un libro nuevo sobre las propiedades maravillosas de esos números, pero debo ponerme coto a mí mismo en este punto y pasar de largo con los ojos cerrados". Más adelante agrega: "La adición en la sucesión aritmética corresponde a la multiplicación en la geométrica, lo mismo que la sustracción en aquélla corresponde a la división en ésta. La simple multiplicación en la sucesión aritmética, corresponde a la multiplicación por sí mismo, potenciación, en la geométrica; y la división en la primera corresponde a la extracción de la raíz en la segunda, algo así como la división por dos, corresponde a la extracción de la raíz cuadrada".	1600
TRANSICIÓN DE LA VISIÓN GEOMÉTRICA A LA ALGEBRAICA		Gracias a los adelantos en geometría analítica y en el cálculo infinitesimal, pudo llegarse a una ecuación de diferencias $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, y de aquí $dy = \frac{dx}{x}$; si se tomemos una partición $\{1, h_1, h_2, \dots, h_n, x\}$ en el intervalo $[1, x]$para un x cualquiera. Podemos pensar que dy irá variando para cada valor h_i de la partición, ya que $dy_k = y_k - y_{k-1}$. De $dy = \frac{dx}{x}$ obtenemos	1650

		que $dy_k = \frac{dh}{h}$ (en particular, $dy = dy_k = \frac{dx}{x}$). Siendo $\frac{dh}{h}$ el área de un rectángulo inferior cualquiera, del grafico $f(x) = \frac{1}{x}$.	
FUNCIÓN LOGARÍTMICA		***Leonard Euler*** descubrió las profundas relaciones entre la función exponencial $a^x = b$ y su inversa $x = \log_a b$. En palabras de Egmont Colerus: Sin embargo, aún no se sospechaba que el nuevo método calculístico, sobre todo en sus últimos principios constructivos, simultáneamente se transformaría en eje de toda la Matemática infinitesimal. Nadie pensaba aún en que la función logarítmica se habría de transformar en un puente tendido sobre el camino que lleva a la solución de integraciones, aparentemente insolubles. Y menos aún se pensaba en el futuro del mágico número e, para el cálculo de intereses y de probabilidades.	siglo XVIII
LOGARITMO NATURAL		**Edward Wright** publicó una traducción inglesa del tratado de Napier, en la que se encuentran algunos logaritmos naturales.	1614
		John Speidell, en una obra titulada New logarithmes, publicada en Londres en 1619, reajusta los logaritmos de Napier introduciendo, a partir de las funciones trigonométricas, los logaritmos naturales (de base e).	1619

Tabla 1 . Evolución histórica del concepto de logaritmo y función logarítmica basada en Tapia (2003).

1.4.2. Segmentos de la historia : la función logarítmica.

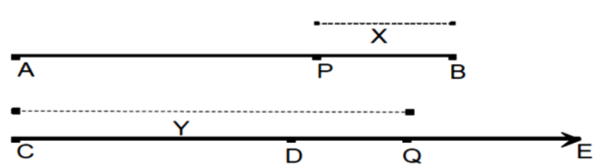
El documento, *Segmentos de la historia : la función logarítmica*, escrito por María Teresa González y Jeannette Vargas Hernández, que es analizado en esta investigación, fue publicado en *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, revista de la Universidad Del Valle., XV (002), de las páginas 129 a 144 en el año 2007. Colombia.

Característica		**Hechos**	**Cronología**
ANTECEDENTES AL CONCEPTO DE LOGARITMO	**Circunstancias**	Dos caminos condujeron a su hallazgo: los cálculos trigonométricos para las investigaciones astronómicas aplicables a la navegación, y el cálculo de las riquezas acumuladas en lo que se refiere a las reglas de interés compuesto.	s. f.
		Además, en el siglo XVI, comenzaron a popularizarse diversos tipos de identidades trigonométricas por toda Europa para simplificar los cálculos astronómicos. Entre ellas estaba el grupo de fórmulas conocidas como “Reglas de Prosthaphaeresis”, es decir, permitían convertir el producto de funciones circulares en una suma o diferencia y, como se describe más adelante, tuvieron repercusión en el desarrollo de los logaritmos.	Siglo XVI
		La invención de ***Napier*** (1550-1617) del logaritmo fue más que el fruto de una elaboración aritmética del estilo de las de Stifel, el resultado del estudio de un problema de	Siglo XVI

	Circunstancias	mecánica, para el que se construyó un modelo adecuado que permitiera conjugar ([8], p. 341) ideas del mundo aditivo y el multiplicativo.	
		La invención de los logaritmos data de principios del siglo XVII y se considera hija de la preocupación de los matemáticos del siglo XVI por las técnicas prácticas de cálculo, siendo un fruto tardío de éstas. En relación con dicha invención, Bell (2000), destaca el papel que ésta ejerció en aquel momento, las aplicaciones que tuvo y las facilidades que concedió a los matemáticos.	Siglo XVII
	Concepto	Si recordamos que ***Napier*** murió antes de que ***Descartes*** (1596 - 1650) introdujera la notación, n, nn, n^3, . . . para las potencias, no nos maravillaremos tanto de que le costara no menos de veinte años razonar las propiedades y la existencia de los logaritmos.	s. f.
CONCEPTO DE LOGARITMO	**Tablas**	No es necesario decir que ***Napier*** calculó sus tablas numéricamente y no geométricamente, desde luego, tal como indica la palabra "logaritmo" inventada por él. Al principio Napier llamó a sus índices de potencias o exponentes "números artificiales", pero más tarde se decidió por la palabra compuesta de las dos palabras griegas logos (o razón) y arithmos (o número). Napier no pensaba, en una base para su sistema, pero no obstante sus tablas venían calculadas por medio de multiplicaciones repetidas,	s. f.

		equivalentes a elevar a potencias el número 0.9999999. Obviamente la potencia (o número) disminuye según el índice (o logaritmo) aumenta, lo cual era de esperar ya que estaba utilizando implícitamente como base $\frac{1}{e}$ que es menor que 1.	
	Tablas	Más tarde se publicó una obra póstuma de ***Napier*** titulada *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (1619) en la que aparecen las tablas de Napier que fueron recibidas con entusiasmo por astrónomos y navegantes ya que convertía los tediosos cálculos de multiplicaciones y divisiones en simples sumas y restas. Hay que señalar que en la época de Napier todavía no se había desarrollado las potencias con exponente fraccionario ni la notación exponencial. Tampoco estaba extendido el uso del punto decimal para separar las cifras decimales, de hecho fue Napier, y su uso sistemático del punto decimal, el responsable de la generalización de su uso.	1619
		Casi al mismo tiempo que ***Napier***, en Suiza ***Jobst Bürgi*** (1552-1632) desarrollaba ideas muy parecidas. Existen referencias de que a Bürgi la idea de logaritmo se le ocurría seis años antes; sin embargo, no publicó sus resultados hasta 1620, en Praga, en su obra titulada *Arithmetishe und geometrische Progress-Tabulen*.	1620

RELACIÓN ENTRE PROGRESIÓN GEOMÉTRICA Y ARITMÉTICA	**Primeras aproximaciones**	Esta observación aunque había sido hecha anteriormente por ***Nicolás Chuquet*** (1445-1488) en *Le Triparty en la science des nombres* (1484), establece estas reglas sólo para las potencias de 2 con exponentes de 0 a 20. ***Stifel*** sigue trabajando con potencias de dos pero amplia a los exponentes fraccionarios y negativos. Así, la división de r^2 por r^3 produce r^{-1} qué corresponde al término −1. A pesar de advertir las posibilidades de estos hallazgos, Stifel manifestaba: "se podría escribir un libro totalmente nuevo sobre las maravillosas propiedades de estos números, pero he de resignarme y pasar por él con ojos cerrados".Esta propiedad fue importante en la época, puesto que simplificaba los cálculos que tenían que hacerse con números grandes, fundamentalmente en relación con la astronomía, rebajando de esta forma en un grado cada una de las operaciones aritméticas.	1484
		Posteriormente, en la Arithmética Integra (1544) de ***Stifel*** (1487-1567), se establece que los términos de la progresión geométrica: $1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, \ . \ . \ .$se corresponden con los términos de la progresión aritmética formada por los exponentes 0, 1, 2, 3, 4, 5, . . . , La multiplicación de dos términos de la progresión	1544

		geométrica produce un término, cuyo exponente es la suma de los términos correspondientes en la progresión aritmética, y la división de dos términos de la progresión geométrica produce un término, cuyo exponente es la diferencia de los correspondientes términos en la progresión aritmética.	
	Relación entre las progresiones	En cuanto a la versión geométrica del concepto de logaritmo, ***Napier*** lo explica de la siguiente manera: Sea el segmento AB y una semirrecta CDE dados en la figura 1. Sea un punto P que parte de A y se mueve a lo largo de AB con velocidad variable que decrece en proporción a su distancia B; supongamos que un punto Q parte al mismo tiempo de C y se mueve a lo largo de la semirrecta CDE con velocidad uniforme igual a la velocidad inicial del punto P; entonces Napier llama a la distancia variable CQ el logaritmo de la distancia PB . 	s. f.
		Para obtener un paso lo suficientemente pequeño en la tabla, ***Bürgi*** tomó como razón para su progresión geométrica un número mayor que 1, el número $r = 1 + \frac{1}{10^4}$. La tendencia a no encontrarse, en lo posible, fracciones le obligó a	s. f.

	Relación entre las progresiones	introducir un factor complementario; $a = 10^8$ Los valores de la progresión geométrica obtenida $gk = 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^k$ $(k = 0, 1, 2, 3\ldots)$ los puso en correspondencia con los términos de la progresión aritmética: 0, 10, 20, 30, . . . y obtuvo dos series de valores: $10^8, 10^8(1+10^{-4}), 10^8(1+10^{-4})^2, 10^8(1+10^{-4})^3, \ldots$ $0 \quad 10 \quad 20 \quad 30$ Los números de la serie de abajo fueron impresos en pintura roja y se denominaban rojos; los números de la serie de arriba, en pintura negra, se denominaban negros. De esta forma, en la tabla de ***Bürgi*** los números rojos constituían los logaritmos de los negros divididos entre 10^8 con base $\sqrt[10]{1,0001}$. Como Bürgi orienta su tabla a los números rojos, será una tabla de antilogaritmos, lo que no cambia la esencia de la cuestión. Entre las diferencias de los dos acercamientos al concepto de logaritmo, hemos visto que Napier eligió al principio log $10^7 = 0$, mientras que Bürgi parte de log $10^8 = 0$. Además, la relación $\log m < \log n \ si \ m > n$, es cierta en el sistema de Napier, mientras en el de Bürgi se verifica $\log m > \log n \, si \, m > n$, lo que permite afirmar que el sistema del relojero Bürgi estaba más cerca del nuestro que el de Napier.	
		En una parte de su libro, ***Stifel*** hace la siguiente observación: "Se podría escribir todo un libro	1600

	Relación entre las progresiones	nuevo sobre las propiedades maravillosas de esos números, pero debo ponerme coto a mí mismo en este punto y pasar de largo con los ojos cerrados". Más adelante agrega: "La adición en la sucesión aritmética corresponde a la multiplicación en la geométrica, lo mismo que la sustracción en aquélla corresponde a la división en ésta. La simple multiplicación en la sucesión aritmética, corresponde a la multiplicación por sí mismo, potenciación, en la geométrica; y la división en la primera corresponde a la extracción de la raíz en la segunda, algo así como la división por dos, corresponde a la extracción de la raíz cuadrada".	
		La obra de ***Napier*** era que para conseguir que los términos de una progresión geométrica formada por las potencias enteras de un número dado estuvieran muy próximas unas a otras, era necesario tomar esta razón muy próxima a uno; así, los huecos entre los sucesivos términos de la progresión se mantenían pequeños. Napier decidió tomar como razón el número $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$; los términos de la progresión de potencias enteras crecientes así formada, están ciertamente muy próximos entre sí, de hecho, demasiado próximos. Para conseguir un cierto equilibrio y evitar el uso de decimales, multiplicó Napier todas las potencias por 10^7.	1619

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DEL LOGARITMO		Fermat había calculado en 1629 el área bajo la curva $y = x^n$ entre dos valores $x = 0$ y $x = a$ subdividiendo el subintervalo $[0, a]$ en una cantidad infinita de subintervalos tomando como abscisas los puntos correspondientes a la progresión geométrica $a, aE, aE^2, \ldots$ siendo E un número menor que 1. En estos puntos considera las ordenadas correspondientes y aproxima el área de la curva mediante rectángulos circunscritos. Las áreas de estos rectángulos forman una progresión geométrica: $a^n(aE - a), a^nE^n(aE^2 - aE), \ldots$ La suma de los infinitos términos de esta progresión es: $\frac{a^{n+1}(1+E)}{(1-E^{n+1})}$ $o,$ $\frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\cdots+E^n}$ a medida que los rectángulos se hacen más pequeños, es decir, E tiende a 1, la cantidad anterior nos da $\frac{a^{n+1}}{n+1}$ Fermat había demostrado esto para exponentes de x naturales, fraccionarios y negativos, excepto cuando $n = -1$ que es el caso de la hipérbola. ***Gregory de Saint Vincent*** resolvió este problema. Él se apoya sobre el hecho de que, cuando se toman abscisas tales que los intervalos que se forman crecen en progresión geométrica y se	1629

		levantan las ordenadas correspondientes, entonces el área bajo la curva de dos abscisas sucesivas son iguales. Luego a medida que crece la abscisa geométricamente, el área bajo la curva crece aritméticamente. Por lo tanto, la función área bajo la hipérbola cumple la propiedad aditiva característica de los logaritmos $(L(xy) = L(x) + L(y))$ ya que: $A_{1,xy} = A_{1,x} + A_{x,xy} = A_{1,x} + A_{1,y}$	
		En referencia a los logaritmos, gradualmente se introdujeron variaciones sobre la idea de ***Napier*** siendo identificada, como etapa esencial del desarrollo matemático del concepto, su relación con la hipérbola. Para llegar a esta relación hay que tener en cuenta el trabajo del jesuita ***Gregoire de Saint-Vincent*** (1584-1667), quien había acabado la redacción de un "Opus geometricorum quadrature circuli et sectionum coni" (1630), en el cual pretendía haber resuelto los problemas de la cuadratura del círculo y de la hipérbola. Esta obra no fue publicada hasta 1647, y aunque fue un fracaso en cuanto a la cuadratura del círculo, puso en evidencia que las áreas bajo la hipérbola se parecen a los logaritmos.	1647

TRANSICIÓN DE LAVISIÓN ARITMETICA A LA GEOMETRICA		Mientras ***Briggs*** realizaba sus tablas, el profesor de matemáticas inglés ***John Speidell***, reajusta los logaritmos de Napier introduciendo, a partir de las funciones trigonométricas, los logaritmos naturales (o neperianos), publicados en su obra New Logarithmes (1619). Como complemento a las tablas, el inventor de la "regla de cálculo", William Oughtred (1574 -1660) enunció de forma explícita, hacia 1650, las siguientes propiedades de los logaritmos:$\log mn = \log m + \log n$, $\log\frac{m}{n} = \log m - \log n\,;\ \log x^n = n * \log x$	1650
TRANSICION DE LA VISION GEOMETRICA A LA ALGEBRAICA		La publicación en 1614 del sistema logarítmico fue acogida y aceptada con rapidez. Uno de los admiradores más entusiastas fue ***Henry Briggs*** (1561-1639), primer Savilian Profesor de Geometría en Oxford, que al año siguiente de esta publicación, durante una visita a Napier, discutió con éste sobre posibles modificaciones del método de logaritmos. Briggs propuso utilizar potencias de diez, y Napier confirmó que ya había pensado en ello y estaba de acuerdo. Napier, en cierto momento, había sugerido una tabla basada en las igualdades $\log 1 = 0$ y $\log 10 = 10^{10}$, para evitar las fracciones, pero al final estos dos personajes llegaron a concluir que lo más conveniente sería que el logaritmo de uno fuese cero y que el logaritmo de diez fuese uno.	1614

FUNCIÓN LOGARITMICA		En 1646, entre los problemas que ocupaban a ***Torricelli*** (1608-1647), estaba uno en el que representa la curva cuya ecuación escribiríamos nosotros como $x = log\ y$, en la que es quizás la primera representación gráfica de una función logarítmica; Torricelli calculó el área limitada por la curva, su asíntota y una ordenada, así como el volumen del sólido obtenido al girar esta área alrededor del eje OX (Boyer, 2003).	1646
FUNCIÓN LOGARITMICA		Sin embargo, su muerte en 1647 retrasa la difusión de la gráfica. Será ***Huygens*** (1629-1695) a quien corresponderá exponer sus propiedades en el "Discurso sobre la causa de la gravedad", (1690). Huygens estaba interesado, desde 1651, por los logaritmos y su cálculo, en particular, la cuadratura de la hipérbola y retomó el problema mucho más tarde (1666), cuando participaba en los trabajos de la nueva Academia Real de Ciencias de París utilizando esta noción en cuestiones de probabilidad y de combinatoria.	
		Bernoulli (1667-1748) propone en 1718, considerar que una función es una expresión analític. Posteriormente, Euler (1707-1783) escribió su Introductio in analysin infinitorum (1748) que está dedicada al estudio de las funciones, a su clasificación, propiedades,	1718, 1748

		Métodos de desarrollo de funciones en series y productos infinitos, en fracciones continuas y en suma de fracciones simples. Así, Euler da la siguiente definición de función: "Functio quantitatis variabilis, est esspressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili, et numeris seu quantitatibus constantibus".	1718, 1748
		En su obra, ***Euler*** introduce así el logaritmo como función inversa de la exponencial. También enuncia Euler su "regla de oro para los logaritmos", la cual afirma que si hemos calculado $\log_{\mathrm{a}} y$, entonces se puede calcular $\log_{\mathrm{b}} y$ siendo b cualquier otra base mediante la fórmula: $\log_{\mathrm{b}} y = \frac{\log_{\mathrm{a}} y}{\log_{\mathrm{a}} b}$ Además, establece que los logaritmos de los números negativos no son reales, sino imaginarios y que tendrán un número infinito de éstos. Partiendo de la fórmula $e^{i\theta} = cos\,\theta + i\,sen\,\theta$ y sustituyendo θ por π, resulta que $e^{i\theta} = -1$, con lo que $ln(-1) = i\theta$. Además, cualquier número positivo o negativo tiene no sólo un logaritmo sino infinitos.	1748

Tabla 2. Evolución histórica del concepto de logaritmo y función logarítmica basada en González, M., y Vargas, (2007).

2. CAPÍTULO 2. ASPECTOS METODOLÓGICOS

En este capítulo se especifica el tipo de estudio realizado, describiendo el análisis de información como metodología de investigación; se da una explicación a las fases que se siguieron durante el desarrollo de la investigación, y se expone el tratamiento que se le dio al conjunto de datos que se tomaron como unidades de análisis.

2.1. CARACTERIZACIÓN DEL ESTUDIO

Al iniciar la descripción de la metodología, se considera necesario registrar la intención de esta investigación: se pretende examinar la naturaleza histórica de la representación gráfica de la función logarítmica, con el fin de hacer uso de esta para constituir a la luz de la teoría del CDC un compendio de elementos propuestos para hacer parte del conocimiento del profesor, mostrando cómo a partir de algunas propuestas para la construcción gráfica de la función logarítmica, es posible caracterizar la comprensión de dicho objeto de acuerdo con las formas de conocer planteadas en la teoría APOS.

Para desarrollar cada uno de los estos propósitos, arriba citados, se ha decidido enmarcar el estudio en una dimensión de investigación cualitativa y desde ahí, se ha decidido hacer un análisis de información, como técnica directa de recolección de información; esta metodología admite un proceso mediante el cual se definen las necesidades del estudio, se busca la información, validando las fuentes, se procesa la información y se realiza el análisis integrando el contenido de la información con los referentes del estudio y por último se presenta el resultado .

2.2. Fases de la Investigación

El desarrollo del presente trabajo se llevó a cabo en tres fases que son: Definición y limitación, búsqueda y clasificación de documentos, y finalmente el desarrollo del análisis. Las cuales no implicaron un orden estricto, pues en algunas ocasiones su desarrollo se dio de manera simultánea o alterna.

2.2.1. Fase 1. Definición y Limitación

Esta primera etapa, se centra en un estudio teórico que permite definir un marco conceptual apropiado posibilitando refinar los objetivos y la pregunta de investigación, facilitando la ubicación en el contexto propio de interés, limitando el tema de la propuesta de investigación y haciendo claridad sobre el objeto de estudio.

De acuerdo con las diferentes motivaciones e intereses que dieron origen a esta propuesta de investigación, en el capítulo uno se incluyó tres tópicos dado que en ellos se concretan dos aspectos de la investigación:

Primero, la fuerza que adquiera la noción conocimiento didáctico del contenido para caracterizar las publicaciones y por lo tanto proponer elementos para la formación inicial y permanente de los profesores, basados en un objeto.

Segundo, se detecta la necesidad de contar con unas categorías de análisis específicas para analizar la información contenida en los documentos seleccionados.

De este modo lo que se desea relacionar es el objeto (representación gráfica de la función logarítmica) desde una visión histórica con el conocimiento didáctico de contenido del profesor y las formas de conocer planteadas en la teoría APOS. De ahí que el marco teórico se define a partir de las teorías del CDC y APOS, aunado también se realiza y se utiliza como marco de referencia una síntesis de momentos del desarrollo histórico del concepto.

En específico se propone el uso de la teoría del CDC porque es una teoría que permite examinar de manera detallada, comprehensiva y sistemática el conocimiento profesional del profesor, la cual permite una visión específica sobre el conocimiento de la didáctica del contenido desde tres componentes: el conocimiento del contenido de la disciplina a enseñar, el conocimiento de las representaciones o estrategias instruccionales para la enseñanza del tópico y el conocimiento del estudiante.

