ANÁLISIS DE LA FALTA DE SIMETRÍA DEL ELECTROMAGNETISMO CLÁSICO Y SU SOLUCIÓN RELATIVISTA: TENSOR DE CAMPO ELECTROMAGNÉTICO.

Edwin José Vargas Moreno
Edwin Sebastián Barrera Mendivelso

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BOGOTÁ D.C.
2016

ANÁLISIS DE LA FALTA DE SIMETRÍA DEL ELECTROMAGNETISMO CLÁSICO Y SU SOLUCIÓN RELATIVISTA: TENSOR DE CAMPO ELECTROMAGNÉTICO.

Por:

Edwin José Vargas Moreno

Edwin Sebastián Barrera Mendivelso

Trabajo de grado para optar por el titulo de:

Licenciado en Física.

Asesor:

M.Sc. Yesid Javier Cruz Bonilla

Linea de Investigación:

La enseñanza de la Física y la relación Física-Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
BOGOTÁ D.C.
2016

Dedico este trabajo

A mis queridos padres, día a día doy gracias a Dios por permitirme estar a su lado, son mi felicidad y orgullo, sin su apoyo y confianza no hubiera podido cumplir este sueño, a ellos les debo lo que soy.

Luz Marina Mendivelso
Luis Agustín Barrera

A mi linda hermana, siempre me esforzare y velare por que alcance mejores logros de los que yo podre.

Laura Y. Barrera.

He sido premiado con estos hermosos seres, dedicarles mi esfuerzo y todos mis logros es tan solo un poco de tanto que merecen.

Edwin Sebastian Barrera M.

Agradecimientos

En primer lugar, agradecemos a nuestros familiares y seres queridos que, con su apoyo incondicional durante todo el proceso de formación personal, académico y profesional, nos han permitido llegar a este punto, especialmente a nuestros padres María Mercedes Moreno Arias, Luz Marina Mendivelso Abril y Luis Agustín Barrera Albarracin quienes con su amor, confianza, humildad, perseverancia y sacrificio nos han inculcado incontables valores y nos han enseñado a valorar hasta el mas pequeño detalle que nos es presentado en la vida. A nuestros hermanos quienes, con su empatía y constante compañía, notaron nuestro gran esfuerzo y nos enseñaron a no desfallecer sin importar las circunstancias. Es por ellos y gracias a ellos que logramos alcanzar este gran sueño.

Igualmente, queremos agradecer a nuestro asesor Yesid Javier Cruz Bonilla quien con su conocimiento, consideración y sus constantes aportes hizo posible la realización de este trabajo y nuestro crecimiento profesional, al doctor Fabio Vélez Uribe a quien admiramos y respetamos por su experiencia y amplio conocimiento y a todos los profesores que nos han acompañado durante este proceso académico ya que con ellos aprendimos a dar lo mejor de nosotros en todo lo que emprendamos en la vida.

A todos nuestros amigos que nos aportaron innumerables experiencias, especialmente a Esmeralda Sánchez y Emmanuel Cortés por su apoyo incondicional en los buenos y malos momentos, porque siempre estuvieron con nosotros estudiando, riendo y sufriendo, gracias a todos ellos nos fue posible superar los retos que se nos presentaban durante nuestro proceso formativo en la universidad Pedagógica Nacional.

Sin mas que decir,

Gracias

Edwin J. Vargas M.
Edwin S. Barrera M.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE

1.Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central.
Titulo del documento	Análisis de la falta de simetría del electromagnetismo clásico y su solución relativista: Tensor de campo electromagnético.
Autor(es)	Barrera Mendivelso, Edwin Sebastián; Vargas Moreno, Edwin José.
Director	Cruz Bonilla, Yesid Javier.
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2016. 113 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	FALTA DE SIMETRÍA, LEYES ELECTROMAGNÉTICAS, ELECTROMAGNETISMO CLÁSICO, TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD, PRINCIPIO DE RELATIVIDAD, SISTEMAS DE REFERENCIA, TENSOR DE CAMPO ELECTROMAGNÉTICO, COVARIANZA.

2.Descripción

Desde comienzos del siglo XIX innumerables acontecimientos propiciaron en la ciencia, especialmente en física, un abismal y continuo desarrollo. Los descubrimientos experimentales de la estrecha relación entre fenómenos eléctricos y magnéticos serían la base de la teoría electromagnética de Maxwell y este daba explicación a la naturaleza de la luz concibiéndola como una onda electromagnética producto de oscilaciones entre campos eléctricos y magnéticos. Pensar en la luz como una onda implicaba suponer la existencia de un medio que permitiera su propagación en el espacio vacío, el éter fue este medio.

El malestar y la preocupación de los científicos de la época empezarían a presentarse con la suposición del éter como sistema de referencia absoluto sobre el cual debían hacerse todas las mediciones físicas de los demás sistemas de referencia. Poincaré expondría abiertamente este problema argumentando la imposibilidad de saber el verdadero estado de movimiento de un sistema de referencia y los problemas tanto físicos como matemáticos que llevaba concebir el movimiento relativo de los cuerpos, especialmente de los cuerpos cargados eléctricamente.

Por un lado, las leyes electromagnéticas no eran covariantes bajo las ecuaciones de transformación de Galileo, por consiguiente, no correspondía al principio de Relatividad galileano sobre el cual reposaba la mecánica newtoniana. Por otro lado, el fenómeno observado producto del estado de movimiento de una carga en distintos sistemas de referencia arrojaba resultados que no correspondían con lo que dictaba la lógica y la razón. La electrodinámica de los cuerpos en movimiento según la teoría electromagnética de Maxwell presentaba una falta de simetría y era sustentada por los inconvenientes mencionados.

Albert Einstein, con la formulación de la teoría especial de la Relatividad, traería consigo una nueva manera de comprender el comportamiento de los fenómenos naturales. Para Einstein, que la forma de toda ley física fuera la misma para cualquier sistema de referencia y la constancia de la velocidad de la luz eran hipótesis suficientes para derivar una electrodinámica de cuerpos en movimiento libre de contradicciones y es ahí donde surgen las bases de esta nueva teoría física dando solución a los problemas ya mencionados, a los resultados negativos de los distintos experimentos encaminados a mostrar el movimiento relativo de la tierra en el medio éter, descartando la idea del éter como sistema de referencia absoluto y afirmando que lo único que importa son los movimientos relativos.

Con la Relatividad Especial el fenómeno electromagnético adquiere realidad física siendo este caracterizado solo como eléctrico o como eléctrico y magnético dependiendo del sistema de referencia sobre el cual sea medido y matemáticamente es definido en forma tensorial debido a que tiene lugar en el continuo *espacio-tiempo* de Minkowski. En el presente trabajo se expone un análisis concerniente a los inconvenientes presentados por la teoría electromagnética de Maxwell al ser aplicada a cuerpos en movimiento y la solución que la teoría especial de la Relatividad le da a dichos inconvenientes.

3.Fuentes

- BELENDÉZ, A. (2008). La unificación de luz, electricidad y magnetismo: la ``síntesis electromagnética'' de Maxwell. Revista Brasileira de Ensino de Física, 30(2), 2601. Universidad de Alicante, Alicante, España.
- CABRERA, A. H. (2009) Electrodinámica Clásica. Universidad de la Laguna, Tenerife. Islas Canarias. Recuperado el 16 de 9 de 2016, de: https://ajhernan.webs.ull.es/electrodinamica.pdf
- CACHÓN G., V. (2013) Las analogías en la formulación de la teoría electromagnética de la luz de Maxwell. 7(14), pp. 11-33. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey Campus Ciudad de México Distrito Federal, México.
- CARIÑERA, J. F. (2004) \{Emmy Noether: innovación y creatividad en ciencias}. La Gaseta de la RSME, 7(2), pp. 347-369.
- CHINEA, C. S. (2009). Partículas en un campo electromagnético. Transformación de Lorentz de los vectores campo eléctrico y campo magnético.} [en línea] Disponible

en http://casanchi.blogspot.com.co/

- DE LA PEÑA, L. (1965). Simetría y leyes en la conservación de la Física. Revista de la universidad de México, 20(2), pp. 9-11. México.
- EINSTEIN, A. (1919). Que es la teoría de la Relatividad. (Ana Goldar, trad.). Teorema, ANTONI BOSCH EDITOR, pp. 19-23.Barcelona, España.
- EINSTEIN, A. (1922). Sidelights on Relativity. Albert Einstein. (Jeffery, G. B. \& Perrett, W., trad.) METHUEN \& CO. LTD. London. Recuperado el 3 de 2 de 2016, de: https://archive.org/details/sidelightsonrela00einsuoft
- EINSTEIN, A. (2005). Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento (Hernando Quevedo, trad.). ICN-UNAM. (Obra original publicada en 1905)
- FAUSTO O., J. \& SOBRINO V., M. A. (2003). Apuntes de Electrodinámica Clásica. Campo Electromagnético y Relatividad. 2da ed. Disponible en: http://mural.uv.es/masoro/edclas/ed2r04.pdf
- FEYNMAN, R. \& LEIGHTON, R. (1998). Física: Electromagnetismo y materia. Addison Wesley Longman de México S.A. México
- GÓMEZ P. \& GONZÁLEZ E. (2012). Las ecuaciones de Maxwell. [en línea] Disponible en http://eltamiz.com/libros/
- GRANÉS S., J. (1992) La revolución conceptual en la Física de comienzos de siglo. Ideas y Valores, Universidad Nacional de Colombia, 41(87-88), pp. 89-136. Bogotá, Colombia.
- GREINER, W. (1998). Classical electrodynamics. United States of America, Springer-Verlag New York, Inc.
- GUERRA, M., CORREA, J., NÚÑEZ, I \& SCARON, J. M. (1985). Física: Elementos fundamentales. Tomo II. Editorial Reverté S.A. Barcelona, España.
- JÍMENEZ, J.L., AQUINO, N. \& CAMPOS, I. (Sin fecha). Heaviside y las ecuaciones de Maxwell. [en línea] Disponible en http://www.izt.uam.mx/newpage/contactos/anterior/n33ne/pdf/heavi.pdf
- LANDAU L.D. \& LIFSHITZ (1992). Física teórica: Teoría clásica de los campos. Editorial Reverté S.A., 2, 2da ed., Barcelona, España.
- MENÉNDEZ, J. (1920). Relativity the special and general theory. Recuperado el 3 de 2 de 2016, de: http://www.ibiblio.org/ebooks/Einstein/Einstein_Relativity.pdf
- MUÑOS, J. B. (Sin fecha). Leyes de Maxwell. Universitat Oberta de Catalunya. Recuperado el 22 de 9 de 2015, de: http://www.astrosurf.com/jupegosa/libros/Leyes-de-Maxwell.pdf
- POINCARÉ, J. H. (Sin fecha). Los principios de la Física matemática. (Juan Carlos Orozco, trad.)
- PURCELL E. M., (1988). Berkeley Physics Course: electricidad y magnetismo. Editorial Reverté S.A., 2, 2da ed., Barcelona, España.

- RINDLER, W. (1982). Introduction to special relativity. United States of America, Oxford University Press, New York.
- SÁNCHEZ R., J. M. (1983) El origen y desarrollo de la Relatividad. Alianza Editorial. Madrid, España.
- SÁNCHEZ, O. A. (2013). Poincaré y la teoría de la Relatividad: Compartiendo algunas impresiones personales. Miscelánea matemática 58, pp. 21-46. Recuperado el 22 de noviembre de 2015, de: http://5vmmap.eventos.cimat.mx/sites/5vmmap/files/Relatividad\&Poincare.pdf
- TEJEIRO S., J. M. (2004). Sobre la teoría especial de la Relatividad. Universidad Nacional de Colombia. Recuperado el 29 de 4 de 2016, de: https://gnfisica.files.wordpress.com/2010/08/sobre_la_teoria_Relatividadtejeiro.pdf
- UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL. Plan de desarrollo institucional 2014-2019. Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional.
- VELEZ U., F. (2012). Apuntes de Relatividad. Corcas Editores SAS. Bogotá, Colombia.

4.Contenidos

El presente trabajo de grado se ha centrado en el estudio de temas concernientes al electromagnetismo clásico y la teoría especial de la Relatividad enfocándose especialmente en la electrodinámica relativista, es por lo anterior que ha sido divido en tres capítulos:

A fin de comprender los conceptos físicos y matemáticos que sustentan la teoría electromagnética de Maxwell, en el primer capítulo se hace un breve contexto histórico de la concepción de los fenómenos eléctricos y magnéticos explicando los indicios experimentales que empezarían a mostrar la correspondencia existente entre estos, seguidamente se hace una descripción de las 4 ecuaciones que sustentan la teoría mencionada y, por último, son explicados algunos problemas que se empezaban a encontrar respecto a esta nueva teoría cuando era analizada para cuerpos en movimiento según distintos sistemas de referencia.

En el segundo capítulo son resaltadas distintas consideraciones que antecederían la formulación de la teoría especial de la relatividad por parte de Albert Einstein exponiendo un análisis respecto a la concepción de las ecuaciones de transformación de Lorentz y mostrando como estas sustentan la teoría mencionada. Por último, se realiza la deducción de las ecuaciones de transformación de los campos haciendo evidente la estrecha relación entre fenómenos eléctricos y magnéticos y explicando la concepción del fenómeno electromagnético.

Centrándonos como tal en la parte esencial del trabajo, en el tercer capítulo se da explicación a la falta de simetría concebida en la teoría electromagnética de Maxwell entablando una discusión entorno a la solución que la teoría especial de la relatividad le da a esta falta de simetría y exponiendo un análisis de la concepción física y matemática del fenómeno electromagnético según dicha teoría. Es por lo anterior que se procede a hacer la reconstrucción del tensor de campo electromagnético y se comprueba la covarianza de dicho tensor verificando que el fenómeno electromagnético es igual para distintos sistemas de referencia inerciales, esto nos permitirá deducir las ecuaciones de la teoría electromagnética de Maxwell y constatar la solución a la falta de simetría del electromagnetismo clásico.

5.Metodología

La metodología propuesta para el desarrollo de este trabajo se basó en un total de 4 fases descritas a continuación:

Fase 1.

En esta fase se procedió a recopilar la información concerniente a la teoría electromagnética de Maxwell, la teoría especial de la relatividad y la electrodinámica de los cuerpos en movimiento con el fin de tener las bases para sustentar el marco teórico de la investigación.

Fase 2.

A parte de seguir recopilando información que aporte al trabajo, se analizara y organizara la información obtenida con el propósito de escoger lo más importante y relevante para la investigación. A la par se comenzara con un análisis referente a los fundamentos de la teoría electromagnética de Maxwell.

Fase 3.

En esta fase se continuara con lo propuesto en la fase 2 añadiendo una discusión respecto a las consideraciones que conllevarían a la formulación de la teoría especial de la relatividad y se iniciara con la transformación de los campos eléctricos y magnéticos a fin de mostrar la concepción de estos fenómenos para distintos sistemas de referencia inerciales.

Fase 4.

Finalmente, se procederá explicando la falta de simetría presentada por la teoría electromagnética de Maxwell y como es solucionada gracias a la teoría especial de la relatividad, seguidamente se describirá la concepción física y matemática del fenómeno electromagnético en el continuo *espacio-tiempo* constatando así la solución a la falta de simetría del electromagnetismo clásico.

6.Conclusiones

1. El análisis en torno a explicar la no covarianza de las leyes electromagnéticas bajo las ecuaciones de transformación de galileo, el movimiento de una carga respecto a un observador y la observación del estado de movimiento de una carga en distintos sistemas de referencia permitió comprender el serio dilema por el que pasaba la Física clásica además de encontrar que esta no podía dar solución a los distintos problemas presentados.
2. La falta de simetría del electromagnetismo clásico era resuelta por completo con la formulación de la teoría especial de la Relatividad, no sólo al solucionar la no covarianza de las leyes electromagnéticas, sino al sustentar la existencia del fenómeno electromagnético como ente unificador de los campos eléctricos y magnéticos y como única realidad física para todo observador sin importar el sistema de referencia inercial sobre el cual sea medido. El que en un sistema de referencia sean medidos efectos puramente eléctricos mientras en otro se miden efectos eléctricos y magnéticos no es indicio de que se observen fenómenos diferentes, ambas mediciones hablan de un único y real fenómeno, el electromagnético, solo que, dependiendo del sistema de referencia, este es caracterizado de manera diferente.
3. No es necesario saber el movimiento real de los cuerpos, basta con los movimientos relativos para poder describir los fenómenos naturales, es por esto que el movimiento relativo entre una carga y un observador siempre arrojara el mismo resultado y este es la generación de un campo eléctrico y uno magnético. Adicionalmente, las cargas al interior de los laboratorios terrestres no generan campos magnéticos dado que su movimiento se da respecto a los sistemas de referencia ajenos al movimiento orbital de la tierra y no respecto a los observadores ubicados al interior de dichos laboratorios terrestres.
4. Se concluyó que el campo electromagnético es un fenómeno independiente de los sistemas de referencia, su existencia en parte se debe a la constancia de la velocidad de la luz y al considerar el tiempo no como un parámetro para cualquier sistema de referencia sino como una variable dinámica. La teoría electromagnética de Maxwell presentaba una falta de simetría con las ecuaciones de transformación galileanas debido a que, en estas, el tiempo era considerado absoluto, como un parámetro. Con la formulación de la teoría especial de la Relatividad, las ecuaciones de transformación de Lorentz mostraban que tanto el tiempo como las coordenadas espaciales eran necesarias para medir y describir los fenómenos naturales según distintos sistemas de referencia, es por esto que el campo electromagnético tiene lugar en el *continuo espacio-tiempo* y el tensor de

campo electromagnético que modela tal fenómeno, lo pone en clara evidencia al expresar las relaciones entre las coordenadas espacio-temporales como tensiones eléctricas y magnéticas generadas en cada punto del *espacio-tiempo*, esto es, la aparición de campos eléctricos y magnéticos.

5. La importancia de este trabajo reside en lo valioso que es para el Departamento de Física que sus estudiantes adquieran una mirada mucho más crítica y analítica respecto a las distintas teorías físicas que surgieron como explicación a todos esos fenómenos naturales que desde la Física clásica no podían ser explicados. En lo que nos concierne, el origen de la teoría especial de la Relatividad fue trascendental para dar explicación al fenómeno electromagnético y presentar a la comunidad científica una nueva mirada del mundo físico. Por lo anterior, esperamos que este trabajo de grado sea un aporte significativo en el proceso educativo de los estudiantes del Departamento de Física que deseen profundizar en las investigaciones enfocadas en la teoría especial de la Relatividad, particularmente en la electrodinámica de cuerpos en movimiento.

Elaborado por:	Edwin José Vargas Moreno. Edwin Sebastián Barrera Mendivelso.
Revisado por:	Yesid Javier Cruz Bonilla.

Fecha de elaboración del Resumen:	24	11	2016

Índice de símbolos

A continuación, con el fin de facilitar al lector la búsqueda de las variables y magnitudes físicas que posteriormente encontrara en los distintos cálculos realizados, se dan a conocer los símbolos y las constantes físicas utilizadas en el presente trabajo.

Símbolos con letras latinas y griegas.

Símbolo	**Termino**	**Unidad SI**
$\overrightarrow{E}$	Campo eléctrico	N/C
$\overrightarrow{ds}$	Vector diferencial de superficie	m^2
Q	Carga neta encerrada	C
dV	Diferencial de volumen	m^3
$\overrightarrow{\nabla}$	Operador gradiente	m^{-1}
$\overrightarrow{B}$	Campo magnético	T
ε	Fuerza electromotriz inducida	V
Φ	Flujo de campo magnético	V/s
$\overrightarrow{dl}$	Vector diferencial de longitud	m
$\overrightarrow{J}$	Densidad de corriente	A/m^2
S	Sistema de referencia inercial no primado	$---$
S'	Sistema de referencia inercial primado	$---$
x, y, z	Coordenadas cartesianas	m
$\overrightarrow{J}$	Vector densidad de corriente	A/m^2
t	Tiempo	s
γ	Factor de Lorentz	Adimensional
v	Velocidad relativa entre sistemas de referencia	m/s
Λ	Matriz de Lorentz	$---$
$\overrightarrow{v}$	Vector velocidad	m/s
$\times$	Operador rotacional	$---$
$\overrightarrow{F}$	Fuerza generada por una carga	N
$\overrightarrow{u}$	Velocidad de una carga o partícula	m/s
S	Acción de un cuerpo o partícula	Js

Símbolo	Termino	Unidad SI
L	Lagrangiano de un sistema	J
δ	Operador de variación	$---$
ds	Intervalo diferencial	m
m	Masa	Kg
A	Cuadripotencial magnético	N/A
$\overrightarrow{A}$	Potencial vectorial magnético	N/A
ϕ	Potencial escalar magnético	N/A
∇	Operador gradiente	$---$
Λ^T	Transpuesta de la matriz de Lorentz	$---$
∂_λ	Operador derivada covariante	$---$
J	Cuadrivector densidad de corriente	$\mathrm{A/m^2}$
K	Constante arbitraria	$---$
$\overrightarrow{r}$	Vector posición	m
T	Energía cinética	J
U	Energía potencial	J
g^{ik}	Tensor métrico	$---$

Constantes Físicas.

Símbolo	Termino	Valor	Unidad SI
ε_o	Permitividad eléctrica	$8{,}85x10^{-12}$	$\mathrm{C^2/Nm^2}$
μ_o	Permeabilidad magnética	$4\pi \times 10^{-7}$	$\mathrm{N/A^2}$
c	Velocidad de la luz en el vació	3×10^8	m/s

Subíndices y Superíndices

Símbolo	Termino
A_μ	Componente covariante de un vector en un espacio de μ-dimensiones
$F_{\mu\nu}$	Tensor covariante de campo electromagnético en S
A^μ	Componente contravariante de un vector en un espacio de μ-dimensiones
$F^{\gamma\delta}$	Tensor contravariante de campo electromagnético en S
$F'^{\mu\nu}$	Tensor contravariante de campo electromagnético en S'

Índice de figuras

Índice general

Introducción

Desde inicios del siglo XIX empezaron a descubrirse innumerables acontecimientos que propiciarían el continuo avance de la ciencia y la tecnología además de permitir transformar la concepción que se tenia respecto a los distintos fenómenos naturales. La Física fue una de las áreas del conocimiento mas favorecidas. Los descubrimientos experimentales que mostraban una relación existente entre los fenómenos eléctricos y magnéticos fueron cruciales para que Maxwell se interesara por estudiar lo concerniente a la relación entre electricidad y magnetismo. En 1873 publico su tratado de electricidad y magnetismo[1] con el cual, a partir de distintas ecuaciones, unificaba estos dos fenómenos además de deducir la existencia de ondas electromagnéticas producto de perturbaciones de los campos eléctricos y magnéticos y definir la luz como un tipo de estas ondas.

Maxwell, con su trabajo, daba cabida a la concepción de un nuevo fenómeno, el electromagnético, sustentado por las ecuaciones publicadas en su tratado. Una década despúes, el matemático Heaviside simplifico todas estas ecuaciones en un total de 4 que son las que actualmente conocemos y utilizamos para describir los fenómenos eléctricos y magnéticos. La Física de aquel entonces reposaba en la mecánica newtoniana y esta correspondía con el principio de Relatividad galileano. Recuérdese que Galileo, estudiando el movimiento relativo de dos sistemas de referencia, postulo su principio de Relatividad afirmando que las leyes mecánicas son iguales para dos sistemas de referencia en movimiento relativo, esto es, el fenómeno mecánico resulta ser el mismo sin importar en cual de los dos sistema de referencia sea observado. Pensando en lo anterior, se considero que el fenómenos electromagnético también debía ser el mismo para dos sistemas de referencia en movimiento relativo, por consiguiente, las leyes electromagnéticas no debían ser ajenas al principio de Relatividad galileano, para comprobarlo, se aplicaron las ecuaciones de transformación de Galileo a estas leyes encontrando que no mantenían su forma al cambiar de sistema de referencia.

Si las leyes electromagnéticas no mantenían su forma al cambiar de sistema de referencia, el fenómeno observado no era el mismo. Este problema concerniente a la medición del fenómeno electromagnético según distintos sistemas de referencia propicio una serie de especulaciones respecto a la veracidad del principio de Relatividad galileano y de las leyes que sustentan la teoría electromagnética de Maxwell. Adicionalmente, varios hechos físicos experimentales arrojaban resultados totalmente diferentes en distintos sistemas de

[1]El nombre del tratado en su idioma original es: *A Treatise of Electricity and Magnetism.* Fueron publicadas 2 ediciones posteriores con consideraciones adicionales y cuya terminología en las ecuaciones presentadas no difería mucho de la usada en la edición principal.

referencia, lo cual, empezaría a ser un fuerte argumento de este serio problema. Estos inconvenientes experimentales, que a continuación serán expuestos y argumentados, son la base del presente trabajo permitiendo hacer un análisis de la falta de simetría presentada en el electromagnetismo clásico para, así mismo, mostrar como la teoría especial de la Relatividad surge como solución a este problema además de propiciar en la comunidad científica una nueva forma de concebir y describir el comportamiento de los fenómenos naturales.

Sobre el problema de investigación.

Como se menciono anteriormente, aparte de la no correspondencia de las leyes electromagnéticas con el principio de Relatividad galileano, fueron encontradas varias experiencias cuyos resultados, según dos sistemas de referencia, estaban en total desacuerdo con lo expuesto por la teoría. El movimiento relativo entre una carga y un observador y la observación de una carga eléctrica en distintos sistemas de referencia mostraban resultados totalmente distintos de los que se debían esperar.

Si una carga se mueve respecto a un observador en reposo, este medirá un campo magnético, pensando que la Relatividad del movimiento según Galileo también es valida para los fenómenos electromagnéticos, se espera también la generación de un campo magnético si el observador es quien se mueve respecto a la carga en reposo, pero, la experiencia nos dice que esto no sucede[2]. Dicho esto, es de suponer que el movimiento relativo entre sistemas de referencia no interfiere en los resultados producto de las mediciones de un hecho físico experimental, por consiguiente, sea que la carga se mueva respecto al observador o el observador se mueva respecto a la carga, debería notarse la generación de un campo magnético. He aquí el primer inconveniente a destacar.

En segunda instancia, pensemos en el movimiento de La Tierra en el espacio absoluto. La teoría electromagnética de Maxwell explicaba la naturaleza de la luz al ser esta concebida como una onda electromagnética. Como toda onda, era necesario suponer la existencia de un medio por el cual se propagara la luz en el espacio, así, éter fue denominado el medio material que ocupaba el espacio vació. Con esta suposición, se empezó a considerar que todo cuerpo inmerso en el espacio no solo estaría en movimiento respecto a los demás cuerpos sino que su movimiento seria relativo a un sistema de referencia en común para todos los demás sistemas de referencia y este era el éter. Privilegiar un sistema de referencia implicaba considerarlo un absoluto sobre el cual hacer todas las mediciones de los demás sistemas de referencia, por ende, el movimiento orbital de La Tierra daba por hecho su movimiento respecto al éter.

[2]Este problema fue expuesto por Poincaré en una conferencia que tuvo lugar la feria mundial de 1904 realizada en Saint Louis Missouri, en ella, destacando la actualidad de la relación entre Física y matemáticas, resalto su inquietud respecto a, basándose en el ejemplo dado, que clase de movimiento se le debía asociar a una carga, uno real o uno aparente, y a su vez enuncio su principio de Relatividad argumentando la imposibilidad de saber el verdadero estado de movimiento de un observador respecto a otro.

Considerando lo anterior, ya que toda carga en movimiento genera un campo magnético, es lógico y acorde a la teoría esperar que una carga ubicada en un laboratorio terrestre también genere un campo magnético debido a que es arrastrada por el movimiento orbital de La Tierra y, por consiguiente, la carga estará en movimiento respecto al éter, pero, esto no sucede. Las cargas en reposo al interior de los laboratorios terrestres no generan un campo magnético a pesar de que compartan el movimiento de La Tierra respecto al éter. Llegamos entonces al segundo inconveniente a resaltar.

Para complementar el segundo inconveniente mencionado y terminar de poner en evidencia el serio problema que presentaba la teoría electromagnética de Maxwell, considere que: en un laboratorio terrestre se encuentra una carga en reposo, si un observador, también en reposo, se ubica al interior del laboratorio terrestre notara la generación de un campo eléctrico por parte de la carga, pero, un observador ubicado en un segundo laboratorio notara que el laboratorio terrestre es arrastrado por el movimiento orbital de La Tierra, por consiguiente, para este observador, la carga estará en movimiento permitiéndole medir un campo eléctrico y uno magnético. Esto es prácticamente lo mismo que expresa el segundo inconveniente mencionado solo que desde una perspectiva diferente, esto es, desde un sistema de referencia ajeno a La Tierra.

En conclusión, dos observadores miden fenómenos distintos de un mismo evento en particular. ¿cómo es esto posible?, por un lado, el movimiento relativo entre carga y observador no muestra el mismo fenómeno y, por otro lado, el movimiento de cargas respecto al éter no arroja resultados acordes con la lógica y la teoría, pues, mientras en los laboratorios terrestres cargas en reposo generan solo campos eléctricos, en sistemas de referencia ajenos a La Tierra se manifiestan campos magnéticos producto del movimiento de las cargas, no respecto a La Tierra, pero si respecto al éter.

Con base en lo anterior, se hace sumamente importante realizar un análisis concerniente a estos inconvenientes presentados por la teoría electromagnética de Maxwell explicando la solución que les fue dada. A partir de ello se formula el siguiente problema de investigación.

> *¿Cómo el tensor de campo electromagnético permite dar cuenta de la solución relativista a la falta de simetría del electromagnetismo clásico?*

Sobre la justificación de la investigación.

La teoría especial de la Relatividad debe su origen y formulación a los problemas presentados por la electrodinámica de los cuerpos en movimiento, es por ello que, para poder comprender los fundamentos de esta teoría Física, resulta imprescindible tratar con temas relacionados al electromagnetismo clásico.

Partiendo del análisis de casos particulares concernientes a la electrodinámica de los cuerpos, surgieron contradicciones entre la teoría y la experiencia que ponían en evidencia la falta de simetría de la teoría electromagnética de Maxwell. Es importante destacar estos inconvenientes debido a que le permitió a la comunidad científica darse cuenta del serio problema por el que estaba pasando la Física y era la concepción de los fenómenos eléctricos y magnéticos a partir del movimiento relativo entre sistemas de referencia.

