Evidencias del Pensamiento Funcional en niños de Segundo de Educación Básica Primaria

Sandra Marcela Quitian Romero
Cód.: 2009140080
C.C.: 1 030 562 163

Manuel Francisco Sopo Barrientos
Cód.: 2009140069
C.C.: 1014 223 767

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
DICIEMBRE 2013

Evidencias del Pensamiento Funcional en niños de Segundo de Educación Básica Primaria

Sandra Marcela Quitian Romero
Cód.: 2009140080
C.C.: 1 030 562 163

Manuel Francisco Sopo Barrientos
Cód.: 2009140069
C.C.: 1014 223 767

Trabajo de Grado
Presentado ante la Universidad Pedagógica Nacional
Como requisito parcial para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

Asesora: Johanna Montejo
Magister en Docencia de las Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.
DICIEMBRE 2013

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Evidencias del Pensamiento Funcional en niños de Segundo de Educación Básica Primaria.
Autor(es)	SOPO BARRIENTOS MANUEL FRANCISCO QUITIAN ROMERO SANDRA MARCELA
Director	JOHANNA MONTEJO ROZO
Publicación	Bogotá, D.C. 2013
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	*Pensamiento funcional, enfoque covariacional, enfoque de correspondencia, registros de representación y certeza matemática.*

2. Descripción
A continuación se presenta un trabajo de grado en el marco de la Licenciatura en Matemáticas, el cual tiene el objetivo de analizar las estrategias utilizadas por los estudiantes de segundo de primaria para crear registros, encontrar patrones y relaciones de dependencia entre los datos obtenidos en una situación de variación, e identificar en dichas estrategias el desarrollo del pensamiento funcional.

3. Fuentes
A continuación se listan las principales fuentes usadas en el desarrollo del presente trabajo: Blanton, M.& Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, (págs. 135–142). Chamorro, C.& Belmonte, J. B. (1994). *El Problema de la Medida. Didáctica de las Magnitudes Lineales.* España: Síntesis. Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos en Competencias en Matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Rojas, N.& Martínez, A. (2011). El papel de los escenarios de investigación, relacionados con el pensamiento funcional, en los procesos de inclusión en las clases: un estudio en séptimo grado.

Tesis de Maestría. Maestría en Docencia de las Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional.

Smith, E. (2003). Stasis and change: Integrating patterns, functions, and algebra throughout the K-12 curriculum. En J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter, *A research companion to principles and standards of school mathematics* (págs. 136-150). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Smith, E. (2008). Representational Thinking as a Framework for Introducing Functions in the Elementary Curriculum. En J. J. Kaput, Carraher, D. W, & Blanton, M. L., *Algebra in the Early Grades.* New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Vargas, M. E. (2011). El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno. *Trabajo de profundización. Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

4. Contenidos

El presente trabajo de grado se ha ordenado en cinco capítulos de la siguiente manera:

En el ***primer capítulo,*** se plantea una justificación en la que se resalta la importancia y relevancia que tiene su elaboración; posteriormente, se describen los antecedentes correspondientes al pensamiento funcional y algunas consideraciones del problema de la medida; además, se dan a conocer los objetivos tanto el general como el específico.

En el ***segundo capítulo,*** se describen algunos aspectos teóricos que se tienen presente para el desarrollo del trabajo de grado, tales como diferentes interpretaciones de función, variación, pensamiento variacional, pensamiento funcional, las actividades que lo potencian y la magnitud, esta última desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas planteados por el Ministerio de Educación Nacional (1998). Además, se dan a conocer las representaciones más comunes de situaciones en las que se trabaja la variación entre dos o más cantidades.

En el ***tercer capítulo*** se especifica la metodología del presente trabajo.

En el ***cuarto capítulo*** se realiza el análisis de las técnicas de recolección y de los resultados con base en cada una de las categorías establecidas para el pensamiento funcional.

Y en el **quinto capítulo**, se encuentran las conclusiones del análisis antes mencionado y la respuesta acerca de si los estudiantes de grado segundo, piensan o no funcionalmente.

Para finalizar se presentan la bibliografía y los anexos.

5. Metodología
Para el desarrollo del presente trabajo se llevaron a cabo las siguientes fases de estudio: **Fase 1.** Construcción del problema y búsqueda de definiciones. Esta primera fase consistió en la lectura minuciosa de varios documentos relacionados con el pensamiento funcional y a partir de los cuales surgió el interés que compete al presente trabajo. Se realizó posteriormente la búsqueda de antecedentes y los aspectos teóricos adecuados para sustentar la actividad que se propone. **Fase 2.** Diseño metodológico y análisis. Comprende el diseño de la metodología, seleccionando las técnicas de recolección de la información, la finalidad de cada una de ellas y el planteamiento de categorías de análisis a partir de la lectura de antecedentes y de los aspectos teóricos. Posteriormente, se planean las sesiones en las cuales los maestros en formación realizaron las visitas semanales y dirigieron el experimento realizado por los niños. En la planeación de cada sesión, se incluyen los recursos necesarios, los objetivos (general, de enseñanza y aprendizaje), una descripción de la actividad (con preguntas guía) y recomendaciones a tener en consideración al finalizar el encuentro con los estudiantes. El análisis de las evidencias recolectadas se realiza teniendo en cuenta las categorías de análisis establecidas en la metodología. **Fase 3.** Conclusiones. Se presentan por último, las conclusiones de este trabajo, teniendo en cuenta el análisis de las evidencias recolectadas en función de las categorías de análisis.

6. Conclusiones
Entre otras las conclusiones generales del estudio fueron las siguientes: Durante el análisis de los instrumentos de recolección de información, se evidencia que el registro de representación pictórico es muy importante para los estudiantes, puesto que lo utilizan para describir lo que pueden visualizar. Además, es de mayor facilidad para ellos realizar un dibujo que escribir. Debido a que los estudiantes aún no realizan mediciones con ayuda de instrumentos[1], no llevaron a cabo la cuantificación de la medida en la magnitud (longitud del crecimiento de la planta) y por esta razón, la certeza matemática no se presentó en el desarrollo de las actividades aquí sugeridas. Los estudiantes identificaron la relación entre las magnitudes “visita semanal” y “longitud de la planta”, además algunos realizaron predicciones cualitativas, por ejemplo, de la siguiente forma “a medida que aumentaba el número de semanas en las que se realizó una visita por cada una de ellas, también aumentaba la longitud de las plantas”. 5 Así como lo proponen Rojas & Martínez (2011),en la introducción del pensamiento funcional se debe centrar la atención en la manera en la que los estudiantes utilizan el enfoque covariacional y el de correspondencia para la construcción de las relaciones entre las magnitudes, y por tal razón se puede concluir que los estudiantes a pesar de no cuantificar la medida, llegan a pensar funcionalmente, puesto que no solo evidencian la variación de cada una de las magnitudes (verticalmente), sino que también realizan una comparación entre cada una de las magnitudes

[1] Ver página 17 de este documento: Aparte de la entrevista a la profesora titular.

(horizontalmente). Uno de los propósitos como investigadores iniciales, debe ser el promover o buscar preguntas, que apunten a la cuantificación, para que los estudiantes puedan alcanzar la certeza matemática. Es por ello que surge el siguiente cuestionamiento ¿Qué situaciones que potencien el pensamiento funcional se pueden generar para que los estudiantes puedan realizar certezas matemáticas?

Elaborado por:	Sandra Marcela Quitian Romero; Manuel Francisco Sopo Barrientos
Revisado por:	Johanna Montejo Rozo

Fecha de elaboración del Resumen:	09	12	2013

Agradecimientos

Queremos agradecer a todas las personas que hicieron posible este trabajo. Los profesores que amablemente solucionaron nuestras frecuentes dudas, los amigos y compañeros de la Licenciatura que nos acompañaron durante todo este proceso. A nuestras familias, que sin su apoyo no estaríamos en este punto de la historia, a la profesora Johanna Montejo, por su disposición, experiencia y colaboración constante en el desarrollo del trabajo de grado y a la profesora Nora Yamile Rojas Cataño, por su motivación, acompañamiento, y amistad que nos permitió sumergirnos en este tema.

Además, agradecemos a los niños del grado segundo de la escuela San José sede B, por su colaboración en las actividades, a la profesora titular del grupo, por darnos la oportunidad de hacer parte del proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, y poder realizar la aplicación de la situación funcional aquí planteada.

Sandra Marcela Quitian R.

Manuel F. Sopo Barrientos

Dedicatoria

Para mi papá, Jaime, sin su apoyo y amor, no habría alcanzado ninguna meta en mi vida, siempre ha sido quien me guía en mi trabajo y quien me escucha cuando lo necesito. A mi mamá, Amanda, quien me enseñó a seguir adelante sin importar las dificultades, y siempre dar lo mejor de mí. A toda mi familia, por su carisma y su gran amor hacia a mí. Y a mi novio Manuel, quien me ha acompañado durante este proceso y juntos hemos superado cada una de las dificultades que han ido surgiendo.

Sandra Marcela Quitian R.

A mi madre, Gloria, quien es mi fuerza e inspiración para alcanzar cada una de mis metas. Sin su apoyo y alegría no estaría en este punto de la vida. Además se la dedico a mi padre, Jorge, cuyos valores me formaron como una persona de la sociedad, y sus enseñanzas me mostraron el camino de la justicia. Y por último a mi novia, Sandra, que gracias a su amor y a su ayuda alcanzamos juntos el primero de muchos logros en nuestras vidas.

Manuel F. Sopo Barrientos

Tabla de Contenido

LISTA DE FIGURAS

Pág.

Lista de Tablas

Pág.

INTRODUCCIÓN

El estudio que a continuación se presenta, tiene como finalidad dar a conocer evidencias de pensamiento funcional en niños de segundo de primaria. La población que participa es un curso de 33 estudiantes de un colegio distrital de la ciudad de Bogotá, D.C. Para recoger dichas evidencias, se plantea como actividad central la germinación de una planta de arveja, puesto que esta tarea se constituye en un experimento común en el área de biología para este grado; además, está situación es propicia para determinar si existen o no evidencias de pensamiento funcional desde edades tempranas, debido a que la misma se constituye en un fenómeno de cambio o de variación.

Se espera también, que con la observación y descripción continua del proceso que lleva a cabo la germinación de una arveja (escrito en una libreta), los estudiantes a temprana edad, reconozcan relaciones presentes entre dos cantidades que varían: el número de visitasen el transcurso del experimento (1 por semana) y la longitud de la planta, siendo este el propósito del pensamiento funcional según Smith (2008). Una vez recolectada la información, el análisis de las relaciones que determinen los estudiantes, se realizará asumiendo las categorías propuestas por Smith (2008), como representante de estudios en Educación Matemática sobre Pensamiento Funcional.

El trabajo mismo está compuesto por cinco capítulos, de los cuales el primero muestra la justificación, los antecedentes del pensamiento funcional y los objetivos del estudio. En el segundo capítulo, se presenta aspectos teóricos en los que se sustenta este trabajo. Posteriormente, en el capítulo 3 se da a conocer entre otros, el contexto de la población, los instrumentos utilizados para la recolección de la información, la descripción de las sesiones y las categorías bajo las cuales se examinarán las respuestas dadas por los estudiantes. En el capítulo 4, se analizan los resultados de los alumnos teniendo en cuenta dichas categorías. Por último, en el quinto capítulo se describen las conclusiones a las que se llega tras el análisis antes mencionado y posteriormente se relaciona la bibliografía consultada y los anexos pertinentes.

1. ANTECEDENTES DEL ESTUDIO

En este capítulo se presenta la justificación de este trabajo, la revisión de los antecedentes de estudios sobre pensamiento funcional y el problema de la medida[2] en la Educación Matemática. Por último, se presentan tanto el objetivo general como los específicos.

1.1. Justificación

Los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y los Estándares Básicos en Competencias Matemáticas (MEN, 2006) presentan el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, como uno de los medios por el cual los estudiantes llegan a ser matemáticamente competentes. En estos documentos se sugiere que para potenciar este pensamiento en los primeros cursos de la educación básica primaria, se realicen entre otras las siguientes acciones:

> Analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; [***procurar expresar ese término, o mejor los dos o tres términos siguientes, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones***], e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iníciales e intentar generalizarlas. (MEN, 2006, pág. 67)

De esta manera, desde edades tempranas, con el uso de las mencionadas actividades se ha de procurar trabajar en el desarrollo del pensamiento variacional, como descripción del cambio a partir de las representaciones (en principio dibujos o pictogramas) que proponga o de las cuales se apropie el estudiante, tal como lo plantea el MEN (2006). Como se da a conocer en el párrafo anterior, se hace énfasis en analizar la relación que existe entre dos o más

[2]Se tendrá en cuenta un antecedente relacionado con el problema de la medida, debido a que por las características de la población (estudiantes de segundo de primaria), es posible que se registren dificultades con la medición de las magnitudes longitud y tiempo.

elementos de una misma variable (patrón o generalización) y no se tiene en cuenta la relación entre dos variables como lo propone el pensamiento funcional.

Se pretende entonces, en este trabajo, de alguna manera ampliar los planteamientos sobre el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos propuestos por el MEN (1998, 2006), haciendo énfasis en el Pensamiento Funcional y sus evidencias desde edades tempranas, teniendo en cuenta en el marco teórico a Smith (2008). Para ello, se analizan las posibles relaciones que encuentran estudiantes de segundo grado de educación básica primaria entre dos cantidades que varían, a través de actividades que potencien el pensamiento funcional, siendo este un tipo de pensamiento que le da una visión amplia al concepto de variación.

Partiendo de la idea de que el concepto de función es fundamental en las matemáticas, puesto que es una de las bases para el desarrollo del cálculo (tal y como lo expresa Crespo y Ponteville2003, pág. 235), se quiere también, aportar a la construcción del concepto de función (como una noción de variación y cambio que se utilizará para formalizar el concepto en cuestión en cursos superiores), no desde los cursos en los cuales usualmente se estudia (octavo - noveno) sino desde la educación primaria, para contribuir a evitar errores de conceptualización, dificultades y obstáculos en el aprendizaje de este concepto desde temprana edad.

Además, cabe resaltar que este trabajo permite generar un espacio de interdisciplinariedad entre algunas ciencias de estudio como la biología y las matemáticas, mostrándoles a los estudiantes las aplicaciones de esta última en aspectos de la vida diaria como es el crecimiento de una planta.

1.2. Antecedentes

1.2.1. Del Pensamiento Funcional

Aproximadamente en los últimos 20 años, a nivel internacional, se han realizado diferentes investigaciones que fomentan la incursión en el álgebra desde edades tempranas, mediante un movimiento conocido como *Early-Álgebra*, el cual a su vez incorpora el pensamiento funcional en los cursos fundamentales de la escuela. Entre otros, algunos de dichos estudios se describen a continuación:

1.2.1.1. Blanton, M & Kaput, J. (2004)[3]. Elementary grades students' capacity for functional thinking. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, pág.135–142.

Consideraciones generales

En varios documentos e investigaciones[4]se ha notado cierto interés por el potencial que dan a conocer estudiantes de Pre-K-5, pertenecientes a diferentes estratos sociales, económicos, etc., y con gran variedad en niveles formativos, a la hora de contribuir en tareas que reflejan la construcción o afianzamiento del razonamiento algebraico, de formas poco comunes y que rompen los esquemas que se imparten. Es por eso, que los autores se acogen a las ideas presentadas entre otros por Smith (2003) sobre el pensamiento funcional (siendo su desarrollo una manera de involucrarse con el razonamiento algebraico), manifestando que es:

[3]Para ello se utilizó una traducción de los maestros en formación del documento y una realizada por la profesora Nora Yamile Rojas en marzo del 2011.

4 Por ejemplo Bastable y Schifter, 2003; Blanton y Kaput, 2003; Carpenter, Franke y Levi, 2003; Carraher, Schliemann, y Brizuela, en prensa; Dougherty, 2003; Kaput y Blanton, en prensa; Schifter, 1999; Schliemann, Lara-Roth, y Goodrow, 2001 citados en Blanton & Kaput (2004, pág. 135)

> El pensamiento de representación que se centra en la relación entre dos (o más) cantidades variables y para las cuales se denotan los sistemas de representación de funciones inventados o apropiados por los niños, para representar la generalización de una relación entre las cantidades. (Smith, 2003, citado por Blanton & Kaput, 2004, p.135).

Metodología

Los datos para el estudio se toman de GEAAR, programa diseñado en un distrito escolar urbano con estudiantes de pre - kínder, kínder, primero, segundo, tercero, cuarto y quinto grado, por un grupo de maestros profesionales, que pretende asistir a docentes en la transformación de los recursos y las prácticas de enseñanza, con la intención de generar espacios dentro del aula de matemáticas en los que se desarrolle el razonamiento algebraico.

No obstante, de los diferentes reportes que se tienen de la ejecución de las tareas que propone el programa, se prestó mayor interés a los relacionados con estudiantes de pre - kínder y la actividad denominada “ojos y colas”, puesto que esta fomenta el desarrollo del pensamiento funcional entre una cantidad cualquiera de perros y su correspondencia con la cantidad total de sus ojos y colas; además, cabe resaltar, que esta tarea fue escogida por estar situada dentro de un contexto cercano a toda la población.

Ahora bien, algunas de las preguntas que componen la actividad propuesta a los estudiantes son:

> […] Si había un perro, ¿cuántos ojos podía haber? ¿Y si habían dos perros? ¿Tres perros? ¿100 perros? ¿Ve usted una relación entre el número de perros y el número total de ojos? ¿Cómo describir esta relación? ¿Cómo lo sabe?
> Suponga que usted quiere saber cuántos ojos y colas hay juntos. ¿Cuántos ojos y colas hay para un perro? ¿Dos perros? ¿Tres perros? ¿100 perros? ¿Cómo describiría usted la

relación entre el número de perros y el número total de ojos y colas? ¿Cómo sabe que esto funciona? (Blanton & Kaput, 2004, pág.136).

Las soluciones de los alumnos fueron recolectadas y analizadas teniendo en cuenta los tipos de representación que los estudiantes utilizaban según el grado de escolaridad que tenían, la evolución en el lenguaje matemático de los alumnos para especificar las relaciones funcionales, la forma como los niños ordenaron los datos, las operaciones que usaron para entender dichas relaciones funcionales (multiplicativas vs. aditivas) y la manera como dieron a conocer la variación entre las cantidades.

Resultados

~ Pre – Kínder (3 a 5 años). Con ayuda de varios recortes de papel en forma de 'perros' los estudiantes y el profesor contaban la cantidad de ojos y colas que tenían, a su vez el docente orienta a sus pupilos para que en tablas T registren estos datos escribiendo el número específico de ojos y colas conforme se tenga un número total de perros. Pese a que los alumnos no realizaron conjeturas, respondían acertadamente a través del conteo cuando el maestro ubicaba un número determinado de perros en la tabla y ellos decían cuál era el correspondiente de colas y ojos.

~ Kínder. Los estudiantes decidieron registrar los datos teniendo en cuenta los enunciados que propone la actividad, asignando una representación diferente para las colas y los ojos, y agrupándolos con un círculo por número de perros (ver figura 1), hasta llegar a 10 perros.