En cuanto a la teoría APOS y como se describió es un modelo de comprensión matemática, lo que se desea es que sea un medio de caracterización de las formas de conocer la construcción de la representación gráfica de la función logarítmica, permitiéndole al profesor poseer un conocimiento de la construcción de la representación gráfica de la función logarítmica basado en este modelo de comprensión.

La delimitación en este caso está restringida por los documentos a analizar; seleccionados a favor del análisis del desarrollo histórico de la función logarítmica, especialmente aquellos que evidencien alguna forma de abordar la enseñanza o construcción gráfica de dicho objeto rescatando elementos de su desarrollo histórico, En cuanto a los documentos se escogen de acuerdo con investigaciones ya hechas sobre la evolución histórica del concepto de logaritmo o trabajos que evidencian alguna aplicación de la evolución histórica del logaritmo para su enseñanza, ya que estas dejan ver perspectivas diferentes de investigación y seguimiento histórico del objeto.

2.2.2. Fase 2. Búsqueda y Clasificación de Documentos

La búsqueda de los documentos, se realizó revisando aquellos que evidenciaran un análisis, propuesta o contenido respecto al concepto de logaritmo o función logarítmica, en los cuales se consideró que se puede encontrar evidencia de la construcción de la representación gráfica de la función logarítmica basada en su desarrollo histórico. Para ello no se tuvo ninguna exclusividad en cuanto a su enfoque teórico ni al tratamiento del objeto, la limitación radica en que fueran documentos enmarcados en la Educación Matemática, para la clasificación se utilizó una tabla como en el ejemplo siguiente:

NÚMERO	CARACTERÍSTICAS DEL DOCUMENTO	
1	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**Los logaritmos, un abordaje desde la Historia de la Matemática y las aplicaciones actuales.** (Abrate & Pocholu, 2007)
	CLASE DE DOCUMENTO	Artículo
	DESCRIPCIÓN	En este trabajo se presentan algunas sugerencias de diseño de actividades para la clase de logaritmos, en el intento de apartarse del tratamiento tradicional, proponen recuperar la construcción histórica por la que atravesaron, las nociones de progresión geométrica y aritmética, y algunas de sus múltiples aplicaciones.

Tabla 3. Ejemplo de la tabla de clasificación de los documentos seleccionados.

Identificando título, autor, año, clase de documento y descripción; de esta manera se procedió para los trece documentos resultantes de la búsqueda (Ver Capítulo 3. Análisis y Resultados).

Ya con los documentos, y con el propósito de responder a tres elementos que se consideran importantes desde el marco teórico, y como unidades clasificadoras y organizativas de la información, los trece documentos se catalogaron en tres grupos así:

El primer grupo, son los documentos que evidencian una construcción de la representación gráfica de la función logarítmica basadas en elementos de su desarrollo histórico, estos serán los documentos que se examinen bajo las categorías de análisis propuestas más adelante; además con las construcciones propuestas en estos documentos, se pretenden caracterizar a la luz de la teoría APOS, las formas de conocer acción, proceso y objeto.

La segunda, son los documentos que se dedican solo a hacer una descripción de los hechos y desarrollo histórico del concepto de logaritmo o función logarítmica; dichos documentos se tuvieron en cuenta como referentes teóricos, puesto que permiten una fundamentación de la evolución del concepto.

Por último, los documentos que quedan por fuera de las dos categorías anteriores, serán reconocidos como las evidencias, estrategias y apoyo para el profesor de matemáticas para la enseñanza de los logaritmos y función logarítmica; estos textos, como bien se nombró anteriormente serán la evidencia y sustentación de muchas de las consideraciones a los elementos propuestos para hacer parte del conocimiento didáctico de contenido.

Es de aclarar, que la forma en que se clasificaron los documentos no excluye que en ellos se puedan evidenciar solamente elementos en las cuales quedaron clasificados, sino también elementos de las otras categorías. Las tablas de cómo quedaron clasificados se encuentran en el Capítulo 3 Análisis y Discusión.

2.2.3. Fase 3. Desarrollo del análisis

De la fase anterior en la cual se seleccionaron y catalogaron los documentos, surgieron tres grupos de clasificación de los documentos, el primer grupo son los documentos que exponen formas de construir la curva logarítmica (en el quedaron clasificados dos documentos (ver Tabla 5.), utilizando conceptos como la progresión aritmética y geométrica y la semejanza de triángulos, elementos de su evolución histórica (ver sección 1.4. Evolución histórica del concepto representación gráfica de la función logarítmica) a partir de los cuales se puede construir la gráfica de la curva mencionada.

Los dos documentos presentan en su contenido construcciones de la gráfica de la función logarítmica apoyada en los recursos de construcción geométrica y movimiento que brinda la tecnología, realizando una aproximación a la curva logarítmica a través de la relación entre una progresión geométrica y una progresión aritmética, elementos que inspiraron a Napier en el siglo XVII; además, exponen consideraciones al por qué estos elementos históricos deben estar ligados a la explicación que se presente actualmente en las aulas, contribuyendo en la generación de reflexiones sobre la pertinencia, el conocimiento y la enseñanza de este objeto.

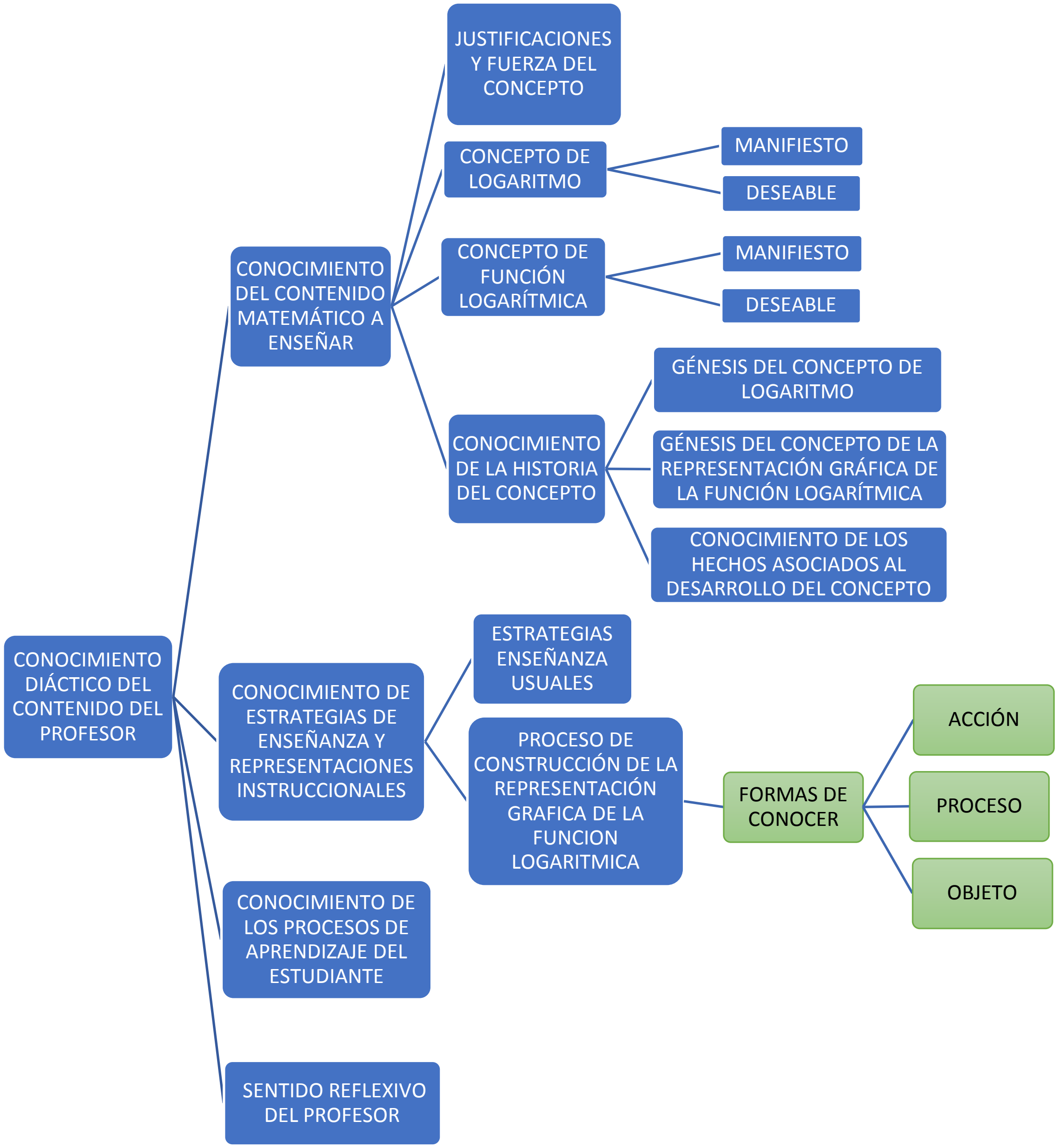
Debido a lo anterior y a las motivaciones que dieron origen a este estudio, se considera que estos serán los documentos que se analicen en la totalidad de su información ofrecida, ello con el fin de contribuirle al profesor en formación, un conocimiento sobre el objeto matemático, identificando en estos documentos el conocimiento didáctico del contenido y por lo tanto proponer un conjunto de conocimientos para el profesor de matemáticas.

Para realizar el análisis pertinente de los documentos se eligió la herramienta Atlas.ti, puesto que ella constituye un medio idóneo, altamente reconocido y utilizado en las investigaciones de tipo cualitativo; para la extracción, organización y categorización de datos, así como también el establecimiento de redes y relaciones conceptuales. Permitiendo el manejo y análisis de un gran volumen de datos de manera eficiente.

2.2.3.1. Categorías de Análisis

Para la construcción de las categorías, se inició por resaltar en los dos documentos (ver Tabla 5.) los segmentos de texto que ofrecían información importante sobre el CDC del profesor, de acuerdo con el contenido del segmento se construyeron categorías de clasificación los cuales permitieron obtener una red y una caracterización de lo tratado en dichos segmentos. Las categorías resultantes se empataron con la propuesta de Pinto (2010, p. 23) y los componentes que se describen en esta propuesta. Para el tratamiento de las construcciones que inicialmente fueron consideradas como parte del CDC que el profesor debía tener como estrategias de enseñanza, se considera que se le debía dar una atención específica con el fin de no desatender la riqueza de estas construcciones, en tanto se hace uso de la teoría APOS con el fin de hacer una caracterización de la comprensión del objeto, es importante que se considere esta caracterización como una entre varias que se pueden realizar y además como parte de ese CDC que el profesor debe poseer.

Las categorías de análisis se pueden clasificar en cuatro grandes grupos pertenecientes a una general titulada: Conocimiento didáctico del contenido del profesor; con el ánimo de especificar cuáles son las características de los segmentos de texto que pertenecen a cada uno de estos grupos, se presenta a continuación la red de las categorías de análisis, seguido de la descripción de las características generales de ellas y luego de manera específica se define cada categoría.



Red 1. Red de categorías de análisis.

Para la descripción general de los códigos, es necesario volver a ratificar lo que vamos a entender por *Conocimiento Didáctico Del Contenido Del Profesor*, que resulta siendo la categoría principal y en la cual se encuentran incluidas todas las otras; se entenderá por conocimiento didáctico del contenido del profesor a los conocimientos que debe o debería tener el profesor con base en un contenido de la asignatura para la enseñanza de este, en particular la representación gráfica de la función logarítmica desde su naturaleza histórica. Esta categoría se encuentra dividida en cuatro categorías y la primera de estas se titula *Conocimiento del Contenido Matemático a Enseñar* esta es una aproximación a la primera categoría que establece Pinto (conocimiento del contenido matemático a enseñar) y que en ella se incluyen la *Justificación y fuerza del concepto* como una unión entre los elementos específicos de la fuerza del concepto y algunas asociaciones con los conocimientos sobre el currículo matemático; las categorías de *Concepto de logaritmo y Concepto de función logarítmica* hacen parte del componente de conocimientos sobre un tópico específico; y el *Conocimiento de la Historia del Concepto* con todos sus elementos hacen parte del componente que Pinto titula los conocimientos sobre la actividad matemática general.

Para el caso de los elementos expuestos en la segunda de esas categorías el *Conocimiento de Estrategias de Enseñanza y Representaciones Instruccionales*, ninguno apunta a uno componente en específico de los que describe Pinto en esta categoría, se considera que puede desarrollar elementos de los tres componentes, pero no todos; sin embargo si se mantiene esa noción y consideraciones que Pinto propone para esta categoría. Otro rasgo importante de los componentes mencionados en esta categoría, es que se propone a *Los Proceso de Construcción de la Representación Gráfica de la Función Logarítmica* como el conocimiento de estrategias que ponen en evidencia el desarrollo histórico del concepto y que evidentemente hace parte de ese amplio repertorio de representaciones y estrategias instruccionales, que debería poseer el profesor, permitiéndole conocer una caracterización de la comprensión del objeto a través de las formas de conocer planteadas en la teoría APOS; además las *Estrategias de Enseñanza Usuales* serán aquellas se identifiquen a través de la literatura como las que el docente conoce y usa de manera habitual.

En la categoría titulada *Conocimiento de los Procesos de Aprendizaje del Estudiante,* que se corresponde a la cuarta categoría planteada por Pinto, se revisa, solo un elemento en particular, pero con el fin de exponer un conocimiento que se identificó en los documentos analizados y que el profesor debe conocer sobre los procesos de los estudiantes. No es de interés en esta investigación ahondar en los otros elementos que propone Pinto.

La última categoría, que se propone en este trabajo, se considera que se encuentra envuelta en las que describe Pinto, pero que indudablemente para el propósito de la investigación es necesario resaltarla y proponerla como una cuarta categoría*, El Sentido Reflexivo del Profesor*.

2.2.3.2. Descripción de las categorías de análisis

A continuación se presentará la descripción específica de las categorías con el fin de mostrar bajo qué definiciones se analizó la información de los documentos.

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO DEL PROFESOR: Son los segmentos de texto donde se evidencia el conocimiento que el profesor posee o debe poseer para la enseñanza de la representación gráfica de la función logarítmica.

CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO MATEMÁTICO A ENSEÑAR: segmentos de texto donde se evidencien los contenidos específicos del contenido matemático para la enseñanza, sobre los cuales el profesor debe tener un dominio mínimo y sólido, que le permita incrementar la capacidad de implementar actividades diferentes en el aula y justificar la enseñanza y aprendizaje de un tópico.

JUSTIFICACIONES Y FUERZA DEL CONCEPTO: son los segmentos de texto que le dan la importancia a la enseñanza del concepto en el currículo matemático, resaltando las características únicas y relevantes del concepto, junto a la relación con otros conocimientos (aplicaciones del concepto, y las consideraciones de este como conocimiento previo a otros).

CONCEPTO DE LOGARITMO: segmentos de texto que demuestran los elementos, que el profesor debe tener de dominio del concepto de logaritmo, como lo son: las características esenciales, las diferentes representaciones, las principales alternativas de aproximación al objeto, sus usos en las diferentes ramas de la matemática, el conocimiento conceptual y procedimental del concepto de logaritmo. Estos segmentos se clasifican en dos componentes, el manifiesto y deseable.

MANIFIESTO: Son los segmentos de textos que describen los conocimientos que los investigadores manifiestan que ya poseen los profesores de matemáticas.

DESEABLE: Son los segmentos de texto que se reconoce como esperados para que el docente posea, con el fin de enriquecer la enseñanza de la representación gráfica de la función logarítmica.

CONCEPTO DE FUNCIÓN LOGARÍTMICA: segmentos de texto que demuestran los elementos, que el profesor debe tener de dominio del concepto de función logarítmica, como lo son: las características esenciales, las diferentes representaciones, las principales alternativas de aproximación al objeto, sus usos en las diferentes ramas de la matemática, el conocimiento conceptual y procedimental del concepto de logaritmo. Estos segmentos se clasifican en dos componentes.

MANIFIESTO: Son los segmentos de textos que describen los conocimientos que los investigadores manifiestan que ya poseen los profesores de matemáticas.

DESEABLE: Son los segmentos de texto que se reconoce como esperados para que el docente posea, con el fin de enriquecer la enseñanza de la representación gráfica de la función logarítmica.

CONOCIMIENTO DE LA HISTORIA DEL CONCEPTO: segmentos de texto que describen la evolución histórica, los principales problemas y cambios en las nociones o conceptos, los fenómenos sociales y culturales asociados con la aparición y desarrollo del concepto. Además el conocimiento de la naturaleza conceptual y epistemológica, los conocimientos aquí clasificados se organizan en grupos de acuerdo con:

GÉNESIS DEL CONCEPTO DE LOGARITMO: los segmentos de texto que muestran las concepciones que se tuvieron en cuenta en cada una de las etapas del desarrollo histórico del concepto de logaritmo.

GÉNESIS DEL CONCEPTO DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA: los segmentos de texto que muestran las concepciones que se tuvieron en cuenta en cada una de las etapas del desarrollo histórico de la representación gráfica de la función logarítmica.

CONOCIMIENTO DE LOS HECHOS ASOCIADOS AL DESARROLLO DEL CONCEPTO: los segmentos de texto que describen los fenómenos sociales, culturales y científicos asociados con la aparición y desarrollo del concepto.

CONOCIMIENTO DE ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA Y REPRESENTACIONES INSTRUCCIONALES: son los segmentos de texto que dan cuenta del conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales para la enseñanza de un concepto específico, se hace referencia a el cómo organizar, secuenciar y presentar el contenido los métodos de enseñanza y aprendizaje específicos del concepto. Teniendo en cuenta que se deben conocer las estrategias que los investigadores en educación matemática catalogan como usuales y cómo reconocer e implementar nuevas formas de instrucción. En tanto dividimos este apartado en:

ESTRATEGIAS ENSEÑANZA USUALES: los segmentos de texto que describen las estrategias instruccionales específicas que se manejan usualmente en el aula.

PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA: los segmentos de texto que se catalogarán como las estrategias instruccionales específicas que utilizan el desarrollo histórico del concepto, en este caso específico las tratadas bajo las construcciones de representación gráfica de la función logarítmica propuestas en los documentos.

FORMAS DE CONOCER: son los mecanismos de construcción del conocimiento identificados en las propuestas de construcción.

ACCIÓN: Los segmentos de texto que evidencian cualquier operación mental o física repetible que transforma de alguna manera un objeto físico o mental, tienden a ser algorítmicas y de formas externa.

PROCESO: Son los segmentos de texto que indican una actividad interna y completamente controlada por el sujeto, cuando la acción es repetida manual o mentalmente y no es provocada necesariamente por estímulos externos.

OBJETO: Los segmentos de texto que permite al sujeto nombrar el objeto y conectar dicho nombre con el proceso a partir del cual se construyó el objeto perseguido.

CONOCIMIENTO DE LOS PROCESOS DE APRENDIZAJE DEL ESTUDIANTE: son los segmentos de texto que describan las dificultades y problemas que presentan los estudiantes durante el estudio del concepto de logaritmo y la representación gráfica de la función logarítmica.

SENTIDO REFLEXIVO DEL PROFESOR: los segmentos de texto que evidencien los cuestionamientos que el profesor debe hacerse, sobre la naturaleza de la representación gráfica de la función logarítmica, con el fin de potenciar la enseñanza del concepto.

Se hace necesario aclarar que varios de los elementos que se muestran en el esquema se corresponden a factores identificados por Lee Shulman y Pinto como parte del CDC. Para efectos de cumplir con el objetivo de la investigación, esta tercera fase del análisis, se centraliza en dos de las categorías (1) el conocimiento del contenido matemático a enseñar, ya que este, nos permite identificar esos elementos que desde la literatura en EM se deben considerar como parte del CDC, y (2) *Conocimiento de estrategias de enseñanza y de representaciones instruccionales*, donde se ha identificado la categoría *Construcción de la representación gráfica de la función* y al interior de ella la categoría *Formas de conocer***,** ya que desde las formas de conocer *acción, proceso y objeto* se caracterizan las construcciones propuestas de la representación gráfica de la función logarítmica.

Una forma de validar las clasificaciones o identificaciones de los investigadores en cuanto acciones, procesos y objetos fue la elaboración y gestión de un taller para profesores de la línea de análisis en el Simposio de Sociedad de Educación e Investigación en Educación Matemática SEIEM en el año 2014 en la ciudad de Salamanca. En este taller se presentaron algunas de las clasificaciones ya realizadas por el grupo investigadores para confrontarlas con las consideraciones del grupo de profesores que integran GIDAM que asistió a dicho evento en España. También se socializaron las componentes del CDC mediante la presentación de ellas en el evento mencionado (Vargas, Castañeda, & Novoa, 2014)

3. CAPÍTULO 3. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este capítulo, se presenta el análisis, considerando la información obtenida de los documentos, del marco de referencia y de las categorías de análisis (expuestas en el capítulo anterior); con el fin de exponer y proponer un conjunto de conocimientos para el profesor de matemáticas.

Para este análisis se comenzará por presentar cuáles fueron los documentos seleccionados y cómo quedaron catalogados; posteriormente se exponen las redes resultantes del análisis de los dos documentos de acuerdo con las categorías propuestas, para ello inicialmente se muestran los resultados evidenciados del análisis realizado con la teoría del CDC, e inmerso en este se expone una caracterización de la construcciones propuestas por los autores de los documentos a través de la teoría de comprensión APOS; los resultados del CDC se describen sin hacer diferencia en el documento del cual fue tomado, mientras que en los de APOS es necesario hacer dicha diferencia, ya que las construcciones presentadas en cada uno de los documentos son diferentes.

