¿PUEDE LA CONMENSURABILIDAD CERRAR EL CERCO A LA INCONMENSURABILIDAD?

EDWIN YESYD PARRA BUITRAGO

ERIKA SENID VARGAS SOLANO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

2012

¿PUEDE LA CONMENSURABILIDAD CERRAR EL CERCO A LA INCONMENSURABILIDAD?

EDWIN YESYD PARRA BUITRAGO

CÓD. 2007240051

C.C 1030568292

ERIKA SENID VARGAS SOLANO

CÓD. 2007240070

C.C 1032431674

Trabajo de Grado realizado como requisito para optar al Título de Licenciado en Matemáticas

Edgar A Guacaneme S.

Director: Edgar Alberto Guacaneme Suárez
Magister en Educación – Énfasis en Educación Matemática

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

2012

AGRADECIMIENTOS

Gracias a ti señor Dios Padre creador del cielo y de la tierra, porque con cada día de vida que nos regalas nos muestras tu infinito amor, porque eres nuestra más fiel compañía y escudero, y porque gracias a ti podemos disfrutar nuestros logros y metas al lado de las personas que más apreciamos y queremos.

Agradecemos de manera muy especial al profesor Edgar Alberto Guacaneme porque su apoyo que fue indispensable e incondicional en nuestro proceso de formación y en gran parte de nuestros logros en el trabajo de grado.

Agradecemos también, a nuestra familia y en especial a nuestros padres que siempre nos apoyaron y nos apoyan de forma incondicional a pesar de las dificultades y porque buscan y desean siempre lo mejor para nosotros.

Gracias a cada uno de los profesores que nos han acompañado en nuestro proceso de formación.

Y por último gracias a nuestros compañeros y amigos, con los que hemos compartido gratos momentos, ideas y experiencias inolvidables.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN (RAE)

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	¿Puede la conmensurabilidad cerrar el cerco a la inconmensurabilidad?
Autor(es)	PARRA BUITRAGO, Edwin Yesyd; VARGAS SOLANO, Erika Senid
Director	GUACANEME, Edgar Alberto
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional. 2012. 125 pp.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional. UPN.
Palabras Claves	Adición Sucesiva, Sustracción Sucesiva, Antanairesis, Antipairesis, Inconmensurabilidad, Proporción, Razón, Historia de las Matemáticas, Conocimiento del profesor de Matemáticas.

2. Descripción

Este documento tiene como propósitos: dar a conocer los métodos utilizados por los pitagóricos para encontrar la razón entre el lado y la diagonal de un cuadrado, promover el estudio de diferentes nociones matemáticas desde la perspectiva histórica y mostrar de alguna manera cómo la Historia de las Matemáticas interviene en el conocimiento del profesor de Matemáticas. Para ello se describen tres maneras de entender la conmensurabilidad y de paso lo que se conoce como inconmensurabilidad; además se muestran algunos ejemplos de magnitudes inconmensurables, como el lado y la diagonal de un pentágono regular y el lado y la diagonal de un cuadrado y se discute cómo la conmensurabilidad pueda "encerrar" la inconmensurabilidad.

3. Fuentes

Desde el punto de vista documental las principales referencias bibliográficas son:

1. Filep, L. (1999). Pythagorean side and diagonal numbers. Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis 15, 1–7.
2. Gardies, J. (1988). L´héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide. Une essai de reconstitution. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.
3. Guacaneme, E. A. (2010). La Historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones. Conferencia presentada en La Tercera Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática (ENHEM3). Santiago de Cali, 27 al 29 de octubre.
4. Thorup, A. (1992). A pre-euclidean theory of proportions. Archive for history of exact sciences 45, 1-16.

Al margen de las referencias bibliográficas se destacan los conocimientos generados y discutidos en las múltiples asesorías orientadas por el profesor Edgar Alberto Guacaneme.

4. Contenidos

Los propósitos iniciales de este trabajo de grado son, mostrar cómo la teoría de las proporciones estaba presente en la época de la escuela pitagórica y la utilidad que tiene este saber en el conocimiento del profesor. Para ello se desarrollaron 5 capítulos distribuidos de la siguiente manera:

1. Preliminares. En este capítulo se realiza una descripción del problema y se establecen los objetivos del estudio.
2. Los Métodos Pitagóricos. Se desarrolla un discurso sobre el problema de la inconmensurabilidad, se involucran los métodos de adición y sustracción sucesiva, además surgen los nombres “antanairesis” y “antipairesis”.
3. ¿Qué relación tienen la antanairesis y la antipaitresis? Se plantean algunas ideas que permiten establecer la relación entre estos términos.
4. Relación Historia de las Matemáticas – Educación Matemática. Se presentan los aportes de los métodos pitagóricos a nivel teórico-matemático y a nivel personal en la formación de docentes de Matemáticas.
5. Conclusiones. Se exponen los resultados más relevantes encontrados en el estudio no solo a nivel académico, sino también a nivel personal.

6. Metodología

Para el desarrollo del Trabajo de grado primero se hizo un estudio general de los documentos mencionados en las fuentes, el cual implicó no solo la traducción de algunos de ellos, sino además identificar y estudiar fuentes adicionales en las que se especificaran algunos conceptos matemáticos que ameritaban un estudio más profundo y comprensivo. Algunas de las ideas y comprensiones que fueron surgiendo se constituyeron en las ideas principales de una ponencia presentada en el *13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Por último, se analizaron los aportes que este estudio genera a la formación de futuros docentes de Matemáticas, al realizar un ejercicio de reflexión sobre el proceso y los resultados.

7. Conclusiones

Al observar y analizar los resultados de cada uno de los métodos pitagóricos se encontró que ambos generan, en esencia, una misma sucesión de lo que hoy se conoce como números racionales, a través de los cuales se va cerrando el cerco y capturando la inconmensurabilidad (o si se prefiere, la irracionalidad).

Las palabras *antanairesis* y *antipairesis*, citadas inicialmente, tienen un significado similar y se refieren específicamente a los métodos de adición y sustracción sucesiva desarrollados por los pitagóricos, además de guardar una relación estrecha entre el algoritmo de Euclides y la definición de razón.

El estudio de la Historia de las Matemáticas genera en el profesor la necesidad de descentralizarse y desarrollar un estudio cuidadoso de distintas ideas matemáticas; esto conlleva a una visión amplia de algunas nociones o conceptos de matemáticas que en su momento cobran importancia y utilidad en la labor del docente.

Elaborado por:	PARRA BUITRAGO, Edwin Yesyd; VARGAS SOLANO, Erika Senid
Revisado por:	GUACANEME, Edgar Alberto

Fecha de elaboración del Resumen:	18	12	2012

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Teniendo en cuenta la extensa producción pitagórica sobre la teoría de las proporciones, este documento busca hacer un tratado de manera particular sobre dos métodos empleados por ellos; el método de adición sucesiva y el método de sustracción sucesiva. Además, en razón a ello, inicialmente consideramos en nuestra propuesta de anteproyecto para el desarrollo de este trabajo de grado llamarlo **teoría de las proporciones en la época de la escuela pitagórica,** título que sin duda abarca muchas ideas que serían casi imposible estudiarlas en un mismo trabajo, por ello luego de nuestro estudio consideramos presentar un título más acorde a lo realmente trabajado, y decidimos llamarlo **¿puede la conmensurabilidad cerrar el cerco a la inconmensurabilidad?**

Para su desarrollo establecemos tres cuestiones clave que nos permiten organizar el trabajo y aprovechar la teoría encontrada en los métodos, dichas cuestiones giran en torno a ideas como reconocer en qué consisten los métodos pitagóricos de adición sucesiva y sustracción sucesiva, en observar la relación entre conceptos como *antanairesis* y *antipairesis*, además de lograr identificar la utilidad del estudio de los métodos pitagóricos en nuestra formación como docentes de matemáticas. Tal estudio lo proponemos a partir de los siguientes cinco apartados o capítulos:

En el primero establecemos las generalidades del estudio, donde se reconocen la justificación y descripción del problema, además de los objetivos clave de nuestro estudio y la metodología implementada durante la ejecución del trabajo de grado.

En el segundo desarrollamos un discurso sobre el problema de la inconmensurabilidad en la época dorada griega, se abarcan tres enfoques diferentes sobre el concepto de conmensurabilidad y se involucran los métodos de adición sucesiva y sustracción sucesiva, a partir del estudio de autores como Filep (1999), Gardies (1988) y Thorup (1992).

En el tercero surgen términos como *antanairesis* y *antiparesis,* los cuales se buscan clarificar, además de establecer la relación que poseen entre sí, y que tienen que ver éstos con otros como los métodos de adición y sustracción sucesiva abordados en el capítulo dos a partir de fuentes como las de Evans (1927), Fowler (1979) y Thorup (1992); además se observa la relación de dichos términos con la definición de razón y proporción del libro V de los *Elementos* y el algoritmo de Euclides, para ello, autores como González (2008) y de Guzmán (1986) juegan un papel clave para su estudio.

En el cuarto se realiza un análisis a la luz de nuestros aprendizajes logrados y de una categorización propuesta por Guacaneme (2010), sobre la relación Historia de las Matemáticas – Educación Matemática, en el cual se presentan los aportes de los métodos pitagóricos a nivel teórico-matemático y a nivel personal en la formación de docentes de matemáticas.

En el quinto y último capítulo se exponen los resultados más relevantes encontrados en el estudio tanto a nivel académico como a nivel personal, enfocados a responder las preguntas formuladas en las generalidades del estudio y a mostrar algunas reflexiones en torno al trabajo realizado, los aprendizajes logrados y los aportes que nos genera el estudio de documentos de la historia a los profesores de matemáticas.

Capítulo 1. PRELIMINARES

1.1 Justificación

La motivación esencial que nos permitió proyectar el desarrollo del trabajo de grado, partió de tres intereses fundamentales; en primer lugar, un interés por hacer un estudio detallado sobre la teoría de las proporciones en la época de la escuela pitagórica, en segundo lugar, un interés por develar la importancia efectiva del estudio de la Historia de las Matemáticas en el marco de la Educación Matemática y más específicamente en el conocimiento del profesor de matemáticas y como tercero, un interés por disponer de documentos en español que sirvieran de apoyo en el trabajo de grado y que pudieran ser estudiados por otros futuros profesores de matemáticas, soslayando la dificultad del idioma.

Con respecto a la primera motivación hemos reconocido que las razones, las proporciones y la proporcionalidad son objetos matemáticos que han evolucionado a lo largo de la historia. En la conferencia "La razón y la proporción en la Historia de las Matemáticas" (realizada por el profesor Guacaneme en el marco del *XVIII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y el VI Encuentro de Aritmética* en Junio de 2007) y recientemente en el artículo de la revista *Tecne Episteme y Didaxis* (Guacaneme, 2012) se destacaron seis hitos fundamentales de dicha historia, a saber:

- La época de la escuela pitagórica.
- La época dorada de los griegos (fundamentalmente Eudoxo, Euclides y Apolonio).
- La época del surgimiento de lo que hoy llamamos álgebra y particularmente de la geometría analítica.

- La época del Renacimiento donde se replantea la teoría clásica griega de las proporciones.
- La época de creación del Cálculo y el Análisis donde el lenguaje de las funciones sustituye el clásico lenguaje de las proporciones.
- La época de la construcción del conjunto de los números reales en la que la definición euclidiana de proporción parece jugar un papel fundamental.

Teniendo en cuenta la extensa producción histórica relativa a la teoría de la proporcionalidad y sobre todo la imposibilidad de abordarla en toda su dimensión, se propuso como Trabajo de grado explorar la teoría de las proporciones en la época de la escuela pitagórica. De esta teoría, se tienen pocas referencias bibliográficas (Filep, 1999; Gardies, 1988) y en nuestro idioma son mucho más exiguas. No obstante esta situación, consideramos que a través de su estudio podíamos hacer una aproximación a la visión que tenían los pitagóricos sobre la teoría de las proporciones. De manera específica, se estudiaron los dos métodos pitagóricos: el método de adición sucesiva y el método de sustracción sucesiva (Filep, 1999). Estos métodos fueron empleados para encontrar una razón numérica que aproximara la razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado y frente a estos nos surgió la inquietud acerca de qué tan semejantes y qué tan diferentes eran, algo a lo que hace alusión Thorup, (1992) y si existía alguna relación entre éstos, algo que podemos ver gracias a autores como (de Guzmán, 1986; Jiménez, 2006). Adicionalmente, pretendimos establecer si los nombres “*antanairesis*” y “*antipairesis*” se referían al mismo método.

Con respecto a la segunda motivación señalamos que existía el supuesto de que el estudio de los elementos históricos nutría el conocimiento de los futuros docentes de matemáticas, mucho más cuando se consideraba que un profesor debía estudiar, más que la Historia de las Matemáticas, las ideas y los temas matemáticos desde una perspectiva histórica (Shenitzer, 1995). Por tanto en nuestro caso, tratamos de estudiar algunos aspectos de la proporcionalidad (específicamente algunos métodos trabajados en la época de la escuela pitagórica) desde una perspectiva histórica con el fin de observar su importancia en la formación de los profesores de matemáticas, no solo como parte de su conocimiento como elemento de erudición sino más como tema relacionado con la educación matemática y aún más si tenemos en cuenta que tal temática hace parte de las matemáticas escolares básicas de la población colombiana. Esta idea se desarrolla de manera más específica en el capítulo 4 del presente trabajo.

Y en relación con la tercera motivación, considerando que muchos elementos teóricos referentes a la historia de las proporciones se encontraban en otros idiomas, consideramos pertinente hacer una traducción de los documentos a trabajar que no solo nos servirían de base para el desarrollo de nuestro trabajo, sino que incluso podían servir como referencias para futuros profesores y para profesores en ejercicio.

1.2 Descripción del problema

Atendiendo a lo expuesto en la justificación, de manera particular el Trabajo de grado intenta dar respuesta a interrogantes como:

- ¿En qué consisten los métodos pitagóricos de adición sucesiva y sustracción sucesiva?
- ¿Qué relación tienen los métodos de *antanairesis* y *antipairesis* entre sí y con los métodos de adición sucesiva y sustracción sucesiva?
- ¿Qué utilidad tiene el estudio de los métodos pitagóricos en nuestra formación como docentes de matemáticas?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Lograr una visión de un aspecto de la teoría de las proporciones en la época de la escuela pitagórica y reconocer su importancia en el conocimiento docente.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Disponer de tres documentos base, en nuestro idioma, de tal manera que sirvan de apoyo en el desarrollo del Trabajo de grado, e incluso para otros lectores.
2. Lograr una visión de un aspecto de la teoría de la proporción en la época de la escuela pitagórica a partir del estudio detallado de los documentos base.
3. Reconocer la importancia de algunos métodos pitagóricos como parte del conocimiento docente.
4. Promover el estudio de documentos y conceptos matemáticos desde una perspectiva histórica como parte del conocimiento docente.

1.4 Aspectos metodológicos

Las actividades realizadas a lo largo del estudio se organizaron en diferentes etapas, relativamente relacionadas con los objetivos planteados. Una primera actividad consistió en la traducción de los documentos base (Filep, 1999; Gardies, 1988; Thorup, 1992), que nos sirvieron para la exploración inicial de las temáticas y en la argumentación de las principales ideas del trabajo.

Una segunda actividad consistió en hacer un estudio detallado de los documentos ya traducidos, lo cual nos permitió tener una visión sobre la teoría de las proporciones en la época de la escuela pitagórica, pero de manera particular sobre los métodos de adición sucesiva y de sustracción sucesiva, pero además nos generaron algunas dudas sobre éstos y otros conceptos matemáticos, conduciéndonos a estudiar otras fuentes clave (Evans, 1927; Fowler, 1979; González, 2008; de Guzmán, 1986) que nos permitieran dar cuenta de los resultados de nuestro estudio, es decir, explicitar la comprensión que logramos del contenido de los documentos, para luego lograr responder a los dos primeros interrogantes planteados en la descripción del problema.

Y la tercera y última actividad consistió en reconocer cómo el estudio de los métodos pitagóricos nutrió nuestro conocimiento profesional como futuros profesores de matemáticas; atendiendo así a la tercera pregunta planteada en la descripción del problema. Para ello reflexionamos sobre los aprendizajes logrados, a la luz de una categorización presentada por el profesor Guacaneme (2010) referente a las intenciones de la Historia de las Matemáticas en el conocimiento del profesor de Matemáticas y explicitamos los aprendizajes logrados a partir del estudio de las fuentes, organizados respecto a tales categorías.

Capítulo 2. LOS MÉTODOS PITAGÓRICOS

Este segundo capítulo se desarrolla a partir de tres ideas fundamentales. La primera presenta una aproximación a la noción de conmensurabilidad entre magnitudes, entendida a partir de tres enfoques distintos; un primer enfoque en el cuál se busca encontrar una medida común entre dos magnitudes a partir de la construcción de múltiplos de cada una de ellas, uno segundo, enfocado a encontrar también una medida común entre las magnitudes, pero haciendo uso de sustracciones sucesivas y el tercero en el cual se relacionan los dos enfoques anteriores a partir de una relación de proporcionalidad entre las magnitudes y dos números enteros positivos.

La segunda idea principal permite desarrollar un tratado que involucra el problema de la inconmensurabilidad con el cual se encontraron los pitagóricos a partir de dos casos en particular; el problema de la inconmensurabilidad entre la diagonal y el lado de un pentágono regular y de un cuadrado.

Finalmente se muestran dos métodos empleados por los pitagóricos con los cuales intentan buscar una salida al problema de la inconmensurabilidad entre la diagonal y el lado de un cuadrado.

2.1 Noción de conmensurabilidad

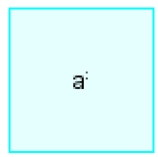
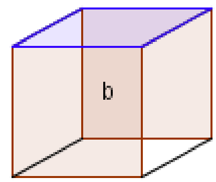
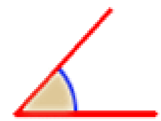
Antes de abordar la noción de conmensurabilidad, es necesario hacer alusión a la concepción griega de magnitud. Para Eudoxo, la concepción de magnitud no se refería a un número, sino a una característica particular de algunos objetos geométricos tales como segmentos, regiones, cuerpos, ángulos, y otros; dicha característica tenía la propiedad de ser susceptible de ser medida, encontrando así una cantidad de magnitud. Por su parte Corry (1994, p.9), nos sugiere que Aristóteles establece una relación entre número y magnitud, la cual queda establecida en la siguiente definición tomada de *Metafísica* (V 13 1020a), y que manifiesta fielmente la concepción del mismo Euclides:

> Se llama cantidad a lo que es divisible en elementos constitutivos, de los cuales cada uno o por lo menos uno es naturalmente apto para poseer una existencia propia. La pluralidad, por tanto, es una cantidad si se puede contar, y una magnitud lo es si puede ser medida. Se llama pluralidad al conjunto de seres que es divisible en potencia en seres discontinuos, y una magnitud a lo que es divisible en partes continuas. Una magnitud continua en un solo sentido se llama longitud; la que lo es en dos sentidos latitud y la que lo es en tres profundidad. Una multitud finita es el número, una longitud finita es una línea, una latitud determinada es una superficie, una profundidad limitada es un cuerpo.

En este sentido logramos ver qué número y magnitud son "cantidades" de diferentes tipos que miden una pluralidad determinada o una longitud, latitud (superficie) o profundidad determinada, respectivamente. Así podemos ver que para los griegos, eran cuatro las magnitudes[1](Tabla 1) principales que se logran identificar en sus trabajos, los cuales creían que todas las magnitudes que existían eran conmensurables, es decir, que dadas dos magnitudes cualesquiera, existía una tercera magnitud común, la cual medía a cada una de ellas un número entero de veces.

[1] En la época dorada Griega se consideraban principalmente cuatro magnitudes fundamentales: longitud, área, volumen y amplitud angular

Tabla 1 Magnitudes conocidas por los griegos

Longitud	Superficie o latitud	Volumen o profundidad	Amplitud Angular[2]
			

Para ampliar la noción de conmensurabilidad podemos enunciarla (o entenderla) de tres maneras diferentes, aunque interrelacionadas.

La primera consiste en partir de dos magnitudes distintas A y B y encontrar una tercera magnitud D tal que sumada a sí misma un número r de veces por un lado y sumada a sí misma un número s de veces por el otro, se obtengan las magnitudes A y B respectivamente. Para ello se resta siempre la magnitud menor de la mayor hasta el momento en que ambas sean iguales y el resto sea cero.

Un ejemplo de ello sería preguntarse, (tomando como magnitudes dos segmentos A y B) ¿Son los segmentos A y B, de la figura 1, magnitudes conmensurables?

[2] Aunque la definición Aristotélica de *Metafísica* no presenta la amplitud angular como magnitud particular, cabe señalar que los griegos además de trabajar con longitud, superficie y volumen, incluyeron en sus trabajos la amplitud angular como magnitud.

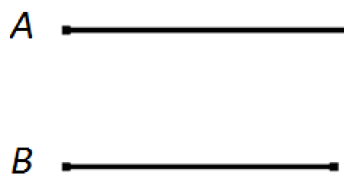


Figura 1 Segmentos *A* y *B*

Par dar solución a esta cuestión, en primer lugar se observa que el segmento B es de menor longitud que el segmento A (ver figura 1), por lo cual podemos disponer el menor B sobre el mayor A tantas veces como sea posible. Este caso particular muestra que B cabe dos veces dentro de A, pero deja una parte sobrante: un segmento C, el cual es menor que B (Ver Figura 2), así por tanto podemos incluir a C dentro de B, tantas veces como sea posible (en este caso, una) lo que deja un resto, un segmento D menor que C. Repetimos el procedimiento colocando D dentro de C las veces que sea posible (en este caso, cuatro) y vemos que ya no queda sobrante alguno. En consecuencia, el segmento D es medida común de los segmentos A y B ya que está contenido un número entero de veces en cada uno de ellos: 5 veces en B y 14 veces en A.

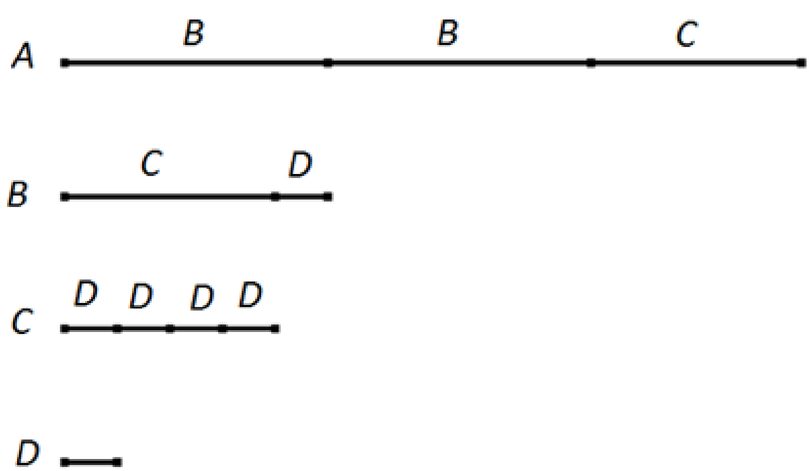


Figura 2 Segmentos *A* y *B* medidos por *D*

En conclusión los segmentos A y B, tienen una medida común D, lo cual se puede expresar como:

$$rD = A, \text{ y, } sD = B,$$

Dónde:

$$r = 14, \text{ y, } s = 5.$$

En general se puede decir que si se tienen dos magnitudes A y B, son conmensurables si existe una tercera magnitud D, donde se cumple que:

$rD = A$, y, $sD = B$, donde r y s son números naturales.

El proceso anterior es una manera de ver la conmensurabilidad, la cual se desarrolla a partir de la sustracción sucesiva. Una segunda manera de tratar la conmensurabilidad es similar a la anterior, pero se desarrolla a partir de la adición sucesiva, la cual consiste en construir múltiplos de cada una de ellas (mX, nY; m y n números naturales) hasta encontrar una tercera magnitud Z tal que $Z = mX = nY$.

Por ejemplo, consideremos los segmentos X e Y, de tal manera que Y sea menor que X (ver Figura 3).