Como docentes, es de suma importancia tener un amplio conocimiento y una adecuada apropiación de los distintos temas del área de estudio tratada, esto no solo permite generar un ambiente educativo enriquecedor y formativo sino que también promueve la construcción y divulgación del conocimiento. Con el presente trabajo investigativo se pretende explicar algunos de los problemas físicos que tanto malestar generaron en la comunidad científica a finales del siglo XVIII e inicios del siglo XIX y que permitieron comprender como la Física de aquel entonces tan solo era un caso particular de lo que hoy en día es la teoría especial de la Relatividad. Adicionalmente, esto servirá de apoyo e incentivo para los estudiantes del Departamento de Física buscando fomentar futuros trabajos de investigación que tengan relación con este trabajo y promoviendo el estudio de las teorías físicas modernas que, incluso hoy en día, siguen desarrollándose.

Objetivos de la investigación.

Objetivo General.

- Explicar la falta de simetría del electromagnetismo clásico mostrando, con ayuda del tensor de campo electromagnético, la solución que le da la teoría especial de la Relatividad.

Objetivos específicos.

- Realizar una breve explicación del origen de la teoría electromagnética de Maxwell mostrando la concepción de la estrecha correspondencia de los fenómenos eléctricos y magnéticos.
- Analizar y explicar los problemas que presentaba la teoría electromagnética de Maxwell al ser aplicada a cuerpos en movimiento.
- Resaltar la formulación de la teoría especial de la Relatividad y sus implicaciones en la concepción de los fenómenos eléctricos y magnéticos.
- Realizar la reconstrucción del tensor de campo electromagnético destacando como campos eléctricos y magnéticos dan cuenta de un solo fenómeno, el electromagnético.
- Utilizar el tensor de campo electromagnético para mostrar la solución relativista a la falta de simetría de la teoría electromagnética de Maxwell.

Antecedentes.

Al comenzar con el desarrollo del presente trabajo se tuvieron en cuenta algunos trabajos investigativos que, en cierta medida, guardaban relación con la problemática y la temática abordada en el trabajo.

Blanco, J. D. ***Modelación del concepto de campo electromagnético.*** **(2013).**

En este trabajo, el autor hace un análisis del concepto de campo electromagnético según Maxwell, quién recopilo y estudió los trabajos experimentales de grandes personajes que contribuyeron al avance de la Física. El autor, al hablar de modelación del concepto de campo electromagnético, se refiere a la gestación y el desarrollo que tuvo dicho concepto y, por consiguiente, su conceptualización. Es importante porque se analiza como los trabajos experimentales de Oersted, Ampere y Faraday llevaron a pensar en una íntima relación entre la electricidad y el magnetismo, además de suponer al espacio como entidad física fundamental para el desarrollo de estos fenómenos.

M. J. Alejandro. ***Electrostática, magnetostatica y covarianza de la electrodinámica.*** **(2003)**

En este trabajo se abordan las leyes de la teoría de campo electromagnético partiendo de los conceptos de la electrostática y magnetostatica, además de dar cuenta de cómo se puede llegar a las ecuaciones de Maxwell en forma covariante partiendo de la magnetostatica y la teoría especial de la Relatividad. Como fue resaltado en la problemática, uno de los problemas del electromagnetismo clásico fue la no correspondencia de este con el principio de Relatividad galileano, por consiguiente, este trabajo es de gran aporte ya que analiza la conexión entre la teoría clásica de Maxwell y la Relatividad especial, expone una forma de obtener las ecuaciones de Maxwell partiendo de la teoría especial de la Relatividad y explica brevemente el significado físico y matemático de un tensor y sus propiedades.

Van Noppen, B. ***Representación geométrica del conjunto de sistemas inerciales.*** **(1986).**

En este trabajo, el autor explica porque los sistemas de referencia inerciales son fundamentales para dar cuenta del desarrollo de la teoría especial de la Relatividad, el movimiento relativo entre sistemas de referencia es el que permite caracterizar los fenómenos, además, se expone como la velocidad de los sistemas de referencia inerciales resulta ser una variable medida por el movimiento relativo de los mismos.

Einstein, A. ***Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento.*** **(1905)**

Para el desarrollo del presente trabajo investigativo, estudiar esta monografía es fundamental debido a que surge como solución a todas las inconsistencias que presentaba la teoría electromagnética de Maxwell al ser aplicada a cuerpos en movimiento. Su formulación propicio un cambio radical en la concepción y descripción de los fenómenos naturales.

Sobre el contenido general de la investigación.

La no correspondencia de las leyes electromagnéticas con el principio de Relatividad galileano y los problemas concernientes a la observación del estado de movimiento de una carga desde distintos sistemas de referencia eran clara evidencia de la falta de simetría que presentaba la teoría electromagnética de Maxwell. Este grave problema se sumaba a los resultados negativos de innumerables experimentos basados en la luz y en fenómenos electromagnéticos que buscaban comprobar el movimiento de La Tierra respecto al éter.

En 1905, Albert Einstein, con la formulación de la teoría especial de la Relatividad, propiciaría en la Física un cambio radical en la forma de entender el comportamiento de los fenómenos naturales. Para Einstein, el serio problema de la Física era la aparición de asimetrias entre la interpretación común y los fenómenos observados al aplicar la electrodinámica de Maxwell a cuerpos en movimiento (los problemas argumentados en la problemática de la investigación lo sustentan), por tal razón, buscando dar solución a este problema, desarrolló y publico su trabajo *"Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento* en el que, partiendo de dos hipótesis (que el consideraría como postulados de la Relatividad), lograba deducir una electrodinámica de cuerpos en movimiento que resultaría libre de asimétrias y daría respuesta a todos los resultados experimentales negativos encaminados a hallar la velocidad relativa de La Tierra respecto al medio éter.

La falta de simetría presentada en la teoría electromagnética de Maxwell era resuelta con creces gracias a la formulación de la teoría especial de la Relatividad. La constancia de la velocidad de la luz implicaba concebir un nuevo grupo de transformaciones[3] demostrando que las ecuaciones de transformación de galileo eran tan solo validas para cuerpos con velocidades extremadamente pequeñas en comparación con la velocidad de la luz, de ahí que la mecánica newtoniana correspondiera a estas ecuaciones, a su vez, con estas nuevas ecuaciones de transformación, se hacia evidente la correspondencia entre campos eléctricos y magnéticos para distintos sistemas de referencia. Con lo anterior, y con el principio de la Relatividad, se explicaban los resultados contradictorios al analizar el movimiento relativo entre una carga y un observador y la observación de una carga eléctrica en distintos sistemas de referencia, pues, que un observador midiera efectos eléctricos mientras otro media efectos eléctricos y magnéticos no era indicio de que ambos observadores notaran fenómenos diferentes, en esencia, el fenómeno observado era el mismo, solo que, la relatividad del movimiento entre los observadores les permitía caracterizarlo de manera diferente.

Otro aspecto trascendental de esta nueva teoría física era la concepción del tiempo como una variable no absoluta ya que cada observador era capaz de medir un tiempo propio dependiendo de su sistema de referencia, por consiguiente, el tiempo pasaba a ser una variable dinámica con implicaciones en la medición de los fenómenos naturales. Es por lo anterior que la teoría especial de la Relatividad basa sus cálculos en la métrica de Minkowski, así, el fenómeno electromagnético, al igual que los demás, tiene lugar en el continuo *espacio-tiempo* expresado por una coordenada temporal y tres coordenadas es-

[3]Denominadas como ecuaciones de transformación de Lorentz en alusión a Hendrik Lorentz quien fue el primero en descubrirlas.

paciales, de esta manera, se deduce que el campo electromagnético es concebido gracias a las tensiones eléctricas y magnéticas que se dan en cada punto del espacio-tiempo y, como todo fenómeno físico, puede ser modelado matemáticamente a fin de hacerlo comprensible, es por esto que nos es presentado en forma tensorial cuyas componentes dependen de los campos eléctricos y magnéticos.

Respecto a lo anterior, el siguiente trabajo se divide en tres capítulos:

- Capítulo I: Se hace un breve contexto histórico de la concepción de los fenómenos eléctricos y magnéticos explicando los indicios experimentales que empezarían a mostrar la correspondencia existente entre estos dos fenómenos, seguidamente se hace una descripción de las 4 ecuaciones que sustentan la teoría electromagnética de Maxwell. Por ultimo, se da una explicación de algunos de los problemas que se empezaban a encontrar respecto a esta nueva teoría cuando era analizada para cuerpos en movimiento según distintos sistemas de referencia y se exponen las posibles soluciones clásicas que se le daban a estos problemas.

- Capítulo II: Se inicia dando a conocer algunas consideraciones clásicas propuestas para dar explicación a los resultados negativos de los distintos experimentos encaminados a mostrar el movimiento de La Tierra respecto al éter resaltando las ideas de Poincaré en torno al movimiento relativo de los cuerpos y el aporte de Einstein a los problemas de la electrodinámica de cuerpos en movimiento que terminaría en la formulación la teoría especial de la Relatividad. Posteriormente, se exponen las ecuaciones de transformación de Lorentz argumentando la idea de tiempo propio, explicando las consecuencias de estas y mostrando como sustentan la teoría especial de la Relatividad. Por ultimo se realiza la deducción de las ecuaciones de transformación de los campos mostrando la estrecha relación entre fenómenos eléctricos y magnéticos y explicando la concepción del fenómeno electromagnético.

- Capítulo III: Se comienza con un análisis respecto a que se entiende por simetría para seguir con la explicación de la falta de simetría concebida en la teoría electromagnética de Maxwell. Luego, se da una discusión entorno a la solución que la teoría especial de la Relatividad le da a esta falta de simetría, seguidamente se expone un análisis de la concepción del fenómeno electromagnético gracias a la teoría especial de la Relatividad explicando como la modelación matemática de este fenómeno se da en forma tensorial. Posteriormente, se procede a hacer la reconstrucción del tensor de campo electromagnético partiendo de la acción de una partícula sometida en un campo electromagnético y del principio de mínima acción. Luego, se procede a comprobar la covarianza de dicho tensor verificando que el fenómeno electromagnético es igual para distintos sistemas de referencia inerciales y se deducen las ecuaciones de la teoría electromagnética de Maxwell, así, se constata la solución a la falta de simetría del electromagnetismo clásico y se termina con unas concisas consideraciones finales respecto al análisis realizado.

Es necesario resaltar la importancia de este trabajo en el ámbito de la enseñanza y del estudio de la disciplina tratada debido a que se considera primordial que los docentes de Física en formación de la Universidad Pedagógica Nacional tengan un amplio conocimiento tanto de los tópicos relacionados con el área de estudio como de las distintas investigaciones, producciones y teorías científicas que han llevado a la Física a un crecimiento notable en relación a la comprensión y explicación del modo de actuar de la naturaleza. Dicho esto, con este trabajo se pretende impulsar nuevas investigaciones que permitan a los estudiantes del Departamento de Física fomentar el desarrollo y la producción de conocimiento en las distintas teorías modernas de la Física y que permitieron no solo abrir nuevas miradas de los fenómenos naturales sino dar solución y explicación a distintos casos que la Física clásica no podía resolver como lo fue el caso del tema tratado en el presente trabajo concerniente a los problemas electromagnéticos que complicaban la comprensión del fenómeno electromagnético en distintos sistemas de referencia inerciales.

Capítulo 1

Electrodinámica clásica.

Para poder hablar de la falta de simetría que presentaba la teoría electromagnética de Maxwell se considera necesario resaltar el origen y los fundamentos de esta teoría, es por lo anterior que se comenzara este capitulo destacando tanto los descubrimientos experimentales que permitieron descubrir la relación existente entre fenómenos eléctricos y magnéticos como las leyes físicas con las que son formalizados.

1.1. Un breve panorama: Antesala al electromagnetismo.

A comienzos del siglo XIX la óptica, la electricidad y el magnetismo empezaban a tener una gran importancia relacionada con la comprensión de los fenómenos naturales, especialmente los dos últimos, ya que grandes científicos de la época se dedicaron a estudiar y explicar la relación entre dos campos de estudio. De aquellos científicos, los más destacados fueron Coulomb, Ørsted, Ampere y Faraday quienes, con sus trabajos, lograron grandes aportes al entendimiento del comportamiento de la electricidad y su posible correspondencia con el magnetismo. A continuación serán explicados sus aportes.

1.1.1. Primeros indicios de la relación entre electricidad y magnetismo.

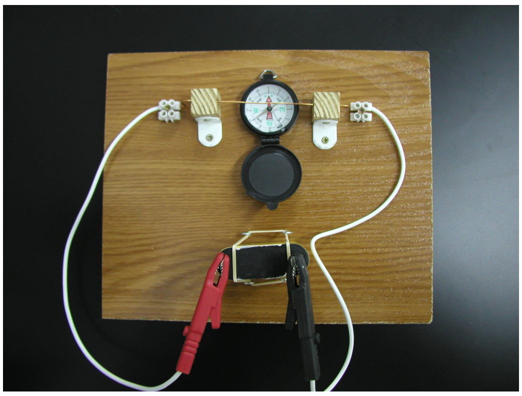

Figura 1.1. Montaje experimental diseñado por Ørsted[4].

Debido a ciertos experimentos enfocados a buscar alguna interacción entre los polos magnéticos de un imán y cargas eléctricas en reposo, se empezó a demostrar la relación entre fenómenos eléctricos y magnéticos. En 1820, Hans Christian Ørsted, en una de sus clases, descubrió el primer indicio de la relación entre fenómenos eléctricos y magnéticos; ubico un hilo conductor paralelamente a la aguja imantada de una brújula y posteriormente observo cómo, al hacer circular una corriente eléctrica por el conductor, la aguja se desviaba quedando en dirección perpendicular al cable(ver figura 1.1)[4], asombrosamente, Ørsted había descubierto el primer indicio de la estrecha relación entre electricidad y magnetismo.

Ese mismo año André Marie Ampere desarrolló un modelo matemático que daba explicación a la interacción entre fenómenos eléctricos y magnéticos. Tal como afirma Belendez (2008), Ampere concluyó que mientras que la carga eléctrica es una realidad fundamental, no existen cargas magnéticas aisladas, no era posible obtener un monopolo magnético, e ingeniosamente dedujo que si una corriente eléctrica podía interactuar con una aguja imantada, dos corrientes eléctricas interactuando entre sí podrían producir los mismos efectos magnéticos, por tal razón, construyo un modelo experimental que permitía presenciar la interacción entre hilos conductores.

Al colocar dos conductores paralelos entre si y hacer circular una corriente eléctrica en ellos, dependiendo de la dirección en la que se hiciera circular la corriente en ambos alambres, estos experimentarían un efecto atractivo (corrientes en la misma dirección) o repulsivo (corrientes en direcciones opuestas), como si fueran dos imanes prácticamente iguales(ver figura 1.2)[5].

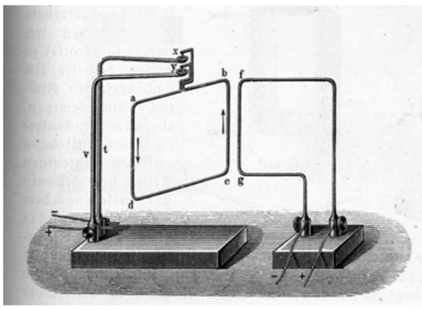

Figura 1.2. Montaje experimental diseñado por Ampere[5].

1.1.2. Faraday y la inducción electromagnética: Efectos eléctricos a partir de fenómenos magnéticos.

Ya se había demostrado que la electricidad podía producir efectos magnéticos, pero, más que una relación, ¿existiría una correspondencia entre estos dos fenómenos?, es decir, podría suceder el caso inverso en el que el magnetismo propiciara efectos eléctricos. Una década después del hallazgo de Ørsted, Michael Faraday experimentalmente descubrió la inducción electromagnética, este fenómeno dio por sentada la estrecha correspondencia entre la electricidad y el magnetismo[6]. En 1821, analizando el experimento de Ørsted, Faraday desarrolló la idea de líneas de fuerza, concepto en oposición a la acción a distancia, pues, no concebía que las interacciones físicas entre los cuerpos se dieran de manera instantánea sin algo que los conectara, de esta manera, supuso que las líneas de fuerza rodeaban el conductor por el cual pasaba la corriente y, en conjunto, daban cuenta de un

[4]Imagen tomada de: http://www10.uniovi.es/semanacyt2007/experimentando/magnetismo/experimentos/e4

[5]Imagen tomada de: http://electromagnetismounexpo.blogspot.com.co/2011/10/andre-marie-ampere

[6]Faraday no fue el único en descubrir la relación entre fenómenos eléctricos y magnéticos, de manera casi simultanea, Joseph Henry llego a los mismos resultados que obtuvo Faraday, pero, este ultimo fue el primero en publicarlos, de ahí que se le atribuya el descubrimiento de la inducción electromagnética y que la ecuación que define este fenómeno lleve su nombre.

campo que permitía la interacción entre cuerpos eléctricos y magnéticos. Así, Faraday le asocio un campo eléctrico a la interacción entre cuerpos eléctricos y un campo magnético a la interacción entre objetos magnéticos, o cuerpos que exhibían propiedades magnéticas, como el caso de los hilos conductores en el experimento de Ampere. Bajo este modelo se explicaba perfectamente los resultados experimentales obtenidos por Ørsted y Ampere.

Siguiendo con sus experimentos, Faraday, en 1831, descubrió que la variación del flujo de lineas de campo magnético podía inducir corriente eléctrica en un hilo conductor. En un núcleo de hierro adapto dos solenoides aislados entre sí (ver figura 1.3)[7], hizo un circuito con el primer solenoide, una fuente y un interruptor y con el otro solenoide, conectándolo a un galvanómetro, formo un segundo circuito cerrado. Al cerrar el primer circuito, el solenoide generaría un campo magnético con el cual Faraday pretendía inducir una corriente eléctrica en el segundo solenoide, pese a los resultados negativos, siguió intentando hasta descubrir que solo al abrir o cerrar el circuito la aguja del galvanómetro se movía levemente regresando al cero, asombrosamente este montaje experimental permitió concluir que se generaban corrientes eléctricas a partir de los cambios de un campo magnético y no por la mera existencia del mismo(Gómez & Gonzales, 2012).

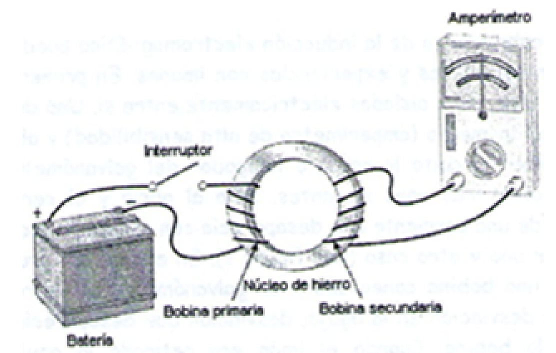

Figura 1.3. Montaje experimental con el cual Michael Faraday descubrió la inducción electromagnética[7].

Esta experiencia llevo a Faraday a pensar en un segundo experimento y así; con una bobina, un imán y un amperímetro, conectados por hilos conductores, demostró cómo el movimiento constante de un imán en el interior de la bobina, hacia adelante y hacia atrás, propiciaba una desviación en la aguja del medidor de corriente, además, dependiendo de la rapidez con la que el imán se moviera, la corriente generada tendría una menor o mayor intensidad reflejada en la desviación de la aguja del amperímetro.

1.2. Teoría electromagnética de J. C. Maxwell.

1.2.1. Las ecuaciones de Maxwell.

Esta serie de acontecimientos que tuvieron lugar en el primer tercio del siglo XIX fueron fundamentales para que James Clerk Maxwell se interesara en la electricidad y el magnetismo, especialmente por los trabajos de Faraday en relación a la correspondencia de estos dos fenómenos[8]. Aceptando la concepción de las líneas de fuerza y la existencia de campos eléctricos y magnéticos de Faraday, estudió la interacción entre electricidad

[7]Imagen tomada de: http://fisicaparatodos.freehostia.com/guialabfis3N2a

[8]En 1879 Maxwell, siendo director del laboratorio Cavendish, encontró y publico los trabajos en electricidad de Lord Henry Cavendish en los cuales se anticipa a los resultados de varias investigaciones enfocadas en la electricidad y que, pasado poco más de un siglo, científicos como Charles Dufay, Coulomb y Faraday descubrieron en sus experiencias, en total fueron 20 paquetes de documentos sobre electricidad.

y magnetismo hasta el punto de lograr la unificación de estos junto con la luz. Maxwell expreso todos sus análisis y resultados en su tratado de electricidad y magnetismo publicado en 1873, en el pone de manifiesto un total de 20 ecuaciones que, como resalta Beléndez (2008), "relacionan las variables de los campos eléctricos y magnéticos que rigen el comportamiento de la interacción electromagnética". Una década después de su publicación, Oliver Heaviside con ayuda de Williard Gibbs simplifico estas ecuaciones a tan solo cuatro hermosas y trascendentales ecuaciones que, en conjunto, terminarían siendo el fundamento de la teoría electromagnética en la cual se hace explicita la estrecha correspondencia de los fenómenos eléctricos y magnéticos. A continuación se exponen cada una de las 4 ecuaciones de Maxwell.

1.2.2. Ley de Gauss para el campo eléctrico.

La comprensión de los fenómenos eléctricos y magnéticos se facilito altamente gracias a las ideas de Faraday en relación a las lineas de fuerza y la generación de un campo en el entorno próximo de los cuerpos eléctricos y magnéticos, pues, resultaba mas explicita la interacción entre estos. En el caso del fenómeno eléctrico, la existencia de dos tipos de carga implico concebir la creación de dos campos, uno para cada carga, y cuya diferencia radica en la dirección de las lineas de fuerza, también llamadas lineas de campo. Mientras las lineas de campo divergen de las cargas positivas, en las negativas estas convergen.

¿cómo corroborar que las cargas eléctricas son fuentes fundamentales del campo eléctrico?. La respuesta a esta pregunta la da esta ley al establecer la relación del flujo de campo en una superficie cerrada con la presencia de alguna carga en el interior de tal superficie, en su forma matemática:

$$\int_S \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \tag{1.1}$$

La integral al lado derecho de la ecuación no es mas que el flujo neto de campo eléctrico en una superficie cerrada. Al no encontrarse una carga en el interior de dicha superficie, el flujo neto de campo sera nulo, pues, la cantidad de lineas de campo que entren sera igual a la cantidad de lineas que salgan(ver figura 1.4a)[9], pero, suponiendo que se tuviese una carga eléctrica en el interior de la superficie cerrada, el flujo de campo seria perturbado por el campo eléctrico de la carga encerrada, así, el flujo neto de campo seria mayor o menor que cero dependiendo del tipo de carga. Si la carga encerrada fuese positiva el flujo neto de campo seria mayor que cero(ver figura 1.4b), sucedería el caso contrario(flujo neto de campo menor que cero) si la carga encerrada fuese negativa (ver figura 1.4c).

Partiendo de la definición de carga en una superficie cerrada y aplicando el teorema de Gauss se obtiene la ley de Gauss para el campo eléctrico en su forma diferencial.

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \tag{1.2}$$

Vemos como esta ley puede expresarse de varias formas, pero, en esencia, explican lo mismo, las fuentes fundamentales del campo eléctrico son las cargas. En su forma diferencial se relaciona la divergencia del campo eléctrico en un punto del espacio con

[9]Imagen tomada del libro de B. M. Jordi titulado Leyes de Maxwell. pp. 15

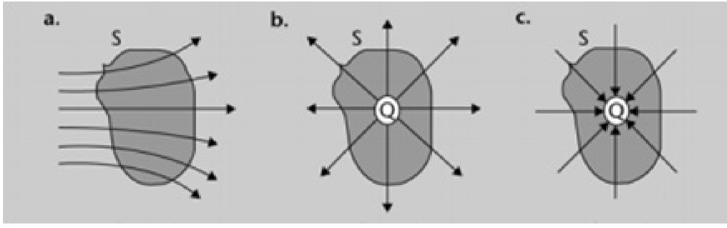

Figura 1.4. Flujo de líneas de campo eléctrico sobre una superficie cerrada[9]

la densidad de carga presente en dicho punto y con la permitividad eléctrica del medio ε_o, con lo anterior se explica como las lineas de campo eléctrico convergen o divergen en un punto solo si en este hay cargas, pues, en ausencia de cargas no habría densidad de carga, por consiguiente, la divergencia del campo seria nula. Es por tanto valido afirmar la existencia de dos tipos de carga cada una generadora de su propio campo eléctrico.

1.2.3. Ley de Gauss para el campo magnético.

El campo magnético ($\overrightarrow{B}$) es una magnitud física asociada a los cuerpos magnéticos y a las cargas eléctricas en movimiento, a diferencia del campo eléctrico, no se conoce de una carga elemental que genere el campo magnético[10], sin embargo, una carga eléctrica puede generar ambos tipos de campo, el eléctrico y el magnético, dependiendo de su estado de movimiento.

Los polos de un imán están en zonas opuestas, por lo tanto, el campo generado por el imán no es radial como en el caso de una carga eléctrica sino mas bien envolvente, pues, las lineas de campo que salen del polo positivo son atraídas hasta el polo negativo rodeando la mitad del imán(ver figura 1.5)[11]. Las lineas de campo convergen y divergen en el mismo imán. Si alojáramos un imán en el interior de una superficie cerrada, todas las lineas de campo que emerjan del polo positivo saldrán de la superficie y luego entraran convergiendo al polo negativo, como resultado, el flujo neto de campo magnético seria nulo. Lo anterior es el claro argumento de la segunda ley de Maxwell, siendo concisos, esta ley expresa cómo el flujo de campo magnético a través de una superficie cerrada es nulo, matemáticamente esto es:

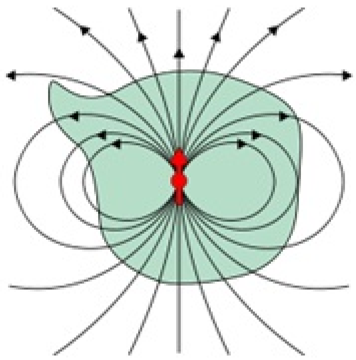

Figura 1.5. Flujo de líneas de campo magnético sobre una superficie cerrada.[11]

$$\int_S \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{ds} = 0 \tag{1.3}$$

Si aplicamos el teorema de Gauss a esta ley obtenemos que:

[10]En la actualidad no se ha podido demostrar la existencia de un monopolo magnético, por tal razón, no podemos asociarle al campo magnético una carga elemental, tal como lo son las cargas eléctricas para el campo eléctrico.

[11]Imagen recuperada de: https://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_Gauss

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0 \tag{1.4}$$

Encontrando así la ley de Gauss para el campo magnético en su forma diferencial, la divergencia del campo $\overrightarrow{B}$ es nula debido a que las lineas de campo describen caminos cerrados por ende no hay casos posibles en los que las lineas de campo magnético diverjan o converjan por separados, en otros términos, el lugar en el espacio donde inician las lineas de campo es el mismo en el que estas terminan, así, el flujo neto de campo magnético en una superficie cerrada siempre sera nulo. Las primeras dos leyes de Maxwell para los campos eléctricos y magnéticos son en gran parte análogas, la diferencia entre estas radica en que mientras la primera ley sustenta la existencia de cargas eléctricas la segunda afirma la inexistencia de cargas magnéticas.

1.2.4. Ley de inducción de Faraday.

Michael Faraday, en 1831, experimentalmente descubrió como la variación de un campo magnético podía generar una corriente eléctrica e ingeniosamente desarrolló un modelo para explicar las interacciones de los fenómenos eléctricos y magnéticos, este fue, las líneas de fuerza que, en conjunto, darían cuenta de un campo. En el apartado (1.1.2) se explico el montaje experimental con el que Faraday encontró la estrecha correspondencia entre estos dos fenómenos. Faraday dedujo que, al hacer pasar un imán por un embobinado de alambre de cobre, la densidad de líneas de campo magnético del imán que atravesarían el embobinado sería distinta en cada instante de tiempo, induciendo una fuerza electromotriz en el mismo y generando en el alambre una corriente eléctrica, como conclusión, la variación del flujo de campo magnético inducia corrientes eléctricas. Según lo anterior:

$$\oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{ds} \tag{1.5}$$

El lector quizás se pregunte a que se debe el signo negativo en esta ley, resulta que, para compensar la variación del flujo de campo que genero la fuerza electromotriz inducida, el sentido de la corriente eléctrica producida es tal que genera un campo magnético cuyo flujo intenta compensar la variación. Esto es lo que se conoce como la ley de Lenz y da explicación al por qué aparece el signo negativo.(B. M. Jordi, s.f)

Si aplicamos el teorema de Stokes al termino de la izquierda de la ecuación anterior, luego de eliminar las integrales de superficie obtenemos la ley de inducción de Faraday en su forma diferencial.

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{1.6}$$

Sea en su forma integral o diferencial esta ley sustenta algo extremadamente importante y es la estrecha relación existente entre los campos eléctricos y magnéticos, miremos su forma diferencial: el rotacional del campo eléctrico permite saber si el campo magnético generado experimenta alguna variación en el tiempo, en caso de no haber variación, el resultado obtenido al aplicar el rotacional seria cero deduciendo que el campo eléctrico, al igual que el campo magnético, es constante, en conclusión, la variación de uno implicaba cambios de igual proporción en el otro.

1.2.5. Ley de Ampere-Maxwell.

Las ecuaciones de Maxwell no deben ser miradas cada una por aparte, todas juntas dan explicación a los fenómenos electromagnéticos y esta última ecuación es la que resalta en gran medida la genialidad de Maxwell, pero, antes de hablar del aporte de este científico escocés es importante resaltar el trabajo de Ampere respecto a los fenómenos electrodinámicos. El descubrimiento de Ørsted fue fundamental para que Ampere se interesara por estudiar la creación de campos magnéticos a partir de corrientes eléctricas hasta el punto de publicar una descripción detallada de los resultados obtenidos por Ørsted y por el mismo luego de hacer numerosas experiencias. Ampere siguió estudiando estos fenómenos hasta formular una ley que les daba explicación, esta ley definía a las corrientes eléctricas, mas exactamente a la densidad de corriente, como fuente fundamental del campo magnético(Gómez & González). En su forma matemática:

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_o \int_S \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{ds} \tag{1.7}$$

Nótese como el desplazamiento de una densidad de corriente eléctrica sobre una superficie provoca la circulación de un campo magnético a lo largo de un camino cerrado explicando los resultados obtenidos por las experiencias de Ørsted y Ampere. Sin embargo, esta ley, solo era valida para corrientes estacionarias o continuas que generaban campos magnéticos constantes, pues, no era compatible con la ecuación de continuidad de la corriente eléctrica que obedecía el principio de conservación de la carga, es decir, la ley de Ampere presentaba inconvenientes al tratar con corrientes eléctricas variables en el tiempo (generadoras de campos magnéticos variables). Es aquí donde el ingenioso Maxwell aparece en todo su esplendor haciendo un aporte de gran relevancia a la ley de Ampere, es por ello que la cuarta ley que sustenta su teoría electromagnética es una version extendida de esta ley y, adicionalmente, lleva los nombres de estos destacados personajes.