3.1. DOCUMENTOS SELECCIONADOS

En la siguiente tabla se dan a conocer los 13 documentos resultantes de la búsqueda en la literatura en EM, en los cuales se podía encontrar evidencia de la construcción de la representación gráfica de la función logarítmica basada en su desarrollo histórico) quedaron seleccionados.

NÚMERO	CARACTERÍSTICAS DEL DOCUMENTO	
1	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**Los logaritmos, un abordaje desde la Historia de la Matemática y las aplicaciones actuales**. (Abrate & Pocholu, 2007)
	CLASE DE DOCUMENTO	Artículo
	DESCRIPCIÓN	En este trabajo se presentan algunas sugerencias de diseño de actividades para la clase de logaritmos, en el intento de apartarse del tratamiento tradicional, proponen recuperar la construcción histórica por la que atravesaron, las nociones de progresión geométrica y aritmética, y algunas de sus múltiples aplicaciones.
2	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**El discurso matemático escolar de los logaritmos en libros de texto.** (Castañeda, Rosas, & Molina, 2010)
	CLASE DE DOCUMENTO	Artículo
	DESCRIPCIÓN	En este artículo se utiliza la noción teórica del discurso matemático escolar para analizar el tema del logaritmo en cinco obras de texto, con la finalidad de identificar los rasgos de tipo conceptual, de enfoque didáctico o referidos a la organización del saber que son comunes en las obras escolares y que han configurado un discurso oficial para la clase de matemáticas a partir del cual se escriben nuevas obras, se organizan lecciones de clase, etcétera. Esta investigación ofrece una caracterización del manejo escolar del logaritmo, mostrando el sentido de las definiciones, actividades, así como los usos y aplicaciones que los autores establecen.
3	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	E**lementos históricos para la enseñanza de la función logarítmica en la educación básica**. (Escobar, 2012)
	CLASE DE DOCUMENTO	Trabajo de Pregrado

	DESCRIPCIÓN	Este trabajo de grado brinda algunos elementos desde la perspectiva de la Historia de las Matemáticas para contribuir al mejoramiento de la enseñanza de la función logarítmica en los grados 8° y 9° de la Educación Básica. Para ello, explora las representaciones del docente frente a la caracterización matemática de la función, su metodología de enseñanza, la Historia de las Matemáticas y asuntos curriculares e institucionales influyentes en la enseñanza de la función, a través de entrevistas directas a diez docentes de Matemáticas en la ciudad de Santiago de Cali seleccionados bajo parámetros preestablecidos. Además, realiza una propuesta de intervención histórica para la enseñanza de la función logarítmica, y recomienda bibliografía a los docentes con el fin de incentivar la consulta en Historia de las Matemáticas para su implementación en la transmisión de este objeto matemático e influir en su eficaz aprendizaje.
4	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**Una Visión Socioepistemológica. Estudio de la Función Logaritmo.** (Ferrari, 2001)
	CLASE DE DOCUMENTO	Trabajo de Maestría
	DESCRIPCIÓN	Identificando una “dislexia” entre los enfoques aritmético y funcional producida en la enseñanza de los logaritmos, este trabajo proporciona elementos para explicar este fenómeno así como también, sentar las bases para un posterior diseño de situación didáctica que se preocupe por dotar de significado a tales nociones. Para ello, recurren a varios textos originales y libros de historia que reflejan el desarrollo de la comunicación y divulgación de las nociones relacionadas con los logaritmos desde su definición en el siglo XVII, hasta nuestros días. Presentando en él, un análisis de los libros de textos considerados como representativos, y de la currícula de los sistemas educativos argentino y mexicano para conocer cómo vivieron y viven los logaritmos en el discurso matemático escolar de distintas épocas.

		Finalmente realizan una reflexión en torno a los posibles diseños de situaciones didácticas que pueden sustentarse en este trabajo, dejando abierto a la discusión tal tópico.
5	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**Algunas consideraciones didácticas sobre el concepto de logaritmo y de función logarítmica y sus posibilidades en la educación básica y media**. (Gacharná, 2012)
	CLASE DE DOCUMENTO	Trabajo de Maestría
	DESCRIPCIÓN	Este trabajo tiene por objetivo identificar aspectos didácticos de los conceptos logaritmo y función logarítmica por medio de las perspectivas disciplinar, histórica y epistemológica que logren generar actividades apropiadas para la enseñanza de estos conceptos por estudiantes de grado noveno. Esto se logra revisando los aspectos del desarrollo histórico de los logaritmos distinguiendo entre la exploración algorítmica, la exploración numérica utilitaria, la exploración gráfica geométrica y la exploración analítica hasta llegar a la parte formal del concepto de logaritmo.
6	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**Segmentos de la historia: la función logarítmica.**(González & Vargas, 2007)
	CLASE DE DOCUMENTO	Artículo
	DESCRIPCIÓN	El nacimiento, desarrollo y consolidación del concepto de función logarítmica, que ha sido estudiado desde diferentes puntos de vista por distintos historiadores, puede ser dividido en diferentes etapas. A lo largo de este artículo, se muestran las diferentes concepciones que han tenido los matemáticos a través de la historia. Así, inicialmente, se muestran las concepciones aritmético-geométricas que tuvieron Napier y Bürgi alrededor del concepto de logaritmo. Posteriormente, se relaciona este concepto con curvas y series para poco a poco ir formando parte del mundo de las funciones trascendentes y finalmente relacionarlo con la función exponencial.

7	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**La Función Logaritmo bajo la Perspectiva de la Construcción dada por Agnesi (1748).** (López & Ferrari, 2007)
	CLASE DE DOCUMENTO	Artículo
	DESCRIPCIÓN	Apoyados en un análisis del discurso matemático escolar, contenido en libros de nivel bachillerato y licenciatura, este articulo describe que: la forma de introducir la gráfica de la función logaritmo es realizada mediante: simetría, área bajo la curva o una tabla, lo cual es presentado sin argumentos suficientes que nos permita deducir y entender la construcción de la función logaritmo (López et al., 2003). En general, los logaritmos son presentados en un sentido algorítmico o incluso, axiomático, más que como resultado de un razonamiento o una construcción (Ferrari, 2001). Basados en los supuestos de la socioepistemología, busca evidenciar que utilizar una herramienta distinta permitirá generar función logaritmo (López et al., 2003), buscamos evidenciar que utilizar una herramienta distinta permitirá generar significados más allá de aquellos logrados actualmente
8	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**Historia de los logaritmos.** (Tapia, 2003)
	CLASE DE DOCUMENTO	Artículo
	DESCRIPCIÓN	En este documento se hace una síntesis de la evolución de los logaritmos, describiendo hechos sociales y situación general de la época que facilitó cada una de las etapas de su desarrollo. Iniciando por los aportes de Arquímedes y Stifel, donde se comparaban funciones aritméticas con geométricas, pasando por Naper, Bürgi y Briggs, con las tablas de logaritmos, hasta Euler con la relación entre la función exponencial y la logarítmica.
9	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**El logaritmo: ¿cómo animar un punto que relacione una progresión geométrica y una aritmética**? (Vargas et al., 2011)

	CLASE DE DOCUMENTO	Artículo
	DESCRIPCIÓN	Este articulo presenta en su contenido una construcción de la gráfica de la función logarítmica apoyada en los recursos de construcción geométrica y movimiento que brinda la tecnología, para realizar una aproximación a la curva logarítmica a través de la relación entre una progresión geométrica y una progresión aritmética, reconstruyendo el concepto de logaritmo, usando algunos de los elementos que inspiraron a Napier en el siglo XVII, los cuales consideran deben estar ligados a la explicación que se presente actualmente en las aulas. Dicha construcción evidencia esta relación entre las progresiones y propone favorecer la comprensión del concepto logaritmo, contribuyendo en la generación de reflexiones como, por ejemplo, por qué la base e y qué es lo "natural" del logaritmo natural.
10	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**Un Estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos**. (Ferrari & Farfán, 2008)
	CLASE DE DOCUMENTO	Artículo
	DESCRIPCIÓN	Desde una visión socioepistemológica, y el entramado de prácticas sociales y representaciones sociales que las mismas generan, se establece un diálogo diferente al discurso escolar imperante. En este reporte, se hace una reflexión sobre los argumentos que los alumnos de licenciatura en matemáticas utilizaron, ante la construcción geométrica de las funciones cuadrática y logarítmica utilizando el ambiente de geometría dinámica, para reconocer y describir las funciones mencionadas. Este trabajo se desarrolló utilizando la ingeniería didáctica como metodología de investigación por tanto incluye algunas reflexiones desde el discurso matemático escolar, desde la epistemología de la función logaritmo y un breve estado de arte de estas nociones.

11	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**An inquiry into high school students' understanding of logarithmis**. (Berezovski, 1991)
	CLASE DE DOCUMENTO	Tesis de Maestría
	DESCRIPCIÓN	El concepto matemático de los logaritmos juega un papel crucial en muchos aspectos de la existencia humana. Este estudio pretende analizar y describir las cuestiones involucradas en la comprensión de los logaritmos en los estudiantes de high school y se resaltan las dificultades más comunes a las que los estudiantes se enfrentan a medida que desarrollan su comprensión. Dos ideas teóricas generales guían esta investigación: la comprensión y los obstáculos matemáticos. La versión adaptada del modelo de Confrey para la comprensión de los exponentes por los estudiantes se aplicó para investigar la comprensión de los estudiantes sobre los logaritmos. Como resultado de ello se obtuvo una descripción de dificultades de los estudiantes con los logaritmos, y se presentaron sugerencias de posibles explicaciones de las fuentes de estas dificultades. En cuanto a la práctica docente, El trabajo se enfocó en la introducción inicial de los logaritmos. En el currículo tradicional los logaritmos se introducen como exponentes. Sin embargo, históricamente logaritmos se desarrollaron con total independencia de los exponentes. Más allá la investigación intentará evidenciar la viabilidad y los beneficios del enfoque histórico para la enseñanza.
12	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**O ensino dos logaritmos a partir de uma perspectiva histórica.** (Oliveira, 2005)
	CLASE DE DOCUMENTO	Tesis de Maestría
	DESCRIPCIÓN	Este estudio tiene como objetivo presentar una secuencia de actividades para trabajo pedagógico, teniendo como hilo conductor la historia de las matemáticas, la búsqueda de el origen del concepto de logaritmos, y la relación de las matemáticas con la música, con el fin de entender lo que el

		potencial de una actividad desde una perspectiva histórica, tendría con respecto al proceso de enseñanza aprendizaje. Para lograr este objetivo, realiza un estudio sobre las potencialidades pedagógicas del uso de la historia de las matemáticas.
13	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**La construcción de los logaritmos: Historia y proyecto didáctico.** (Martínez, Sales, & Gumbau, 2013).
	CLASE DE DOCUMENTO	Libro
	DESCRIPCIÓN	El logaritmo nace como respuesta a la imposibilidad de calcular una potencia con un exponente decimal, de forma que las soluciones a estos cálculos exponenciales se encuentran recogidas en las llamadas tablas de logaritmos. Pero, si no se puede realizar el cálculo, ¿cómo se han obtenido esas tablas?. Dar respuesta a esta y otras cuestiones es lo que se plantean los autores cuyo trabajo se divide en dos partes: la reelaboración del concepto de logaritmo en la historia y la creación de una tabla propia de logaritmos que pueda servir para iniciar en la investigación a futuros estudiantes de carreras científicas

Tabla 4. Documentos seleccionados de la búsqueda en la literatura en Educación Matemática.

Ahora se mostrará cómo quedaron catalogados los 13 documentos anteriores, de acuerdo con los grupos que se proponen en la metodología.

3.1.1. Documentos que evidencian una construcción de la representación gráfica de la función logarítmica basada en elementos de su desarrollo histórico.

A este grupo pertenecen los documentos que evidencian una construcción de la representación gráfica de la función logarítmica basadas en elementos de su desarrollo histórico, estos son los documentos que se analizan bajo las categorías de análisis; además con las construcciones propuestas en estos documentos, se caracterizara a la luz de la teoría APOS, las formas de conocer acción, proceso y objeto.

NÚMERO	CARACTERÍSTICAS DEL DOCUMENTO	
7	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**La Función Logaritmo bajo la Perspectiva de la Construcción dada por Agnesi (1748).** (López & Ferrari, 2007)
	CLASE DE DOCUMENTO	Artículo
	DESCRIPCIÓN	Apoyados en un análisis del discurso matemático escolar, contenido en libros de nivel bachillerato y licenciatura, este articulo describe que: la forma de introducir la gráfica de la función logaritmo es realizada mediante: simetría, área bajo la curva o una tabla, lo cual es presentado sin argumentos suficientes que nos permita deducir y entender la construcción de la función logaritmo (López et al., 2003). En general, los logaritmos son presentados en un sentido algorítmico o incluso, axiomático, más que como resultado de un razonamiento o una construcción (Ferrari, 2001). Basados en los supuestos de la socioepistemología, busca evidenciar que utilizar una herramienta distinta permitirá generar función logaritmo (López et al., 2003), buscamos evidenciar que utilizar una herramienta distinta permitirá generar significados más allá de aquellos logrados actualmente
9	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**El logaritmo: ¿cómo animar un punto que relacione una progresión geométrica y una aritmética?** (Vargas et al., 2011)
	CLASE DE DOCUMENTO	Artículo

	DESCRIPCIÓN	Este articulo presenta en su contenido una construcción de la gráfica de la función logarítmica apoyada en los recursos de construcción geométrica y movimiento que brinda la tecnología, para realizar una aproximación a la curva logarítmica a través de la relación entre una progresión geométrica y una progresión aritmética, reconstruyendo el concepto de logaritmo, usando algunos de los elementos que inspiraron a Napier en el siglo XVII, los cuales consideran deben estar ligados a la explicación que se presente actualmente en las aulas. Dicha construcción evidencia esta relación entre las progresiones y propone favorecer la comprensión del concepto logaritmo, contribuyendo en la generación de reflexiones como, por ejemplo, por qué la base e y qué es lo "natural" del logaritmo natural.

Tabla 5. Documentos que evidencian una construcción de la representación gráfica de la función logarítmica basadas en elementos de su desarrollo histórico.

3.1.2. Documentos que contienen una descripción de los hechos y desarrollo histórico del concepto de logaritmo o función logarítmica.

Este segundo grupo, se encuentra conformado por los documentos que se dedican solo a hacer una descripción de los hechos y desarrollo histórico del concepto de logaritmo o función logarítmica; dichos documentos fueron los que se tuvieron en cuenta como referentes teóricos (ver sección 1.4.), puesto que permitieron una fundamentación de la evolución del concepto.

NÚMERO	CARACTERÍSTICAS DEL DOCUMENTO	
6	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**Segmentos de la historia: la función logarítmica.** (González & Vargas, 2007)
	CLASE DE DOCUMENTO	Artículo

	DESCRIPCIÓN	El nacimiento, desarrollo y consolidación del concepto de función logarítmica, que ha sido estudiado desde diferentes puntos de vista por distintos historiadores, puede ser dividido en diferentes etapas. A lo largo de este artículo, se muestran las diferentes concepciones que han tenido los matemáticos a través de la historia. Así, inicialmente, se muestran las concepciones aritmético-geométricas que tuvieron Napier y Bürgi alrededor del concepto de logaritmo. Posteriormente, se relaciona este concepto con curvas y series para poco a poco ir formando parte del mundo de las funciones trascendentes y finalmente relacionarlo con la función exponencial.
8	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**Historia de los logaritmos**. (Tapia, 2003)
	CLASE DE DOCUMENTO	Artículo
	DESCRIPCIÓN	En este documento se hace una síntesis de la evolución de los logaritmos, describiendo hechos sociales y situación general de la época que facilitó cada una de las etapas de su desarrollo. Iniciando por los aportes de Arquímedes y Stifel, donde se comparaban funciones aritméticas con geométricas, pasando por Naper, Bürgi y Briggs, con las tablas de logaritmos, hasta Euler con la relación entre la función exponencial y la logarítmica.

Tabla 6. Documentos que describen el desarrollo histórico y los hechos que dieron origen a la construcción de la representación gráfica de la función logarítmica.

3.1.3. Documentos que aportan evidencias, estrategias y apoyo para el profesor de matemáticas para la enseñanza de los logaritmos y función logarítmica.

A este tercer y último grupo, le pertenecen los documentos que serán reconocidos como las evidencias, estrategias y apoyo para el profesor de matemáticas para la enseñanza de los logaritmos y función logarítmica; estos textos, como bien se nombró anteriormente serán la evidencia y sustentación de muchas de las consideraciones a los elementos propuestos para hacer parte del conocimiento didáctico de contenido.

NÚMERO	CARACTERÍSTICAS DEL DOCUMENTO	
1	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**Los logaritmos, un abordaje desde la Historia de la Matemática y las aplicaciones actuales**. (Abrate & Pocholu, 2007)
	CLASE DE DOCUMENTO	Artículo
	DESCRIPCIÓN	En este trabajo se presentan algunas sugerencias de diseño de actividades para la clase de logaritmos, en el intento de apartarse del tratamiento tradicional, proponen recuperar la construcción histórica por la que atravesaron, las nociones de progresión geométrica y aritmética, y algunas de sus múltiples aplicaciones.
2	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**El discurso matemático escolar de los logaritmos en libros de texto.** (Castañeda et al., 2010)
	CLASE DE DOCUMENTO	Artículo
	DESCRIPCIÓN	En este artículo se utiliza la noción teórica del discurso matemático escolar para analizar el tema del logaritmo en cinco obras de texto, con la finalidad de identificar los rasgos de tipo conceptual, de enfoque didáctico o referidos a la organización del saber que son comunes en las obras escolares y que han configurado un discurso oficial para la clase de matemáticas a partir del cual se escriben nuevas obras, se organizan lecciones de clase, etcétera. Esta investigación ofrece una caracterización del manejo

		escolar del logaritmo, mostrando el sentido de las definiciones, actividades, así como los usos y aplicaciones que los autores establecen.
3	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**Elementos históricos para la enseñanza de la función logarítmica en la educación básica**.(Escobar, 2012)
	CLASE DE DOCUMENTO	Trabajo de Pregrado
	DESCRIPCIÓN	Este trabajo de grado brinda algunos elementos desde la perspectiva de la Historia de las Matemáticas para contribuir al mejoramiento de la enseñanza de la función logarítmica en los grados 8° y 9° de la Educación Básica. Para ello, explora las representaciones del docente frente a la caracterización matemática de la función, su metodología de enseñanza, la Historia de las Matemáticas y asuntos curriculares e institucionales influyentes en la enseñanza de la función, a través de entrevistas directas a diez docentes de Matemáticas en la ciudad de Santiago de Cali seleccionados bajo parámetros preestablecidos. Además, realiza una propuesta de intervención histórica para la enseñanza de la función logarítmica, y recomienda bibliografía a los docentes con el fin de incentivar la consulta en Historia de las Matemáticas para su implementación en la transmisión de este objeto matemático e influir en su eficaz aprendizaje.
4	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**Una Visión Socioepistemológica. Estudio de la Función Logaritmo.** (Ferrari, 2001)
	CLASE DE DOCUMENTO	Trabajo de Maestría

	DESCRIPCIÓN	Identificando una "dislexia" entre los enfoques aritmético y funcional producida en la enseñanza de los logaritmos, este trabajo proporciona elementos para explicar este fenómeno así como también, sentar las bases para un posterior diseño de situación didáctica que se preocupe por dotar de significado a tales nociones. Para ello, recurren a varios textos originales y libros de historia que reflejan el desarrollo de la comunicación y divulgación de las nociones relacionadas con los logaritmos desde su definición en el siglo XVII, hasta nuestros días. Presentando en él, un análisis de los libros de textos considerados como representativos, y de la currícula de los sistemas educativos argentino y mexicano para conocer cómo vivieron y viven los logaritmos en el discurso matemático escolar de distintas épocas. Finalmente realizan una reflexión en torno a los posibles diseños de situaciones didácticas que pueden sustentarse en este trabajo, dejando abierto a la discusión tal tópico.
5	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**Algunas consideraciones didácticas sobre el concepto de logaritmo y de función logarítmica y sus posibilidades en la educación básica y media.** (Gacharná, 2012).
	CLASE DE DOCUMENTO	Trabajo de Maestría
	DESCRIPCIÓN	Este trabajo tiene por objetivo identificar aspectos didácticos de los conceptos logaritmo y función logarítmica por medio de las perspectivas disciplinar, histórica y epistemológica que logren generar actividades apropiadas para la enseñanza de estos conceptos por estudiantes de grado noveno. Esto se logra revisando los aspectos del desarrollo histórico de los logaritmos distinguiendo entre la exploración algorítmica, la exploración numérica utilitaria, la exploración gráfica geométrica y la exploración

		analítica hasta llegar a la parte formal del concepto de logaritmo.
10	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**Un Estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos**. (Ferrari & Farfán, 2008)
	CLASE DE DOCUMENTO	Artículo
	DESCRIPCIÓN	Desde una visión socioepistemológica, y el entramado de prácticas sociales y representaciones sociales que las mismas generan, se establece un diálogo diferente al discurso escolar imperante. En este reporte, se hace una reflexión sobre los argumentos que los alumnos de licenciatura en matemáticas utilizaron, ante la construcción geométrica de las funciones cuadrática y logarítmica utilizando el ambiente de geometría dinámica, para reconocer y describir las funciones mencionadas. Este trabajo se desarrolló utilizando la ingeniería didáctica como metodología de investigación por tanto incluye algunas reflexiones desde el discurso matemático escolar, desde la epistemología de la función logaritmo y un breve estado de arte de estas nociones.
11	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**An inquiry into high school students' understanding of logarithmis.** (Berezovski, 1991)
	CLASE DE DOCUMENTO	Tesis de Maestría
	DESCRIPCIÓN	El concepto matemático de los logaritmos juega un papel crucial en muchos aspectos de la existencia humana. Este estudio pretende analizar y describir las cuestiones involucradas en la comprensión de los logaritmos en los estudiantes de high school y se resaltan las dificultades más comunes a las que los estudiantes se a medida que desarrollan su comprensión.