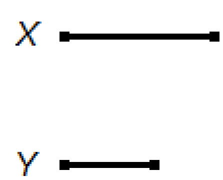


Figura 3 Segmentos $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$

El objetivo del método consiste en hallar una medida común a partir de los segmentos dados auto adicionándolos reiteradamente, a diferencia del método anterior, con el fin de obtener dos segmentos de igual longitud. Así, se autoadiciona el segmento menor tantas veces sea posible hasta que coincida con el segmento mayor o lo sobrepase, en este caso a Y se adiciona otro segmento Y, y se obtiene un segmento de longitud $2Y$ mayor a X, lo cual hace necesario agregar un segmento X al segmento X, obteniendo un segmento de longitud $2X$, el cual sobrepasa al segmento $2Y$, lo que implica agregarle a $2Y$ otro Y, obteniendo un segmento $3Y$, pero observamos que este no alcanza y es menor a $2X$, por tanto agregamos otro segmento Y a $3Y$, formando $4Y$, el cual supera a $2X$, entonces agregamos a este último un segmento X, y tenemos $3X$ que supera a $4Y$, así agregamos a $4Y$ otro segmento Y y observamos que este $5Y$ formado coincide con el $3X$, es decir que 5 veces el segmento Y es igual a 3 veces el segmento X.

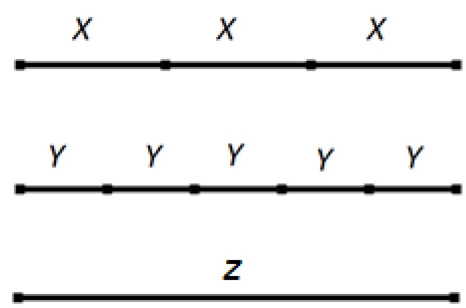


Figura 4 Segundo enfoque de conmensurabilidad

En conclusión los segmentos X e Y, tienen una medida común Z, la cual se puede expresar como:

$$Z = mX = nY \text{ donde } m = 3 \text{ y } n = 5$$

En general se puede decir que si se tienen dos magnitudes X y Y, son conmensurables si existe una tercera magnitud Z, donde se cumple que:

$$Z = mX = nY$$

Finalmente el tercer enfoque, establece una proporción entre las magnitudes y los números que aparecen en los dos primeros enfoques, de modo que teniendo del primer enfoque $rD = A$ y $sD = B$, y del segundo $Z = mX = nY$, se puede establecer que:

$$\frac{A}{B} = \frac{s}{r}, \text{ y, } \frac{X}{Y} = \frac{n}{m}.$$

Si alguno de los dos primeros enfoques, utilizados para saber que dos magnitudes son conmensurables, terminan luego de un número finito de pasos o si se puede expresar en términos del tercer enfoque, se dice que tales magnitudes son conmensurables, de lo contrario se afirma que dichas magnitudes son inconmensurables. En otras palabras si dos magnitudes no se pueden expresar con ninguno de los tres enfoques mencionados anteriormente, es decir, no podemos encontrar los números n y m para el primer enfoque y r y s para el segundo, las magnitudes son inconmensurables.

Un ejemplo particular de magnitudes inconmensurables son las representadas por el lado y la diagonal de un cuadrado, como veremos en la sección 2.2.

2.2 Problema de la inconmensurabilidad

Siguiendo la ideología de los pitagóricos, logramos ver dos de sus propósitos: por un lado poder asociar a objetos geométricos valores cuantitativos o numéricos, teniendo predeterminada una unidad de medida y, por el otro lado, poder establecer relaciones entre dichos objetos a partir una razón entre magnitudes, para lo cual se requería que dichas magnitudes fueran conmensurables. Estas ideas los llevaron a establecer relaciones entre algunos elementos de distintas figuras geométricas (para nuestro estudio el lado y la diagonal del pentágono regular y el lado y la diagonal del cuadrado), lo cual los condujo a encontrar las razones entre ellos; de manera particular trataban las relaciones entre las diagonales y los lados de dichas figuras. Sin embargo, uno de los miembros de la escuela pitagórica, *Hipaso de Metaponto*[3], reveló por primera vez la existencia de magnitudes

[3] *Hipaso de Metaponto* (Siglo VI a.C.) fue un matemático, teórico de la música y filósofo presocrático, miembro de la Escuela pitagórica. Nació en torno al año 500 a. C. en Metaponto, ciudad griega de la Magna Grecia situada en el Golfo de Tarento, al sur de la Italia actual. Fue uno de los Pitagóricos más renombrados de la época más temprana. Se le atribuyen tres importantes descubrimientos: La construcción de un dodecaedro inscrito en una esfera, el descubrimiento de la inconmensurabilidad y la determinación de las relaciones numéricas de las consonancias básicas a través de experimentos de sonido.

inconmensurables, como el caso de la diagonal y el lado del pentágono regular y la diagonal y el lado del cuadrado, como veremos a continuación:

2.2.1 El pentágono regular

Sin duda el pentágono regular fue una figura bastante familiar para los pitagóricos, incluso logramos vislumbrar su importancia si reconocemos que el símbolo que servía para el reconocimiento mutuo entre ellos era el pentagrama místico, es decir la estrella de cinco puntas formada por las diagonales del pentágono. La razón de la atracción pitagórica por esta figura no nos es bien conocida, pero una posible razón se puede evidenciar en las diferentes armonías y relaciones geométricas que en éste se encuentran. Una cualidad bastante particular es la relación áurea resultante de la razón entre la diagonal y el lado del pentágono, elementos para los cuales no existe una unidad común que los pueda medir a ambos, es decir que tales entes son inconmensurables; a continuación se presenta una demostración a dicha cuestión, recapitulada de González (2008, p.107):

Para comenzar, consideremos el pentágono regular $ABCDE$

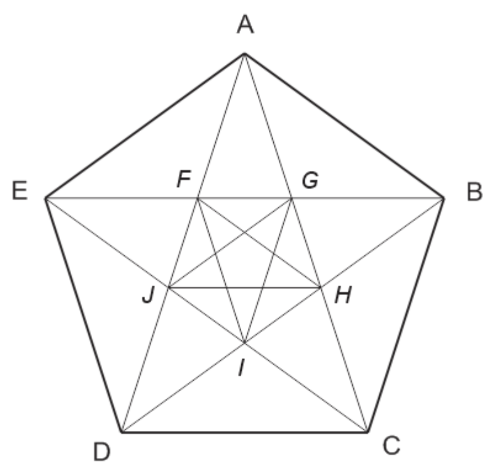


Figura 5 Pentágono regular $\boldsymbol{ABCDE}$

Supongamos que el lado $\overline{AB}$ y la diagonal $\overline{EB}$ son conmensurables, es decir que existe un segmento $\overline{XY}$ tal que:

$$m\,\overline{XY} \approxeq \overline{AB}$$

$$n\,\overline{XY} \approxeq \overline{EB}$$

Si observamos, $BCDF$ es un rombo, es decir:

$$\overline{FB} \approxeq \overline{DC} \approxeq \overline{AB}$$

Además $EFHJ$ también es un rombo, por lo que:

$$\overline{EF} \approxeq \overline{FH}$$

Ahora:

$$FH = EF = EB - FB$$

Pero como $\overline{FB} \approxeq \overline{AB}$, tenemos:

$$FH = EF = EB - AB$$

Además,

$$\overline{FG} = \overline{EB} - 2\overline{EF} = \overline{EB} - 2\left(\overline{EB} - \overline{AB}\right) = 2\overline{AB} - \overline{EB}$$

Por tanto

$$\overline{XY}|\overline{FH}^{4} \text{ y } \overline{XY}|\overline{FG}$$

De manera que si $\overline{XY}$ divide al lado y a la diagonal del primer pentágono, también divide a la diagonal y el lado del segundo pentágono. Dicho proceso puede ser reiterado indefinidamente[5], obteniendo cada vez pentágonos tan pequeños como se quiera, en los

[4] Empleamos para las demostraciones el símbolo | para denotar la relación divide, es decir, en este caso el segmento $\overline{XY}$ divide al segmento $\overline{FH}$

[5] Afirmamos que el proceso sigue indefinidamente, ya que si trazamos las cinco diagonales de un pentágono regular, estas determinan un segundo pentágono regular más pequeño, y a su vez las diagonales de este

cuales el segmento $\overline{XY}$ va a dividir la diagonal y el lado simultáneamente, lo cual es imposible.

2.2.2 El cuadrado

Indudablemente el cuadrado, un elemento geométrico sencillo de visualizar, fue uno de los puntos de quiebre para la teoría de los pitagóricos donde se consideró que no se podía nunca expresar el lado y la diagonal del cuadrado con la misma unidad de medida, es decir que tales magnitudes eran inconmensurables, lo que hoy conocemos como el problema de la inconmensurabilidad entre la diagonal y el lado del cuadrado. En la actualidad esta situación es un ejemplo claro que permite citar o mostrar dos magnitudes no conmensurables, pero para muchos no es tan conocida la deducción y menos la demostración[6] de la inconmensurabilidad entre tales magnitudes, situación que consideramos a continuación, recapitulando algunas ideas de (González, p.106):

Dado el cuadrado $ABCD$ (ver figura 6), vamos a mostrar que la diagonal y el lado son magnitudes inconmensurables.

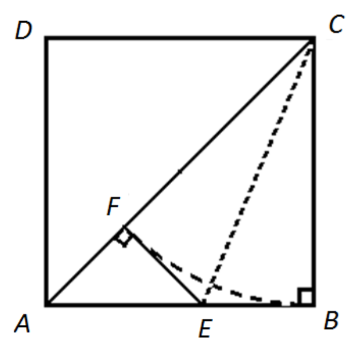


Figura 6 Cuadrado $\boldsymbol{ABCD}$

Supongamos que existe un segmento $\overline{HK}$ tal que divide a los segmentos $\overline{BC}$ (lado) y $\overline{AC}$ (diagonal), es decir

---

segundo pentágono forman un tercer pentágono regular que es más pequeño aún. Este proceso se puede repetir indefinidamente, obteniendo pentágonos que pueden llegar a ser "tan pequeños como se quiera”

[6] La demostración se desarrolla bajo reducción al absurdo, además se presenta en lenguaje moderno muy diferente a la escritura de ellos.

$$m\overline{HK} \cong \overline{BC}$$

$$n\overline{HK} \cong \overline{AC}$$

$$m\ y\ n\ numeros\ naturales$$

Ahora si consideramos la circunferencia con centro en C y radio $\overline{BC}$, es claro que

$$\overline{BC} \cong \overline{FC}$$

Además si tenemos en cuenta que E es punto exterior de la circunferencia, las rectas BE y FE son tangentes a la circunferencia, donde los $\overline{FE}\ y\ \overline{BE}$ están contenidos en ellas, por tanto

$$\sphericalangle CFE \text{ y } \sphericalangle CBE \text{ son rectos}$$

Luego, $\Delta FCE \cong \Delta BCE$ por el criterio de congruencia LLA establecido para triángulos rectángulos, así tenemos que:

$$\sphericalangle FCE \cong \sphericalangle BCE$$

Por el criterio de congruencia *LAL,* deducimos que:

$$\Delta FCE \cong \Delta BCE$$

y de manera particular,

$$\overline{FE} \cong \overline{BE}$$

Ahora a partir de la gráfica podemos ver que se tiene la interestancia, $A - F - C$, de la cual se deduce que:

$$\mathrm{AF} = \mathrm{AC} - \mathrm{FC}$$

como $\sphericalangle FAE \cong \sphericalangle CAB$, tenemos

$$\Delta EFA \sim \Delta CBA$$

Dado que $\overline{AB} \approxeq \overline{BC}$, tenemos que $\overline{AF} \approxeq \overline{FE}$, lo cual implica que ΔAFE es isósceles.

Además, tenemos la interestancia $A - E - B$, podemos decir que:

$$AE = AB - EB$$

que es equivalente a

$$AE = AB - FE$$

o también

$$AE = AB - AF$$

Por lo tanto $\overline{HK}|\overline{BC}$ y $\overline{HK}|\overline{AC}$, es decir que como HK cabe un número finito de veces en AC y BC, entonces también cabe un número entero de veces en FC, por lo que también cabe un número finito de veces en FA, como los triángulos ΔEFA y ΔCBA se comportan de la misma manera y tienen características semejantes el proceso anterior se continua indefinidamente, por lo que siempre existirá el segmento HK que los divide a ambos y este segmento siempre será menor que el lado, lo cual es imposible.

2.3 Dos posibles salidas al problema de la inconmensurabilidad

Ante la evidente imposibilidad de encontrar dos números enteros cuya relación fuera la misma que la existente entre la longitud de la diagonal y el lado de un pentágono o de la diagonal y el lado de un cuadrado (entre otros fenómenos de inconmensurabilidad), nos encargaremos de presentar a continuación dos interesantes métodos construidos por los pitagóricos para encontrar sucesiones de números racionales cuya relación se aproxima secuencialmente a la relación entre las cantidades de magnitud de los segmentos antes mencionados, de manera particular para el cuadrado[7].

2.3.1 Método de adición sucesiva

Este primer método, enunciado por Filep (1999), como el *método de adición sucesiva,* consiste en tomar un cuadrado de lado a y a partir de éste formar cuadrados cada vez más y más grandes, sumando al lado a la diagonal d y a la diagonal dos veces el lado (ver Figura 7)

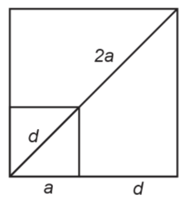


Figura 7 cuadrado de lado $\boldsymbol{a+d}$ se construye a partir del cuadrado de lado $\boldsymbol{a}$

Continuando el mismo proceso, formamos un cuadrado más grande a partir del cuadrado de lado $a+d,$ sumando al lado de este la diagonal $2a+d$ y a su diagonal dos veces su lado $a+d,$ para el cual obtenemos que tiene lado $3a+2d$ y diagonal $4a+3d$. (ver Figura 8).

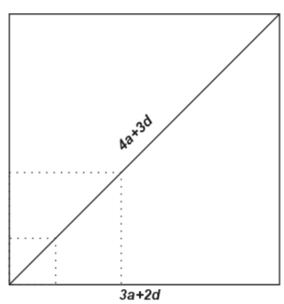


Figura 8 El cuadrado de lado $\boldsymbol{3a+2d}$ se construye a partir del cuadrado de lado $\boldsymbol{a+d}$

En este sentido, si seguimos aplicando el método reiteradamente tantas veces como queramos obtenemos cada vez cuadrados más y más grandes. Ahora si se calcula el valor

[7] En este documento se presentan los dos métodos ingeniados por lo pitagóricos para abordar de modo particular el problema de la inconmensurabilidad entre la diagonal y el lado del cuadrado, dejando abierta la posibilidad al lector del estudio del mismo problema para el caso del pentágono regular.

del cociente entre la diagonal y el lado de cada uno de los cuadrados que van surgiendo a partir de la aplicación del método, bajo la consideración de que $a = d = 1$[8], se obtienen los valores relacionados en la tabla 1 (en ella hemos usado notación moderna).

Tabla 2 Método de Adición Sucesiva

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{d}$	**Cociente** $\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{a}}$
$a_1 = 1$	$d_1 = 1$	$\frac{1}{1} = 1$
$a_2 = a + d$	$d_2 = 2a + d$	$\frac{3}{2} = 1{,}5$
$a_3 = 3a + 2d$	$d_3 = 4a + 3d$	$\frac{7}{5} = 1{,}4$
$a_4 = 7a + 5d$	$d_4 = 10a + 7d$	$\frac{17}{12} = 1{,}4166$
$a_5 = 17a + 12d$	$d_5 = 24a + 17d$	$\frac{41}{29} = 1{,}4137$
$a_6 = 41a + 29d$	$d_6 = 58a + 41d$	$\frac{99}{70} = 1{,}414285$
$a_7 = 99a + 70d$	$d_7 = 140a + 99d$	$\frac{239}{169} = 1{,}414201$
…	…	…
$a_n = a_{n-1} + d_{n-1}$	$d_n = 2a_{n-1} + d_{n-1}$	$\frac{2a_{n-1} + d_{n-1}}{a_{n-1} + d_{n-1}} \approx \sqrt{2}$

Se logra observar que cada vez que aplicamos el método al cuadrado inicial, el cociente entre la diagonal y el lado va tomando valores cercanos a $\sqrt{2}$ y evidentemente luego de aplicar el *n*-ésimo paso de aproximación, dicha razón se aproxima de manera rápida y

[8] Para el lector se puede presentar algo cofuso tomar el lado y la diagonal como 1, sin embargo, para los pitagóricos la unidad o mónada es el principio generador de la inteligibilidad de todas las cosas, por esto quizá tomaron los valores iniciales como 1. Además debemos tener en cuenta que sin importar los valores iniciales que se tomen, esta serie converge al mismo valor, por ejemplo si tomamos $a = 2$ y $d = 3$ o valores tan distantes como $a = 2$ y $d = 50$, lo cual es algo inimaginable para un cuadrado.

precisa a lo que hoy conocemos como $\sqrt{2}$. Pero además de acercarnos a dicho valor, este método nos permite establecer dos propiedades:

1. Si vemos para cada cuadrado que se construye, el cuadrado de la diagonal difiere 1 de la suma de los cuadrados de los lados, es decir:

$$d_n^2 = 2a_n^2 + 1, \text{ si } n \text{ es par}$$

   Por ejemplo para $n = 2$, tenemos: $d = 3$ y $a = 2$

$$3^2 = 2(2)^2 + 1 = 9$$

   y

$$d_n^2 = 2a_n^2 - 1, \text{ Si } n \text{ es impar}$$

   Por ejemplo para $n = 3$, tenemos: $d = 7$ y $a = 5$

$$7^2 = 2(5)^2 - 1 = 49$$

2. Además si observamos los valores que toma cada razón, luego de cada paso, estos se van aproximando por exceso y por defecto a este $\sqrt{2}$; por exceso con cada *n*-ésimo paso par y por defecto con cada *n*-ésimo paso impar (Ver Figura 9)

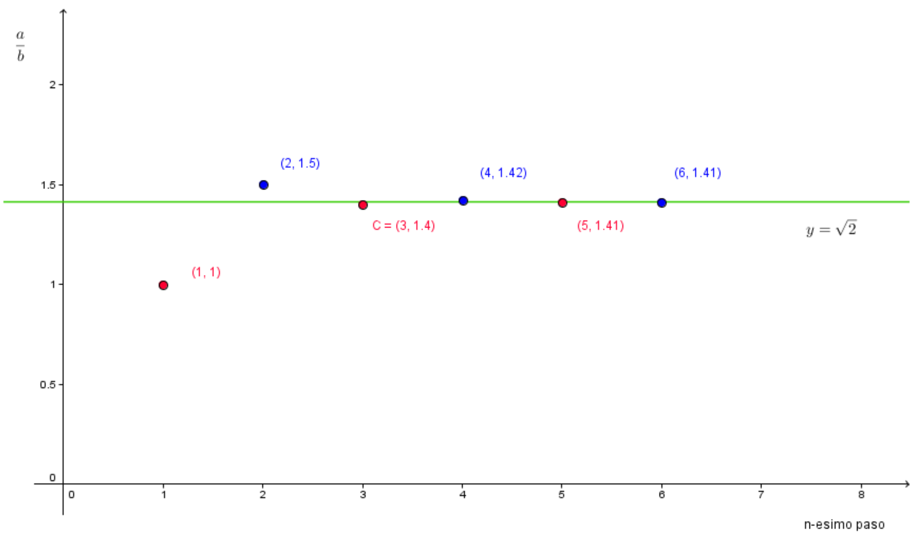


Figura 9 Aproximación por exceso (azul) y por defecto (rojo) a $\sqrt{\mathbf{2}}$.

2.3.2 Método de sustracción sucesiva

Este segundo método, declarado por Filep, (1999) como el *método de sustracción sucesiva,* consiste en tomar el mismo cuadrado de lado a, pero esta vez en lugar de sumar, se sustrae el lado a de la diagonal d; y a continuación se construye un cuadrado sobre el lado resultante (residuo), es decir un cuadrado de lado $d - a$. (Ver figura 10)

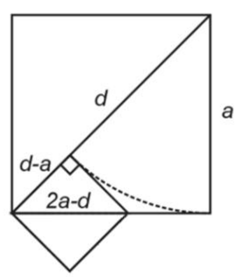


Figura 10 El segundo cuadrado se construye con el resto $\boldsymbol{d - a}$

Una vez obtenido este cuadrado, se le aplica nuevamente a este último el mismo proceso (ver Figura 11), es decir obtenemos un nuevo cuadrado de lado $3a - 2d$.

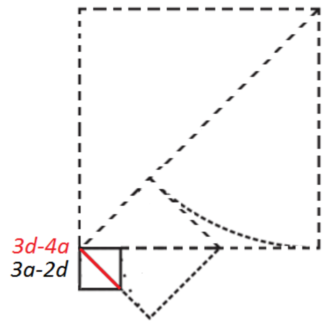


Figura 11 El tercer cuadrado se construye con el resto $\boldsymbol{3a-2d}$

En este sentido, si seguimos aplicando el método reiteradamente tantas veces como queramos obtenemos cada vez cuadrados más y más pequeños. Ahora si se calcula el valor del cociente entre la diagonal y el lado de cada uno de los cuadrados que se van obteniendo a partir de la aplicación del método, bajo la consideración de que $a = d = 1$, obtenemos lo reportado en la Tabla 2 (en ella hemos usado notación moderna).

Tabla 3 Método de Sustracción Sucesiva

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{d}$	**Cociente** $\boldsymbol{\frac{d}{a}}$
$a_1 = 1$	$d_1 = 1$	$\frac{1}{1} = 1$
$a_2 = \lvert d - a\rvert$	$d_2 = \lvert 2a - d\rvert$	$\frac{1}{0} = \ Ind.$
$a_3 = \lvert 3a - 2d\rvert$	$d_3 = \lvert 3d - 4a\rvert$	$\frac{1}{1} = 1$
$a_4 = \lvert 5d - 7a\rvert$	$d_4 = \lvert 10a - 7d\rvert$	$\frac{3}{2} = 1{,}5$
$a_5 = \lvert 17a - 12d\rvert$	$d_5 = \lvert 17d - 24a\rvert$	$\frac{7}{5} = 1{,}4$
$a_6 = \lvert 29d - 41a\rvert$	$d_6 = \lvert 58a - 41d\rvert$	$\frac{17}{12} = 1{,}4166$
…	…	…
$a_n = \lvert -a_{n-1} + d_{n-1}\rvert$	$d_n = \lvert 2a_{n-1} - d_{n-1}\rvert$	$\frac{\lvert 2a_{n-1} - d_{n-1}\rvert}{\lvert -a_{n-1} + d_{n-1}\rvert} \approx \sqrt{2}$

Podemos observar que el valor que toma la diagonal luego del *n*-ésimo paso impar $(n \geq 3)$, resulta ser negativo. Algo similar ocurre con los valores del lado luego del *n*-ésimo paso par $(n \geq 4)$. Dado que en el contexto geométrico no podemos involucrar magnitudes negativas, posiblemente los pitagóricos optaron por restar el menor valor del mayor en cada uno de esto casos; por tanto al emplear la notación moderna para encontrar los valores de a_n y d_n, tomamos el valor absoluto de las magnitudes involucradas. De esta manera, aquí también, luego de aplicar el método reiteradamente, la sucesión de los cocientes entre la diagonal y el lado del cuadrado se aproxima alternadamente a lo que hoy conocemos como $\sqrt{2}$; de hecho, a partir del tercer término o cociente, cada uno de los siguientes coincide con las cocientes encontrados a partir del método de adición sucesiva.

Capítulo 3. ¿QUÉ RELACIÓN TIENEN LA *ANTANAIRESIS* Y LA *ANTIPAIRESIS*?

En este tercer capítulo, en primer lugar, recapitulamos las definiciones de las nociones matemáticas "*antanairesis*" y "*antipairesis*" y establecemos ciertas semejanzas y diferencias que identificamos al estudiar algunas posturas teóricas frente a estas nociones (de Guzmán, 1986; Evans, 1927; Filep, 1999; Fowler, 1979; González, 2008; Grattan-Guinness, 1996; Thorup, 1992). En seguida, presentamos una única definición para ambas nociones, construida a partir de aquellas definiciones, e incluimos un ejemplo a través del cual evidenciamos nuestra comprensión de la "antanairesis" como el comportamiento de un proceso e ilustramos el proceso mismo. En tercer lugar, analizamos como caso particular los procesos utilizando como magnitudes el lado y la diagonal de un cuadrado y el lado y la diagonal de un pentágono, las cuales son magnitudes inconmensurables. En cuarto lugar tratamos de observar algunas diferencias entre *antanairesis*, las definiciones de razón y proporción (definiciones 3 y 5 del Libro V de *Elementos*) y el algoritmo de Euclides. Y en quinto, y último lugar, la relación que tiene la *antanairesis* con los métodos de adición y sustracción sucesiva planteados en el capítulo 2.