Maxwell supuso que la correspondencia entre los campos electicos y magnéticos era tal que la variación de uno implicaba la creación del otro llevándolo a pensar que un campo eléctrico variable podía generar un campo magnético variable, una idea totalmente análoga a lo que sustenta la ley de inducción de Faraday, así, introdujo un segundo término a la ley de Ampere dando solución a la incompatibilidad de esta con la ecuación de continuidad[12]. El aporte de Maxwell resulto ser algo sorprendente e inesperado, pues, se afirmaba que no era necesario de la presencia de cargas y de corrientes eléctricas para generar campos magnéticos, solo bastaba con la variación de uno para que se diera la existencia del otro. Sin mas preámbulo, he aquí la ley de Ampere-Maxwell.

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_o \left[\int_S \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{ds} + \varepsilon_o \frac{\partial}{\partial t} \int_S \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{ds} \right] \tag{1.8}$$

El nuevo termino fue denominado por el mismo Maxwell como corriente de desplazamiento, esta era totalmente distinta a la corriente de continuidad dado que, mientras esta era asociada al movimiento de cargas, la primera se relacionaba con la variación del flujo

[12]En el anexo A se explica porque la ley de Ampere solo es válida para corrientes estacionarias y como se puede deducir el segundo término de la ley de Ampere-Maxwell expuesto por Maxwell

de campo eléctrico en el tiempo, por tanto, las corrientes de desplazamiento solo estaban presentes al tener campos eléctricos variables. Al igual que las anteriores tres leyes, esta ley también puede encontrarse en forma diferencial, para ello basta con aplicar el teorema de Stokes al lado izquierdo de la ecuación (1.11) y eliminar las integrales de superficie, con esto queda que:

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = \mu_o \overrightarrow{J} + \mu_o \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \tag{1.9}$$

Finalmente queda explicita la estrecha correspondencia entre fenómenos eléctricos y magnéticos. Seguramente el lector compartirá la idea de que las leyes de Maxwell pueden ser clasificadas en dos parejas, cada una argumentando un principio de los fenómenos eléctricos y magnéticos. Las primeras dos leyes describen características del campo eléctrico y el campo magnético de forma independiente resaltando la concepción de cargas fundamentales en ambos fenómenos(Gómez & González, 2012), lo que no sucede en las restantes dos ecuaciones, en estas se hace explicita la correlación existente entre fenómenos eléctricos y magnéticos. Así, se rectifica como estas 4 leyes son el sustento y fundamento de la teoría electromagnética que unifica lo que antes eran considerados fenómenos totalmente independientes.

1.3. Surgen problemas en la electrodinámica de cuerpos en movimiento.

Durante el transcurso del siglo XIX se dieron una innumerable serie de acontecimientos que provocaron de una manera abismal el desarrollo de la ciencia en general, cada descubrimiento llevaba a uno nuevo, a la reformulación, e incluso, la formulación de una nueva teoría. El aporte de Maxwell es uno de los más claros sucesos que sustentan esta afirmación, sobre todo al pensar que ahí no quedo todo, encontrar la estrecha correspondencia entre la electricidad y el magnetismo le permitió a Maxwell explicar el comportamiento ondulatorio de la luz como el resultado de oscilaciones entre los campos eléctricos y magnéticos. Es sabido que estos campos son modelos físicos que permiten describir la interacción entre cuerpos de naturaleza eléctrica y magnética, por tal razón, pueden ser considerados intangibles y no es muy lógico pensar en la luz como el resultado del comportamiento de entes no materiales. Este razonamiento, en cierta medida, llevo a Maxwell a pensar en la luz no como una sustancia sino más bien como un proceso que tiene lugar en una sustancia(Maxwell J. C., 1965). Éter fue el nombre asociado a dicha sustancia.

La constancia de la velocidad de la luz y su propagación en el vacío por medio del éter, llevo a pensar en este último como un sistema de referencia absoluto sobre el cual hacer las mediciones de cualquier sistema de referencia. Considerar la existencia de un sistema de referencia privilegiado propicio en el físico Abraham Michelson el interés por encontrar la velocidad de La Tierra respecto a dicho sistema. Michelson, junto con Williams Morley, diseño un experimento que tenía como finalidad demostrar el movimiento relativo de La Tierra en el éter, como no era de esperar los resultados fueron negativos. Luego de mejorar el montaje experimental con ciertas consideraciones tomadas para evitar cualquier tipo de mínima perturbación, los resultados negativos persistían. Muchos otros experimentos basados en la luz y en los fenómenos eléctricos y magnéticos fueron realizados buscando comprobar este movimiento de La Tierra respecto al éter, pero, todos arrojaban resultados negativos. En conclusión, La Tierra estaba en reposo respecto al éter.

1.3.1. Principio de Relatividad galileano aplicado a la teoría electromagnética de Maxwell.

Con el experimento de la doble rendija de Thomas Young y la teoría electromagnética de Maxwell, se comprobó la naturaleza ondulatoria de la luz adicionando la concepción de esta como una onda electromagnética, esto según Maxwell, y encontrando el valor más aproximado de su velocidad en el vacío. Al igual que para las ondas mecánicas, se pensó que la luz debía propagarse en un medio material considerado el sistema de referencia absoluto sobre el cual hacer todas las mediciones, esto no era sencillo, pues, todos los sistemas de referencia debían cumplir con el principio de Relatividad galileano (anexo B). Galileo, con su principio de Relatividad, afirmaba que dos observadores, moviéndose relativamente uno del otro a velocidad constante, observarían los mismos fenómenos mecánicos.

A modo de ejemplo, mientras A observa que B se está moviendo respecto a el a velocidad constante v, B concluye que es A quien se mueve respecto a el a velocidad v, pero, en dirección contraria, tal como lo ilustra la Figura 1.6. En conclusión, no interesa cuál de los dos observadores sea el que realmente se este moviendo, el movimiento relativo entre A y B permite que ambos evidencien el mismo fenómeno.

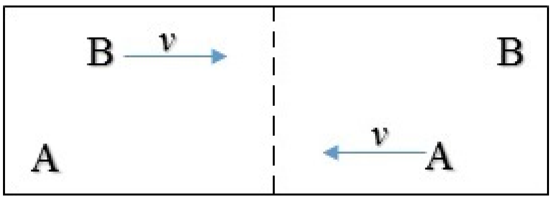

Figura 1.6. Movimiento relativo entre dos observadores.

Este principio físico es sustentado matemáticamente por medio de las ecuaciones de transformación de galileo, al aplicar estas ecuaciones de transformación a las leyes de la mecánica se encontraba que efectivamente el fenómeno mecánico observado en distintos sistemas de referencia era el mismo, pues, leyes mecánicas eran iguales para cualquier sistema de referencia inercial, es decir, mantenían su forma bajo las transformaciones de galileo. Quedaba la duda de si, al igual que en la mecánica, las leyes que sustentaban la teoría electromagnética de Maxwell también eran covariantes[13] bajo las transformaciones de Galileo, es decir, que para cualquier observador el fenómeno electromagnético observado fuera el mismo. Al hacer esto se encuentra que lo observado en un sistema de referencia inercial S difería de lo observado en otro sistema de referencia inercial S', las leyes electromagnéticas no mantenían su forma al cambiar de sistema de referencia. Lo anterior resultó mostrar que la teoría electromagnética de Maxwell presentaba una falta

[13]Es necesario aclarar que mientras la invarianza es asociada a la conservación de una magnitud o propiedad física, el termino covarianza es utilizado para referirse a cómo una ley física mantiene su forma bajo algún tipo de transformación.

de simetría, las ecuaciones de Maxwell no eran covariantes bajo las transformaciones de Galileo. Este gran inconveniente llevó a los científicos de la época a pensar en una gran encrucijada: se debía suponer la existencia de un sistema de referencia privilegiado respecto al cual hacer todas las mediciones, el éter, las transformaciones de galileo eran erróneas o la teoría electromagnética de Maxwell, respaldada por distintos hallazgos experimentales, fallaba.

1.3.2. Cargas eléctricas en movimiento.

Como es sabido, una carga eléctrica en reposo genera un campo eléctrico y, esta misma, al estar en movimiento, aparte de generar un campo eléctrico, genera un campo magnético. Un observador en reposo respecto a una carga, evidenciara que dicha carga genera estos campos dependiendo de su estado de movimiento, pero, ¿qué sucede si el observador es el que se mueve respecto a la carga?. Si la carga y el observador están en reposo, este último evidenciará un campo eléctrico, en cambio, si este se empieza a mover respecto a la carga debería notar no solo el campo eléctrico sino también un campo magnético debido al movimiento relativo y esto no sucede, la carga se mantiene generando un solo campo, el eléctrico. Lo anterior llevó a pensar que ambos casos de movimiento relativo carga-observador diferían uno del otro, mientras uno era real el otro era aparente, es decir, uno producto del otro.

Este problema fue expuesto por Henri Poincaré en una conferencia que tuvo lugar en la feria mundial de 1904 realizada en Saint Louis Missouri, Estados Unidos. Allí trató con temas relacionados a la actualidad de la relación entre Física y Matemáticas, uno de esos temas fue la concepción de los fenómenos naturales en distintos sistemas de referencia, por lo cual, decidió enunciar su principio de Relatividad sustentando que las leyes físicas debían ser las mismas al ser medidas desde cualquier sistema de referencia en movimiento relativo respecto a otro, así mismo, reiteraba la imposibilidad de saber cuál observador es el que realmente está en reposo o en movimiento respecto al otro(Sánchez, 2013), es decir, no se puede saber a ciencia cierta cuál movimiento es real y cuál es aparente.

En aquel entonces, todo este análisis de Poincaré respecto al movimiento relativo entre sistemas de referencia, en gran medida, era resultado de la inquietud que tenia en torno a explicar qué clase de movimiento se le debía asociar a una carga. Pensar en el éter como sistema de referencia absoluto sobre el cual hacer las mediciones de los demás sistemas de referencia implicaba suponer que una carga presente en un laboratorio terrestre generaría un campo magnético sólo por el hecho de ser arrastrada por el doble movimiento de La Tierra. Incluso, si el movimiento de la carga no fuese absoluto respecto al éter, pero si relativo respecto a un observador, se debería medir un campo magnético generado por la carga solo con el movimiento del observador respecto a ella, aun si la carga estuviese en reposo, pero, esto no sucede. (Vélez, 2012)

Por un lado, el movimiento de un observador respecto a una carga no generaba un campo magnético, lo que si sucede si la carga se mueve respecto al observador y, por otro lado, el movimiento de La Tierra respecto al éter debía propiciar la generación de campos magnéticos por parte de todas las cargas ubicadas al interior de los laboratorios terrestres, pero, tampoco sucedía. Estas suposiciones experimentales resultaron ser un problema bastante serio. Tanto el movimiento relativo como la concepción de un sistema de referencia absoluto arrojaban resultados experimentales que en nada concordaban con la teoría. La concepción de fenómenos eléctricos y magnéticos en distintos sistemas de referencia le mostraba a la comunidad científica la falta de simetría que presentaba la Física en aquel entonces.

1.3.3. Fuerzas medidas por dos observadores en distintos sistemas de referencia: Interpretación clásica.

La no correspondencia de las leyes electromagnéticas con las ecuaciones de transformación de Galileo y la observación de dos fenómenos diferentes a partir del movimiento relativo entre una carga y un observador eran los primeros inconvenientes que pondrían en evidencia el serio problema que enfrentaría la física y era la falta de simetría del electromagnetismo clásico. Gracias al experimento de la doble rendija de Thomas Young fue comprobada la naturaleza ondulatoria de la luz. Como toda onda necesitaba de un medio para propagarse, se pensó en el éter como medio material sobre el cual la luz se propagaba en el espacio vació, además, este medio fue considerado el sistema de referencia absoluto sobre el cual hacer las mediciones de todos los demás sistemas de referencia.

Debido a esta nueva consideración física, el movimiento orbital de La Tierra dejaba claro que está se movía respecto al éter, por consiguiente, las cargas eléctricas en reposo al interior de los laboratorios terrestres también debían estar en movimiento respecto al éter dado que se mueven junto con La Tierra. Dicho esto, una carga en reposo, ubicada en la tierra, debía generar un campo magnético por el simple hecho de estar moviéndose respecto al éter, pero, la experiencia nos muestra que esto no sucede, la carga solo genera un campo eléctrico. Este era otro inconveniente que se sumaba a los dos ya mencionados. Con el fin de hacerlo mas explicito y entendible para el lector, mostraremos el siguiente experimento mental en el que, al medir la fuerza generada por dos cargas eléctricas desde distintos sistemas de referencia, se encuentran resultados diferentes de los que se deberían esperar según dicta la teoría.

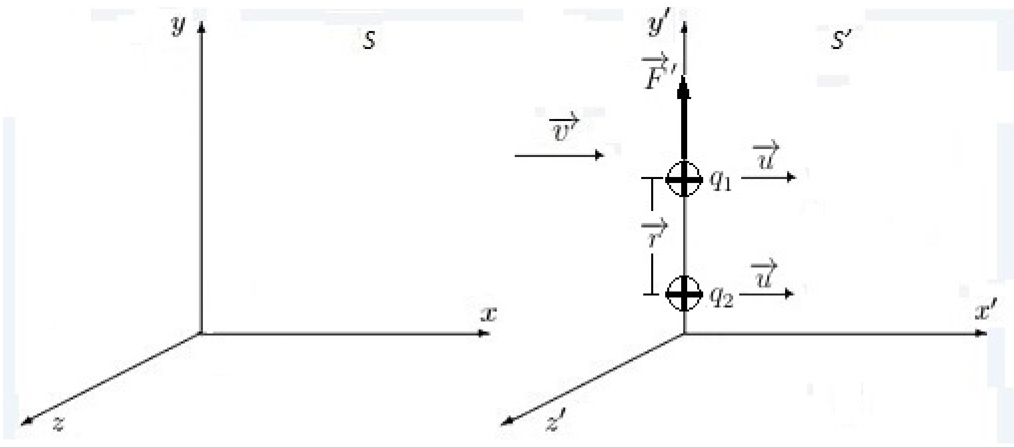

Figura 1.7. Fuerza de Lorentz entre dos cargas electricas medida en los sistemas de referencia S y S'.

En la Física clásica, la fuerza es invariante al cambiar de sistema de referencia, conserva su forma. Es necesario tener presente como es la relación entre las fuerzas medidas en dos sistemas de referencia, uno moviéndose respecto al otro; de paso comprobaremos que mantienen su forma, dicho esto, aplicaremos las ecuaciones de transformación de Galileo a la fuerza newtoniana. Considere los sistemas de referencia S y S', de los cuales, S' se mueve a velocidad constante $\overrightarrow{v}$ sobre el eje x respecto a S. Si en S' se encuentran dos cargas, separadas sobre el eje y a una distancia $\overrightarrow{r}$, que se mueven a una velocidad $\overrightarrow{u}'$ también sobre el eje x, en S, la velocidad de las cargas sera de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}' + \overrightarrow{v}$ (ver figura 1.7), de esta manera:

$$\overrightarrow{F} = \frac{d\overrightarrow{u}}{dt}m \qquad \rightarrow \qquad \overrightarrow{F} = \left(\frac{d\overrightarrow{u}'}{dt} + \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\right)m$$

Como S' se mueve a velocidad constante sobre el eje y, $\dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt} = 0$, así:

$$\overrightarrow{F} = \frac{d\overrightarrow{u}'}{dt}m \qquad \rightarrow \qquad \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}'$$

Vemos como, según las ecuaciones de transformación de galileo, la fuerza medida en distintos sistemas de referencia, aparte de mantener su forma, es exactamente igual. Con esto, podemos proceder a medir la fuerza en S y S' para comprobar que se cumple lo ya demostrado. Comencemos el experimento mental con el sistema de referencia primado. Un observador ubicado en S' notara que las cargas q_1 y q_2 están en reposo, por lo cual, tomando como referencia la carga q_1, sobre esta se mide una fuerza de coulomb dada por:

$$\overrightarrow{F}' = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Como la fuerza que actúa sobre q_1 tiene dirección en el eje y positivo, las componentes de $\overrightarrow{F}'$ son:

$$F'_x = 0; \qquad F'_y = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; \qquad F'_z = 0$$

Un segundo observador, ubicado en S, notara que las cargas son arrastradas por el movimiento de S', por ende, medirá una fuerza de lorentz dada por la siguiente expresión:

$$\overrightarrow{F} = q_2\overrightarrow{E} + q_2\left(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{B}\right) \tag{1.10}$$

Resolviendo el producto cruz obtenemos las componentes de $\overrightarrow{F}$.

$$\begin{aligned} F_x &= q_2 E_x + q_2\left(u_y B_z - u_z B_y\right) \\ F_y &= q_2 E_y + q_2\left(u_z B_x - u_x B_z\right) \\ F_z &= q_2 E_z + q_2\left(u_x B_y - u_y B_x\right) \end{aligned}$$

Mientras el campo eléctrico mantiene la misma dirección de la fuerza, eje y positivo, el campo magnético se genera en dirección del eje z. De esta manera, se presentan las componentes de los campos eléctricos y magnéticos generados cuya demostración omitimos por conveniencia.

$$E_x = 0; \quad E_y = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; \quad E_z = 0; \quad B_x = 0; \quad B_y = 0; \quad B_z = \frac{q_1 u_x}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2}$$

Ademas, las cargas se mueven en dirección del eje x positivo, por consiguiente, $u_y = u_z = 0$. Reemplazando las componentes de los campos $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{E}$ y de la velocidad $\overrightarrow{u}$ en las componentes de la fuerza medida por el observador ubicado en S, nos queda que:

$$F_x = 0; \qquad F_y = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{q_1 q_2 u_x^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1 - \frac{u_x^2}{c^2}\right); \qquad F_z = 0$$

Como las cargas en S' se encuentran en reposo $\overrightarrow{u}' = 0$, la velocidad de las cargas medida en el sistema S sera $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} = v_x$, por consiguiente:

$$F_y = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)$$

Notese como, mientras las componentes de los ejes x y z de las fuerzas son iguales, las componentes del eje y de las fuerzas medidas en los dos sistemas de referencia son diferentes y el factor que da cuenta de ello es la razón de la velocidad relativa de los dos sistemas de referencia y la velocidad de la luz. Esto no concuerda con lo obtenido en un inicio al demostrar la relación de las fuerzas al cambiar de sistema de referencia partiendo de las ecuaciones de transformación de galileo. Se supone que ambos observadores deberían medir exactamente la misma fuerza, pero, no solo encontramos que los dos observadores miden cosas diferentes en sus sistemas de referencia a partir del mismo hecho físico sino que, a la vez, comprobamos que las transformaciones galileanas no corresponden con los fenómenos eléctricos y magnéticos.

Adicionalmente, si la velocidad de las cargas es sumamente pequeña comparada con la velocidad de la luz, el factor adicional en F_y puede ser despreciado, así, las fuerzas medidas en los dos sistemas de referencia serian iguales argumentando la validez de las ecuaciones de transformación de Galileo. Este hecho físico resulta sorprendente y la teoría especial de la Relatividad lo explicaría al afirmar la constancia de la velocidad de la luz y, a su vez, considerarla como limite de velocidad para todo cuerpo.

1.3.4. Algunas consideraciones respecto a la no covarianza de las leyes electromagnéticas de Maxwell.

La mecánica de Newton era compatible con el principio de Relatividad galileano y sus ecuaciones de transformación, pero, las leyes del electromagnetismo clásico y los fenómenos eléctricos y magnéticos no lo eran, por ende, tampoco lo era el fenómeno electromagnético. Es por lo anterior que fueron supuestos tres casos posibles para dar solución a este problema:

1. La teoría electromagnética de Maxwell resultaba estar errada.
2. Se debía reafirmar o poner en duda la existencia de un sistema de referencia privilegiado sobre el cual realizar todas las mediciones de los demás sistemas de referencia.

3. Las transformaciones de Galileo no eran las correctas.

El primer caso fue descartado casi de manera inmediata debido a que la teoría electromagnética de Maxwell estaba respaldada por trabajos experimentales que mostraban la correspondencia entre electricidad y magnetismos y que tuvieron lugar en el siglo XIX. De hecho, como ya hemos visto, el sustento de las ecuaciones de Maxwell en su mayoría fue puramente experimental gracias a los grandes aportes de Ørsted, Ampere y Faraday principalmente, esto sin dejar de lado que las 20 ecuaciones que publico en su tratado de electricidad y magnetismo mostraban una gran y complejo análisis matemático.

En el segundo caso, ni siquiera Poincaré, con su amplio análisis respecto al movimiento relativo de los cuerpos, tuvo la confianza y los argumentos necesarios para descartar la idea del éter como sistema de referencia absoluto. Es por esto que distintas teorías respecto al éter fueron formuladas, especialmente luego de que se obtuvieran los resultados negativos proporcionados por distintos modelos experimentales de los que se destaca el célebre experimento de Michelson y Morley; la finalidad de este era dar cuenta del movimiento relativo de La Tierra respecto al éter. Todos los resultados que arrojaron los distintos experimentos dieron paso a especulaciones en relación a la constancia de la velocidad de la luz, al arrastre parcial de éter por parte de La Tierra e incluso a la inexistencia de este, además, muchos científicos dotaron al éter de ciertas características que diferían de la materia ordinaria con la única finalidad de aceptar su existencia. Con todos los problemas que se estaban presentando y la complejidad de demostrar la existencia de este medio, resultaba complicado suponer el éter como sistema de referencia absoluto.

El experimento de Michelson y Morley fue tan ingenioso que muchos científicos se dedicaron a recrearlo teniendo en cuenta minuciosas consideraciones para evitar cualquier tipo de perturbación y obtener un resultado favorable, lo que no paso. FitzGerald, un físico Irlandés, sugirió que los cuerpos se contraían en dirección del movimiento y que dicha contracción era proporcional a su velocidad, de ahí que el experimento de Michelson y Morley fuera negativo, pues, los brazos del interferómetro contraían su longitud en la dirección en que La Tierra se movía respecto al éter. Lorentz también propuso esa hipótesis solo que él, de manera independiente, consideró que la longitud de los cuerpos en movimiento disminuía en proporción a la razón de la velocidad del cuerpo en movimiento y la velocidad de la luz(v/c), de esta manera había llegado a la misma conclusión de FitzGerald afirmando la contracción de los cuerpos en la dirección de su movimiento, solo que lo había hecho junto con un sustento matemático, es por lo anterior que en varios casos este fenómeno es denominado como la contracción de Lorentz-FitzGerald.

Con este análisis es puesto en evidencia el gran dilema por el que pasaba la Física clásica en aquella época. Todo se esclarecería con la formulación de la teoría especial de la Relatividad de Albert Einstein. Es por lo anterior que, en el presente trabajo, resulta imprescindible tratar con los fundamentos de la teoría especial de la relatividad.

Capítulo 2

Electrodinámica Relativista.

2.1. Introducción a la teoría especial de la Relatividad (T.E.R.)

Los acontecimientos que surgieron después de la primera mitad del siglo XIX relacionados al movimiento relativo de La Tierra respecto al éter y a los problemas que presentaba la electrodinámica de Maxwell con la Relatividad galileana fueron fundamentales para el desarrollo de una de las dos grandes ramas de la Física moderna ya que permitieron dar cuenta de cómo la Física clásica no era suficiente para poder explicar todos los fenómenos naturales. El éter jugo un papel importante en el origen de la teoría especial de la Relatividad debido a los trabajos experimentales encaminados a mostrar el movimiento relativo de La Tierra respecto a él, de estos trabajos experimentales el más destacado ha sido el de Michelson y Morley que con sus resultados negativos dio cabida a la formulación de distintas hipótesis y a la búsqueda de posibles errores que sustentaran esos resultados.

Tal como destaca Vélez (2012), fueron supuestas 4 hipótesis concernientes a explicar los resultados negativos obtenidos por el experimento de Michelson y Morley:

- El reposo de La Tierra en el espacio.
- La contracción de los cuerpos en la dirección del movimiento.
- La velocidad de la luz depende del movimiento de la fuente.
- La velocidad de la luz independiente del movimiento de la fuente y del observador.

Estas hipótesis fueron consideradas erróneas por falta de argumentos empíricos como en el caso de la contracción de los cuerpos; Fitzgerald la menciono tres años antes de que Lorentz la propusiera junto con un sustento matemático(Sánchez, 1983), o porque los avances científicos de la época mostraban su falsedad como es el caso del reposo de La Tierra, muchos descubrimientos astronómicos corroboraban el movimiento de La Tierra en el espacio.

Dos de estas hipótesis en principio no estaban muy alejadas del sustento teórico y racional que proporcionaría la teoría especial de la Relatividad y que serían la solución a los problemas que tanto malestar generaron en los científicos de la época, pero, para hablar de dicha teoría y del genio que la desarrolló debemos resaltar las ideas de Henry Poincaré en relación a la relatividad. Los resultados del experimento de Michelson y Morley le permitieron a Poincaré pensar en que no se podía detectar el movimiento absoluto de los cuerpos respecto al medio éter, de esta manera dedico gran parte de su estudios a pensar en la relatividad del movimiento.

En la feria mundial de 1904 realizada en Estados Unidos, los organizadores de la exposición internacional de Saint Louis patrocinaron un congreso internacional que tenía como finalidad describir el progreso de las distintas áreas del pensamiento humano a lo largo del siglo XIX, muchas figuras reconocidas de la época fueron invitadas, una de estas figuras fue Poincaré, quien aprovechó la oportunidad para exponer el malestar en el que se debatía la Física, allí enuncio su principio de relatividad y sus ideas en relación al movimiento de los cuerpos.

> Poincaré... enuncio su célebre «Principio de la Relatividad» estableciendo que, las leyes de la Física deben ser las mismas cuando se las describe, ya sea desde un sistema de referencia inercial, o desde un sistema de referencia en movimiento rectilíneo y uniforme relativo al primero; en particular, reitera que no hay forma experimental alguna para decidir si uno de los observadores está realmente en reposo absoluto. (Sánchez, 2013, p. 24 ¶ 141)

La dedicación de Poincaré al malestar de la Física en aquel entonces le permitió desarrollar ideas muy elaboradas sobre el movimiento relativo de los cuerpos y estas las pone en evidencia no solo con su postulado de Relatividad sino también al reconocer la importancia del tiempo propio de Lorentz suponiendo la constancia de la velocidad de la luz independientemente de la velocidad de la fuente que la emita. De esta manera Poincaré ya daba por sentadas las bases para elaborar una nueva teoría de la Física, pero más allá de los resultados negativos que arrojaron los trabajos experimentales hechos para dar cuenta de la existencia del éter, la gran mayoría de los estudiosos del tema consideraban que Poincaré creía que su principio de Relatividad debía tener alguna explicación desde la electrodinámica(Sánchez, 2013). Se podría pensar que en aquella época eran necesarios argumentos más elaborados que dieran paso a descartar la idea del éter como marco de referencia privilegiado y es ahí donde aparece el prodigioso Albert Einstein en 1905 con su célebre monografía titulada *"Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento"*.

2.2. El aporte de Einstein.

Para Einstein el problema de la Física a finales del siglo XIX no radicaba en la búsqueda de un sistema de referencia privilegiado (en reposo absoluto) sobre el cual hacer las mediciones de los demás sistemas de referencia, más bien estaba ligado al hecho de que aparecieran asimetrías entre la interpretación común y los fenómenos observados cuando se aplicaba la electrodinámica de Maxwell a cuerpos en movimiento. En su monografía *"Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento"* presenta un claro ejemplo que pone en evidencia dichas asimetrías: Einstein supone la interacción entre un imán y un conductor, la interpretación común nos dice que si el imán se mueve respecto al conductor que se encuentra en reposo, alrededor del imán aparecerá un campo eléctrico con cierta cantidad de energía que generara en el conductor una corriente eléctrica, pero, si el conductor se mueve respecto al imán que se encuentra en reposo, en este no se genera ningún campo eléctrico mientras que en el conductor se produce una fuerza electromotriz que no corresponde a ninguna energía pero que da lugar a corrientes eléctricas. Pensando en el fenómeno observado, este solo depende del movimiento relativo entre el imán y el conductor. (Einstein, 1905/2005)

Einstein consideraba que los resultados negativos encaminados a mostrar el movimiento relativo de La Tierra respecto al éter se debían a que, al igual que las leyes de la mecánica, las leyes de la electrodinámica debían ser válidas para cualquier sistema de referencia, a esta hipótesis la denomino *principio de la Relatividad*, pero, para poder encontrar una electrodinámica de cuerpos en movimiento sencilla y en ausencia de irregularidades, reitera que es necesaria una segunda hipótesis que corresponde a la constancia de la velocidad de la luz sin importar la velocidad de la fuente emisora[14]. De esta manera Einstein dio el gran paso que a Poincaré le falto dar y fue el descartar la idea del éter como sistema de referencia absoluto, esto lo hace al pensar en los sistemas de referencia inerciales como los elementales para dar cuenta del comportamiento de los fenómenos. En palabras de Vélez (2012), "la importancia histórica de Einstein, y la medida de su genialidad, está precisamente en la extensión del principio de Relatividad a la teoría electromagnética: Como en la mecánica, en el electromagnetismo solo interesan los movimientos relativos."(p.230)

2.3. Ecuaciones de transformación de Lorentz.

Lorentz fue un fiel amante a los trabajos de Fresnel y Maxwell, esto lo puso en evidencia en su tesis doctoral en la que analizo la teoría de la luz de Fresnel y la naturaleza de la luz según la teoría electromagnética de Maxwell a fin de, por medio de esta ultima, dar explicación a los fenómenos de reflexión y refracción(Sánchez, 1983), desde ahí su interés por la electrodinámica de los cuerpos empezó a fomentarse.

Hallar el campo creado por una carga en movimiento fue un problema que Lorentz abordo encontrando ciertos inconvenientes en las ecuaciones de Maxwell al cambiar de sistemas de referencia, esto prontamente lo resolvería al deducir y utilizar un conjunto de transformaciones que no difieren mucho de las que actualmente conocemos como ecuaciones de transformación de Lorentz[15]. Estas transformaciones, para Lorentz, no representaban algún significado físico ya que solo las concebía como instrumento matemático necesario para dar solución a las ecuaciones que obtenía en su análisis de la electrodinámica de los cuerpos, incluso, en ellas el tiempo era definido en términos de una coordenada espacial y las velocidades del cuerpo y de la luz, pero, para el solo era un artificio matemático que denomino tiempo propio asociado al sistema de referencia.

[14] Estas dos hipótesis son lo que actualmente se conoce como los postulados de la teoría especial de la Relatividad formulada por Einstein en 1905.

[15] Lorentz obtendría la expresión final de sus ecuaciones de transformación luego de proponerse dar una solución general a todos los distintos resultados experimentales negativos del movimiento de La Tierra respecto al éter. No siendo suficiente con la luz, los fenómenos electromagnéticos tampoco daban evidencia de un movimiento relativo entre Tierra y medio éter.