		Dos ideas teóricas generales guían esta investigación: la comprensión y los obstáculos matemáticos. La versión adaptada del modelo de Confrey para para la comprensión de los exponentes por los estudiantes se aplicó para investigar la comprensión de los estudiantes sobre los logaritmos. Como resultado de ello se obtuvo una descripción de dificultades de los estudiantes con los logaritmos, y Se presentaron sugerencias de posibles explicaciones de las fuentes de estas dificultades. En cuanto a la práctica docente, El trabajo se enfocó en la introducción inicial de los logaritmos. En el currículo tradicional los logaritmos se introducen como exponentes. Sin embargo, históricamente logaritmos se desarrollaron con total independencia de los exponentes. Más allá la investigación intentará evidenciar la viabilidad y los beneficios del enfoque histórico para la enseñanza.
12	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**O ensino dos logaritmos a partir de uma perspectiva histórica**. (Oliveira, 2005)
	CLASE DE DOCUMENTO	Tesis de Maestría
	DESCRIPCIÓN	Este estudio tiene como objetivo presentar una secuencia de actividades para trabajo pedagógico, teniendo como hilo conductor la historia de las matemáticas, la búsqueda de el origen del concepto de logaritmos, y la relación de las matemáticas con la música, con el fin de entender lo que el potencial de una actividad desde una perspectiva histórica, tendría con respecto al proceso de enseñanza aprendizaje. Para lograr este objetivo, realiza un estudio sobre las potencialidades pedagógicas del uso de la historia de las matemáticas.

13	TÍTULO, AUTOR Y AÑO	**La construcción de los logaritmos.: Historia y proyecto didáctico**. (Martínez, Sales, & Gumbau, 2013).
	CLASE DE DOCUMENTO	Libro
	DESCRIPCIÓN	El logaritmo nace como respuesta a la imposibilidad de calcular una potencia con un exponente decimal, de forma que las soluciones a estos cálculos exponenciales se encuentran recogidas en las llamadas tablas de logaritmos. Pero, si no se puede realizar el cálculo, ¿cómo se han obtenido esas tablas? Dar respuesta a esta y otras cuestiones es lo que se plantean los autores cuyo trabajo se divide en dos partes: la reelaboración del concepto de logaritmo en la historia y la creación de una tabla propia de logaritmos que pueda servir para iniciar en la investigación a futuros estudiantes de carreras científicas

Tabla 7. Documentos que aportan evidencias, estrategias y apoyo para el profesor de matemáticas para la enseñanza de los logaritmos y función logarítmica.

3.2. COMPENDIO DE ELEMENTOS PROPUESTOS PARA HACER PARTE DEL CDC DEL PROFESOR, CONCERNIENTE AL DESARROLLO HISTÓRICO DE LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Una vez realizadas las etapas de búsqueda, clasificación y descripción de los documentos referentes a la función logarítmica y su desarrollo histórico, clasificándolos de acuerdo con tres características, como se explicó en el capítulo de metodología, fueron seleccionados entre ellos dos documentos, los cuales en su contenido presentan una construcción de la representación gráfica de la función logarítmica basada en el desarrollo histórico de esta:

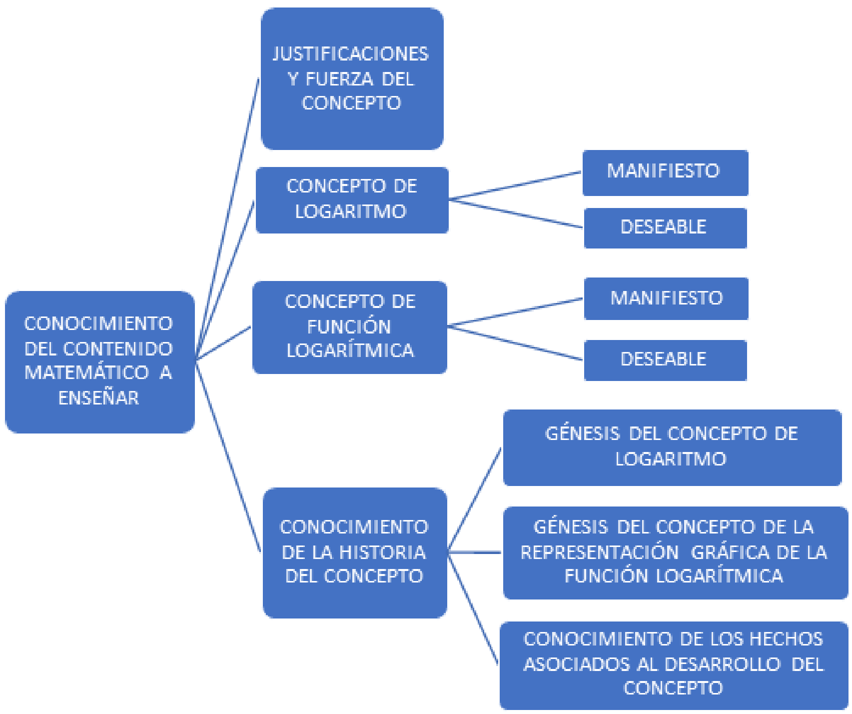
El primer documento, que se *titula La Función Logaritmo bajo la Perspectiva de la Construcción dada por Agnesi (1748)*, al cual en adelante nos referiremos como documento número uno.

El segundo documento titulado *El logaritmo: ¿cómo animar un punto que relacione una progresión geométrica y una aritmética?*, al cual en adelante nos referiremos como el documento número dos;

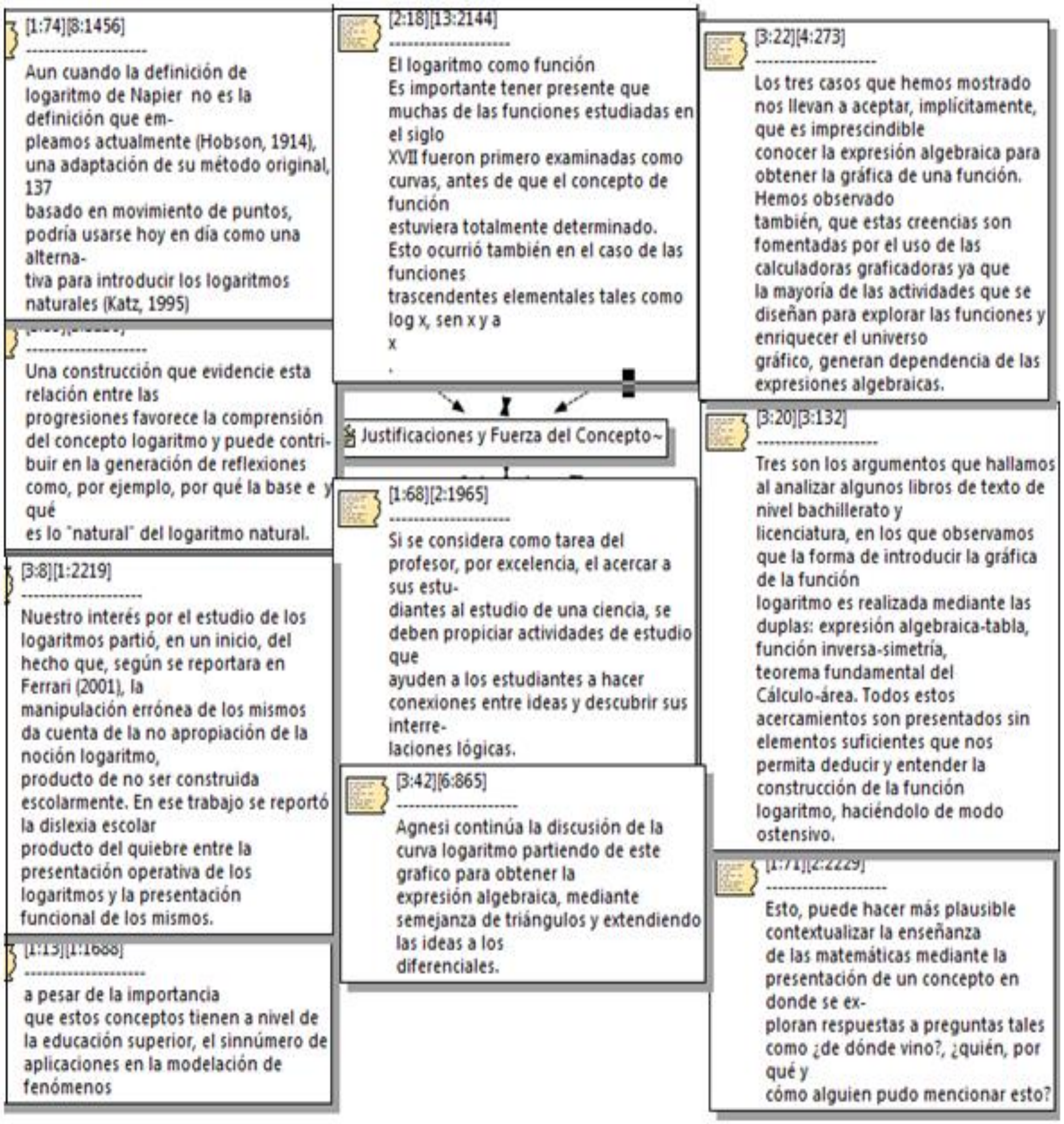
Basados en los resultados de las categorías de análisis y las redes que nos ofrece el software Atlas.ti, se organizará la presentación de los resultados de dicho análisis, para ello se encontrará dividido en cuatro partes que se corresponden a cada una de las categorías que pertenecen a *Conocimiento didáctico del contenido del profesor* asumiendo que lo contenido en estas categorías compone la categoría nombrada, además según como se encuentre compuesta cada una de estas categorías se presentarán los conocimientos identificados en ellas.

3.2.1. Conocimiento del contenido matemático a enseñar

De acuerdo con la red que se presenta a continuación, se mostraran mostrarán los conocimientos identificados como parte de esta categoría, se hace a través de las redes obtenidas de Atlas.ti respecto a: justificaciones y fuerza del concepto, concepto de logaritmo, concepto de función logarítmica (diferenciando lo manifiesto y deseable), y el conocimiento de la historia del concepto se presentará por medio de los resultados de sus tres componentes.



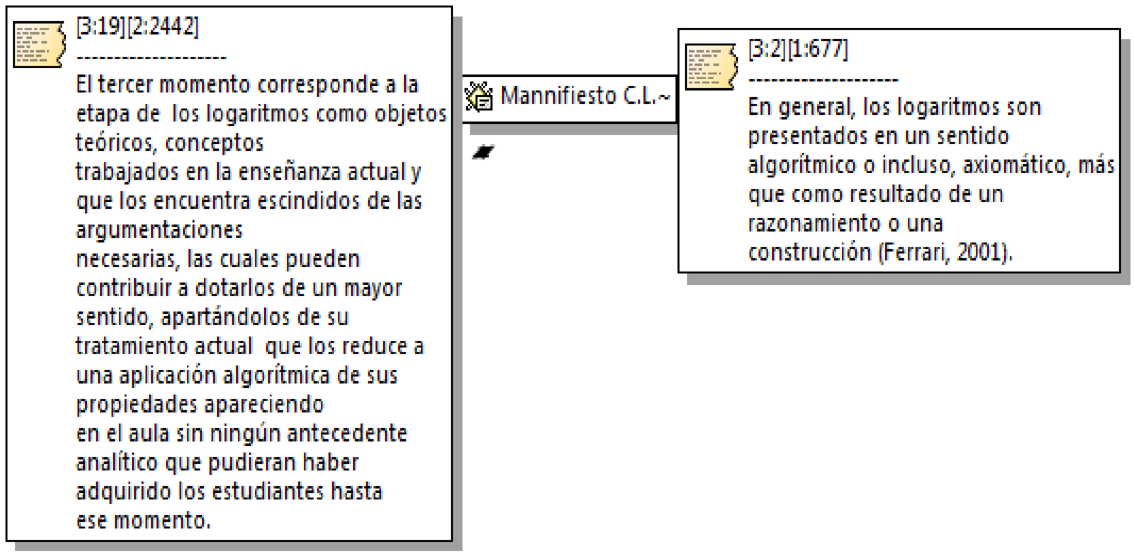
Red 2. Conocimiento del contenido matemático a enseñar



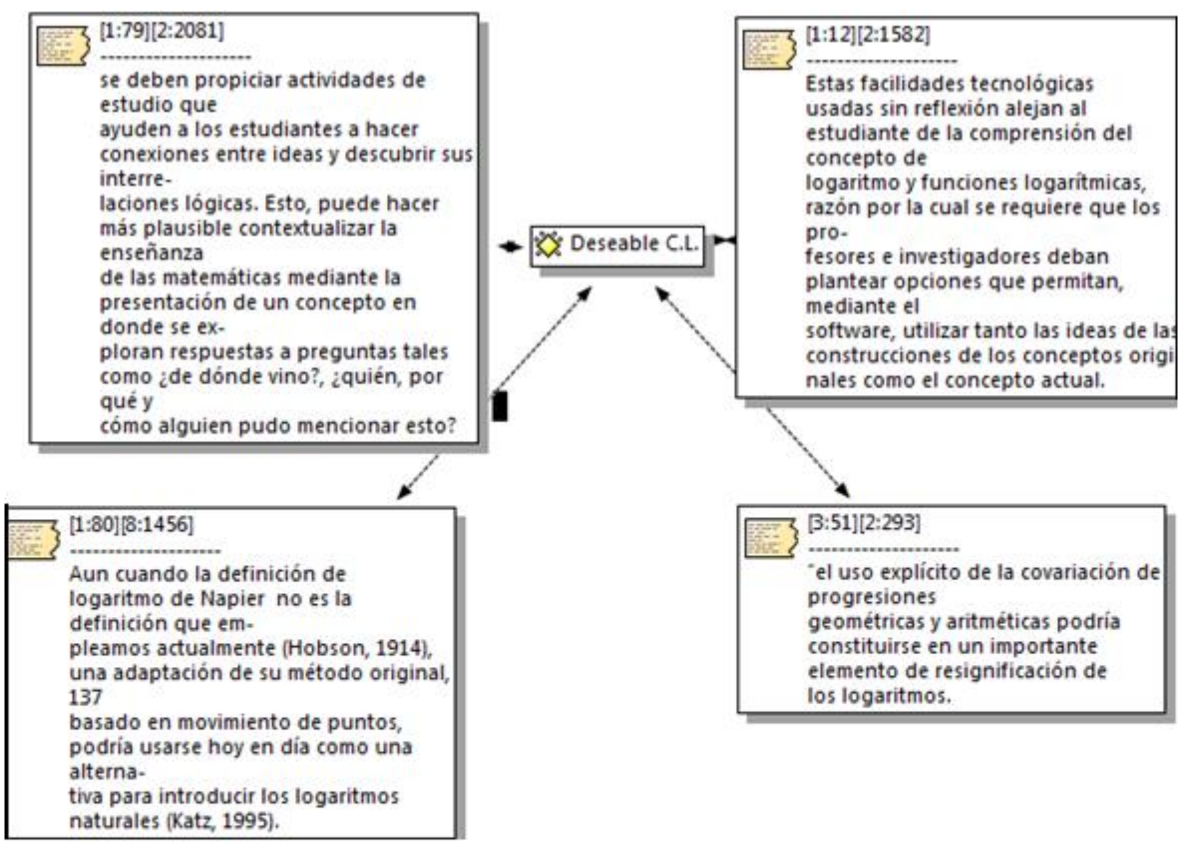
Red 3. Justificaciones y fuerza del concepto

En los segmentos de texto que pertenecen a la *Red 3* se evidencian tres cosas importantes que para el profesor de matemáticas debería ser de conocimiento e interés cada vez que se concentra en la enseñanza de la representación gráfica de la función logarítmica, (1) la manipulación que se puede titular como los autores lo dicen “errónea” de los logaritmos y función logarítmica en los libros de texto, en la enseñanza a través de las calculadoras, y de la inmersión de este concepto a través de la inversa de la función exponencial, (2) La importancia de incluir este concepto a nivel de educación superior y bachillerato con el fin de potenciar todas las aplicaciones de este concepto y modelaciones de fenómenos, y (3) el enseñar este concepto desde su naturaleza histórica resalta del concepto elementos como: porque la base *e*, lo natural del logaritmo natural, la relación entre una progresión geométrica y una aritmética, y las conexiones con las construcciones de las representaciones de otras funciones; además de propender por estrategias de enseñanza que hagan uso del desarrollo histórico de un concepto. Estos conocimientos le ayudarían a dar importancia a la enseñanza del concepto en el currículo matemático, resaltando las características únicas y relevantes de este concepto, junto a la relación con otros conocimientos (aplicaciones del concepto, y las consideraciones de este como conocimiento previo a otros).

Si bien es importante que el profesor posea conocimientos que le permitan justificar la fuerza de un concepto, también es pertinente que posea conocimiento del concepto; para ello en este análisis se identificaron en los documentos el conocimiento del concepto de logaritmo y función logarítmica. Se encontró que ya hay conocimientos que el profesor posee, pero otros que debería poseer; luego los conocimientos en cuanto al *Concepto de Logaritmo y Función Logarítmica,* estarán definidos por los reconocidos como manifiestos y deseables.



Red 4. Conocimientos manifiestos del concepto de logaritmo

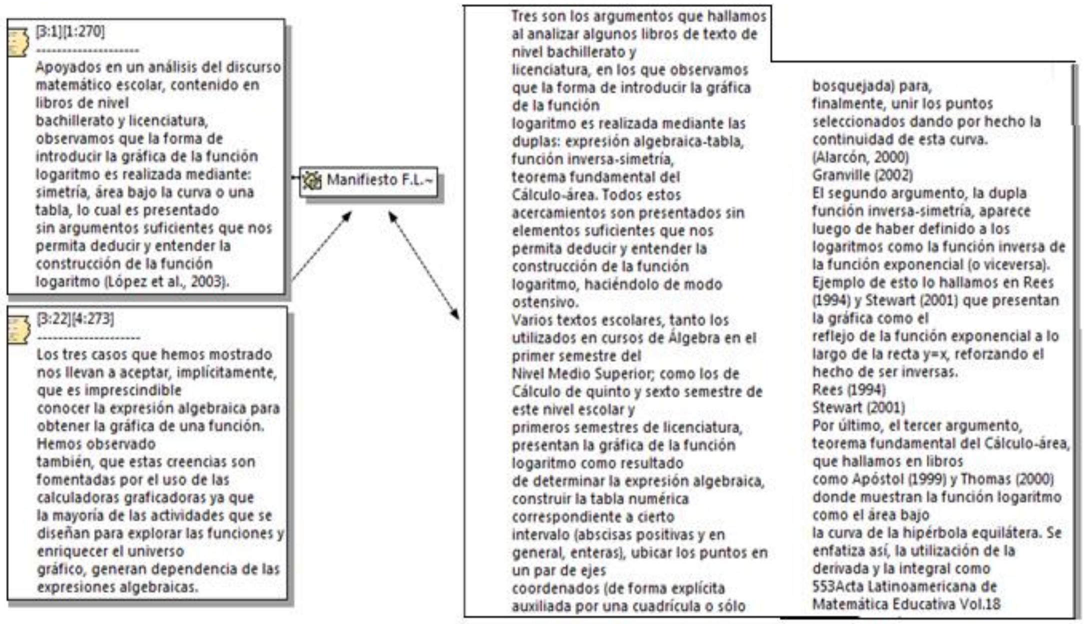


Red 5. Conocimientos deseables del concepto de logaritmo

En la *Red 4* se identifican dos cosas del concepto de logaritmo, que siendo conocimientos que se reconocen como que ya poseen los profesores, deberían ser conocimientos generadores de reflexiones propias del profesor y del currículo en formación para incentivar el estudio de este concepto; (1) el conocimiento y manejo algorítmico de los logaritmos, que no propone ningún tipo de razonamiento o construcción matemática y (2) la falta de argumentos a la justificación de la enseñanza de este concepto.

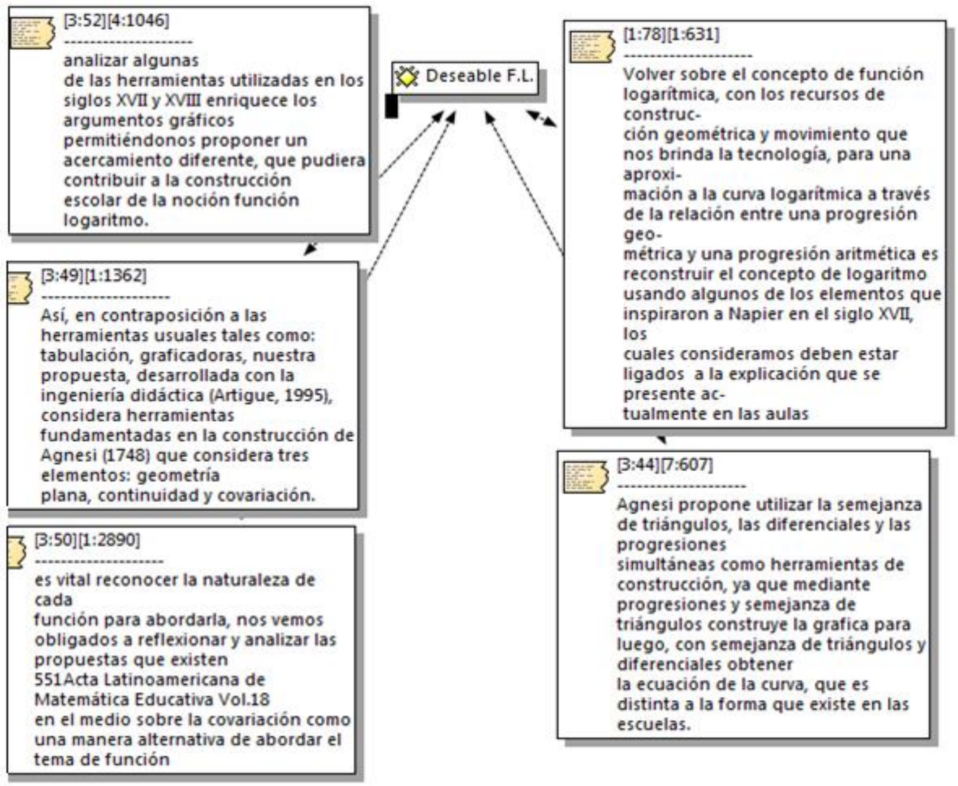
Lo anterior se complementa con lo identificado en la *Red 5*, que apunta a la necesidad de un conocimiento apropiado que los profesores le deben dar al concepto de logaritmo, alejándolo de la idea algorítmica y rescatando la definición de logaritmo de Napier; es decir, el conocimiento del logaritmo como la relación entre una progresión geométrica y aritmética, ya que, este puede constituir un método de enseñanza que resignifique el concepto, y permita establecer conexiones con otros conceptos, permitiendo actividades innovadoras con el uso de software y las características de la relación entre las progresiones.