3.1 La antanairesis y la *antipairesis*

Al analizar diversas fuentes teóricas encontramos que la palabra "*antipairesis*" es la mayormente utilizada por los historiadores, quienes convergen a la misma idea: la *antipairesis* se refiere al proceso de eliminación continua entre magnitudes del mismo tipo. Así, Thorup (1992, pp. 4-5) la define como el proceso de tomar dos magnitudes y restar la menor de la mayor; una definición no muy alejada de la que nos presenta Fowler

(1979 p. 817), quien asocia la palabra *antipairesis* a la secuencia que resulta de restar dos magnitudes sucesivamente, la mayor de la menor. Análogamente a estas dos definiciones, Grattan-Guinness (1996, p. 366) presenta la definición a esta palabra como la resta sucesiva de la magnitud menor de la mayor, siendo ambas magnitudes del mismo tipo. Estas tres definiciones nos permiten ver la *antipairesis* como un proceso que involucra el trabajo con "magnitudes" homogéneas, idea que se puede relacionar con la presentada por González (2008, p.117), quien refiere la "antiphéresis" como un proceso basado en la sustracción sucesiva. Este autor adicionalmente, menciona que la *antipairesis* es similar al algoritmo aritmético de Euclides para el cálculo del máximo común divisor, expuesto en la proposición 2 del Libro VII de *Elementos*, el cual alude a un proceso desarrollado para números, pero no para magnitudes.

Pero la *antipairesis* no solo es definida por estos autores como un proceso de sustracción continua entre magnitudes; algunos de ellos ven la *antipairesis* también como una razón. Por ejemplo Fowler (1979, p. 820) afirma que la razón entre dos números o magnitudes se puede definir a partir de su *antipairesis* (si la vemos como el proceso continuo de sustracción), además emplea esta definición para establecer una relación de igualdad entre razones al aseverar que "dos razones son iguales si tienen la misma *antipairesis*"; idea que incluso se puede establecer no solo para dos sino para más razones o magnitudes, tal como sugiere Evans (1927, p. 355) al afirmar que unas magnitudes son proporcionales a otras cuando tienen la misma *antipairesis*. En este sentido además de poder ver la *antipairesis* como un proceso de sustracción continua entre dos magnitudes homogéneas, también la podemos ver como un proceso que nos permite observar la proporcionalidad o igualdad entre magnitudes.

Gracias al estudio de las fuentes, particularmente Filep (s. a.), de Guzmán (1986) y Evans (1927), observamos que la idea de *antanairesis* no se encuentra muy lejana de esta última (*i.e. antipairesis*). Filep (p. 2) define la *antanairesis* como un método que establece una conexión entre la medida y la geometría a partir de sustracciones sucesivas (es decir, restando la menor de la mayor de dos magnitudes), siendo este un método empleado por los Griegos para encontrar el máximo común divisor de dos "números" positivos enteros, lo cual se conoce hoy como el algoritmo de Euclides. Esta definición sumada a la de de Guzmán (p. 26) (quien la muestra como el proceso de cancelación de una y otra magnitud para encontrar una unidad común que las mida a ambas, lo cual no es más que la versión geométrica del algoritmo de Euclides para la obtención del máximo común divisor de dos números), nos permite ver la estrecha por no decir íntima relación que existe entre la *antanairesis* y la *antipairesis*. Pero si aun así nos quedan dudas de la relación entre estas palabras, podemos dilucidarlas a partir de la elocuente frase que nos muestra Evans quien establece una gran similitud entre estas dos nociones cuando manifiesta que: "la *antanairesis* es un sinónimo aristotélico de la palabra *antipairesis*, usada por Euclides" (1927, p.355).

En este sentido, a partir del análisis realizado a cada uno de los documentos, logramos concluir que las dos palabras en cuestión se refieren al mismo procedimiento, sin embargo argumentamos que existe una diferencia entre el algoritmo de Euclides y la definición 5 del Libro V de los *Elementos,* lo cual veremos más adelante.

Por el momento podemos definir la *antipairesis* o *antanairesis* como el proceso de resta sucesiva entre dos magnitudes A y B, siendo A mayor que B, en el cual se resta la menor magnitud de la mayor hasta encontrar una magnitud común que las mida a ambas (cuando A y B son conmensurables) o proseguir el proceso de manera infinita (cuando A y B son inconmensurables). Adicionalmente este proceso nos ayuda a establecer cuándo, dadas cuatro magnitudes A, B, C y D (siendo A mayor que B y C mayor que D), estas son o no proporcionales si presentan el mismo comportamiento, es decir, si se cumple que:

- El número de veces que se puede restar B de A es el mismo número de veces que se puede restar D de C
- Si después de restar la misma cantidad de veces (primer ítem) existe un resto o un sobrante en los dos procesos o el resto es cero en ambos.

- El número de pasos debe ser el mismo (siempre y cuando las magnitudes sean conmensurables, de lo contario el número de pasos es infinito)

Así, si el comportamiento de los dos procesos (es decir, la *antipairesis* o *antanairesis* de ambos procesos) es el mismo, se dice que las magnitudes son proporcionales.

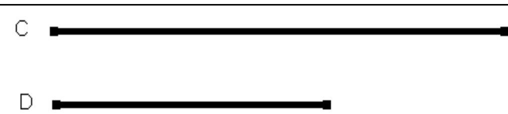
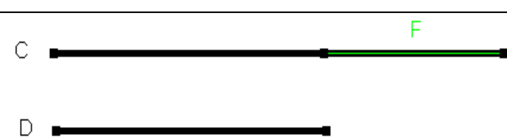
De esta manera podemos observar que además de poder encontrar una medida en común entre dos magnitudes haciendo uso de la *antipairesis* o *antanairesis*, otra utilidad fundamental que se puede obtener a partir de este proceso es conocer si dadas unas magnitudes estas son proporcionales o no, sin la necesidad de conocer la cantidad de magnitud ni la unidad de medida.

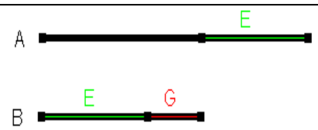
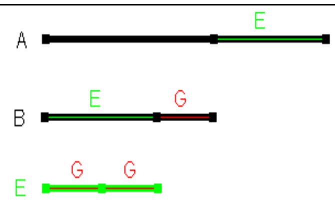
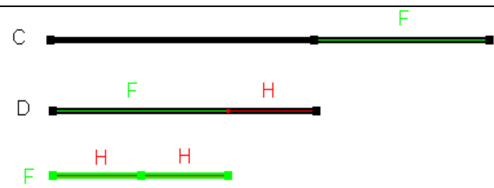
Para observar el proceso de *antanairesis* o *antipairesis*, vamos a mostrar tres ejemplos que involucran magnitudes conmensurables e inconmensurables.

3.1.1 Ejemplo 1

En primer lugar, dados cuatro segmentos A, B, C y D (ver la tabla), siendo A mayor que B y C mayor que D, el siguiente es un proceso de *antanairesis* (o *antipairesis*).

Tabla 4 Ejemplo 1

Nº de pasos	**Proceso 1**	**Proceso 2**	**Construcción**
0			Dados los segmentos A, B, C y D
1			B y D se pueden restar solo una vez de los segmentos A y C, respectivamente dejando un resto E

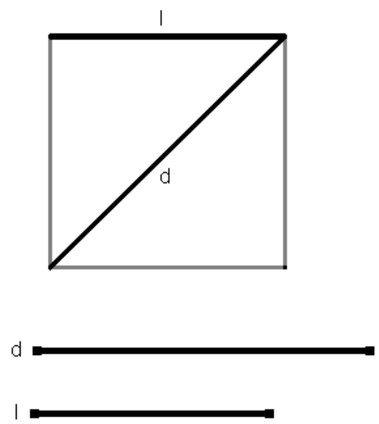
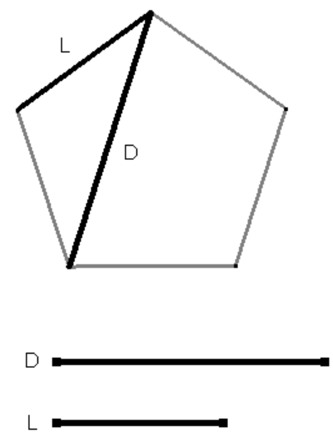
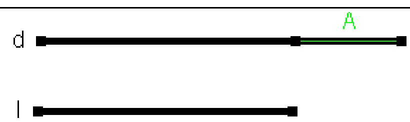
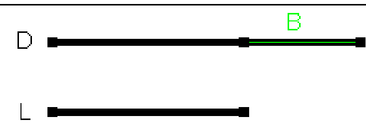
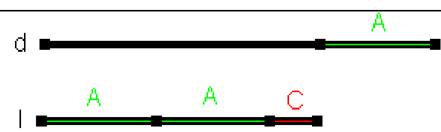
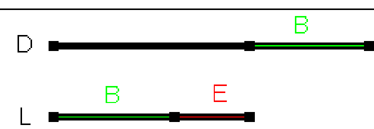
			y F en cada caso
2			Los segmentos E y F se pueden restar una vez de los segmentos B y D respectivamente, quedando los restos G y H
3			Los segmentos G y H se pueden restar de los segmentos E y F dos veces respectivamente y en ambos casos el resto es cero

En este ejemplo podemos ver que se cumple el primer ítem ya que en cada uno de los pasos (1, 2 y 3) se restó el mismo número de veces, ahora en los pasos 1 y 2 se cumple el segundo ítem de la definición, ya que en todos los pasos existía un resto en particular en el tercer paso en los dos procesos el resto fue cero, y además para los dos procesos se desarrollaron exactamente tres pasos. En conclusión los cuatro segmentos son proporcionales; esto lo podemos asegurar sin conocer cuál es la cantidad de longitud del segmento G en el proceso 1 y el segmento H en el proceso dos, por simple visualización se puede notar que el segmento H es mayor que el segmento G

3.1.2 Ejemplo 2

Para nuestro segundo ejemplo vamos a aplicar este mismo procedimiento de *antanairesis* a unas magnitudes que como ya vimos en el capítulo 2 son inconmensurables, es el caso del lado y la diagonal de un cuadrado y el lado y la diagonal de un pentágono:

Tabla 5 Ejemplo 2

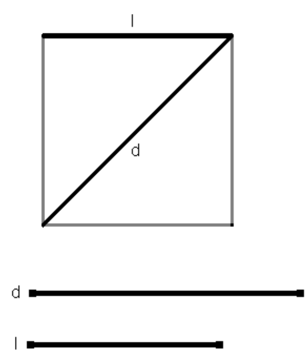
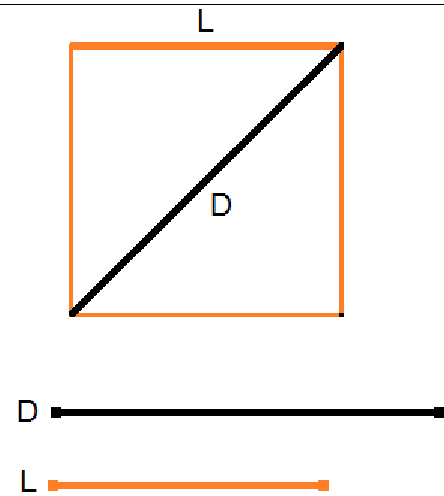
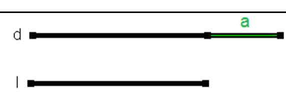
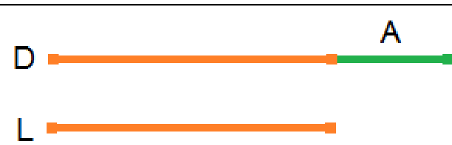
Nº de pasos	**Proceso 1: lado (l) y diagonal (d) de un cuadrado**	**Proceso 2: lado(L) y diagonal (D) de un pentágono**	**Construcción**
0			Dados el lado y la diagonal de un cuadrado para el proceso 1 y el lado y la diagonal de un pentágono para el proceso 2
1			Si se resta el lado de la diagonal una vez se obtiene un resto A para el cuadrado y uno B para el pentágono
2			El resto A cabe dos veces en el segmento l y el resto B cabe una vez en el segmento L

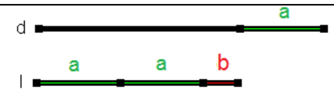
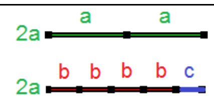
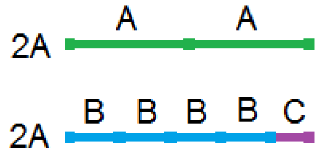
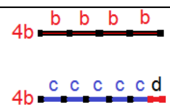
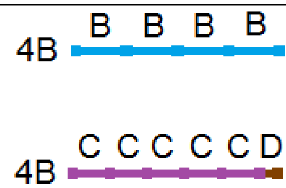
En este procedimiento se puede decir que las magnitudes escogidas no son proporcionales ya que en el primer paso se cumplen los tres ítems de la definición de *antipairesis*, pero en el paso 2 no se cumple el segundo ítem ya que para el proceso 1 del cuadrado se pueden restar dos veces y para el proceso 2 del pentágono solo se puede hacer una vez.

3.1.3 Ejemplo 3

Para nuestro tercer ejemplo, aplicaremos este proceso de *antanairesis* a los lados y diagonales de dos cuadrados de lados diferentes, sabiendo de antemano que la relación entre la diagonal y el lado del cuadrado es inconmensurable.

Tabla 6 Ejemplo 3

Nº de pasos	**Proceso 1**: lado (l) y diagonal (d) de un cuadrado de lado 5	**Proceso 2**: lado(L) y diagonal (D) de un cuadrado de lado 7	**Construcción**
0			Dados el lado y la diagonal de un cuadrado de lado 5 y uno de lado 7
1			Si se resta el lado de la diagonal en cada cuadrado, se obtiene un resto a para el cuadrado de lado 5 y un resto A para el cuadrado de lado 7

2			El resto a cabe dos veces en el segmento l, al igual que el resto A en L, dejando un resto b y B respectivamente.
3			b cabe 4 veces en $2a$, al igual que B en $2A$, obteniendo un resto c y C en cada caso.
4			c mide 5 veces al segmento $4b$ igual que C a $4B$, pero dejan un resto d y D en cada caso.
	…	…	…

Como vimos en el capítulo 2, si seguimos aplicando el mismo proceso de sustracción a las magnitudes lado y diagonal del cuadrado este no va a terminar ya que tales magnitudes son inconmensurables, es decir que no encontraremos una unidad común que las mida a ambas. Pero si observamos el proceso de *antanairesis* en cada cuadrado vemos que ambos presentan el mismo comportamiento en cada paso, es decir a pesar de que no encontraremos una unidad de medida común entre las magnitudes involucradas si aplicamos la definición de *antipairesis* que establecimos sabemos que tales magnitudes son proporcionales, es decir:

$$\frac{d}{l} = \frac{D}{L}$$

3.2 Algunas diferencias entre *antanairesis*, las definiciones de razón y proporción (Definiciones V, 3 y 5, de *Elementos*) y el algoritmo de Euclides.

A continuación se muestran algunas diferencias que presenta la *antanairesis* frente a algunos conceptos relacionados con éste, por un lado con las definiciones de razón y proporción dadas en *elementos* (Definiciones *V, 3* y *V, 5* respectivamente) y por el otro con el algoritmo de Euclides.

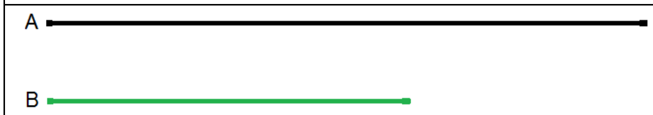
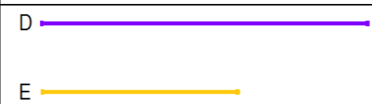
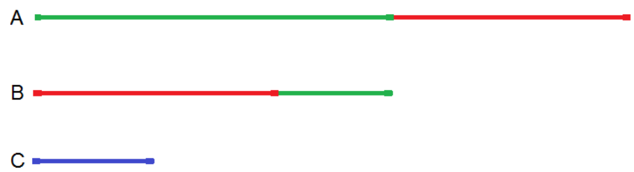
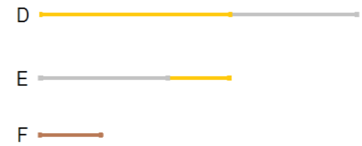
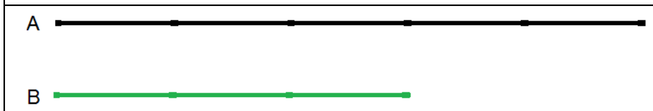
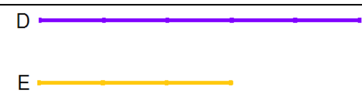
3.2.1 Diferencia entre la *antanairesis* y las definiciones de razón y proporción.

Vamos a observar algunas diferencias entre *antanairesis*, el Algoritmo de Euclides y las definiciones de razón y proporción (definiciones 3 y 5 del Libro V de *Elementos*). Para ello inicialmente presentamos las definiciones 3 y 5 del Libro V de *Elementos,* tomadas de (Puertas, 1994):

> Definición V, 3: Una razón es determinada relación respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.
>
> Definición V, 5: Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.

Si vemos la definición de Fowler (1979, p. 820) donde la razón entre dos números o magnitudes se puede definir a partir de su *antipairesis* y la definición de razón dada en Elementos y la comparamos con la definición de *antipairesis*, observamos que esta última nos permite encontrar la medida común entre ambas, mas no necesariamente la relación respecto al tamaño entre las dos magnitudes, por ejemplo dados dos segmentos A y B, y otros dos D y E, apliquemos el proceso de *antipairesis* a cada par de segmentos:

Tabla 7 Magnitudes Proporcionales

***antipairesis* entre A y B**	***antipairesis* entre D y E**
	
	
	

Desde la *antipairesis* entre A, B y D, E observamos que las parejas de magnitudes son proporcionales (ya que presentan el mismo comportamiento), pero si establecemos la igualdad entre las razones y las comparamos desde la definición de razón dada en *elementos,* V, 3, deberíamos obtener la misma relación en cada caso, es decir la misma unidad de medida a partir de la *antipairesis,* lo cual queda descartado a simple vista, ya que el segmento C es mayor que el segmento F.

Ahora si damos una mirada a la definición que establecimos previamente para la *antanairesis* o *antipairesis* en relación con la definición de proporción de *Elementos,* observamos que ambas se emplean para intentar establecer una relación de proporcionalidad entre cuatro magnitudes A, B, C y D. A diferencia que con la primera realizamos sustracciones sucesivas entre A, B con $A > B$ y C, D con $C > D$, buscando que en cada caso el comportamiento de la *antanairesis* de cada par de magnitudes sea el mismo (condición suficiente para establecer la proporcionalidad entre dichas magnitudes), mientras que con la segunda se realizan adiciones sucesivas a partir de la construcción de equimúltiplos entre las magnitudes correspondientes.

3.2.2 Diferencia entre *antanairesis* y el algoritmo de Euclides

Ahora, en relación con las definiciones de *antipairesis* que proponen González (2008), Filep (s. a.) y de Guzmán (1986), quienes la relacionan con el algoritmo de Euclides, cabe destacar que si bien ambos procesos se basan en restas sucesivas para encontrar una medida común (el M.C.D. en el algoritmo de Euclides), la *antipairesis* se utiliza para cualquier par de magnitudes (homogéneas) sin necesidad de conocer la cantidad de magnitud, mientras que el algoritmo de Euclides es un caso particular de la *antipairesis* en el cual se trabaja con los números naturales (los cuales nos permiten expresar cantidades de magnitud). De esta manera si queremos ahondar en el tema, en *Elementos* podemos encontrar un estudio más detallado sobre la *antipairesis*; en el libro VII para los números y en el libro X para las magnitudes en general.

3.3 ¿Tiene alguna relación la *antanairesis* con los métodos de adición y sustracción sucesiva?

Finalmente, veamos si existe alguna relación entre la *antanairesis* y los métodos de adición y sustracción sucesiva planteados en el capítulo 2.

Por un lado si observamos el método de sustracción sucesiva y lo comparamos con el método de *antanairesis* o *antipairesis*, podemos concluir que en ambos casos lo que se busca es encontrar una medida común entre un par de magnitudes A y B (el lado y la diagonal de un cuadrado para el caso del método de sustracción sucesiva), es decir que el método empleado en el cuadrado para encontrar la relación entre la diagonal y su lado no es nada más y nada menos que la aplicación del método de *antanairesis* para magnitudes o algoritmo de Euclides para números. Es aquí donde cobra sentido el que no podamos encontrar un par de magnitudes cuya razón se aproxime a la relación entre la diagonal y el lado del cuadrado, dado que no podemos encontrar esa unidad de medida común que las mida a las dos.

Ahora si tomamos el método de adición sucesiva, logramos ver que lo que se hace es construir múltiplos de cada una de las magnitudes involucradas en el caso del cuadrado (lado y diagonal), es decir buscamos encontrar una medida común entre las dos a partir de sumas sucesivas (el M.C.M en el fondo), cada vez más y más grande, a diferencia de la *antanairesis* que igualmente busca esa medida en común pero cada vez más y más pequeña a partir de restas sucesivas. Así podemos ver que el método de adición sucesiva nos lleva a encontrar un múltiplo común entre dos magnitudes (o números de manera particular). En pocas palabras gracias al método de adición sucesiva podemos encontrar el M.C.M entre dos magnitudes, mientras que con el método de sustracción sucesiva o *antanairesis* encontramos un divisor común o el M.C.D entre las magnitudes; en este sentido estos métodos difieren.

Capítulo 4. RELACIÓN HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS-EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En este capítulo pretendemos dar cuenta de algunos aportes, aprendizajes y logros que obtuvimos al realizar el estudio de ciertos documentos históricos en los cuales se expone el tratamiento que hicieron los pitagóricos para aproximarse a una razón que no se podía expresar como el cociente de dos números enteros. Para organizar esta información tomamos como referencia el documento de Guacaneme (2011) quien sugiere preguntarse *Por qué* y *Para qué* un profesor de matemáticas estudia la Historia de las Matemáticas y cómo a partir de esto se fortalece el conocimiento del profesor.

Sin duda los aportes que se muestran en este capítulo nos permitieron evidenciar algunas transformaciones en la concepción de diferentes objetos matemáticos, así como el desarrollo de algunas competencias en matemáticas y en general para nuestro desempeño docente. Para el análisis de estos aportes se tienen en cuenta diferentes categorías como las visiones que se tenían de la actividad matemática y de las matemáticas, su diferencia y las modificaciones observadas gracias al estudio que realizamos.

Inicialmente la actividad matemática la considerábamos como la acción que realizaban los matemáticos en su quehacer cotidiano, sin embargo en el transcurso de este trabajo comprendimos que esa actividad matemática no solo comprende las matemáticas en sí, sino que también es inherente a dos procesos como el planteamiento de problemas y el reflexionar sobre ellos, los cuales a su vez nos conllevan a una serie de actividades como describir, identificar, explicar, relacionar, generalizar, resolver, argumentar y demostrar, acciones que fueron evidentes a lo largo de nuestro estudio.

Un ejemplo simple de esto fue tratar de comprender lo expuesto en los documentos (en especial los métodos pitagóricos) y las demostraciones que estos conllevaban, en seguida plantearnos algunos posibles problemas que estos implicaran (como el uso de las magnitudes diagonal y lado del cuadrado en la búsqueda de la razón que nos aproximara a ese valor inconmensurable de su relación y el planteamiento de éstas en notación algebraica moderna para su comprensión y posterior generalización) para luego dar una respuesta a éstos relacionando los conceptos e ideas trabajadas y así proponer una estructura que vislumbrara nuestra mirada al respecto y lograr explicar las conclusiones a las que llegamos.

La actividad matemática es una actividad humana que está evolucionando cada vez más y que se genera por distintas razones como curiosidad, diferentes retos, desarrollar distintos placeres, como actividad recreativa, como parte de la matemática misma o sencillamente para resolver problemas de otras disciplinas.