Sin darse cuenta, Lorentz no solo encontraría la solución a estos resultados experimentales negativos sino que le estaba quitando al tiempo su carácter absoluto al depender de una coordenada espacial, la gran importancia de esto en la Física seria destacada con la formulación de la teoría especial de la Relatividad por Albert Einstein.

Analizando los problemas que presentaba la electrodinámica de Maxwell al ser aplicada a cuerpos en movimiento, Einstein deduciría las ecuaciones de transformación a las que Lorentz finalmente había llegado buscando explicar los distintos resultados negativos del experimento de Michelson y Morley y de otros experimentos referentes al movimiento de La Tierra en el éter(Recuérdese el experimento de la balanza de torsión de Trouton y Noble que hacia uso de fenómenos electromagnéticos), la formulación de la teoría especial de la Relatividad trajo consigo una concepción de los fenómenos naturales totalmente distinta al reemplazar las ecuaciones de transformación de Galileo por otro grupo de transformaciones solucionando así los inconvenientes que se estaban presentando en relación al movimiento relativo de los cuerpos y la falta de simetría de las ecuaciones que sustenta el electromagnetismo clásico. Para poder hablar de estas nuevas ecuaciones de transformación es necesario resaltar la idea de tiempo propio ya que, si bien Lorentz no considero que este representaba algún significado físico, Poincaré lo considero esencial para explicar la simultaneidad de dos eventos y, como mas adelante veremos, la Relatividad especial lo sugería como el resultado de considerar al tiempo, no como un parámetro para cualquier sistema de referencia, sino como una variable dinámica adicional a las coordenadas espaciales que se tenían hasta entonces.

2.3.1. Tiempo propio.

Lorentz se puso la tarea de explicar los resultados experimentales negativos concernientes a demostrar el movimiento de La Tierra respecto al éter, para ello utilizo su ingenio y partió de su estudio concerniente a la electrodinámica de los cuerpos en el que había utilizado un conjunto de ecuaciones de transformación a fin de solucionar unas inconsistencias que encontró al utilizar las ecuaciones de Maxwell para dos sistemas de referencia[16], de este conjunto una ecuación expresaba al tiempo de un sistema en términos del tiempo y de una coordenada espacial del otro sistema, por lo cual, lo denomino como tiempo propio.

Mientras para Lorentz este tiempo propio no significaba nada físicamente, Poincaré lo consideró esencial para hablar de la simultaneidad de dos eventos partiendo de señales luminosas. adoptando la idea de la velocidad de la luz como límite para todo cuerpo, explicaba como dos observadores, A y B, podían tener sus relojes sincronizados si: al ser lanzados dos haces de luz, uno de A hasta B y el otro de B hasta A, el tiempo de más que marcara el reloj de B una vez llegase el haz lanzado desde A fuese igual al tiempo de más marcado por el reloj de A cuando este haya detectado el haz de luz lanzado desde B, es decir, el tiempo que tarden ambos haces de luz en llegar al otro punto luego de ser emitidos de manera simultanea debe ser el mismo, pero ojo, lo anterior solo resultó ser

[16]En caso de que el lector desee informarse sobre el trabajo desarrollado por Lorentz referente a la electrodinámica de los cuerpos puede remitirse al libro de Sánchez Ron titulado el origen y desarrollo de la relatividad.

válido para sistemas de referencia en reposo, para el caso en el que estos se encuentren en movimiento el tiempo medido por ambos observadores será distinto, pues, al acercarse y alejarse uno del otro provocara que los haces de luz emitidos de un observador a otro lleguen con tiempos diferentes.

Suponga que los observadores A y B se mueven en dirección positiva del eje x con la misma velocidad y separados por cierta distancia l, los relojes de ambos observadores se encuentran sincronizados. Si en t_0 A emite un haz de luz en la misma dirección de su movimiento, este tardara un tiempo t en recorrer la distancia l, pero, en ese mismo tiempo A y B siguieron moviéndose por lo que el haz de luz todavía no a alcanzado a B, por lo tanto, cuando el haz alcance a B este habrá recorrido una distancia total de $l + l_1$, donde l_1 es la distancia adicional que recorrió B, y medirá un tiempo total de $t + t_1$, donde t_1 es el tiempo que emplea el haz en recorrer la distancia l_1, ahora, si en t_0 B también emite un haz de luz en dirección contraria a su movimiento, A se ira acercando al haz, por lo cual, este ultimo recorrerá una distancia menor a l y sera detectado por A en un tiempo menor a t, pues, ese es el tiempo que tarda el haz en recorrer la distancia l que separaba a B de A cuando los relojes marcaban t_0.

En conclusión, los relojes de ambos observadores no estarán sincronizados si estos se encuentren en movimiento, pues, detectaran los haces de luz en tiempos diferentes mostrando como el reloj de uno se retrasara respecto al del otro. Esto permite suponer que no existe un tiempo en común(igual) para todos los sistemas de referencia, por tanto, la idea de tiempo propio es concebida ya que cada observador mide su propio tiempo respecto a un evento en particular(emisión simultanea de dos haces de luz).

2.3.2. Las ecuaciones de transformación.

Fitzgerald, intentando explicar los resultados negativos del experimento de Michelson y Morley, supuso que los cuerpos tendían a contraerse en dirección del movimiento. Lorentz también desarrolló esta idea junto con un sustento matemático que le permitía mostrar como la longitud de un cuerpo en movimiento disminuía dependiendo del factor v/c donde v corresponde a la velocidad del cuerpo y c es la velocidad de la luz. Esta hipótesis junto con la idea de tiempo propio serian generalizadas y formalizadas por Einstein en su monografía concerniente a la electrodinámica de cuerpos en movimiento al deducir las ecuaciones de transformación de Lorentz y explicar su significado físico, además, con estas ecuaciones lograba dar solución al problema de la no covarianza de las ecuaciones de Maxwell bajo las ecuaciones de transformación de Galileo, como se explico en el apartado (1.3.3), una posible solución a este problema era suponer que las ecuaciones de transformación de galileo no eran correctas.

Teniendo en cuenta dos sistemas de referencia inerciales, S y S', con un movimiento relativo entre ellos que se da sobre el eje de las equis. Para un observador ubicado en un sistemas de referencia S, cuyas coordenadas asociadas son x, y, z, y t, las coordenadas de un evento que tenga lugar en un marco de referencia S', cuyas coordenadas asociadas son x', y', z' y t', están dadas por el siguiente conjunto de ecuaciones de transformación.

$$\begin{cases} x' = \gamma\,(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \qquad \text{donde} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{2.1}$$

v es la velocidad del sistema de referencia en el que tiene lugar el evento y γ es el factor de Lorentz en el que, por medio de la velocidad relativa entre v y c, da cuenta de cómo la máxima velocidad que pueden alcanzar los cuerpos es la velocidad de la luz c. Estas ecuaciones de transformación pueden ser expresadas en forma matricial partiendo de la relación:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad \text{donde } \; x_1 = ct \quad \wedge \quad x'_1 = ct' \tag{2.2}$$

La matriz anterior es la matriz de transformación de Lorentz que generalmente se denota con la letra griega Λ.

Cuando la velocidad v es muy pequeña comparada con la velocidad de la luz, el valor de v/c se hace prácticamente nulo y así el factor de Lorentz toma el valor de 1, de esta manera, partiendo de las ecuaciones de transformación de Lorentz podemos llegar a las ecuaciones de transformación de Galileo, concluyendo así que estas últimas son válidas para aquellos fenómenos en los cuales las velocidades relativas de los cuerpos son sumamente pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Esto es de suma importancia ya que las ecuaciones de transformación de Galileo habían sido confirmadas por la experiencia durante más de dos siglos y el que las ecuaciones de transformación de Lorentz no fueran compatibles con las ecuaciones de transformación de Galileo implicaba buscar una explicación a la correspondencia entre estas últimas y los resultados experimentales(Vélez, 2012).

2.3.3. Consecuencias de las ecuaciones de transformación de lorentz.

Estas nuevas ecuaciones de transformación trajeron consigo una serie de consecuencias referentes a la medición y la explicación del comportamiento de los eventos físicos. En primera instancia se exponen los límites de velocidad para cualquier cuerpo, no solo surge la imposibilidad de encontrar una señal que viaje con una velocidad mayor a la de la luz sino que se verifica la validez de las ecuaciones de transformación de Galileo ya que estas resultan ser un caso limite cuando las velocidades de los cuerpos son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Siendo la velocidad del cuerpo v y la de la luz c, al ser $v << c$, la relación de estas velocidades tiende a ser prácticamente nula ($v/c \to 0$), de esta manera, aplicando este limite a la primera ecuación del conjunto de ecuaciones (2.1):

$$\lim_{v/c\to 0} x' = \lim_{v/c\to 0} \gamma(x - vt)$$

Reemplazando el valor del factor γ en la expresión anterior:

$$x' = \lim_{v/c\to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)(x - vt)$$

$$x' = x - vt \tag{2.3}$$

Deducimos la ecuación de transformación espacial de Galileo partiendo de la ecuación de transformación espacial de Lorentz, así mismo para la ecuación de transformación temporal(cuarta ecuación del conjunto de ecuaciones (2.1)):

$$\lim_{v/c\to 0} t' = \lim_{v/c\to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)\left(t - \frac{v/c}{c}x\right)$$

$$t' = t \tag{2.4}$$

En segunda instancia el espacio y el tiempo pierden su carácter absoluto. A velocidades cercanas a la de la luz, la longitud de un cuerpo será distinta debido a su movimiento relativo respecto cualquier observador. Hipotéticamente, para un observador A que viaje sobre una regla métrica con una velocidad cercana a la de la luz, la longitud de esta medida por A será distinta a la longitud medida por un observador B al presenciar el movimiento de la regla métrica, este último medirá un valor de longitud iguala a ($\sqrt{1 - v^2/c^2}$) veces la longitud medida por A. Por último, el espacio y el tiempo estarían íntimamente conectados a tal punto que conformarían una sola entidad denominada *espacio-temporal*, esta relación se evidencia fácilmente en la ecuación de transformación de la coordenada temporal de Lorentz ya que se encuentra definida en términos de una coordenada temporal y una espacial.

2.3.4. Fuerzas medidas por dos observadores en distintos sistemas de referencia: Interpretación Relativista.

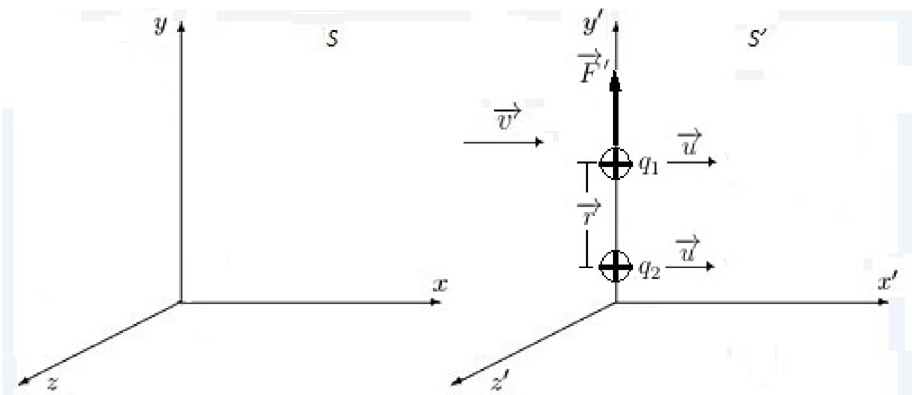

Figura 2.1. Fuerza de Lorentz entre dos cargas electricas medida en los sistemas de referencia S y S'.

Como fue mostrado en la sección (1.3.3), al analizar las fuerzas medidas en distintos sistemas de referencia a partir de la observación del estado de movimiento de una configuración de dos carga se encuentran resultados contradictorios con la teoría. Recordemos el experimento mental en el que las dos cargas, separadas a una distancia $\overrightarrow{r}$, están en reposo sobre un sistema de referencia(S') que se aleja a velocidad v de un segundo sistema de referencia(S), ver figura 2.1.

Según las ecuaciones de transformación de galileo, las fuerzas medidas en dos sistemas de referencia deben ser exactamente iguales, $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}'$. Esto no sucede en la relatividad especial, las fuerzas medidas en distintos sistemas de referencia deben satisfacer las siguientes relaciones.

$$F'_x = \frac{F_x - (v/c^2)\,\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{F}}{1 - u_x v/c^2}; \qquad F'_y = \frac{F_y}{\gamma\,(1 - u_x v/c^2)}; \qquad F'_z = \frac{F_z}{\gamma\,(1 - u_x v/c^2)}$$

Estas ecuaciones argumentan la ley general de transformación de fuerzas y se obtienen al aplicar las ecuaciones de transformación de Lorentz a la ecuación que define la fuerza en la mecánica newtoniana. Con esto, podemos proceder a medir la fuerza en S y S' con la finalidad de comprobar que se cumplen estas relaciones.

Un observador ubicado en S' notara que las cargas q_1 y q_2 están en reposo, por lo cual, tomando como referencia la carga q_1, sobre esta se mide una fuerza de coulomb dada por:

$$\overrightarrow{F}' = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Como la fuerza que actúa sobre q_1 tiene dirección en el eje y positivo, las componentes de $\overrightarrow{F}'$ son:

$$F'_x = 0; \qquad F'_y = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; \qquad F'_z = 0$$

Un segundo observador, ubicado en S, notara que las cargas son arrastradas por el movimiento de S', por ende, medirá una fuerza de lorentz dada por la siguiente expresión:

$$\overrightarrow{F} = q_2\overrightarrow{E} + q_2\left(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{B}\right)$$

Resolviendo el producto cruz obtenemos las componentes de $\overrightarrow{F}$.

$$F_x = q_2 E_x + q_2\,(u_y B_z - u_z B_y)$$
$$F_y = q_2 E_y + q_2\,(u_z B_x - u_x B_z)$$
$$F_z = q_2 E_z + q_2\,(u_x B_y - u_y B_x)$$

Mientras el campo eléctrico mantiene la misma dirección de la fuerza, eje y positivo, el campo magnético se genera en dirección del eje z. De esta manera, presentamos las componentes de los campos eléctricos y magnéticos generados cuya demostración omitimos.

$$E_x = 0; \quad E_y = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{1}{\sqrt{1 - u_x^2/c^2}}; \quad E_z = 0$$

$$B_x = 0; \quad B_y = 0; \quad B_z = \frac{q_1 u_x}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - u_x^2/c^2}}$$

Ademas, las cargas se mueven en dirección del eje x positivo, por consiguiente, $u_y = u_z = 0$. Reemplazando las componentes de los campos $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{E}$ y de la velocidad $\overrightarrow{u}$ en las componentes de la fuerza medida por el observador ubicado en S, nos queda que:

$$F_x = 0; \qquad F_y = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - u_x^2/c^2}} - \frac{q_1 q_2 u_x^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - u_x^2/c^2}}; \qquad F_z = 0$$

$$F_y = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{u_x^2}{c^2}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - u_x^2/c^2}}$$

Como las cargas en S' se encuentran en reposo $\overrightarrow{u}' = 0$, la velocidad de las cargas medida en el sistema S sera $\overrightarrow{u} = u_x = v$, por consiguiente, reemplazando y simplificando nos queda que:

$$F_y = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Notese como, mientras las componentes de los ejes x y z de las fuerzas son iguales, las componentes del eje y de las fuerzas medidas en los dos sistemas de referencia, a pesar de ser diferentes, muestran como la fuerza mantiene su forma solo que con un factor adicional que depende de la velocidad relativa de los dos sistemas de referencia y la velocidad de la luz. Si reemplazamos la fuerza F_y en la ley de transformación general de la fuerza correspondiente al eje y encontramos que:

$$F'_y = \frac{F_y}{\gamma\left(1 - u_x v/c^2\right)} \qquad \rightarrow \qquad F'_z = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \sqrt{1 - v^2/c^2} \left[\frac{1}{\gamma\left(1 - u_x v/c^2\right)}\right]$$

Recordando que $u_x = v$, simplificando nos queda que:

$$F'_z = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \left(\frac{1}{\gamma\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \qquad \text{como}\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad F'_z = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Se comprueba finalmente que los observadores ubicados en los dos sistemas de referencia miden la misma fuerza, solo que con un valor diferente debido al movimiento relativo de sus sistemas de referencia. Al cumplir estas fuerzas con la ley general de transformación de las fuerzas se evidencia como las ecuaciones de transformación de Lorentz son las correctas para medir los fenómenos en distintos sistemas inerciales y no lo son las ecuaciones de transformación de Galileo que, como se expuso en la sección (1.3.3), no corresponden por las mediciones hechas segun distintos sistemas de referencia.

2.4. Ecuaciones de transformación de los campos.

Las ecuaciones de Maxwell no eran suficientes para explicar los fenómenos electromagnéticos en cualquier sistema de referencia inercial, pues, su valides se concebía sólo para sistemas de referencia en reposo respecto al éter. Para sistemas de referencia en movimiento, las leyes electromagnéticas no se mantenían covariantes bajo las transformaciones de Galileo mostrando una falta de simetría del fenómeno observado en distintos referenciales inerciales.

Lorentz, haciendo un análisis en relación a la electrodinámica de los cuerpos en movimiento, dedujo un conjunto de transformaciones que le permitían solucionar ciertos inconvenientes que encontraba en la teoría electromagnética de Maxwell, ademas, con los resultados experimentales encaminados a mostrar el movimiento relativo de La Tierra en el éter se vió obligado a generalizarlas obteniendo como resultado final las ecuaciones de transformación que actualmente conocemos; debido a esto, resultaba lógico suponer que dichas ecuaciones darían respuesta a la no covarianza de las leyes electromagnéticas para todo sistema de referencia inercial, Poincaré no fue ajeno a esto por lo que, estudiando la relatividad del movimiento de los cuerpos, analizo el trabajo de Lorentz y la idea de tiempo propio para la simultaneidad de dos eventos, así, los resultados que obtuvo fueron suficientes para permitirse formular su principio de Relatividad (el cual se cito en le apartado (2.1)). Einstein, en su monografía correspondiente al estudio de la electrodinámica aplicada a cuerpos en movimiento, deduce este conjunto de ecuaciones y hace uso de ellas para dar cuenta de la transformación de las ecuaciones de Maxwell para el espacio vacío teniendo en cuenta la fuerza electromotriz generada por un campo magnético variable.

Lo anterior destacaba las transformaciones de Lorentz como solución a los inconvenientes presentados por las ecuaciones de Maxwell bajo las ecuaciones de transformación galileanas, además, tales ecuaciones eran confirmadas por la teoría especial de la Relatividad y esta resolvía el problema que presentaban las cargas en movimiento al mostrar fenómenos diferentes en distintos sistemas de referencia inerciales, pues, debido al movimiento relativo de los observadores el fenómeno, que en sí es el mismo para cualquier observador, puede ser caracterizado de manera diferente, tal como sucede con el ejemplo de una regla métrica en movimiento rectilíneo uniforme cuya longitud medida por un observador A situado sobre ella difiere del valor medido por un observador B que la ve moverse junto con el observador A a bordo. En resumen, la teoría de la Relatividad especial de Einstein tiene gran fundamento en las ecuaciones de transformación de Lorentz y estas son esenciales para hablar de la solución a los problemas presentados en la teoría electromagnética.

Para dar cuenta de esta nueva concepción del fenómeno electromagnético de cargas en movimiento según las ecuaciones de transformación de Lorentz y mostrar cómo en un referencial inercial se miden efectos eléctricos(campo eléctrico) mientras en otro se miden efectos eléctricos y magnéticos(Campo eléctrico y magnético) surgen un conjunto de ecuaciones conocidas como ecuaciones de transformación de los campos en las que se hace evidente como campos eléctricos y magnéticos están correlacionados entre si, tal como lo destaca la teoría electromagnética de Maxwell.

2.4.1. Ecuaciones de transformación del campo eléctrico para dos sistemas de referencia inerciales.

Hipotéticamente supongamos la existencia de dos sistemas de referencia inerciales denotados como S Y S' de los cuales S' se mueve a velocidad $\overrightarrow{v} = (v, 0, 0)$ respecto a S que se encuentra en reposo. En S' es colocada una carga q en reposo(Figura 2.2).

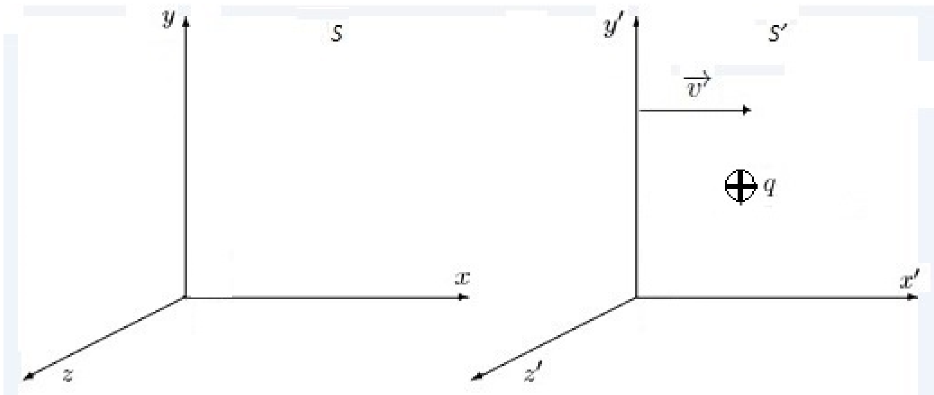

Figura 2.2. Sistema de referencia S' moviéndose con velocidad v_x respecto a S.

Un observador ubicado en el S presencia que la carga q se aleja de el en dirección del eje x a una velocidad $\overrightarrow{v}$ ya que esta es arrastrada por el sistema de referencia S'. Esto le permite medir un campo eléctrico y uno magnético y así deducir que la carga experimenta una fuerza de lorentz descrita por la siguiente expresión:

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} + q\left[\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}\right] \tag{2.5}$$

Recuérdese que $q\overrightarrow{E}$ es la fuerza eléctrica y $q\left[\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}\right]$ la fuerza magnética. Resolviendo el producto cruz $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}$ podemos expresar la fuerza de Lorentz en cada una de sus componentes:

$$F_x = qE_x \tag{2.6}$$

$$F_y = q\left[E_y - vB_z\right] \tag{2.7}$$

$$F_z = q\left[E_z + vB_y\right] \tag{2.8}$$

Si otro observador es situado en S', este ve la carga en reposo ya que ambos se encuentran sobre el mismo sistema de referencia, por ende sólo mide un campo eléctrico y encuentra que la carga experimenta una fuerza eléctrica, no hay fuerza magnética debido a su estado de movimiento, dicha fuerza esta dada por la expresión:

$$\overrightarrow{F'} = q\overrightarrow{E'} \tag{2.9}$$

Si expresamos esta fuerza en términos de sus componentes obtenemos que:

$$F'_x = qE'_x \tag{2.10}$$

$$F'_y = qE'_y \tag{2.11}$$

$$F'_z = qE'_z \tag{2.12}$$

Ahora, sabiendo que fuerzas experimenta la carga q en S Y S', podemos relacionarlas por medio de las fuerzas que genera en cada sistema de referencia. Al igual que sucede con el tiempo y las coordenadas espaciales, las variables físicas también adquieren un nuevo grupo de transformaciones deducidas a partir de las transformaciones del tiempo y de las coordenadas espaciales. Por conveniencia, en el caso de la fuerza según distintos sistemas de referencia, pasaremos por alto la deducción de estas ecuaciones permitiéndonos enunciarlas a fin de poder utilizarlas. Dicho esto, la ley general de transformación de las fuerzas nos muestra las ecuaciones de transformación:

$$\left\{ \begin{aligned} F'_x &= \frac{F_x - (v/c^2)\,\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{F}}{1 - u_x v/c^2} \\ F'_y &= \frac{F_y}{\gamma\,(1 - u_x v/c^2)} \\ F'_z &= \frac{F_z}{\gamma\,(1 - u_x v/c^2)} \end{aligned} \right. \tag{2.13}$$

Donde la fuerza $\overrightarrow{F} = F_x + F_y + F_z$ y $\overrightarrow{u} = u_x + u_y + u_z$ es la velocidad de la carga q medida por el observador en S. En nuestro caso, la carga se encuentra en reposo en S' y este se mueve con velocidad v sobre el eje de las equis respecto a S, por lo tanto, se concluye que $u_x = v$ y $u_y = u_z = 0$.

Teniendo en cuenta lo anterior, y que $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, podemos simplificar las ecuaciones de transformación de las fuerzas obteniendo que:

$$F'_x = \frac{F_x - (v/c^2)\,vF_x}{1 - v^2/c^2} \qquad \rightarrow \qquad F'_x = F_x \tag{2.14}$$

$$F'_y = \gamma F_y \tag{2.15}$$

$$F'_z = \gamma F_z \tag{2.16}$$

De esta manera procedemos a encontrar la relación entre los campos eléctricos de los dos sistemas de referencia, para ello, primero reemplazamos las ecuaciones (2.6) y (2.10) en la ecuación (2.14) obteniendo que:

$$E'_x = E_x \tag{2.17}$$

De igual forma, al reemplazar las ecuaciones (2.7) y (2.11) en la ecuación (2.15) tendremos que:

$$E'_y = \gamma\,[E_y - vB_z] \tag{2.18}$$

Y haciendo un procedimiento análogo con las ecuaciones (2.8) y (2.12) en la ecuación (2.16):

$$E'_z = \gamma\,[E_z + vB_y] \tag{2.19}$$

Finalmente llegamos a las ecuaciones de transformación para el campo eléctrico en sus tres componentes. El principio de Relatividad permite establecer una simetría entre los sistemas de referencia inerciales respecto al fenómeno observado, es por ello que podemos encontrar las transformaciones para el campo $\overrightarrow{E}$ en términos de $\overrightarrow{E'}$ y $\overrightarrow{B'}$ partiendo del hecho de que podemos sustituir x por x', y por y', z por z' y v por $-v$, esta ultima producto del movimiento relativo entre los sistemas de referencia, de esta manera:

$$\left\{ \begin{aligned} E_x &= E'_x \\ E_y &= \gamma\left[E'_y + vB'_z\right] \\ E_z &= \gamma\left[E'_z - vB'_y\right] \end{aligned} \right. \tag{2.20}$$

Con estas relaciones encontradas se puede dar cuenta de un hecho físico relevante y es la estrecha correspondencia entre fenómenos eléctricos y magnéticos que aparece al medir un mismo suceso desde distintos sistemas de referencia. Al tener en un sistema de referencia una carga eléctrica en reposo se medirán efectos eléctricos(caracterización de un campo eléctrico) mientras que en otro sistema de referencia moviéndose relativamente al primero se medirá efectos eléctricos y magnéticos(caracterización de un campo eléctrico y uno magnético). El lector puede notar que, si se analiza mas a fondo el conjunto de ecuaciones (2.20), el campo eléctrico generado en la dirección del movimiento de la carga mantiene su carácter puramente eléctrico en ambos sistemas de referencia, pero, en las direcciones transversales al movimiento el campo eléctrico toma también un carácter magnético puesto que depende de los campos eléctricos y magnéticos medidos en el otro referencia inercial.

2.4.2. Ecuaciones de transformación del campo magnético para dos sistemas de referencia inerciales.

El análisis previo nos permitió encontrar la relación de los campos eléctricos de dos sistemas de referencia inerciales, procediendo de manera análoga podemos hallar la relación del campo magnético para dos referenciales inerciales. Como se puede observar en la figura 2.3, a diferencia de la situación descrita en la figura 2.2, la carga q se mueve con velocidad $\overrightarrow{u'} = (0, 0, u'_z)$ respecto al sistema de referencia S' y este se mueve con velocidad $\overrightarrow{v} = (v, 0, 0)$ respecto al referencial inercial S.

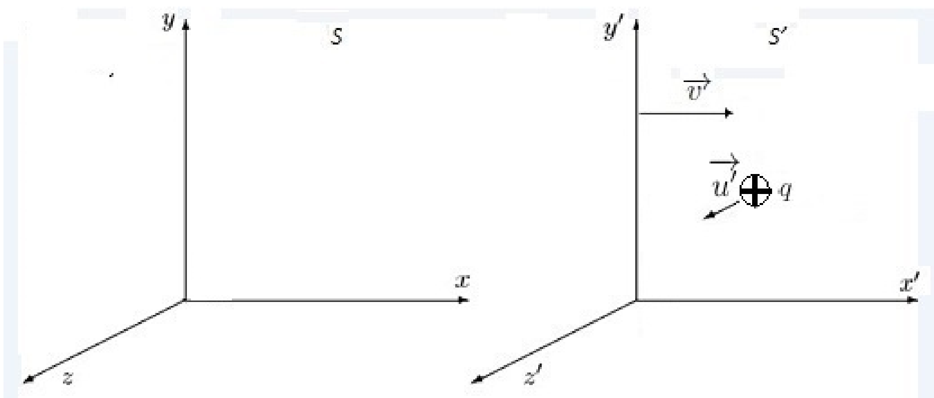

Figura 2.3. Sistema de referencia S' moviéndose con velocidad v respecto a S.

Mientras un observador ubicado en S' ve como la carga q se aleja de el a una velocidad $\overrightarrow{u'}$, otro observador ubicado en S presencia que la carga se aleja de el con velocidad $\overrightarrow{u}$, pero, como esta depende de las velocidades a las que se mueven el referencial S' y la carga, es necesario aplicar una transformación de velocidades para expresar la velocidad $\overrightarrow{u}$(medida en el sistema de referencia S) en términos de las velocidades v(velocidad relativa de los sistemas de referencia) y $\overrightarrow{u'}$(medida en el sistema de referencia S'). Como fue explicado anteriormente, gracias a las ecuaciones de transformación del tiempo y de las coordenadas espaciales según al teoría especial de la Relatividad, las variables físicas adquieren un nuevo grupo de ecuaciones de transformación deducidas a partir de las primeras mencionadas.