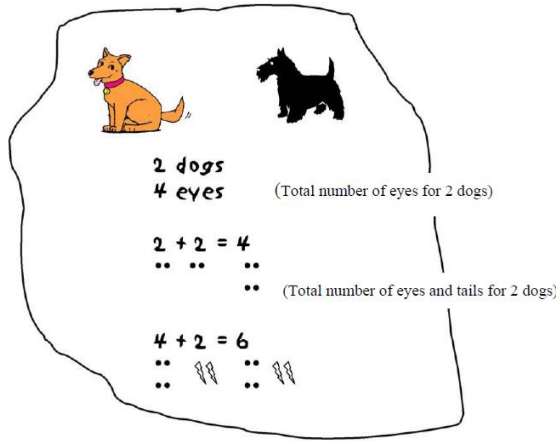


Figura 1. Marcas usadas para representar dos perros. Tomado de "Elementary grades students capacity for functional thinking"(Blanton & Kaput, 2004, pág. 137)

Con ayuda de los alumnos, el profesor elaboró una tabla y apuntó los datos obtenidos. Después de un conjunto de orientaciones (preguntas), los estudiantes lograron establecer un modelo primario sobre la paridad de las cantidades resultantes, al observar las colas y ojos que se tenían para un determinado número de perros.

~ Primer grado. En este caso, son los alumnos los que registran los datos en tarjetas gráficas (sin necesitar del docente). Mediante el conteo, la rima, los poemas y la ayuda del maestro, los estudiantes identificaron que el patrón para el total de ojos podía ser el 'doble' y para el número total de ojos y colas podía ser el 'triple'.

~ Segundo grado. Sin apoyo del profesor, los alumnos tomaron nota en una tabla de los resultados obtenidos para uno hasta diez perros; además, lograron crear la relación multiplicativa: "tú tienes que sacar el doble de un perro para saber el número de ojos". Con base en esto, conjeturaron la cantidad de ojos que han de tener cien perros, sin hacer uso del conteo directo. De forma semejante, realizaron una tabla para el conteo de colas y ojos fundamentándose en los datos conseguidos y predijeron que en cien perros podrían haber trescientos ojos y colas.

~ Tercero, cuarto y quinto grado. Los niños de tercero registraron las cantidades de forma espontánea y expresaron de forma oral y escrita (símbolos) la relación multiplicativa. Así mismo, utilizaron las expresiones $2 \times n$ y $n \times 2$para conjeturar el número total de colas y ojos para cien perros y esto lo representaron en una gráfica.

En cuarto y quinto grado los estudiantes realizaron actividades análogas a lo anterior, exceptuando el hecho que solo necesitaron conocer los resultados de tres perros para poder desarrollar función.

Análisis de resultados

Se lleva a cabo teniendo en cuenta lo siguiente:

I. El desarrollo de la infraestructura representacional y el sentido simbólico de los estudiantes.

En todos los grados se observó una amplia gama de representaciones para 'comprender' la finalidad de la actividad y expresar las diferentes relaciones matemáticas. Para registrar los datos, de forma guiada por el profesor se comenzó con tablas T[5] y diferentes 'marcas' escogidas por los niños, a medida que se iba avanzando en el nivel escolar, los estudiantes eran más autónomos y requerían de menos datos (a partir de tercero) para llegar a una predicción.

Se resalta la habilidad de los alumnos del tercer curso, puesto que fueron capaces de simbolizar con letras cantidades que varían; además, crearon un gráfico que representa la situación cuando se tiene la cantidad de perros contra el número total de ojos.

[5] O T-Chart como se conoce en inglés, es un mecanismo para organizar que se ha diseñado con el propósito de colocar información en dos columnas separadas. Ver ejemplo en Belew (s.f.)

En cuanto al lenguaje escrito utilizado para rotular las tarjetas gráficas que los estudiantes utilizaban, se puede notar el siguiente proceso:

- → Pre - kínder, kínder y primero: ‘perros’, ‘ojos’.
- → Segundo: ‘número de perros’, ‘número de ojos’
- → Tercero: <<D>> (dog), <<E>> (eyes)

II. Representaciones de las cantidades variables hechas por los estudiantes.

La exploración y el manejo de las tablas T permitió que los alumnos de pre - kínder especificaran una relación aditiva a la hora de usar los registros consignados en estas y plantear: “cada vez que se añade un perro tenemos dos ojos más”. Igualmente, este instrumento apoyó e impulsó a los estudiantes a establecer la estructura de las relaciones entre cantidades (par o impar).

Cuando se trabajó con los niños de primero con el mismo tipo de registro, ellos dieron a conocer de manera verbal una relación multiplicativa de dobles para la cantidad total de ojos y triples para el número total de colas y ojos. A su vez, en segundo, los estudiantes identificaron la relación multiplicativa: “se debe sacar el doble de un perro para saber el número de ojos”.

En los cursos de tercero en adelante en el momento de analizar los registros, los alumnos reconocieron maneras más ‘elegantes’ de escribirlos, como por ejemplo: n para la cantidad total de perros y $2n$ para la cantidad total de ojos.

Con todo lo anterior se evidencia un progreso inicial (en los primeros cursos) en la construcción del lenguaje matemático y del pensamiento funcional, al hacer uso para este último de representaciones ya sea creadas o adaptadas por los estudiantes a la hora de registrar los datos.

Conclusión

Aunque se hagan estudios para ahondar en el pensamiento algebraico presente en los grados elementales mediante la búsqueda de patrones, estos no deben estar basados meramente en datos de una sola variable; más bien han de ser patrones de dos o más cantidades que varían de manera paralela, puesto que si sucede específicamente lo primero se puede generar un obstáculo a la hora de potencializar el pensamiento funcional en cursos superiores.

Aportes:

El estudio de Blanton y Kaput (2004) se constituye en un gran aporte para el presente trabajo, debido a que sugiere utilizar más de una variable, con el objetivo de que los estudiantes identifiquen la variación y la relación entre las mismas. Así mismo, plantea que para encontrar evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de segundo grado de primaria, se pueden tener en cuenta como categoría de análisis los posibles registros de representación que emplean los estudiantes para registrar la relación que existe entre dos cantidades que varían.

1.2.1.2. Schliemann, A. D., Carraher, D. W., &Brizuela, B. (2001)[6]. When tables become function tables. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the Twenty-fifth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, the Netherlands (Vol. 4, pág. 145–152).

Consideraciones generales

Aunque en la escuela, la mayoría de profesores se inclinan por considerar las tablas de datos como tablas de funciones, no se tiene plena seguridad si esto lo hacen los estudiantes. Al respecto, los autores se preguntan:

[6] Para ello se utilizó una traducción de los maestros en formación del documento y una realizada por la profesora Nora Yamile Rojas en marzo del 2011.

> […]¿Qué pasa con los estudiantes? ¿Están aprendiendo acerca de las funciones cuando completan las tablas? ¿Qué hacen? ¿Consideran los estudiantes de tercer grado el tratamiento de las tablas de multiplicar, por ejemplo, como tablas de funciones? ¿Pueden usar y entender la notación algebraica para representar las funciones lineales? ¿Qué tipo de actividades con la participación de tablas podrían alentar a los jóvenes estudiantes a centrarse en las relaciones funcionales? (Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B., 2001, pág.1).

Además, aclaran que la cuestión que guía la investigación es ‘saber’ de alguna manera si los niños de nueve años pueden comprender las funciones y su notación algebraica, puesto que Davydov y sus colegas (1991 / 1969) dan a conocer que los alumnos de su estudio, lograron usar y entender la notación algebraica de una función, pero tomando x e y como incógnitas mas no como variables (por la naturaleza de las tareas).

Una de las bases de esta investigación, consistió en considerar el álgebra como la generalización de la aritmética, de ahí que la transición entre la una y la otra se considera como una actividad en la que se pasan de las relaciones entre los números y medidas específicas resultado de los cálculos numéricos, a las relaciones entre los conjuntos de números y medidas, con la intención de detallar las relaciones existentes entre las variables implicadas. Para esto, es necesario plantearles a los estudiantes una serie de situaciones problema (involucradas con las matemáticas que se utilizan diario) que los inviten a encontrar patrones presentes entre las variables, haciendo uso (explícita o implícitamente mencionado) de las tablas como método ordenado tanto del registro de datos como de ayuda para la visualización a la hora de buscar los mencionados patrones.

Hay que resaltar sin embargo, que cuando se trabaja con este instrumento se ubica en cada columna de la tabla una variable, por ejemplo el precio en una y la cantidad de juguetes en otra, para la cual los alumnos comúnmente encuentran dos patrones: uno para el precio y otro para el número de juguetes, sin hacer una relación entre ambas variables. Esta táctica se conoce por Vergnaud (1983, citado en Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B., 2001) como estrategia escalar. Aun así, si lo que se quiere es que los estudiantes manejen una estrategia funcional, hay que adecuarla para "*que se base en las relaciones entre las variables que se trabajan"* (pág 2).Es por esto, que si bien las soluciones escalares permiten ser un buen inicio para entender el concepto de función, no posibilitan la exploración de las relaciones existentes entre las variables utilizadas.

Metodología

Los datos del estudio proceden de un estudio más grande dedicado a entender y fundamentar los dilemas de la enseñanza y aprendizaje (Kaput, 1995) de la exploración aritmética (Carraher, Brizuela & Schliemann, 2000; Carraher, Schliemann & y Brizuela, 2000, 2001, citados en Schliemann et al. 2001), del cual su objetivo principal es colaborar a los jóvenes estudiantes a crear y edificar una comprensión de la multiplicación, como relación funcional y desde la representación algebraica.

Las diferentes tareas se desarrollaron en una escuela pública de primaria en Boston, con un curso del nivel tercero compuesto por 18 alumnos de diferentes culturas y costumbres, en el trascurso de un año lectivo, una vez por semana durante 90 minutos. A su vez, estas se crearon con base en las estrategias empleadas por los estudiantes en la resolución de problemas relacionados con precios y en lo que ellos sabían de los vendedores de la calle, como se detalla a continuación:

~ **Tarea 1.**

Llenar tablas de funciones. A cada estudiante se le entrega una hoja con la siguiente situación:

Mary had a table with the prices for boxes of Girl Scout cookies. But it rained and some numbers were wiped out. Let's help Mary fill out her table:

Boxes of cookies	Price
	$ 3.00
2	$ 6.00
3	
	$ 12.00
5	
6	
	$ 21.00
8	
9	
10	$ 30.00

Figura 2. Actividad 1. Tomada de "When tables become function tables" (Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B., 2001, pág. 3)

La cual se puede trabajar por parejas para discutir los resultados. La gran mayoría de los alumnos decidió abordar el problema partiéndolo en dos: primero se preocupaban por completar la columna de la cantidad de cajas de galletas (contando de uno en uno) y después de terminada pasaban a la columna del precio (contando de tres en tres). Aunque, respondieron acertadamente, el procedimiento que llevaron a cabo no les permitió ver las relaciones entre ambas variables. Algunos de los niños, llenaron los espacios vacíos de la columna de precios con el uso de las tablas de multiplicar.

~ **Tarea 2.**

Diferentes maneras de pasar de un número a otro. Se les solicitó a los alumnos que teniendo un número particular lo operaran para encontrar otro, por ejemplo: si se tiene el 2, ¿cómo obtengo el 8? Esto, con el ánimo de acercar a los estudiantes al estudio de las relaciones entre los números de una pareja.

Se dieron soluciones aditivas como "agregar 2 más 2 más 2 más 2", también multiplicativas.

~ **Tarea 3.**

*Enfocarse en cualquier número (N).*Se presentó a los niños una tabla parecida a la mostrada en la figura 2, pero con una fila extra: el término enésimo. Se quería que además de resolver la tabla como en el caso anterior, interpretaran y dieran un posible significado de lo que se agregó, con el propósito de animar a los estudiantes a pensar en las relaciones de forma general.

Hasta que el docente intervino y explicó cuál era el significado del término enésimo como “cualquiera”; una estudiante anotó en su tabla “$N \times 3$”, tres alumnos lo dejaron en blanco y varios consideraron que es un número que no se conoce pero que va después de un término en la tabla, por eso le asignaron un valor y calcularon el precio.

- **Tarea 4.**

Rompiendo el patrón de las columnas. Con la intención de introducir a los estudiantes en la relación funcional dejando de lado la búsqueda de patrones por columna, se les propone el ejercicio de completar una nueva tabla:

2. Here is another table. Can you fill in the missing values?

X	Y
1	3
2	5
3	7
4	9
5	
7	
8	
9	
10	
20	
30	
100	
N	

Figura 3. Tomada de “When tables become function tables” (Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B., 2001, pág. 4)

Los niños no lograron completar la tabla por si solos puesto que esta representaba una función que implicaba una adición $(x \rightarrow 2x + 1)$, por eso después de mucho intentar y entre todos, usaron la regla antes mencionada y terminaron el cuadro.

- **Tarea 5.**

El desarrollo de una notación para la función. A partir de la notación de la función que se trabajó con la tabla, se planteó una expresión en los mismos términos $3n + 2$, para la cual se le daban diferentes valores a n entre cero y diez mil y los niños daban los resultados fácilmente.

- **Tarea 6.**

Búsqueda de la regla a partir de pares de números. Se muestran pares de números a los alumnos para que de una u otra forma encuentren la regla que les permite ir de uno a otro. Concluyen que esta es $N \to N + 3$y comprenden que Nes una variable y no un número desconocido. Después de esto, los estudiantes piden un ejercicio más complejo, para lo cual se les plantea:

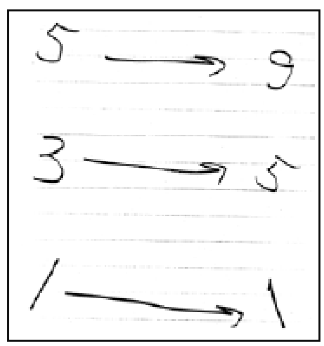


Figura 4. **Tomada de "When tables become function tables" (Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B., 2001, pág. 6)**

Al final de la actividad los estudiantes lograron pensar de manera funcional y emplear la notación funcional, puesto que para la situación que se les planteaba, dos de ellos determinaron la regla general de la función lineal y varios lo hicieron para casos particulares.

Conclusiones

La tarea de concluir cuál es la regla para ciertas parejas de números y demás orientaciones, permite en los estudiantes interrumpir el proceso de buscar patrones de forma lineal, para hacerlo entre dos (o más) variables. No hizo falta hacer uso de materiales concretos para 'afianzar' las relaciones numéricas, además, se adaptaron rápidamente a las expresiones algebraicas resultantes.

Aportes generales:

Entre otros, estos trabajos permiten mostrar que los alumnos de educación básica primaria (como se conoce en nuestro país) pueden desarrollar y hacer uso de una gran variedad de mecanismos de representación (imágenes, gráficos, tablas, símbolos y palabras) para analizar funcionalmente. Por lo tanto, es conveniente indagar cómo interpretan los estudiantes las relaciones funcionales que se les presentan, para poder ayudarlos posteriormente en la construcción del concepto de función.

1.2.2. Sobre el problema de la medida

Debido a que los estudiantes de grado segundo de primaria, posiblemente registren dificultades a la hora de medir las magnitudes longitud (ver tabla 1) y tiempo[7] con los instrumentos usuales (regla y reloj respectivamente), se hace necesario incluir como antecedente de nuestro trabajo, estudios relacionados con el problema de la medida.

Maestros en formación (M)	Buenos días profe, quisiéramos saber si ¿los niños conocen o manejan la regla para medir?
Profesora titular (P)	Hola, por el momento no saben manejar la regla

[7] Que son las magnitudes involucradas en el experimento de germinación de una planta de arveja como situación de variación.

M	Entonces, ¿Qué instrumentos manejan para realizar la actividad de medir?
P	Esos son variados, por ejemplo, en una actividad que hicimos en clases anteriores, se les pedía a los estudiantes medir el borde de su escritorio con lo que tuvieran a su alcance. Para eso, muchos usaron el borde de sus manos, lo que les permitiría familiarizarse con la medición empleando una parte de su cuerpo y un instrumento de medida cercano a ellos, aunque no estándar.

Tabla 1. Diálogo con la profesora titular, en el que se evidencia que los estudiantes no conocen los instrumentos de medición, y por tal razón no pueden hacer una cuantificación de la medida.

La acción de medir es difícil y engorrosa, según Chamorro y Belmonte (1994, pág. 49) esta necesita de práctica y destreza de parte de los estudiantes. Se hace necesario además, que desde edades tempranas se les presenten a los niños situaciones en las que se familiaricen con las magnitudes físicas, aun cuando "inicialmente este contacto se lleve a cabo de una manera intuitiva, explorando con los sentidos". Es decir, para empezar se debe "ir de lo concreto a lo abstracto, de lo fácil a lo difícil, según las fases: manipulativa, verbal, gráfica y simbólica".

Hay que resaltar que Chamorro y Belmonte (1994, pág. 55) aseguran que el proceso que supone la construcción del concepto de medida, es una tarea difícil, en la cual sus "técnicas no pueden ser adquiridas de golpe pues psicológicamente es imposible" dado que el acto de medir encuentra su razón de ser en el momento en el que una persona siente la necesidad de hacerlo, o sea, "cuando los sentidos son insuficientes para comparar una serie de objetos según una magnitud dada o cuando se requiere un cuantificación precisa". Así mismo, se debe procurar "materializar las longitudes […]" Chamorro y Belmonte (1994, pág. 56) utilizando un "material de referencia" acoplado a la magnitud longitud por ejemplo, un trozo de cinta.

Para el caso, a la hora de considerar la tarea de medir qué tanto creció una planta de arveja sembrada, se tienen en cuenta ciertos errores que pueden cometer los alumnos. Al respecto, Chamorro y Belmonte (1994) afirman que debido a la metodología de enseñanza tradicional que se le ha dado al problema de la medida (en la que los alumnos no intervienen en la toma de medidas de modo activo), los estudiantes suelen cometer los siguientes errores:

» Uso erróneo de los sentidos.

Según Chamorro y Belmonte (1994), hay actividades en las que se estima la masa con la vista o la capacidad de algún objeto con solo tocarlo, lo cual estará bien para el niño, si no se le deja ensayar con los sentidos (primero de forma autónoma y sin restricciones y luego de manera guiada) hasta el punto de caer en el error de la percepción.

Por ejemplo, pude ocurrir que un estudiante al emplear la “percepción” a la hora de trabajar con la magnitud longitud, no evidencie un crecimiento de la planta en las diferentes semanas en las que se haga una toma de medida.

» Uso de instrumentos inadecuados y mal manejo de los mismos.

Puede llegar a suceder (como se ha considerado) que aunque los alumnos tengan los instrumentos para medir la longitud de la planta en el transcurso de las visitas, no sepan interpretar el resultado obtenido o identificado en dichas herramientas.

A su vez, Chamorro y Belmonte (1994), aseguran que en reiteradas ocasiones los estudiantes ubican de forma errónea la regla sobre lo que quieren medir, haciendo que el número resultante de esta acción, no coincida con la medida real; además las tareas tradicionales y los ejercicios repetitivos, hacen que los estudiantes no se preocupen por buscar tácticas diferentes a las habituales (regla graduada) para enfrentarse a problemas poco comunes como medir la longitud de una curva.