El simple hecho de intentar describir los métodos generó en nosotros una actividad matemática de la cual ni siquiera éramos conscientes que la estábamos desarrollando y tampoco identificábamos esa diferencia entre hacer matemáticas y las matemáticas mismas. Para encontrarnos con este resultado comprendimos que las matemáticas son una estructura constituida por diferentes objetos que poseen algunas propiedades conocidas como definiciones, axiomas y teoremas (elementos matemáticos) que nos llevan a algunos resultados (a través de la actividad matemática), en este sentido lo que podemos ver es que la actividad matemática depende de las matemáticas, es decir, que las matemáticas son utilizadas para desarrollar esa actividad matemática y en nuestro caso podemos identificar las matemáticas en concepciones como inconmensurabilidad, objetos geométricos, magnitud, máximo común divisor, proporción, razón, sucesión y otras que fueron inevitablemente utilizadas en nuestra actividad matemática.

Esa actividad matemática también nos ayudó a contemplar la belleza que poseen las matemáticas y que mucha gente no logran comprender, para nuestro caso al estudiar y analizar los resultados de cada uno de los métodos encontramos que ambos generan, en esencia, una misma sucesión de números racionales, sucesión a través de la cual se va capturando esa razón inexistente para los pitagóricos, incluso, para nosotros. Pero un aspecto que aún más nos llamó la atención fue observar cómo ambos procesos que se desarrollaban de una manera ambigua dirigiéndonos por un lado hacia lo infinitamente grande y por el otro hacia lo infinitamente pequeño terminaron aproximándonos a una misma razón que cada vez con gran exactitud nos acercaba más ese intangible $\sqrt{2}$.

Por otro lado luego de comprender el verdadero sentido del método de *antipairesis* logramos observar que podemos encontrar proporciones sin la necesidad de conocer la cantidad de magnitud o sin identificar una unidad de medida, simplemente comparando las magnitudes o aplicándole el método a cada razón. Así como nosotros identificamos aspectos interesantes y bellos en las matemáticas, podemos asegurar que en muchos otros trabajos relacionados con la Historia de las Matemáticas estos aspectos también están expuestos y la tarea de nosotros como profesores de Matemáticas es identificar esa belleza y tratar de llevarla o cultivarla en nuestros estudiantes.

Así como se modificó esa concepción de matemáticas y actividad matemática, se generó una visión más amplia del significado que tiene la Historia de las Matemáticas para un profesor. En un comienzo reconocíamos la Historia de las Matemáticas como parte importante del conocimiento del profesor, éramos conscientes de que existía esa parte importante pero no de cual era; solo fue en el transcurso de nuestro trabajo donde tratando de observar esa importancia logramos contemplar lo beneficiosa que resulta para nuestra profesión docente ya que nos permitió observar la importancia de las Matemáticas y de la actividad matemática en una cultura y cómo la historia ayuda al profesor de matemáticas a adquirir diferentes visiones de distintas concepciones y/o nociones de los objetos matemáticos, reconociendo la naturaleza del objeto, su evolución a lo largo de la historia y su utilidad; esto implica que el profesor disponga de distintas estrategias para la enseñanza de tal objeto e implícitamente pueda identificar la dificultad que puedan presentar los estudiantes a la hora de comprender tal concepto, así podemos sugerir con nuestro trabajo una forma de abordar el problema de los números irracionales en el aula y la estrecha relación que existe entre estos y los racionales (o viceversa) en un contexto geométrico, diferente al tradicional, es decir, haciendo uso del Teorema de Pitágoras.

Como mencionamos anteriormente trabajamos distintos objetos matemáticos que sabíamos que existían y eran de vital importancia para la actividad matemática pero no nos habíamos detenido a pensar por qué son importantes; ese es el caso por ejemplo de la inconmensurabilidad y la relación con el algoritmo de Euclides. Para hallar el máximo común divisor para números, utilizábamos este procedimiento pero lo trabajamos simplemente como un algoritmo usado por ejemplo para la simplificación de números fraccionarios o la factorización de expresiones algebraicas, o en el caso de la inconmensurabilidad y la irracionalidad, conocíamos algunos números irracionales por ejemplo $\sqrt{2}$, el cual identificábamos como la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 y que en este momento deja de ser esa longitud para convertirse en una razón entre magnitudes inconmensurables.

Por otro lado este trabajo ayudó a cultivar en nosotros un lenguaje propio de las matemáticas lo que implica una mayor seguridad para argumentar en torno a algunos elementos matemáticos ya que, de alguna manera, comprendimos el significado de distintas nociones y sus diferencias como por ejemplo las nociones de longitud y magnitud o conmensurable e inconmensurable, nociones que fueron de vital importancia en el trabajo y requirieron un estudio con más detalle.

También podemos desatacar que este trabajo desarrolló en nosotros algunas competencias (actitudes y aptitudes) que pueden ser de gran utilidad no solo en nuestra labor como docentes de matemáticas sino como profesionales investigadores. De estas competencias adquiridas podemos destacar varias, por ejemplo la *descentración,* significa pararse en otro centro o en otras palabras asentarse en el contexto descrito por cada situación, en este caso tomar las ideas planteadas en los documentos históricos como las que tenían los pitagóricos en relación a la inconmensurabilidad y para quienes no existían los números irracionales, o dicho en palabras modernas, quienes identificaban los números enteros a partir de 2. Sin duda, estas son ideas sencillas pero que en los documentos pueden aclarar muchas dudas para su total comprensión o por el contrario general ambigüedades en su interpretación debido a la no descentralización por parte del lector.

Otro ejemplo de estas competencias es la adquisición de habilidades de lecto-escritura, la cual es una habilidad sumamente importante para un profesor ya que al identificar la estructura de un documento y las ideas centrales nos facilitan la comprensión general de este, acciones necesarias con las que poco a poco nos fuimos encontrando en la lectura de los documentos con los que iniciamos nuestro trabajo, los cuales no estaban en español y requerían de nuestra comprensión.

Así mismo escribir no fue tarea fácil pero logramos producir nuestro propio discurso basándonos en discursos existentes, por lo cual para lograr entender el contenido de los documentos fue necesario buscar diversas fuentes bibliográficas o herramientas teóricas para cubrir cuestiones y dudas que se desprendían del estudio inicial, lo que generó en nosotros un espíritu investigativo y además la necesidad de usar distintas herramientas de software que no conocíamos y que pueden ser útiles en nuestra labor, particularmente el uso de EndNote y de CorelDraw.

A partir de nuestra experiencia podemos decir que el estudio particular de un tema de la historia conlleva a un estudio general, lo que implica el estudio de nuevas temáticas y la comprensión de nuevas nociones y concepciones, además de preguntarse si lo que se sabe y lo que se conoce es suficiente para el estudio o si se deben hacer algunas transformaciones a los conocimientos.

Uno de los aportes importantes que cabe resaltar es el compartir conocimiento con la comunidad académica, ya que esto nos aporta a nuestra formación docente en aspectos esenciales como la comunicación de resultados de matemáticas, la inclusión a diferentes grupos de investigación y las observaciones de diferentes personas que aportan al estudio. Este compartir conocimiento puede reflejarse con nuestra participación en la décimo tercera Semana del Educador Matemático en el 2012-1 desarrollada en la Universidad Pedagógica Nacional y la participación en el 13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa convocado por ASOCOLME en la Universidad de Medellín y la Universidad de Antioquia en el 2012-2.

En general el estudio realizado de un tema de las matemáticas desde una perspectiva histórica nos ayudó a fortalecer el valor de la historia en la profesión docente, ya que nos permite reflexionar y observar cómo los conocimientos u objetos matemáticos son el producto de su evolución y a su vez no pueden ser ajenos al conocimiento y papel del profesor ya que hoy en día muchos de estos objetos se toman como dados y en ocasiones no nos detenemos a pensar si los estudiantes comprenden o no su verdadero significado. En este sentido una posible manera de abordar los conceptos matemáticos puede ser desde su origen y su desarrollo histórico ya que muchos de ellos trabajan contextos numéricos, algebraicos y geométricos que pueden coadyuvar a modificar los conocimientos en los estudiantes de una manera significativa y a su vez lograr una mayor comprensión de los temas tratados.

Capítulo 5. CONCLUSIONES

En este capítulo de conclusiones inicialmente buscamos dar respuesta de manera sucinta a las preguntas que fueron objeto de nuestro estudio y a continuación presentamos algunas de las reflexiones a las que llegamos a partir de nuestro estudio desde tres miradas distintas.

Para comenzar, en la descripción del problema del capítulo 1 buscamos respondernos a interrogantes como:

- ¿En qué consisten los métodos pitagóricos de adición sucesiva y sustracción sucesiva?
- ¿Qué relación tienen los métodos de *antanairesis* y *antipairesis* entre sí y con los métodos de adición sucesiva y sustracción sucesiva?
- ¿Qué utilidad tiene el estudio de los métodos pitagóricos en nuestra formación como docentes de matemáticas?

En cuanto a la primera cuestión reconocemos que tanto el método de adición sucesiva como el método de sustracción sucesiva fueron procedimientos empleados en la época dorada griega para obtener en esencia una razón entre magnitudes conmensurables que aproximara de manera muy precisa a esa razón intangible entre magnitudes inconmensurables que establecía la relación entre la diagonal y el lado de un cuadrado, los cuales procedían en direcciones totalmente opuestas; el primero a través de la construcción de magnitudes cada vez más y más grandes y el segundo mediante magnitudes cada vez más y más pequeñas.

En relación al siguiente interrogante, logramos establecer que las palabras *antanairesis* y *antipairesis,* un tanto extrañas para nosotros, se refieren de forma conjunta a un mismo procedimiento aplicado a magnitudes o números para encontrar una unidad común de medida entre ellos, para ello el método de sustracción sucesiva y el algoritmo de Euclides son fieles ejemplos en cada caso.

Y en cuanto a la tercera inquietud se abre el panorama para observar las bondades del estudio de la historia de las matemáticas por parte los docentes de matemáticas que van desde la preparación para la investigación a través del planteamiento de problemas y la reflexión sobre ellos, pasando por el estudio descentralizado e interpretación de fuentes que soporten el discurso y que permitan obtener diferentes visiones de un mismo concepto o idea matemática a través de la historia para su posterior análisis en el contexto educativo y llegando hasta el reconocimiento de la importancia que generan los nuevos elementos histórico-matemáticos, muchas veces no conocidos por muchos, que dan pie para compartirlos con la comunidad educativa a nivel local o nacional.

Ahora, presentamos algunas reflexiones que giran en torno a tres miradas diferentes estrechamente relacionadas con los objetivos planteados inicialmente; desde las traducciones, desde lo matemático y desde la relación Historia de las Matemáticas-Educación Matemática:

Desde las traducciones

Indudablemente el disponer de documentos en otros idiomas hace que el trabajo sea más enriquecedor ya que además de que estamos incorporando nuevos conocimientos matemáticos a nuestra formación, generamos habilidades de lecto-escritura en otras lenguas que fortalecen nuestras competencias profesionales.

Somos conscientes que las traducciones realizadas de los documentos están basadas en nuestros conocimientos y habilidades adquiridas a lo largo de nuestra formación en otras lenguas (Inglés y Francés), es por ello que dichas traducciones son un compendio de nuestras interpretaciones personales con un carácter más divulgativo que técnico-científico.

Desde lo matemático

Al observar y analizar los resultados de cada uno de los métodos de adición y sustracción sucesiva encontramos que ambos generan, en esencia, una misma sucesión de lo que hoy conocemos como números racionales.

Es asombroso descubrir cómo a través de sucesiones de números racionales se va *cerrando el cerco* y capturando la inconmensurabilidad (o si se prefiere, la irracionalidad) y aún más si se tiene en cuenta que uno de los métodos lo hace dirigiéndose hacia lo infinitamente grande, en tanto que el otro lo hace transitando hacia lo infinitamente pequeño.

Luego de analizar los métodos estudiados no deja de sorprendernos cómo esa condición de tratamiento diferenciado conduce al mismo resultado y no podemos menos que imaginar un lugar que se extiende infinitamente en dos direcciones antípodas para cerrarse sobre sí mismo y finalmente encontrarse.

El estudio de los documentos nos muestra una visión, que más parece una fantasía, que nos revela un halo de misterio que, por un lado, rescata el carácter estético de las matemáticas, a veces tan esquivo a la mayoría de humanos y, por otro lado, nos deja entrever el aspecto mitológico que parecía envolver la cosmovisión pitagórica mediada por las matemáticas mismas.

Sin duda la admiración por la belleza de las matemáticas emerge como un resultado supremamente valioso para nuestra condición de maestros de matemáticas en formación, pues más allá de suministrarnos un poco más de erudición (y con ello atacar nuestra infinita ignorancia), nos ofrece un panorama para redimensionar la belleza de las matemáticas.

Cuando en un comienzo mirábamos con extrañeza los nombres de *antanairesis* y *antipairesis* y suponíamos que eran unos métodos extraños y con pocas cosas en común, finalmente nos encontramos con que estas extrañas palabras se refieren a un mismo método que nos permite encerrar la inconmensurabilidad con la conmensurabilidad y que es tan familiar para nosotros que el mismo algoritmo de Euclides puede dar cuenta de ello.

Desde la relación Historia de las Matemáticas-Educación Matemática

En la historia de las matemáticas podemos encontrar diversos elementos relacionados con el conocimiento matemático muchas veces desconocidos por otros profesores, esto permite que tales ideas no se queden en su simple estudio y reconocimiento, sino que dan pie para que puedan ser compartidas y sean conocidas por la comunidad académica. Un ejemplo de ello se ve reflejado en nuestras participaciones con la ponencia *¿Puede la conmensurabilidad cerrar el cerco a la inconmensurabilidad?* en la trigésima semana del educador matemático desarrollada en la Universidad Pedagógica Nacional en el primer semestre del 2012 y la participación en el 13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa organizada por ASOCOLME en la Universidad de Medellín y la Universidad de Antioquia en el segundo semestre del mismo año.

El tratado de la inconmensurabilidad desde una perspectiva histórica nos permite identificar potenciales bases desde las cuales escolarmente se pueda abordar el problema de los números irracionales y su profunda relación con los números racionales (o viceversa) ya sea en contextos aritméticos, algebraicos o geométricos.

Gracias al estudio realizado de un tema de las matemáticas desde una perspectiva histórica logramos enriquecer el valor de la historia en la profesión docente ya que gracias a esta podemos considerar y advertir como los conceptos y objetos matemáticos son el producto de su evolución y por ello no deben ser ajenos al conocimiento del profesor.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Corry, L. (1994). La teoría de las proporciones de Eudoxo interpretada por Dedekind. *Mathesis, 10*, 1-24.

de Guzmán, M. (1986). Los Pitagóricos Recuperado 20 de mayo, 2011, from http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/pitagoricos.htm

Evans, G. W. (1927). The Greek Idea of Proportion. *The American Mathematical Monthly, 34*(7), 354-357.

Filep, L. (1999). Pythagorean side and diagonal numbers. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 15*, 1-7.

Filep, L. (s. a.). How the Greeks might have discovered and aproximate irrational numbers. 5. Retrieved from

Fowler, D. H. (1979). Ratio in Early Greek Mathematics. [Bulletin]. *American Mathematical Society, 1*(6), 39.

Gardies, J. L. (1988). L´héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide. Une essai de reconstitution. París: Librairie Philosophique J. Vrin.

González, P. M. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. *Sigma, 33*, 30.

Grattan-Guinness, I. (1996). Numbers, Magnitudes, Ratios, and Proportions in Euclid's Elements: How Did He Handle Them? *Historia Mathematica, 23*(4), 355-375.

Guacaneme, E. A. (2010). La Historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones. Conferencia presentada en La Tercera Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática (ENHEM3). Santiago de Cali, 27 al 29 de octubre.

Guacaneme, E. A. (2012). Teoría Euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales: ¿Un asunto útil para un profesor? *TEA, Tecné, episteme y didaxis, 31*, 113-131.

Jiménez, D. (2006). ¿Qué era un irracional para un matemático griego antiguo? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, XIII*(1), 87-103.

Puertas, M. L. (1994). *Euclides. Elementos Libros V-IX* (Vol. II). Madrid. Ed. Gredos S.A.

Shenitzer, A. (1995). A Topics Course in Mathematics. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (Eds.), *Learn from the Masters!* (pp. 283-295). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Thorup, A. (1992). A pre-euclidean theory of proportions. *Archive for History of Exact Sciences, 45*, 1-16.

ANEXOS

Anexo 1: Traducción[9] PYTHAGOREAN SIDE AND DIAGONAL NUMBERS

NÚMEROS PITAGÓRICOS LADO Y DIAGONAL

LÁSZLÓ FILEP

RESUMEN. El descubrimiento pitagórico de que la razón entre la diagonal (diámetro) y el lado de un cuadrado no pueden ser expresados como el cociente de dos números enteros positivos significa en lenguaje moderno que no es un número racional. La inconmensurabilidad tuvo un gran efecto en la filosofía Griega y sobre todo en las matemáticas. Muchos documentos trabajaron con esto y su impacto, pero relativamente pocos con la aproximación a la razón en cuestión. Ni siquiera los Elementos de Euclides los cuales fueron puramente teóricos y los métodos de cálculo fueron poco tratados. El objetivo de nuestro trabajo es analizar las fuentes y la bibliografía sobre este problema y dar una nueva (y es de esperar una solución satisfactoria) explicación del método de aproximación de Pitágoras, es decir, de sus llamados números lado y diagonal (o diámetro).

El descubrimiento pitagórico de que la razón entre la diagonal (diámetro) y el lado de un cuadrado no pueden ser expresados como el cociente de dos números enteros positivos significa en lenguaje moderno que $\sqrt{2}$ no es un número racional. La inconmensurabilidad tuvo un gran efecto en la filosofía griega y sobre todo en las matemáticas. Muchos documentos trabajaron con esto y su impacto, pero relativamente pocos con la aproximación a la razón en cuestión *Ni siquiera los Elementos de Euclides los cuales fueron puramente teóricos y los métodos de cálculo fueron poco tratados.* El objetivo de nuestro trabajo es analizar las fuentes y la bibliografía sobre este problema y dar una nueva (y es de esperar una solución satisfactoria) explicación del método de aproximación de

[9] Esta traducción se efectuó en el desarrollo de éste trabajo de grado. Por tanto dicho documento de trabajo no tiene fines comerciales. Puesto que no ha sido publicada, no se puede utilizar como referencia; en caso de que se quisiera citar alguna idea incluida en el artículo, habría que referenciar el original (en inglés). Bogotá, diciembre de 2012.

Pitágoras, es decir, de sus llamados números lado y diagonal (o diámetro). La palabra 'número' sería usada por los griegos: entero mayor – que – uno. El principal problema es que no sobrevivieron las fuentes originales de tiempos pre-platónicos. Nosotros tenemos sólo algunos fragmentos de comentarios y unas pocas alusiones de autores posteriores. Entre estas cortas y oscuras alusiones está el pasaje de Platón (República 546c) sobre (o lado y diagonal) números casados, es tal vez el más oscuro. Esta tiene traducciones y una gran cantidad de literatura. Ahora citamos algunas líneas a partir de dos traducciones del inglés solamente:

> … el otro un rectángulo, uno de sus lados es un centenar de los números de los diámetros racional de cinco, cada menor a uno (o de un centenar de los números de los diámetros de los irracionales cinco, cada una disminuido por dos),…
>
> ([9], vol. I, p. 399)
>
> …y el otro una figura que tiene un lado igual a la anterior, pero rectangular, que consta de un centenar de números cuadrados en diámetros racional de un cuadrado (es decir, omitiendo fracciones), el lado de la cual es cinco ($7x7 = 49x100 = 4900$), cada uno de ellos menos en uno (que el cuadrado perfecto que incluye el fracciones, sc. 50) o menos por dos cuadrados perfectos de diámetros irracionales (de cuadrado de lado cinco $= 50 + 50 = 100$);…
>
> ([6], p. 403)

Podemos obtener una mejor visión de estos diámetros racionales e irracionales, si citamos los comentarios de Proclus sobre este pasaje:

> 1. Los pitagóricos propusieron este elegante teorema acerca de los diámetros (diagonal) y lados, que cuando la diagonal recibe el lado del cual esta es diagonal, mientras el lado sumado a el mismo y recibiendo esa diagonal, llega a ser una diagonal. Y esto es probado gráficamente en el segundo libro de los Elemento de él (sc. Euclides). Si una línea recta es bisecada y una línea recta es adicionada a esa, el cuadrado de toda la línea incluyendo la línea añadida el cuadrado de esta último por sí mismo están juntos el doble del cuadrado de la media y del cuadrado en la línea recta formada por la mitad y el valor añadido en línea recta.
>
> (Proclus: Comentario de la republica de Platón, ed. Kroll, ii. 27. 11-22; [9], vol. I, pp. 137-138.)
>
> 2. Así, en la búsqueda de las causas de ciertos resultados que a su vez a los números,… cuando estamos satisfechos con aproximaciones, como cuando, en geometría que hemos encontrado un doble cuadrado de un cuadrado dado, pero no tenemos esto en números, podemos decir que el cuadrado de un número es el doble del cuadrado de otro número cuando se corta por uno, como el cuadrado de siete, que es uno menos que el doble del cuadrado de cinco.
>
> [7, p. 49.]

La segunda cita (que no es citada en la literatura) muestra claramente que el 7 es una aproximación racional de la diagonal irracional (diámetro) $\sqrt{50}$ del cuadrado de lado 5 y en consecuencia, la razón de 7/5 es una aproximación de $\sqrt{2}$. Más aproximaciones y detalles se pueden obtener de un libro de Teón de Esmirna con el objetivo de ayudar a la comprensión de los pensamientos matemáticos de Platón:

> A pesar de que los números están investidos de poder para hacer triángulos, cuadrados, pentágonos y otras figuras, por lo que también encontramos que la razones de lado y el diámetro que aparecen en números de acuerdo con los principios generativos, pues son ellos los que dan armonía a las figuras. Por lo tanto, desde la unidad, de acuerdo con el supremo principio generador, es el punto de partida de todas las figuras, así también en la unidad se encuentra la razón del diámetro al lado. Para aclarar esto, dejamos dos unidades a ser tomadas, de las cuales vamos a seleccionar una como diámetro y la otra un lado, ya que la unidad, como el principio de todas las cosas, se debe tener en su capacidad de ser ambos lados y diámetro. Ahora hay que añadir al lado un diámetro y al diámetro dos lados, tantas veces como el cuadrado sobre el diámetro tomado una vez, así a menudo es el cuadrado sobre el lado dos veces. El diámetro por lo tanto, se convertirá en el mayor y el lado se convertirá en el menor. Ahora, en el caso de que el primer lado y el diámetro del cuadrado del diámetro de la unidad será menor por una unidad de dos veces el cuadrado del lado unida; porque las unidades son iguales, y 1 es menor por una unidad que dos veces 1. Añadamos al lado un diámetro, es decir, a la unidad vamos a añadir una unidad, por lo tanto el [segundo] lado será de dos unidades. Al diámetro de ahora vamos a añadir dos lados, es decir, a la unidad vamos a añadir dos unidades, el [segundo] diámetro, por consiguiente será de tres unidades. Ahora, el cuadrado sobre el lado de dos unidades será de4, mientras que el cuadrado sobre el diámetro de tres unidades será de 9, y 9 es mayor por una unidad de dos veces el cuadrado de lado 2.
>
> Una vez más, vamos a agregar en el lado 2, el diámetro 3, el [tercer] lado será 5. Al diámetro de 3 vamos a añadir dos partes, es decir, el doble de 2, el tercer diámetro será 7. Ahora el cuadrado de lado 5 sera 25, mientras que a partir del diámetro 7 serán 49, y 49, es inferior en una unidad de dos veces 25. Una vez más, agregar al lado el diámetro 7, el resultado sería 12. Y el diámetro de 7 añadir dos veces el lado 5, el resultado sería 17. Y el cuadrado de 17 es mayor por una unidad que dos veces el cuadrado de 12. Procediendo de esta manera en orden, habría la misma proporción alternante, el cuadrado del diámetro será ahora mayor por una unidad, ahora menor por una unidad, de dos veces el cuadrado del lado, y tales lados y diámetros ambos racionales.
>
> (Teón de Esmirna, ed. Hiller 42. 10-44. 17; [9], vol. I, pp. 133-137.)

Las interpretaciones de estas citas son bastante similares y responden a muchas preguntas, pero dejan algunas sin contestar o no respondidas en su totalidad. Quizá el estudio más detallado es el de Waerden [10] de que se remontan a dos trabajos de Heath: [3], vol. I. pp. 91-93; y [4], pp. 32-33.