Dicho lo anterior, la velocidad de la carga vista en distintos sistemas de referencia debe satisfacer el siguiente grupo de ecuaciones de transformación de adición de velocidades que, por conveniencia, en el presente trabajo omitiremos su demostración:

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2} \\ u_y = \dfrac{u'_y}{\gamma\left(1 + u'_x v/c^2\right)} \\ u_z = \dfrac{u'_z}{\gamma\left(1 + u'_x v/c^2\right)} \end{cases} \tag{2.21}$$

En nuestro caso, la carga se mueve solo en dirección del eje z' por ende $u'_x = u'_y = 0$. Esto nos permite simplificar las ecuaciones de adición de velocidades obteniendo que:

$$\begin{cases} u_x = v \\ u_y = 0 \\ u_z = \dfrac{u'_z}{\gamma} \end{cases} \tag{2.22}$$

Como ya sabemos, el observador en S deduce que la carga experimenta una fuerza de lorentz descrita por la siguiente expresión:

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} + q\left[\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{B}\right] \tag{2.23}$$

Resolviendo el producto cruz entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{B}$ y teniendo en cuenta las relaciones de velocidades dadas en el conjunto de ecuaciones (2.22) podemos encontrar las componentes de dicha fuerza.

$$F_x = q\left[E_x - \frac{u'_z}{\gamma}B_y\right] \tag{2.24}$$

$$F_y = q\left[E_y - vB_z + \frac{u'_z}{\gamma}B_x\right] \tag{2.25}$$

$$F_z = q\left[E_z + vB_y\right] \tag{2.26}$$

En cuanto al observador ubicado en S', este ve que la carga se mueve con velocidad

$\overrightarrow{u'}$ y como dicho movimiento se da sobre el eje z' se concluye que $u' = u'_z$. Al igual que el observador en S, este deduce que la carga también experimenta una fuerza de lorentz dada por:

$$\overrightarrow{F'} = q\overrightarrow{E'} + q\left[\overrightarrow{u'} \times \overrightarrow{B'}\right] \tag{2.27}$$

Cuyas componentes son:

$$F'_x = q\left[E'_x - u'_z B'_y\right] \tag{2.28}$$

$$F'_y = q\left[E'_y + u'_z B'_x\right] \tag{2.29}$$

$$F'_z = qE'_z \tag{2.30}$$

Utilizando el conjunto de ecuaciones (2.13) que sustentan la ley general de transformación de las fuerzas para dos sistemas de referencia inerciales podemos relacionar las fuerzas experimentadas por la carga en los referenciales inerciales S y S'. Téngase en cuenta que que $\overrightarrow{u} = v + \dfrac{u'_z}{\gamma}$ ya que para O la carga se mueve tanto en el eje x como en el eje z, de esta manera.

$$F'_x = \frac{F_x - (v/c^2)\left(vF_x + \frac{u'_z}{\gamma}F_z\right)}{1 - v^2/c^2} \qquad \rightarrow \qquad F'_x = F_x - \left(\frac{\gamma v u'_z}{c^2}\right)F_z \tag{2.31}$$

$$F'_y = \gamma F_y \tag{2.32}$$

$$F'_z = \gamma F_z \tag{2.33}$$

Con lo anterior y con las ecuaciones de transformación de los campos eléctricos de los sistemas de referencia S y S' deducidas en el apartado (2.4.1) podemos hallar la relación entre los campos magnéticos de dichos sistemas de referencia. Primero reemplazamos las ecuaciones (2.24) y (2.28) en la ecuación (2.31), así:

$$q\left[E'_x - u'_z B'_y\right] = q\left[E_x - \frac{u'_z}{\gamma}B_y\right] - \left(\frac{\gamma q v u'_z}{c^2}\right)(E_z + vB_y)$$

Dado que $E'_x = E_x$, reemplazando y simplificamos obteniendo que:

$$B'_y = \gamma\left[B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right] \tag{2.34}$$

De igual forma reemplazamos las ecuaciones (2.25) y (2.29) en la ecuación (2.32) llegando a que:

$$q\left[E'_y + u'_z B'_x\right] = \gamma q\left[E_y - vB_z + \frac{u'_z}{\gamma}B_x\right]$$

Si en la expresión anterior reemplazamos la ecuación que relaciona el campo eléctrico E'_y con los campos E_y y B_z, ecuación (2.18), obtenemos que:

$$\gamma\left(E_y - vB_z\right) + u'_z B'_x = \gamma\left[E_y - vB_z + \frac{u'_z}{\gamma}B_x\right]$$

Cancelando términos:

$$B'_x = B_x \tag{2.35}$$

Y si en esa misma expresión reemplazamos la ecuación que relaciona el campo eléctrico E_y con los campos E'_y y B'_z, segunda ecuación del conjunto de ecuaciones (2.20), tendremos que:

$$\left[E'_y + u'_z B'_x\right] = \gamma\left[\gamma\left(E'_y + vB'_z\right) - vB_z + \frac{u'_z}{\gamma}B_x\right]$$

$$\gamma^2 vB'_z = \left(1-\gamma^2\right)E'_y + \gamma vB_z$$

Como buscamos hallar el campo magnético B'_z en términos de los campos E_y y B_z volvemos a utilizar la ecuación que relaciona el campo eléctrico E'_y con los campos E_y y B_z, ecuación (2.18), llegando a que:

$$\gamma^2 vB'_z = \left(1-\gamma^2\right)\gamma\left(E_y - vB_z\right) + \gamma vB_z$$

Simplificando la expresión anterior:

$$B'_z = \gamma\left[B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right] \tag{2.36}$$

Finalmente llegamos a las ecuaciones de transformación para el campo magnético en sus tres componentes, dichas ecuaciones quedan de la forma.

$$\begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma\left[B_y + \dfrac{v}{c^2}E_z\right] \\ B'_z = \gamma\left[B_z - \dfrac{v}{c^2}E_y\right] \end{cases} \tag{2.37}$$

Como mencionamos anteriormente el principio de Relatividad nos permite establecer una simetría entre los sistemas de referencia inerciales respecto al fenómeno observado, es por ello que, al igual que hicimos con el campo $\overrightarrow{E}$, podemos hallar el campo $\overrightarrow{B}$ en términos de $\overrightarrow{E'}$ y $\overrightarrow{B'}$ partiendo del hecho de que podemos sustituir x por x', y por y', z por z' y v por $-v$, esta ultima producto del movimiento relativo entre los sistemas de referencia, de esta manera:

$$\begin{cases} B_x = B'_x \\ B_y = \gamma\left[B'_y - \dfrac{v}{c^2}E'_z\right] \\ B_z = \gamma\left[B'_z + \dfrac{v}{c^2}E'_y\right] \end{cases} \tag{2.38}$$

Al igual que sucede al medir el campo eléctrico en dos sistemas de referencia distintos, el efecto magnético de una carga en movimiento medido en un sistema de referencia será caracterizado en otro referencial también como efecto magnético, solo que de forma diferente. Detallando los conjuntos de ecuaciones (2.37) y (2.38) podemos evidenciar cómo el campo magnético generado en la dirección del movimiento relativo de la carga mantiene su carácter magnético en ambos sistemas de referencia, pero, en las direcciones transversales al movimiento el campo magnético toma un carácter mixto relacionando los campos eléctricos y magnéticos medidos en el otro referencial inercial.

Este análisis concerniente al movimiento relativo de una carga observada en dos sistemas de referencia inerciales nos ha permitido constatar la estrecha correspondencia entre fenómenos eléctricos y magnéticos que Maxwell expuso en su teoría electromagnética, las ecuaciones de transformación de los campos eléctricos y magnéticos dan muestra de ello, ademas, se cumplen los postulados de la Relatividad especial, pues, en ambos sistemas de referencia el fenómeno observado es el mismo y se rige bajo las mismas leyes físicas a pesar de ser caracterizado de manera diferente, por tal razón los fenómenos eléctricos y magnéticos no deben ser mirados de manera independiente ya que ambos conforman un solo fenómeno, el electromagnético. El movimiento relativo y la constancia de la velocidad de la luz también se hacen relevantes ya que las relaciones entre los campos $\overrightarrow{E}$ y $\overrightarrow{B}$ lo ponen en evidencia al depender de la razón entre la velocidad relativa de los dos referenciales y la velocidad de la luz.

Así, como los fenómenos eléctricos y magnéticos son expresados matemáticamente por medio de ciertas ecuaciones, el fenómeno electromagnético también responde a una forma matemática dependiente de los campos eléctricos y magnéticos, esta es el tensor de campo electromagnético que en el siguiente capitulo será expuesto. Como ya se mencionó, las transformaciones de Lorentz fueron fundamentales para dar solución a los inconvenientes que presentaba la teoría electromagnética de Maxwell ya que mostraban cómo el principio de Relatividad galileano estaba incompleto, de ahí que se diera la no covarianza de las leyes del electromagnetismo clásico mostrando una falta de simetría en esta teoría. En el siguiente capitulo será tratada esta falta de simetría, su solución y la descripción del fenómeno electromagnético.

Capítulo 3

Análisis a la falta de simetría presentada en la teoría electromagnética de Maxwell.

3.1. Sobre la simetría.

En el común, la noción de simetría es asociada a términos de igualdad, perfección, proporcionalidad y/o congruencia de las cosas, en distintas áreas del conocimiento, dicha noción de simetría no se desliga de los términos ya dados y de varios otros con los que guardan relación. En la geometría se puede hablar de simetría de una forma bella y explicita, pues, como destaca Varela (1992), "Muchas figuras son el resultado de una proporcionalidad adecuada de sus partes entre si y de éstas con la figura misma", de ahí que a la figura se le pueda asociar cierta perfección. Para explicarlo mejor, tome como ejemplo un triangulo equilátero, al trazar la altura correspondiente de cada lado, se obtienen seis triángulos rectángulos totalmente iguales y al agruparlos en parejas se pueden formar tres nuevos triángulos equiláteros simétricos entre si y con el triangulo inicial(Ver figura 3.1); la congruencia e igualdad encontrada entre la figura y sus partes hace evidente una simetría.

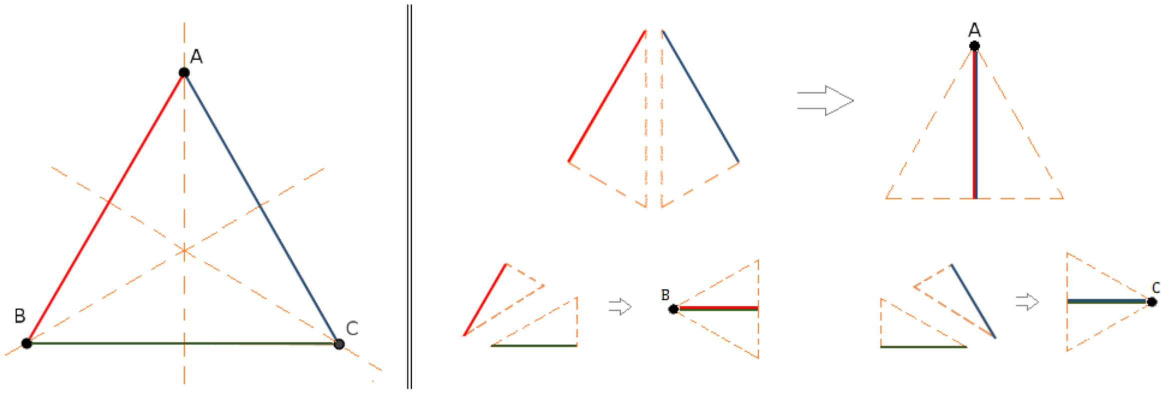

Figura 3.1. Simetría en las partes de un triangulo equilátero.

Otras figuras no necesariamente presentan congruencia alguna entre las partes que conforman su estructura, por lo que hablar de algún tipo de simetría en estas conllevaría al hecho de considerar someterlas a cambios o movimientos que como resultado mostrasen una nueva figura prácticamente indistinguible de la inicial[17], retomando el triangulo del ejemplo anterior, al aplicarle rotaciones sucesivas de 120° se obtendrá siempre un triangulo equilátero cuya única diferencia respecto al primero sera la posición de sus lados, diferencia que no se notara si las rotaciones aplicadas fuesen múltiplo de 360°. Nótese como la figura mantiene su forma, su estructura bajo cierto grupo de rotaciones que define una simetría especifica -Simetría rotacional-.

Al igual que una figura, los cuerpos también muestran relación con las consideraciones explicadas anteriormente y esto es debido a la perfección en la que nos son presentados en la naturaleza, perfección que, en este caso, no se refiere a la proporcionalidad y/o concordancia entre todas las partes que puede tener, sino mas específicamente a la estructura del cuerpo como tal. Se pueden encontrar distintos tipos de transformaciones[18] que revelen la perfección de un cuerpo, una rotación lo hace al dejarlo en un estado prácticamente indiferenciado del inicial y una reflexión permite encontrar una equivalencia entre las partes izquierda y derecha del mismo. La estructura de los seres vivos es un claro ejemplo del argumento previo, pues, considere el cuerpo humano, una parte de este, bien sea la derecha o la izquierda, presenta una casi perfecta congruencia con la otra, como si una fuese el reflejo de la otra[19], así, se puede superponer una parte con la reflexión de la otra y no encontrar diferencia alguna. Vemos como la simetría se presenta de varias maneras que se hacen evidentes al aplicar a cuerpos y figuras distintos tipos de cambios, movimientos o configuraciones que permiten no solo encontrar proporcionalidad alguna de estos con sus partes, o de sus partes entre si, sino también obtener como resultado un estado nuevo igual al inicial mostrándolo así como invariante.

La importancia que el hombre ha dado al estudio del mundo material, buscando conocer el comportamiento de la naturaleza y de lo que está inmerso en ella, lo ha llevado a descubrir que suceden ininterrumpidamente cambios en todo aquello que es, o no, observable. Lo anterior fue fundamental para la Física, pues, se empezó a considerar como parte esencial de su estudio describir de manera adecuada los distintos cambios que operan en la naturaleza, logrando así establecer un conjunto de leyes que rigen dichos cambios y que dan explicación tanto al origen como a las consecuencias de los mismos(de la Peña, 1965), dicho de otro modo, se hizo posible la formulación de leyes físicas que explican el comportamiento de los fenómenos naturales y que en conjunto representan la estructura del mundo físico. La información adquirida por el hombre gracias a la experiencia a sido fundamental para el desarrollo del conocimiento humano en la distintas ramas de la ciencia, destacando la Física, especialmente porque el ser humano, al percatarse de los constantes cambios que tenían lugar en la naturaleza, centro su atención en una peculiaridad y era la conservación de algunas cosas tales como caracterizaciones o propiedades,

[17]Esto es un automorfismo, se refiere al hecho de obtener lo que se tenia inicialmente luego de aplicarle una transformación.

[18]Al hablar de transformación se esta haciendo referencia a algún tipo de cambio o movimiento al que puede ser sometido algo, bien sea una figura, un cuerpo, un sistema, etc.

[19]Suponga que a su lado tiene un espejo sobre el cual ubica su mano derecha perpendicularmente a el, al mirar el espejo notara que el reflejo mostrado sera prácticamente igual a su mano izquierda, de esta manera se hace notar la existencia de una simetría relacionada al automorfismo de las partes izquierda y derecha del cuerpo humano con sus reflexiones.

bien sean, del sistema o de las partes involucradas en el, como consecuencia surgió la idea de que simultáneamente al cambio se daba la conservación de algo. Suponga dos cuerpos que exhiben un movimiento uniforme, luego de colisionar, estos cambian sus velocidades y por ende sus momentos lineales, pero, al medir los momentos lineales totales antes y después de la colisión se obtiene el mismo resultado, por tanto, esta cantidad física termina considerándose un invariante(Principio de conservación del momento lineal en un choque elástico o inelástico).

Que el cambio trajese de manera simultanea la conservación de algo tuvo grandes implicaciones en las distintas ramas de la Física, pues, como el lector puede constatar con el ejemplo dado, se encontró que las leyes físicas guardan relación con algún principio de conservación argumentado por la invarianza de una magnitud física, de una propiedad o de un estado asociado a los objetos o a las interacciones entre estos, es mas, Galileo, estudiando el movimiento relativo de los cuerpos, postulo su principio de Relatividad el cual argumenta que las leyes de la mecánica son las mismas para cualquier observador en movimiento uniforme sin importar su ubicación en el espacio, así, el fenómeno observado sera el mismo para cualquier sistema de referencia. Todo esto llevo la idea de la conservación simultanea al cambio al caso mas general posible al afirmar que absolutamente todas las leyes físicas obedecían a un principio de conservación, por consiguiente, no importaba cuantas veces un observador cambiara de sistema de referencia(Esto implica aplicar una transformación de coordenadas a la ley física que describe el fenómeno), la ley física que le de explicación al fenómeno observado mantendrá siempre la misma forma.

El análisis previo nos permitio enfatizar en los términos de cambio-movimiento- y conservación-invarianza- a fin de familiarizarnos con esa cosa que llamamos simetría, caracterizamos una simetría a todo aquello sujeto a transformaciones y que como resultado dejan algo prácticamente indiferenciado de lo que había inicialmente. En Física, hay un par de teoremas que argumentan como a las leyes de conservación y a las cantidades física les corresponde una simetría, dichos teoremas fueron postulados por la matemática Emmy Noether en su articulo titulado *Invariante Variationsprobleme*[20], el trabajo de Noether adquiere gran importancia al afirmar que tanto las magnitudes como las leyes físicas se conservan a lo largo de la evolución temporal de un sistema físico, su contribución a la Física permite comprender como cada simetría implica una ley de conservación. Con lo anterior se comprueba que la covarianza de las leyes físicas[21] para cualquier sistema de referencia inercial perfectamente responde a un principio de simetría. Todo observador ubicado en su propio sistema de referencia tiene la capacidad de observar, caracterizar y medir los fenómenos basándose en un sistema de coordenadas, como cada observador representa un fenómeno con sus propias coordenadas, saber como es medido el fenómeno en otro sistema de referencia hace necesario algún tipo de transformaciones que permitan partir de las coordenadas de un sistema para obtener las del otro, de esta manera se estaría cambiando de sistema de referencia sin modificar el fenómeno observado, pues, lo

[20]Para una mejor comprensión del trabajo científico de Emmy Noether el lector puede remitirse al articulo de revista titulado *"Emmy Noether: innovacion y creatividad en Ciencia"*

[21]Recuerdese que mientras la invarianza es asociada a la conservación de una magnitud o propiedad física, el termino covarianza es utilizado para referirse a como una ley física mantiene su forma bajo algún tipo de transformación.

que cambia es la caracterización de este según distintos sistemas de referencia.

Dicho lo anterior, queda claro que en Física hablar de simetría implica la conservación del fenómeno observado al cambiar de sistema de referencia aplicando una transformación o un grupo de estas, esto es la covarianza de las leyes físicas que dan explicación a tal fenómeno. Para ser mas explícitos, considere que usted se encuentra esperando su medio de transporte cuando al frente suyo pasa un autobús, para usted el autobús se mueve mientras que para los pasajeros, suponiendo que ignoran el hecho de que realmente ellos son los que se mueven junto con el autobús, el que se mueve es usted. No importa desde que sistema de referencia se mire el fenómeno dinámico, este es el mismo(un cuerpo se mueve respecto a otro), para comprobarlo basta con aplicar el grupo de transformaciones de Galileo a las ecuaciones de movimiento en un referencial para hallar las del otro y así encontrar que ambas ecuaciones de movimiento hablan del mismo fenómeno físico.

Para fines de este trabajo es de gran importancia tener presente a que se hace referencia cuando se habla de simetría dado que los problemas que presentaba la teoría electromagnética de Maxwell, y que a continuación explicaremos, ponían en evidencia la falta de simetría de esta con el principio de Relatividad galileano, la experiencia y la lógica común.

3.2. Falta de simetría del electromagnetismo clásico.

En el apartado (1.3) se explicaron los distintos problemas que presentaba la teoría electromagnética de Maxwell cuando era aplicada a cuerpos en movimiento. El primer gran inconveniente que le surgió a esta teoría fue el no corresponder al principio de Relatividad Galileano definido matemáticamente con las transformaciones de Galileo; mientras las leyes de la mecánica resultaban ser las mismas para cualquier sistema de referencia inercial, es decir, covariantes bajo las transformaciones de Galileo, las leyes del electromagnetismo no lo eran. Lo anterior llevo a pensar que algo estaba mal, pero que podría ser, pues, la experiencia daba validez al principio de Relatividad Galileano debido a la imposibilidad de dar cuenta del estado en reposo o en movimiento uniforme de un referencial inercial al hacer mediciones sobre el y la mecánica Newtoniana, base de la Física en aquella época, correspondía a este principio, lo que no hacia la teoría electromagnética de Maxwell cuya base eran los resultados de distintos hallazgos experimentales.

El segundo gran inconveniente, que esta altamente relacionado al primero, tenia que ver con la caracterización de los fenómenos eléctricos y magnéticos en distintos sistemas de referencia. Como se explico en el apartado (1.3.2), el movimiento relativo de una carga eléctrica en un sistema de referencia inercial propiciaba que las mediciones y consideraciones del fenómeno tratado difiriesen de las hechas en otro referencial. Hay dos casos que perfectamente dan a entender el anterior argumento:

1. Suponga que en el interior de un laboratorio A ubicado en La Tierra se encuentran una carga eléctrica y un observador, si ambos estuviesen en reposo, el observador mediría un campo eléctrico generado por la carga y si la carga se moviese respecto al observador este mediría un campo magnético. Teniendo en cuenta la validez del principio

de Relatividad Galileano en la mecánica newtoniana, si pensamos en los fenómenos eléctricos y magnéticos, el observador debería dar cuenta del mismo fenómeno si este es quien se mueve respecto a la carga en reposo, es decir, sea que la carga se mueva respecto al observador o viceversa, el movimiento relativo entre carga y observador debería mostrar como resultado un único fenómeno, en el caso del ejemplo dado este seria la generación de un campo magnético, pero, como dicta la experiencia, esto no sucede.

2. Siguiendo con la idea de un laboratorio terrestre A en cuyo interior se encuentran una carga eléctrica y un observador, ambos en reposo, el observador medirá un campo eléctrico generado por la carga, pero, ¿qué medirá otro observador en un laboratorio B fuera de La Tierra?. Por facilidad considere su ubicación cerca al Sol, este notará que la carga no solo genera un campo eléctrico sino que también genera un campo magnético al ser arrastrada por el doble movimiento de La Tierra[22]. Lo anterior permite deducir que mientras el observador en A le asocia a la carga un fenómeno puramente eléctrico (medición del campo eléctrico) el observador en B le asocia a la carga un fenómeno eléctrico y uno magnético (medición de un campo eléctrico y uno magnético producto del movimiento relativo de la carga, respectivamente).

Nótese que en ambos casos, al analizar una situación particular de una carga en movimiento, lo que se espera que suceda, resultado de un pensamiento lógico y acorde a la teoría, termina siendo completamente diferente de lo comprobado con la experiencia y esto resulta ser un problema de gran complejidad, pues, ¿cómo es posible que un caso hipotético experimental[23], y en cierta medida aplicable en la realidad, no concuerde con el resultado de un análisis producto de una teoría totalmente acorde y corroborada por la experiencia?; no hay simetría entre lo real y lo racional de un fenómeno o, en este caso, de dos fenómenos, uno eléctrico y uno magnético.

Los dos grandes inconvenientes ya explicados en relación a la teoría electromagnética de Maxwell muestran claramente la falta de simetría que esta presentaba, esto es, la no correspondencia que se daba entre una teoría argumentada en la experiencia y un principio que, siendo coherente a la experiencia y confirmado por la misma, da por hecho la existencia de un solo fenómeno[24] observado para cualquier sistema de referencia. Ademas, conviene resaltar que todos los observadores, dan cuenta de una realidad propia[25] basada en lo que observan y miden desde sus sistemas de referencia, pero todas esas realidades propias convergen a una única verdad, una sola realidad para todos y que seria la descripción de un solo fenómeno.[26] Tomando como referencia el caso 2, dos observadores describen y miden cosas totalmente diferentes de un evento en particular, el estado de movimiento asociado a una carga eléctrica, como consecuencia cada observador caracteriza

[22]Movimiento rotatorio (sobre su propio eje) y traslacional respecto al sol.

[23]Se hace referencia al caso hipotético en el que se pueda tener una carga asilada y manipularla con la finalidad de ponerla en reposo o en movimiento, adicionando el hecho de que esta pueda ser observada.

[24]Al utilizar el termino fenómeno se esta haciendo referencia a las consideraciones que se le pueden hacer a un cuerpo al estudiarlo desde distintas ramas de la Física, siguiendo esta idea podemos referirnos a fenómenos de carácter mecánico, dinámico, termodinámico, ondulatorio, eléctrico, magnético, etc.

[25]Al hablar de realidad propia estamos haciendo referencia a la concepción de realidad que tiene un observador en su sistema de referencia.

[26]El lector puede deducir que se esta haciendo referencia al principio de Relatividad Galileano.

una realidad propia, estas dos realidades en si deberían dar cuenta de una única verdad, mostrar la existencia de un solo fenómeno pero esto resulta no ser el caso, pues, la realidad propia del observador en cuyo sistema de referencia se encuentra la carga demanda la existencia de un fenómeno puramente eléctrico y la realidad propia del observador situado en otro sistema de referencia caracteriza dos fenómenos, el eléctrico y el magnético.

¡Cómo es posible que dos observadores den cuenta de fenómenos totalmente diferentes al observar el mismo evento!, este problema conlleva a no poder saber cual es la realidad verdadera para todos los observadores ubicados en distintos sistemas de referencia, otra vez vuelve a estar en entre dicho el principio de Relatividad Galileano y obviamente no seria lógico pensar en que un fenómeno prima sobre el otro porque se seguiría contradiciendo tal principio. Vemos así que se poner en clara evidencia como los científicos a finales del siglo XIX se estaban enfrentando a un serio problema de la Física y era la falta de simetría de la teoría electromagnética de Maxwell, pues, esta no concordaba con la lógica común, con la experiencia y con el principio de Relatividad Galileano.

3.3. Solución a la falta de simetría de la teoría electromagnética de Maxwell.

Como la teoría electromagnética de Maxwell no era compatible con el principio de Relatividad galileano al mostrar como el fenómeno observado era diferente para dos sistemas de referencia inerciales, se considero que esta teoría presentaba una falta de simetría, esencialmente porque las leyes físicas que daban explicación al fenómeno no eran las mismas para todo sistema de referencia inercial y la experiencia lo confirmaba por completo con múltiples pruebas experimentales, de las cuales, como el lector abra notado, en el presente trabajo sólo se han resaltado dos que se consideran altamente relevantes y son: el movimiento relativo de una carga y un observador que arroja dos resultados totalmente diferentes(caso 1 del apartado previo) y la observación de una carga en reposo desde distintos sistemas de referencia inerciales que también arroja resultados distintos(caso 2 del apartado previo), adicionalmente, otro inconveniente en cierta mediad ligado con los anteriores es el celebre experimento de Michelson y Morley que, con sus resultados negativos en relación al movimiento de La Tierra respecto al éter, fomento aun mas el malestar de los científicos en aquel entonces.

Explicar los problemas que presentaba la teoría electromagnética de Maxwell es sumamente importante porque en gran medida propiciarían el origen de una teoría Física que traería con sigo un cambio radical en la forma de ver y comprender el mundo. Como un primer paso para encontrar la solución a estos inconvenientes presentados a lo largo del siglo XIX es considerado el aporte del físico holandés Hendrik Lorentz a los resultados negativos del experimento de Michelson y Morley, la contracción de los cuerpos en movimiento daba explicación al por qué no había interferencia, ademas, el grupo de transformaciones de Lorentz corregía la no covarianza de las ecuaciones que sustentan la teoría electromagnética de Maxwell, esto al mostrar como el principio de Relatividad galileano estaba incompleto. Lo anterior no era suficiente para dar solución a la falta de simetría del electromagnetismo clásico, pues, aún quedaban sin resolver los inconvenientes que surgían al analizar el movimiento relativo carga-observador y la observación de una carga en dos sistemas de referencia inerciales, pero, no paso mucho tiempo hasta que Albert Einstein, a sus 25 años de edad, publicara la teoría especial de la Relatividad con la que asombraría a toda la comunidad científica, no solo solucionando por completo todos estos problemas que tanto malestar les estaba causando, sino propiciando una nueva y radical mirada de la Física en general.

La genialidad de Einstein se muestra en todo su esplendor al afirmar que, al igual que en la mecánica, en el electromagnetismo solo importan los movimientos relativos(Vélez, 2012), sin embargo, ¿qué tiene que ver esto con el problema de la carga vista en distintos sistemas de referencia?. Dado que los movimientos relativos son lo único que importa, el movimiento relativo entre una carga y un observador mostrara siempre el mismo fenómeno, es decir, los resultados de las mediciones hechas en cualquiera de los dos sistemas de referencia, sea el de la carga o el del observador, hablaran del mismo fenómeno físico. El hecho de que un observador no de cuenta de la generación de un campo magnético al moverse respecto a una carga en reposo, no implica que se presente una falta de simetría, pues, esto solo es una apariencia que se da dependiendo de las condiciones dinámicas en las que es concebido el fenómeno. La velocidad a la que se mueve una carga es muy grande comparada con la que puede alcanzar un observador, por lo tanto, este puede afirmar que no evidencia la generación de un campo magnético, lo que en realidad es erróneo ya que sí hay un campo magnético presente, solo que su intensidad es casi despreciable porque la velocidad relativa entre carga y observador es sumamente pequeña[27].

Como solo priman los movimientos relativos, y dado que velocidad de la luz es la misma para todo sistema de referencia ya que no depende del estado de movimiento del emisor, concebir la existencia de un sistema de referencia absoluto sobre el cual hacer las mediciones de todos los sistemas de referencia resulta ser una idea superflua. Pensar en el éter y, por consiguiente, en el movimiento de la Tierra respecto a este, fue necesario para dar explicación a la naturaleza ondulatoria de la luz, pero los distintos experimentos basados en la luz y en fenómenos electromagnéticos arrojaban resultados que para nada comprobaban la existencia de dicho medio. Einstein no tuvo en cuenta los resultados negativos de estos experimentos al momento de analizar la electrodinámica de los cuerpos en movimiento, solo se baso en sus dos hipótesis, conocidas hoy en día como postulados de la Relatividad, para poder dar solución a los distintos inconvenientes que presentaba la teoría electromagnética de Maxwell. Así, la existencia del medio éter era descartada por completo, al igual que el movimiento de La Tierra respecto a este. Como conclusión, las cargas al interior de los laboratorios terrestres no debían generar campos magnéticos, lo que la experiencia siempre nos ha mostrado.