Esta situación se evitará en el transcurso de esta experiencia, a partir de la implementación de cintas para medir la longitud de las plantas a medida que transcurren las visitas semanales de quienes supervisan el experimento. La cinta se utiliza como un instrumento de medición cualitativa, a través de la cual se espera que el estudiante compare la longitud de las plantas con las diferentes visitas (1 por semana) realizadas a lo largo de la investigación. Así mismo, la magnitud tiempo se considerará como cantidad de visitas semanales. Esto se debe a que esta es una magnitud discreta, que se mide a partir de números naturales, con los cuales el niño se encuentra familiarizado.

» Resolución de problemas que contienen datos erróneos o no reales.

"… [Los problemas de este tipo] dificultan, por una parte, la estimación y, por otra, la autocorrección, puesto que el alumno se habitúa a resolver problemas cuyo resultado es irreal, siendo su experiencia un [obstáculo, más que] una ayuda." (Chamorro & Belmonte, 1994, pág. 46)

» Abuso de la <<exactitud>>en las medidas. Encuadramientos.

Chamorro y Belmonte (1994) aseguran que por lo general los profesores suelen mostrar problemas cuyos resultados son números enteros, lo cual genera que los alumnos no admitan entonces que sus soluciones no sean exactas y las consideren equivocadas, hasta el punto de querer redondearlas de manera imposible.

» Escrituras erróneas o sin sentido.

En palabras de Chamorro y Belmonte (1994), este error ocurre cuando por ejemplo se escribe de forma errada:

$$\frac{400}{25} = 16 = 16\ cm$$

Para el caso, la población con la que se trabajará posiblemente no tiene en cuenta la unidad de medida al medir las plantas; es decir, consideran que la medida solamente corresponde a la cantidad de magnitud y no a la cantidad de magnitud con la unidad de medida.

» Carencia de estrategias para efectuar medidas de objetos comunes.

Para Chamorro y Belmonte (1994), este error tiene lugar cuando los ejercicios que se les plantean a los niños en la escuela son triviales (medir la superficie de un terreno rectangular, etc.), y por tanto no ven necesario el hecho de buscar estrategias (descomposición de una figura en figuras más simples) para realizar medidas de los objetos que se ven en la vida diaria.

Es por esto, que con la intención de no entrar a influir en la 'adquisición' involuntaria de alguno de los errores antes mencionados (por lo menos después de la primera visita), se busca que el niño tome la medida de la longitud de la planta utilizando sus manos y representándolo con un trozo de cinta, como se muestra a continuación:

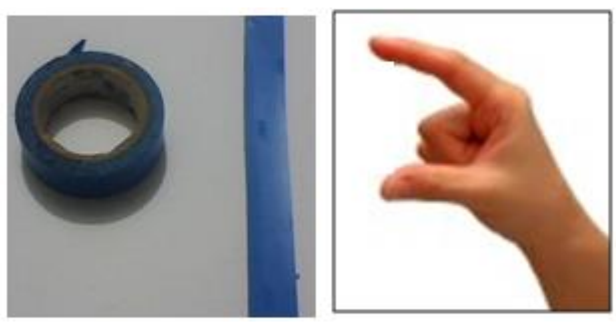


Figura 5. Instrumentos de medición cualitativa

1.3. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

Analizar las estrategias utilizadas por los estudiantes de segundo de primaria para crear registros, encontrar patrones y relaciones de dependencia entre los datos obtenidos en una situación funcional e identificar en dichas estrategias el desarrollo del pensamiento funcional.

1.4.2. Objetivos Específicos

- ✓ Consultar bibliografía referente al pensamiento funcional y las diferentes estrategias para potenciar este pensamiento en los estudiantes de segundo grado.
- ✓ Diseñar y gestionar actividades dirigidas a niños de segundo de primaria de una institución educativa, que permitan establecer herramientas para potenciar el pensamiento funcional.
- ✓ Presentar y analizar los resultados de las actividades, bajo los criterios establecidos por Smith (2008) para identificar en qué nivel se encuentran los estudiantes en el desarrollo del pensamiento funcional.

2. ASPECTOS TEÓRICOS

En este capítulo se abordan aspectos teóricos tales como la definición de función, variación, pensamiento variacional, pensamiento funcional, las actividades que lo potencian y la magnitud, esta última desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas planteados por el Ministerio de Educación Nacional (1998). Además, se dan a conocer las representaciones más comunes de situaciones en las que se trabaja la variación entre dos o más cantidades.

2.1. Definición de función

Siendo uno de los grandes matemáticos de la historia, Euler propone como definición de función la siguiente:

> Si algunas cantidades dependen de otras cantidades de modo que si las últimas cambian, las primeras también lo hacen, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las últimas. Esta denominación es de naturaleza amplia e incluye cada método por el cual una cantidad pudiera ser determinada por otras. Si por consiguiente, denota una cantidad variable, entonces toda cantidad la cual depende de en cualquier manera o esté determinada por ella es llamada una función de ella. (Sánchez& Valdés, 2007)

Es decir que si se tienen dos tipos de cantidades de tal manera que las primeras dependan de las segundas, si se llegase a modificar las últimas, las primeras también se verán afectadas.

Ahora bien, si se tiene en cuenta el contexto que hoy en día se vive en entorno a la educación, algunas de las definiciones presentes en los textos guía (como instrumentos de enseñanza y aprendizaje) de las instituciones educativas (colegios, universidades, etc.) con respecto a la función, se relacionan a continuación:

» “Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Una función de A en B es una regla de correspondencia a cada elemento *x* de A un único elemento *y* de B” (Del Valle, 2005; citado en Quintero y Cadavid, s.f.)

» “Una regla que asigna a cada objeto de un conjunto A, exactamente un objeto de un conjunto B. El conjunto A se denomina dominio de la función y el conjunto B de objetos asignados se denomina rango”. (Hoffmann, 2001; citado en Quintero y Cadavid, s.f.).

» “Una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto X de números reales *x*, a un conjunto Y de número reales *y*, donde el número *y* es único para cada valor específico de *x*” (Leithold, 2006; citado en Quintero y Cadavid, s.f.)

Estas definiciones permiten reconocer la función como un caso particular de una relación: la correspondencia entre elementos del conjunto de partida (conocido también como dominio) y el conjunto de llegada o rango, en la cual a cada elemento del conjunto de partida le corresponde exactamente un elemento del conjunto de llegada.

2.2. La variación y el Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos

En los estudios de Zatti y Montiel (2007, citado por López, 2009) se establece que “la variación es una herramienta de análisis necesaria para la predicción”, puesto que cuando se predice se hace indispensable la tarea de cuantificar y estudiar los cambios. Por su parte López (2009) entiende la variación “como una cuantificación del cambio” (siendo este último la transformación de forma, aspecto, conducta o cualidad de un cuerpo, estructura u objeto -López (2009) -) es decir, analizar la variación de un cuerpo u objeto hace referencia a hacer uso de nuestros conocimientos para entender cómo y cuánto cambia el cuerpo u objeto en cuestión.

En nuestro país, el Ministerio de Educación Nacional en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006, pág. 66) relaciona la variación con el Pensamiento Variacional y los Sistemas Algebraicos y Analíticos al afirmar que este último hace referencia a "[…] el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos". También el MEN (1998, pág. 49) sugiere que se debe dejar de lado la enseñanza de contenidos divididos y sin conexión, para iniciar y desarrollar el pensamiento variacional en los estudiantes mediante la construcción de un campo conceptual, que comprenda concepciones y métodos que estén relacionados y que también posibiliten estudiar, ordenar y modelar matemáticamente problemas y situaciones de la vida diaria, de las ciencias y de la propia matemática, en donde la variación sea la base de las mismos.

Hay que destacar además, que según el MEN (1998, pág. 50) tanto en el entorno de la vida diaria como en el científico, la variación está ligada a situaciones en las que una misma cantidad varía o en ambientes en donde una o más variables dependen de otras. Estas ideas fomentan en el alumno conductas de "observación, registro y utilización del lenguaje matemático" (pág. 50).Así mismo, para que el estudiante empiece a generar nociones de función, el MEN recomienda hacer uso de tablas en el estudio de las matemáticas, puesto que estas constituyen "un ejemplo concreto de función presentada numéricamente"(pág. 50) y si se acompañan de una situación problema adecuada, pueden llevar a los alumnos a construir fórmulas (como enunciado matemático que da a conocer de manera sucinta un patrón de variación) o expresiones algebraicas concretas. También, las tablas permiten ahondar en el entendimiento de la variable, como un objeto matemático que puede llegar a tomar “un número infinito de valores de reemplazo” (pág. 50) y de solución.

Igualmente el MEN sugiere que otro instrumento para iniciar el estudio de la variación desde edades tempranas es la observación y análisis de patrones en la vida diaria(mediante “representaciones pictóricas e icónicas” pág. 50) y en las matemáticas (numéricos o geométricos), haciendo uso de la representación verbal para expresar la relación existente entre las cantidades que varían.

Vale la pena resaltar que dentro de los estándares que propone el MEN (2006, pág. 81) para el ciclo de primero a tercero en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, se menciona que el niño debe ser capaz de “[describir] cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos […]”, lo cual es muy importante para el desarrollo de la actividad por parte de los estudiantes, puesto que no se ha establecido una unidad de medida determinada para cuantificar la longitud de la planta.

2.3. Representaciones

El término representación en matemáticas, hace referencia a todos aquellos registros (simbólicos o pictóricos) que permiten ‘visualizar’ los conceptos y procedimientos matemáticos y con los cuales, las personas interesadas pueden interactuar y aproximarse al saber matemático. (Rico, 2009). Por su parte, Duval (1999, citado en Morales y Sepúlveda, 2006, pág. 1) argumenta que los conceptos se van construyendo mediante acciones que impliquen el uso de diferentes representaciones ya sea de los conceptos mismos, de los elementos asociados a ellos o de los objetos matemáticos, así como la manipulación de estas para promover una articulación coherente entre ellos y sus representaciones. Además, el Ministerio de Educación de Chile (2012, pág. 4) plantea que al representar, los estudiantes trasladan “experiencias y objetos de un ámbito concreto y familiar a otro más abstracto y nuevo, en que habitan los conceptos que [se] está recién construyendo o aprendiendo”, de ahí que sea importante realizar varias representaciones del mismo concepto matemático.

Tal como lo reportan los estudios citados en los antecedentes y el MEN (1998), una de las representaciones más comunes (ya sea por construcción propia o inducida por los docentes) a la hora de trabajar con situaciones o problemas en los que se involucra la variación entre dos (o más) cantidades, es la ***tabular***; no obstante, no es la única que se conoce. A continuación y con las ideas de Vargas (2011), se consideran otros sistemas que permiten representar la función (como concepto particular de la relación entre dos o más cantidades que varían) y pueden ser utilizados por los maestros o en algún momento por los estudiantes como estrategia para llegar a la generalización de un patrón entre dos cantidades que varían.

◊ *Verbal.* Se genera de manera natural a la hora de dar explicaciones a las posibles relaciones que se evidencien. Por ejemplo: “*a medida que el número de visitas de los profesores en formación aumenta (1 por semana durante 5 semanas), la planta crece un ‘poco’ más.”*

◊ *Algebraica.* Visto como una fórmula explícita que generaliza la regla presente en las relaciones que se identifican.

◊ *Visual.* Se refiere a una gráfica de la función realizada con ayuda del plano cartesiano, en donde en el eje horizontal (eje x) se representan los elementos de partida (por ejemplo el número de visitas en el transcurso del experimento con el uso de los números naturales) y en el eje vertical (eje y) los de llegada (por ejemplo el crecimiento de la planta medido en la cantidad de cuadritos que abarca la cinta pegada en las libretas).

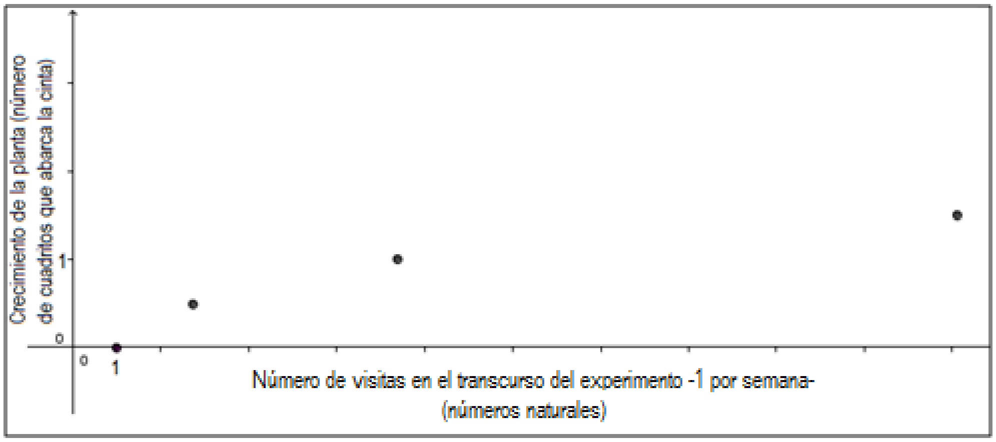


Figura 6. Gráfica del crecimiento de una planta

◊ *Con un diagrama sagital.* Se utilizan diagramas para representar los conjuntos de partida y de llegada y evidenciar la relación entre ellos a través del uso de flechas. En nuestra experiencia, el diagrama sagital que se emplea es:

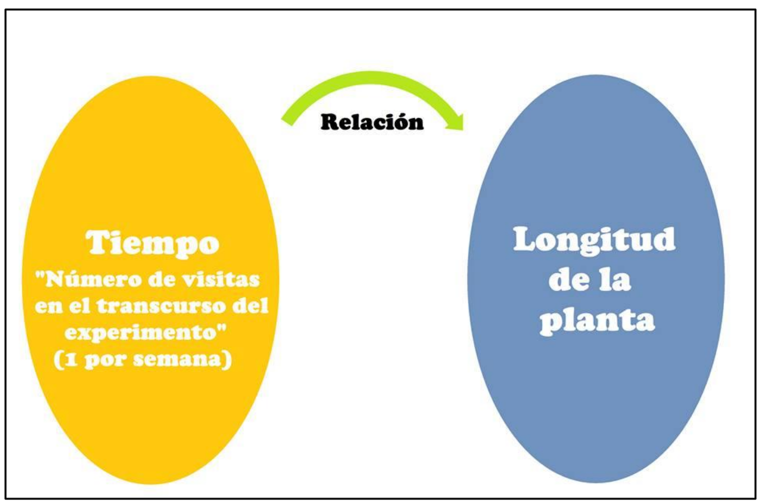


Figura 7 Relación de correspondencia en la situacion funcional establecida.

◊ *Representación pictórica* (Smith, 2008; MEN, 1998). Puesto que "la mente humana no permite tener completo acceso a las diferentes representaciones internas que tienen las personas, es por eso que una forma de externalizarlas es" (Guarin y Ríos, 2006) a través de dibujos provenientes de la 'imaginación' del alumno y los cuales le permitan visualizar mejor la situación o la generalización buscada o trabajada.

Figura 8 Representacion pictorica del crecimiento de una arveja.

◊ *Enactiva*. Esta representación posibilita “representar eventos mediante una respuesta motriz adecuada” (Machado, Fernández, Font , & Díaz Godino , 2011, pág. 2), en donde para el caso, los niños van a representar con sus manos o a través de un trozo de cinta la medida de la altura de la planta que se cultivará.

Así mismo, Font, Godino, y D’Amore (2007) establecen dos clases de representación: las internas y las externas. Las primeras nacen al interpretar las diferentes sentencias que es capaz de argumentar un estudiante con respecto a un concepto y que son distintas entre individuos (la persona las genera mentalmente); en cuanto a la segunda, se refiere a “los sistemas de signos públicos… (Gráficas, expresiones simbólicas, etc.)”.

Cabe resaltar además, que hacer una representación de cierto concepto matemático muchas veces emerge del trabajo colectivo, de la interacción social con los compañeros de clase a la hora de discutir la tarea sugerida. Es más, podría decirse que es:

> Más que una simple imagen, momentánea y puntual, la representación es un proceso constructivo que pone en operación, en su construcción y en su uso, el conocimiento disponible (conocimiento previo), en condiciones sociales específicas. Es un instrumento de relación con el mundo y del propio proceso de construcción. (Campos Hernández & Balderas Cañas, 2000)

2.4. Definición del pensamiento funcional

Existen diferentes investigaciones que hacen referencia al pensamiento funcional (ver figura 9). Una de ellas es el trabajo de Rico (2007, citado por Merino C., 2012, p.16) quien señala que el pensamiento funcional es la acción de reflexionar sobre las relaciones presentes en un problema, las cuales tienen diferentes sistemas de representación, comprendiendo entre otros las tablas, los dibujos y las gráficas.

A su vez, Blanton, Levi, Crites y Dougherty (en prensa, citados por Merino, 2012, pág.16) precisan que el pensamiento funcional es el procedimiento en el que se crea, detalla y analiza con y sobre las funciones. Eso comprende la generalizacion de relaciones, su representacion haciendo uso del lengueje verbal, escrito y algebraico, las tablas y los gráficos; y pensar de manera espontánea con base en dichas representaciones para deducir y vaticinar el comportamiento de las funciones.

Por su parte Smith (2008)hace una diferenciación entre dos tipos de pensamiento algebraico: el representativo y el simbólico. El primero se emplea para escoger los procesos mentales gracias a los cuales un individuo crea el significado de algún método de representación, y el segundo hace alusión a la manera como se comprende y usa el sistema simbólico. Del pensamiento representativo surge una línea conocida como pensamiento funcional. Por su parte Blanton y Kaput (2004) precisan una definición del pensamiento funcional, teniendo en cuenta la caracterización de Smith (2003), como:

> El pensamiento de representación que se centra en la relación entre dos(o más) cantidades variables y para las cuales se denotan los sistemas de representación de funciones inventados o apropiados por los niños, para representar la generalización de una relación entre las cantidades (Blanton & Kaput, 2004, pág.135).

Es decir, dicho pensamiento se enfoca en las relaciones que lleguena existir entre dos o más variables, sin dejar de lado las representaciones que pueda asumir oproponer el estudiante para dar a conocer la generalización de la relación entre las variables que se encontraron.

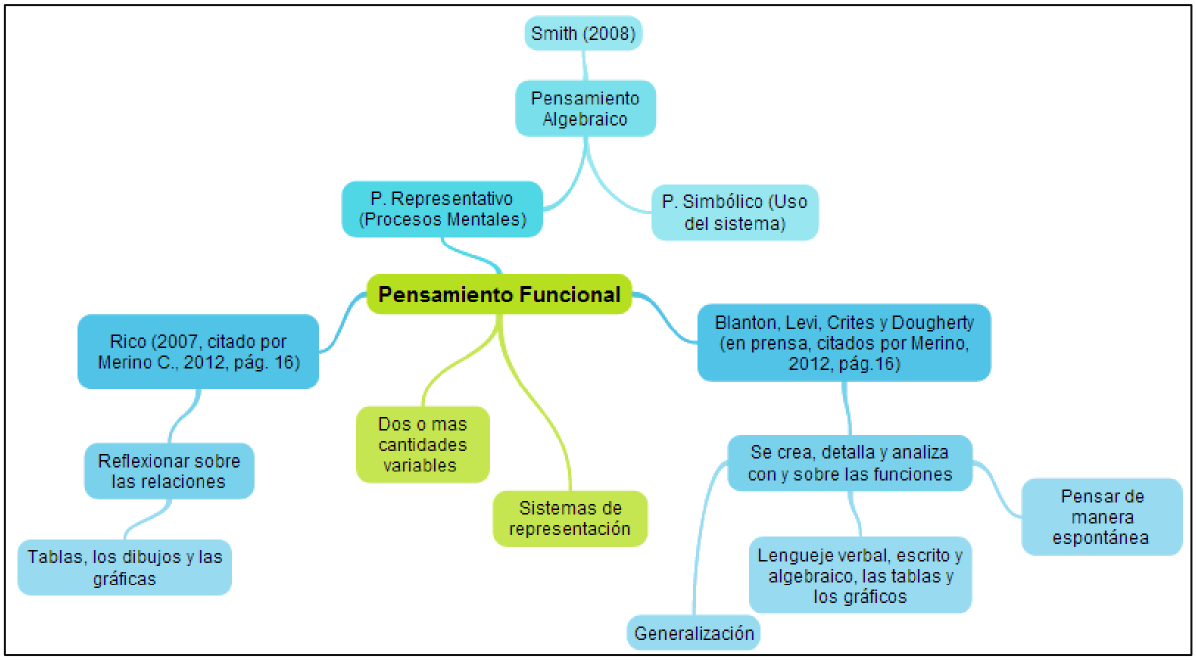


Figura 9. Interpretaciones del Pensamiento Funcional.