Recordemos la presentación de Waerden.

Después de declarar la fórmula de recurrencia para el lado y el diámetro números (denotado como a_n y d_n respectivamente)

(1) $a_{n+1} = a_n + d_n$; $d_{n+1} = 2a_n + d_n$

él sigue escribiendo (p.126):

> Los nombres números lado y diagonal de lado en diagonal insinúan el hecho de que la razón a_n: d_n es una aproximación a la razón entre el lado y la diagonal de un cuadrado. Este se desprende de la identidad d_n^2=$2a_n^2 \pm 1$ que, según Proclus, se comprobó por el uso de II. 10.

Waerden primera conjetura fue verificada por Proclo, como hemos visto anteriormente. A continuación, Waerden pregunta cómo los pitagóricos consiguieron las fórmulas de recursión (1). El conjeturó el siguiente método. Al tratar de encontrar la medida común de un lado y la diagonal de un cuadrado ellos usaron el

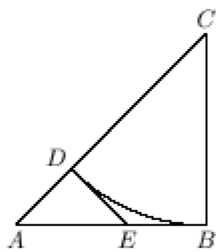


Figura 1. $\boldsymbol{AD = DE = EB = d - a, AE = 2a - d}$

método llamado sustracción sucesiva (antanairesis). (Fig. 1). Sustrayendo del mayor d el menor a. Obtenemos dos nuevas magnitudes: a y $d - a$. Nuevamente, sustrayendo del mayor a , el menor $d - a$, el resultado es $2a - d$. En el siguiente paso $a_1 = d - a$ debe ser restado de $d_1 = 2a - d$. Estas magnitudes son de nuevo un lado y la diagonal de un cuadrado más pequeño. La conexión con el lado original y la diagonal es:

(2) $a = a_1 + d_1$; $d_1 = 2a_1 + d_1$

Waerden establece que (2) "presenta la misma forma" como (1). A partir de este método de antanairesis hay a continuación dos cosas:

i. El proceso continúa al infinito (suponiendo que la divisibilidad indefinida de la línea es aceptada como axioma), a y d no tienen una medida común, por lo que su razón no puede estar dada en números, es decir, como la razón de dos números enteros positivos.
ii. Durante el proceso tanto a_n como d_n se vuelven cada vez más y más pequeños, y por consiguiente también lo hace su diferencia. Por lo tanto, podemos tomar a_n aproximadamente igual d_n para algún n. De las palabras de Waerden [10, p. 127]: "Si el proceso continua hasta que la diferencia entre a''' y d''' se ha convertido en demasiado pequeño para ser observado y si uno se aproxima estableciendo que $a''' = b'''$, entonces, cambiando a''' como la unidad de longitud, a'' y b'', a' y b' y finalmente a y

b se representan por medio de (2), en la forma sucesivas de los números lado y la diagonal." (Usamos índices menores en lugar de guiones, y d por b)

Algunos de los argumentos y conclusiones citados por Waerden no son correctos, tienen algunas inconsistencias y falta de comprensión de las fuentes, y permanecen abiertas algunas cuestiones:

1. Las fórmulas (2) en sus formas generales

(3) $$a_n = a_{n+1} + d_{n+1} \,; \quad d_n = 2a_{n+1} + d_{n+1}$$

   no son las mismas que (1)
2. ¿Sí $a_n = d_n$ tomado como $d_n : a_n$ aproxima la razón $d : a = \sqrt{2}$?
3. La figura 1 muestra más y más pequeños los lados y las diagonales, mientras que por la construcción de Theon tenemos cada vez mayores. Kroll también notó esta controversia en [5, p. 36] "Por otra parte, el paso que parece tan evidente para nosotros no se observa en las fuentes: a saber, que el anuncio anthypairesis repite anuncio infinito para producir una línea cada vez menor en la misma razón. El procedimiento es bastante empleada para obtener una fórmula de valores integrales cada vez mayores, la cual se aproxima a la razón."
4. De los párrafos citados de Proclo (y Theon), se puede concluir que la Proposición II. 10 de Euclides no prueba (solamente) la identidad $d_n^2 = 2a_n^2 \pm 1$, pero la corrección de la construcción del lado mayor y la diagonal.

Ahora tratamos de eliminar estas contradicciones y establecemos una teoría de los números lado y diagonal principalmente por una reconstrucción deductiva que corresponde mejor con las fuentes y en su interior más coherente.

Cuando los pitagóricos descubrieron la inconmensurabilidad del lado y la diagonal de un cuadrado, es decir, se encontraron con que no existe una longitud mínima de la que son enteros múltiples, su creencia en los números sufrió un gran choque. Pronto se convencieron que cada razón puede ser expresada como la razón de números. Pero la diagonal de un cuadrado resultó ser "irracional" al lado. Por la diagonal irracional ellos quisieron decir que la razón es inexpresable por números, o como Proclus dijo: "no tiene eso en números." Para restaurar por lo menos parte de su filosofía centrada en el número de ellos trataron de encontrar la diagonal racional del cuadrado lo más cerca posible a la irracional. Lo más "cercano" significo para ellos: que el doble de sus cuadrados pueden diferir sólo por uno. (Las fracciones no existen para ellos en la matemática pura!) Este requisito en notación moderna se puede formular de la siguiente manera

(4) $$d_n^2 = 2a_n^2 \pm 1$$

Donde a_n , d_n denotan el lado y la diagonal respectivamente, ganado después del n^{th} paso de aproximación. Tenían dos posibilidades equivalentes para encontrar las diagonales racionales por lo cual la razón d: a puede ser aproximada "en números:"

1. *Método de disminución o sustracción.* Por sucesivas sustracciones obtenemos pequeños y pequeños cuadrados (como se puede ver en Fig. 1), haciendo la

diferencia entre el lado y la diagonal tanto como podamos. Tomarlos igual puede servir como una medida (aproximadamente) común, o una unidad de longitud. Tomamos la longitud de ambos el lado y el diámetro (consecuentemente su radio, también) puede ser dado en números.

2. *Método creciente o de adición*. Por sucesivas adiciones obtenemos grandes y grandes cuadrados. Con respecto al lado y la diagonal original ambos con la longitud de la unidad, nosotros tenemos esa longitud en números. Porque las longitudes de las unidades son realmente diferentes, la longitud del diámetro racional, será diferente de ‘’exacto’’ uno irracional. Pero esas diferencias van a ir decreciendo indefinidamente durante el proceso.

Estudiando las fuentes llega a ser claro que los pitagóricos eligieron la segunda posibilidad. Una razón para eso es probablemente su decepción en antainareis: eso llevo a la demolición del descubrimiento de la inconmensurabilidad. Las discrepancias de la interpretación de Waerden son causadas por la mezcla de estos dos métodos.

Los pitagóricos partieron de a y b, usando $a+d$ y $2a+d$ como el primer paso de aproximación. Ellos probaron la proposición II.10 de Euclides geométricamente que estos también son el lado y la diagonal de un cuadrado ‘’más grande’’, y que el cuadrado de la diagonal racional $2a+d(=3)$ solo será diferente de 1 que de los de un irracional perteneciente a el lado $a+d(=2)$.

La idea heurística detrás de la formación del nuevo lado como $a+d$, y la nueva diagonal como $2a+d$ esta incluido en la cita de Theon: ‘’… porque Todas las veces como el cuadrado sobre el diámetro es tomado una vez, con frecuencia el cuadrado es tomado sobre el lado tomado dos veces. ’’ Por Prop. II. 10 eso es casi para verificar que este es el resultado de la construcción otra vez con un cuadrado (Fig. 2).

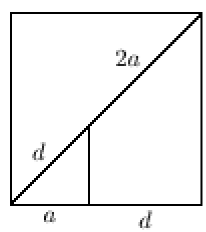


Figura 2.

El texto de este teorema puede encontrarse en el pasaje citado de Proclus. Con notación moderna podemos expresar eso con la fórmula:

$$(2a+d)^2+d^2 = 2a^2+2(a+d)^2 \quad (5)$$

Aquí a y d denotan cualquier segmento, pero si ellos son el lado y la diagonal de un cuadrado, eso es si $d^2=2a^2$entonces (5) se reduce a $(2a+d)^2 = +2(a+d)^2$ demostrando por el contrario el Teorema de Pitágoras que $a+d$ y $2a+d$ son de bien el lado y el diámetro de un cuadrado. La formula de recursión para a_n y d_n en este método son aquellos de (1):

$$a_{n+1}=a_n+ d_n; d_{n+1}=2a_n+d_n \; (n\geq 0, a_0=a, b_0=b). \quad (6)$$

Aplicar (5) a a_ny d_n:

(7) $$(2a_n + d_n)^2 + {d_n}^2 = 2{a_n}^2 + 2(a_n + d_n)^2$$

De aquí usando (6) obtenemos:

(8) $$d_{n+1}^2 + d_n^2 = 2a_n^2 + 2a_{n+1}^2$$

Sustituyendo aquí $n = 1$ y $a = d = 1$: $d_1^2 = 2a_1^2 + 1$. adicional sustituimos esto en (8) para $n = 1$:

$$d_2^2 + d_1^2 = 2a_1^2 + 2a_2^2 \rightarrow d_2^2 + 2a_1^2 + 1 = 2a_1^2 + 2a_2^2 \rightarrow d_2^2 = 2a_2^2 - 1.$$

Los pitagóricos probablemente pararon aquí, o después de algunos más pasos, y concluyeron la regla $d_n^2 = 2a_n^2 - 1$, si n es incluso; $d_n^2 = 2a_n^2 + 1$. Si n es extraño, en otros trabajos ellos dieron la formula (4).

Yo no creo que ellos mostraron gusto por la fórmula de antanairesis por la argumentación por inducción como por los estados de Waerden. Ya sea por inducción completa o incompleta debieron haber ganado (4) de esta manera. Waerden (y otros) no dijeron nada sobre la génesis de esta fórmula.
Ellos probaron esto simplemente por sustitución de (7).

Ahora, los números del lado y la diagonal incluyendo los famosos 5 y7 pueden ser calculados fácilmente de (6) comenzando con $a = d = 1$. Entonces d_n/a_n da aproximaciones cada vez mejor de $\sqrt{2}$.

Usando el método de disminución nosotros podemos obtener algunos resultados como los pitagóricos lo dieron de por esa manera, pero de una forma un poco diferente y de un modo más complicado.

Aquí la fórmula de recursión (2) debe ser usada. Reescribimos eso en la forma siguiente más conveniente:

(9) $$a_n = a_{n+1} + d_{n+1};\ d_n = 2a_{n+1} + d_{n+1} (n \geq 0, a_0 = a, d_0 = d)$$

Sustituyendo (9) en (7) obtenemos:

$$d_{n-1}^2 + d_n^2 = 2a_n^2 + 2a_{n-1}^2$$

De donde tomando $a_n = d_n = 1$ para algún n, a continuación se

$$d_{n-1}^2 = 2a_{n-1}^2 + 1$$

Ahora, escribimos (7) para a_{n-1} y d_{n-1} y sustituimos eso aquí:

$$d_{n-2}^2 + d_{n-1}^2 = 2a_{n-1}^2 + 2a_{n-2}^2 \rightarrow d_{n-2}^2 = 2a_{n-2}^2 - 1$$

Lo que tenemos aquí es similar a la regla (4) pero en una forma de recursión ‘’opuesta’’, no partiendo de 1 pero si de algún n.

Los números lado y la diagonal pueden ser obtenidos de (9) como a y d tomando $a_n = d_n = 1$ para algún n. Podemos, decir $a_3 = d_3 = 1$ entonces $a_2 = 2$, $d_2 = 3$; $a_1 = 5, d_1 = 7; a = 12, d = 17$. El resultado aproximado de $\sqrt{2}$ es $\frac{17}{12}$. El cuadrado de la diagonal racional 17 (289) excede para un cuadrado de la diagonal irracional $(2 * 12^2 = 288)$.

Los cálculos hacerse más fáciles por la aplicación sucesiva de (9) como sigue:

$$a = a_1 + d_1 = 3a_2 + 2d_2 = 7a_3 + 5d_3 = \ldots$$

$$d = 2a_1 + d_1 = 4a_2 + 3d_2 = 10a_3 + 7d_3 = \ldots$$

De aquí los números del lado y la diagonal que pertenecen a algunos $a_n = d_n = 1$ pueden ser leídos inmediatamente.

Anexo 2: Traducción[10] A Pre-Euclidean Theory of Proportion

Una teoría pre-euclidiana de proporciones

ANDRES THORUP

Comunicado por B. L. VAN DER WAERDEN

Introducción

La teoría de las proporciones en el periodo de las matemáticas griegas esta descrita en el quinto libro de Euclides. Esta teoría euclidiana se basa en las definiciones centrales de la igualdad y el orden relativo de razones dadas en Euclides V, Def. 5 y Def. 7. Sin embargo, se hace alusión en varias partes de la literatura, a que los "antiguos" (es decir, los matemáticos antes de Eudoxo y Euclides) los cuales poseían una teoría alternativa de proporciones basada en la noción de αλθνφαίρεζις (“Anthyphairesis“, se explica más adelante). Interpretaciones de estas alusiones son dadas por BECKER [B], por FOWLER en [F1, F2, F3, F4], y por KNORR en [K].

BECKER intentó en [B] reconstruir sobre la base de “Antipairesis” una teoría completa de las proporciones, similar a la teoría euclidiana. La parte más difícil de esta reconstrucción es la prueba de la Alternancia (Euclides V, Prop. 16), afirmada para cuatro magnitudes A, B, C y D que si $A: B = C: D$ entonces $A: C = B: D$, BECKER demostró Alternancia solo de magnitudes muy especiales (números, segmentos de líneas y rectángulos), y estaba convencido de que la Alternancia no se podía probar para magnitudes en general, sobre la base de “Antipairesis”. Que este no es el caso fue mostrado por LARSEN, quien en [L] demostró la alternancia de magnitudes en general y, de hecho, demostró los conceptos de la igualdad y el orden relativo de proporciones basado en la "Antipairesis”, siendo la misma que la dada en Euclides V, Def. 5 y Def. 7. Sin embargo, las pruebas se apoyaron en las técnicas modernas de notación y era difícil creer que un pleno desarrollo había tenido lugar antes de EUDOXO y EUCLIDES.

El objetivo del siguiente trabajo es mostrar que la teoría alternativa de proporciones se puede construir con una interpretación muy simple de "Antipairesis”, sin ninguna referencia a la maquinaria de notación moderna. Se pretende mostrar que los "antiguos" poseían una teoría rica y llena de proporciones para magnitudes

[10] Esta traducción se efectuó en el desarrollo de éste trabajo de grado. Por tanto dicho documento de trabajo no tiene fines comerciales. Puesto que no ha sido publicada, no se puede utilizar como referencia; en caso de que se quisiera citar alguna idea incluida en el artículo, habría que referenciar el documento original (en inglés). Bogotá, diciembre de 2012.

arbitrarias. El principal objetivo ha sido mostrar que ninguna parte de esta teoría puede ser excluida de su posesión por sí sola a su relación con los conceptos modernos de la notación.

La interpretación común de la palabra "Antipairesis" en las obras antes citadas fue la de tener "la misma fracción continua", una primera interpretación sugerida por ZEUTHEN en [Z]. De acuerdo con las consideraciones etimológicas por HEATH en [H, II, p. 121]. "Antipaireis" significa "(tener) la eliminación correspondiente". Mostramos aquí la interpretación de la frase literalmente que dice: Magnitudes A, B y a, b, son proporcionales, si el proceso de eliminar continuamente a su vez, el menor del mayor, A y B respectivamente, corresponde a un proceso similar que se aplica a a y b, es decir, cuando en cualquier etapa del proceso, si lo que queda de A es mayor que lo que queda de B, entonces lo que queda de a es mayor que lo que queda de b, si es igual igual, y si es menor, menor.

El proceso antipairético se puede aplicar a cualquier par de magnitudes A y B, del mismo tipo. Cualquier etapa del proceso deja un par A', B' de residuos, donde A' es lo que queda de A y B' es lo que queda de B, si $A' = B'$, entonces el proceso termina. Si $A' > B'$, entonces el siguiente par es A', $B' - A'$. Por lo tanto la "antigua" definición de forma proporcional expresa que los procesos de A, B y a, b, son idénticos.

El proceso antipairético para magnitudes A y B es el proceso utilizado en Euclides VII, Prop 1-2 y en Euclides X, Prop 2, es decir, el proceso es el algoritmo de Euclides. La extensión de este proceso para la fracción continua (o lo que es lo mismo, la forma en el algoritmo de Euclides se presenta generalmente en los libros de texto de álgebra) corresponde realmente a la contabilidad de dónde queda exactamente en el proceso lo que queda de A es mayor que, igual a menor que, que lo que queda de B. por lo tanto, con una noción estándar de las fracciones continuas, la ecuación $A/B = [n_1, n_{2,}, n_3 \dots]$ los medios: en la primera etapa n_1 el resto de A es mayor que el resto de B, en la siguiente fase n_2 el resto de A es menor que el resto de B, y así sucesivamente.

Un punto principal en el enfoque actual de Antipairesis es que la contabilidad, contenida en la fracción continua oscurece realmente, eso es completamente innecesario, y eso no es griego. Como ejemplo, consideremos la proposición 9 por debajo del cual, como un caso especial contiene la afirmación de que si $A / C = B / C$, entonces $A = B$. Se ha objetado en contra de una prueba Antipairética que por métodos griegos del álgebra eso sería inevitablemente horrendo. No hay prueba antipairéticaque puede ser completamente trivial, ya que el uso del axioma de Eudoxo es una necesidad. Pero el lector está invitado a ver si la prueba que se indican a continuación merece la caracterización anterior.

Un segundo punto en el enfoque actual es la parte que desempeña en la prueba de la Alternancia por la siguiente observación: si el proceso antipairético de A, B, en alguna etapa difiere de la de a, b entonces existen números k, m tal que la relación de orden de kA, mB es diferente de la de ka, mb. Heurísticamente la razón es la siguiente: es evidente que, en cualquier etapa de los restos de A, B, son de la forma $pA + qB$, donde p y q son números enteros de signos opuestos dependiendo del proceso. Por lo tanto, una desigualdad entre los restos de A y B, implica una desigualdad entre los múltiplos $kA,\ mB$. Considerar la desigualdad entre los restos de $A,\ B$

En la primera etapa donde el proceso de $A,\ B$, difiere del de $a,\ b$. Entonces, en que etapa la desigualdad opuesta se cumple para los restos de $a,\ b$, y eso implica para los múltiplos que el orden relativo de $kA,\ mB$ es el opuesto del orden relativo de $ka,\ mb$.

Cabe preguntarse si los antiguos podrían haber hecho una observación tal que, es prueba, y visto ese rol en el contexto de la Alternancia. La observación es el contenido de la proposición 3 debajo, eso es justificado por una prueba muy simple algorítmica. En particular, la observación se podría haber hecho basados totalmente en la definición Antipairetica. Por otra parte, con esa observación, el pasaje a las definiciones euclidianas no es difícil. En ese sentido, la observación se puede ser un candidato para un eslabón perdido entre la antigua y la teoría Euclidiana.

Un tercer punto de este enfoque es que la Alternancia es probada sin el uso del orden relativo de las proporciones; en particular, no hay comparación con racionales necesarios para la prueba. Por lo tanto la definición Antipairéticade orden relativo, Aunque muy simple, se pospone a la última sección donde será necesario para demostrar la equivalencia total de los antiguos y los conceptos Euclidianos de proporcionalidad.

Hay que destacar que el punto de vista ingenuo sobre el algoritmo de Euclides se corresponde con el ejemplo típico de un algoritmo hermoso en un ordenador para encontrar el máximo común divisor de los números a y b, lugar a y b en dos registros y sustraer del registro que contiene el número mayor el que contiene el otro registro tan largo como el contenido de los dos registros son desiguales. Cuando el proceso se detiene (!), ambos registros contienen el máximo común divisor.

Para dilucidar de manera similar la diferencia entre los "antiguos" y el concepto Euclidiano de orden relativo consideremos el siguiente problema: decidir por los números $a,\ b,\ p,\ q$, cual de las fracciones $a\,/\,b$ y $p\,/\,q$ es la menor, aunque la definición Euclidiana de orden no proporciona un método, una solución euclidiana podría consistir en comparar múltiplo qa con el múltiplo pb. Esta sencilla solución no es fácil implementarla en un ordenador, donde multiplicaciones tienen una tendencia a causa. En contraste con la definición Euclidiana de la 'antigua' definición (ver definición 3 en la sección 4) proporciona el método: lugar $a,\ b$, en un par de registros y p y q en otro par y hacer el algoritmo de Euclides simultáneamente. Tocar la campana y parar, si son el mismo punto durante el proceso el orden relativo de los contenidos del primer par de registros no es el mismo como el orden relativo de los contenidos del segundo par. Entonces $a\,/\,b\ < p\,/\,q$ si y sólo si suena la campana y, o bien el contenido del primer registro es menor que el contenido del segundo o el contenido del tercero es mayor que el contenido del cuarto.

El contenido de las secciones son los siguientes: la sección 1 contiene la "antiguo" definición de la proporcionalidad. Con todos los pares de magnitudes se asocia un proceso llamado su anthyphairesis, y dos pares de magnitudes son proporcionales, si tienen la misma anthyphairesis. nota una diferencia entre el antiguo y el concepto euclidiano: dos magnitudes tienen una anthyphairesis, pero estrictamente hablando no tienen una razón: sólo "estar en la misma razón" es una buena noción Euclidiana (para cuatro magnitudes), el antiguo concepto es la afirmación de la igualdad de dos procesos, el concepto Euclidiano es meramente una relación de equivalencia de pares de magnitudes.

La sección 2 contiene las proposiciones elementales con simples pruebas algorítmicas. El axioma de Eudoxo se utilizó por primera vez en la sección 3 como una necesidad para la prueba de Alternancia (Euclides V Prop. 16). Eso se muestra en la sección 3 para magnitudes del mismo tipo que las igualdades de las proporciones se indica en el quinto libro de Euclides se derivan de las propiedades elementales de la sección 2 para Alternancia. De hecho, la equivalencia de la “antigua” y la definición Euclidiana de proporcionalidad, se prueba para las magnitudes del mismo tipo.

Sección 4 contiene la definición de orden relativo de anthyphairesis y establece la equivalencia total entre el “antiguo” y el concepto Euclidiano de orden relativo y proporcionalidad de magnitudes de diversos tipos.

Como se mencionó anteriormente, es de ninguna manera la almeja de este trabajo que los “antiguos” poseían una teoría rica y llena de proporciones. Sin embargo, el objetivo es convencer al lector de que ninguna parte de esta teoría puede ser excluida de su posesión por sí sola a sus conexiones con las modernas técnicas de notación. Por lo tanto, se ha intentado escribir en un "pseudo-euclidiano", comentado estilo. El estilo se utiliza para todas las declaraciones, y también para las pruebas de los resultados que conducen a la prueba de la Alternancia. El lector encuentra mi intento fallido puede omitir el “pseudo-euclidiano" pruebas y la base de su propio juicio sobre los comentarios simplemente.

1. Definiciones

Vamos a utilizar las propiedades de las magnitudes como son usualmente expresadas o usadas por Euclides. En particular, vamos a utilizar las sencillas reglas para la manipulación con múltiplos como se expresan en Euclides V. Prop 1-3, 5-6. De especial interés para nuestra construcción es el axioma de la existencia de un exceso (o la posibilidad de sustracción), no se menciona explícitamente por EUCLIDES: para dos magnitudes desiguales de la misma clase el mayor tiene un *exceso* sobre el menor, que es lo que queda de restar el menor del mayor.

También se necesita el " axioma de Eudoxo (o Arquímedes), a veces se cree ha de ser parte de Euclides V def 4; dos magnitudes del mismo tipo estas son múltiplo de la primera tal que excede la segunda.

Para hacer el lenguaje preciso, diremos que dos magnitudes (de una especie) *tienen el mismo orden* que otras dos magnitudes (posiblemente de otro tipo), la primera a la segunda como la tercera a la cuarta, si cada vez el primero es mayor que el segundo, entonces también la tercera es mayor que la cuarta, si igual, igual, y si menor, menor.

Definición 1: La *Antipairesis* de dos magnitudes (de la misma clase) es el proceso de eliminación continua, es decir, restando las dos magnitudes la menor de la mayor.