Descartar la existencia del éter solucionaba las asimetrías del fenómeno observado y los resultados negativos de todos los experimentos encaminados a demostrar el movimiento de La Tierra en el éter se explicaban con la constancia de la velocidad de la luz, para finalizar con los problemas que presentaba la Física en aquel entonces, sólo restaba resolver la

[27]Recuérdese que, según la ley de Biot-Savart, el campo magnético puede ser determinado si se conoce la densidad de corriente, dado que la corriente depende de la velocidad de la carga, el campo magnético resulta ser directamente proporcional a esta velocidad

incompatibilidad de las leyes electromagnéticas con las ecuaciones de transformación de Galileo. Einstein, analizando el movimiento relativo de dos sistemas de referencia inerciales a partir de señales de luz que cumplían con el principio de constancia de la velocidad de la luz, dedujo las ecuaciones de transformación de Lorentz y puso en evidencia cómo las ecuaciones de transformación galileanas no eran suficientes para explicar todos los fenómenos físicos. De esta manera, usando las transformaciones de Lorentz, se puede medir el campo eléctrico en dos distintos sistemas de referencia encontrando que mientras en uno se evidencia un campo eléctrico en el otro se manifiestan tanto un campo eléctrico como uno magnético. Con estos resultados, es indudable suponer al campo magnético como un efecto relativista del campo eléctrico y, por consiguiente, pensar en la existencia de un solo fenómeno caracterizado con efectos eléctricos y magnéticos, así, la estrecha correspondencia de lo que eran considerados fenómenos eléctricos y magnéticos quedaba por completo demostrada[28]

La teoría especial de la Relatividad validaba la existencia de un único fenómeno que reunía efectos eléctricos y magnéticos, este era, el fenómeno electromagnético. Dicho esto, y teniendo presente las ecuaciones de transformación de los campos, la observación de una carga en distintos sistemas de referencia puede mostrar solamente efectos eléctricos o efectos eléctricos y magnéticos y, aun así, dar cuenta de un único e igual fenómeno. Lo anterior resulta ser algo extremadamente sorprendente, pues, era lo que la experiencia siempre había mostrado. Mientras en un laboratorio terrestre, un observador da cuenta de un campo eléctrico generado por una carga en reposo al interior de dicho laboratorio, otro observador ubicado en un laboratorio ajeno al movimiento orbital de La Tierra notara que la carga, ademas de un campo eléctrico, genera un campo magnético producto de ser arrastrada por el movimiento de La Tierra. Lo que ha simple vista parecían ser fenómenos totalmente diferentes, en realidad, son distintas formas de medir y caracterizar el mismo fenómeno, fenómeno que Maxwell descubrió con su teoría y este era el electromagnético.

Einstein confirmaría y daría por completo solución a la falta de simetría de la teoría electromagnética de Maxwell con su teoría especial de la Relatividad y los dos principios que la fundamentan:

1. El postulado de la constancia de la velocidad de la luz concordaba con el grupo de transformaciones de Lorentz dado que estas sugerían a la velocidad de la luz como limite de velocidad para todo cuerpo(como ya se dijo, el mismo Einstein las dedujo).

2. El fenómeno electromagnético es el mismo par todo observador, solo que, tal como muestran las transformaciones de los campos, cada uno mide y caracteriza el fenómeno de manera diferente dependiendo del movimiento relativo entre sus sistemas de referencia. Adicionalmente, el movimiento relativo es lo único importante, es por esto que no importa cual sistema de referencia se este moviendo, el fenómeno observado sera el mismo.

3. Que el fenómeno observado sea el mismo implica que las leyes electromagnéticas sean iguales para cualquier sistema de referencia inercial. Efectivamente, esto sucede

[28]El lector puede remitirse al capitulo 2-sección (2.4) en el cual son llevadas a cabo las transformaciones de los campos eléctricos y magnéticos argumentando la afirmación dada.

> luego de aplicar las ecuaciones de transformación de Lorentz a las leyes electromagnéticas[29]. Con esto, la teoría electromagnética de Maxwell y, por tanto, el fenómeno observado corresponden al primer postulado de la teoría especial de la Relatividad, postulado que seria extendido a todo fenómeno físico como principio general de Relatividad, o de covariancia, y que argumenta como "las leyes fundamentales de la Física deben tener la misma forma en todos los marcos inerciales"(Vélez, 2012, p.64)

El gran malestar por el que pasaron los científicos durante el siglo XIX fue resuelto con creces trayendo con sigo la formulación de una nueva teoría y el desenfrenado avance de lo que hoy en día es la Física moderna, además de concebir el fenómeno electromagnético como única realidad para todos los observadores siendo caracterizado como eléctrico o magnético dependiendo de cada sistema de referencia. Para comprobar y hacer explicita la solución a la falta de simetría de la teoría electromagnética de Maxwell es necesario hablar acerca del fenómeno electromagnético y cómo es concebido, para ello la deducción del tensor de campo electromagnético, por medio del cual es modelado tal fenómeno, se hace importante mostrando, en primera instancia, cómo lo que conocíamos como fenómenos independientes(electricidad y magnetismo) en realidad conforman una sola entidad y, en segunda instancia, cómo las leyes electromagnéticas son simétricas para todo referencial inercial bajo el grupo de transformaciones de Lorentz correspondiendo así al principio general de covariancia.

3.4. Tensor de campo electromagnético.

La Física centra su atención en la explicación de todo aquello que sucede a nuestro alrededor, esto es, los fenómenos naturales que podemos, o no, observar, para hacerlos más explícitos y comprensibles, las matemáticas resultaron ser un lenguaje relativamente sencillo con el cual organizar toda la información obtenida gracias a la experiencia y la razón, es por ello que los fenómenos son caracterizados partiendo de leyes físicas, modelos matemáticos entre estados, propiedades o magnitudes físicas que los describen o con los que guardan relación.

El fenómeno electromagnético resulta muy peculiar al ser la unificación de lo que antes eran fenómenos independientes, al igual que todo fenómeno físico, el electromagnético también puede presentarse por medio de relaciones matemáticas a fin de hacerlo comprensible. En la mecánica newtoniana, para describir un evento particular, basta con tener la información correspondiente a su posición espacial sin necesidad de saber su coordenada temporal, con la formulación de la teoría especial de la Relatividad, tanto coordenadas espaciales como temporales eran necesarias para describir un evento físico. La ecuación de transformación temporal de Lorentz pone en evidencia como para medir la coordenada temporal de un evento en un sistema de referencia es requerida no solo la coordenada

[29]En el presente trabajo esto sera demostrado haciendo uso del tensor de campo electromagnético que, como se explicara en la sección (3.4), modela matemáticamente el fenómeno electromagnético. Como este tensor es covariante para todo sistema de referencia, podemos usarlo para deducir las leyes electromagnéticas y, paralelamente, mostrar que son covariantes para cualquier referencial inercial.

temporal del mismo evento en su sistema de referencia sino también su coordenada espacial, esto implico crear una nueva geometría con la cual medir los eventos físicos según la teoría especial de la Relatividad, tal como lo era la geometría euclidiana con la mecánica newtoniana. Hermann Minkowski formulo una geometría cuadridimencional que se acoplaba perfectamente a la teoría relativista explicando así como todo evento físico tenia lugar en un continuo *espacio-tiempo* definido por una coordenada temporal y tres coordenadas espaciales. Es importante destacar la métrica de Minkowski porque en esta reposan todos los cálculos de la Relatividad especial, además, gracias a esta teoría, el fenómeno electromagnético adquiere realidad física para todo sistema de referencia, por consiguiente, dicho fenómeno se describe bajo el continuo *espacio-tiempo* de Minkowski.

Lorentz sin pensarlo, con su idea de tiempo propio y sus ecuaciones de transformación, le había dado al tiempo una importancia sumamente relevante en la Física, pues, la descripción y medición de los fenómenos naturales se debía hacer teniendo en cuenta al tiempo; es por esto que en la Relatividad especial empezó a considerarse no como un parámetro, tal como lo es para la mecánica newtoniana, sino mas bien como una variable dinámica. En el espacio euclidiano, el campo electromagnético es descrito según las tres componentes espaciales mostrando a su vez como genera tensiones eléctricas y magnéticas en cualquier punto del espacio, en este caso, el tiempo sólo da cuenta de la evolución de ese sistema, es decir, permite mostrar las consecuencias de la interacción del campo con una carga, o un cuerpo cargado, ubicado en cualquier punto del espacio, mas no influye en dicha interacción; en cierta medida, algo análogo es lo que sucede con el campo electromagnético en el continuo *espacio-tiempo*, solo que ahora tanto la coordenada temporal como las coordenadas espaciales describen tal campo, por consiguiente, las tensiones eléctricas y magnéticas se dan en cualquier punto del *espacio-tiempo*. Vemos como el tiempo pasa de ser un parámetro, una variable absoluta, con la cual dar cuenta de la evolución de un sistema, a una variable dinámica con implicaciones espaciales en la descripción de los fenómenos naturales.

Es por lo anterior que la representación matemática del fenómeno electromagnético se encuentra en forma tensorial cuyas componentes no son mas que relaciones entre las coordenadas espacio-temporales expresadas en términos de los campos eléctricos y magnéticos, modelando así las tensiones eléctricas y magnéticas generadas en cada punto del continuo *espacio-tiempo*. En Física, los tensores generalmente son relacionados a todo tipo de transformaciones permisibles entre sistemas de coordenadas, en este caso el tensor de campo electromagnético es la representación de un fenómeno que se caracteriza por medio de las componentes de los campos eléctricos y magnéticos según cada sistema de referencia. Cualquier observador es capaz de caracterizar el fenómeno electromagnético dependiendo de las mediciones que haga en su sistema de referencia, de ahí la posibilidad de que un observador pueda dar cuenta de efectos eléctricos mientras otro medirá efectos eléctricos y magnéticos, la relatividad de los sistemas de referencia hace posible que el fenómeno electromagnético se caracterice de distintas formas conservando su simetría para todo observador. Nótese como se le da explicación al caso 2 resaltado en el apartado (3.2) en el que a una carga en reposo al interior de un laboratorio terrestre le es asociado un fenómeno puramente eléctrico por un observador ubicado en aquel laboratorio mientras otro evidencia efectos eléctricos y magnéticos al ver la carga desde un laboratorio en reposo cerca al sol; en esencia, ambos observadores miden el mismo fenómeno electromagnético sólo que cada uno lo caracterizan dependiendo de su sistema de referencia.

Para constatar que el fenómeno electromagnético cumple con el principio general de covariancia, es necesario hacer una análisis concerniente al tensor de campo electromagnético mostrando a su vez cómo, por medio de éste, aplicando el grupo de transformaciones de Lorentz se soluciona la falta de simetría de la teoría electromagnética de Maxwell, dicho esto, la deducción de este tensor sera el primer paso a seguir y para ello debemos referirnos a uno de los principios mas importantes y trascendentales de la Física que afirma como todo cuerpo en movimiento describe una trayectoria cuya cantidad de energía empleada es la mínima posible.

3.4.1. Principio de mínima acción.

En Física el movimiento de los cuerpos resulta ser fundamental para su estudio y desarrollo, el principio de mínima acción es un claro ejemplo de ello, pues, a todo cuerpo en movimiento se le pueden asociar ciertas cantidades de energía que dependerán de las variables físicas con las que sea descrito el movimiento, de esta manera, partiendo de la relación entre dichas energías se puede caracterizar el movimiento del cuerpo como tal.

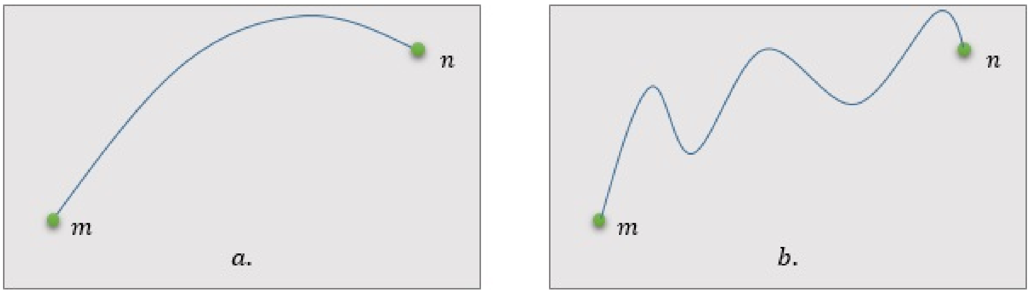

Figura 3.2. Posibles trayectorias de un cuerpo moviéndose en el campo gravitacional terrestre.

Tomemos como ejemplo un cuerpo (una partícula) sometido al campo gravitacional terrestre y que se mueve en una dimension, supongamos que dicha partícula es lanzada hacia arriba desde un punto m y se mueve libremente hasta un punto n (sube y luego baja un poco) empleando cierto tiempo t tal como se muestra en la Figura 3.2a. Esta es la trayectoria real que nosotros describiríamos al representar gráficamente el cambio de posición de la partícula a medida que transcurre el tiempo, una parábola. A medida que la partícula avanza su energía cinética disminuye producto de su perdida de velocidad mientras que su energía potencial aumenta debido a que su altura respecto a la superficie terrestre es cada vez mayor, transcurrido determinado tiempo, la partícula llega a un punto en el que la energía cinética es mínima-nula- y la potencial máxima, posteriormente los cambios de energía se invierten, pues, al bajar, la partícula empieza a aumentar su velocidad, incrementando su energía cinética, mientras se acerca cada vez mas a la superficie terrestre, disminuyendo su energía potencial.

Ahora, que pasaría si la partícula se moviera describiendo una trayectoria como la mostrada en la Figura 3,2b empleando el mismo tiempo t. La velocidad en distintos puntos del recorrido seria mayor, menor y con diferente dirección (dependiendo de si esta sube o baja), por tal razón se puede afirmar que la cantidad de energía cinética empleada en este movimiento sera distinta a la del caso anterior; para que la partícula llegue al punto n empleando el mismo tiempo que le tomo hacerlo en el caso a, es necesario suponer que las velocidades para los casos en los que la partícula sube sean lo suficientemente grandes como para compensar las distancias recorridas al bajar, por ende, la energía cinética total empleada en el caso b deberá ser mayor que la empleada por la partícula en el caso a y, suponiendo que en ambos casos la energía potencial total no haya tenido una variación significativa en relación con la energía potencial media, la diferencia entre las energías cinética y potencial para el caso b deberá ser mayor que para el caso a.

Independientemente de la trayectoria que describa la partícula, en cada instante de tiempo tendrá asociados ciertos valores de energías cinética y potencial. Sabiendo las funciones que representan dichas energías podemos calcular su diferencia y encontrar una nueva función de energía conocida como el lagrangiano del sistema, este permite hallar las ecuaciones de movimiento asociadas a la partícula y así dar cuenta de su evolución temporal (su trayectoria que generalmente es una curva). Si se integra la función lagrangiana respecto al tiempo se podrá encontrar una nueva cantidad que estará asociada a la curva que describe el trayecto recorrido por la partícula, dicha cantidad se denomina acción denotada con la letra S.

$$S = \int_a^b L\, dt \tag{3.1}$$

Mientras que la posición y la velocidad son cantidades físicas que permiten describir el estado de una partícula, la acción es asociada a *la historia completa de la partícula entre dos instantes dados*, esto es, la linea de universo descrita por la partícula entre dos eventos que ocurren en tiempos diferentes (posición inicial y final).

En la realidad se ha encontrado que todo cuerpo tiende a seguir una trayectoria en la que las variaciones de las energías asociadas a su movimiento son mínimas, por ende, al hallar el valor de la acción para tal trayectoria se encuentra que es el menor posible de todos los valores correspondientes a otras trayectorias, esto llevo a pensar que, para nuestro caso de un cuerpo moviéndose en el campo gravitacional terrestre(basándonos en el trayecto de la partícula hasta el punto mas alto), el aumento de la energía potencial es casi del mismo valor con el que disminuye la energía cinética, en otros términos, la diferencia de la variación de ambas energías en cierto instante de tiempo es prácticamente nulo. Feynman (1998) se refiere a ello como *"una especie de compromiso que consiste en tratar de adquirir una mayor energía potencial con el mínimo de energía cinética adicional-tratar de que la diferencia, cinética menos potencial, sea lo mas pequeña posible."*(p.19-5)

Esto es lo que se conoce como principio de mínima acción y hace alusión a aquella curva que describe la trayectoria en la que la acción de una partícula toma el menor valor de todos los casos posibles. ¿Y porque el menor valor posible?, como se menciono anteriormente, en la realidad los cuerpos tienden a describir trayectorias para las cuales la acción es la que toma el mínimo valor posible. Para el caso en el que se quiera encontrar la trayectoria real descrita por una partícula se hace necesario suponer la existencia de una trayectoria verdadera cuya acción sea la del mínimo valor posible, así mismo se podrá pensar en una segunda trayectoria cuya diferencia respecto a la verdadera sea tan pequeña que no muestre una variación significativa en la acción, de esta manera:

$$\delta S = 0 \tag{3.2}$$

La letra griega δ hace alusión a la variación aplicada a la acción S que, como ya mencionamos, debe ser tan pequeña como sea posible para así poder hallar la trayectoria verdadera descrita por el cuerpo, de ahí que la variación de la acción sea considerada como nula. Es sumamente importante tener en cuenta que, en este caso, la variación se da sobre una función acción que esta en términos de otra función dependiente del tiempo y como no sabemos para que valor del tiempo esa función es mínima no podremos minimizar la acción utilizando un calculo diferencial ordinario, por tal razón es necesario utilizar otro tipo de calculo denominado calculo vacacional[30] y con esto se podrá encontrar la trayectoria real descrita por la partícula.

3.4.2. Acción de una partícula libre.

Al analizar la acción asociada a una partícula en movimiento el primer caso a tener en cuenta es suponer que dicha partícula, sobre una linea de universo descrita por la misma entre dos sucesos que ocurren en tiempos distintos, no se encuentra sometida a ninguna fuerza externa a ella, de esta manera, la acción de una partícula libre puede ser expresada bien sea partiendo de las ecuaciones de movimiento de la partícula definidas por medio del lagrangiano del sistema (ecuación (3.1)), o a partir de la siguiente expresión:

$$S = \int_a^b -\alpha \, ds \tag{3.3}$$

Esto porque la acción implica encontrar la curva que describe la trayectoria que toma la partícula al desplazarse desde una posición inicial a una final, de ahí que sea expresada como la integral de "algo" (Denominado α) respecto al intervalo diferencial ds. Los limites a y b de la integral representan los dos sucesos (Posiciones inicial y final) que limitan la linea de universo descrita por la partícula. Ese algo, que en adelante llamaremos α, es una magnitud que caracteriza la partícula y como esta se mueve libremente, α debería relacionarse con una velocidad (Puede que sea, o no, uniforme) asociada a la partícula, velocidad que le permita estar en movimiento durante un tiempo dado. Como la linea de universo descrita por la partícula se delimita por dos sucesos que ocurren en tiempos determinados, la integral que define la acción puede expresarse en términos de un diferencial de tiempo, ademas de ser negativa debido a que alcanza un mínimo valor a lo largo de una linea de universo recta.[31]

Para obtener la expresión final que de cuenta de la acción de una partícula libre es necesario hacer una serie de cálculos que abreviaremos por comodidad[32]. En primera instancia partimos de que el intervalo diferencial ds, según la métrica de Minkowski, toma

[30]En caso que el lector desee profundizar mas en el tema, remitirse a *Física de Feynman, Vol. II: Electromagnetismo y materia.* (1998)

[31]Para una mejor comprensión remitirse a: Teoria clásica de los campos, volumen 2 del curso de Física Teórica de Landau & Lifshitz (1992), §8.

[32]En el anexo C estos cálculos son desarrollados paso por paso.

la forma:

$$ds = \sqrt{dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2} \tag{3.4}$$

Este intervalo en relatividad es conocido como el intervalo *espacio-temporal*. Como la acción de la partícula se relaciona con la trayectoria que describe su evolución temporal, el intervalo diferencial ds puede encontrarse en términos del diferencial dt como:

$$ds = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \tag{3.5}$$

Por lo cual, al reemplazar la expresión anterior en la ecuación (3.3) nos queda que :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} -c\alpha\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \tag{3.6}$$

Aplicando el binomio de Newton y despreciando los términos de tercer orden en adelante obtenemos que:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-c\alpha + \frac{\alpha v^2}{2c}\right) dt \tag{3.7}$$

Si tenemos en cuenta la ecuación (3.1), el integrando de la acción S puede ser definido como el lagrangiano del sistema y es sabido que este no es mas que la diferencia de las energías cinética y potencial, si lo comparamos con el integrando de la ecuación (3.7) podemos establecer ciertas similitudes destacando que: la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ tiene cierto parecido con la expresión $\frac{\alpha v^2}{2c}$, al igualarlas podemos encontrar el valor de la constante α que nos brindara información relacionada con la partícula, así $\alpha = mc$.

Finalmente reemplazando α en la ecuación (3.3) llegamos a que la acción de una partícula libre esta dada por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} -mc\, ds \tag{3.8}$$

Como se menciono antes, α debería estar en términos de la velocidad de la partícula y como en mecánica clásica las partículas se caracterizan por su masa, esta bien pensar que α también debería tener relación con la masa, de ahí que finalmente la acción S quede en términos de m, v y c, esta ultima aludiendo al segundo postulado de la Relatividad especial.

3.4.3. Acción de una partícula sometida a un campo electromagnético.

Para poder dar cuenta de la acción correspondiente a una partícula en movimiento inmersa en un campo electromagnético es necesario considerar que ésta depende de una componente asociada a la acción de una partícula libre, sin ser sometida a un campo, y otra que describe la interacción entre la partícula y el campo. Previamente se dedujo la acción de una partícula libre por lo que resta encontrar la expresión que describa la interacción entre la partícula y el campo.

Los datos experimentales han mostrado que la forma en la que el campo interactúa con la partícula esta dada por un cuadrivector A_μ denominado cuadripotencial y cuyas componentes dependen de las coordenadas espacio-temporales, este a su vez permite caracterizar las propiedades del campo en interacción, en el caso de la partícula, esta interactúa con el campo por medio de la carga que puede tomar un valor positivo, negativo o nulo(Chinea, 2009). Con estas consideraciones, la interacción de la partícula con el campo puede definirse a partir de la siguiente expresión:

$$S = \pm\frac{q}{c}\int_a^b A_\mu dx_\mu \qquad \text{Donde } \mu = 1,2,3,4. \tag{3.9}$$

El termino $1/c$ es introducido por conveniencia teniendo en cuenta el principio de Relatividad, que establece a c como velocidad limite para todo cuerpo, y la componente de la acción referente a una partícula libre ya que esta en términos de c. Así, al relacionar las acciones correspondientes a una partícula libre y a esta misma inmersa en un campo electromagnético, encontramos que la acción total de dicha partícula es:

$$S = \int_a^b -\left(mc\,ds\, + \frac{q}{c}A_\mu dx_\mu\right) \tag{3.10}$$

Así, el lagrangiano de la acción total no es mas que la suma de los lagrangianos correspondientes a las dos acciones mencionadas, recuérdese que cómo la integral que define la acción alcanza el mínimo valor posible el negativo es asociado a toda la integral. La función lagrangiano permite dar cuenta de la evolución temporal de un sistema físico, por tal razón es necesario homogeneizar el integrando de la ecuación anterior escogiendo al tiempo como variable de integración, usando la ecuación (3.5) y siguiendo el procedimiento hecho en el anexo D encontramos la expresión final que describe la acción de una partícula sometida en un campo electromagnético.

$$S = \int_a^b \left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c}Av - q\phi\right) dt \tag{3.11}$$

La acción total pone en evidencia que, tal como se menciono al inicio, la interacción entre la partícula y el campo se da por medio de un cuadripotencial definido por un potencial escalar ϕ y un potencial vectorial $\overrightarrow{A}$.

3.4.4. Deducción del tensor de campo electromagnético.

Una vez definida la acción de una partícula moviéndose en presencia de un campo electromagnético podemos hallar el tensor que modela las relaciones entre las componentes de los campos eléctricos y magnéticos que caracterizan el campo electromagnético bajo el cual se mueve la partícula, es por ello que se comenzara tomando como base la ecuación (3.10) que permite encontrar la acción ya mencionada. Debido a que no conocemos la trayectoria que describe la partícula al moverse en el campo electromagnético, podemos hacer uso del principio de mínima acción y suponer que la partícula se mueve sobre una trayectoria que no difiere mucho de la trayectoria verdadera, de esta manera la variación entre las acciones correspondientes a ambas trayectorias sera prácticamente nula, así:

$$\delta S = \delta \int_a^b -\left(mc\, ds\ + \frac{q}{c} A_\mu dx_\mu\right) \qquad \text{Como } \delta S = 0$$

$$\int_a^b -\left[mc\delta ds + \frac{q}{c}\delta\left(A_\mu dx_\mu\right)\right] = 0 \tag{3.12}$$

Por conveniencia y brevedad se omitirán una serie de pasos que en el anexo E el lector podrá encontrar desarrollados con claridad, en ellos, luego de aplicar la variación a los términos correspondientes, se toman ciertas consideraciones llegando a que:

$$\int_a^b \left[-mc\frac{du_\mu}{ds} + \frac{q}{c}\frac{dx_\nu}{ds}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)\right]\delta x_\mu ds = 0 \tag{3.13}$$

Dado que al aplicar la variación sobre x_μ se puede obtener cualquier valor, para que se cumpla la igualdad anterior se deduce que el resto del integrando debe ser nulo, ademas, la cuadrivelocidad puede expresarse de la forma $u_\nu = \dfrac{dx_\nu}{ds}$, por ende:

$$mc\frac{du_\mu}{ds} = \frac{q}{c}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)u_\nu \tag{3.14}$$

El lector recordara que la acción, como se expone en la ecuación (3.1), resulta de integrar el lagrangiano del sistema en el que es medida, por tanto, la expresión anterior corresponde a las ecuaciones de movimiento de una partícula inmersa un campo electromagnético deducidas a partir del lagrangiano de dicho sistema, recuérdese que son un total de cuatro ecuaciones de movimiento relacionadas a las componentes espacio-temporales, como la interacción del campo con la partícula en movimiento es asociada al cuadripotencial A_μ, se deduce que la diferencia de las derivadas covariantes de dicho cuadripotencial es lo que definen el campo electromagnético, de esta manera, denotando este campo como $F_{\mu\nu}$:

$$mc\frac{du_\mu}{ds} = \frac{q}{c}F_{\mu\nu}u_\nu \qquad \rightarrow \qquad F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

$F_{\mu\nu}$ es un termino que toma una forma tensorial dado que varia bajo dos indices, covariantes en este caso, teniendo en cuenta que el fenómeno electromagnético tiene lugar en el continuo *espacio-tiempo* los subíndices $\mu \wedge \nu$ toman los valores $1, 2, 3$ y 4, por consiguiente, este tensor consta de un total de 16 componentes, en su forma matricial:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

A continuación se procederá a encontrar cada una de las 16 componentes de este tensor que permite dar cuenta del fenómeno electromagnético mostrando a su vez como efectivamente tanto el campo eléctrico como el magnéticos constituyen tal fenómeno.

3.4.5. Componentes del tensor de campo electromagnético.

Recordemos que, como se expuso antes, la forma en la que el campo interactúa con una partícula cargada esta dada por el cuadripotencial A_μ, donde $\mu = 1, 2, 3, 4$. En su forma covariante es definido como $A = \left(\frac{\phi}{c}, -\overrightarrow{A}\right)$ donde $\overrightarrow{A}$ es el potencial vectorial expresado por medio de las coordenadas espaciales, así:

$$A = \left(\frac{\phi}{c}, -A_x, -A_y, -A_z\right) \quad \text{donde } A_1 = \frac{\phi}{c}, \quad A_2 = -A_x, \quad A_3 = -A_y \ \text{ y } \ A_4 = -A_z$$

El campo magnético bajo al cual es sometida la partícula puede definirse mediante el potencial vectorial $\overrightarrow{A}$ de la forma:

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} \tag{3.16}$$

Al igual que el campo magnético, el campo eléctrico también se relaciona con los potenciales que definen el cuadripotencial por medio de la siguiente expresión:

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\phi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \qquad \text{donde} \quad \nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{3.17}$$

Utilizando estas relaciones de los potenciales con los campos eléctricos y magnéticos podemos encontrar las componentes del tensor de campo electromagnético $F_{\mu\nu}$[33], para esto partimos de la ecuación que define tal tensor en términos del cuadripotencial, téngase en cuenta que $x_\mu = (ct, x, y, z)$, así:

$$F_{11} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \qquad \rightarrow \qquad F_{11} = 0$$

$$F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}$$

Reemplazando las componentes del cuadripotencial y las coordenadas espacio-temporales nos queda que:

$$F_{12} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Como el lector podrá dar cuenta, sacando $\frac{1}{c}$ como factor común, obtenemos la componente en x del campo eléctrico, por lo tanto:

$$F_{12} = \frac{E_x}{c}$$

[33]En el anexo F se muestra de manera mas completa el proceso analítico que se sigue para hallar las componentes de este tensor.

Para hallar las 14 componentes restantes se sigue el mismo procedimiento, luego de esto, reemplazando cada componente ya obtenida en la expresión (3.15) obtenemos el tensor de campo electromagnético en forma matricial:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Vemos como $F_{\mu\nu}$ se define a partir de 6 componentes independientes que, como era de esperar, son las componentes espaciales de los campos eléctricos y magnéticos, este es un tensor covariante de segundo orden definido en $\mathbb{R}^4$ (espacio de Minkowski), por lo tanto, podemos encontrar la forma contravariante de dicho tensor siguiendo la operación $F^{\gamma\delta} = g^{\gamma\mu}F_{\mu\nu}g^{\nu\delta}$ donde $g^{\gamma\mu}$ y $g^{\nu\delta}$ corresponden al tensor métrico en el espacio de Minkowski, de esta manera:

$$F^{\gamma\delta} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

El tensor de campo electromagnético cumple con la propiedad de ser un tensor hermisimétrico o anti-simétrico, esto se deduce al ver que los valores asociados a las componentes de su diagonal son todos nulos, como se explica en el anexo F, al permutar los indices μ y ν de este tensor se encuentra que todas sus componentes cambian de signo correspondiendo así a la propiedad hermisimétrica de un tensor dada por la forma $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$

Hemos encontrado la expresión final del tensor que modela el fenómeno electromagnético en un sistema de referencia inercial. Los inconvenientes que presentaba la electrodinámica de Maxwell aplicada a cuerpos en movimiento daban a conocer como en distintos sistemas de referencia el fenómeno observado no era el mismo, por consiguiente, las leyes electromagnéticas no correspondían con el principio de Relatividad presentando así una falta de simetría en la teoría electromagnética de Maxwell, la formulación de la teoría especial de la Relatividad dio solución definitiva a este serio problema al proponer las ecuaciones de transformación de Lorentz como las adecuadas para relacionar las mediciones físicas de dos observadores en distinto sistema de referencia y al extender el principio de Relatividad galileano a las leyes electromagnéticas afirmando que toda ley física tiene la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales.

Mostrar la covarianza del tensor de campo electromagnético es fundamental para dar cuenta de como la teoría especial de la Relatividad por medio de las ecuaciones de transformación de Lorentz soluciona la falta de simetría del fenómeno electromagnético haciéndolo igual para todo observador y esto es lo que se procederá a realizar en la apartado siguiente.