Luego, los conocimientos que se identifican sobre el concepto de logaritmo en la literatura en EM, son conocimientos que propician por una resignificación del concepto y para ello los investigadores reconocen que el acercamiento a su naturaleza histórica es un buen mecanismo para darle justificación y argumentación al concepto dentro de un currículo.



Red 6. Conocimientos manifiestos del concepto de función logarítmica

El conocimiento que exponen los autores en los segmentos de texto categorizados en la *Red 6*, son evidencias del tratamiento y saber que se tiene de la función logarítmica a nivel escolar y de educación superior, donde no se favorece la comprensión y argumentación de la construcción de la gráfica y surgimiento de la misma. Para el caso en que la función logarítmica es introducida por la expresión algebraica-tabla se traslada al tratamiento que se le da a nivel escolar y que no tiene ni tampoco recae sobre él algún argumento o justificación a la enseñanza de este; cuando se introduce por medio de la inversa-simetría, aunque tiene un antecedente que es la función exponencial carece de esas justificaciones y argumentaciones como conocimiento previo a otros; y finalmente la introducción por el teorema fundamental del cálculo y área bajo la curva, que presenta más elementos y conceptos matemáticos, es usada en libros a nivel de educación superior con el fin de desarrollarla y conectarla con otros conceptos, pero aun así no expone elementos de su desarrollo histórico.

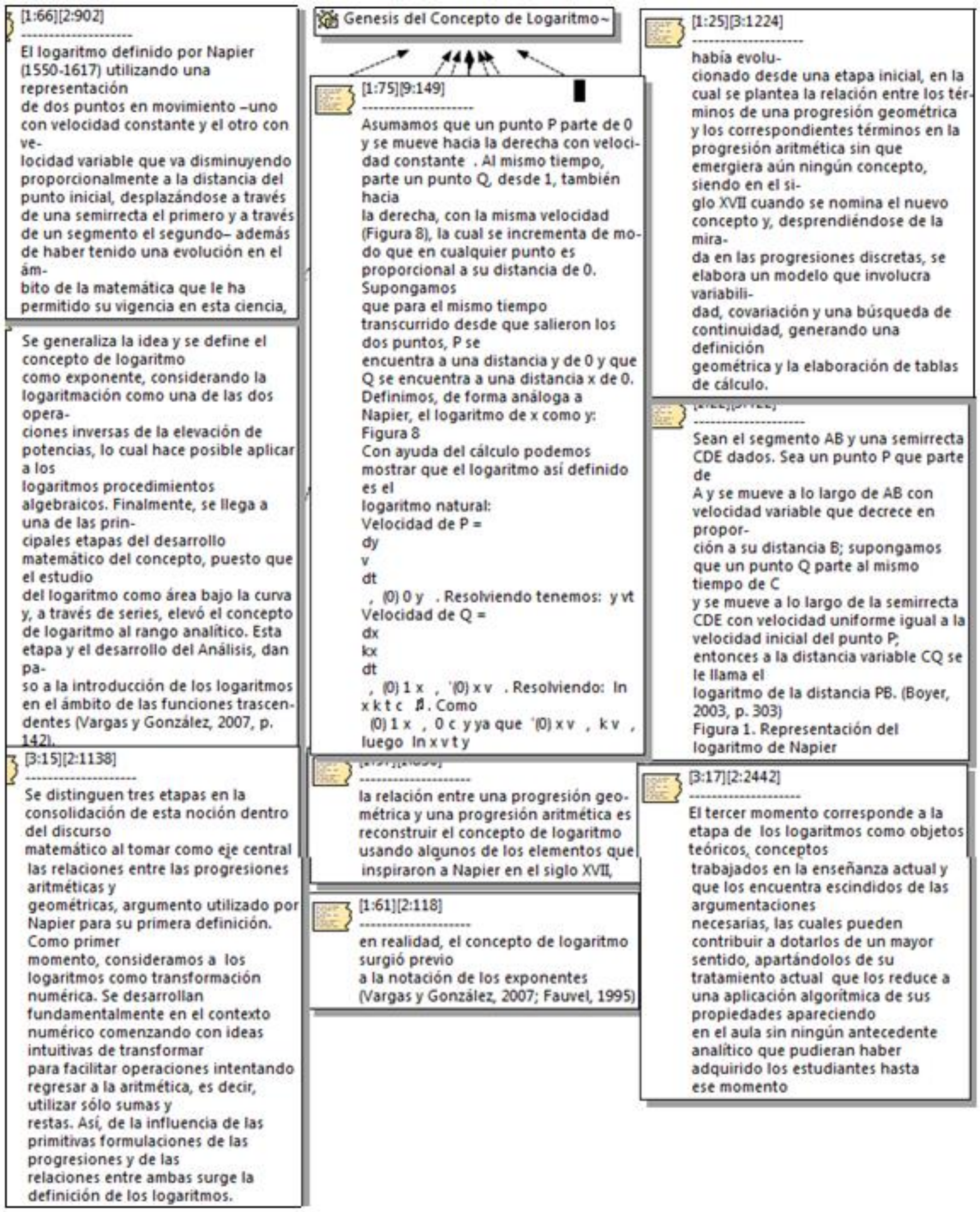


Red 7. Conocimientos deseables de la función logarítmica

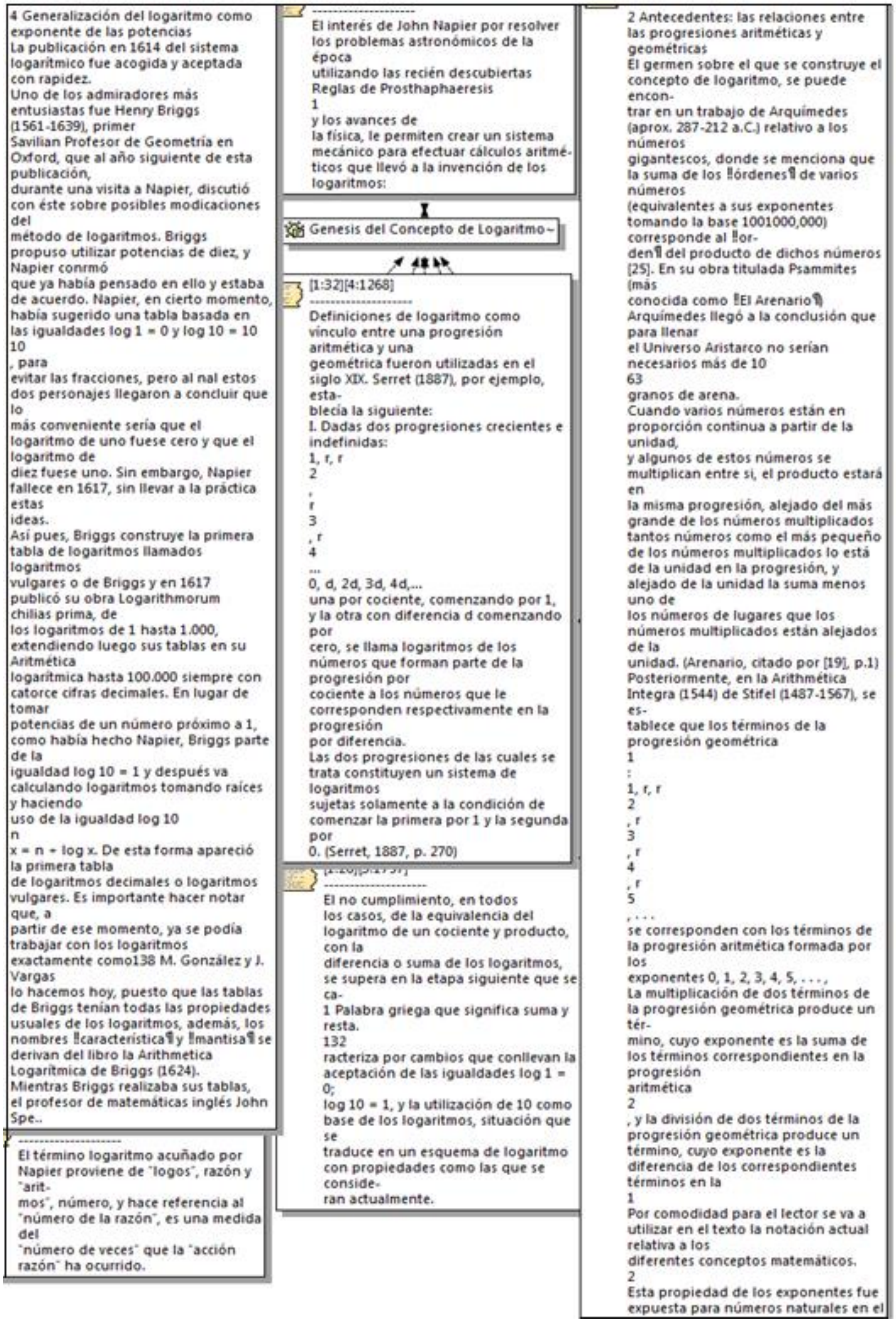
Los documentos proponen para los conocimientos deseables del concepto de función logarítmica, el reconocimiento de la naturaleza histórica de este, con el fin de que sea abordado desde dichos elementos que enriquecen el concepto con argumentos gráficos y conceptuales permitiendo acercamientos diferentes a los nombrados en los conocimientos manifiestos, entre ellos se encuentran los dos que exponen los documentos y que más adelante serán expuestos.

La información ofrecida en los documentos pone en consideración el conocimiento de la génesis histórica del concepto, por ello es que dentro del conocimiento del contenido matemático a enseñar se encuentra el conocimiento de la historia del concepto, para el caso de las intenciones del presente análisis se divide este conocimiento en tres partes; la primera de ellas es la génesis del concepto de logaritmo, los conocimientos identificados en esta categoría se presentan a continuación en tres redes (Redes 8, 9, y 10) debido a la cantidad de información que se encontró, sin embargo la separación de la información no depende de algún orden.

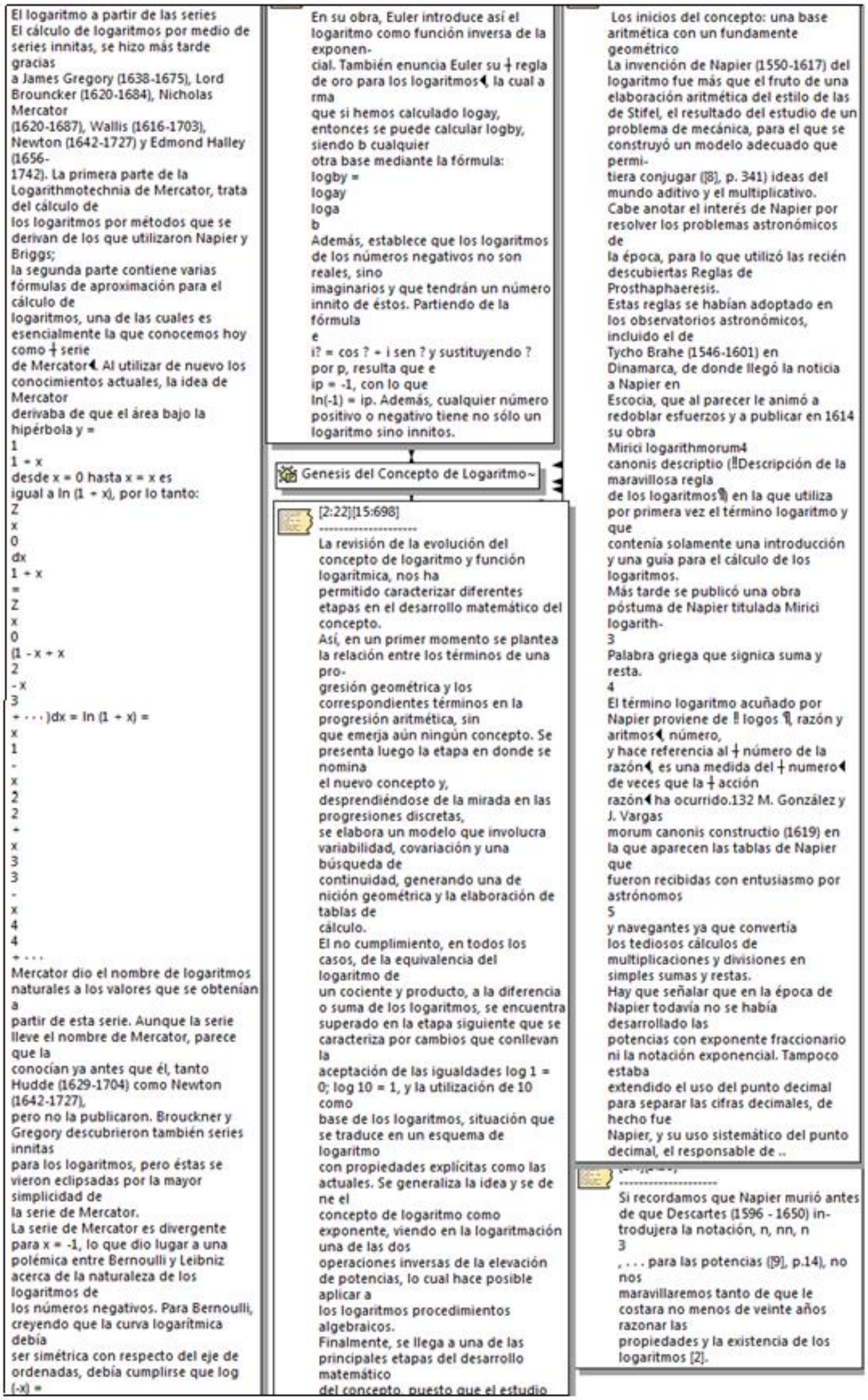
En la información expuesta en las redes, se reconocen algunas concepciones que se tuvieron en cuenta en el desarrollo del concepto, entre ellos está la relación entre un progresión aritmética y otra geométrica utilizando una representación de dos puntos en movimiento uno con velocidad constante y el otro con velocidad variable, esta idea de Napier en el siglo XVI, es la que permite poner al concepto de logaritmo en una relación con los hechos que dieron origen a este concepto y con el desarrollo del concepto, siendo esta la primera etapa de desarrollo de la noción de logaritmo, donde la idea es el tratamiento numérico y aritmético facilitando el cálculo de sumas y restas; la segunda etapa se caracteriza por la elaboración de un modelo que involucra la variabilidad y covariación, generando una noción geometría del concepto, ello permitió la elaboración de tablas y la revisión de equivalencias entre logaritmos de un cociente y producto, a la de la suma y resta de logaritmos; finalmente los autores reconocen una tercera etapa del desarrollo del concepto de logaritmo, donde se da una aceptación de igualdades que en la fase anterior no se lograron establecer, además se generaliza la idea del concepto de logaritmo como una de las operaciones inversas a la elevación de potencias. En cada una de estas etapas se pueden encontrar ideas para actividades de enseñanza que resignifiquen el concepto de logaritmo.



Red 8. Conocimientos asociados a la génesis del concepto de logaritmo (1)

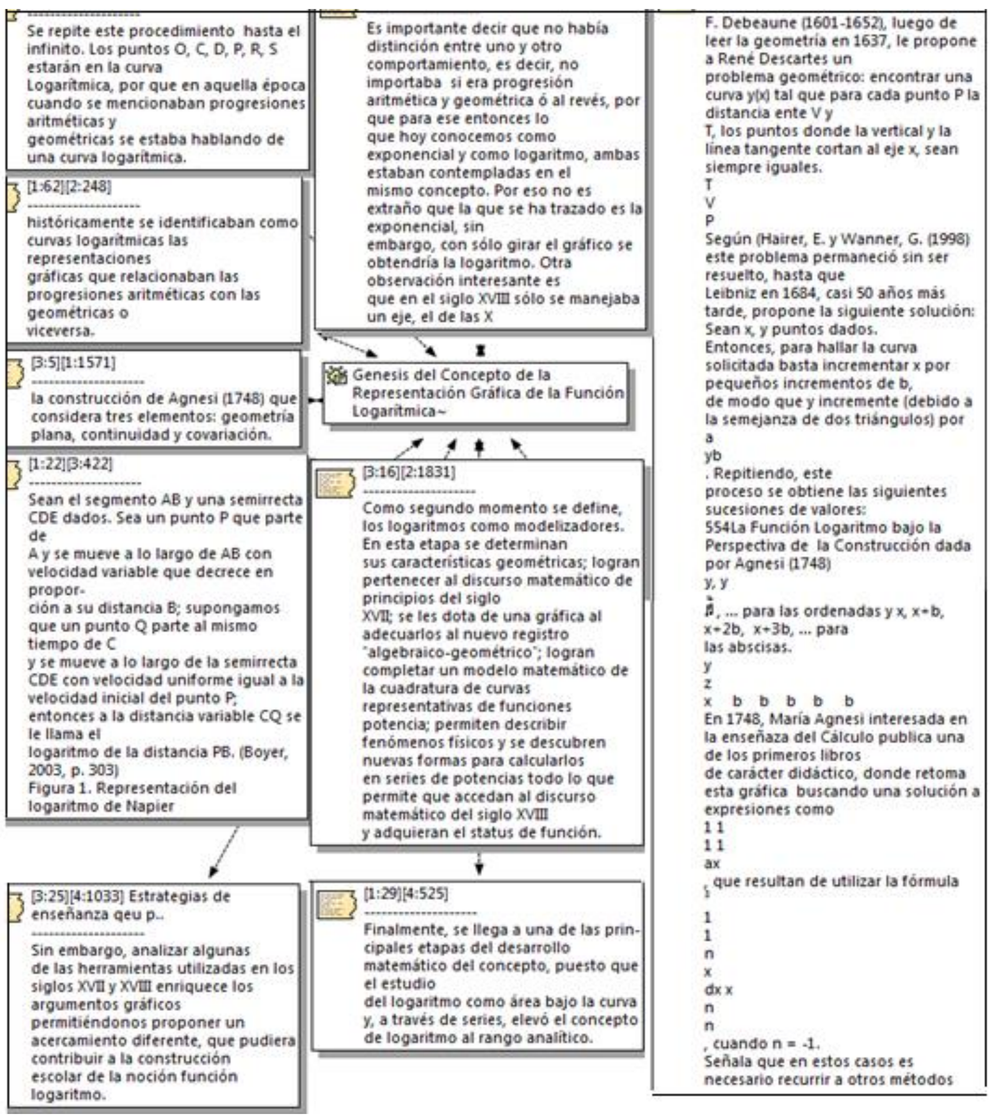


Red 9. Conocimientos asociados a la génesis del concepto de logaritmo (2)

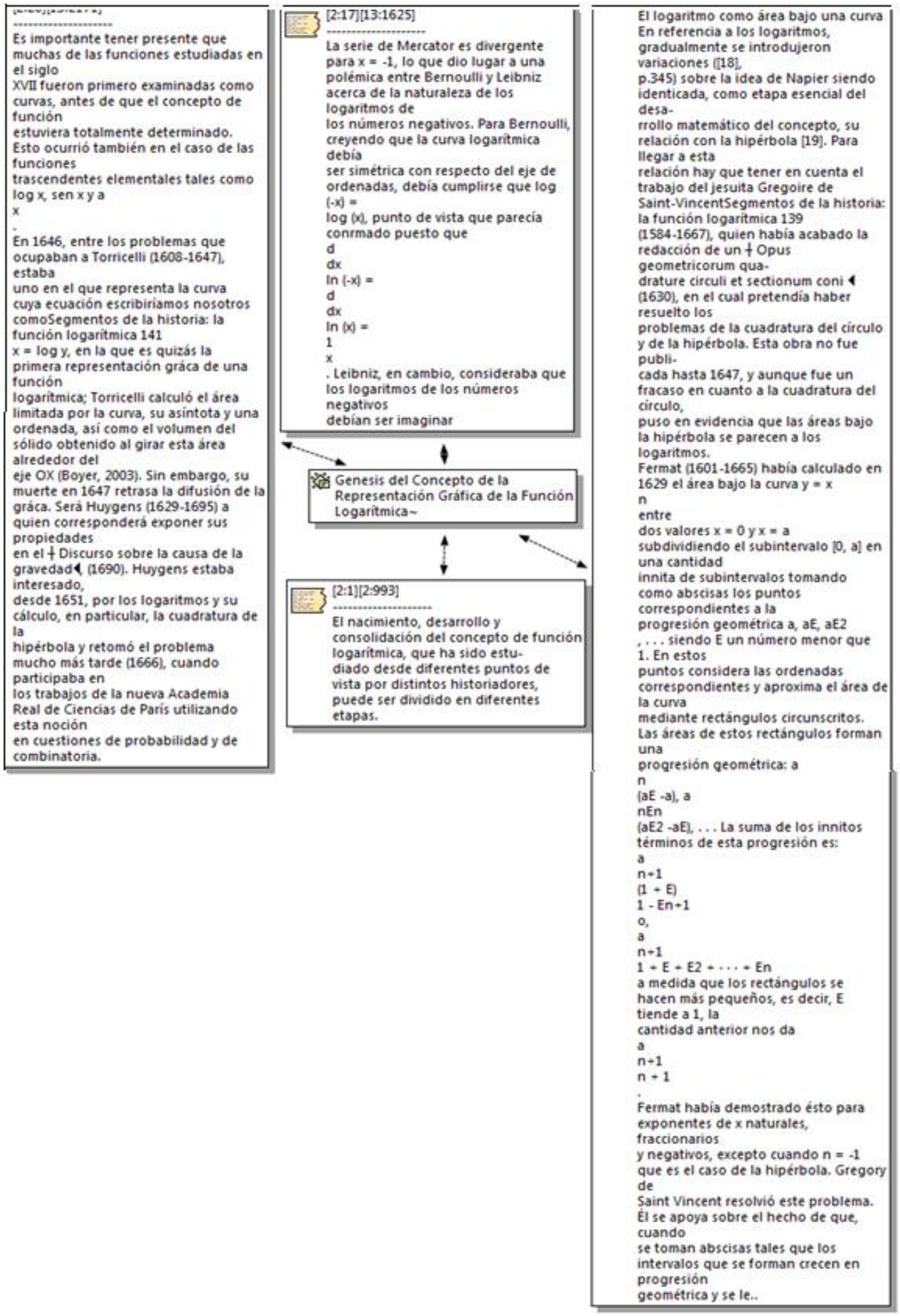


Red 10. Conocimientos asociados a la génesis del concepto de logaritmo (3)

Los siguientes segmentos de texto hacen parte de la segunda parte del conocimiento de la historia del concepto, y esta categoría se titula génesis del concepto de la representación gráfica de la función logarítmica y en ella se identifican los conocimientos que se tuvieron en cuenta en las etapas de desarrollo del concepto para la enseñanza de este. Se presentan en dos redes (11 y 12) debido a la cantidad de segmentos clasificados en la categoría.