Por lo tanto después de cada eliminación de los restos de la mayor es ese exceso sobre dicho menor, el menor no ha cambiado. Continua eliminando es la Antipairesis

Para una pareja de magnitudes determinadas A, B, denotaremos por $A\ /\ B$ su Antipairesis es decir, el proceso de eliminar continuamente se ha descrito anteriormente.

Tenga en cuenta que el proceso $A\ /\ B$ termina si en algún momento los restos de A y B son iguales. El proceso de $A\ /\ B$ es el proceso utilizado en el décimo libro de Euclides. En comparación con euclidiana X prop 2.1, las magnitudes A, B son conmensurables si el proceso termina, de hecho, casi por Euclides X prop 3, cuando el proceso termina cada uno de los restos de igualdad es la mayor medida común de A y B

Definición 2: Magnitudes (dos de un tipo y otros dos de otro tipo) se dice que son *proporcionales*, si tienen la misma Antipairesis.

Por lo tanto las magnitudes son proporcionales, si la primera a la segunda tiene el mismo orden que la tercera a la cuarta y esto continúa llevando a cabo después de cualquier número de eliminaciones.

Por lo tanto las magnitudes A, B y a, b, son proporcionales. Si y sólo si $A\ /\ B\ =\ a\ /\ b$. con el fin de no confundir la 'antigua' definición de proporcionalidad con la definición de Euclides, nos referiremos a la proporcionalidad en el "antiguo" sentido de su definición.

Nosotros mostramos (en los comentarios) esta escritura $A\colon B\colon\ ;\quad a\colon b$ si las magnitudes están en la misma proporción, es decir, si son proporcionales, en el sentido euclidiano (Euclides V def 5), por debajo de nosotros se reunirá para magnitudes A, B, y, b la condición de que existe un número k, m tal que los múltiplos kA, mB no tienen el mismo orden que el ka múltiplos, mb. esta condición es, de hecho, de que A y B no están en la misma proporción que a y b, y, en consecuencia, escribiremos $A\colon B\ <>\ a\colon b$ si la condición se cumple. Pero hay que destacar que ningún concepto de la relación o el orden está implícito en esta notación.

2. Proposiciones Elementales

Proposición 1: (Euclides V prop 15) *las partes tienen la misma Antipairesis como los mismos múltiplos de ellas tomadas en el orden correspondiente.*

Sean A, B, son las partes y kA, kB los equi-múltiplos:
Yo digo que la Antipairesis de A y B, es la misma que la de kA, kB.

Prueba: sea C el resto, cuando en las partes A, B, el menor es removido del mayor.
Yo digo que, al borrar de la kA múltiplos, Kb, menos de la mayor lo que queda es el mismo múltiplo de C

Para el resto es el mismo múltiplo de lo que resta que el todo es el todo (Euclides V prop5).

Entonces, ya que los múltiplos ka, kb tienen el mismo orden que las partes A, B por lo tanto, los restos de los múltiplos kA, kB son los mismos múltiplos de los residuos de las partes A y B.

Por lo tanto, etc.

Nota: En la prueba de arriba 'pseudo-euclidiano ", así como en las siguientes pruebas. La concatenación kA y kB son simplemente los nombres de los múltiplos y debe ser interpretado sólo como un símbolo nuevo, sino que son elegidos (de manera no-euclidiana) para ayudar a un lector moderno que recordar que las magnitudes son (equi) múltiplos de otros. La interpretación de que k es un número y un múltiplo k-ésima en cuenta es no es de ninguna parte mediante la 'pseudo-euclidiano "prueba. Por supuesto, en el kA comentarios tiene su significado habitual, como una notación para la k-ésima de A varios.

La proposición afirma de magnitudes A, B, y un número k que $A / B = kA / kB$ si $A = B$, entonces $kA = kB$ y la afirmación es evidente. de lo contrario, podemos suponer que $A < B$ y consecuentemente, que $kA < kB$. Por lo tanto, lo que queda de $A, B - A$, y que queda de kA, kB es $kA, kB - kA$ desde $kB - kA = k\ (B - A)$ por Euclides V Prop. 5. Podemos seguir

Proposicion2: *Sean dos magnitudes desiguales (de una especie) y otros (de otro tipo) con el fin de algunos, primero en la segunda como la tercera a la cuarta. si de los residuos no son equi-múltiplos de la primera y la tercera y equi-como múltiplos de la segunda y la cuarta que los múltiples primera-segunda no tienen el mismo orden que las múltiples tercera a la cuarta, los originales de las magnitudes que son equi-múltiplos de la primera y la tercera y equi-como múltiplos de la segunda y la cuarta que el primer múltiplo de la segunda no tiene el mismo orden que los múltiples tercera a la cuarta.*

Sean A, B, se magnitudes, y A más grande que C, sean a, b magnitudes que tenga el mismo orden y, en consecuencia, una mayor ya sea c el exceso

Y de los restos C, B and c, b, sean estos equi-multiplos del primero y tercero y equi-multiplos del segundo y cuarto de tal manera que el primer múltiplo al segundo no tienen el mismo orden que el tercer múltiplo al cuarto. Yo digo que las magnitudes A, B y a, b son equi-multiplos de la primera y tercera y equi-multiplos de la segunda y cuarta de tal manera que el primer múltiplo a el segundo no tienen el mismo orden como el tercer múltiplo a el cuarto.

Prueba: para la de B, C, c se toman kB, kC, kc equi-multiplo y de B, b otro se toman equimultiplos mB, mb de tal manera que los múltiplos kC a mB no son del mismo orden como los múltiplos kc a mb.

Y sea S la suma de mB y kB y s la suma de mb y kb

Entonces, ya que A es la suma de C y B y kC es el mismo múltiplo de C como kB es de B

Por lo tanto la suma de kC y kB es el mismo múltiplo de la suma de A como kC es de C(Euclides V, prop 1)

Similarmente ya que a es la suma de c y b y kc es el mismo múltiplo de c como kb es de b.

Por lo tanto la suma de kc y kb es del mismo múltiplo de la suma a como kc es de c, pero kC, kc son equimultiplos de C, c.

Por lo tanto la suma de kC y kB y la suma de kc y kb son equimultiplos de A, a.

De nuevo, ya que mB es el mismo múltiplo de B que mb es de b y kB es el mismo múltiplo de B entonces kb es de b.

Por lo tanto, la suma de mB y kB es el mismo múltiplo de B que la suma de mb y kb es de b (Euclides V prop 2)

Pero S es la suma de mB y kB y s es la suma de mb y kb, por lo tanto, S, s son equimultiplos de B, b.

[caso 1]

Primero, sea kC mayor que mB, dejar el múltiplo kB adicionado a cada uno;

Entonces la suma de kC y kB es mayor que la suma de mB y kB; pero la suma de mB y kB era S. Por lo tanto la suma de kC y kB es como máximo igual a S. yo enseguida digo que la suma de kc y kb es mas grande que s.

Para, desde kC era mayor que mB y los múltiplos kc y mB no tenían el mismo orden como los múltiplo kc y mb

Entonces kc es más grande que mb y adicionando a esto el múltiplo mb podemos probar similarmente que la suma de kc y kb es mas grande que s

Ahora la suma de kC y kB y la suma de kc y kb son equimultiplos de A, a y S, s son otros equimultiplos de B, b ; y eso era probado que los múltiplos de A son máximos iguales que los múltiplos de By el múltiplo de a es mayor que el múltiplo de b.

Por lo tanto etc.

> La afirmación es la siguiente:
>
> Dadas las magnitudes A, B y a, b tal que $A > B$ y $a > b$ (y por lo tanto los restos son $A - B$ y $a - b$) se asume para los restos que los múltiplos $k(A - B), mB$ no tienen el mismo orden como los múltiplos $K(a - b), mb$, entonces de las magnitudes originales estas son múltiplos teniendo la misma propiedad.
>
> Un factor, adicionando en ambos de $k(A - B), mB$ la magnitud kB no cambia el orden relativo, y eso los rendimientos $kA, (m + k)B$ por Euclides V prop 1-2 similarmente $k(a - b), mb$ tienen el mismo orden como $ka, (m + k)b$, por lo tanto los múltiplos $kA, (a + k)B$ no tienen el mismo orden como los múltiplos $ka, (m - k)b$.

Proposición 3: *de las magnitudes que tienen diferente anthypairesis equi-múltiplos de la primera y la tercera y equi-como múltiplos de la segunda y la cuarta que el primer múltiplo de la segunda no tiene el mismo orden que los múltiplos de la tercera a la cuarta*

Dadas las magnitudes A, B teniendo diferente Antipairesis que las magnitudes a, b. Yo digo que las magnitudes A, B y a, b son equimultiplis la primera y la tercera y equimultiplos la segunda con la cuarta tal que el primer múltiplo con el segundo no son del mismo orden como el tercer múltiplo a el cuarto.

Prueba: dadas las magnitudes A y B con diferente Antipairesis que a a b después de un numero finito de eliminaciones de A, B y a, b nosotros podemos finalizar con los restos de A, B no tienen el mismo orden como el resto de a, b.

Pero desde los restos el primero al segundo no tiene el mismo orden que el tercero al cuarto

Entonces de las magnitudes originales que son equimultiplos del primero y el tercero del segundo y el cuarto tal que el primer múltiplo al segundo no tiene el mismo orden como el tercero al cuarto

[Proposición 2]

Por lo tanto etc.

Es esta afirmación para cuatro magnitudes A, B y a, b que si $A/B \neq a/b$ entonces existen equimultiplos kA y kB y ka y kb tal que kA a mB no tienen el mismo orden que ka y mb.

La prueba es como sigue: por asunción. La Antipairesis de A, B y a, b podrían después de un numero finito de pasos producir restos de A, B que no tienen el mismo orden como el correspondiente restos de a, b. En particular los restos satisfacen la hipótesis del procedimiento proposiciones tomando como múltiplos los restos de los restos de ellos mismos (esto es $k = m = 1$) la conclusión se sigue aplicando la proposición 2 de un número finito de veces

Proposición 4: *Que haya cuatro magnitudes (de un tipo) con el mismo orden de la primera a la segunda como la tercera a la cuarta. Si la primera supera el tercio al menos de una quinta magnitud y la segunda es como máximo igual a la cuarta, de los residuos, el primero supera el tercio al menos de la quinta magnitud y la segunda es como máximo igual a la cuarta.*

Dadas dos magnitudes desiguales A, B tienen el mismo orden como otras dos C, D y dado el exceso de a superior al exceso de C una quinta magnitud E y dado B que es máximo igual a D

Yo digo de los restos que: el primero excede al tercero por lo menos por E y el segundo es máximo igual a el cuarto.

Prueba [caso1]

Primero dado A, es mas grande que B y f es el exceso dado G es el exceso de C superior a D (entonces los restos son F, B y G, D)

Yo digo que los restos F exede el resto G por lo menos por la quinta magnitud E

Para, la suma de E y el resto G es el exceso por cuando la suma de E y C excede a D

Y, por hipótesis de la suma de e y C es mayor a A y B es mayor que D
Por lo tanto los excesos de la suma de E y C superior a D son máximo igual que los excesos A superior B.
Pero el exceso de la suma de E y C superior D eran la suma de E y el resto G
Y el exceso de A superior B era el resto F
Por lo tanto la suma de E y G es máximo igual a F

[Caso 2]

Empecemos dado A menor que B y F el exceso, dado C el exceso de D superior a C (entonces los restos A , F y C, G)
Yo digo que los restos F es máximo igual al resto G
Pero A es mayor que C y B es máximo igual a D por lo tanto el exceso F es máximo igual al exceso G
Por lo tanto etc.

Esta afirmación para magnitudes A, B , C , D con con A, B el mismo orden como C, D y una quinta magnitud e que si la desigualdad

(1) $A \geq C + E$ y (2) $B \leq D$

Espera, entonces ellos también tienen que A, B y C, D se sustituyen por sus restos. La prueba es la que sigue: si $A > B$, entonces los restos son $A - B, B$ y $C - D, D$. así, (2) tiene trivialmente para los restos, y la desigualdad $(A - B) \geq (C - D) + E$ se deduce fácilmente de (1) y (2). Si $A < B$, entonces los restos y la desigualdad $B - A \leq D - C$ se pueden deducir de (1) y (2).

Proposición 5: *(Euclides V prop. 17-18) magnitudes tienen la misma anthyphairesis separando, si y sólo si tienen la misma anthypairesis componendo.*

La afirmación es para magnitudes A, B y a, b que $A/B = a/b$ si y solo si $(A + B)/B = (a + b)b$ esto es evidente dada la primera eliminación de $A + B, B$ los rendimientos A, B

.

Proposición 6: *(múltiples tienen el uno al otro la misma anthypairesis que un número a un número)*

Pensando de números como múltiplos de una unidad, la afirmación es esta: para magnitudes A y a (no necesariamente son del mismo tipo) y numero k y m nosotros tenemos que $kA/mA = ka/ma$. Esto es evidente porque eliminamos de kA, mA siempre lleva un múltiplo de A dependiendo de k y m solamente

Proposición 7: *si dos magnitudes tienen una terminación anthypairesis, ellos podrían tener una medida común*

La afirmación es esta: si para magnitudes A, B el proceso A/B termina, entonces existe una magnitud U, medir tanto A y B, es decir que $A = kU$ y $B = mU$ para números k y m. La afirmación es evidente pero claramente, si U mide los restos entonces U mide las magnitudes originales y si nosotros tomamos como U un igual resto a la izquierda cuando el proceso termina, entonces U podría medir ambos restos.

La magnitud U usada en la prueba anterior es la máxima común medida entre A y B. Eso muestra lo observado que los números k, m tal que $A = kU$ y $B = mU$ dado por la anterior prueba depende solamente del proceso A/B.

Eso es tentador al comparar el resultado anterior con el resultado de las magnitudes conmensurables en Euclides X. en esta dirección la siguiente tiene:

Para dos magnitudes dadas A y B las siguientes condiciones son equivalentes

I. A a b tienen una terminación Antipairesis
II. A y B tienen una medida común
III. A a B tienen la misma Antipairesis como un numero a un numero

De hecho, (i) implica (ii) por proposición 7 (ii) implica (iii) por proposición 6, y (iii) implica (i) porque la Antipairesis de un número a un número termina.

Proposición 8*: (Euclides V prop. 9) magnitudes que tienen la misma terminación anthyphairesis a una tercera son iguales entre sí*

La afirmación es esta: para magnitudes A, B, C. si $A/C = B/C$, entonces $A = B$, previsto que la Antipairesis termina. El resultado general (sin restricción sobre la terminación) es probada en la siguiente sección. La prueba del resultado especial puede también ser basado sobre la observación complementando (el comentario a) proposición 7.en efecto, si A/C termina, entonces tenemos $A = kU$ y $C = mU$, y si $B/c = A/C$ entonces tenemos $B = kV$ y $C = mV$ con los mismos números k y m. De $mU = C = mV$ damos $U = V$ donde $A = kU = kV = B$.

Se sigue del anterior resultado la enunciación en el comentario a la proposición 7 podría complementarse con el siguiente:

Para números p, q tenemos $A/B = p/q$, si y solo si $qA = pB$, en efecto por proposición 1 y proposición 6, si $qA = pB$, entonces $A/B = qA/qB = pB/qB = p/q$ y a la inversa, si $A/B = p/q$, entonces $qA/aB = A/B = p/q = pB/qB$ y por lo tanto eso sigue de la proposición 8 que $qA = pB$.

3. Alternancia y magnitudes de una misma especie

Proposición 9*: si hay cuatro magnitudes (de un tipo), que toma como alternativa no tienen el mismo orden, la primera a la segunda tienen diferente anthyphairesis de la de la tercera a la cuarta.*

A, B, C, D son cuatro magnitudes, que se toma como alternativa, no tienen el mismo orden que es A, C no tienen el mismo orden como B, D; yo digo que la Antipairesis de A a B es diferente de la Antipairesis de C a D

Prueba. Para que A a B tengan la misma Antipairesis como C a D.
Para que A sea mayor que C y que E debe ser igual al exceso.
Entonces, desde A es mayor que C y A, C no tiene el mismo orden como B, D.
Por lo tanto B es mayor igual a D.
Pero para magnitudes que tienen el mismo orden, si el primero excede al tercero por una magnitud E y la segunda es mayor igual a la cuarta, entonces de los restos, el primero excede el tercero por lo menos por E y la segunda es mayor igual al cuarto [proposición 4]

Por lo tanto, desde A a b tendrían la misma Antipairesis como C a D, si algún número de movimientos de A, B es tomado y un numero igual de eliminaciones de C, D es tomado.

Entonces de los restos, el primero excede el tercero por lo menos por E y el segundo es mayor igual que el cuarto.
[Caso 1]

Yo digo que la Antipairesis de A y B pueden no terminar.

Para seguir continuamente removiendo de A, B termina después de un numero finito de eliminaciones con igual restos; y dejar que los restos de igualdad se deja igual a R

Pero A a B tenia la misma Antipairesis como C a D; por lo tanto continuamente removiendo de C, D termina después el mismo número de eliminaciones con igual restos; y dejar que los restos de igualdad se deja igual a S

Ahora porque estaba probado R excede S por lo menos por E y R es mayor igual que S; que es imposible.
[Caso 2]

Empecemos, yo digo que la Antipairesis de A y B debe terminar.
Para si la Antipairesis de A y B no termina, sigue removiendo de A y B puede ser repetido continuamente, entonces si A es por lo menos el resto R menor que E. Pero eso estaba probado que cualquier resto de A excede el resto de C por lo menos por E; y R es un resto de A, por lo tanto R es mas grande que E. Pero R pero R fue tomado menor que e; lo que es imposible
Por lo tanto etc.

Observación: la parte del argumento: "sigue removiendo de a y B son repetidos continuamente, entonces de A es por lo menos un resto R menor que E" es idéntica con la argumentación usada en Euclides X. porp 2. El argumento usado en un bien conocido forma Euclides X, 1 basado en la forma del Axioma de Eucllides, ver [H, III, p. 118]. La afirmación es para magnitudes $A, B, C\ D$ que si A, C no tiene el mismo orden como B, D entonces $A/B \neq C/D$. Nosotros claramente asumimos $A > C$ y, consecuentemente que $B \leq D$. Establecer $E = A - C$. La prueba es indirecta, asumiendo $A/B = C/D$. Eso sigue de (repetir la aplicación de) proposición 4, que para los restos R, U de cualquier orden de A, B y los restos S, V del mismo orden de C, D nosotros tenemos que $R \geq S + E$ y $U \leq V$. Si el proceso A/B (y por lo tanto también el proceso C/D) termina después de un finito numero de pasos entonces a que paso podríamos tener R=U y $S = V$, y la contradicción $R > S = V \geq U = R$. Y si el proceso A/B no termina, entonces, por el axioma de Eudoxo, después de un numero finito de pasos podríamos tener $R < E$ y la contradicción $E > R \geq S + E$.

si cuatro magnitudes (de una especie) tienen la misma anthyphairesis, ellos podrían tener también la misma alternancia anthyphairesis

Dado A, B , C , D magnitudes también que A a B tienen la misma Antipairesis como A a D; yo digo que podría también tener la misma Antipairesis alternativamente, que es A a C tienen la misma Antipairesis como B a D.

Prueba. Para A a C tiene diferente Antipairesis de que de B a D. Entonces sigue A a C tienen diferente Antipairesis que de B a D por lo tanto equimultiplos kA, kB de A , B y otros equmultiplos mC, mD de C , D podrían ser tomados tal que los múltiplos kA, mC no tienen el mismo orden como los múltiplos kB, kD. [proposición 3]

Pero equimultiplos tienen la misma Antipairesis como sus partes; [proposición 1]; por lo tanto los equimultiplos kA, kB tienen la misma Antipairesis como sus partes A, B

De manera parecida se puede que los equimultiplos mC, mD tienen la misma Antipairesis que sus partes C, D.

Entonces desde los equimultiplos tienen la misma Antipairesis como sus partes y por hipótesis las partes A, B y C, D tienen la misma Antipairesis, por lo tanto los equimultiplos kA, kB tienen la misma Antipairesis como los equimúltiplos mC, mD.

Pero los múltiplo kA, mC fueon tomados no con el mismo orden como los múltiplos kB, mD.

Y magnitudes que que alternativamente no tienen el mismo orden tienen diferente Antipairesis [proposición 9], por lo tanto kA a kB tienen Antipairesis diferente de que de mC a mD.

Pero eso prueba que kA a kB tendría la misma Antipairesis como mC a mD. Lo cual es imposible.

Por lo tanto etc.

La afirmación es para magnitudes A, B , C , D de un tipo que si $A/B = C/D$ entonces $A/C = B/D$. La prueba es indirecta: asume que $A/C \neq B/D$. Entonces por proposición 3, estas tienen múltiplos kA, kB *y* mC, mD tal que kA, mC no tienen el mismo orden como kB, mD. Eso sigue de la proposición 9 que

$$kA/kB \neq mC/mD$$

desde $A/B = C/D$ por asunción, la anterior desigualdad contradice proposición 1.

Eso podría conocer que la Alternancia juega una regla clave en Euclides prueba de varias igualdades de proporciones en el quinto libro. Alternancia podría jugar una regla similar a la teoría basada sobre la Antipairesis.

Así, usando alternancia, proposición 1 y alternancia empezar, eso sigue que

$$A/B = C/D \rightarrow kA/mB = kC/mD \quad \text{[Euclides V proposición 4]}$$

Usando alternancia, proposición 5 y alternancia empezar, eso sigue que

$$A/B = C/D \rightarrow (A+C)(B+D) = A/B \text{ [Euclides V proposición 12]}$$

Usando alternancia, la transitividad de "teniendo la misma Antipairesis", y Alternancia empezar, se sigue que

$$A/B = A'/B' \wedge B/C = B'/C' \rightarrow AA/C = A'/C' \text{ [Euclides V prop. 22]}$$

Usando alternancia doble, la propiedad [Euclides V prop 12] probada antes, y

Alternancia empezar, resulta que

$$A/C = A'/C' \wedge B/C = B'/C' \rightarrow (A+B)/C = (A'+B'/C') \text{ [Euclides V prop 24]}$$

Nota la propiedad de inversión, que es,

$$A/B = A'/B' \rightarrow B/A = B'/a' \text{ [Euclides V, porisma a prop. 7]}$$

Es evidente sobre la base antipairetica. Por otra parte damos el siguiente resultado

Proposición 11*: magnitudes tienen la misma anthypairesis, si y solo si, tienen el mismo radio en el sentido de Euclides V def 5*

Dadas A, B, C , D cuatro magnitudes. La siguiente afirmación es equivalente:

$$A/B \neq C/D \leftrightarrow A{:}B <> C{:}D$$

Que $A/B \neq C/D \rightarrow A{:}B <> C{:}D$ es el contenido de proposición 3. Para probar el contrario Asumimos que los múltiplos kA, mB no tienen el mismo orden como múltiplos kC, mD. Entonces, por proposición 3, eso sigue que $kA/kC \neq mB/mD$. Por proposición 1 y alternancia, nosotros obtenemos $A/B \neq C/D$.

4. Magnitudes de diferentes tipos y orden relativo

Definición 3: cuando cuatro magnitudes (dos de una especie y dos posiblemente de otra especie) tienen diferente anthyphairesis, y si, cuando los residuos dejan de ser en el mismo orden, lo que queda de la primera magnitud es mayor que lo que queda de la cuarta, la primera a la segunda se dice que tiene mayor anthyphairesis que la tercera a la cuarta.

Para magnitudes A, B, c, d podemos escribir $A/B > c/d$, si A a B tienen mayor Antipairesis que c a d, si denotamos por A_i, B_i que restos de A, B antes el eliminaciones, la condición es que a el primer paso n, donde A_n a B_n no tienen el mismo orden como c_n a d_n, tenemos $A_n > B_n$ o $c_n < d_n$.