3.5. Covarianza del tensor de campo electromagnético.

Para mostrar como el tensor de campo electromagnético cumple con lo dicho al final de apartado previo es necesario aplicar el grupo de transformaciones de Lorentz a este tensor a fin de comprobar que el fenómeno electromagnético observado en dos sistemas de referencia inerciales es el mismo, para esto, el tensor $F^{\gamma\delta}$ medido en un sistema de referencia no primado debe ser igual al tensor $F'^{\mu\nu}$ medido en un sistema de referencia primado que se mueve a velocidad v sobre el eje x respecto al sistema no primado. La transformación de un tensor de segundo orden se puede efectuar bien sea partiendo de sus componentes,

$$F'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\delta}} F^{\gamma\delta} \tag{3.20}$$

O partiendo de su forma matricial,

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda F^{\gamma\delta} \Lambda^{T} \tag{3.21}$$

Donde Λ es la matriz de transformación de Lorentz y Λ^T es la transpuesta de dicha matriz cuyas componentes toman los mismos valores. Por conveniencia nosotros haremos uso de la transformación de coordenadas del tensor $F^{\gamma\delta}$ a partir de su forma matricial, para ello, reemplazamos la matriz de Lorentz hallada en la ecuación (2.2) y la matriz de la ecuación (3.19) en la relación anterior:

$$F'^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego de resolver el triple producto matricial y simplificar se encuentra que:

$$F'^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma^2 \frac{E_x}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) & -\gamma\frac{1}{c}\left(E_y - vB_z\right) & -\gamma\frac{1}{c}\left(E_z + vB_y\right) \\ \gamma^2 \frac{E_x}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) & 0 & -\gamma\left(B_z - \frac{vE_y}{c^2}\right) & \gamma\left(B_y + \frac{vE_z}{c^2}\right) \\ \gamma\frac{1}{c}\left(E_y - vB_z\right) & \gamma\left(B_z - \frac{vE_y}{c^2}\right) & 0 & -B_x \\ \gamma\frac{1}{c}\left(E_z + vB_y\right) & -\gamma\left(B_y + \frac{vE_z}{c^2}\right) & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente vemos como varias de las componentes del tensor $F'^{\mu\nu}$ no son mas que relaciones entre las componentes de los campos eléctricos y magnéticos del sistema no primado, utilizando las transformaciones de los campos eléctricos y magnéticos deducidas en los dos últimos apartados del capitulo 2, podemos hallar la expresión final de este tensor en términos de las componentes de los campos eléctricos y magnéticos del sistema primados, así:

$$F'^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E'_x}{c} & -\frac{E'_y}{c} & -\frac{E'_z}{c} \\ \frac{E'_x}{c} & 0 & -B'_z & B'_y \\ \frac{E'_y}{c} & B'_z & 0 & -B'_x \\ \frac{E'_z}{c} & -B'_y & B'_x & 0 \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

Al comparar los tensores $F^{\gamma\delta}$ y $F'^{\mu\nu}$ notamos que son prácticamente iguales por lo cual se deduce que el fenómeno electromagnético es el mismo tanto para el sistema de referencia no primado como para el sistema de referencia primado. La simetría del fenómeno observado queda entonces demostrada al comprobar la covarianza del tensor de campo electromagnético para distintos referenciales inerciales, como ultimo procedimiento a realizar en este trabajo sera la deducción de las leyes electromagnéticas por medio del tensor $F^{\gamma\delta}$, esto permitiría dar por finalizado el análisis correspondiente a la solución de la falta de simetría que presentaba la teoría electromagnética de Maxwell mostrando como las leyes electromagnéticas son covariantes bajo el grupo de transformaciones de Lorentz al ser deducidas del tensor $F^{\gamma\delta}$ también covariante bajo este mismo grupo de transformaciones.

3.6. Deducción de las ecuaciones de Maxwell a partir del tensor de campo electromagnético.

Como el tensor de campo electromagnético permite modelar matemáticamente el fenómeno electromagnético es posible, por medio de este, deducir las ecuaciones que sustentan la teoría electromagnética de Maxwell, para ello, es necesario tener en cuanta que las ecuaciones de Maxwell nos son presentadas en dos pares: el primer par de ecuaciones nos permite saber cuales son las fuentes fundamentales de cada campo, estas son, la ley de Gauss para el campo eléctrico y la ley de Ampere-Maxwell; el segundo par de ecuaciones esta relacionado a como son concebidos de manera geométrica los campos eléctrico y magnético en el espacio y esto no lo proporcionan la lay de Gauss para el campo magnético y la ley de inducción de Faraday.

Mientras el segundo par de ecuaciones de Maxwell son homogéneas el primer par de ecuaciones no lo son, por lo tanto hay que considerar las propiedades del tensor de campo electromagnético para ecuaciones homogéneas y no homogéneas, según este tensor, para ecuaciones homogéneas se cumple que:

$$\partial_\lambda F^{\gamma\delta} + \partial_\gamma F^{\delta\lambda} + \partial_\delta F^{\lambda\gamma} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial F^{\gamma\delta}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F^{\delta\lambda}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial F^{\lambda\gamma}}{\partial x^\delta} = 0 \tag{3.23}$$

Y para ecuaciones no homogéneas se tenemos que

$$\partial_\delta F^{\gamma\delta} = \mu_o J^\gamma \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial F^{\gamma\delta}}{\partial x^\delta} = \mu_o J^\gamma \tag{3.24}$$

Partiendo de las relaciones anteriores podemos proceder a deducir las leyes que sustentan la teoría electromagnética de Maxwell.

3.6.1. Ley de Gauss para el campo eléctrico.

Dado que la ley de Gauss para el campo eléctrico nos permite saber que la densidad de carga es la fuente fundamental del campo eléctrico, utilizaremos la ecuación (3.24) con la que, por medio del tensor de campo electromagnético, deduciremos esta ley. El tensor $F^{\gamma\delta}$ esta definido en el espacio-tiempo de Minkowski, por tanto, los indices γ y δ pueden tomar los valores $1, 2, 3, 4$, así:

$$\frac{\partial F^{\gamma\delta}}{\partial x^\delta} = \mu_o J^\gamma \qquad \text{Definiendo } \gamma = 1 \ \wedge \ \delta = 1, 2, 3, 4$$

$$\frac{\partial F^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{14}}{\partial x^4} = \mu_o J^1 \tag{3.25}$$

Como las componentes del campo eléctrico están en forma covariante, usaremos la relación $\partial x^\delta = g^{\gamma\delta}\partial x_\gamma$ donde $g^{\gamma\delta} = diag\,(1, -1, -1, -1)$ para pasar de coordenadas contravariantes a covariantes ademas de reemplazar las componentes correspondientes al tensor de campo electromagnético $F^{\gamma\delta}$ dado en la ecuación (3.19), así:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{E_x}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{E_y}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial x_4}\left(\frac{E_z}{c}\right) = \mu_o J^1$$

Recuérdese que $x_2 = x$, $x_3 = y$ y $x_4 = z$, sacando $\frac{1}{c}$ como factor común encontramos que el termino a la izquierda de la igualdad no es mas que la divergencia del campo eléctrico por lo cual:

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \mu_o c J^1$$

Ahora, el cuadrivector densidad de corriente en coordenadas contravariantes se define como $J = (\rho c, \overrightarrow{J})$ donde $\overrightarrow{J}$ representa las componentes tridimensionales de una distribución de carga continua y ρc es la componente temporal, reemplazando:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{E} = \mu_o c^2 \rho$$

Como $c^2 = \dfrac{1}{\mu_o \epsilon_o}$, finalmente nos queda que:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_o} \qquad [\textit{Ley de Gauss para el campo eléctrico.}] \tag{3.26}$$

3.6.2. Ley de Ampere-Maxwell.

Como se sabe, esta ley relaciona el campo magnético $\overrightarrow{B}$ con su causa, para deducirla a partir del tensor de campo electromagnético $F^{\gamma\delta}$ volveremos a usar la ecuación (3.24) solo que esta vez el indice γ, a diferencia del caso anterior en el que toma el valor de la coordenada temporal, tomara los valores asociados a las coordenadas espaciales mientras que los valores para el indice δ se mantendrán. De esta manera:

$$\frac{\partial F^{\gamma\delta}}{\partial x^{\delta}} = \mu_o J^{\gamma} \quad \text{donde } \gamma = 2,3,4 \ \wedge \ \delta = 1,2,3,4$$

Como en la igualdad se encuentran indices repetidos, usamos el convenio de suma de Einstein, por lo cual, para $\gamma = 2$ y $\delta = 1,2,3,4$:

$$\frac{\partial F^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{24}}{\partial x^4} = \mu_o J^2 \tag{3.27}$$

Reemplazando las componentes correspondientes al tensor de campo electromagnético $F^{\gamma\delta}$:

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{E_x}{c}\right) - \frac{\partial B_z}{\partial x^3} + \frac{\partial B_y}{\partial x^4} = \mu_o J^2$$

Pasando los diferenciales de coordenadas contravariantes a covariantes al igual que la densidad de corriente contravariante, $J^2 = -J_2$, nos queda que:

$$\left(\frac{1}{c}\right)\frac{\partial E_x}{\partial x_1} + \frac{\partial B_z}{\partial x_3} - \frac{\partial B_y}{\partial x_4} = -\mu_o J_2$$

Recordando que $x_1 = ct$, $x_3 = y$, $x_4 = z$ y $J_2 = J_x$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu_o J_x \qquad \text{como } c^2 = \frac{1}{\mu_o \varepsilon_o}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} = \mu_o J_x + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{3.28}$$

Ahora para $\gamma = 3$ y $\delta = 1,2,3,4$ se sigue un procedimiento análogo al anterior encontrando que:

$$-\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)=\mu_o J_y+\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{3.29}$$

Igualmente para $\gamma = 4$ y $\delta = 1, 2, 3, 4$ obteniendo que:

$$\frac{\partial B_x}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial x}=\mu_o J_z+\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{3.30}$$

Al asociar las ecuaciones (3.28), (3.29) y (3.30) encontramos una relación mas formal para los campos eléctricos y magnéticos, agrupando los términos de la izquierda de cada ecuación se obtiene lo que conocemos como el rotacional del campo magnético y agrupando los términos de la derecha de cada ecuación se obtiene el producto de la permeabilidad magnética y el vector densidad de corriente sumado al producto triple de la permeabilidad magnética, la permitividad eléctrica y la variación del campo eléctrico en el tiempo. En forma matemática lo anterior no es mas que:

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{B}=\mu_o J+\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} \qquad \text{[\textit{Ley de Ampere-Maxwell.}]} \tag{3.31}$$

3.6.3. Ley de Gauss para el campo magnético.

La ley de Gauss para el campo magnético permitió dar cuenta de la inexistencia de monopolos magnéticos debido a que argumenta como todo cuerpo capaz de generar un campo magnético funciona simultáneamente como fuente y sumidero de sus propias lineas de campo magnético. Haciendo uso de la ecuación (3.23) y asignando a los indices λ, γ y δ uno de los valores asociados a las coordenadas espaciales podemos deducir esta ley a partir del tensor de campo electromagnético. Si $\lambda = 2$, $\gamma = 3$ y $\delta = 4$ entonces la ecuación queda de la forma:

$$\frac{\partial F^{34}}{\partial x^2}+\frac{\partial F^{42}}{\partial x^3}+\frac{\partial F^{23}}{\partial x^4}=0 \tag{3.32}$$

Reemplazando las componentes correspondientes del tensor de campo electromagnético ademas de pasar las coordenadas contravariantes a covariantes y recordar que $x_2 = x$, $x_3 = y$ y $x_4 = z$ obtenemos que:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0$$

La expresión anterior no es mas que la divergencia del campo magnético, de esta manera:

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{B}=0 \qquad \text{[\textit{Ley de Gauss para el campo magnético.}]} \tag{3.33}$$

3.6.4. Ley de inducción de Faraday.

Los descubrimientos experimentales de Ørsted, Ampere y Faraday fueron fundamentales para poner en evidencia la estrecha correspondencia entre fenómenos eléctricos y magnéticos, la ley de inducción de Faraday permite mostrar dicha relación. Volveremos a hacer uso de la ecuación (3.23) para deducir esta ley partiendo del tensor de campo electromagnético. Asignándole al indice γ el valor asociado a la coordenada temporal ($\gamma = 1$) y a los indices k y λ los valores de las coordenadas espaciales $(2, 3$ ó $4)$.

Si $\lambda = 1$, $\gamma = 2$ y $\delta = 3$ entonces:

$$\frac{\partial F^{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^3} = 0 \tag{3.34}$$

Reemplazando las componentes correspondientes al tensor de campo electromagnético ademas de pasar de coordenadas contravariantes a covariantes obtenemos que:

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{E_y}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{E_x}{c}\right) = 0$$

Recordando que $x_1 = ct$, $x_2 = x$ y $x_3 = y$ nos queda que:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t} - \left(\frac{1}{c}\right)\frac{\partial E_y}{\partial x} + \left(\frac{1}{c}\right)\frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

Finalmente, reorganizando términos y simplificando:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \tag{3.35}$$

Ahora para $\lambda = 1$, $\gamma = 2$ y $\delta = 4$ se sigue un procedimiento análogo encontrando que:

$$-\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \tag{3.36}$$

Igualmente para $\lambda = 1$, $\gamma = 3$ y $\delta = 4$ obteniendo que:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \tag{3.37}$$

Al asociar las ecuaciones (3.35), (3.36) y (3.37) encontramos una relación mas formal para los campos eléctricos y magnéticos, agrupando los términos de la izquierda de cada ecuación se obtiene el rotacional del campo eléctrico y agrupando los términos de la derecha se obtiene el negativo de la variación del campo magnético respecto al tiempo. En forma matemática lo anterior no es mas que:

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \qquad [\textit{Ley de inducción de Faraday.}] \tag{3.38}$$

3.7. Consideraciones finales.

En los últimos dos capítulos se ha dado a conocer cómo los problemas presentados durante el siglo XIX en relación a la falta de simetría de la teoría electromagnética de Maxwell fueron sumamente importantes para la formulación de la teoría especial de la Relatividad, la no correspondencia de las leyes de la teoría electromagnética de Maxwell con el principio de Relatividad galileano era la clara demostración de que la Física no estaba del todo completa, pues, como se explicó en el apartado (2.3.3), las ecuaciones de transformación que sustentaban este principio eran correctas sólo para cuerpos cuyas velocidades respecto a la velocidad de la luz eran extremadamente pequeñas, por consiguiente, tanto las leyes de la mecánica como las leyes electromagnéticas eran convariantes bajo un nuevo grupo de transformaciones sustentado por la teoría especial de la Relatividad.

Maxwell con la formulación de su teoría mostraba cómo el campo electromagnético empezaba a ser algo real que unificaba todo lo concerniente a efectos eléctricos y magnéticos, el que un campo magnético variable generara un campo eléctrico aún en ausencia de un conductor y que un campo eléctrico variable creara un campo magnético eran hechos experimentales suficientes para poner en evidencia que estos fenómenos guardaban una correspondencia tal que el fenómeno electromagnético adquiría una realidad física. Como sustento adicional a está idea esta también la concepción de Maxwell respecto a la luz ya que mucho tenia que ver con este fenómeno, pues, para él, la luz tenia lugar en el campo electromagnético propagándose como un tipo de perturbación electromagnética, esto es, el considerar la luz como una onda electromagnética que tenia lugar en el espacio gracias a la propagación de las perturbaciones de los campos eléctricos y magnéticos.

Si la teoría electromagnética de Maxwell presentaba una falta de simetría para distintos sistemas de referencia producto de la no covarianza de las leyes electromagnéticas bajo el grupo de transformaciones de Galileo, no resultaba ilógico esperar que el fenómeno electromagnético fuera diferente al ser observado en distintos sistemas de referencia y es ahí donde este trabajo centró su atención, pues, como ha sido tratado en los apartados (1.3.2), (1.3.3) y (3.2), distintos hechos y suposiciones experimentales argumentaban este problema, el mismo Einstein lo resaltaba al inicio de su monografía *sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento*. Esta falta de simetría seria solucionada con la teoría especial de la Relatividad reafirmando la realidad del fenómeno electromagnético y su covarianza para cualquier sistema de referencia inercial siendo caracterizado con efectos eléctricos o eléctricos y magnéticos dependiendo de cada observador. La deducción del tensor de campo electromagnético según la teoria especial de la Relatividad, la demostración de la covarianza de este tensor medido en dos sistemas de referencia inerciales y la deducción de las leyes electromagnéticas de Maxwell a partir de dicho tensor son suficientes para dar por finalizado el análisis correspondiente a la falta de simetría que presentaba el electromagnetismo clásico de Maxwell.

Conclusiones.

1. El análisis en torno a explicar la no covarianza de las leyes electromagnéticas bajo las ecuaciones de transformación de galileo, el movimiento de una carga respecto a un observador y la observación del estado de movimiento de una carga en distintos sistemas de referencia permitió comprender el serio dilema por el que pasaba la Física clásica además de encontrar que esta no podía dar solución a los distintos problemas presentados.

2. La falta de simetría del electromagnetismo clásico era resuelta por completo con la formulación de la teoría especial de la Relatividad, no sólo al solucionar la no covarianza de las leyes electromagnéticas, sino al sustentar la existencia del fenómeno electromagnético como ente unificador de los campos eléctricos y magnéticos y como única realidad física para todo observador sin importar el sistema de referencia inercial sobre el cual sea medido. El que en un sistema de referencia sean medidos efectos puramente eléctricos mientras en otro se miden efectos eléctricos y magnéticos no es indicio de que se observen fenómenos diferentes, ambas mediciones hablan de un único y real fenómeno, el electromagnético, solo que, dependiendo del sistema de referencia, este es caracterizado de manera diferente.

3. No es necesario saber el movimiento real de los cuerpos, basta con los movimientos relativos para poder describir los fenómenos naturales, es por esto que el movimiento relativo entre una carga y un observador siempre arrojara el mismo resultado y este es la generación de un campo eléctrico y uno magnético. Adicionalmente, las cargas al interior de los laboratorios terrestres no generan campos magnéticos dado que su movimiento se da respecto a los sistemas de referencia ajenos al movimiento orbital de la tierra y no respecto a los observadores ubicados al interior de dichos laboratorios terrestres.

4. Se concluyó que el campo electromagnético es un fenómeno independiente de los sistemas de referencia, su existencia en parte se debe a la constancia de la velocidad de la luz y al considerar el tiempo no como un parámetro para cualquier sistema de referencia sino como una variable dinámica. La teoría electromagnética de Maxwell presentaba una falta de simetría con las ecuaciones de transformación galileanas debido a que, en estas, el tiempo era considerado absoluto, como un parámetro. Con la formulación de la teoría especial de la Relatividad, las ecuaciones de transformación de Lorentz mostraban que tanto el tiempo como las coordenadas espaciales eran necesarias para medir y describir los fenómenos naturales según distintos sistemas de referencia, es por esto que el campo electromagnético tiene lugar en el continuo *espacio-tiempo* y el tensor $F_{\mu\nu}$, que modela tal fenómeno, lo pone en clara evidencia al expresar las relaciones entre

las coordenadas espacio-temporales como tensiones eléctricas y magnéticas generadas en cada punto del continuo *espacio-tiempo*, esto es, la aparición de campos eléctricos y magnéticos.

5. La importancia de este trabajo reside en lo valioso que es para el Departamento de Física que sus estudiantes adquieran una mirada mucho más crítica y analítica respecto a las distintas teorías físicas que surgieron como explicación a todos esos fenómenos naturales que desde la Física clásica no podían ser explicados. En lo que nos concierne, el origen de la teoría especial de la Relatividad fue trascendental para dar explicación al fenómeno electromagnético y presentar a la comunidad científica una nueva mirada del mundo físico. Por lo anterior, esperamos que este trabajo de grado sea un aporte significativo en el proceso educativo de los estudiantes del Departamento de Física que deseen profundizar en las investigaciones enfocadas en la teoría especial de la Relatividad, particularmente en la electrodinámica de cuerpos en movimiento.

Bibliografía

[1] BELENDÉZ, A. (2008). *La unificación de luz, electricidad y magnetismo: la "síntesis electromagnética" de Maxwell.* Revista Brasileira de Ensino de Física, *30*(2), 2601. Universidad de Alicante, Alicante, España.

[2] CABRERA, A. H. (2009) *Electrodinámica Clásica* Universidad de la Laguna, Tenerife. Islas Canarias. Recuperado el 16 de 9 de 2016, de: https://ajhernan.webs.ull.es/electrodinamica.pdf

[3] CACHÓN G., V. (2013) *Las analogías en la formulación de la teoría electromagnética de la luz de Maxwell.* *7*(14), pp. 11-33. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey Campus Ciudad de México Distrito Federal, México.

[4] CARIÑERA, J. F. (2004) *Emmy Noether: innovación y creatividad en ciencias.* La Gaseta de la RSME, *7*(2), pp. 347-369.

[5] CHINEA, C. S. (2009). *Partículas en un campo electromagnético. Transformación de Lorentz de los vectores campo eléctrico y campo magnético.* [en línea] Disponible en http://casanchi.blogspot.com.co/

[6] DE LA PEÑA, L. (1965). *Simetría y leyes en la conservación de la Física.* Revista de la universidad de México, *20*(2), pp. 9-11. México.

[7] EINSTEIN, A. (1919). *Que es la teoría de la Relatividad.* (Ana Goldar, trad.). Teorema, ANTONI BOSCH EDITOR, pp. 19-23.Barcelona, España.

[8] EINSTEIN, A. (1922). *Sidelights on Relativity. Albert Einstein.* (Jeffery, G. B. & Perrett, W., trad.) METHUEN & CO. LTD. London. Recuperado el 3 de 2 de 2016, de: https://archive.org/details/sidelightsonrela00einsuoft

[9] EINSTEIN, A. (2005). *Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento*(Hernando Quevedo, trad.). ICN-UNAM. (Obra original publicada en 1905)

[10] FAUSTO O., J. & SOBRINO V., M. A. (2003). *Apuntes de Electrodinámica Clásica. Campo Electromagnético y Relatividad.* 2da ed. Disponible en: http://mural.uv.es/masoro/edclas/ed2r04.pdf

[11] FEYNMAN, R. & LEIGHTON, R. (1998). *Física: Electromagnetismo y materia.* Addison Wesley Longman de México S.A. México

[12] GÓMEZ P. & GONZÁLEZ E. (2012). *Las ecuaciones de Maxwell.* [en línea] Disponible en http://eltamiz.com/libros/

[13] GRANÉS S., J. (1992) *La revolución conceptual en la Física de comienzos de siglo.* Ideas y Valores, Universidad Nacional de Colombia, *41*(87-88), pp. 89-136. Bogotá, Colombia.

[14] GREINER, W. (1998). *Classical electrodynamics.* United States of America, Springer-Verlag New York, Inc.

[15] GUERRA, M., CORREA, J., NÚÑEZ, I & SCARON, J. M. (1985). *Física: Elementos fundamentales.* Tomo II. Editorial Reverté S.A. Barcelona, España.

[16] JÍMENEZ, J.L., AQUINO, N. & CAMPOS, I. (Sin fecha). *Heaviside y las ecuaciones de Maxwell* [en línea] Disponible en http://www.izt.uam.mx/newpage/contactos/anterior/n33ne/pdf/heavi.pdf

[17] LANDAU L.D. & LIFSHITZ (1992). *Física teórica: Teoría clásica de los campos.* Editorial Reverté S.A., *2*, 2da ed., Barcelona, España.

[18] MENÉNDEZ, J. (1920). *Relativity the special and general theory.* Recuperado el 3 de 2 de 2016, de: http://www.ibiblio.org/ebooks/Einstein/Einstein_Relativity.pdf

[19] MUÑOS, J. B. (Sin fecha). *Leyes de Maxwell.* Universitat Oberta de Catalunya. Recuperado el 22 de 9 de 2015, de: http://www.astrosurf.com/jupegosa/libros/Leyes-de-Maxwell.pdf

[20] POINCARÉ, J. H. (Sin fecha). *Los principios de la Física matemática*(Juan Carlos Orozco, trad.)

[21] PURCELL E. M., (1988). *Berkeley Physics Course: electricidad y magnetismo.* Editorial Reverté S.A., *2*, 2da ed., Barcelona, España.

[22] RINDLER, W. (1982). *Introduction to special relativity.* United States of America, Oxford University Press, New York.

[23] SÁNCHEZ R., J. M. (1983) *El origen y desarrollo de la Relatividad.* Alianza Editorial. Madrid, España.

[24] SÁNCHEZ, O. A. (2013). *Poincaré y la teoría de la Relatividad: Compartiendo algunas impresiones personales.* Miscelánea matemática 58, pp. 21-46. Recuperado el 22 de noviembre de 2015, de: http://5vmmap.eventos.cimat.mx/sites/5vmmap/files/Relatividad&Poincare.pdf

[25] TEJEIRO S., J. M. (2004). *Sobre la teoría especial de la Relatividad.* Universidad Nacional de Colombia. Recuperado el 29 de 4 de 2016, de: https://gnfisica.files.wordpress.com/2010/08/sobre_la_teoria_Relatividadtejeiro.pdf

[26] UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL. *Plan de desarrollo institucional 2014-2019.* Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional.

[27] VELEZ U., F. (2012). *Apuntes de Relatividad.* Corcas Editores SAS. Bogotá, Colombia.

Anexos A

Deducción del segundo término de la Ley de Ampere-Maxwell.

Es sabido que la relación entre cargas y campos está dada por la ecuación (1.1) en la cual se destaca como el campo eléctrico $\overrightarrow{E}$ es proporcional a la densidad de carga eléctrica ρ, esta ecuación es compatible con la ecuación de continuidad de corrientes eléctricas(ecuación A.1), por consiguiente, cumple con el principio de conservación de la carga, es por esto que puede ser aplicada a cargas estacionarias o en movimiento. Las cargas en movimiento no son más que una corriente eléctrica y como la carga se conserva, la variación en el tiempo de una distribución de carga puede ser expresada como una ecuación de continuidad en términos de la densidad de corriente $\overrightarrow{J}$ y la densidad de carga.

$$\nabla \cdot \overrightarrow{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{A.1}$$

En el caso del campo magnético, este es generado por una densidad de corriente estacionaria y se satisface por la ley de Ampere:

$$\nabla \times \overrightarrow{B} = \mu_o \overrightarrow{J} \tag{A.2}$$

Para un campo magnético que no varia, la densidad de corriente permanece constante respecto al tiempo debido a que la densidad de carga se mantiene constante, es decir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{Por lo tanto:} \qquad \nabla \cdot \overrightarrow{J} = 0$$

Otra forma de deducirlo es hallando la divergencia de la densidad de corriente partiendo de la ley de Ampere encontrando que:

$$\nabla \cdot \left(\mu_o \overrightarrow{J}\right) = \nabla \cdot \nabla \times \overrightarrow{B} \qquad \rightarrow \qquad \mu_o \nabla \cdot \overrightarrow{J} = \nabla \cdot \nabla \times \overrightarrow{B}$$

Como es sabido la divergencia de un rotacional de cualquier función vectorial es nula, lo que conlleva a que $\nabla \cdot \overrightarrow{J} = 0$. Si la densidad de carga es variable en el tiempo entonces $\nabla \cdot \overrightarrow{J} \neq 0$, pero, ya comprobamos que, utilizando la ley de Ampere(ecuación A.2), la divergencia de la densidad de corriente siempre será nula, esto nos lleva a suponer que dicha ley, por sí sola, no sirve para explicar fenómenos de corrientes eléctricas variables.

Maxwell se percato de este gran inconveniente e ingeniosamente considero que la relación entre fenómenos eléctricos y magnéticos iba mas allá de lo que sustentaba la ley de inducción de Faraday, con esto en mente resulto razonable suponer que entre los campos eléctricos y magnéticos debía prevalecer cierta simetría y es ahí donde surge la idea de que la variación de un campo eléctrico podía dar cuenta de un campo magnético. Con esta afirmación Maxwell entendió que la ley de Ampere estaba incompleta y lo que le faltaba no era mas que un termino asociado a la variación del campo eléctrico en el tiempo, por lo tanto se debía cumplir que:

$$\nabla \times \overrightarrow{B} \propto K \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \tag{A.3}$$

Donde K debe ser una constante relacionada con algunas propiedades de los campos eléctricos y magnéticos. Como el problema inicial radicaba en la creación de campos magnéticos a partir de corrientes no estacionarias, esta nueva expresión debería complementar la ley de Ampere para corrientes estacionarias, deduciendo una ley de Ampere mejorada.

$$\nabla \times \overrightarrow{B} = \mu_o \overrightarrow{J} + K \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \tag{A.4}$$

Es de suponer que si aplicamos la divergencia a esta ley de Ampere mejorada encontremos que $\nabla \cdot \overrightarrow{J} \neq 0$. Comprobémoslo:

$$\nabla \cdot \nabla \times \overrightarrow{B} = \mu_o \left(\nabla \cdot \overrightarrow{J}\right) + K \left(\nabla \cdot \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right)$$

Se sabe que la divergencia del rotacional de $\overrightarrow{B}$ es nula. Situándonos al lado derecho de la igualdad, del segundo término podemos intercambiar el orden de los operadores que actúan sobre $\overrightarrow{E}$ obteniendo que:

$$0 = \mu_o \left(\nabla \cdot \overrightarrow{J}\right) + K \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \overrightarrow{E}\right)$$

De la ley de Gauss para el campo eléctrico sabemos de la relación entre el campo eléctrico y la densidad de carga, por ende:

$$0 = \mu_o (\nabla \cdot \overrightarrow{J}) + K \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\varepsilon_o}\right) \qquad \rightarrow \qquad 0 = \mu_o (\nabla \cdot \overrightarrow{J}) + \frac{K}{\varepsilon_o} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Finalmente encontramos que:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{J} = -\frac{K}{\mu_o \varepsilon_o} \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{A.5}$$

Salvo por el termino $\frac{K}{\mu_o \varepsilon_o}$ llegamos a la ecuación de continuidad (A.1), esto nos permite deducir que la constante K no es más que el producto entre μ_o y ε_o. Como ya se había supuesto, K debía estar relacionada con propiedades de los campos eléctricos y magnéticos, de esta manera, reemplazando $K = \mu_o \varepsilon_o$ en A.4 obtenemos la ley de Ampere-Maxwell:

$$\nabla \times \overrightarrow{B} = \mu_o \overrightarrow{J} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \tag{A.6}$$

Anexos B

Principio de Relatividad de galileo: Transformaciones de galileo.

El principio de Relatividad de Galileo afirma que las leyes mecánicas son las mismas para cualquier sistema de referencia inercial, esto es, el fenómeno presenciado será el mismo sin importar si un observador se encuentra en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme respecto a otro. Suponga que se tienen dos sistemas de referencia, uno estacionario llamado S y otro con un movimiento rectilíneo uniforme respecto a S denotado como S', a cada sistema de referencia le es asociado un observador, P y P'. En un principio sus orígenes, O y O', coinciden en el mismo punto.