Es por eso que a partir de los referentes teoricos tenidos en cuenta, la definición de pensamiento funcional sobre la cual se basará el presente estudio, es la que propone Smith (2003, citado en Blanton & Kaput, 2004, p.135).

2.4.1. Actividades que potencian el pensamiento funcional

Smith (2008) propone seis actividades como base para potenciar el pensamiento funcional, las cuales se encuentran agrupadas en tres aspectos, como se describe enseguida.

2.4.1.1. Participar en una "situación funcional". El término "situación funcional" fue sugerido por Monk (1989, citado en Smith 2008) para describir una situación en la que uno o más estudiantes están involucrados en una problemática, en la cual existe una relación entre dos variables. Dentro de este grupo, se encuentran dos actividades:

1) Participar en algún tipo de actividad e identificar en ella dos o más cantidades que varían en el transcurso de la misma.

Por ejemplo, la tarea titulada “ojos y colas” que reporta Blanton y Kaput (2004) del programa GEAAR, la cual pretende el desarrollo del pensamiento funcional entre una cantidad cualquiera de perros y su correspondencia con la cantidad total de sus ojos y colas, por medio de preguntas como:

> […] Si había un perro, ¿cuántos ojos podía haber? ¿Y si habían dos perros? ¿Tres perros? ¿100 perros? ¿Ve usted una relación entre el número de perros y el número total de ojos? ¿Cómo describir esta relación? ¿Cómo lo sabe?
>
> Suponga que usted quiere saber cuántos ojos y cola juntos hay. ¿Cuántos ojos y cola hay para un perro? ¿Dos perros? ¿Tres perros? ¿100 perros? ¿Cómo describiría usted la relación entre el número de perros y el número total de ojos y colas? ¿Cómo sabe que esto funciona? (Blanton & Kaput, 2004, p.136).

En la cual los niños del respectivo estudio participaron activamente.

2) Centrar la atención en la relación entre estas variables. Para el autor, cuando una persona que se involucra en una actividad decide centrar su atención en las cantidades que varían y luego comienza a centrarse en la relación que hay entre esas cantidades, comienza a producirse el pensamiento funcional.

Un ejemplo de esta actividad, Se puede identificar en la figura 3 del presenta trabajo (pág. 16).

2.4.1.2. Crear un registro. Cuando los estudiantes logran involucrarse en la solución de problemas con funciones, la creación de tablas juega un papel esencial en el desarrollo del pensamiento funcional, como lo señalan Schliemann et al., (2001). Sin embargo, los estudiantes pueden sentirse motivados a crear otros tipos de registros y representaciones. Por tanto, la principal actividad en este grupo gira alrededor de:

3) Hacer un registro de los valores correspondientes de las cantidades que varían, generalmente tabulares, gráficas o con un icono.

Eso se refleja, por ejemplo, (ver figura 10) en el momento en el que se completa la tabla propuesta en la tarea 1 de la investigación de Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. (2001, pág.3).

Mary had a table with the prices for boxes of Girl Scout cookies. But it rained and some numbers were wiped out. Let's help Mary fill out her table:

Boxes of cookies	Price
	$ 3.00
2	$ 6.00
3	
	$ 12.00
5	
6	
	$ 21.00
8	
9	
10	$ 30.00

Figura 10. Tabla de la actividad 1. Tomada de "When tables become function tables" (Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B., 2001)

Patrones de búsqueda y certeza matemática. La construcción de una relación entre dos cantidades va más allá del hecho de designar una correspondencia entre ellas. Según Confrey (citado en Smith, 2008), existe una diferencia entre un ***enfoque covariacional*** y un ***enfoque de correspondencia***. El enfoque de correspondencia centra la atención entre los pares de valores correspondientes. Por ejemplo, en la siguiente tabla se percibe que la relación entre las variables se puede denotar de forma verbal o algebraica como $y = x^2 + 2x$ o y es igual a x elevado al cuadrado más dos veces x.

x	y
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35

Tabla 2. Ejemplo de relación de correspondencia.

Por su parte el enfoque covariacional se centra en los correspondientes cambios en las variables individuales. Por ejemplo, cuando “x” aumenta en uno “y” aumenta en dos.

Por tanto, las principales actividades dentro del grupo patrones de búsqueda y certeza matemática son (Smith, 2008):

4) La identificación de patrones en los registros
5) La coordinación de los patrones identificados con las acciones involucradas en la realización de la actividad.
6) El uso de la coordinación para crear una representación del modelo identificado en la relación.

2.4.2. Selección de la actividad

Según los *Estándares Básicos de Competencias en Ciencias Naturales y Ciencias Sociales* un estudiante que se encuentre entre los grados de primero a tercero debería aproximarse al conocimiento científico natural y tener la habilidad de responder las preguntas que se formule; además, según la información que obtiene del entorno vivo debería describir y verificar los ciclos de la vida de los seres vivos identificando patrones comunes (MEN, 2004). Es por esto que se propone una secuencia de actividades (ver sección 3.4. Descripción de las sesiones) para niños de segundo grado, con el objetivo de determinar si ellos logran registrar, encontrar patrones y evidenciar las relaciones de dependencia entre el tiempo transcurrido[8] y el aumento de la longitud de la planta[9].Se pretende utilizar un fenómeno natural, habitualmente estudiado en la asignatura de Ciencias Naturales como situación de variación, y aprovechar el análisis que los niños hacen de esta situación a partir de las preguntas orientadoras y de las actividades que se sugieren en cada una de las sesiones planeadas.

El interés en esta actividad surgió a partir de diversos planteamientos teóricos, por ejemplo, los aportes de Blanton y Kaput (2004), quienes en un estudio sobre las evidencias de pensamiento funcional desde edades tempranas, concluyen que los estudiantes de segundo de primaria son capaces de predecir, conjeturar y de proponer ellos mismos, registros de representación como tablas, que permiten establecer la relación entre dos variables. Por otro lado, Schliemann, Carraher, & Brizuela, (2001) establecen que los estudiantes pueden desarrollar y hacer uso de una gran variedad de mecanismos de representación para analizar funcionalmente desde edades tempranas.

2.4.3. La magnitud desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas

Una de las primeras actividades en la experiencia de aprender, es siguiendo las ideas del MEN (1998, pág. 42) “crear y abstraer [del] fenómeno u objeto la magnitud concreta o cantidad susceptible de medición” a través de procesos creadores cognitivos y mentales, en los que primero se identifica y crea la magnitud concreta (altura, profundidad, ancho, etc.) y luego se genera la magnitud abstracta (longitud). Dichos procedimientos pueden tomar bastante tiempo o durar lo indispensable para que la mencionada acción se materialice en el cerebro de las niñas y niños.

---

[8]Medido en el número de visitas en el transcurso del experimento (1 por semana) de los profesores que supervisan y dirigen la actividad.
[9]Medido cualitativamente, puesto que los estudiantes que conforman la población con la que se implementó la secuencia de actividades propuestas en este trabajo, desconocen el uso de la regla para medir longitudes.

Ahora bien, el proceso de construcción del concepto de magnitud haciendo alusión al MEN, se pude describir en tres etapas:

Primera. Cuando se es consciente de que entre dos objetos se puede hacer una comparación como por ejemplo: “hay algo que es más o menos que otra cosa” y se quiere saber “más qué o más de qué”.

Segunda (etapa intermedia). Se establecen las magnitudes concretas.

Tercera. Se constituyen las magnitudes abstractas, mediante los intentos fallidos al tratar de equiparar dos objetos expresando entre otras expresiones ‘este es más pequeño (mayor) que el otro’, lo cual generará en vez de desigualdades equivalencias.

3. METODOLOGÍA

En el presente capítulo, se da a conocer en primer lugar, el contexto de la población con la que se trabajó durante su desarrollo; en seguida, se describe el enfoque de este trabajo. Posteriormente, se especifican las técnicas de recolección de la información utilizadas para evidenciar el pensamiento funcional en los niños de segundo; luego, se presenta una descripción con las pautas generales de las sesiones que se aplicaron. Después, se distinguen las diferentes fases del estudio y por último se detallan las categorías de análisis para los resultados.

3.1. Contexto de la población

La institución educativa distrital San José Sede B jornada mañana, ubicada en la localidad octava (Kennedy - Casablanca) de Bogotá, es una de las escuelas encargadas de acoger a aquellos niños y niñas que cursan los grados correspondientes a la educación básica primaria. Su misión según el manual de convivencia (Colegio San Jose I.E.D., 2012), está encaminada a la formación integral y constante del ser humano, a través de la autoevaluación permanente de los procesos pedagógicos dirigidos a la enseñanza y aprendizaje de los aspectos necesarios y suficientes, para que el estudiante cimente las bases de su proyecto de vida en el marco de una sociedad democrática, participativa y pluralista.

El grado segundo está conformado por 33 alumnos con edades entre los 7 y 8 años, de los cuales 13 son niñas y 20 son niños. Sus familias están en estratos socioeconómicos del 2 al 3 y para poder llagar a la institución caminan desde sus casas puesto que viven cerca a la escuela. En el contexto del aula (según lo que se ha observado y corroborado por la maestra titular), son estudiantes bastante activos, con diferentes gustos. Algunos indisciplinados pero en general un grupo que atiende a las clases; además, así como lo expresan las perspectivas de

Piaget, Erickson y Kohlberg (citados en Colegio Abraham Lincoln. 2012 - 2013) dichos niños y niñas en el aspecto que se presenta a continuación tienen las siguientes características:

Aspecto	**Características** Niñez intermedia Segundo a cuarto grado (7 – 11 años)
Desarrollo Cognoscitivo	~ Se manifiesta la capacidad lógica y aptitud en la solución de problemas concretos. ~ Al no poseer todavía un pensamiento abstracto, se dificulta la resolución de problemas vinculados con el futuro. Esto hay que considerarlo puesto que, en las acciones producto de la solución a un problema no se tienen en cuenta las posibles consecuencias a largo plazo. ~ Se refina la habilidad para realizar juicios con respecto a la casualidad. ~ En estas edades se hace uso de mecanismos más prácticos relacionados con la memoria y el manejo de la información. ~ Se incrementan las habilidades lingüísticas. ~ Se presenta cierto gusto por la experiencia escolar. ~ Se reflejan los distintos ritmos de aprendizaje de los estudiantes. Entre otras.

Tabla 3. Características del desarrollo cognitivo en niños de 7 a 11 años.

Estas características de una u otra manera, influirán en el desarrollo de las actividades que se quieren realizar con los estudiantes.

Ahora bien, el salón de clase para segundo grado, está ubicado cerca a la tarima de la institución y la cancha de juego, además es lo suficientemente grande para contener (véase figura 11):

» (A) 7 filas de 5 pupitres cada una (estos son de madera color gris la parte donde se colocan los cuadernos y donde se sientan los alumnos, y de metal pintado de amarrillo las demás partes).
» 2 muebles de metal (B) en donde se guardan 2 televisores antiguos de los cuales uno no sirve.
» Un tablero acrílico (C) incrustado a la pared cerca a la puerta.
» 2 locker (D) de dos puertas que contienen materiales de trabajo, entre otros.

» 2 biblio-bancos (E) de puertas corredizas que guardan cuadernos, libros y materiales como cubetas de huevos y demás.

» Una serie de ventanas (F) que se encuentran a ambos lados (izquierdo y derecho) del salón, unas más grandes que otras y que permiten observar el patio y la cancha respectivamente.

» Una mesa (G) para la profesora titular.

» Una serie de cubículos (H) ubicados a la izquierda del aula que permanecen cerrados.

» Algunas mesas (I) extra para colocar cartulinas, tareas, los refrigerios, etc.

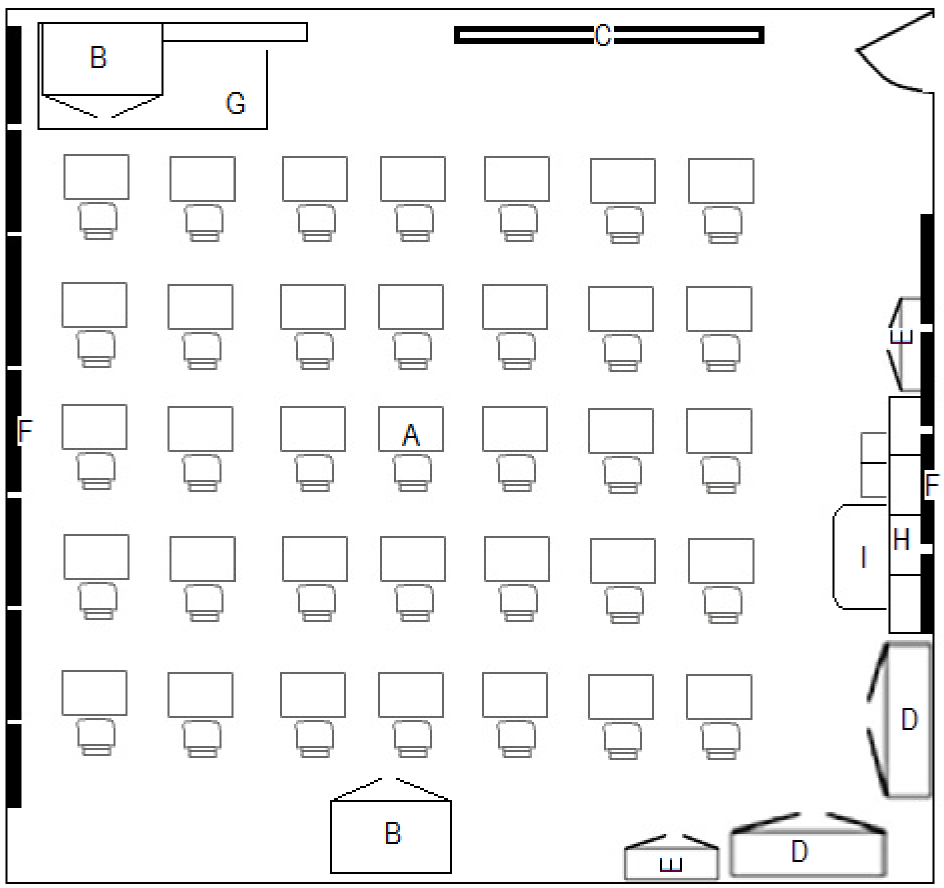


Figura 11. Plano organizacional del salón de clases.

3.2. Enfoque del Estudio

Para el desarrollo de este estudio, después de revisar varias propuestas se opta por implementar una metodología en la que:

» Se describen las respuestas y posibles resultados que den a conocer las parejas de niños entre los 7 y 8 años de edad, al enfrentarse a una actividad que en principio potencia el pensamiento funcional y que está relacionada con ciencias (particularmente naturales) que aparentemente no están inmersas o ligadas a las matemáticas.

» Se comprende e interpreta bajo la mirada de una teoría e ideas específicas (Smith, 2008), dichas respuestas.

3.3. Instrumentos para la recolección de la información

3.3.1. Libretas

Cuadernillos del tamaño de la mitad de un blog cuadriculado, legajado por una cinta, con una portada hecha en cartulina en la cual se adhirió el folleto que se les entregó a los estudiantes. Contiene 10 a 15 hojas cada una. Sus dimensiones son:

- **Ancho:** 3 mm.
- **Largo:** 10,5 cm.
- **Alto:** 27,5 cm.

Se utiliza como herramienta de registro de los estudiantes, puesto que permite consignar los datos relevantes de las experiencias como por ejemplo la toma de medidas en el crecimiento o longitud de las plantas, con la intención de que dichos datos no se olviden.

Figura 12. Libreta entregada y manejada por los niños de segundo de primaria

3.3.2. Carteleras

Medios pliegos de cartulina con dimensiones A1 (594mm x 841mm) y de diferentes colores, con fotografías (tomadas por los profesores en formación) pegadas (por los estudiantes) del trabajo hecho en las diferentes visitas semanales realizadas.

El propósito de la cartelera es registrar los datos obtenidos en las visitas semanales, de tal manera que se peguen las fotos de la planta teniendo en cuenta cada vista semanal. Este registro permitirá que los niños observen el aumento de longitud de la planta al finalizar su experiencia, y contrasten los resultados desde la primera hasta la última visita.

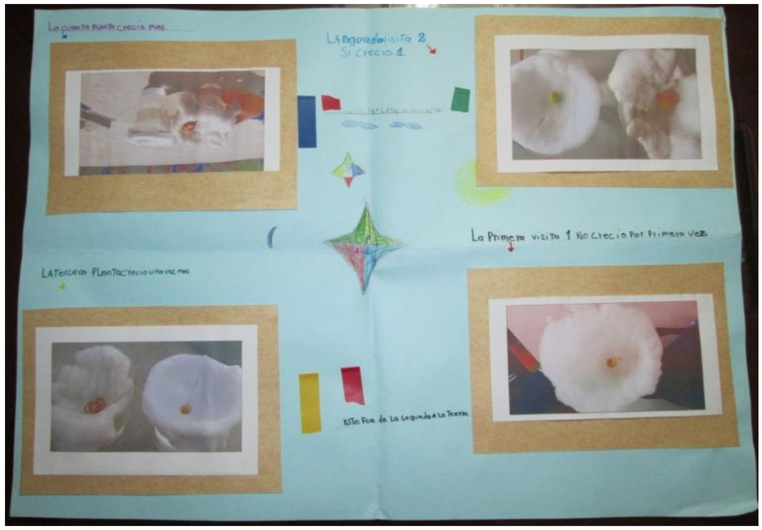


Figura 13. Ejemplo de cartelera hecha por los estudiantes[10]

3.3.3. Diálogos con los estudiantes al desarrollar las sesiones

La finalidad de este instrumento es recoger evidencias de lo que consideran los estudiantes, de forma oral, puesto que posiblemente muchos de ellos no plasmen por escrito si evidencian el aumento de la longitud de la planta. Por tal motivo, se transcriben algunos apartes de estos diálogos en algunos apartados de este documento.