Si pensamos por el momento de las magnitudes como reales positivas a, b, c, d y de Antipairesis como los cocientes ordinarios $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, notemos que "teniendo el mismo orden" principalmente que los cocientes $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, son o bien mayor que, igual a 1, o menor que 1. Por otra parte, si este es el caso, el orden relativo de los cocientes $\frac{a}{b}$ y

$\frac{c}{d}$, no se ha modificado el proceso de eliminación y cuando el proceso pare a correr idénticamente, el orden relativo de los cocientes es determinado fácilmente. Los cocientes de los restos son separados por el número 1 y por lo tanto, el primer cociente es mayor que el segundo si y solo si el primer cociente es más grande que 1 o el segundo cociente es menor que 1…

Cabe señalar que la relación entre Antipairesis se ha definido anteriormente, de hecho, sólo depende de los procesos, esto es, si $A/B > c/d$ y α y β es una tercera parte de magnitudes tal que $\alpha/\beta = A/B$ entonces $\alpha/\beta > c/d$ (ver Euclides V prop 13). Es un ejercicio divertido para un lector moderno para demostrar que la relación es de hecho un orden total en el conjunto de antipairesis, en particular, la relación es asimétrica y transitiva

Proposición 12: *(Euclides V prop 8) magnitudes desiguales, la mayor tiene el misma anthyphairesis que la menor y el mismo menor que la menor*

Proposición 13: *(Euclides V prop 10) dos magnitudes cuando tienen la misma anthypairesis, esta cuando una mayor anthypaieresis es más grande y esto cuando tienen la misma anthyphairesis que la menor*

las afirmaciones de las dos proposiciones anteriores son los siguientes: dado A, B , C magnitudes (del mismo tipo), entonces tenemos que:

$$A > B \leftrightarrow A/C > B/C \leftrightarrow C/B > C/A$$

Prueba. Si $A > B$, entonces la proposición 9 es ampliada para magnitudes A, C, B, C. El proceso A/C es diferente del proceso B/C, por lo tanto, probar el primero es equivalente, nosotros podemos asumir que $A/C \neq B/C$ y consecuentemente que A≠B. dado A', C' *y* B', C'' denotamos respectivamente los restos de A, C y B, C el punto donde los restos podrían llegar a tener el mismo orden.

Asumimos primero que $A > B$, entonces eso sigue de la proposición 4 que $A' > B'$ y $C' \leq C''$. Afirmamos que $A/C > B/C$, es decir, $A' > C'$ *o* $B' < C''$. en efecto, de otro modo tendríamos $A' \leq C'$ *y* $B' \geq C''$, y, consecuentemente, la contradicción $A' \leq C' \leq C'' \leq B' < A'$. Por el contrario se asume que $A/C > B/C$, es decir, $A' > C'$ o $B' < C''$, afirmamos que A>B, en efecto, de otro modo tendríamos A<B, y, por lo que se acabad e demostrar, también $A' < C'$ o $B' > C''$. Pero eso es una contradicción puesto que los restos no tienen el mismo orden.

El segundo afirma la equivalencia se deduce fácilmente de la definición 3.

Proposición 14: *magnitudes (dos son de una especie y las otras dos posiblemente son de otra especie) tienen la misma anthyphairesis si y solo si ellas están en el mismo radio en el sentido de Euclides V def 5*

Dados A, B y a, b cuatro magnitudes. La afirmación es equvalente a lo siguiente

$$A/B = a/b \leftrightarrow A:B::a:b.$$

Note que el caso donde todas las cuatro magnitudes son de mismo tipo es tratado en la proposición 11.

Prueba. Que $A/B = a/b \rightarrow A:B::a:b$.es el contenido de la proposición 3. Para demostrar lo contrario, asumimos que $A/B = a/b$, tomamos multiplis kA, kB y ka, kb y asumimos priemro que $kA > kB$, entonces $kA/kB > mB/kB$ por proposición 12. De las dos ultimas

Antipairesis, la primera es igual a ka/kb por proposición 1 y la asunción, y la segunda es igual a mb/kb por proposición 6, por lo tanto la ultima desigualdad implica que $ka/kb > mb/kb$ y concluimos que $ka > mb$ por proposición 13. Intercambiando la as y la bs se sigue que si $kA < mB$, entonces $ka > kb$. Finalmente, por exclusión o directamente de el cometario a proposición 8, eso sigue que si $kA = mB$, la $ka = mb$. Por lo tanto. A, B y a, b están en la misma proporción.

Proposición 15*: de cuatro magnitudes (dos son de una especie y las otras dos de una segunda especie) la primera a la segunda tiene mayor anthypairesis que la tercera a la cuarta si y solo si la primera tiene mayor radio que la segunda que la tercera a la cuarta en el sentido de Euclides V def 7.*

La afirmación es esta: para cuatro magnitudes A, B y a, b tenemos

$$A/B > a/b \leftrightarrow A:B > a:b$$

Prueba. Asumimos que $A:B > a:b$, es decir para números k, m tenemos que $kA > mB$ y ka≤mb, entonces por proposición 1, proposición 12 y proposición 6, tenemos que $A/B = kA/kB > mB/kB = m/k$ y $m/k = mb/kb \geq ka/kb = a/b$, donde, por transitividad de la relación de orden, tenemos que $A/B > a/b$.

Por el contrario asumimos que $A/B > a/b$. Entonces las Antipairesis A/B y a/b son en particular diferente y, por proposición 3, es sigue que esos son múltiplos de ka, mb , entonces no tienen el mismo orden como los múltiplos ka, mb. Por otra parte, de la prueba de la proposición 3 eso sigue que esos múltiplos de A, B y a, b respectivamente tienen el mismo orden los restos de A, B y a, b. Por lo tanto desde $A/B ></b$, nosotros tenemos o bien $kA > mB$ (y consecuentemente $ka \leq mb$) o $ka < mb$ (y consecuentemente $kA \geq mB$).en el primer caso nosotros concluimos que $A:B > a:b$ directamente por Euclides V, def 7. En el segundo caso la conclusión es la misma como se sigue reemplazando los números, k, m por $qk + 1, qm$ con un numero suficientemente grande q.

Anexo 3: Traducción[11] L´héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide

EL LEGADO EPISTEMOLOGICO DE EUDOXO DE CNIDE

Una recuperación de prueba

Por

Jean-Louis GARDIES

Profesor de la Universidad de Nantes

Libro publicado en colaboración con el Centro Nacional de Investigaciones Científicas

PARIS

Librería filosófica J. VRIN

1988

PRÓLOGO

De Eudoxo de Cnido, disponemos muy pocas evidencias. Pero es posible asignarle de forma segura las principales proposiciones constitutivas del Libro XII de los *Elementos* de Euclides, en los cuales algunos historiadores ya están mostrando lo más reservado sobre la teoría de las proporciones en el Libro V. Lo que Aristóteles dice de sus posiciones propiamente filosóficas, brevemente, se reduce a pocas cosas.

Sin embargo un estudio cuidadoso del texto de Euclides, pone de manifiesto entre los libros V y XII la continuidad de todos los archivos y aún más sorprendente es que no se puede encontrar en los libros intermedios. La profundidad del libro V y la fuerza del libro XII, hacen pensar que el uno y el otro no pueden ser obra de un geómetra no sólo muy inteligente, sino además que posee una extrema exigencia en sus principios

[11] Esta traducción se efectuó en el desarrollo de éste trabajo de grado. Por tanto dicho documento de trabajo no tiene fines comerciales. Puesto que no ha sido publicada, no se puede utilizar como referencia; en caso de que se quisiera citar alguna idea incluida en el artículo, habría que referenciar el documento original (en inglés). Bogotá, diciembre de 2012.

teóricos. Las pistas en la obra de Euclides muestran la huella de un matemático considerable, cuya nominación a la admiración incluso de Eratóstenes y Arquímedes apenas un siglo más tarde, no tiene otro nombre. La originalidad de la inspiración nos muestra de manera única los fragmentos de la obra Euclidiana ante la cual nos parece muy difícil resistirnos a su análisis, probablemente a través del testimonio, pero el cual es de hecho testigo de ello. Ahora trataremos de mostrar lo que el autor de la obra Euclidiana pudo haber hecho en un número de pasos después de haber traicionado a los autores de los desarrollos, a lo que vamos a acceder ahora mismo.

Al no tener otro recurso más que el análisis de textos matemáticos, estamos obligados a construir por completo a partir de su análisis nuestras propias suposiciones. Probablemente, Eudoxo de Cnido es también conocido por tener, entre los primeros, un modelo geométrico basado en el conocimiento astronómico de su tiempo. Si no mencionamos estos aspectos de su trabajo y descuidamos por completo esta fuente de información para un autor del cual conocemos tan poco,

Sería nuestra la deliberación crítica que acabamos de mencionar.

Por otra parte, los problemas a los cuales dan respuesta los *Elementos*, los mismos que estamos tentados a atribuir a Eudoxo siguen estando implícitos en el corazón de las matemáticas occidentales, por lo que si bien su nombre no persigue los escritos que han sobrevivido, la presencia de algunos vacíos que hemos mencionado no parecen ajenos a lo que siguió, además de algunas inflexiones de la historia y que en los tiempos mismos de la inspiración Eudoxiana han sido los más olvidados y descuidados. Vamos a incluir el nombre de Eudoxo en el título de un ensayo anterior. Aquí se trata de un paso más en el camino, según el cual los problemas planteados en su trabajo vieron a partir de este punto la posterior evolución de las matemáticas que a veces son imposibles de entender sin hacer referencia a la idea de incluso aquellos que no pudieron haber ignorado la existencia de derechos de autor.

El interés que hemos encontrado en esta investigación es de primer orden y de la historia: El intento de Eudoxo de constituir la base implícita de una cierta tradición occidental, lo que hoy es la base implícita que sale a la luz. Pero aparte de este interés histórico, hay otro, directamente epistemológico: Eudoxo se esforzó en dar a las matemáticas un fundamento concreto. Las concreciones, que se dieron cabida en el siglo XVII sin haber sido comprendidas realmente, dieron paso a las soluciones constructivistas e idealistas de la escuela alemana del siglo XIX, las cuales no encuentran la problemática de Eudoxo, sino que solo aportan soluciones a una inspiración antitéticamente original.

Algunas lecturas que han permitido alimentar esta prueba y entregarnos ideas de referencia son en particular las de autores como Robert Simson, Thomas L. Heath, Oskar Becker y, más recientemente, Caveing Maurice. Presentaciones, discusiones, conversaciones, que se han aprovechado y que seríamos incluso incapaces de elaborar por nuestra cuenta. Nos gustaría expresar nuestro especial agradecimiento al amigo Jean Dhombres, con el que el trabajo conjunto dentro de un equipo docente y de investigación durante muchos años fue motivante para muchos y para nosotros, enriqueciendo nuestras conversaciones. Le damos las gracias también por haber leído este trabajo y sugerir algunos cambios o correcciones. Que por supuesto tuvieron responsabilidad plena en las conclusiones y posiciones nuestras.

PRIMER CAPITULO

ARISTÓTELES Y EUCLIDES

La forma en que las matemáticas están presentes en los *Elementos* de Euclides plantea muchos problemas relacionados con las concepciones epistemológicas de su autor o de sus autores. La organización del conjunto manifiesta en efecto las singularidades, por no decir lo extraño, sobre las cuales es difícil cuestionarse si no se cuenta con un apoyo histórico. La obra de Aristóteles tiene un número suficiente de indicaciones relativas a la filosofía de las matemáticas, de modo que pudo servir de doble referencia para la inteligibilidad misma de *elementos* producido sólo unas pocas décadas más tarde. Las observaciones de Aristóteles podrían en primer lugar ayudarnos a entender ciertas características de la obra *euclidiana* de tal manera que uno puede admitir que pertenecen a la misma inspiración. Pero si bien son muchos los puntos de contacto, todavía es imposible de imaginar a Euclides como resultado de Aristóteles, por lo que las reflexiones del Estagirita sobre las matemáticas no son menos útiles para aclarar el significado de *elementos*, cuando testifican la existencia al mismo tiempo, de las tradiciones intelectuales y de diferentes puntos de vista, es decir, que la obra fue finalmente elegida no euclidiana.

∴

Sabemos que el libro V de Euclides ofrece una teoría de *razones* y *proporciones* (λόϒοι) *entre magnitudes*, donde el autor llama *magnitudes* que correspondientemente se aproximan a lo que,

Hoy en día llamamos *los reales positivos*. Sin embargo el Libro VII propone una teoría de los números, es decir, de los números naturales (excluido el cero[12]) y de las razones entre números. La dualidad del número y magnitud se afirma aquí en contra de la tradición pitagórica, que probablemente tiende a igualar la unidad aritmética, el punto geométrico, y un tipo de átomo material. Es bien sabido que aquello que denominamos la crisis de los irracionales que, revela la imposibilidad hacer corresponder una cierta razón entre magnitudes con una razón entre enteros, obligó a los griegos a duplicar la teoría de los números enteros a una nueva teoría de razones entre magnitudes.

Para comprenderlo mejor, es necesario librar los hábitos de la mente inspirada en una práctica matemática que se remonta por lo menos unos cuatro siglos. El autor de la obra Euclidiana no tiene en cuenta el conjunto de los enteros como un simple subconjunto de las magnitudes, lo cual hoy estamos tentados a hacer. Por *magnitudes*, el comprende las realidades que poseen, entre otras propiedades, el ser indefinidamente divisible, o que los números no están compuestos de unidades

[12] Dejando por el momento de lado el hecho de que el uno, en rigor, para el autor del libro VII no es un número.

indivisibles. No puede haber ninguna duda de la aplicación a los números de una teoría desarrollada para las magnitudes. Por lo tanto, hay una enorme ingenuidad en preguntarse, como hacen algunos grandes autores, como la definición 5 del libro V de la magnitudes que es la base de las muchas manifestaciones sobre las razones entre magnitudes no juega ningún papel en la aritmética de los libros VII, VIII y IX, y que evidentemente permite llamar a la definición 20 del libro VII una relación entre números.

Si los números no representan para él un tipo especial de magnitud, ¿por qué el autor de la obra euclidiana en caso de que considere oportuno mostrar en el libro VII para los números los teoremas que muestran las demostraciones ya tratadas en el Libro V para las magnitudes? Por otra parte, ¿por qué casi nunca admiten en los libros de aritmética, tal como se establece para los números un resultado obtenido para las magnitudes en los dos libros inmediatamente anteriores? Sólo para convencernos de la mirada anterior, basta observar las ediciones de Peyrard o Heath, donde la indicación al margen del texto, las definiciones y propuestas anteriores

Son referidas y supuestas en este texto. Los libros VII, VIII y IX se refieren sólo a sí mismos, por supuesto independientemente, de las nociones comunes de los principios del Libro I.

Reconozcamos que lo que le hemos presentado es una formulación general, sin embargo hay algunas excepciones aparentes las cuales deben ser estudiadas más de cerca, porque es fácil convencernos que no resisten al análisis.

Vamos a empezar esta crítica con la aparente excepción en los llamados libros aritméticos en definiciones como las de razón doble, razón triple, razón por alternancia y razón por igualdad, definiciones que se dan al comienzo del libro V (respectivamente, las definiciones 9, 10, 12, 17). Si bien las definiciones del libro V basan su preocupación sólo por la magnitud, hay que reconocer que, estrictamente hablando el autor de la obra euclidiana para poder aplicar estas a los números debería introducir una nueva versión de las definiciones, esta vez adaptadas a los números en la lista de definiciones que abren el libro VII. Basta esto para concluir que los responsables de la obra de Euclides tomaron esta debilidad para querer una repetición del discurso, que de hecho era solo una, y no parece haber sido razón suficiente para llevar a estas definiciones del principio del libro VII los principios del Libro V. Una debilidad muy leve, que podría ser el origen de los errores que fueron definiciones simples.

La segunda excepción aparente a tener en cuenta en los libros de aritmética consiste en lo que podría llamarse la transitividad de la relación de igualdad entre razones. De hecho, la transitividad no se encuentra explícitamente demostrada en ninguna parte de los libros de aritmética, mientras que por el contrario para las magnitudes, ese es el tema de la proposición 11 del libro V, incluso algunos comentaristas como Heiberg se han visto obligados a concluir que estos libros de aritmética se podían referir a esta proposición 11-V. Sin embargo la realidad es muy diferente, como lo ha señalado ya Heath: Si el autor de los libros de aritmética no ha sentido la necesidad de probar la transitividad en la igualdad entre razones de números, es debido a que esta surgió inmediatamente de la forma en que se define la proporción[13] en el libro VII que invertirá uno de los méritos del autor del Libro V, al darse cuenta que en su nueva definición de la proporción de cuatro magnitudes, o si se prefiere, de igualdad de razones entre magnitudes, era necesario dar una demostración explícita de una propiedad que ahora fue un poco menos inmediata.

La tercera excepción evidente que aún no se ha analizado consiste en la proposición 19 del libro VII, la cual se parece a las propuestas 7 y 9 del Libro V. La demostración de 19-VII presupone y admite que para cualesquiera tres números a, b, y c

$$\text{Si } \frac{c}{a} = \frac{c}{b}, \text{ entonces } a = b$$

resultado que queda demostrado por 9-V para tres magnitudes cualesquiera. Pero, sin la necesidad de utilizar 9-V, observamos que este resultado se sigue inmediatamente

[13] Nos anticipamos al comentario que habriamos de dar en el capítulo III, p. 47, sobre la definicion 20 del libro VII. Si la igualdad de dos razones $\frac{a}{b} y \frac{c}{d}$ y otras dos razones $\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$ se definen, respectivamente, como

$$\exists\, xy\ [(a = xb \,\&\, c = xd)\ o\ (a = b : x \,\&\, c = d : x)\ o\ (a = y\,(b : x) \,\&$$

y por

$$\exists\, xy\ [(c = xd \,\&\, e = xf)\ o\ (c = d : x \,\&\, e = f : x)\ o\ (c = y\,(d : x) \,\&\, e$$

las propiedades de los números enteros proporcionan una expresión al autor y los valores de x e y son respectivamente las mismas y por tanto es razonable deducir de estas dos expresiones:

$$\exists\, xy\ [(a = xb \,\&\, e = xf)\ ou\ (a = b : x \,\&\, e = f : x)\ ou\ (a = y\,(b : x) = y\,(f : x))]$$

Es decir: $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$

de la definición dada para la proporción entre números[14]. La demostración de 19-VII supone que admitimos su reciproco, es decir que

$$\text{Si } a = b, \text{entonces } \frac{c}{a} = \frac{c}{b}$$

Observemos, sin apartarnos del libro VII, que a y c, son número arbitrarios, y la proposición 4 del libro VII nos asegura de que

$$\exists\, xy\, [c = xa \text{ ó } c = a : x \; o \; c = y\,(a{:}\,x)]$$

Donde si $a = b$, es suficiente para establecer que

$$\exists\, xy\, [(c = xa \,\&\, c = xb) \text{ ó } (c = a{:}\,x \,\&\, c = b{:}\,x) \text{ ó } (c = y(a{:}\,x) \,\&\, e = y(b : x))]$$

Es decir, que de acuerdo con la definición 20 del libro VII,

$$\frac{c}{a} = \frac{c}{b}$$

Por consiguiente el autor de la proposición 19-VII no tenía necesidad de las proposiciones 7 y 9 del Libro V ya que presupone que la demostración aparece de forma inmediata como para merecer una aclaración.

---

14 $\frac{c}{a} = \frac{c}{b}$ se convierte en efecto, la definición 20 del libro VII:

$$xy\, [(c = xa \,\&\, c = xb)\; ou\; (c = a : x \,\&\, c = b : x)\; ou\; (c = y\,(a : x) \,\&\, c$$

con las propiedades de los números enteros se puede deducir inmediatamente que $a = b$.

Por lo tanto, la observación cuidadosa de los libros aritméticos de Euclides nos lleva a concluir que estos no tenían alguna necesidad de los resultados del Libro V, y que las demostraciones relacionadas con los números no hacen un llamado a las relacionadas con las magnitudes, por esta razón es que los números son para los griegos clásicos, a diferencia de su sentido moderno, algo externo a todo de lo que ellos llaman magnitudes.

La necesidad de una distinción entre estos dos objetos de la matemática parece ya aceptada por Platón, que distingue entre el nivel de las ideas y el de las cosas sensibles, dos familias de las entidades intermediarias (μέιάέμ), a las cuales presta atención el matemático: los números y las magnitudes. Con mayor razón, la distinción es destacada por Aristóteles, en particular, en los Se*gundos Analíticos*:

> *No podemos pasar a través de la demostración de un género a otro, por ejemplo demostrando la media geométrica por medio de la aritmética... Es posible que los axiomas de los cuales procede la demostración sean los mismos, pero si los géneros son distintos, en cuanto a la aritmética y la geometría, no podemos aplicar la aritmética para demostrar las propiedades de las magnitudes, a menos que admitamos que las magnitudes son números*[15].

Admitir que las magnitudes son números fue, en el Espíritu de Aristóteles, el error de los pitagóricos, como el error que ocurre a menudo en la historia moderna en la lectura de los Elementos de Euclides, es admitir que los números son magnitudes, bajo la clásica inclusión del conjunto de los enteros en el de los reales y nos olvidamos de que ello no tenía ningún significado para los griegos.

Entre los principios comunes que se pueden encontrar a partir de un género a otro, Aristóteles cita:

[15] segundos analíticos, 75 y desde 38 hasta 75 b6. Aristóteles también añade inmediatamente: << ¿por qué sin embargo no podemos considerar algunos casos, lo diremos más adelante >>

Si de términos iguales restamos términos iguales, los restos son iguales[16]

Ya que esto es cierto igualmente tanto para números como para las magnitudes. En su Física[17], Aristóteles también hace hincapié en los principios comunes a números y magnitudes, lo que ahora llamamos el axioma de Arquímedes, ya que insiste en la especificidad de los otros principios, en particular, haciendo hincapié en la divisibilidad indefinida de las magnitudes, sin ningún equivalente para los números.

La diferencia entre Platón y Aristóteles es que, por primera vez, la dualidad de las magnitudes y los números tenían un fundamento ontológico. Platón, en testimonio de Aristóteles, concebido el número y la magnitud como dos realidades separadas de lo sensible, mencionando:

Entre las cosas que allí existen, además de las cosas sensibles y las ideas, las cosas matemáticas, realidades intermedias, que se diferencian por un lado de las cosas sensibles, en las que son eternas e inmóviles y por el otro en compartir ideas, ya que hay varias similares mientras que cada idea en sí es única[18].

Para Aristóteles, por el contrario, la dualidad de las magnitudes y de los números parece haber tenido un fundamento epistemológico, donde las entidades matemáticas resultan de la abstracción hecha de manera sensible.

Esta teoría de la abstracción para Aristóteles significaba que el razonamiento debe proceder de un nivel más general. Es un error a la razón centrarse en el caso especial cuando es posible ϗαθολομ, es decir centrarse en demostrar la generalidad. Para demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos, no es suficiente establecer la particularidad en el triángulo equilátero, el triángulo isósceles y escaleno. Se procedería de manera sofistica, ya que, "el triángulo, como tal,

[16] Analíticos de 41 al 76: ϊσα άπό ϊσϖν δν, … ϊσα τά λοίπα, … tomado como ejemplo unas líneas más adelante 20-21 y 76 b.
[17] Incluye 207 b.
[18] Aristóteles, Metafísica, 987 b 14-108.

tiene esta propiedad[19]." Así, en la lógica de tal concepción de abstracción, es conveniente establecer por separado una teoría de la magnitud y una teoría de números, que, con la condición de construir una teoría para las propiedades comunes a cada una; restricción que evidentemente, no tenía sentido para la concepción ontológica que Platón hacía de cada uno de ellos.

Encontramos pocos rastros de este tipo de filosofía aristotélica de la abstracción en los Elementos de Euclides. Ni el quinto libro, de hecho, ni el séptimo libro contienen todo lo que contiene en su axiomática. Ellos al menos presuponen χοτμαϊ εννοτα, las nociones comunes, o quizás más exactamente, las propuestas conjuntas, es decir común a las magnitudes y a los números, que se expresan en el libro I, es decir, limitándonos a lo que propone Heath:

1- Los términos iguales a un mismo término son iguales entre sí;

2- Si se añaden términos iguales a partes iguales, los totales son iguales;

3- Si restamos términos de iguales de términos iguales, los restos son iguales[20];

4- Los términos que se ajustan los unos a los otros, son iguales entre sí;

5- El todo es mayor que la parte.

Hemos traducido la palabra "términos" del plural neutro griego que Peyrard desafortunadamente muestra como "magnitudes" y que Heath con mayor acierto traduce como "cosas". "Magnitudes" es una falsa sensación puesto que lo propio de estas proposiciones esta, precisamente, en que sean comunes tanto en números como en magnitudes. El neutro griego es también aquí intraducible en idiomas que no impliquen estos términos, ya que su función es, precisamente, referirse a lo que no tiene denominación. En la dificultad de razonamiento ɿαθøéXou, nos dice Aristóteles,

[19] Segundos Analìticos, 74 y 25-30

[20] έάν άπό ϊσων ϊσα αφαιρεθή, τά χαταλειπόμενά εστιν ϊσα. Puede ser comparado con la versión de Aristóteles citada anteriormente, nota 5.

en efecto, que el objeto es anónimo[21], por lo que no se tiene un nombre único para describir todas las diferentes cosas que aún son diseñadas[22].