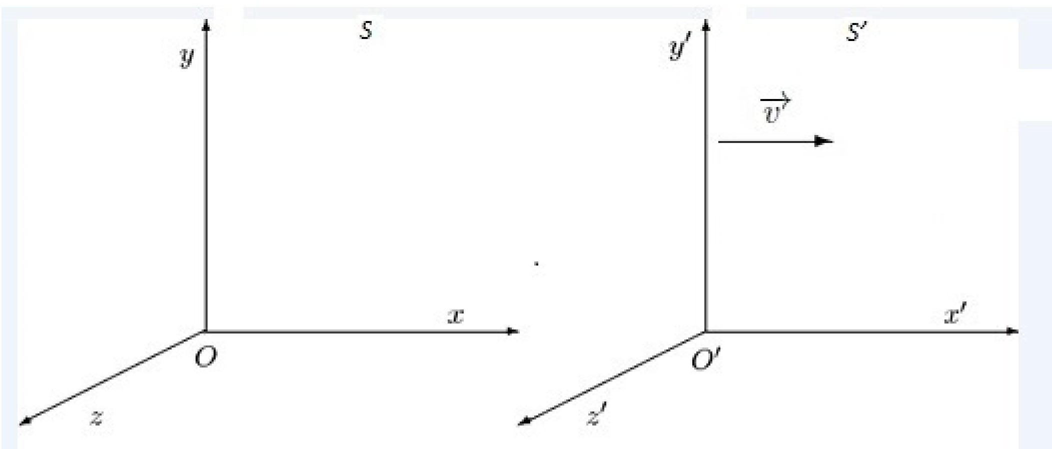

Figura B.1. Sistemas de referencia S' alejándose a velocidad v de S.

Si S' se empieza a alejar de S, solo sobre el eje x, a una velocidad $\vec{v} = (v_x, 0, 0)$, el observador P notara que la posición del observador P' respecto a su sistemas de referencia estará dada en términos de v_x y x'. La posición de P' medida por P en el sistema de referencia S estará dada por las siguientes ecuaciones de transformación:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + v_x t \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned}\right\} \tag{B.1}$$

En un principio la distancia de P' respecto al origen O' era la misma que tenía respecto al origen O (x'=x), pero una vez se empezó a desplazar S' su distancia respecto al origen O fue aumentando en proporción a la velocidad de desplazamiento de S' y el tiempo transcurrido t. Como el movimiento de S' solo se da en el eje x, las coordenadas y' y z' respecto a y y z no mostraran cambio alguno, además el tiempo medido por ambos sistemas de referencia es el mismo. Cambiando de sistema de referencia, el observador P' notara que P se aleja a una velocidad $-v_x$ debido a que para P' el movimiento se da en el sentido opuesto, así la posición de P estará dada por las siguientes ecuaciones de transformación.

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - v_x t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}\right\} \tag{B.2}$$

En el caso general en donde el movimiento de S' respecto a S se da en las tres coordenadas, debemos reescribir las ecuaciones de transformación en términos del desplazamiento en las tres coordenadas, para ello hacemos uso del vector posición $\overrightarrow{r}$ (En términos de x, y y z) y del vector velocidad $\overrightarrow{v}$ (En términos de v_x, v_y y v_z) de esta manera la posición de P' medida por P estará dada por:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}' + \overrightarrow{v}t \tag{B.3}$$

Escrito en términos de cada componente:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + v_x t \\ y &= y' + v_y t \\ z &= z' + v_z t \\ t &= t' \end{aligned}\right\} \tag{B.4}$$

Anexos C

Acción de una partícula libre.

Supongamos que se tiene una partícula en movimiento que no se encuentra sometida a una fuerza externa, la acción asociada a la partícula estará dada por:

$$S = \int_a^b -\alpha \, ds \tag{C.1}$$

Recordando lo dicho en el apartado (3.5.1), la acción implica encontrar la curva que describe la trayectoria que toma la partícula al desplazarse desde una posición inicial a una final, de ahí que sea expresada como la integral de "algo" (Denominado alfa) respecto al intervalo diferencial ds. Los limites a y b de la integral representan los dos sucesos que limitan la linea de universo descrita por la partícula. α es una magnitud que caracteriza la partícula y, como esta se mueve libremente, debería relacionarse con una velocidad asociada a la partícula, velocidad que le permita estar en movimiento durante un tiempo dado. Como la linea de universo que describe la partícula esta delimitada por dos sucesos que ocurren en tiempos determinados, la integral que define la acción puede expresarse en términos de un diferencial de tiempo, ademas de ser negativa debido a que alcanza un mínimo valor a lo largo de una linea de universo recta.

Para obtener la expresión final que de cuenta de la acción de una partícula libre es necesario hacer una serie de cálculos. En primera instancia partimos de que el intervalo $ds^2 = dx^k dx_k$. Pasando de coordenada contravariante a covariante por medio de la relación $dx^k = g^{ik} dx_i$, donde g^{ik} es el tensor métrico, obtenemos que el intervalo $ds = \sqrt{g^{ik} dx_i dx_k}$, esto para un espacio euclidiano con coordenadas cartesianas. Lo anterior también se cumple para la métrica de Minkowski en coordenadas *espacio-temporales*, por extrapolacion, los indices i y k son cambiados por μ y ν tomando los valores $1, 2, 3, 4$ y el tensor métrico adquiere la forma $g^{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$, así, obtenemos lo que en el espacio de Minkowski se conoce como intervalo *espacio-temporal*:

$$ds = \sqrt{dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2} \tag{C.2}$$

Como la acción de la partícula se relaciona con la trayectoria que describe su evolución temporal es conveniente expresar el intervalo ds en términos del diferencial dt, para ello multiplicamos la expresión anterior por $\frac{dt}{dt}$, luego de operar nos queda que:

$$ds = \sqrt{\left[\frac{dx_1^2}{dt^2} - \left(\frac{dx_2^2}{dt^2} + \frac{dx_3^2}{dt^2} + \frac{dx_4^2}{dt^2}\right)\right]}\, dt \tag{C.3}$$

Según la métrica de Minkowski la componente temporal x_1 esta definida como ct, por consiguiente $dx_1 = cdt$. Teniendo en cuenta que el cuadrado de la velocidad v de la partícula es igual a la suma de las componentes espaciales $\frac{dx_2^2}{dt^2}$, $\frac{dx_3^2}{dt^2}$ y $\frac{dx_4^2}{dt^2}$ nos queda que:

$$ds = \sqrt{c^2 - v^2}\, dt$$

$$ds = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \tag{C.4}$$

Reemplazando la expresión anterior en la ecuación (C.1) y evaluando la integral según el nuevo diferencial llegamos a que:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} -c\alpha\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \tag{C.5}$$

Aplicando el binomio de Newton, que para una raíz cuadrada es lo mismo que utilizar la serie de Taylor, obtenemos que:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} -c\alpha\left(1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{3v^4}{8c^4} - \frac{5v^6}{16c^6}...\right) dt$$

Despreciando los términos de tercer orden en adelante:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-c\alpha + \frac{\alpha v^2}{2c}\right) dt \tag{C.6}$$

Como recordara el lector, según la ecuación (3.1), el integrando de la acción S puede ser definido como el lagrangiano del sistema y es sabido que la diferencia de las energías cinética y potencial, T y U respectivamente, definen tal lagrangiano, si lo comparamos con la expresión obtenida anteriormente:

$$L = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - U \qquad \wedge \qquad L \approx \frac{\alpha v^2}{2c} - c\alpha$$

Vemos que mientras la energía potencial U puede ser relacionado con el producto de las constantes c y α, la componente asociada a la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ tiene cierta similitud con la expresión $\frac{\alpha v^2}{2c}$, de esta manera igualando estas dos ultimas expresiones podemos encontrar el valor de la constante α que nos brindara información relacionada con la partícula, de esta manera:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{\alpha v^2}{2c} \qquad \rightarrow \qquad \alpha = mc$$

Finalmente reemplazando α en la ecuación (C.1) llegamos a que la acción de una partícula libre esta dada por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} -mc\, ds \tag{C.7}$$

Y en términos del tiempo reemplazando α en la ecuación (C.5).

$$S = \int_{t_1}^{t_2} -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \tag{C.8}$$

Nótese que los limites de integración pasan a ser t_1 y t_2 debido a que los sucesos que limitan la linea de universo descrita por la partícula dependen de instantes de tiempo determinados. Como se menciono antes, α debería estar en términos de la velocidad de la partícula y como en mecánica clásica las partículas se caracterizan por su masa, esta bien pensar que α también debería tener relación con la masa, de ahí que finalmente la acción S quede en términos de m, v y c, esta ultima aludiendo al segundo postulado de la Relatividad especial.

Anexos D

Acción de una partícula sometida en un campo electromagnético: Expresión Final.

Tal como fue expuesto en el apartado (3.4.3), la acción correspondiente a una partícula sometida por un campo electromagnético esta dada por la suma de la acción de una partícula libre y la acción de esta misma al estar inmersa en dicho campo y cuya forma matemática esta dada por la ecuación:

$$S = \int_a^b -\left(mc\,ds\ + \frac{q}{c}A_\mu dx_\mu\right) \tag{D.1}$$

El integrando de la acción es lo que se conoce como el lagrangiano del sistema y permite dar cuenta de su evolución temporal, en este caso, los términos que dan cuenta del lagrangiano tienen asociadas variables de integración diferentes, por lo tanto es necesario homogeneizar estas componentes escogiendo al tiempo como única variable de integración, de esta manera, para el primer termino, utilizamos la relación 3.5 obteniendo que:

$$S = \int_a^b -\left(mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt\ + \frac{q}{c}A_\mu dx_\mu\right) \tag{D.2}$$

Ahora, el cuadripotencial A_μ es expresado por medio de las componentes espacio-temporales del espacio de Minkowski, por lo tanto, el indice μ toma los valores $1, 2, 3, 4$. La componente temporal(A_1) se relaciona con el potencial escalar del campo cuyo valor asociado es ϕ mientras que las componentes espaciales del cuadripotencial definen el potencial vectorial del campo que esta dado por el vector $\overrightarrow{A} = (A_2, A_3, A_4)$. En su forma covariante el cuadripotencial es definido como:

$$A_\mu = \left(\phi, -\overrightarrow{A}\right) \qquad \rightarrow \qquad A_\mu = (\phi, -A_2, -A_3, -A_4)$$

De esta manera, resolviendo el producto $A_\mu dx_\mu$ de la ecuación (D.2) nos queda que:

$$A_\mu dx_\mu = \phi dx_1 - A_2 dx_2 - A_3 dx_3 - A_4 dx_4$$

Dado que el potencial vectorial $\overrightarrow{A} = A_2 + A_3 + A_4$ y el diferencial de posición dx es la suma de los diferenciales de las coordenadas espaciales:

$$\overrightarrow{A}dx = A_2dx_2 + A_3dx_3 + A_4dx_4$$

Y como x_1 es la coordenada temporal cuyo valor asociado es ct, deducimos que:

$$A_\mu dx_\mu = \phi cdt - \overrightarrow{A}dx \tag{D.3}$$

Como en un principio se planteo dejar las componentes del integrando de la acción definida en la ecuación (D.1) en términos del tiempo como variable de integración, se hacen el siguiente cálculo:

$$A_\mu dx_\mu = \phi cdt - \overrightarrow{A}\frac{dx}{dt}dt$$

Así:

$$A_\mu dx_\mu = \left(-\overrightarrow{A}\overrightarrow{v} + \phi c\right)dt \tag{D.4}$$

Finalmente, reemplazando la expresión anterior en la ecuación (D.2), la acción S de una partícula en un campo electromagnético queda expresada como:

$$S = \int_a^b \left(-mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c}Av - q\phi\right)dt \tag{D.5}$$

Anexos E

Deducción del tensor de campo electromagnético.

El tensor de campo electromagnético es la representación matemática del fenómeno electromagnético, por tanto, una partícula en movimiento inmersa en este campo tendrá asociadas unas ecuaciones de movimiento definidas por medio de dicho tensor.

Para deducir las ecuaciones de movimiento que permiten encontrar la trayectoria verdadera que sigue una partícula inmersa en un campo electromagnético es necesario remitirnos al principio de mínima acción y suponer que la partícula se mueve sobre una trayectoria que no difiere mucho de la trayectoria verdadera, de esta manera la variación entre las acciones correspondientes a ambas trayectorias sera prácticamente nula, así, partiendo de la ecuación (3.10) que define la acción de la partícula inmersa en el campo:

$$\delta S = \delta \int_a^b -\left(mc\, ds \; + \frac{q}{c} A_\mu dx_\mu\right) \qquad \text{Como } \delta S = 0$$

$$\int_a^b - \left[mc\delta ds + \frac{q}{c}\delta\left(A_\mu dx_\mu\right)\right] = 0 \tag{E.1}$$

Los términos del integrando de la expresión anterior dependen de diferenciales diferentes, para homogeneizarlo partimos de que $ds = \sqrt{dx_\mu^2}$ dado que se mantiene el sistema de referencia sobre el cual se hacen las mediciones, con esto, al aplicar la variación δ al diferencial ds tendremos que:

$$\delta ds = \delta\sqrt{dx_\mu^2} \qquad \rightarrow \qquad \delta ds = \frac{2dx_\mu}{2\sqrt{dx_\mu^2}}\delta dx_\mu$$

$$\delta ds = \frac{dx_\mu}{ds}\delta dx_\mu \tag{E.2}$$

La partícula se encuentra moviéndose a una cuadrivelocidad u_μ que depende de las coordenadas *espacio-temporales*, por consiguiente podemos definiría como $u_\mu = \dfrac{dx_\mu}{ds}$ donde el intervalo ds obedece a la ecuación (3.5), así, nos que da que $\delta ds = u_\mu \delta dx_\mu$. Reemplazándolo en la ecuación (E.1):

$$\int_a^b mcu_\mu \delta dx_\mu + \frac{q}{c}\delta\left(A_\mu dx_\mu\right) = 0 \tag{E.3}$$

Aplicando la variación en la segunda componente del integrando:

$$\int_a^b mcu_\mu \delta dx_\mu + \frac{q}{c}\delta A_\mu dx_\mu + \frac{q}{c}A_\mu \delta dx_\mu = 0$$

Organizando términos nos queda que:

$$\int_a^b \left(mcu_\mu + \frac{q}{c}A_\mu\right)\delta dx_\mu + \int_a^b \frac{q}{c}\delta A_\mu dx_\mu = 0 \tag{E.4}$$

Integramos por partes la primera integral haciendo $w = mcu_\mu + \frac{q}{c}A_\mu$ y $dz = \delta dx_\mu$, así:

$$\left[\left(mcu_\mu + \frac{q}{c}A_\mu\right)\delta x_\mu\right]\Big|_a^b - \int_a^b \left(mcdu_\mu + \frac{q}{c}dA_\mu\right)\delta x_\mu + \int_a^b \frac{q}{c}\delta A_\mu dx_\mu = 0$$

Como la integral varia sobre limites fijos el primer sumando evaluado en a y b es nulo pues $\delta x_\mu|_a = 0$ y $\delta x_\mu|_b = 0$, por lo tanto:

$$\int_a^b \left(-mcdu_\mu \delta x_\mu - \frac{q}{c}dA_\mu \delta x_\mu + \frac{q}{c}\delta A_\mu dx_\mu\right) = 0 \tag{E.5}$$

El cuadripotencial A depende de las coordenadas *espacio-temporales*, de ahí que sea de la forma $A = A\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$, así:

$$dA = \frac{\partial A_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial A_4}{\partial x_4}dx_4$$

Haciendo uso del convenio de suma de Einstein: $\quad dA_\mu = \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}dx_\nu$

Así mismo, para la variación de A_μ: $\quad \delta A_\mu = \dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\delta x_\nu$

Con las dos relaciones anteriores la expresión (E.5) queda como:

$$\int_a^b \left(-mcdu_\mu \delta x_\mu - \frac{q}{c}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}dx_\nu \delta x_\mu + \frac{q}{c}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\delta x_\nu dx_\mu\right) = 0$$

Los subíndices del tercer termino del integrando son mudos, se repiten dos veces en el mismo termino, esto permite permutarlos a fin de simplificar la expresión, así:

$$\int_a^b \left(-mcdu_\mu \delta x_\mu - \frac{q}{c}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\delta x_\mu dx_\nu + \frac{q}{c}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\delta x_\mu dx_\nu\right) = 0$$

Ahora, multiplicando el integrando por $\dfrac{ds}{ds}$ y operando nos queda que:

$$\int_a^b \left(-mc\frac{du_\mu}{ds}\delta x_\mu - \frac{q}{c}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\delta x_\mu \frac{dx_\nu}{ds} + \frac{q}{c}\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\delta x_\mu \frac{dx_\nu}{ds}\right) ds = 0$$

$$\int_a^b \left[-mc\frac{du_\mu}{ds} + \frac{q}{c}\frac{dx_\nu}{ds}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)\right] \delta x_\mu ds = 0 \tag{E.6}$$

Dado que al aplicar la variación sobre x_i se puede obtener cualquier valor, para que se cumpla la igualdad se deduce que el resto del integrando debe ser nulo, ademas, como se menciono antes, la cuadrivelocidad puede expresarse de la forma $u_\nu = \dfrac{dx_\nu}{ds}$, por ende:

$$-mc\frac{du_\mu}{ds} + \frac{q}{c}u_\nu\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right) = 0$$

$$mc\frac{du_\mu}{ds} = \frac{q}{c}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)u_\nu \tag{E.7}$$

El lector recordara que la acción, como se expone en la ecuación (3.1), resulta de integrar el lagrangiano del sistema en el que es medida, por tanto, la expresión anterior corresponde a las ecuaciones de movimiento de una partícula inmersa un campo electromagnético deducidas a partir del lagrangiano de dicho sistema. Como la interacción del campo con la partícula en movimiento es asociada al cuadripotencial A_μ, la diferencia de las derivadas covariantes de dicho cuadripotencial es lo que definen el campo electromagnético, de esta manera, denotando este campo como $F_{\mu\nu}$:

$$mc\frac{du_\mu}{ds} = \frac{q}{c}F_{\mu\nu}u_\nu \tag{E.8}$$

$F_{\mu\nu}$ es un termino que toma una forma tensorial dado que varia bajo dos indices, covariantes en este caso, por tal razón queda entonces demostrado el tensor de campo electromagnético $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\mu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{E.9}$$

Teniendo en cuenta que los subíndices $\mu \wedge \nu$ toman los valores $1, 2, 3$ y 4, este tensor consta de un total de 16 componentes, en su forma matricial:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{bmatrix} \tag{E.10}$$

Anexos F

Deduciendo las componentes del tensor F_{ik}

Recordemos que, como se expuso antes, la forma en la que el campo interactúa con una partícula cargada esta dada por el cuadripotencial A_μ, donde $\mu = 1, 2, 3, 4$. En su forma covariante es definido como $A = \left(\frac{\phi}{c}, -\overrightarrow{A}\right)$ donde $\overrightarrow{A}$ es el potencial vectorial expresado por medio de las coordenadas espaciales, así:

$$A = \left(\frac{\phi}{c}, -A_x, -A_y, -A_z\right)$$

Por consiguiente, $\qquad A_1 = \dfrac{\phi}{c} \qquad A_2 = -A_x \qquad A_3 = -A_y \qquad A_4 = -A_z$

El campo magnético bajo al cual es sometida la partícula puede definirse mediante el potencial vectorial $\overrightarrow{A}$ de la forma:

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} \tag{F.1}$$

Resolviendo el rotacional del potencial vectorial podemos encontrar las componentes del campo magnético en términos de las componentes de dicho potencial, así:

$$\nabla \times \overrightarrow{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) i - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) j + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) k$$

Por lo cual, las componentes del campo magnético son:

$$\begin{cases} B_x = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\[2ex] B_y = -\dfrac{\partial A_z}{\partial x} + \dfrac{\partial A_x}{\partial z} \\[2ex] B_z = \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{cases} \tag{F.2}$$

Al igual que el campo magnético, el campo eléctrico también se relaciona con los potenciales que definen el cuadripotencial por medio de la siguiente expresión:

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\phi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \qquad \text{donde} \quad \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{F.3}$$

De esta manera, las componentes del campo eléctrico son:

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial\phi}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial t} \\ E_y = -\dfrac{\partial\phi}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial t} \\ E_z = -\dfrac{\partial\phi}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial t} \end{cases} \tag{F.4}$$

Utilizando las relaciones de los potenciales con los campos eléctricos y magnéticos podemos encontrar las componentes del tensor de campo electromagnético $F_{\mu\nu}$, para esto partimos de la ecuación que define tal tensor en términos del cuadripotencial, téngase en cuenta que $x_\mu = (ct, x, y, z)$, así, siguiendo un proceso netamente operativo:

$$F_{11} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \quad \rightarrow \quad F_{11} = 0$$

$$F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \quad \rightarrow \quad F_{12} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \rightarrow \quad F_{12} = \frac{E_x}{c}$$

$$F_{13} = \frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3} \quad \rightarrow \quad F_{13} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad \rightarrow \quad F_{13} = \frac{E_y}{c}$$

$$F_{14} = \frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} \quad \rightarrow \quad F_{14} = \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad \rightarrow \quad F_{14} = \frac{E_z}{c}$$

$$F_{21} = \frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \quad \rightarrow \quad F_{21} = \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} \quad \rightarrow \quad F_{21} = -\frac{E_x}{c}$$

$$F_{22} = \frac{\partial A_2}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \quad \rightarrow \quad F_{22} = 0$$

$$F_{23} = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \quad \rightarrow \quad F_{23} = -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad \rightarrow \quad F_{23} = -B_z$$

$$F_{24} = \frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} \quad \rightarrow \quad F_{24} = -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \quad \rightarrow \quad F_{24} = B_y$$

$$F_{31} = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \qquad \rightarrow \qquad F_{31} = \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} \qquad \rightarrow \qquad F_{31} = -\frac{E_y}{c}$$

$$F_{32} = \frac{\partial A_2}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_2} \qquad \rightarrow \qquad F_{32} = -\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \qquad \rightarrow \qquad F_{32} = B_z$$

$$F_{33} = \frac{\partial A_3}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \qquad \rightarrow \qquad F_{33} = 0$$

$$F_{34} = \frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} \qquad \rightarrow \qquad F_{34} = -\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \qquad \rightarrow \qquad F_{34} = -B_x$$

$$F_{41} = \frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_1} \qquad \rightarrow \qquad F_{41} = \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} \qquad \rightarrow \qquad F_{41} = -\frac{E_z}{c}$$

$$F_{42} = \frac{\partial A_2}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_2} \qquad \rightarrow \qquad F_{42} = -\frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \qquad \rightarrow \qquad F_{42} = -B_y$$

$$F_{43} = \frac{\partial A_3}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_3} \qquad \rightarrow \qquad F_{43} = -\frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \qquad \rightarrow \qquad F_{43} = B_x$$

$$F_{44} = \frac{\partial A_4}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_4} \qquad \rightarrow \qquad F_{44} = 0$$

Hemos obtenido entonces las 16 componentes del tensor de campo electromagnético a partir relaciones entre las coordenadas espacio-temporales del cuadripotencial, como se explico en el apartado (3.4), estas relaciones entre coordenadas se encuentran expresadas en términos de las componentes de los campos eléctricos y magnéticos mostrando así como el fenómeno electromagnético es comprendido y definido como la correspondencia de efectos eléctricos y magnéticos que tienen lugar en el continuo *espacio-tiempo.*

Reemplazando cada componente ya obtenida en la expresión (3.15) obtenemos el tensor de campo electromagnético en forma matricial:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \tag{F.5}$$

Vemos como $F_{\mu\nu}$ se define a partir de 6 componentes independientes que, como era de esperar, son las componentes espaciales de los campos eléctricos y magnéticos, este es un tensor covariante de segundo orden definido en el espacio de Minkowski (se compone de 16 componentes dado que se define en un espacio $\mathbb{R}^4$), por lo tanto, podemos encontrar la forma contravariante de dicho tensor siguiendo la operación $F^{\gamma\delta} = g^{\gamma\mu}F_{\mu\nu}g^{\nu\delta}$ donde $g^{\gamma\mu}$ y $g^{\nu\delta}$ corresponden al tensor métrico en el espacio de Minkowski, así:

$$F^{\gamma\delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{F.6}$$

Haciendo el producto de matrices encontramos que:

$$F^{\gamma\delta} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \tag{F.7}$$

El tensor de campo electromagnético cumple con la propiedad de ser un tensor hermisimétrico o anti-simétrico, esto se deduce al ver como los valores asociados a las componentes de su diagonal son todos nulos ya que $\mu = \nu$. Una forma de comprobar lo anterior es permutar sus indices, covariantes en este caso, y que sus componentes solo cambian de signo, para demostrarlo partimos de la definición del tensor:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{F.8}$$

Una propiedad de la derivada covariente nos dice que: $\dfrac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} = -\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$, así:

$$F_{\mu\nu} = -\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \left(-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right) = -\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right)$$

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \tag{F.9}$$

De esta manera queda entonces demostrado que el tensor de campo electromagnético es hermisimétrico.

Anexos G

Demostración de la covarianza del tensor de campo electromagnético.

La transformación de un tensor de segundo orden para dos sistemas de referencia se puede efectuar bien sea partiendo de sus componentes,

$$F'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\delta}} F^{\gamma\delta} \tag{G.1}$$

O de su forma matricial,

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda F^{\gamma\delta} \Lambda^{T} \tag{G.2}$$

Donde Λ es la matriz de transformación de Lorentz(ecuación (2.2)) y Λ^T es la transpuesta de dicha matriz cuyas componentes toman los mismos valores. Por conveniencia nosotros haremos uso de la transformación de coordenadas del tensor $F^{\mu\nu}$ a partir de su forma matricial, para ello, reemplazamos la matriz de Lorentz encontrada en la ecuación (2.2) y la matriz de la ecuación(3.19) en la relación anterior:

$$F'^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{G.3}$$

Para resolver este triple producto matricial se puede comenzar multiplicando la matriz de transformación de Lorentz con su transpuesta y posteriormente proceder a multiplicar la matriz resultante con la forma matricial del tensor $F^{\mu\nu}$, en nuestro caso procederemos en orden tal cual como se da el triple producto matricial, comenzaremos entonces multiplicando la matriz de transformación de Lorentz con la forma matricial del tensor $F^{\mu\nu}$.

$$\lambda F^{\gamma\delta} = \begin{bmatrix} -\gamma\frac{vE_x}{c^2} & -\gamma\frac{E_x}{c} & \left(-\gamma\frac{E_y}{c}+\gamma\frac{vB_z}{c}\right) & \left(-\gamma\frac{E_z}{c}-\gamma\frac{vB_y}{c}\right) \\ \gamma\frac{E_x}{c} & \gamma\frac{vE_x}{c^2} & \left(\gamma\frac{vE_y}{c^2}-\gamma B_z\right) & \left(\gamma\frac{vE_z}{c^2}+\gamma B_y\right) \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \tag{G.4}$$

Ahora multiplicando la matriz $\lambda F^{\mu\nu}$ por la transpuesta de la matriz de transformación de Lorentz:

$$\lambda F^{\gamma\delta}\lambda^T = \begin{bmatrix} -\gamma\frac{vE_x}{c^2} & -\gamma\frac{E_x}{c} & \left(-\gamma\frac{E_y}{c}+\gamma\frac{vB_z}{c}\right) & \left(-\gamma\frac{E_z}{c}-\gamma\frac{vB_y}{c}\right) \\ \gamma\frac{E_x}{c} & \gamma\frac{vE_x}{c^2} & \left(\gamma\frac{vE_y}{c^2}-\gamma B_z\right) & \left(\gamma\frac{vE_z}{c^2}+\gamma B_y\right) \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{G.5}$$

Resolviendo el producto matricial anterior nos queda que:

$$F'^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \left(-\gamma^2\frac{vE_x}{c^2}+\gamma^2\frac{vE_x}{c^2}\right) & \left(\gamma^2\frac{v^2E_x}{c^3}-\gamma^2\frac{E_x}{c}\right) & \left(-\gamma\frac{E_y}{c}+\gamma\frac{vB_z}{c}\right) & \left(-\gamma\frac{E_z}{c}-\gamma\frac{vB_y}{c}\right) \\ \left(\gamma^2\frac{E_x}{c}-\gamma^2\frac{v^2E_x}{c^3}\right) & \left(-\gamma^2\frac{vE_x}{c^2}+\gamma^2\frac{vE_x}{c^2}\right) & \left(\gamma\frac{vE_y}{c^2}-\gamma B_z\right) & \left(\gamma\frac{vE_z}{c^2}+\gamma B_y\right) \\ \left(\gamma\frac{E_y}{c}-\gamma\frac{vB_z}{c}\right) & \left(-\gamma\frac{vE_y}{c^2}+\gamma B_z\right) & 0 & -B_x \\ \left(\gamma\frac{E_z}{c}+\gamma\frac{vB_y}{c}\right) & \left(-\gamma\frac{vE_z}{c^2}-\gamma B_y\right) & B_x & 0 \end{bmatrix} \tag{G.6}$$

Operando cada componente a fin de simplificar:

$$F'^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma^2 \frac{E_x}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) & -\gamma\frac{1}{c}\left(E_y - vB_z\right) & -\gamma\frac{1}{c}\left(E_z + vB_y\right) \\ \gamma^2 \frac{E_x}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) & 0 & -\gamma\left(B_z - \frac{vE_y}{c^2}\right) & \gamma\left(B_y + \frac{vE_z}{c^2}\right) \\ \gamma\frac{1}{c}\left(E_y - vB_z\right) & \gamma\left(B_z - \frac{vE_y}{c^2}\right) & 0 & -B_x \\ \gamma\frac{1}{c}\left(E_z + vB_y\right) & -\gamma\left(B_y + \frac{vE_z}{c^2}\right) & B_x & 0 \end{bmatrix} \tag{G.7}$$

Finalmente vemos como varias de las componentes del tensor $F'^{\mu\nu}$ no son mas que relaciones entre las componentes de los campos eléctricos y magnéticos del sistema no primado, utilizando las transformaciones de los campos eléctricos y magnéticos deducidas en los dos últimos apartados del capitulo 2, podemos hallar la expresión final de este tensor en términos de las componentes de los campos eléctricos y magnéticos del sistema primados, así:

$$F'^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{E'_x}{c} & -\frac{E'_y}{c} & -\frac{E'_z}{c} \\ \frac{E'_x}{c} & 0 & -B'_z & B'_y \\ \frac{E'_y}{c} & B'_z & 0 & -B'_x \\ \frac{E'_z}{c} & -B'_y & B'_x & 0 \end{bmatrix} \tag{G.8}$$

Al comparar los tensores $F^{\gamma\delta}$ y $F'^{\mu\nu}$ notamos que son prácticamente iguales por lo cual se deduce que el fenómeno electromagnético es el mismo para ambos sistemas de referencia.