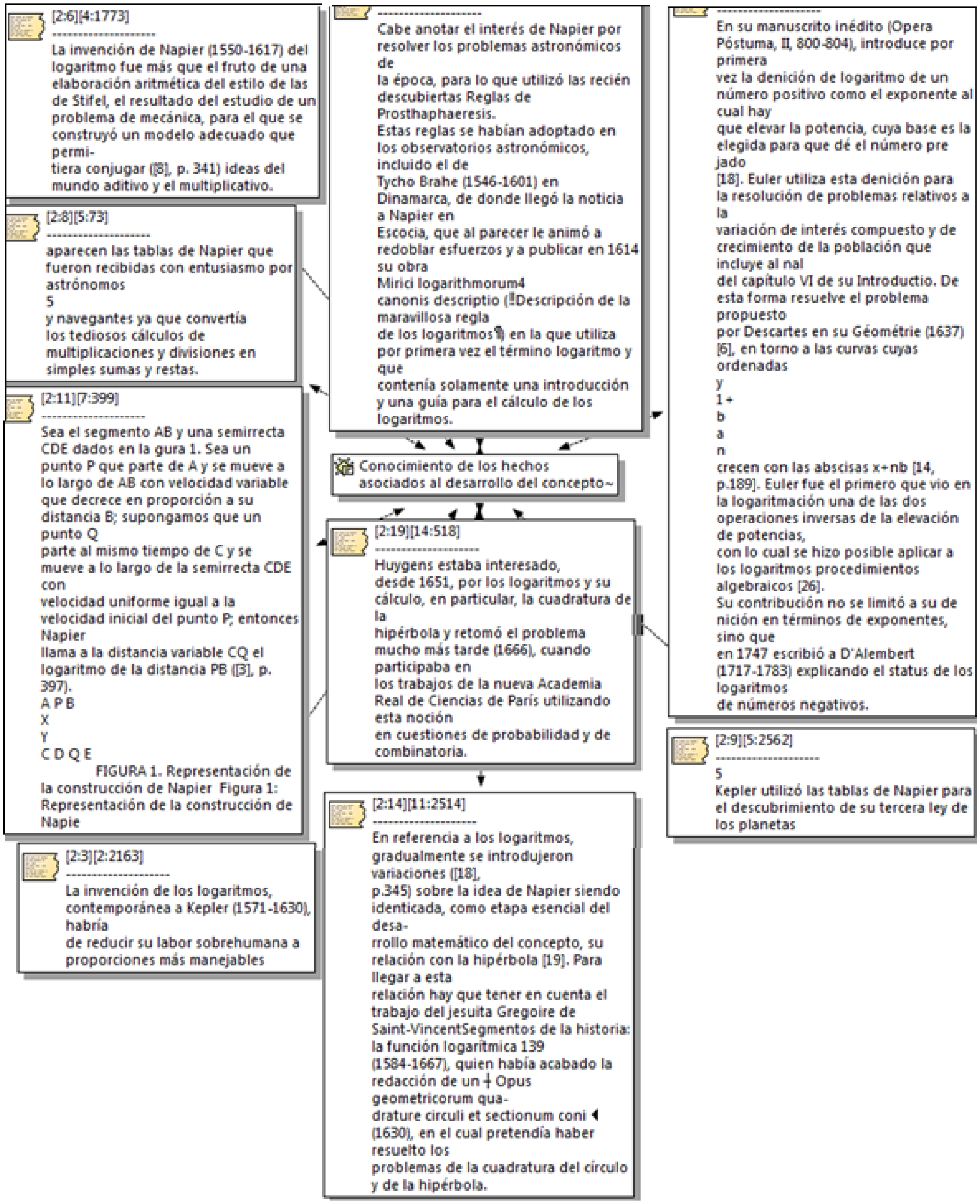
Red 11. Conocimientos asociados a la génesis del concepto de la representación gráfica de la función logarítmica (1).



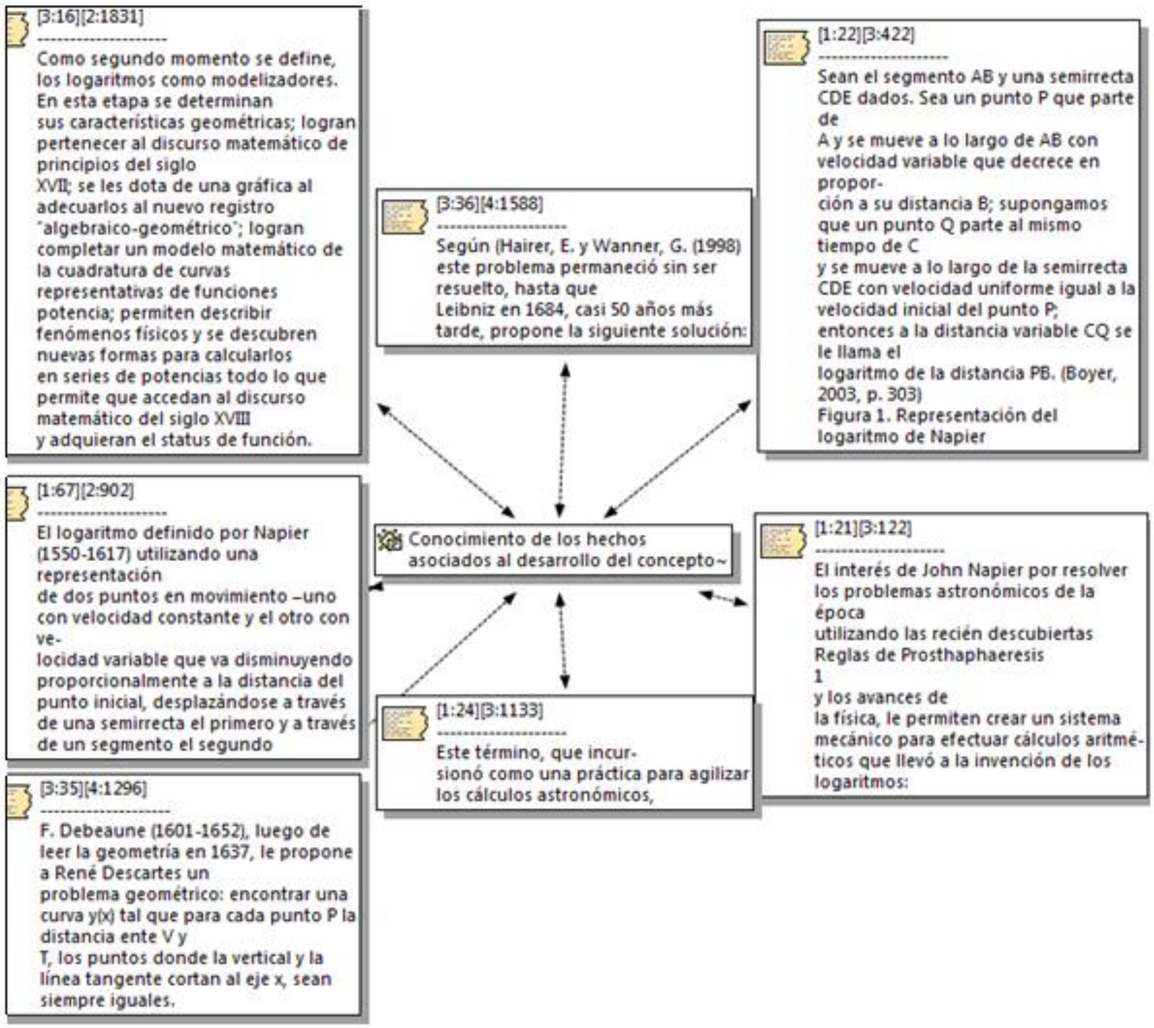
Red 12. Conocimientos asociados a la génesis del concepto de la representación gráfica de la función logarítmica (2).

Dentro de esos segmentos de texto, se muestra el desarrollo de la representación gráfica de la función logarítmica, se realzan tres momentos de ese desarrollo, (1) el reconocimiento como curvas logarítmicas a las representaciones graficas que relacionaban progresiones aritméticas y geométricas, sin hacer distinción en su comportamiento, en tanto lo que se conoce ahora como la representación de la función exponencial, históricamente también se llama curva logarítmica; (2) el tratamiento del logaritmo como área bajo la curva pone en evidencia que el área bajo la curva de una hipérbola se parece a los logaritmos y de ahí que un modelo matemático de la cuadratura de curvas representativas de funciones potencia, permita describir fenómenos físicos y formas de calcular, (3) por último, el desarrollo histórico de la representación gráfica de la función logarítmica llevó a establecer su expresión algebraica relacionando características de su representación gráfica.

Como tercera categoría en los conocimientos de la historia del concepto, se encuentran los segmentos de texto agrupados en el conocimiento de los hechos asociados al desarrollo histórico del concepto, esta categoría permite reconocer en el documento los fenómenos sociales, culturales y científicos asociados a la aparición y desarrollo del concepto de logaritmo y función logarítmica. Aunque en el capítulo 1 se hace una descripción más amplia de esos fenómenos, en la siguientes dos redes se exponen los que se encontraron en los documentos analizados, en los cuales se evidencia al igual que en los expuestos en el capítulo 1, el reconocimiento a Napier por la idea de la relación entre progresiones para resolver problemas astronómicos que respondieran a los avances, identificación y modelación en los fenómenos físicos.



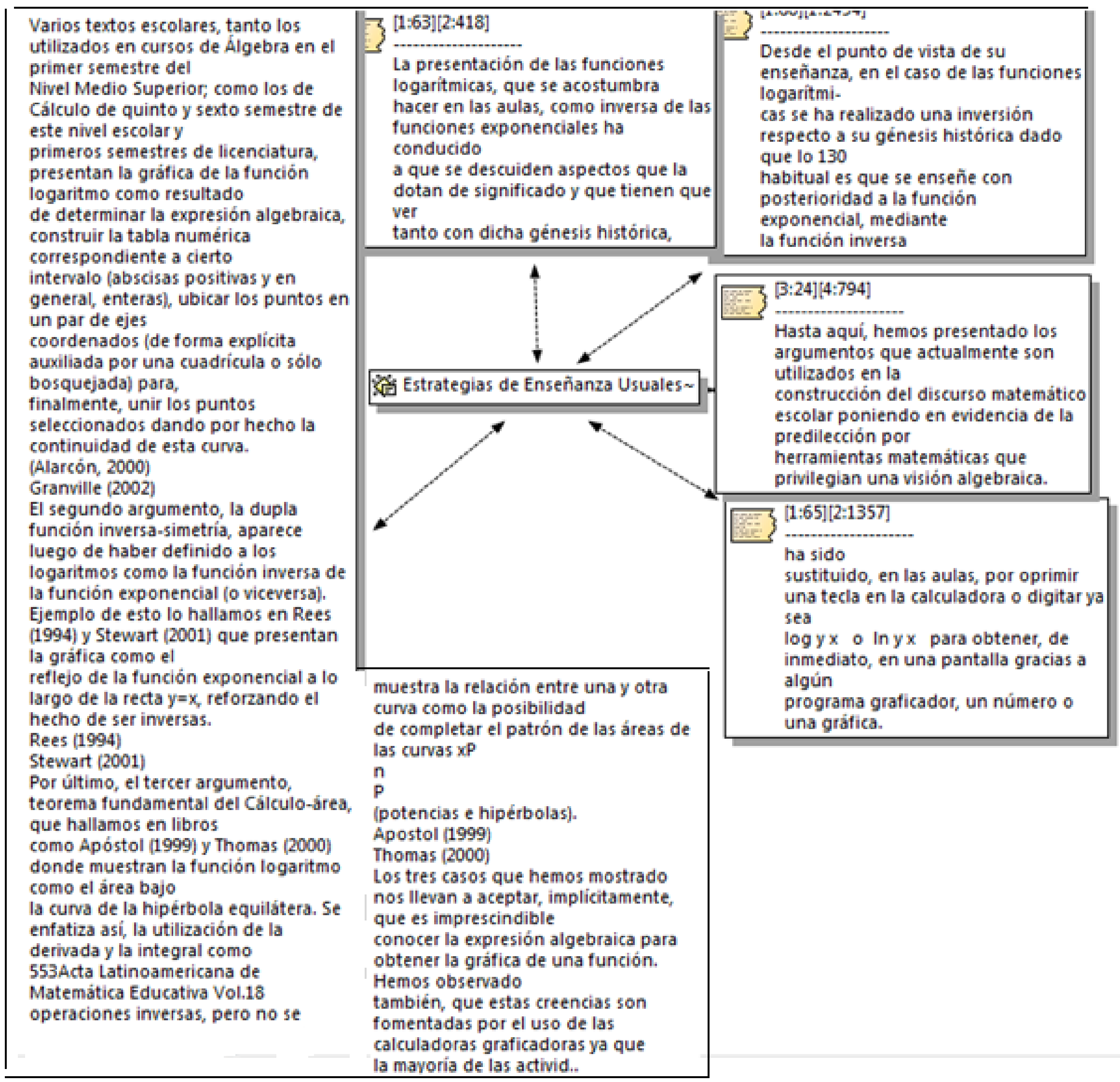
Red 13. Conocimientos de los hechos asociados al desarrollo del concepto (1).



Red 14. Conocimientos de los hechos asociados al desarrollo del concepto (2).

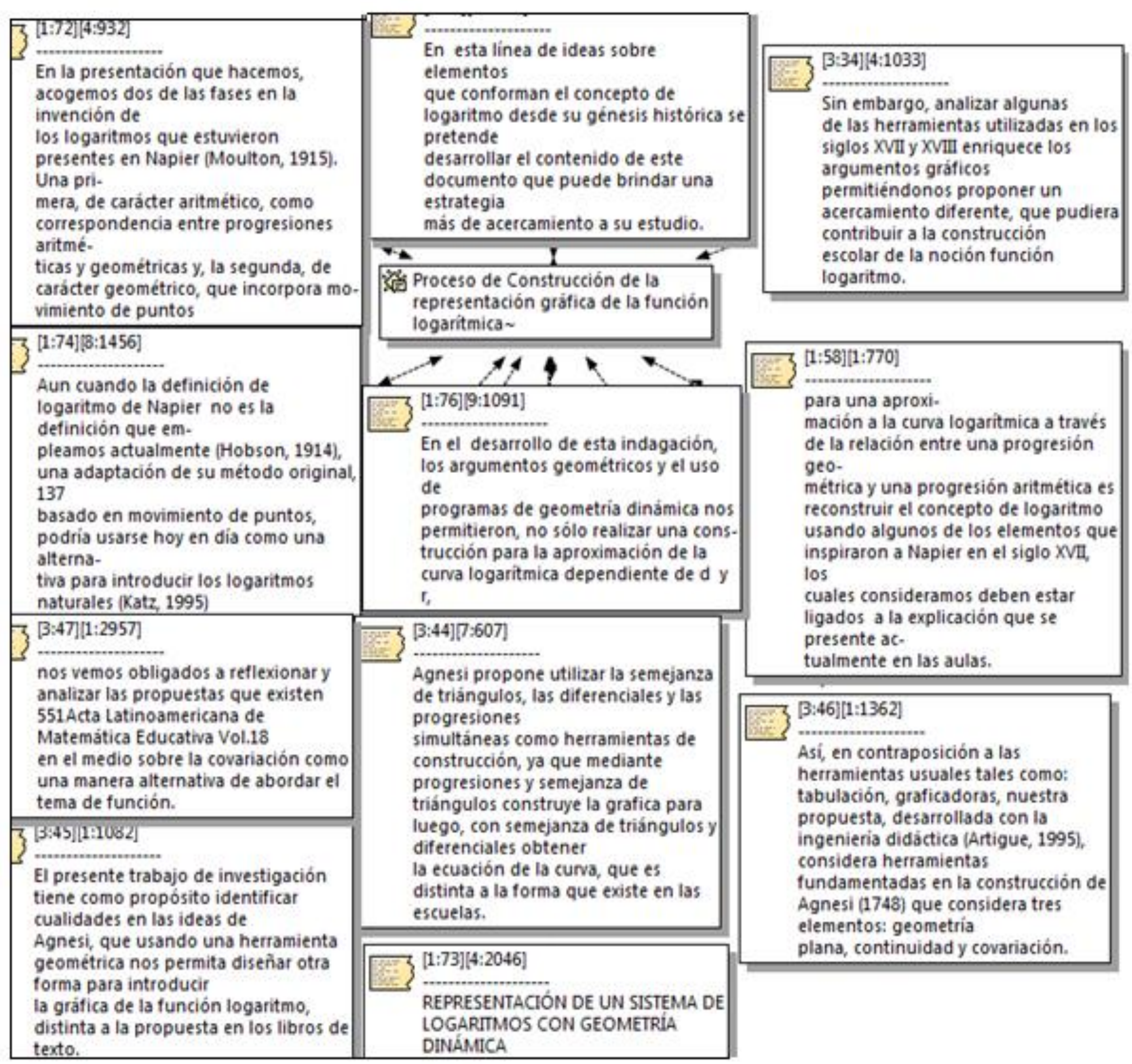
3.2.2. Conocimiento de estrategias de enseñanza y representaciones instruccionales

Los conocimientos que se clasificaron en esta categoría dan cuenta del saber que deben poseer los docentes sobre las estrategias y representaciones instruccionales para la enseñanza de la representación gráfica de la función logarítmica, en este se presentan las formas de organizar, secuenciar y caracterizar un método de enseñanza, para ello esta categoría se compone de dos partes; la primera es la identificación de esas estrategias catalogadas como usuales debido a su uso frecuente en el aula y en los libros, y en la segunda se exponen los procesos de construcción de la representación gráfica de la función logarítmica propuestos en los documentos analizados, para presentar las construcciones y con el fin de caracterizar la comprensión en este proceso, se identifican las formas de conocer expuestas por la teoría APOS.



Red 15. Conocimientos de estrategias de enseñanza usuales.

En los conocimientos expresados en la red 15 se identifican tres formas de abordar la enseñanza de la representación gráfica de la función logarítmica: representación-tabla, inversa-simetría y calculo-área bajo la curva. Además las reflexiones que se realizan frente a estos métodos que primero privilegian una visión algebraica del concepto y segundo que sustituyen las actividades innovadoras por el manejo de calculadoras.



Red 16. Conocimiento de los procesos de construcción de la representación gráfica de la función logarítmica.

Los procesos de construcción de la representación gráfica de la función logarítmica que proponen los documentos emergen de las ideas que se presentan en la *Red 16*, cada uno presenta de una manera diferente la construcción gráfica de la función logarítmica, desde una perspectiva histórica, las cuales se presentan y analizan aquí, teniendo en cuenta las unidades de análisis definidas desde las formas de conocer planteadas por la teoría APOS.

3.2.2.1. Formas de conocer

Esta parte del análisis se presenta de manera distinta, haciendo diferencia en los segmentos de texto de cada documento, para ello se va a hacer por separado, y en el desarrollo del análisis se ira nombrando que se catalogó como *acción, proceso y objeto.* Se da inicio por el documento número uno (Pág. 92) que expone la construcción propuesta por Agnesi, para la curva logarítmica de la siguiente manera:

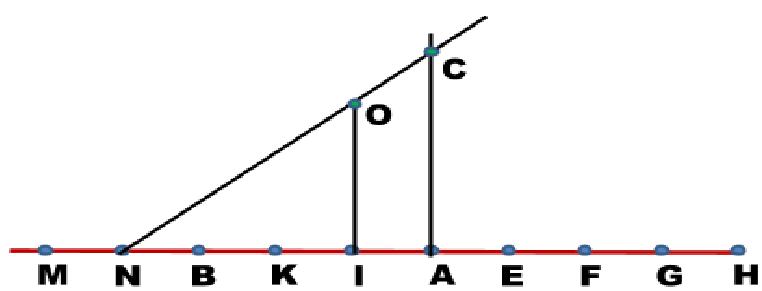


Ilustración 1. Parte 1 de la construcción propuesta por Agnesi.