Para finalizar, la siguiente tabla registra la síntesis de los instrumentos de recolección de la información del presente trabajo:

Instrumento	Finalidad
Libretas	Registro por separado de datos obtenidos en cada una de las visitas semanales. Se tiene en cuenta la toma de medidas por los estudiantes, empleando las cintas como instrumento de medición.
Carteleras	Da a conocer el conjunto de los datos recolectados a lo largo de las visitas y las posibles relaciones que identifican las estudiantes, a partir de las fotos. Cabe aclarar que la estimación de este aumento de longitud es de carácter cualitativo, no cuantitativo; por tanto, con este instrumento de recolección de la información se espera que los estudiantes realicen una comparación entre las fotos y a partir de ésta, estimen el aumento en la longitud de la

[10] Durante el trabajo, las fotografías de las carteleras se verán en tamaños similares a este, puesto que las dimensiones de las mismas son las especificadas como A1.

	planta y su relación con el número de visitas semanales.
Segmentos de los diálogos estudiantes - profesor	Recoge evidencias de los argumentos y/o razones verbales que tienen los alumnos con respecto al aumento de la longitud de la planta de arveja y que en ocasiones les es difícil escribir en las libretas.
FINALIDAD COMÚN DE LOS INSTRUMENTOS: Determinar cuáles son los registros de representación que emplean los estudiantes para registrar el aumento en la longitud de la planta. Servir de evidencia para determinar si los estudiantes establecen la relación entre las magnitudes, y de ser así, si es una relación de covariación o correspondencia.	

Tabla 4. Instrumentos para le recolección de la información.

3.4. Fases del estudio

Fase 1. Construcción del problema y búsqueda de definiciones.

Esta primera fase consistió en lectura minuciosa de varios documentos relacionados con el pensamiento funcional y a partir de los cuales surgió el interés que compete al presente trabajo. Se realizó posteriormente la búsqueda de antecedentes y los aspectos teóricos adecuados para sustentar la actividad que se propone.

Fase 2. Diseño metodológico y análisis.

Comprende el diseño de la metodología, seleccionando las técnicas de recolección de la información, la finalidad de cada una de ellas y el planteamiento de categorías de análisis a partir de la lectura de antecedentes y de aspectos teóricos. Posteriormente, se planean las sesiones en las cuales los maestros en formación realizamos las visitas semanales y dirigimos el experimento realizado por los niños. En la planeación de cada sesión, se incluyen los recursos necesarios, los objetivos (general, de enseñanza y aprendizaje), una descripción de la actividad (con preguntas guía) y recomendaciones a tener en consideración al finalizar el encuentro con los estudiantes. El análisis de las evidencias recolectadas se realiza teniendo en cuenta las categorías de análisis establecidas en este capítulo.

Fase 3. Conclusiones.

Se presentan por último, las conclusiones de este trabajo, teniendo en cuenta el análisis de las evidencias recolectadas en función de las categorías de análisis.

3.5. Descripción de las sesiones

A continuación se presentan las planeaciones de las visitas semanales, en las cuales se desarrolla la situación funcional con los estudiantes.

<table>
<tr><th colspan="4">SESIÓN NÚMERO 1: INCLUSIÓN Y CONSTRUCCIÓN DEL EXPERIMENTO</th></tr>
<tr><td>Aplicación Nº 1</td><td>Número de sesiones: 5</td><td>Fecha: 02-09-2013</td><td>Curso: Segundo de primaria</td></tr>
<tr><td colspan="4">INTRODUCCIÓN

A continuación se presenta la primera sesión del trabajo de grado Evidencias del Pensamiento Funcional en niños de Segundo de Educación Básica Primaria en la cual se motivará a los estudiantes a realizar un experimento de aula con el fin de evidenciar semana a semana (5 en total) el aumento en la longitud de la planta de arveja.</td></tr>
<tr><td>Recursos necesarios</td><td colspan="3">Algodón, arveja, agua, vaso plástico (transparente para el mejor paso de la luz) y cuadernillos suficientes para que tengan uno por pareja.</td></tr>
<tr><td colspan="4">OBJETIVO GENERAL DE LA ACTIVIDAD

Realizar un experimento en el aula que consiste en la elaboración de un cultivo de arveja con el fin de identificar el crecimiento y aumento en la longitud de la planta en diferentes momentos en los que se haga una comparación entre cintas de colores y las plantas.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo de enseñanza:
✓ Orientar a los estudiantes para la elaboración de los experimentos y que conozcan el porqué de su elaboración.
Objetivo de aprendizaje:
✓ Identificar que el aumento en la longitud de las plantas es un proceso que no se identifica en pocos días, sino que requiere bastante tiempo para evidenciarlo.</td></tr>
</table>

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD	
Se comienza la sesión realizando un acto protocolario que consiste en saludar y dar a conocer el nombre de los profesores en formación, a los estudiantes. Una vez finalizado este acto, se realiza la siguiente introducción *"se preguntarán qué hacemos en el aula de clase, pues nosotros estaremos viniendo en el transcurso del último mes para que compartamos aproximadamente una hora semanal y realicemos un experimento con la ayuda de ustedes. ¿Cuál experimento? Se preguntarán. Pues es algo sencillo"*. Después de realizar esta introducción se entregan a los estudiantes el folleto (Anexo 1) acompañado de la siguiente pregunta: *"¿Alguna vez te has detenido a ver crecer una planta?"* En caso tal que algún estudiante diga que sí, se le pregunta "*¿cómo observaste el crecimiento de la planta?*", después de escuchar la respuesta suministrada, se le interroga*" ¿Qué tan rápido creció la planta?"*. Ahora bien, si ningún estudiante contesta afirmativamente la pregunta, se realiza la siguiente intervención: *"Cerca a sus casas o colegio existen diferentes árboles, ¿alguno se ha dado cuenta si estos árboles crecen o no?"*Y se escuchan atentamente las respuestas de los estudiantes. Cuando terminen de responder los alumnos, se hace la siguiente intervención "*El objetivo de nuestro experimento es evidenciar semana a semana el crecimiento de una plantica, y para ello tomaremos una semilla de arveja. Fórmense por favor en parejas de tal manera que todos tengan compañero*". Se les solicita a los estudiantes trabajar binas, con el fin de compartir diferentes visiones de la misma planta y puedan evidenciar así más características que tal vez de forma individual no se podrían identificar. Posteriormente, se entrega a cada pareja de estudiantes los materiales (descritos anteriormente) y se les dan las siguientes indicaciones: "*primero llenen el vaso con agua hasta la mitad, después utilicen un poco de algodón e introduzcan la arveja, luego introduzcan el algodón en el agua para que quede húmedo, pero no por completo pues se ahoga la semilla".* Una vez realizado este proceso con la arveja se les entrega una libreta por grupo, y se les solicita que la marquen con sus nombres, para poder identificar más adelante a quién le corresponde cada libreta. A su vez, se acordará con los niños en qué lugar se colocarán las plantas y se les recordará que "*para fines científicos la plantica no puede ser movida de su lugar a menos que sea necesario";* Así se podrá garantizar que la planta no va a presentar cambios de temperatura y se mantendrá en un ambiente controlado.	
Recomendaciones	- Se recogerán todas las libretas para asegurarse que los estudiantes no las pierdan. - Se colocarán los experimentos en una tabla un tanto alejada de los estudiantes pero que puedan observarlos día a día. - Se recordará a los niños que solo podrán tocar las planticas los días en que los profesores 'nuevos' lo digan.

Tabla 5. Planeación número 1.

SESIÓN NÚMERO 2, 3 y 4: TOMA DE MEDIDAS Y ESTRATEGIA PARA RECOLECTAR INFORMACIÓN			
Aplicación Nº 2, 3 y 4	**Número de sesiones:** 5	**Fechas:**09, 16 y 23-09-2013	**Curso:** Segundo de primaria

INTRODUCCIÓN

A continuación se presenta la segunda, tercera y cuarta sesión del trabajo de grado ***Evidencias del Pensamiento Funcional en niños de Segundo de Educación Básica Primaria*** en la cual se creará el primer registro de toma de datos del aumento en la longitud de la planta de arveja, además se tomarán fotos, para que se tenga una evidencia fotográfica de su crecimiento.

Recursos necesarios	Cuadernillos, cinta de enmascarar y cámara fotográfica.

OBJETIVO GENERAL DE LA ACTIVIDAD

Realizar un experimento en el aula que consiste en la elaboración de un cultivo de arveja con el fin de identificar el crecimiento y el aumento en la longitudde la planta en diferentes momentos en los que se haga una comparación entre cintas de colores y las plantas.

Objetivo de enseñanza:

- ✓ Orientar a los estudiantes en la recolección de la información o toma de datos del aumento en la longitud de la planta.

Objetivo de aprendizaje:

- ✓ Comparar las longitudes de las plantas desde el día de sembrado hasta la primera semana.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

Se comienza la sesión realizando un acto protocolario que consiste en saludar a los estudiantes, recordar quiénes son los profesores en formación y el objetivo de la visita.

Una vez finalizado el acto protocolario, se realiza la siguiente introducción "*¿Alguno ha visto la plantica esta semana?"* Se esperan las respuestas de los estudiantes y luego se realiza la siguiente intervención *"para aquellos que han visto la planta toda la semana, puede que no hayan notado algún cambio, por eso con ayuda de cinta tomaremos la medida para ver qué tanto han crecido, luego vamos a escribirlo en nuestras libretas y pegaremos lo que creció la plantica. Además le vamos a tomar una foto a las plantas para recordar qué tanto crecieron"*. En primera instancia se aguarda a que los estudiantes sean quienes decidan cómo medirlas y desde dónde medirlas (se les deja explorar). Es importante recordarles que deben llevar un registro de lo que miden, pero no decirles qué tipo de registro, puesto que ellos son libres a la hora de proponerlo y realizarlo.

Cuando se termine de fotografiar las plantas y ayudarles a los niños a tomar las medidas, se planteará la siguiente pregunta "*¿Si crecieron las plantitas?*" y se les pide a los estudiantes que reporten en sus libretas la respuesta correspondiente.

Para la sesión 2, 3 y 4 se realizarán las preguntas que a continuación se sugieren a los estudiantes: » *"¿Si creció la plantica con respecto a la semana anterior?* » *¿Podríamos saber qué tanto creció la plantica?* » *¿Será que eso mismo crecerá la otra semana?"* Estas preguntas se propondrán con el fin de evidenciar que los estudiantes están realizando una toma de medidas y están realizando una comparación semana a semana o de cada vez que se le haga una medición a las plantas. Una vez finalizado se solicita a los alumnos que lleven los experimentos a donde se encontraban antes.

Recomendaciones	- Se recogerán todas las libretas para asegurarse que los estudiantes no las pierdan. - Se colocarán los experimentos en una tabla un tanto alejada de los estudiantes pero que puedan observarlos día a día. - Se recordará a los niños que solo podrán tocar las planticas los días en que los profesores 'nuevos' lo digan.

Tabla 6. Planeaciones número 2, 3 y 4.

SESIÓN NÚMERO 5 PRODUCTO ESPERADO DEL EXPERIMENTO			
Aplicación Nº 5	**Número de sesiones:** 5	**Fecha:**30-09-2013	**Curso:** Segundo de primaria

INTRODUCCIÓN A continuación se presenta la quinta y última sesión del trabajo de grado ***Evidencias del Pensamiento Funcional en niños de Segundo de Educación Básica Primaria*** en la cual se realizará el producto esperado de la aplicación del experimento de aula, donde los estudiantes elaboraran carteleras con fotografías y toma de medidas de cada una de las semanas en las que el profesor realizó la visita a la institución.

Recursos necesarios	Fotografías impresas, medios pliegos de cartulina, colbón o pegastic, marcadores de colores, cintas de colores, foami, tijeras, colores, lápices y las libretas.

OBJETIVO GENERAL DE LA ACTIVIDAD Realizar un experimento en el aula que consiste en la elaboración de un cultivo de arveja con el fin de identificar el crecimiento de la planta en diferentes visitas.
Objetivo de enseñanza: ✓ Orientar a los estudiantes en la recolección de la información o toma de datos de crecimiento de la planta. **Objetivo de aprendizaje:** ✓ Comparar el aumento en la longitud de las plantas desde el día de sembrado hasta la última semana.
DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

Se comienza la sesión realizando un acto protocolario que consiste en saludar a los estudiantes, recordar quienes son los profesores en formación y el objetivo de la visita.

Una vez finalizado el acto protocolario, se realiza la siguiente introducción "*Alguien recuerda ¿Cuántas visitas hemos realizado al colegio?"* Se esperan las respuestas de los estudiantes, si ninguno acierta se les recuerda que fueron 4 y que esta es la quinta. Se realiza entonces, la siguiente intervención *"en esta sesión les traemos las fotos que hemos tomado, así que nos organizaremos en las parejas de los experimentos y se les entregarán algunos materiales para que veamos cómo crecieron las planticas"* Entregándoles (ver figura 14) la libreta, medio pliego de cartulina, marcadores, colores, cintas y colbón a cada grupo de trabajo, se espera que ellos realicen una especie de cartelera.

Figura 14. Materiales entregados a los estudiantes para realizar la cartelera.

Periódicamente se pasa por cada uno de los grupos solucionando las dudas que los estudiantes presenten, así mismo se hacen las siguientes intervenciones en los mismo para la elaboración de las carteleras:

- *¿Qué tanto creció la planta la primera vez que la medimos?*
- *¿Qué tanto creció la planta la segunda vez que la medidos?*
- *¿Qué tanto creció de la primera vez a la segunda vez?*
- *¿Qué tanto creció más la planta?*
- *¿Qué tanto creció de la segunda a la tercera vez que se midió, y de la tercera a la cuarta vez?*

Si algún grupo no le creció la planta, se perdió o se dañó, se les entrega el material y se les pide que realicen dibujos de cómo ellos esperarían que creciera la planta[11].

Al finalizar la sesión, se realizará la siguiente conclusión *"Hemos visto en estos últimos encuentros que el crecimiento de una planta no es cuestión de minutos, ni horas. Que se necesitan muchos días para que las plantas crezcan. Por eso nosotros nos debemos comprometer a cuidar la naturaleza, porque seguramente existen árboles que son mucho más viejos que nosotros"* Esta intervención tiene como objetivo que los estudiantes tengan un mensaje importante para la razón de este trabajo y que se comprometan a cuidar la naturaleza.

Para terminar se ayuda a los niños a sembrar las plantas en el patio de recreo para que se motiven a continuar cuidándolas en los horarios de los descansos.

Recomendaciones	- Se recogen las carteleras y las libretas.

Tabla 7. Planeación número 5.

[11] Esto se realiza con el ánimo de verificar si los estudiantes logran predecir el crecimiento de las plantas.

3.6. Categorías de análisis

Figura 15. Categorías de Análisis

Registros de Representación. Como se mencionó anteriormente en el momento en que los estudiantes se involucran en situaciones que implican la relación entre dos magnitudes, la creación de tablas juega un papel esencial en el desarrollo del pensamiento funcional (Schliemann et al., 2001). Sin embargo, los alumnos pueden sentirse motivados a crear otros tipos de registros y representaciones. Por esta razón, la principal actividad en esta categoría gira alrededor de: hacer un registro de los valores correspondientes a las de las cantidades que varían. Algunos de registros pueden ser:

- ✓ Tabular
- ✓ Gráfica
- ✓ Con iconos o pictórico

También, como lo establece el MEN (1998, pág. 50) al recalcar que otro instrumento para iniciar el estudio de la variación desde edades tempranas es la observación y análisis de patrones en la vida diaria (“representaciones pictóricas e icónicas”) y en las matemáticas (numéricos o geométricos), haciendo uso de la representación verbal para expresar la relación existente entre las cantidades que varían. Lo cual confirma que según los registros que los estudiantes utilicen se puede establecer si ellos presentan un pensamiento funcional o no.

Identificación de la relación entre magnitudes. Teniendo en cuenta los aportes de Monk (1989, citado en Smith, 2008), dentro de esta categoría se pretende determinar si el niño logra establecer la relación entre las magnitudes involucradas a lo largo de la experiencia: número de visitas en el transcurso del experimento (1 por semana) y aumento en la longitud de la planta, pero puede ser posible que encuentre diferentes relaciones, por ejemplo, la cantidad de agua en el vaso y la longitud de la planta(entiéndase esta relación como que para una misma cantidad de agua en un vaso, se pueden presentar diferentes longitudes de la planta). Para este autor, cuando una persona que se involucra en una actividad decide centrar su atención en las cantidades que varían y luego comienza a centrarse en la relación que hay entre esas cantidades; comienza a evidenciarse el pensamiento funcional.

Patrones de búsqueda y certeza matemática. El evidenciar una relación entre dos magnitudes que varían, no es solamente generar una correspondencia entre las cantidades. Según Confrey (citado en Smith, 2008), existe una diferencia entre un ***enfoque covariacional*** y un ***enfoque de correspondencia***. El ***enfoque de correspondencia*** centra la atención entre los pares de valores correspondientes, llegando a establecer una relación explicita (patrón de certeza matemático) entre las variables involucradas: por ejemplo, que y es 3 veces x más 2 (representación verbal) o también, $y = 3x + 2$ (representación algebraica). Además, el patrón de certeza matemática permite hacer tanto predicciones sobre lo que sucederá en el caso de que alguna de las variables involucradas en la situación, asuma valores muy grandes; como generalizaciones y formalizaciones de las regularidades o las relaciones encontradas entre las variables.

Por otro lado, el ***enfoque covariacional*** se centra en los cambios en las variables individuales. Un ejemplo de ello es que mientras x aumenta en una unidad y aumenta en dos unidades.

Categorías emergentes. A continuación se presentan las categorías que no están fundamentadas con la teoría, pero que se tuvieron en cuenta para el desarrollo del trabajo de grado, estas fueron el resultado de la investigación y se adoptaron y generaron para categorizar a los estudiantes a través de niveles, que permiten clasificar a los alumnos para identificar en ellos evidencias del pensamiento funcional en menor o mayor grado tal y como se describe a continuación:

Nivel 1: El estudiante identifica una situación en la cual se involucran variables.
Nivel 2: Establece una relación entre las variables de la situación.
Nivel 3: Identifica una dependencia entre las variables.
Nivel 4: Genera un patrón, de tal manera que puede realizar predicciones.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación se darán a conocer varios de los resultados obtenidos del experimento y su correspondiente análisis teniendo en cuenta las categorías antes mencionadas.

Algunos de los grupos que participaron en la actividad, están conformados por los siguientes estudiantes[12]:

Número del grupo	Estudiantes
1	Sc. y Mar.
2	D. y May.
3	A. y J.
4	S. H. y S. F.
5	E. y N.

Tabla 8. Algunos de los grupos conformados por los estudiantes.

Es a su vez, sobre las evidencias que mostraron estos grupos, en base a la cuales se hace el presente análisis.

4.1. Registros de representación.

Se analizaran a continuación los registros elaborados por los estudiantes, en los cuales se identifica cómo llevaron la libreta y el producto final que se obtuvo en el desarrollo del experimento.

[12] Se escriben las iniciales (o un poco más del nombre y apellidos, cuando hay dos niños o niñas con nombres parecidos o iguales) de los nombres de los estudiantes, para proteger su identidad.

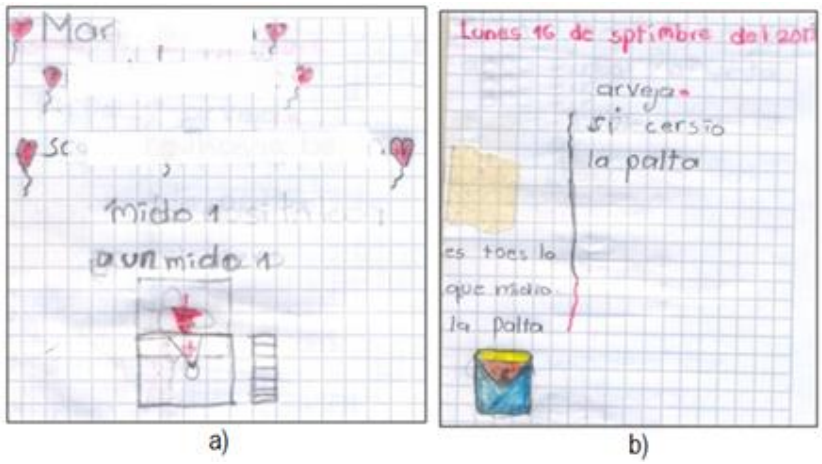
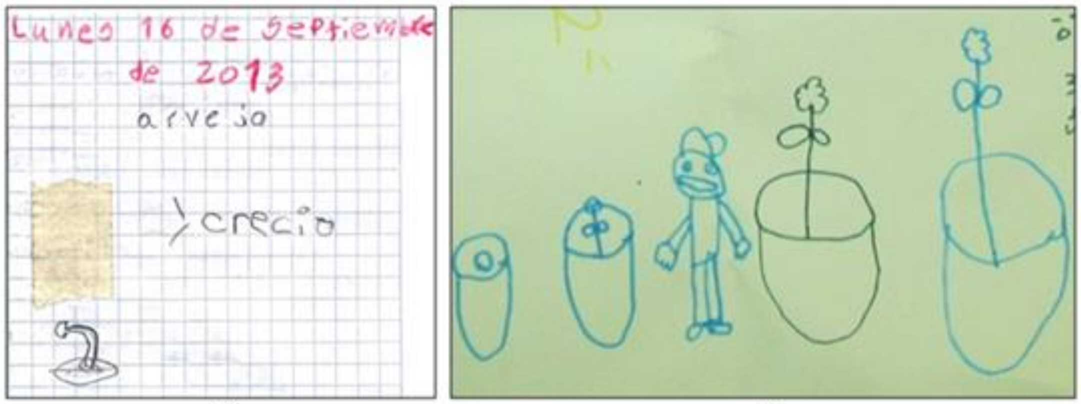


Figura 16. Representación pictórica del grupo 1 en diferentes visitas.

En la sección a) de la figura 16 se puede evidenciar que las estudiantes del grupo 1 realizan una representación pictórica para indicar cuáles son los elementos (materiales) que constituyeron el experimento, más no identifican aumento en la longitud de la planta, pues consideran que esta es 1. Por otro lado, en la imagen 16 b) con el uso de un nuevo registro pictórico y verbal dan a conocer que la planta de arveja sí creció.

Por su parte las niñas del grupo 2, como se muestra en la figura 17, hacen uso de la representación pictórica y verbal debido a que, en primera instancia (ver parte a de la figura) muestran cómo se ve la planta en la segunda visita a través de la cinta y es con el uso de un registro verbal que simbolizan y describen (de manera superficial) respectivamente el aumento de la longitud.

En el momento de crear el producto final (ver parte b de la misma figura), o sea la cartelera, las estudiantes realizan otro registro pictórico, es decir, un dibujo propuesto por ellas, en el que se refleja que identifican el aumento en la longitud de la planta en cada una de las visitas semanales que se hicieron (aunque no lo especifiquen como tal), puesto que muestran cuatro diferentes plantas con la característica de que cada una de ellas tiene mayor altura que la anterior.



a) b)

Figura 17. Representación pictórica del grupo 2.

Además, en el resultado final (ver figura 18) de este grupo, se observa que elaboran a su manera una tabla[13] en la que relacionan cada una de las visitas semanales con el respectivo aumento en la longitud que tiene la planta de arveja y así mismo se evidencia que a medida que se hacen las visitas por parte de los profesores la planta crece ya que los estudiantes relacionan para cada una de las visitas un crecimiento diferente.

[13] Donde se organizan de manera vertical (horizontal) cada una de las variables pertinentes y de manera horizontal (vertical) la relación que tienen las variables.

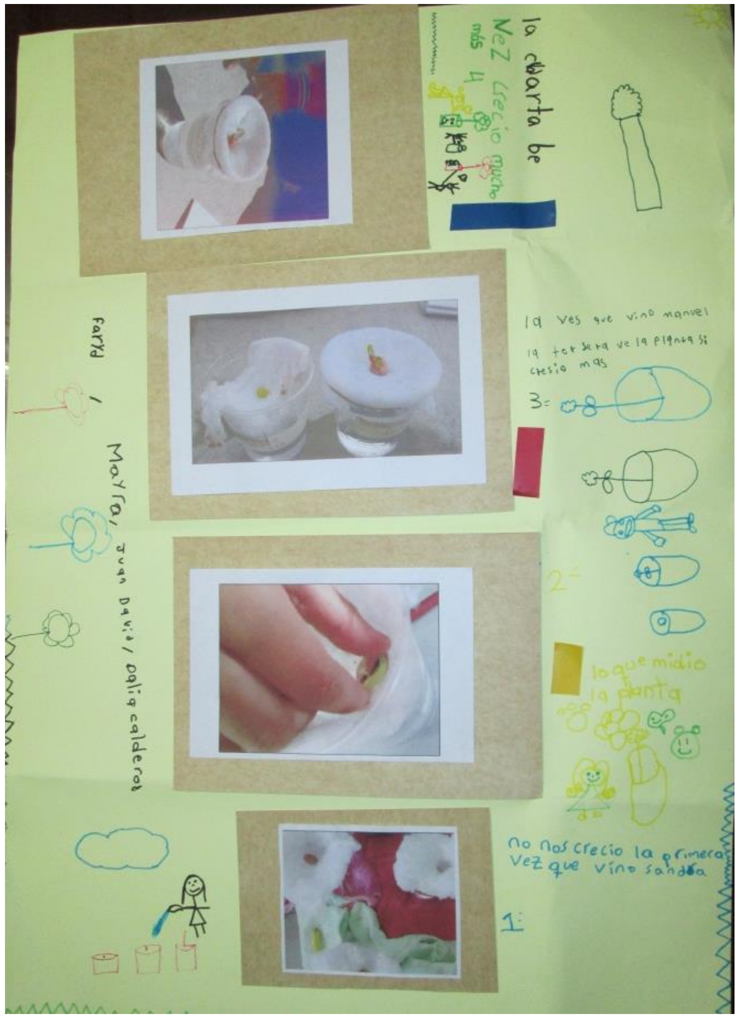


Figura 18. Cartelera final grupo 2.

En la figura 19 se da a conocer la representación pictórica empleada por los niños de la pareja 3, en la cual, muestran cómo ven la planta en cada uno de los momentos, a partir de la segunda visita semanal.

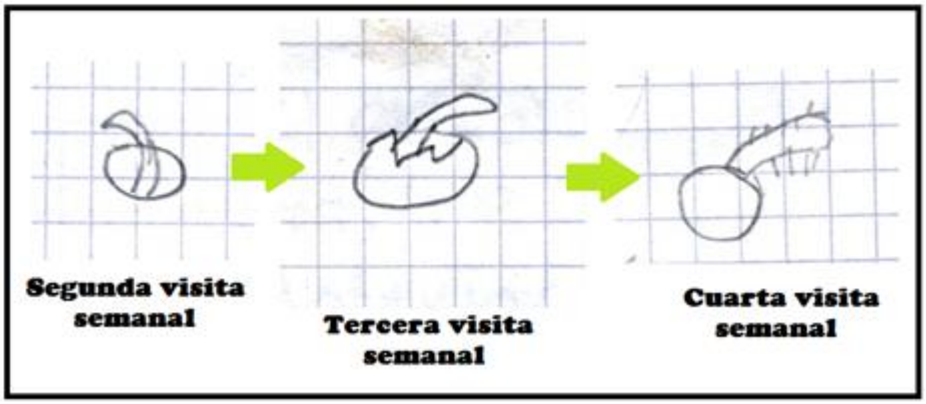


Figura 19. Registró pictórico escogido por el grupo 3.

Así mismo, los grupos 4 y 5, realizan registros pictóricos (figura 20, i. y ii. respectivamente) del aumento en la longitud de la planta, de tal forma que el grupo 4 plasma la segunda visita semanal, en el cual muestran que la planta ya ha germinado y está creciendo. Por su parte E. y N. identifican, a través de las imágenes, que la planta sí presenta un aumento en la longitud entre las visitas que en la ilustración se mencionan.

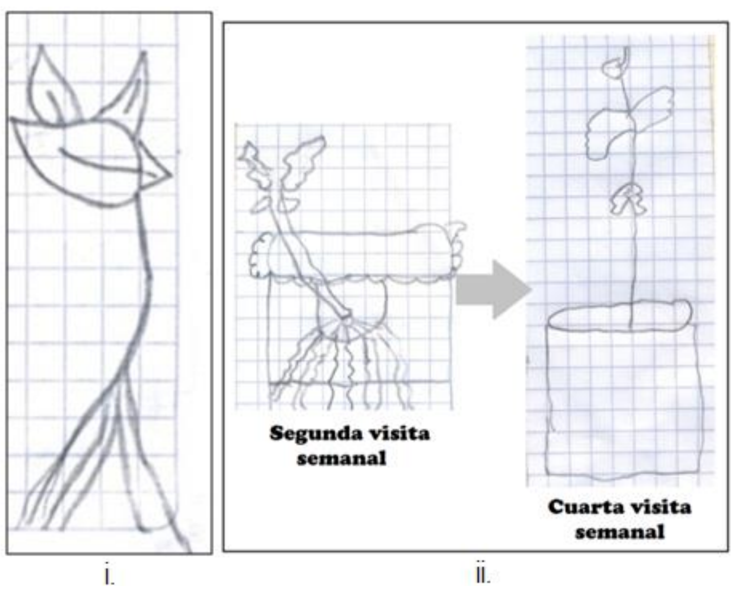


Figura20. Representación pictórica de los grupos 4 y 5.

Hay que resaltar que el registro de representación que más emplearon los estudiantes es el pictórico, puesto que a través de este describen lo que observan y gracias a las características que tienen en esa edad, para los niños es más fácil hacer un dibujo que realizar tablas o gráficas de las relaciones que evidencian.

4.2. Identificación de la relación entre magnitudes.

Como se puede observar en la figura 21, en el cuarto encuentro con los estudiantes, las niñas del grupo 1 escriben la siguiente frase: “en las otras visitas se tiene el crecimiento”, con esto se puede evidenciar que:

- A partir de la tercera visita la planta no presento crecimiento, por tal razón las estudiantes realizan una “predicción” para asegurar que si se presentaran otras visitas (o en otras palabras en las siguientes semanas) la planta no presentará crecimiento.
- Las estudiantes identifican la relación entre cada una de las visitas semanales (1 por semana) y el crecimiento de la planta, ya que identificaron que a medida que aumenta las semanas debería haber crecimiento pero como no lo hubo, realizan conjeturas.

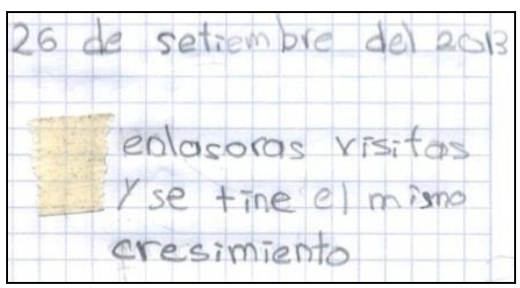


Figura 21. Afirmación del grupo 1.[14]

Por su parte (ver figura 22), el grupo 4, en la tercera visita semanal realiza una predicción acerca de que tanto crecerá la planta para la siguiente visita, haciendo

[14] En este afirmación, se puede identificar una fecha errónea con respecto a las establecidas en la descripción de las sesiones, lo cual es una muestra que los estudiantes no tienen noción del tiempo y se equivocan en bastantes oportunidades sobre las fechas.

la cuantificación del aumento en la longitud de la planta. Es decir, cuando escriben “66 cuadros crecerá más en la siguiente visita” realizan una comparación entre el aumento en la longitud presentado en esa visita semanal y la longitud que se presentará en el siguiente encuentro con los docentes.

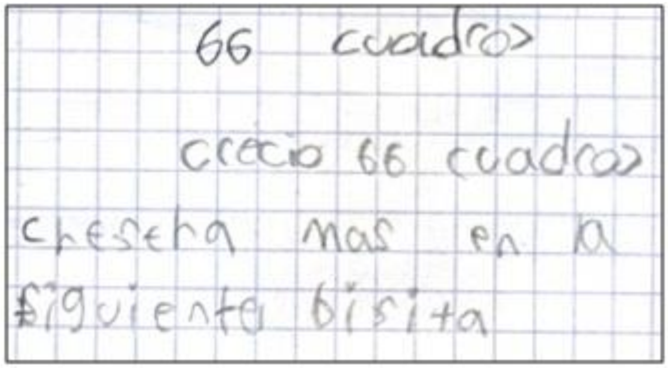


Figura 22. Predicción del grupo 4.

Luego en la cuarta visita semanal, el grupo 4, realiza nuevamente una predicción de qué tanto crecerá la planta en una próxima visita, pero para ello se hace necesaria una cuantificación de la medida (como necesidad de la certeza matemática). Además, se identifica que al escribir “más que hoy” S. H. y S. F. encuentran una relación entre la longitud de la planta y la visita semanal que se está realizando.

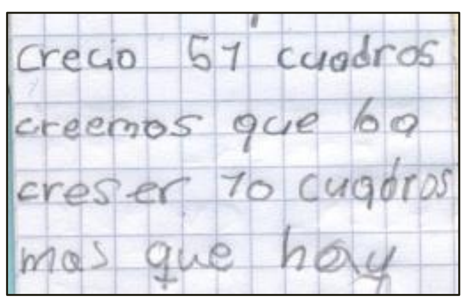


Figura 23. Predicción grupo 4.

Hay que destacar lo siguiente:

El grupo 1 (ver figura 24) opta por realizar la siguiente distribución de las imágenes en la cartelera: en la parte superior izquierda, ubica la primera vez que se realizó una toma de medidas de la planta, luego en la parte superior derecha, sitúa la segunda toma de medidas que realizó a la planta, mientras que en la parte inferior izquierda y derecha coloca las visitas 3 y 4 respectivamente.

En cada una de estas visitas, las estudiantes con ayuda de cintas de colores señalan qué tanto había crecido la planta y como se puede observar para cada una de las visitas, asociaron una cinta del mismo tamaño. Por tanto para este grupo, la arveja no creció, y no evidencian un cambio en la longitud de la planta, es por ello que como se mostró anteriormente, ellas realizan una predicción acerca de las siguientes visitas semanales, tal predicción se puede relacionar con la función constante, puesto que ellos especifican que "en las siguientes visitas se tendrá el mismo crecimiento" ya que pudieron identificar que la planta no aumentará su longitud en las siguientes semanas.

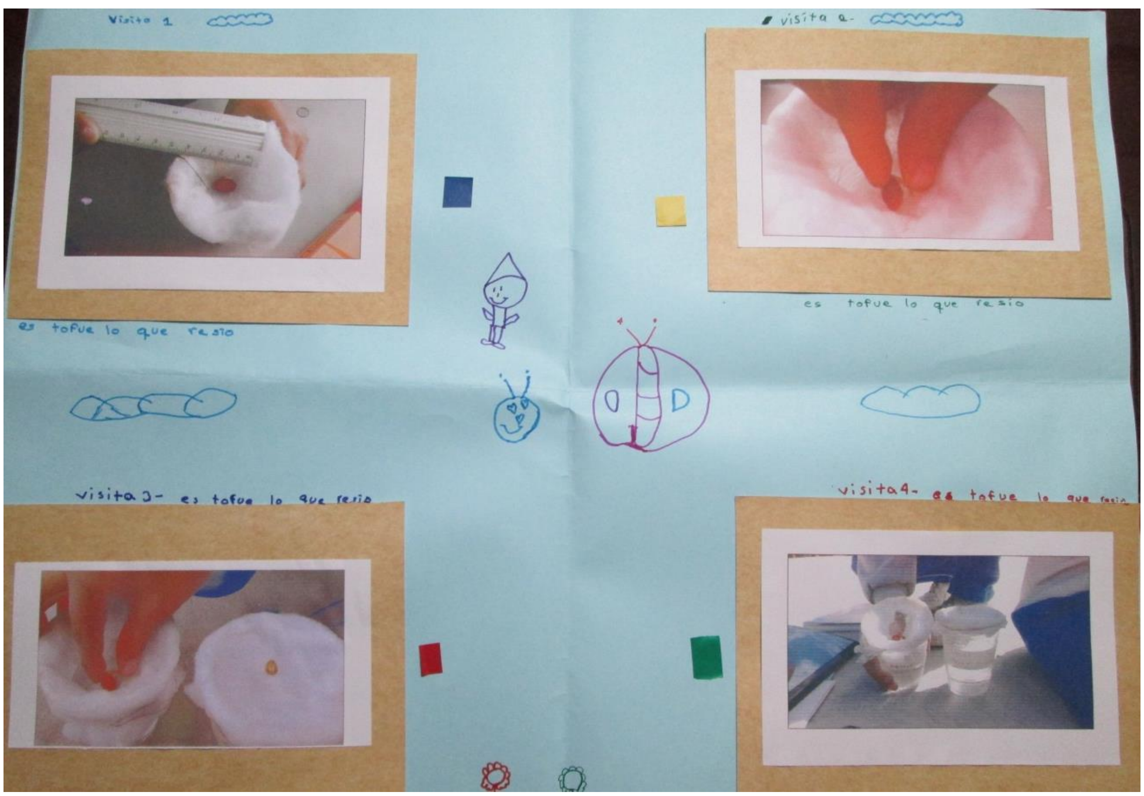


Figura 24. Cartelera grupo 1.

Por su parte el grupo 2, ubica en su producto final (véase figura 25) cada una de las fotografías en orden ascendente, de tal forma que en la parte inferior comienza ubicando la primera visita semanal que se realizó y fue aumentando las visitas semanales de manera consecutiva hasta llegar a la parte superior que se encuentra la última visita semanal realizada. Como se había mencionado anteriormente, esta forma de presentar la relación entre las visitas semanales y la longitud de la planta se podría considerar como una tabla, ya que este grupo identifica que a medida que aumentan las visitas semanales, aumenta la longitud de la planta.

En la figura 25, los estudiantes evidencian una dependencia entre las variables semana y longitud de la planta, ya que identifican que a medida que aumentan las semanas, la longitud de la planta también aumenta, por tal razón los estudiantes se encuentran en el nivel 3 del pensamiento funcional, y habrían podido alcanzar el cuarto nivel, si tuvieran las herramientas para la cuantificación de la magnitud longitud, y así poder establecer una relación algebraica o verbal entre las variables.