Propone trazar una recta cualquiera MH, a la que se divide en partes iguales MN, NB, BK, etc. y se toma a uno de los segmentos, por ejemplo NI. En el punto I se alza una perpendicular IO del tamaño que se quiera, y de N se traza una recta que pase por O. Luego *se traza una perpendicular por el punto A, cuyo encuentro con NO sea C* (López & Ferrari, 2007, p. 555)(Ilustración 1). Hasta aquí se identifica la forma de conocer acción puesto que se limita a seguir instrucciones dadas de manera externa, sobre algunos objetos matemáticos, en específico la acción de construir triángulos semejantes, siguiendo las instrucciones de trazar cada perpendicular, cada recta, etc.

Es necesario hacer notar que se pretende construir la curva mediante triángulos semejantes como ΔNIO y ΔNAC, donde las alturas originan una progresión geométrica (López & Ferrari, 2007, p. 555) Este segmento de texto evidencia un proceso, puesto que implica la relación de varios objetos tales como: objetos geométricos (rectas, segmentos, triángulos, perpendiculares, altura), progresiones geométricas (objeto del cual se debe apropiar el sujeto previamente), triángulos semejantes; y la interiorización de la acción, ya que el sujeto no se limita al seguimiento de instrucciones sino que debe reflexionar sobre las ellas, lo cual implica una apropiación del objeto progresión geométrica, así como también de la semejanza de triángulos, conceptos fundamentales en esta construcción, de tal manera que logre comprender que las alturas de los triángulos originan la progresión geométrica; si el sujeto no interioriza la acción, se queda en la construcción de rectas y triángulos.

Ahora se traza por B una recta que pase por C y una perpendicular sobre E donde toque a BC determinándose así el punto D (López & Ferrari, 2007, p. 555) *(Ilustración 2),* Este segmento implica una forma de comprender acción, puesto que el sujeto se limita a seguir la instrucción.

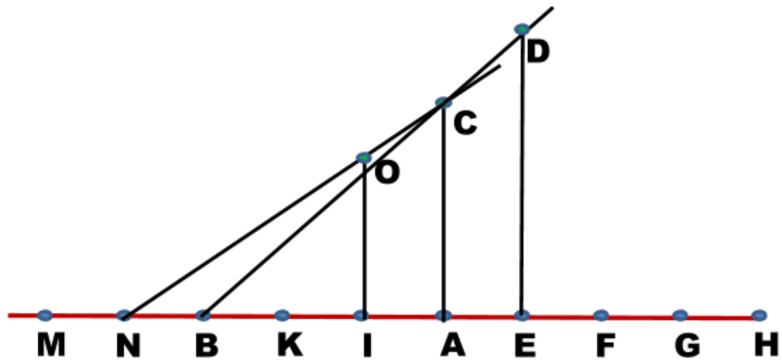


Ilustración 2. Parte 2 de la construcción propuesta por Agnesi.

Se repite este procedimiento hasta el infinito. Los puntos O, C, D, P, R, S estarán en la curva Logarítmica, porque en aquella época cuando se mencionaban progresiones aritméticas y geométricas se estaba hablando de una curva logarítmica (López & Ferrari, 2007, p. 556). La ilustración 3 presenta la ubicación de puntos hasta S, antes del trazo de la curva.

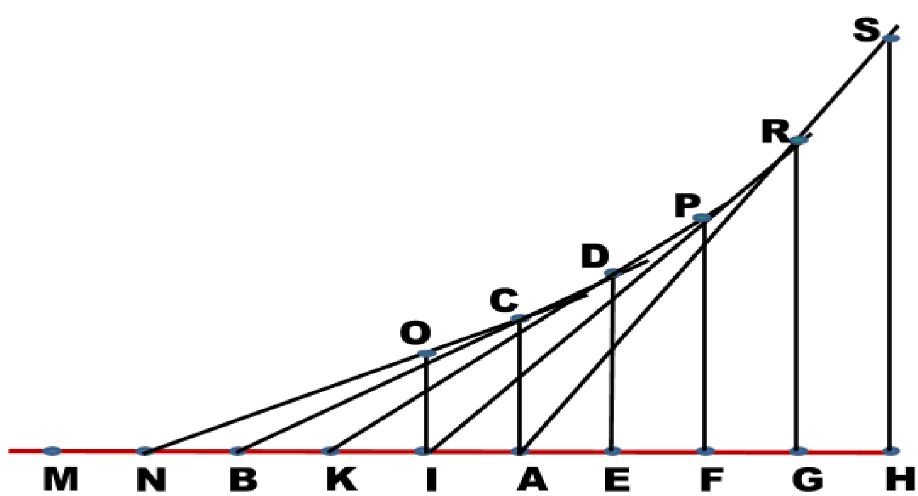


Ilustración 3. Parte 3 de la Construcción propuesta pos Agnesi.

El que se mencione la repetición del procedimiento hasta el infinito, implica llegar hasta la apropiación del objeto curva logarítmica. Sin embargo las cuatro líneas del párrafo tienen una gran densidad.

Por una parte el hecho de continuar ubicando puntos, y trazando segmentos sin que estos estén dados, implica una interiorización de la acción, mediante la reflexión, de tal manera que el sujeto es capaz de ir más allá de seguir la instrucción externa y mediante su comprensión puede continuar con el procedimiento de manera correcta. Por otra parte, los puntos que se tracen no son solamente sucesivos, sino que se debe tener en cuenta la capacidad de abstraer la continuidad en la curva, deduciendo que si el tamaño de los segmentos en los cuales se divide la recta inicial tiende a cero, entonces se obtiene la gráfica de una función. Esto nos permite afirmar que una vez se ha llegado a esta parte se puede afirmar que está en proceso.

El paso de proceso a objeto mediante la encapsulación del primero, se evidencia especialmente de dos maneras: la primera, en la capacidad del sujeto para comprender elementos inherentes a la gráfica logarítmica, como la continuidad que se obtiene a partir de la construcción infinita de puntos mediante triángulos semejantes desligando la gráfica de la función logarítmica de una posición fija en un plano y asociarla con una progresión geométrica y una aritmética. Sin embargo, implica ir un poco más allá y tener claro el proceso histórico de la construcción de esta curva logística o logarítmica, aunque es similar a la exponencial, inicialmente no se diferenciaba de ella. La segunda, derivada de la primera, la capacidad para desencapsular el objeto, donde el sujeto tiene una visión global del proceso de construcción y es capaz de deshacerlo de devolverse hasta las acciones originales, permitiéndole comprender todo el camino recorrido para llegar al objeto. En otras palabras, además de ser capaz de reconocer el objeto, curva logarítmica, es capaz de descomponerlo en todos los elementos que le dieron origen, comprendiendo cómo estos se coordinan entre sí.

El hecho de desencapsular el objeto y ser capaz de devolverse hasta las acciones que le dieron origen, pero teniendo la visión del objeto construido, es lo que le permitirá al sujeto establecer nuevas relaciones entre la acciones, y mediante la coordinación de procesos a partir del que lo llevó al objeto, estaría en la capacidad de determinar pasa, por ejemplo, al cambiar el tamaño de la primera perpendicular trazada o el tamaño de los segmentos en que se divide la recta inicial, siendo capaz de trazar una familia de curvas.

Es importante decir que no había distinción entre uno y otro comportamiento, es decir, no importaba si era progresión aritmética y geométrica o al revés, porque para ese entonces lo que hoy conocemos como exponencial y como logaritmo, ambas estaban contempladas en el mismo concepto. Por eso no es extraño que la que se ha trazado es la exponencial, sin embargo, con sólo girar el gráfico se obtendría el logaritmo. Otra observación interesante es que en el siglo XVIII sólo se manejaba un eje, el de las X (López & Ferrari, 2007, p. 556).

Este segmento, evidencia un conocimiento histórico que permite tener una visión más amplia de que es la curva logarítmica, y comprender por qué la curva obtenida, que se muestra en la ilustración 4, corresponde a la gráfica de una curva logarítmica bajo una perspectiva diferente a la actual.

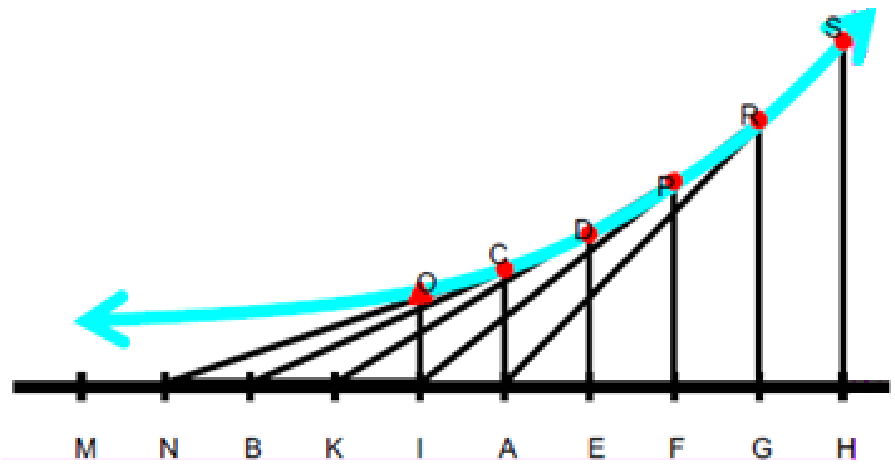


Ilustración 4. Curva logarítmica construida en la propuesta de Agnesi, se asemeja a la representación gráfica de la función exponencial.

El documento número dos (pág. 92), presenta una construcción de la gráfica de la función logarítmica a partir de la relación entre una progresión aritmética y una geométrica con el uso de la geometría dinámica, basándose en el concepto de logaritmo dado por Serret.

A diferencia de la construcción propuesta en el documento número uno, donde la curva se obtiene a partir de triángulos semejantes, cuyas alturas constituyen la progresión geométrica, en este caso la construcción de la progresión geométrica se realiza utilizando circunferencias y el plano cartesiano, de tal manera que la gráfica obtenida es la representación actual de la función logarítmica. Los segmentos de texto que ilustran los pasos seguidos en la construcción se muestran a continuación:

Una representación gráfica del concepto de logaritmo dado por Serret, en un contexto de geometría dinámica, se muestra a continuación. Tomemos la progresión geométrica $1, r, r^2, r^3$, … y la aritmética $0, d, 2d, 3d$, … en donde diremos, con Serret, que logaritmo de 1 es 0, logaritmo de r es d , logaritmo de r^2 es $2d$, etc. En el eje horizontal colocamos la progresión geométrica y en el vertical la aritmética (los logaritmos). (Vargas et al., 2011, pp. 132–133). Este segmento de texto, por una parte, hace referencia a dos objetos que el sujeto debe haber construido con antelación, como son el de progresión geométrica y el de progresión aritmética. Son estos un requisito necesario para poder llevar a cabo la construcción de la gráfica logarítmica.

Por otra parte aparece lo forma de comprender, acción, cuando se enuncia el hecho de colocar en cada eje correspondiente del plano cartesiano las respectivas progresiones, puesto que es un estímulo externo que induce a una actividad concreta que se debe realizar. Sin embargo de acá también puede deducirse que el plano cartesiano es otro objeto involucrado, con el cual debe estar familiarizado el sujeto, sobre el que se realizan acciones.

Construimos geométricamente las potencias de r de la siguiente manera: se traza una circunferencia de radio 1 centrada en el origen O y señalamos un punto P de ella, cualquiera, ubicado en el primer cuadrante; trazamos luego el rayo OP cuyo ángulo de inclinación llamamos θ. La tangente a la circunferencia por P determina un punto de intersección Q con el eje x (Vargas et al., 2011, p. 133) (Ilustración 5). Este segmento es una instrucción que debe seguirse para la construcción de la gráfica, por lo tanto, desde la teoría APOS la podemos asimilar a una acción que se da sobre objetos matemáticos previos, y que mediante la interiorización debería conducir a un proceso.

Entonces: $sec\ \theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{1} = OQ$ *. El movimiento de* P*, en el primer cuadrante, permite recorrer todos los valores de* OQ *mayores que 1:* (Vargas et al., 2011, p. 133) *(Ilustración 5).* Este segmento puede ser catalogado como un proceso, puesto que implica ir más allá de una acción, se debe reflexionar sobre acciones que se realizan sobre varios objetos, llegando a un nivel de comprensión más elevado que de la mera repetición de acciones. Implica esto que el sujeto sea capaz de pensar en las acciones sin necesidad de realizarlas.

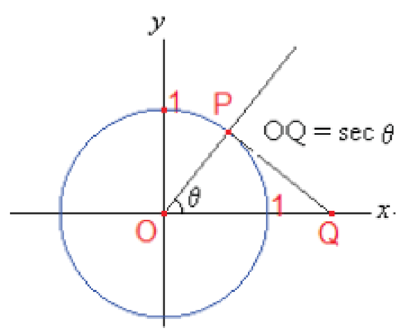


Ilustración 5. Parte 1 de la Construcción Propuesta en el segundo documento.

Construimos el ángulo θ *para cada valor particular de* $r > 1$ *así: determinamos el punto* Q *tal que* $OQ = r$*; con la construcción para trazar tangentes a una circunferencia desde un punto exterior a ella, trazamos la tangente a la circunferencia desde* Q*, con punto de tangencia* P *en el primer cuadrante, y luego, la semirrecta* OP*, la cual tiene el ángulo de inclinación* θ *requerido. Trazando ahora la perpendicular al eje* x *por* Q *se determina el punto de intersección R con el rayo* OP. (Vargas et al., 2011, pp. 133–134) (ilustración 6)

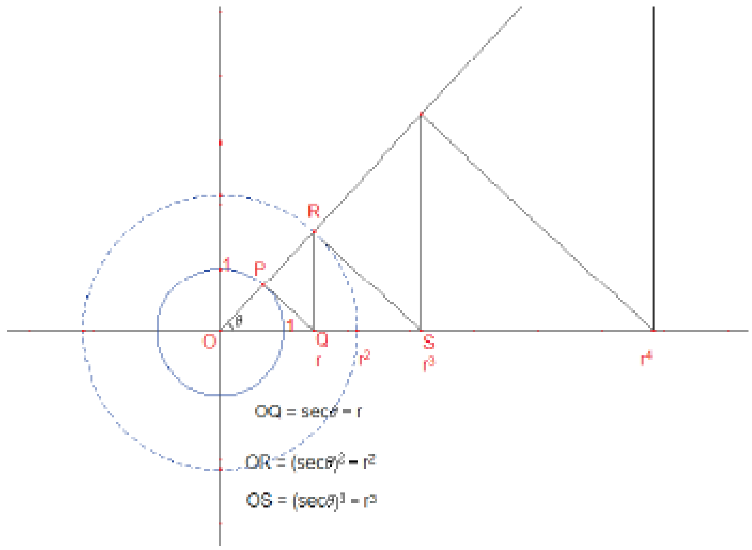


Ilustración 6. Parte 2 de la Construcción Propuesta en el segundo documento

Esta parte se puede catalogar como acción, puesto que son instrucciones externas que deben seguirse para la construcción requerida.

El segmento OR tiene como longitud $(sec\,\theta\,)^2 = \ r^2$. Si de nuevo se traza la perpendicular (ilustración 7) *al rayo OP por R y se determina la intersección S con el eje x se tiene que OS tiene longitud $(sec\,\theta\,)^3 = \ r^3$*. Continuando este proceso se construyen las potencias de r, con exponente entero positivo. (Vargas et al., 2011, p. 134). Dos cosas evidencian un proceso en este segmento de texto, la primera es el hecho de que se debe comprender la equivalencia de las longitudes de los diferentes segmentos con las expresiones secantes relacionadas y las potencias de r. Esto sólo puede darse en el sujeto mediante la interiorización de acciones mentales que lo lleven lograr describir qué y cómo sucede esta construcción y cómo se da esta relación, sin requerir de la construcción externa. La segunda, es la capacidad de comprender que se puede continuar el proceso de construcción de la potencias de r con exponente positivo, lo cual implica la interiorización de las acciones que dieron origen a la construcción de las primeras potencias y poder continuar con el desarrollo de este proceso partiendo ya no de acciones externas sino de la interiorización que se dio de ellas.

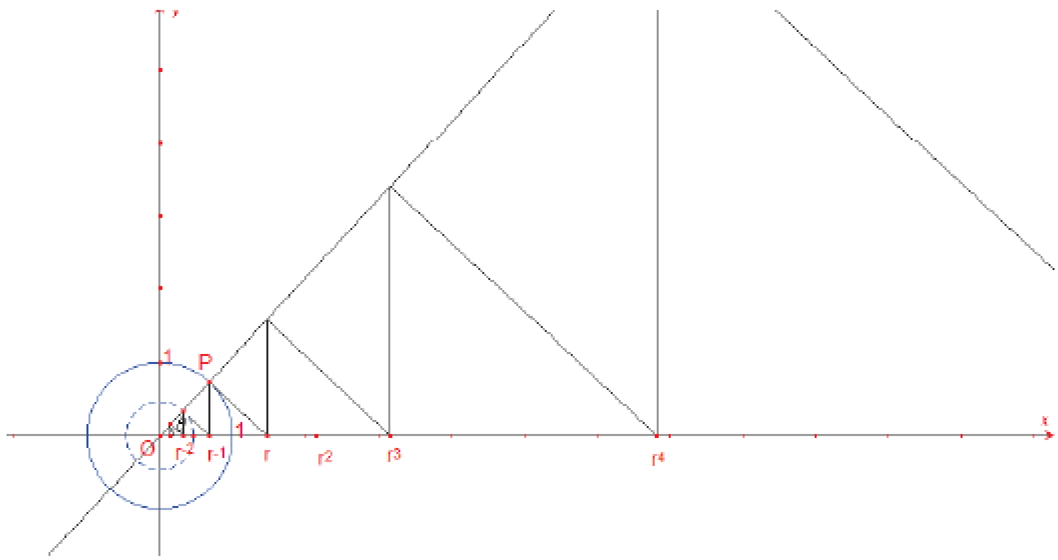


Ilustración 7. Parte 3 de la Construcción Propuesta en el segundo documento

Serret extiende luego el concepto de logaritmo a los números obtenidos para las potencias de r *que tienen exponente entero negativo:* $r^{-1}, r^{-2}, r^{-3}, \ldots$*; para esto se amplía la progresión aritmética a los múltiplos negativos de* d: $-d, -2d, -3d, \ldots$ *y decimos que el logaritmo de* r^{-1} *es* $-d$*, el logaritmo de es* $-2d$*, etc… La construcción geométrica de estas potencias de* r (ilustración 7) *se continúa como antes pero hacia el interior del círculo:* (Vargas et al., 2011, p. 134)

Lograr la construcción de las potencias de r con exponente negativo, aparece solamente enunciado, en el segmento que acá se expone, no se da una instrucción del paso a paso para obtener dichas potencias, esto implica una comprensión del procedimiento que debe seguirse, relacionándolo adecuadamente con la forma como se construyeron las potencias positivas, esto permite afirmar que se da una forma de conocer proceso por parte del sujeto cuando es capaz de llevar a cabo la construcción citada, tal como lo muestra la ilustración 7.

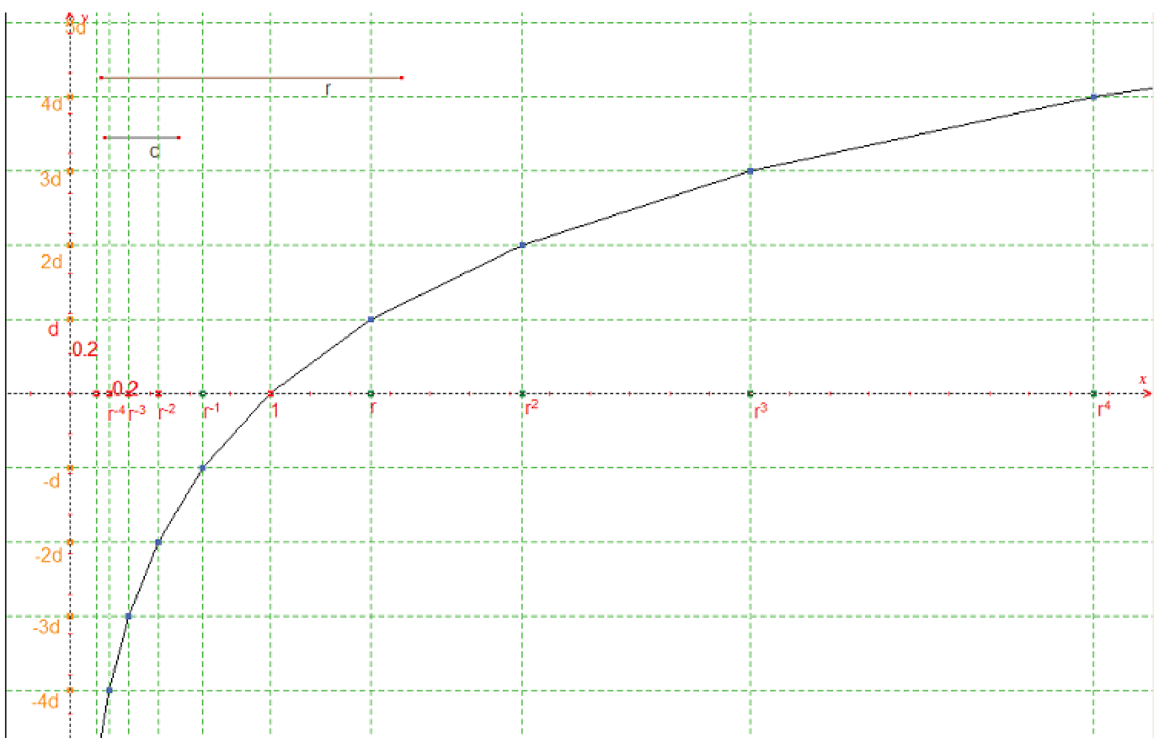


Ilustración 8. Parte 4 de la Construcción Propuesta en el segundo documento

Una vez obtenidas las potencias, graficando los puntos de la forma (r^n, nd)*, con* n *entero y uniendo con segmentos dichos puntos (ilustración 8), se tiene una primera aproximación, con segmentos rectilíneos, a la curva logarítmica.* (Vargas et al., 2011, p. 134)

Este segmento implica una acción en cuanto a la instrucción de unir con segmentos los puntos obtenidos para las parejas ordenadas (r^n, nd). Y acto seguido remite a un proceso, ya que al anunciar la aproximación a la curva logarítmica con segmentos rectilíneos, implica que se tenga un nivel de comprensión mayor a seguir una instrucción, siendo capaz de visualizar la forma de la curva, sin tener que construir cada punto y comprender que esta gráfica corresponde a la función logarítmica. Sin embargo aún no se puede decir que alcance la forma de conocer objeto, puesto que la gráfica se vislumbra como la unión de segmentos, no como una curva continua.