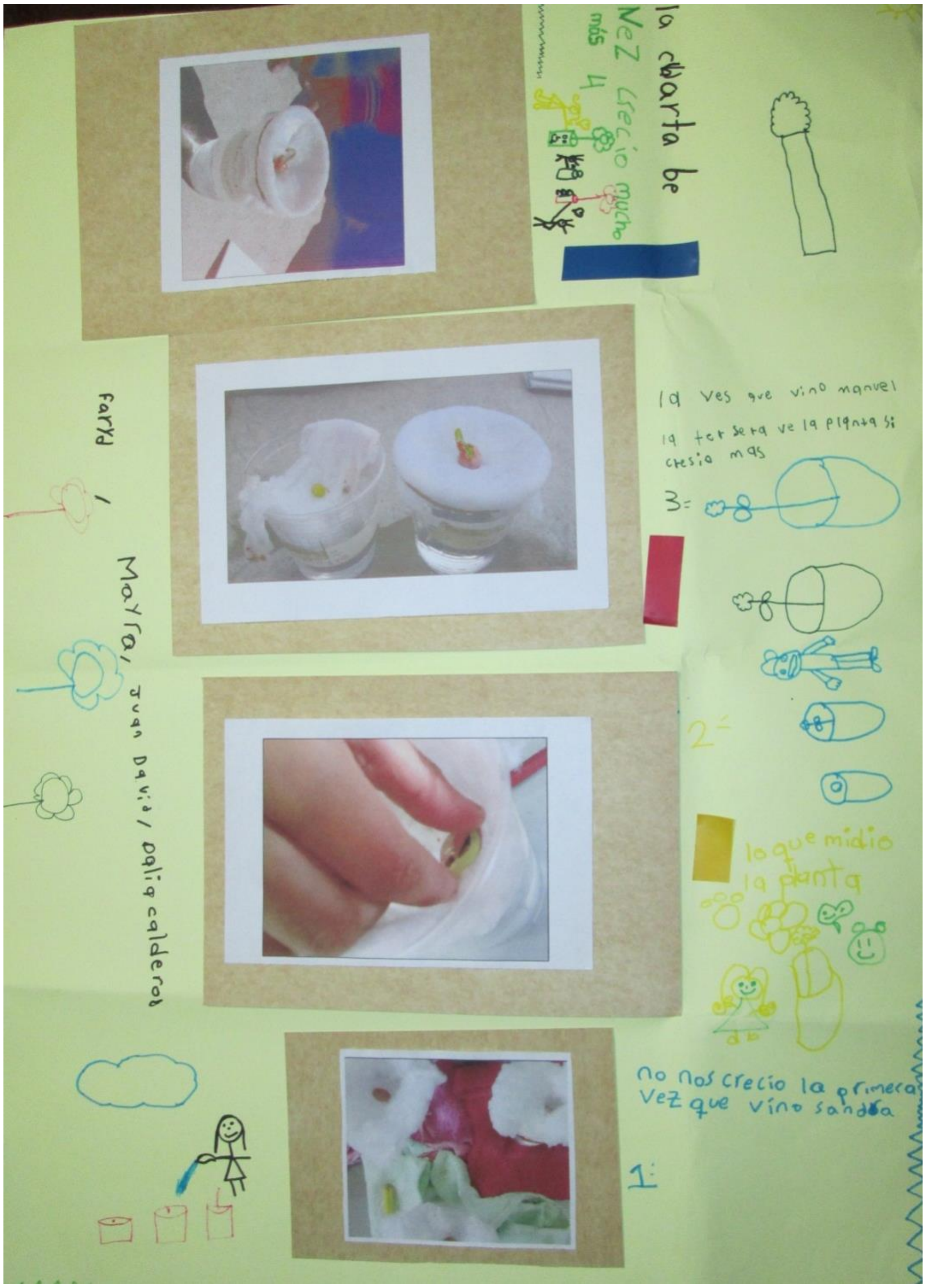


Figura 25. Producto final grupo 2.

A su vez el grupo 3, ubica de la siguiente manera las imágenes en la cartelera: la primera visita se encuentra en la parte inferior derecha, encima de la primera visita se encuentra la segunda visita, mientras que la tercera y la cuarta se encuentran en la parte izquierda superior e inferior respectivamente. Se puede evidenciar que este grupo para cada una de las visitas le asocian una longitud de la planta, y además identifican que mientras aumentaban el número de visitas en el transcurso del experimento (1 por semana), aumentaba también la longitud de la planta de arveja.

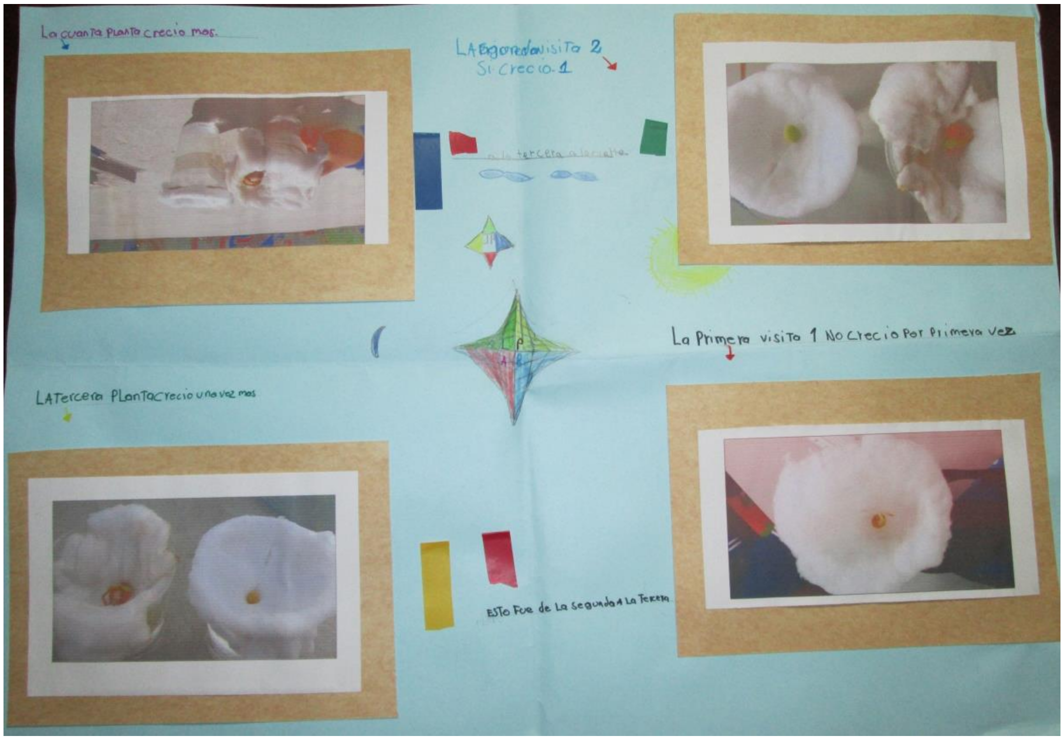


Figura 26. Cartelera grupo 3.

Así mismo el grupo 4 (ver figura 27), dispone las imágenes en el producto final de la siguiente forma: en la parte inferior izquierda y derecha, colocó la primera y segunda visita semanal correspondientemente, luego situó en la parte superior derecha e izquierda la tercera y cuarta visita correspondientemente. Al igual que con el grupo 3, este trabajo se retomará más adelante, mientras tanto se analiza cómo los estudiantes para cada una de las visitas semanales presenta una longitud diferente, además identifica que las visitas fueron aumentando y esto afectaba la longitud de la planta.

Figura 27. Producto final grupo 4.

Para finalizar, el grupo 5 (ver figura 28) coloca en la parte superior izquierda y derecha las imágenes de la primera y segunda visita semanal correspondiente, y en la parte inferior derecha e izquierda, ubican las imágenes de la tercera y cuarta visita. Más adelante al igual que con el grupo 3 y 4, este trabajo se retomará. En este punto es importante identificar que para cada una de las visitas semanales, los estudiantes le hicieron corresponder una longitud de la planta, de tal manera que mientras aumentan las visitas semanales, aumenta la longitud de la planta.

Figura 28. Cartelera grupo 5.

4.3. Patrones de búsqueda y certeza matemática.

4.3.1. Enfoque Covariacional.

En la figura 24, el grupo 1 evidencia que en las semanas pasadas la longitud de la planta fue la misma, es decir, identifican que en las siguientes semanas, así como en las anteriores, la planta presentara el mismo crecimiento, en otras palabras que no crecerá. Es por eso que, los estudiantes, se atreven a realizar una predicción de que en las siguientes visitas semanales, tampoco habrá aumento en la longitud de la planta. Así se puede evidenciar que los estudiantes identifican un cambio en la variable semanas, e identifican que la variable crecimiento no "cambia" lo que nos lleva a decir que ellos han determinado una relación en la que el enfoque es covariacional.

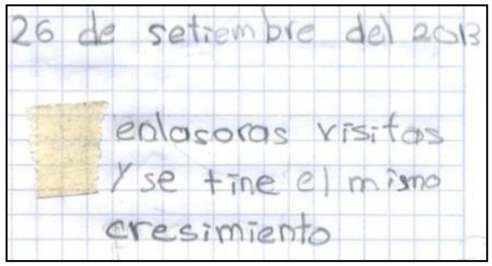


Figura 29. Evidencia de enfoque Covariacional presente en el grupo 1.

Se observa en la figura 29, que los estudiantes escriben “en las otras visitas se tiene el mismo crecimiento” es posible interpretar esto como un enfoque en el cual el niño identifica crecimiento como un aumento de la variable longitud de la planta, pero cuando se les pregunto a ellos, contestaron en sus palabras que lo que querían escribir era que la planta “no crecería más” o que en las otras visitas la planta presentara la misma longitud.

A su vez, en la visita semanal 3, con la ayuda de la cinta, las integrantes de este grupo muestran qué tanto había crecido la planta hasta ese momento, pero no especifican un cambio entre la visita semanal anterior a esta, puesto que aparentemente la planta no crece. Al preguntarles al respecto, ellas responden:

Profesor:	Niñas ¿Qué pasó esta semana?
Estudiantes:	Es que no creció la planta esta semana
Profesor:	¿Cómo lo saben?
Estudiantes:	Es que…mire, esto fue lo que creció (señalo la cinta tomada en la tercera visita) y esto fue lo que creció la semana pasada (señaló la cinta tomada en la segunda visita)

Tabla 9. Diálogo estudiantes– profesor grupo 1.

Esto evidencia que las estudiantes presentaron un enfoque covariacional puesto que identifican un aumento en la variable tiempo (visita semanal) pero evidencian que la longitud de la planta no presenta un cambio y eso los llevo a pensar que se realizó una mala toma de medidas. Como este grupo identifico una relación, entre las semanas y la longitud de la planta, se puede decir que ellos se encuentran en un segundo nivel del pensamiento funcional, les falto identificar la dependencia entre cada una de las variables para poder llegar al tercer nivel.

En cuanto a los grupos 3, 4 y 5, se puede decir lo siguiente:

Los tres conjuntos de alumnos respondieron a la pregunta ¿Qué tanto ha crecido la planta de una semana a la otra?, por un lado los niños A. y J. hacen uso de la (ver figura 30) cinta de color rojo para representar el cambio en la longitud de la planta. Luego se les cuestiona:

Profesor:	¿Qué tanto creció de la segunda semana a la tercera?
Estudiantes:	Pues esto fue lo que creció a la segunda visita (Señalando la cinta color verde) y esto fue lo que creció a la tercera visita (señalando la cinta color azul)

Tabla 10. Diálogo estudiantes – profesor grupo 3.

Vale la pena resaltar que, durante la conversación que mantienen los estudiantes del grupo 3 y el profesor, los estudiantes se utilizan las manos como instrumento de trasposición de medidas, así, la medida de la cinta verde se "superpone" en la cinta azul. Luego identifican que falta un pedazo de cinta para que ambas sean del mismo tamaño, entonces el compañero que no ha hablado, utiliza cinta de otro color para señalar el pedazo que falta y ambos llegan a la conclusión de que este pedazo es lo que ha crecido de una semana a la otra.

Figura 30. Cartelera del grupo 3.

De la misma forma los grupos 4 y 5 realizan un proceso similar para encontrar el delta o el crecimiento de las plantas, es decir que estos estudiantes presentan un enfoque covariacional, puesto que identifican claramente (ver figuras 31 y 32 respectivamente) el cambio de longitudes entre los crecimientos de las plantas teniendo en cuenta cada una de las visitas realizadas semanalmente.

Es evidente que los grupos 3, 4 y 5, encontraron la relación que tiene las semanas y la longitud de la planta, pero además generaron una dependencia entre las variables, al establecer que siempre que se aumenten las semanas, la longitud de la planta también aumentará, por tal razón estos grupos se encuentran en el tercer nivel del pensamiento funcional, lo único que se les dificulta para estar en el cuarto nivel, es poder realizar una cuantificación de la longitud, para poder establecer una dependencia algebraica o verbal de lo que observan.

Figura31. Cartelera del grupo 4.

Figura 32. Cartelera del grupo 5.

4.3.2. Enfoque de Correspondencia.

Como se mencionó anteriormente lo descrito hasta el momento y las ideas que tiene Confrey (citado en Smith, 2008), al definir el enfoque de correspondencia como aquel en el que se centra la atención entre los pares de valores correspondientes; se puede decir que en el caso del presente estudio, ninguno de los grupos de estudiantes llegó a establecer ni una expresión algebraica que representara el comportamiento de los datos ni un enunciado verbal con la misma intención (ver anexo 2).

No obstante, un ejemplo de cómo el enfoque de correspondencia se hubiese podido interpretar en esta situación, es encontrar de parte de los niños una conjetura similar a ‘la longitud de la planta es 5 veces la semana que tenga de vida’. Entonces el estudiante estaría pensando en una relación de correspondencia entre el número de visitas en el transcurso del experimento (1 por semana) y la longitud de la planta.

Se destaca entonces, que los estudiantes de segundo grado de educación básica primaria de la institución educativa distrital San José sede B son capaces de funcionalmente, puesto que Rojas, N & Martínez, A, (2011, pág. 46) expresan “[…] que en la introducción del pensamiento funcional se debe poner más atención en la manera en la que los estudiantes utilizan cualquiera de los enfoques mencionados [covariacional o de correspondencia] en la construcción de relaciones entre dos cantidades”; es decir, al evidenciar la existencia del enfoque covariacional en las respuestas de los alumnos, implícitamente ellos están pensando funcionalmente.

5. CONCLUSIONES

Con respecto al primer objetivo específico, es posible mencionar que, a partir de la búsqueda de la bibliografía, fue posible delimitar qué es el Pensamiento Funcional, a qué se refiere y qué implicaciones tiene en la enseñanza de las matemáticas escolares, particularmente desde edades tempranas (early algebra). Se encontraron los aportes de Smith (2003, 2008), Blanton y Kaput (2004) y Merino (s.f.), los cuales fueron muy valiosos, en tanto que los aportes sobre Pensamiento Funcional han sido muy recientes y no se tiene amplia bibliografía al respecto.

En cuanto al cumplimiento del objetivo general y del tercer objetivo específico objetivo específico, podemos decir que:

- El registro de representación pictórico fue el más frecuente entre los estudiantes de segundo grado de primaria, pues lo utilizaron para realizar una descripción de lo que podían observar. Este registro fue fundamental para ellos porque a través de este describen lo que no se les facilita a la hora de escribir. Uno de los grupos, por la utilización de este registro identificó que había realizado anteriormente una mala toma de medidas, puesto que el registro pictórico señalaba que en las visitas semanales anteriores la planta estaba mucho más grande que en la visita en la que se encontraba.

Dado que la cuantificación de la medida fue uno de los principales inconvenientes para el enfoque de correspondencia, los estudiantes no presentaron evidencias de la certeza matemática. No obstante, se hubiese podido presentar si se encontraba por parte de los estudiantes una relación entre el número de visitas en el transcurso del experimento (1 por semana) y la longitud de la planta, es decir, identificar que ***por ejemplo*** a medida que el número de visitas aumenta en 1, la longitud de la planta aumenta en 5cm, y de esta manera poder predecir para una visita semanal especifica la longitud de la planta de la planta.

La mayor parte de los estudiantes, identificaron que las magnitudes presentadas en la situación variaban, puesto que verificaban que las visitas semanales aumentaban y que la planta presentaba un aumento del tamaño. Además, compararon la relación entre las visitas semanales y el aumento del tamaño de las plantas, concluyendo que a medida que las visitas semanales transcurrían, la longitud de la planta aumentaba, lo cual evidencia un enfoque covariacional en los estudiantes.

Así como lo proponen Rojas & Martínez (2011) en la introducción del pensamiento funcional se debe centrar la atención en la manera en la que los estudiantes utilizan el enfoque covariacional y el de correspondencia para la construcción de las relaciones entre las magnitudes. Es por eso que se puede concluir que los estudiantes de grado segundo aunque no tengan las herramientas para la cuantificación de la medida, si llegan a pensar funcionalmente ya que no solo evidencian la variación de cada una de las magnitudes (verticalmente) como es el transcurso de las visitas semanales y el aumento en la longitud de las plantas, sino que también realizan una comparación entre cada una de las magnitudes (horizontalmente) como poder identificar que a medida que aumentan las visitas semanales, la planta presenta aumenta en su longitud.

Uno de los propósitos como investigadores iniciales, debe ser el promover o buscar preguntas, que apunten a la cuantificación, para que los estudiantes puedan alcanzar la certeza matemática. Es por ello que surge el siguiente cuestionamiento ¿Qué situaciones que potencian el pensamiento funcional se pueden generar para que los estudiantes permitan realizar certezas matemáticas desde edades tempranas? ¿Qué tipo de tareas deben proponerse a los estudiantes en estas situaciones?

Los estudiantes de ese trabajo se pueden identificar en los niveles 2 y 3, puesto que la mayoría pudo distinguir que las variables presentes en la actividad estaban relacionadas y algunos lograron identificar la dependencia de las variables, pero por la dificultad de la cuantificación de la medida, no establecieron una generalidad, por tal razón no pudieron realizar predicciones para casos próximos.

La variable independiente es el tiempo, pero por la dificultad de la cuantificación de la medida, los estudiantes no tienen una noción de tiempo como variable, pero sí pudieron identificar que las visitas eran controladas ciertos días de la semana, por tal razón aunque ellos no identificaron que era semanal, lo hicieron por la cantidad de visitas, luego es posible que más adelante se le pueda hablar del tiempo como variable y lo comprendan mejor haciendo una asociación a las visitas que los profesores realizaron.

Así mismo, teniendo en cuenta lo anterior, sugerimos plantear actividades que desarrollen el Pensamiento Funcional en estudiantes de los primeros años de escolaridad, pero que además, permitan la construcción de la magnitud tiempo. Según Chamorro y Belmonte (1994), este proceso es paulatino, puesto que el estudiante "adquiere con cierta lentitud la escala temporal" (p. 88). Se pueden plantear actividades que favorezcan el análisis de la variación en fenómenos cercanos a esta población, y que además, permitan la construcción de la magnitud tiempo de manera paulatina.

BIBLIOGRAFÍA

Ausubel, D. N. (1983). *Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo. .* México: Trillas.

Belew, L. G. (s.f.). *The T-Chart.* Obtenido de University of Tennessee: http://www.utextension.utk.edu/4h/inservice/2008/belew/T-Chart.pdf

Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, (págs. 135–142).

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Helping Elementary Teachers Build Mathematical Generality into Curriculum and Instruction. *ZDM, 37, (1)*, 34-42.

Campos Hernández, M., & Balderas Cañas, P. (2000). Las representaciones como fundamento de una didactica de las matemáticas. *Pensamiento Educativo. Vol. 27*, 169 - 194.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez, R., & Garza, A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático.* México: Trillas.

Cerda, H. (1991). *Capítulo 7: Medios, Instrumentos, Técnicas y Métodos en la Recolección de Datos e Información*. Obtenido de Universidad Nacional Abierta. Dirección de Investigaciones y Postgrado Maestría en Educación Abierta y a Distancia. Epistemología e Investigación Unidad Curricular: Metodología de la Investigación II: http://postgrado.una.edu.ve/metodologia2/paginas/cerda7.pdf

Chamorro, C., & Belmonte, J. B. (1994). *El Problema de la Medida. Didáctica de las Magnitudes Lineales.* España: Sintesis.

Colegio Abraham Lincoln. (2012 - 2013). Documento de Evaluación y Promoción de estudiantes. Bogotá, Colombia: Colegio Abraham Lincoln.

Colegio San Jose I.E.D. (2012). *Agenda y Manual de Convivencia.* Bogotá: Colegio San Jose I.E.D.

Crespo, C., & Ponteville, C. (2003). El concepto de función: su comprensión y análisis. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 16* (págs. 235 - 241). Chile: Cujae.

Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. *The Learning of Mathematics, 27 (2)*, 2-7.

Gobierno de Canarias. (s.f.). *Las magnitudes y su medida en la Educación Primaria. Cuadernos de Aula.* Obtenido de Gobierno de Canarias. Un solo pueblo: http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/5/DGOIE/PublicaCE/docsup/la%20medida_parte5.pdf

Guarin, M., & Ríos, G. (2006). Representaciones mentales sobre los problemas matemáticos en niños de 4º grado de básica primaria. *Tesis*. Manizales, Colombia: Centro de Estudios Avanzados en Niñez y Juventud alianza de la Universidad de Manizales y el CINDE.

Hernández Pérez, H., Rodríguez, R., & Atenea de la Cruz, A. (2010). Situaciones didácticas en el contexto de ingeniería civil: Caso infiltración de agua en un suelo específico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 23* (págs. 977 - 986). Mexico: CLAME.

López, S. (Julio de 2009). Un estudio sobre la noción de función. *Tesis de Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas*. Mérida, Yucatán, México: Universidad Autónoma de Yucatán.

Machado, M. d., Fernández, M. T., Font , D., & Díaz Godino , D. (26 - 30 de Junio de 2011). El desarrollo del pensamiento algebraico. Diferentes clases de signos. *Conferencia Interamericana de Edcuación Matemática*. Recife, Brazil.

Merino C., E. (2012). Patrones y representaciones de alumnos de 5° de educación primaria en una tarea de generalización. *Trabajo de Máster. Máster en Didáctica de la Matemática*. Granada: Universidad de Granada.

Ministerio de Educación de Chile. (2012). *Matemáticas Educación Básica. Bases Curriculares 2012*. Obtenido de Docentemas: http://www.docentemas.cl/docs/2013/Bases_Curriculares_Educacion_Basica_%20Matematica.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares. Matemáticas .* Santa Fé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Éstandares básicos en competencias en Ciencias Naturales y Ciencias Sociales .* Colombia: Cargraphics S.A.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos en Competencias en Matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Morales G., I., & Sepúlveda L., A. (2006). Propuesta para la Factorización en el curso de Álgebra. En L. A. Sepúlveda, *Memorias. XIV Encuentro de Profesores de Matemáticas* (págs. 85-92). Morelia: UMSNH.

Quintero, C. P., & Cadavid, L. A. (s.f.). Construcción del concepto de función en estudiantes de octavo grado. *Articulo*. Antioquia: 10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4 (1)*, 1 - 14.

Rojas, N , & Martínez, A. (2011). El papel de los escenarios de investigación, relacionados con el pensamiento funcional, en los procesos de inclusión en las clases: un estudio en séptimo grado. Tesis de Maestría. Maestría en Docencia de las Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional.

Sánchez, C., & Valdés, C. (2007). *Las funciones un paseo por su historia.* Madrid: Nivola.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. (2001). When tables become function tables. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.). *Proceedings of theTwenty-fifth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4*, (págs. 145–152). Utrecht, The Netherlands.

Smith, E. (2003). Stasis and change: Integrating patterns, functions, and algebra throughout the K-12 curriculum. En J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter, *A research companion to principles and standards of school mathematics* (págs. 136-150). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Smith, E. (2008). Representational Thinking as a Framework for Introducing Functions in the Elementary Curriculum. En J. J. Kaput, Carraher, D. W, & Blanton, M. L., *Algebra in the Early Grades.* New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Vargas, M. E. (2011). El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno. *Trabajo de profundización.*

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

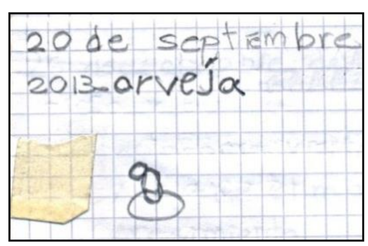
Anexo 1. Folleto

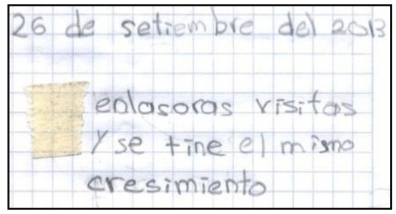
Anexo 2. Análisis de las libretas

Grupo 1

<table>
<tr><td>Estudiantes:</td><td>Scarlet y Maria</td></tr>
<tr><td colspan="2">Libreta</td></tr>
<tr><td>En la primera visita que se realizó a la institución, las estudiantes realizaron una representación pictórica en la cual muestran cuál fue el proceso para realizar el cultivo de la arveja.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>En la segunda visita que se efectuó, las niñas con la ayuda de la cinta mostraron qué tanto había crecido la planta y señalaron que si se presentó un aumento en la longitud, lo cual muestra que encontraron una relación.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>En la tercera visita que se realizó, las estudiantes con la ayuda de la cinta mostraron qué tanto había crecido esa semana la planta, pero no escribieron si había crecido más que la semana anterior ya que aparentemente la planta no creció, y al preguntarles ellas respondieron:

Profesor: Niñas ¿Qué paso esta semana?
Estudiantes: Es que no creció la planta esta semana
Profesor: ¿Cómo lo saben?
Estudiantes: Es que…mire, esto fue lo que creció (señalo la cinta tomada en la tercera visita) y esto fue lo que creció la semana pasada (señaló la cinta tomada en la segunda visita)

Esto evidencia que las estudiantes relacionaron la magnitud tiempo con la longitud de la planta, y al no ver un cambio en la longitud pensaron que fue una mala toma de medidas.</td><td>
</td></tr>
</table>

En la cuarta visita a la institución, las niñas en las libretas colocaron con cinta que tanto había crecido la planta esta última visita. Se les preguntó a las estudiantes: **Profesor:** Niñas ¿Cómo nos fue esta semana? **Estudiantes:** Eh… tampoco creció. **Profesor:** ¿Están seguras? **Estudiantes:** Si mire, en la segunda semana creció esto (señalaron la segunda toma que realizaron a la planta), la tercera semana esto (señalaron la tercera toma que realizaron) y ahorita esto (señalaron la cuarta toma) parece que no creció. Identificaron que en el transcurso de estas semanas, la planta no presentó crecimiento, y aunque en las anteriores sesiones las niñas habían pensado que la primera toma que habían realizado estaba mal, en esta sesión identificaron que lo que sucedió es que la planta solo creció de la primera a la segunda sesión, pero posteriormente no volvió a crecer. Lo que las llevó a realizar una conjetura: *“en las otras visitas se tiene el mismo crecimiento”* Haciendo referencia que en las próximas semanas la planta no crecerá, por tal razón presentará la misma longitud.	

Grupo 2

Estudiantes:	Dalia y Mayra
Libreta	
En la primera sesión, las estudiantes no registraron proceso alguno.	
En la segunda visita, las estudiantes reportaron la longitud que tenía la planta en ese momento, y señalaron que sí hubo crecimiento.	

En la tercera sesión, las estudiantes identificaron qué tanto había crecido la planta en esa semana, además escribieron:

“la plantita creció más que la vez pasada”

Con esto que escribió, ellas compararon lo que había crecido la anterior vez y que en esta situación esta planta había crecido más.

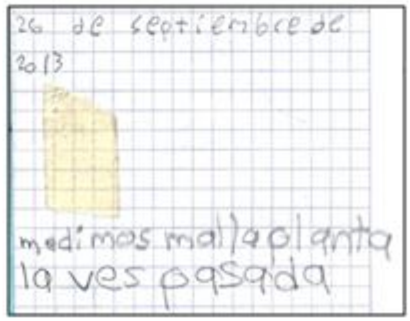
En la cuarta sesión, las estudiantes escribieron:

“medimos mal la planta la vez pasada”

Se les pregunto:

Profesor:	¿Por qué midieron mal?
Estudiantes:	Es que esta vez midió menos que la vez pasada.
Profesor:	¿Cómo lo saben?
Dalia:	Porque es que vea (señalando la cinta de la tercera sesión) esta es más grande que esta (señalando la cinta de la cuarta sesión).

Esto es evidencia de que ellas comprenden que a medida que pasa el tiempo, la planta crece y deducen que la anterior vez fue una mala toma de medidas ya que aparentemente no creció la planta.

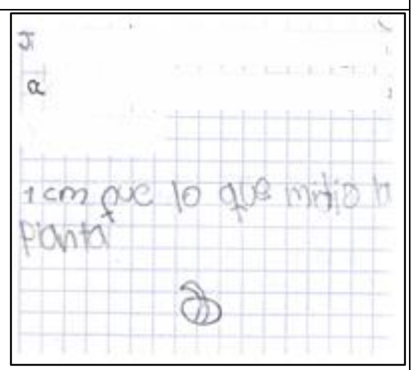


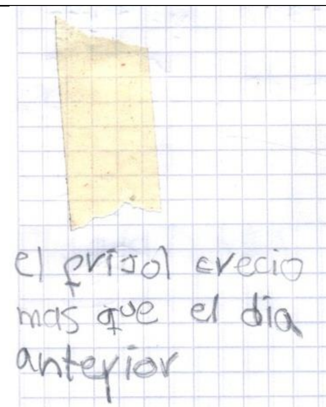
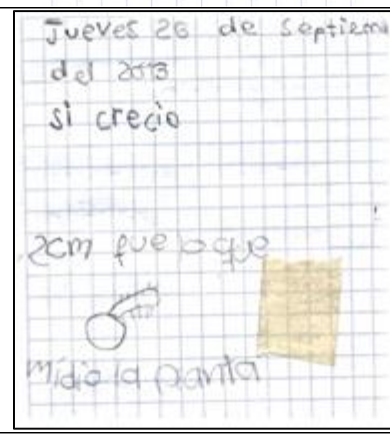
Grupo 3

Estudiantes:	Andrés y Joel

Libreta

En la primera sesión, los estudiantes intentaron cuantificar la medida de la arveja, escribiendo “1 cm fue lo que midió la planta”. Refiriéndose que la arveja mide 1 centímetro.



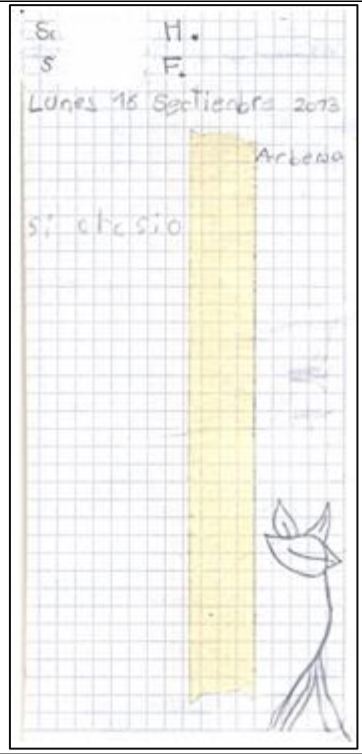
En la segunda sesión, los estudiantes escribieron en la libreta que la arveja no había presentado crecimiento, por esa razón se les pregunto: **Profesor:** Niños ¿Qué pasó con la plantica? **Estudiantes:** Profe es que… no creció. **Profesor:** ¿Por qué sabes esto? **Estudiantes:** Es que le faltó como agua, y no creció. **Profesor:** Pero ¿Cómo sabes que no creció? **Andrés:** Porque … eh… no… eh … **Joel:** Pues es que no le salió la matica Joel identificó que la planta no había crecido, aunque la semilla sí lo había hecho, y la foto, como el dibujo que realizaron lo muestra.	
En la tercera sesión, los estudiantes escribieron "*el frijol creció más que el día anterior*", haciendo referencia que la planta si había germinado y había presentado un aumento en la longitud, pero esta vez identificaron que anteriormente si había aumentado ya que hicieron una comparación de longitudes "*más que…*" lo que los llevó a pensar que la anterior vez si aumentó la longitud pero no tanto como en esta oportunidad.	
En la cuarta sesión, los estudiantes nuevamente cuantificaron la medida de la planta en la cuarta semana y anexaron un dibujo de cómo se veía la planta en ese momento.	

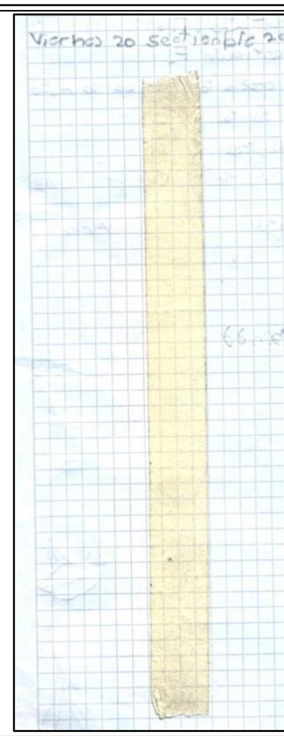
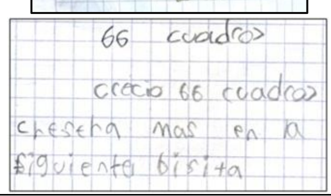
Grupo 4

Estudiantes:	Santiago H. y Santiago F.
Libreta	
En la primera sesión los estudiantes no reportaron el proceso que realizaron.	

<table>
<tr>
<td>
En la segunda sesión, lo primero que identificaron los estudiantes fue que su planta había crecido más que la de los demás, ya que sobresalía por encima de las otras. Cuando se ingresó al salón este grupo estaba emocionado por trabajar ya que estaban ansiosos por saber qué tanto había crecido.
En la parte inferior se puede ver un dibujo realizado por los estudiantes, donde muestran que la planta había germinado y que aún le faltaba por germinar.
Uno de ellos dijo:

Santiago F: ¡Profe! ¡Mire! Creció 2 metros.

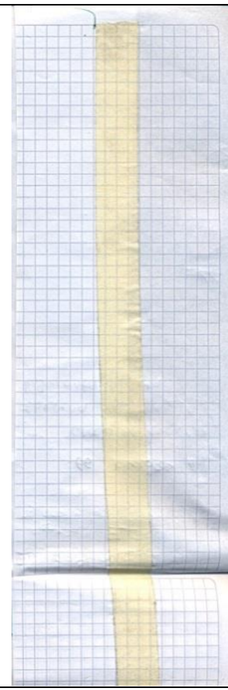
El estudiante intenta cuantificar la longitud de la planta.
</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>
En la tercera sesión, los estudiantes registraron la longitud de la planta utilizando cinta. Pero cuando se les preguntó “¿Qué tanto crecerán las plantas la próxima semana?” los estudiantes realizaron una predicción utilizando como instrumento de medida la cuadricula de los cuadernillos y para ello escribieron:
“66 cuadros crecerá más en la siguiente visita”
Haciendo referencia a que en la próxima semana la planta crecerá 66 cuadros.
</td>
<td>



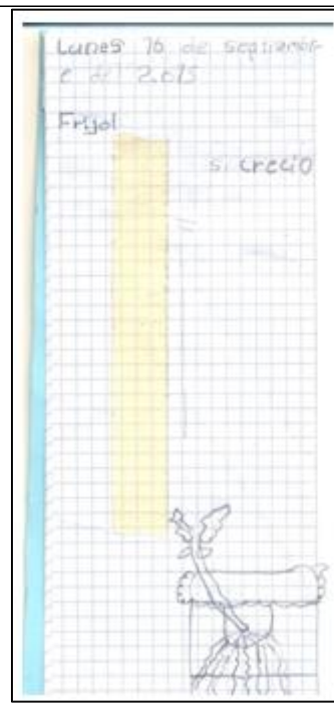
</td>
</tr>
</table>

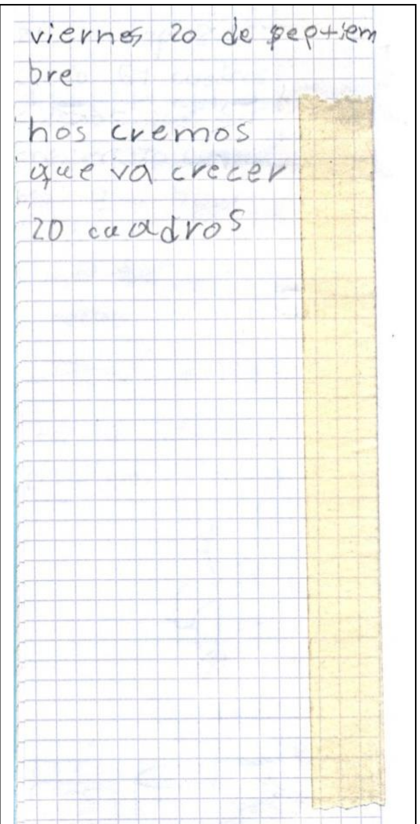
<table>
<tr>
<td>
En la cuarta sesión los estudiantes rectificaron la conjetura que habían establecido:

Profesor: Bueno, y esta vez ¿la planta creció todo lo que habían pensado?
Santiago H: Pues profe, no creció 66 cuadros.
Profesor: Entonces, ¿Qué tanto creció?
Santiago H: ¡Esto! (señalando la cinta que había colocado en el cuaderno)

Como la conjetura que habían determinado estaba mal, cuando se les solicitó que realizaran una predicción de que tanto crecería la próxima vez, los estudiantes dudaron en la respuesta, y decidieron no registrarla.
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Grupo 5

<table>
<tr><td align="right">Estudiantes:</td><td>Emanuel y Nicolás</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Libreta</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">En la primera sesión, los estudiantes no realizaron algún registro de lo que se hizo en clase.</td></tr>
<tr>
<td>En la segunda sesión, los estudiantes evidenciaron un aumento en la longitud de la planta, y con la cinta la registraron. Además en la parte inferior dibujaron cómo se veía la planta en ese momento.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

En la tercera sesión, los estudiantes identificaron qué tanto había crecido la planta utilizando la cinta, pero además realizaron una predicción para la próxima sesión, esta predicción la hicieron de acuerdo con la longitud de la planta en la visita semanal anterior y la comparación de la longitud de esta semana.	

En la cuarta sesión, los estudiantes identificaron el crecimiento de las plantas y realizaron una representación pictórica de lo que había crecido y como se veía en ese momento la arveja. Aparentemente la predicción que los estudiantes habían realizado al cuantificar la longitud de la planta, sí había funcionado, lo que los motivó a realizar una nueva predicción para la siguiente semana.