Una vez definido el logaritmo para las potencias enteras de r, Serret define los logaritmos de los números que son medias geométricas entre potencias sucesivas de r (potencias de r con exponente fraccionario) como las correspondientes medias aritméticas. Las medias geométricas se construyen con el método de Descartes (1637/1952). (Vargas et al., 2011, p. 134). La construcción de las medias geométricas sugerida aquí implica un proceso en cuanto que involucra la capacidad de comprender el procedimiento para dicha construcción y la capacidad de imaginar la posibilidad de construir estas medias geométricas de manera continua de tal forma que los puntos obtenidos estén cada vez más cercanos, sin embargo, ante la imposibilidad de construir una infinita cantidad de medias, se debe tener claro, independiente de que físicamente no se pueda reproducir el procedimiento, que siempre es posible construir una media más, tantas veces como se quiera, razón por la cual se puede afirmar que la acción ha sido interiorizada y se piensa sin necesidad de realizarla.

En la (ilustración 9) *se tiene una mejor aproximación a la curva logarítmica, obtenida al añadir los logaritmos de las dos medias geométricas entre potencias enteras, sucesivas, de* r. (Vargas et al., 2011, p. 136)

Este último segmento se seleccionó para resaltar el hecho de que al trazar las medias se tiene una mayor aproximación a la gráfica y por ende una vez se pase por esta fase, se supone que se llega a la forma de conocer objeto, puesto que se podríamos decir que el proceso ha sido encapsulado. Ahora, para que se puedan construir otras curvas del logaritmo teniendo la idea de una base diferente a la original, es necesario que el objeto sea desencapsulado en sus partes, para a partir del proceso que le dio origen obtener las nuevas gráficas.

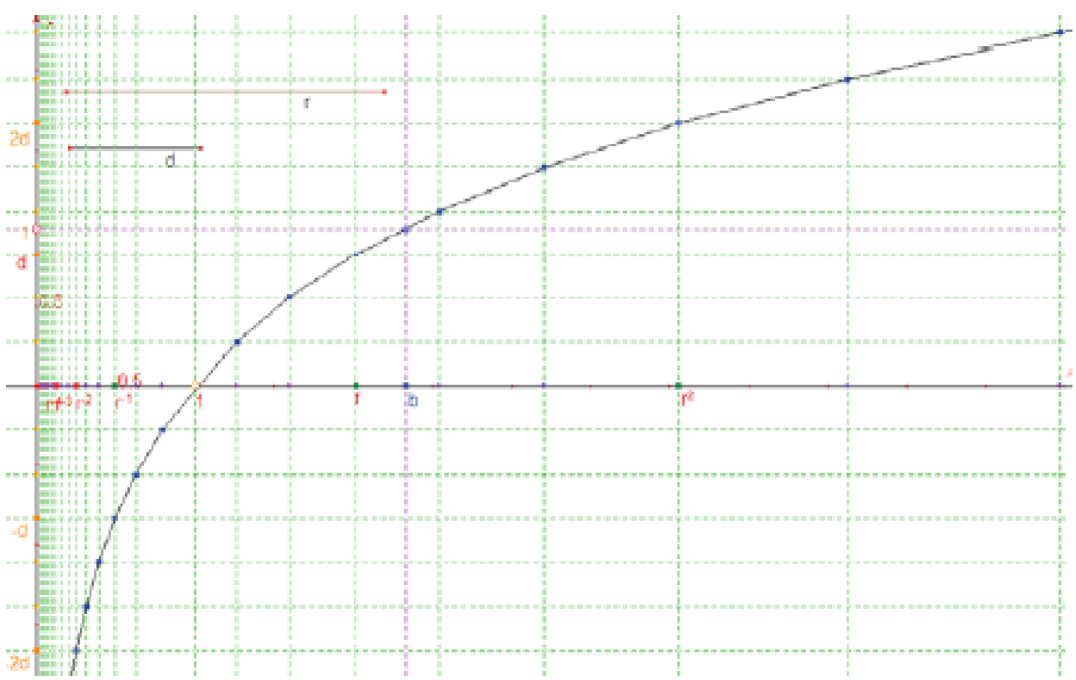
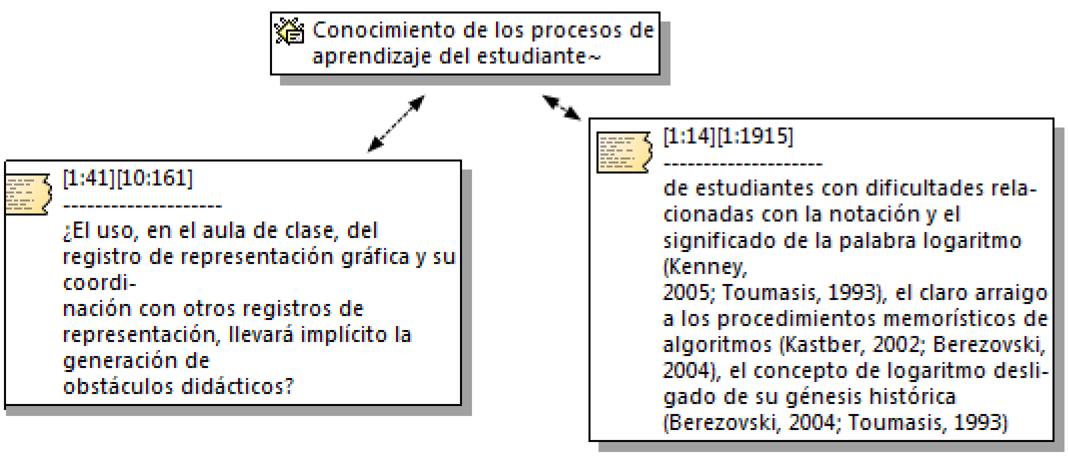


Ilustración 9. Parte 5 de la Construcción Propuesta en el segundo documento

3.2.3. Conocimiento de los procesos de aprendizaje del alumno

Los siguientes segmentos de texto presentes en la *Red 17* hacen mención a las dificultades y problemas que presentan los estudiantes durante el estudio del concepto de logaritmo y la representación gráfica de la función logarítmica, solo se encontraron dos segmentos, uno de ellos expone las consecuencias del uso de un procedimiento memorístico y algorítmico de los logaritmos, que se encuentra asociado a la notación y significado los logaritmos. El segundo segmento es un cuestionamiento que se hacen los investigadores frente a las dificultades didácticas que conllevan la coordinación de diferentes registros de representación del concepto. La información ofrecida es una clara evidencia de las dificultades que como profesores se deben superar y reconocer en el trabajo en aula.



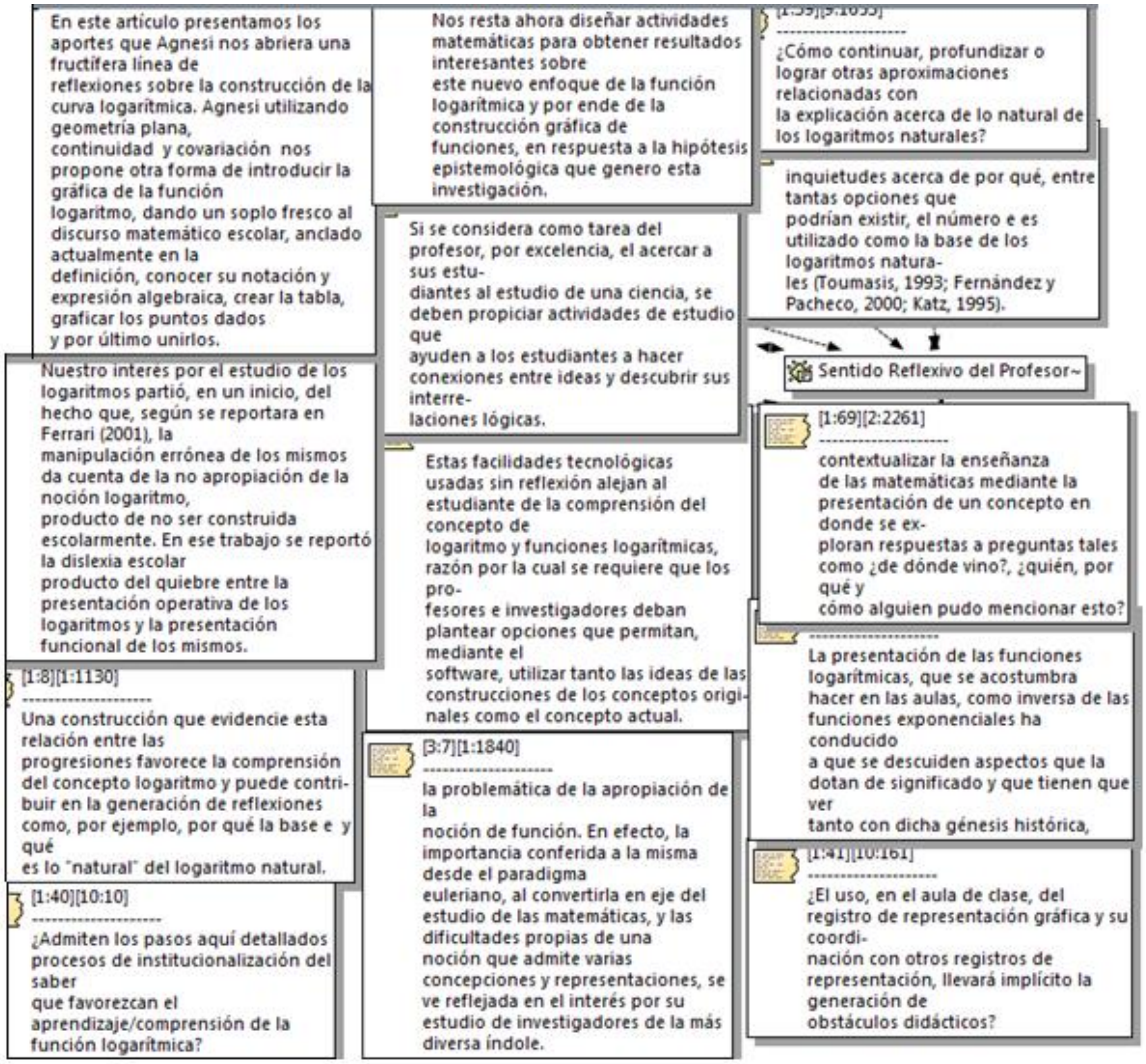
Red 17. Conocimiento de los procesos de aprendizaje del estudiante.

3.2.4. Sentido reflexivo del Profesor

Esta última categoría que se decidió proponer como parte del conocimiento didáctico del contenido del profesor, son reflexiones que el profesor debe hacerse, sobre la naturaleza de la representación gráfica de la función logarítmica, para su enseñanza, sin embargo algunos de estos cuestionamientos se pueden trasladar a otros conceptos matemáticos, el primero de ellos es la riqueza en el conocimiento de la naturaleza histórica del concepto, que permiten actividades innovadoras y conexiones con otros conocimientos de la misma área o de otros, como lo es en el caso de la modelación de fenómenos físicos.

El diseño de actividades para el aula, deben garantizar la construcción de un concepto de manera correcta y en lo posible sin la generación de obstáculos o dificultades, para el caso de la construcción de la representación de la gráfica de la función logarítmica. La información que ofrecen los investigadores no debe desconocerse, por el contrario debería acogerse para mejorar la formulación de actividades.

Uno de los segmentos de texto contenidos en esta red (Red 18) fue el que llevó a la reflexión de por qué no caracterizar un proceso de comprensión a través de una teoría que favorezcan los procesos de aprendizaje y formulación de actividades.



Red 18. Conocimientos asociados al sentido reflexivo del profesor

4. CONCLUSIONES

El desarrollo de esta investigación, permitió obtener una red de conocimientos, desde una caracterización de la información contenida en los documentos analizados y el empalme con conocimientos reconocidos desde la teoría del Conocimiento Didáctico de Contenido. Los elementos específicos de la representación gráfica de la función logarítmica identificados en cada categoría de análisis constituyen un sistema de análisis que permite poner en evidencia (en este caso desde la literatura en EM) un conjunto de conocimientos propuestos para integrar el CDC del profesor de matemáticas en formación.

La red de conocimientos puede trasladarse y complementarse, como un mecanismo de caracterización de los conocimientos que deben poseer los profesores respecto a otros conceptos y objetos matemáticos vistos desde su desarrollo histórico. Lo anterior propendería por (1) el conocimiento del desarrollo histórico de un concepto, (2) pero no solo a nivel de conocer sino de herramienta para proponer actividades de aula desde el mismo desarrollo.

El conocimiento de la historia de los conceptos de logaritmo y función logarítmica genera un visión diferente y enriquecida, que permite ver estos conceptos de manera diferente y con mayor significado que el que tienen estos conceptos cuando se manipulan solamente desde su definición formal, como objetos matemáticos dados, desconociendo que estos surgen mediante un proceso que llevó cientos de años para llegar al estado actual. Además al examinar las publicaciones concernientes a las formas de abordar la construcción de la representación gráfica de la función logarítmica, diferentes a las usuales. Se encuentra por un lado la construcción de la gráfica de la función a partir de triángulos semejantes, y por otra la construcción de la función con elementos de geometría dinámica mediante la construcción de una progresión geométrica a partir de circunferencia. Para el caso del documento uno (Pág. 92), se hace énfasis en la curva logarítmica, como en la antigüedad. Mientras que en la segunda construcción dado que se enfatiza en las parejas ordenadas, allí se tiende a construir la gráfica de la función logarítmica actual. Esto nos permitió enriquecer los conocimientos de dichos conceptos, posibilitándonos descubrir nuevas alternativas para su enseñanza en nuestra misión docente.

La información contenida en los segmentos de texto encontrados en las estrategias de enseñanza usuales y en el sentido reflexivo del profesor, permite reflexionar sobre la práctica docente especialmente en lo referido a enseñar conceptos matemáticos solamente desde lo formal, muchas veces limitado a describir y transmitir los contenidos establecidos por algún texto, desligando dichos conceptos de hechos de la vida real y sobre todo del contexto que posibilitó el surgimiento de los mismos, genera que sea vea la matemática como algo meramente abstracto y carente de significado cercano a los estudiantes y que en ellos genera la sensación de ver la matemática como algo inútil para su vida y de uso exclusivo para un reducido número de personas dedicadas al desarrollo científico.

Estudiar la evolución de un concepto y saber que son varias las etapas por las cuales pasa, superando diferentes concepciones e interpretaciones y que el significado que se le atribuye al objeto matemático dependen muchas veces de visiones personales, que con el tiempo se van nutriendo con otras concepciones y miradas diferentes. De tal manera que la construcción de un concepto no es fácil ni inmediata, sino que afronta diferentes problemas y cuestionamientos que hacen que vaya cambiando hasta llegar a su determinación actual; nos hace como profesores reflexionar sobre lo que esperamos de nuestros estudiantes respecto a la comprensión de los conceptos matemáticos, las formas como se construyen los conceptos, las etapas que pueden atravesar en su apropiación y la evolución que tiene el concepto en la mente da cada estudiante, de tal forma que nos hace pensar en las diferente concepciones que pueden tener profesores y estudiantes respecto a un concepto, dejando de lado la ambición de que todos se apropien de un concepto de la misma manera y le otorguen el mismo significado. Esto lleva a tener en cuenta que cada persona enfrenta problemas diferentes en la comprensión de los conceptos matemáticos, lo cual conduce a ver el aprendizaje como un acto que aunque pueda darse en forma colectiva, depende en gran medida de factores individuales.

Con base en la teoría APOS y los dos documentos analizados en este trabajo es posible hacer una caracterización de las formas de conocer, acción proceso y objeto presentes en la construcción de la representación gráfica de la función logarítmica a partir de la relación entre una progresión geométrica y una aritmética. Se evidencian acciones que identificamos como seguir instrucciones, tales como el trazo de rectas, la ubicación de puntos, la construcción de triángulos semejantes, etc.; las cuales se debe realizar de manera repetitiva. Sin embargo, ir más allá del seguimiento de una instrucción en las construcciones, lleva a reflexionar como el proceso de construcción se puede dar manera autónoma, sobre qué es lo que se está haciendo, implica una visión de la relación del trazado con más puntos que definan la curva que se está construyendo, sin necesidad de realizarlo de manera física. Y finalmente asociar los objetos matemáticos y las relaciones entre ellos las formas de conocer, que incluye el aceptar la repetición de construcción de puntos intermedios entre los ya obtenidos, llevada al infinito, genera, desde la perspectiva de los investigadores, una forma de conocer la gráfica de la función logarítmica.

Como posibilidad de proyección del trabajo se establece dos propuestas, la primera de ellas es el contemplar el sistema de categorías de análisis propuesto, con el fin de analizar otras propuestas dentro de la literatura en Educación Matemáticas sobre la construcción de objetos o conceptos matemáticos vistos desde su desarrollo histórico.

La segunda propuesta se da para el caso de la forma de conocer esquema, ya que para esta forma de conocer lo que ocurre es que el sujeto organiza “mentalmente” unos grupos de acciones, procesos, objetos, que son llamados esquemas. Se puede intentar hacer investigaciones que examinen la forma de conocer esquema de la función logarítmica. Lo anterior con el fin de que pueda ser utilizado en la solución de situaciones y fenómenos en donde tenga sentido esta forma de la función.

5. BIBLIOGRAFÍA

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 1, 1-32.

Abrate, R., & Pocholu, M. (2007). Los logaritmos, un abordaje desde la Historia de la Matemática y las aplicaciones actuales. *Experiencias, Propuestas Y Reflexiones Para La Clase de Matemáticas*, 111–136.

Berezovski, T. (1991). *An inquiry into high school students ' understanding of logarithmis*. M. Sc, Lviv State University,.

Bodí Pascual, S. D. (2006). *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales. Samuel David Bodí Pascual.* Universidad de Alicante.

Castañeda, A., Rosas, A., & Molina, G. (2010). El discurso matemático escolar de los logaritmos en libros de texto. *Premisa. 12-44*, 3–18.

Escobar, N. (2012). *Elementos historicos para la enseñanza de la función logaritmica en la educación básica.* Unibversidad del Valle.

Ferrari, M. (2001). *Una Visión Sociopeistemológica. Estudio de la Función Logaritmo*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politecnico NAcional, México D.F.

Ferrari, M., & Farfán, R. (2008). Un Estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la cosntrucción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *11 (3)*, 309–354.

Gacharná, O. (2012). *Algunas consideraciones didácticas sobre el concepto de logaritmo y de función logarítmica y sus posibilidades en la educación básica y media*. Universidad Nacional de Colombia.

González, M., & Vargas, J. (2007). Segmentos de la historia : la función logarítmica. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria: Universidad Del Valle.*, *XV (002)*, 129–144.

López, R., & Ferrari, M. (2007). La Función Logaritmo bajo la Perspectiva de la Construcción dada por Agnesi (1748). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *20*, 450–455.

Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *6 (3)*, 221–271.

Nava, R., & Reyes, A. (2009). Creencias y conocimientos acerca de precálculo y cálculo de un grupo de profesores de bachillerato. *El Cálculo Y Su Enseñanza. Cinvestav Del Instituto Politécnico Nacional, México D.F*.

Oliveira, A. (2005). *O ensino dos logaritmos a partir de uma perspectiva histórica*. Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Pinto, J. (2010). *Conocimiento Didáctico del Contenido sobre la representación de datos estadísticos: Estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación*. Universidad de Salamanca.

Tapia, J. (2003). Historia de los logaritmos. *Apuntes de Historia de Las Matemáticas*, *2 (2)*, 5–22.

Vargas, J. (2012). *Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales*. Universidad de Salamanca.

Vargas, J., Castañeda, M., & Novoa, J. (2014). Un análisis de la representación gráfica de la función logarítmica. historia y conocimiento didáctico de contenido. In *Investigación en Educación Matemática XVIII. Salamanca: SEIEM.* (p. 605). Salamanca , españa.

Vargas, J., Pérez, M., & González, M. (2011). El logaritmo: ¿cómo animar un punto que relacione una progresión geométrica y una aritmética? In P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 129–138). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.