La teoría de la relación parte-todo, la mereología (para darle su nombre actual), llamado por la epistemología aristotélica y descritas por proposiciones comunes que por desgracia se quedan cortas, ya que el primer libro de Euclides está directamente involucrado en la consideración de magnitudes muy específicas, tales como líneas y ángulos. Si permanece primitivo, hay que subrayar que dicha teoría, destaca la relación de parte de un todo, es decir dos entidades esencialmente homogéneas la una a la otra, se sitúan en el opuesto de nuestra moderna teoría de conjuntos, para que la composición del elemento a todos los contrarios presupone la heterogeneidad radical de una a la otra. La mereología, notemos de paso, que se abre una matemática concreta y natural, como la teoría de conjuntos que se abre inversamente con el desarrollo de las idealidades sucesivas.

Tal concepción mereológica, por otra parte, encaja perfectamente coherente con la representación, tradicional entre los griegos, Thales al menos si uno cree Jámblico, como el número de colección de unidades. En este punto Aristóteles es poco original, en la definición del número como síntesis de unidades[23], multitud de unidades[24], pluralidad de unos[25]. La homogeneidad de la parte de todo evidentemente se encuentra entre la unidad y el número. La definición 2 del libro VII de los Elementos

Número es una pluralidad compuesta de unidades

Es la tradición griega demasiado clásica como para merecer ser clasificada como aristotélica, un pitagórico de antes lo hubiera dicho de otra manera.

[21] Ἀνώνυμον, segundo análisis, 74 a 8.
[22] διά τό μή εἶναι ὠνομασμένον τι ταῦτα πάντα έν, segundo análisis, 74 a 21.
[23] Metafísica, 1039 a 12
[24] Ibid., 1053 a 30.
[25] Física, traductor en linea207 b 7.

Sin embargo, la definición 1, en la que el libro VII apoya la anterior:

La unidad está relacionada con lo que cada una de las cosas que se llama uno

La cual no está en sentido Pitagórico.

1) Esta propuesta se presentó por primera vez en una operación matemática: Ello significa que los griegos sienten que no tienen necesidad de hacer cálculos de fracciones unitarias, como se podría saber antes del siglo V, como lo hicieron egipcios y babilonios, en particular, pudieron haber imaginado ciertos cálculos.

El punto de vista que se impone en los griegos es que si m^{cmcs} y n^{cmcs} pueden aparecer en el cálculo, es suficiente cambiar la unidad básica, es decir, "aparece" la $m\ x\ n^{cmcs}$ parte de la unidad inicial para hacer desaparecer todo rastro de fracciones unitarias, cuyo uso en el cálculo es enteramente innecesario. Esta es la práctica de los expertos en la ciencia de los números ya mencionados por Sócrates en la República[26]:

Si nos comprometemos en el razonamiento de dividir el uno, lo rechazan y no lo aceptan, y si usted divide la unidad por sí misma, su multiplicación produce el caso de que el uno ya no aparece más como uno, pero si como una pluralidad de partes.

2) Filosóficamente, esta frase tiene resonancias anti pitagóricas amplias. Diciendo que la unidad, también dice que no lo es: lo cual no es lo sustancial de las cosas seriamente compuestas.

3) Sin embargo esta frase no parece sólo anti pitagórica sino incluso anti platónica, si uno se basa por lo menos en la manera en que Aristóteles interpreta el pensamiento de su maestro:

[26] República, 525 e.

El uno es la sustancia misma y no el predicado de otra cosa que se dice que es uno, Platón cae en acuerdo con los pitagóricos[27]

Para después de la concepción, rechazada por Platón, así como por los pitagóricos, que uno es una u otra cosa, otra en el que no podría presentarse en sí misma como sustancial, concepción que parece corresponderse con el pensamiento de Aristóteles, tal como se encuentra en la definición 1 del libro VII: La unidad, para Aristóteles como para Euclides, es un predicado del individuo, lo cual se dice que es la unidad. Sin duda que esto no es uno, más tarde, después de Cantor y Frege, el singleton, todos los individuos son los únicos elementos, es esta el individuo mismo. Digamos que, para Aristóteles y Euclides, la unidad no es un predicado de predicado, sino un predicado de persona común y corriente, y el número puede ser definido como un conglomerado de unidades.

En este sentido, la convergencia parece tan estrecha entre la epistemología de Aristóteles y la presentación de las matemáticas propuestas por el alejandrino.

∴

Sin embargo en otras partes, la realización de los elementos se desvía de lo que podría haber sido un proyecto genuinamente aristotélico. Habíamos señalado previamente, que la mereología, indicada en el libro I con la lista de las *nociones comunes*, como por lo general era llamada por la concepción aristotélica de la abstracción. Mas precisamente aun, Euclides muestra por separado las propiedades comunes a los números y a las magnitudes, lo que Aristóteles había dicho explícitamente que se tenía que establecer a su nivel de generalidad.

---

[27] Repetimos aquí que la traducción excelente de este pasaje da Tricot (Métaphysique, 987 b, 22-24): τό μέντοι γε έν ούσίαν είναι, χαί μή έτερον τι όν λέγεσθαι έν, παραπλησίως Πυθαγορείοις έλεγε. Se asombra de que Maurice Caveing (La constitution du type mathematique de l'idéal'té dans la pensé grecque, lille-III, t. II, p. 778), recordando la definición de dos libros VII de Euclides, las llamadas en este último punto << platónico bueno>> Es aún más sorprendente, ya que caveing tradujo la frase en el camino metafísico mismo que hace Tricot (pp. 931-932):

> Esa es la sustancia y no el atributo de algo que se llamaría una, muy cerca de lo decian los pitagóricos.

Tome las dos propiedades que se expresan hoy en día para las dos equivalencias siguientes:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a\ x\ d\ =\ b\ x\ c$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

ahí, para los griegos, entre estas dos propiedades, está la diferencia fundamental; que la segunda es común a los números y las magnitudes, mientras que la primera sólo se aplica en el conjunto de los números, ya que no puede haber ninguna duda, en la construcción euclidiana, para admitir una multiplicación de dos magnitudes la una con la otra. Y la Proposición 19 del Libro VII:

Si cuatro números son proporcionales, el producto del primero y el cuarto será igual al del segundo y el tercero; y si el producto del primero y el cuarto es igual al producto del segundo y el tercero, los cuatro números serán proporcionales

¿No puede haber algo análogo en el Libro V para las magnitudes[28]. Por tanto, decir, al igual que Jean Itard, que "El libro V toma como punto de partida una generalización de esta equivalencia, generalización que supone también la conmutatividad del producto"[29], sosteniendo que esta "gran generalización" sirve "Como base de la teoría

[28] De hecho, es importante no confundir esta propuesta, expresada en su generalidad, con el contenido de la proposición 16 del libro VI:

Si cuatro rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por los extremos es igual al rectángulo comprendido por los medios; y si el rectángulo comprendido por los extremos es igual al rectángulo comprendido por los medios, las cuatro rectas serán proporcionales.

Cabe señalar que la propiedad está sujeta a una restricción doble:

1. sólo se aplica a magnitudes especiales;

2. que no todos ellos son homogéneos (longitudes y áreas). Es por eso que esta propuesta no tiene cabida en la teoría general de las magnitudes del Libro V. Tenga en cuenta también que algunas proposiciones del Libro II están muy cerca de esta propiedad (que, obviamente, no se pueden expresar, porque aún no se dispone en el Libro II de una definición de proporción), y es esta misma proximidad que permite al autor del libro II de prescindir del reconocimiento de la propiedad general de la cual estamos hablando.

[29] Los libros aritméticos de Euclides, Historia del Pensamiento, X, París, Hermann, 1961, p. 67.

general de las relaciones expuestas en el libro V de los Elementos"[30] nos parece que constituye una contradicción: no hay un producto conmutativo en todas las magnitudes, por esta razón no existe un producto, en absoluto, de una magnitud por una magnitud, pero si de una magnitud por un número. En este punto se abre un abismo entre el séptimo libro y el quinto libro, que desafía toda generalización. Sin embargo, algo sorprendente en lo que Aristóteles propone en los *Segundos Analíticos*, eligiendo precisamente la segunda de estas propiedades para ilustrar su importante idea, siempre que sea posible, para llevar a cabo la demostración a un nivel más general, sin detenerse a establecer por separado cada caso particular:

Los términos medios de una proporción se pueden cambiar, haciendo la prueba por separado para los números, líneas, sólidos y el tiempo, mientras que era posible involucrarlos todos en una sola demostración. Pero debido a que no existe un nombre que relacione la unidad de todas estas cosas, números, longitudes, el tiempo, sólidos y además se presentan en diferentes formas las unas y las otras, se tratan por separado. Pero, de hecho, esta propiedad se probó para el caso general. Porque no es como las líneas o números, donde estas cosas tenían esta propiedad, pero de hecho al carácter general que se supone que tienen[31].

Oskar Becker[32] observó en el pasaje de Aristóteles una alusión a la demostración, probablemente imaginada por Eudoxo y recuperada en la proposición 16 del libro V de Euclides, de esta propiedad para todas las magnitudes. Esta interpretación nos parece imposible por razones que vamos a desarrollar.

Tengamos en cuenta primero la demostración de Eudoxo, para designar la aparición de la construcción euclidiana como una demostración única, hecho xaüóXoo que lo haría también para "números, líneas, sólidos y el tiempo. >> La propiedad en cuestión se muestra en dos partes:

---

[30] Ibid., p. 107
[31] Segundos analíticos, 74 a 17-25
[32]

1) Una primera en las magnitudes, en la propuesta 16 del libro V: "Si cuatro magnitudes son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales.";

2) Una segunda para los números en la Proposición 13 del Libro VII: "Si cuatro números son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales. >>

Ambas propuestas cumplen exactamente el mismo papel, siendo la única diferencia de que la palabra magnitud ocupa el lugar de números en la otra. Esta similitud total en las expresiones merece ser comparada con las manifestaciones de disimilitud radicales en las demostraciones correspondientes; disimilitud cuya razón es obvia: la demostración, en el Libro V, se basa en la definición 5 del mismo libro, de la igualdad de las razones entre magnitudes, mientras que la demostración en el libro VII, se basa en la definición 20 de este libro, la cual se basa en la igualdad de razones entre números, diferente de la igualdad de razones entre magnitudes.

Sólo el prejuicio moderno por el cual se considera el conjunto de los enteros como un subconjunto de los reales nos puede llevar a pensar que la definición 5 y la proposición 16 del Libro V se aplicaría a lo que los griegos llamaban números. El texto de los elementos, en cualquier caso prueba que su autor no lo creo. La teoría de las magnitudes del Libro V, dejó fuera de los números, de otro modo el libro VII sería relativamente la repetición del libro V. Hemos visto que, por el contrario, las demostraciones del segundo ejemplo, implícitamente postula la divisibilidad indefinida de las magnitudes, sin propiedad correspondiente en los números. La separación en la estructura de ambos libros es radical.

Por lo que podemos admitir que el texto de los *Segundos Analíticos*, hace alusión a la demostración del libro V de los Elementos, debemos tener en cuenta que, desde un punto de vista aristotélico, la demostración de la Proposición 16 es de alguna manera sofisticada[33], ya que su autor limita el caso particular de las magnitudes, una demostración particular que debió haber sido, pero no lo fue obviamente, suficientemente general como para aplicarse también a los números.

33

Esto nos remite también a una discrepancia mucho más grave entre la epistemología aristotélica y la presentación euclidiana de los Elementos. Vamos a estudiar con detalle este punto que acabamos de mencionar, lo que evita Euclides razonar xaO6tou, para hablar como Aristóteles, es decir el contenido de las proposiciones 16-V y 13-VII, que muestran la existencia de dos definiciones distintas de la igualdad de razones:

1) La definición 20 del Libro VII

Los números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo, o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto.

2) La definición 5 del libro V

Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, y una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualquier equimúltiplo de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta, respectivamente y cogidos en el orden correspondiente.

Que la definición 20 del Libro VII (si se acepta que es la anterior) no habría sido capaz de ser llevada a las magnitudes fue evidente de inmediato para los griegos, ya que claramente se podría aplicar a aquellas magnitudes que no tienen partes alicuotas (proporcionales) comunes, o inconmensurables. Sin embargo, la definición 5 del libro V podría tener menos dificultad al extenderse a toda caracterización de igualdad en sus razones. Es esencial hacer hincapié en esa posibilidad para apreciar su verdadero valor en el hecho de que ni Euclides ni otros autores del siglo III a.C, como Arquímedes, han hecho uso de lo que sigue siendo una posibilidad histórica pura.

Pero el texto de los *Segundos Analíticos*, al que siempre debemos volver definitivamente, presupone la existencia de una definición única de la igualdad de las razones (única para los números y las magnitudes), cuya historia ha demostrado que no era la definición 5 del libro V, la definición de Eudoxo. Por el contrario, incluso el mismo Aristóteles da testimonio en *los Actuales* de la existencia de una única definición de la misma razón[34] y es normal considerar como estas condiciones fueron aludidas en los *Segundos Analíticos.*

También parece que en las matemáticas la dificultad de ciertas pruebas en las figuras está relacionada con la falta de definición, por ejemplo, si se determina que la línea que corta en paralelo al paralelogramo, tiene la posibilidad de dividir la línea y el área en la misma razón; pero, una vez que nos ponemos de acuerdo sobre la definición, la propuesta es obvia: como las áreas sufren lo mismo que las líneas auxiliares, ¿sería correcta la definición de la misma razón?

No hay duda de la interpretación de este pasaje de *los Actuales* que dio Alejandro de Afrodisia, y seguidamente Oskar Becker y, más recientemente, Maurice Caveing[35]. Estos comentaristas están dispuestos a reconocer en esta antanairesis (srxsxíptotç), que nosotros hemos traducido más o menos y afortunadamente como la alternancia de contracción, la antipairesis (sOuçxptatç) o (más bien un sustantivo que no encuentro en Euclides) el procedimiento, expresado por el verbo dvOupmpew, que

[34] Tópica, 158 b 29-35

[35] La constitución del tipo de matemática de la idealidad en el pensamiento griego, t. III, pág. 1261 y siguientes. Sin embargo, si seguimos el Sr. Fúa Caveing reconocen l'anthyphérèse antanérèse mencionado en el texto de los temas, lo seguimos otra vez en su explicación de los dos textos comparados de Aristóteles, el paso de los temas, por un lado, y que los registros de la segunda (supra, p. 19), por el otro. Sin duda, las ideas de Aristóteles han evolucionado en muchos sentidos, el Sr. Caveing tanto, se supone (cf. t. III, p. 1588) que, si el paso de los temas, sabemos que antes de la 348, así se define la proporción con el anthyphérèse, la de Google Analytics, << cuya forma final es, quizás, se detuvo alrededor de 335 >>, se refirió a la definición de Libro V. Entre 348 y 335 de Aristóteles se dio cuenta de la nueva definición y se han adoptado. Entendemos que en estas circunstancias, el Sr. Cavelng tomar para minimizar la gravedad de la adjudicación del quinto libro de Eudoxo: esto, de hecho, tuvo que morir a 355 y Aristóteles hubiera sido informado con retraso (lo que parece no han sido su costumbre) de dicha novedad, si hubiera sido el trabajo de Eudoxo. Tendemos lugar a admitir aquí, en primer lugar, Eudoxo es el brillante autor de V, entonces los dos pasajes se refieren a Aristóteles y el otro a anthyphérèse, más probable que cumpla Aristóteles en vista de su teoría de la abstracción, la definición de Eudoxo.

consta de una secuencia de reducciones alternantes, visto especialmente al inicio de los libros VII y X de los Elementos.

Este procedimiento es tan familiar para el autor de los Elementos, que esta se ha ganado el nombre de el algoritmo de Euclides. La proposición 1 del Libro VII, esta basada en la antipairesis la cual sirve para reconocer cuando dos números son primos entre sí, mientras que la Proposición 2, se establece como medio para encontrar la mayor medida común de dos números no primos. La proposición 2 del Libro X ofrece como criterio de conmensurabilidad de dos magnitudes que la antipairesis no sigue de forma indefinida, mientras que por la Proposición 3 se convierte en el medio para encontrar la mayor medida común de dos magnitudes conmensurables.

En la antipairesis, se resta primero del primer término el segundo término tantas veces como la reducción sea posible; a continuación, al segundo término le restamos el anterior obtenido previamente, tantas veces como la reducción sea posible, y se opera con el resto anterior siendo de los últimos restos la última resta, etc. En resumen, cada vez que la reducción se repite hasta que el residuo obtenido se ha convertido en el menor termino restado, se hace el proceso con el mismo término para obtener un nuevo resto.

Consideremos la razón de A y B y supongamos que A> B; m_1, m_2, m_3 etc. enteros naturales, por tanto tenemos.:

$$
\begin{aligned}
A &= m_1\, B + R_1 \\
B &= m_2\, R_1 + R_2 \\
R_1 &= m_3\; R_2 + R_3 \\
R_2 &= m_4\; R_3 + R_4 \qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Siendo R_i, un poco más pequeña que B y cada una de las otras R_i siendo respectivamente más pequeñas que R_{i-1}. Así se obtiene:

$$\frac{A}{B} = m_1 + \frac{R_1}{B} + m_1 + \frac{R_1}{m_2\, R_1 + R_2} = m_1 + \frac{1}{m_2 + \frac{R_2}{R_1}}$$

$$= m_1 + \frac{1}{m_2 + \frac{R_2}{m_3\, R_2 + R_3}} = m_1 + \frac{1}{m_2 + \frac{1}{m_3 + \frac{R_3}{R_2}}}$$

24 Aristóteles y Euclides

Podemos hacer corresponder a la razón de A y B una fracción continua:

$$m_1 + \frac{1}{m_2 + \frac{1}{m_3 + \dots}}$$

Donde las magnitudes A y B son conmensurables si y sólo si somos capaces de encontrar un número m_n, lo que daría exactamente:

$$m_n \; x \; R_{n-1} = R_{n-2}$$

Oskar Becker[36], piensa que la anthypairesis no se inventó hasta las últimas décadas del siglo V a. C, ya que parece que cuando Teodoro de Cirene alrededor de 430 a.C. demuestra la irracionalidad de la raíz cuadrada de 3, 5, 7 ... 17, lo hizo por la construcción geométrica sin necesidad de utilizar este procedimiento. Pero el testimonio de Aristóteles establece que, en el siglo IV, la anthypairesis se había convertido en una forma común de definir la proporción.

¿Por qué esta definición de la proporción basada en la anthypairesis sólo podía tener el toque de Aristóteles para ser fácil de entender?. Este procedimiento de hecho vuelve a caracterizar el estudio, todo el estudio, ya sea de número a número o de magnitud a magnitud, por una secuencia de números naturales, m_1, m_2, m_3, etc., finito o infinito. La definición aquí, a diferencia de lo que ocurre con los elementos, se aplica tanto a los números como a las magnitudes.

Recordamos la frase del pasaje de los *Tópicos* que citamos: << Es correcta la definición de la *misma razón*>>, porque, podríamos decir, que se trata de una definición de la *misma razón*, basada en una definición de la *razón*, que vemos como ella es la misma. Y esta definición se establece xαʘóϒou, en el nivel más general, para cualquier término, sin tener que tomar la precaución de poner en duda su naturaleza.

36

Las ventajas de esta definición de la proporción para la anthypairesis o la antanairesis o en ambas definiciones realmente aceptadas por Euclides son tan evidentes que, mucho más tarde, muchos de ellos, sobre todo en el Islam, los autores muestran inclinación en su contra y no perdonan las críticas a la obra euclidiana[37]

En esta línea y con la concepción aristotélica, se puede argumentar que la inclusión de la falta de una definición, suficientemente general, como la de proporción escrita por Euclides en su libro de la proporción X 5:

Las magnitudes son conmensurables entre sí, si la razón que tiene un número con otro tiene un número común.

Esta propuesta representa un tipo de tonterías, si uno se basa en la lógica de la construcción anterior euclidiana en que se debe construir, ya que no es, para los números y tamaños, una definición común de la misma razón que no puede justificar el uso de este turno.

En estas condiciones, ¿cómo esta propuesta establece Euclides 5-X, que estaríamos tentados a decir que ya es tiempo comentaristas han revelado los abusos cometidos por Euclides, Euclides, que se basa en la definición de 20 Libro VII, como si estuviera tratando con una proporción de cuatro números. No podía confiar más en la definición 5 del libro V, ya que no era una relación de cuatro tamaños.

[37] Véase Edward Bernard Plooij, el concepto de Euclides de la relación y su definición de magnitudes proporcionales a Criticado por los comentaristas árabes, Uitgeverij W. J, Van Hengel, Roterman, Leiden, 1952. Entre el persa o árabe, E. B, Plooij es cierta preferencia por la definición de proporción por la anthypherese el siglo IX, en al-Mahani y Thabit ibn Qurra y principios del siglo XII en al-'Umar Chajjami, en el siglo XIII en al-Tusi.

Ya en el siglo XVIII, Robert Simson[38] había demostrado que la prueba de la proposición 5 del Libro X de Euclides que normalmente hubiera requerido que él había establecido previamente que los cuatro términos proporcionales, en el sentido de la definición de 20-VII, siendo proporcional a la sensación de Definición de 5-V. Esta demostración es probablemente más fácil y le da al Simson, pero se supone que uno se aplica una definición diferente y un conjunto de elementos que los libros anteriores no se aplican: el conjunto de lo que acabamos de llamar a las palabras con cuidado, para encontrar un mes que podría cubrir tanto los números y magnitudes una palabra que podría cubrir tanto el número y tamaño, lo que significa que se asume que Euclides había cruzado en el sentido de abstracción, generalidad, una frontera, no el quinto libro y si en el libro VII.

Por otra parte, la definición de la igualdad por razón de su anthypherese celular y la desigualdad, que iba a llenar, se pudieron obtener, a veces inmediatamente, propiedades a la certeza de que el autor del libro V, sin embargo, sobre la base de definiciones de 5 y 7, tendría la molestia de desmontar, si se siente la necesidad de establecer de manera explícita[39].

Hemos visto que, por anthyphairesis, se podría caracterizar una razón $\frac{A}{B}$ por una serie de números naturales $m_1, m_2 \ldots \ldots \mathrm{p}m_n$ y la igualdad de las razones que se expresa por la identidad de esta secuencia de una razón a otra. Si no hay una identidad entre las secuencias $m_1, m_2 \ldots \ldots m_n$ características de $\frac{A}{B}$ y luego $p_1, p_2 \ldots \ldots p_i$

[38]Los elementos de Euclides, a saber, los seis primeros libros, junto con el undécimo y duodécimo, por Robert Simson, 20 ª edición, Londres, 1822, C y D. propuestas Libro V, p. 122-123 y 309-310. Véase también Euclides, los trece libros de los Elementos traducidos con introducción y comentario de Sir Thomas L. Heath, edición íntegra En segundo lugar, Nueva York, Dover Publications, 1956, vol 2, pp 126-129 y vol. 3, p.25.

[39] Vamos a explicar más tarde, el silencio que el autor de V mantiene sobre la mayoría de estas propiedades

caracteristicas de $\frac{A\prime}{B\prime}$ denotamos por $m_1\ y\ p_1$ las primeras ordenadas de las dos secuencias que difieren:

$$\frac{A}{B} > \frac{A\prime}{B\prime}$$

Si y solo si:

- Si i es impar, y luego no hay ningún m_1 ni $m_1 > p_1$[40]
- Si i es par, y luego no hay ningún p_1 ni $m_1 < p_1$

Ahora, estas definiciones de la igualdad y la desigualdad de la razón son suficientes para demostrar de inmediato que dos razones, una es inferior, igual o superior a la otra (por lo menos y la mayoría en una de estas tres los casos). En efecto, dadas dos razones $\frac{A}{B}$ y $\frac{A\prime}{B\prime}$, o sus anthyphairesis tiene un diferente i^* rango (y las razones son también). Es necesariamente lo menos y en la mayoría de una de estas dos situaciones. En la situación o tiene un anthyphairesis diferentes a un i^* rango, queda por demostrar:

1) Que si $\frac{A}{B} > \frac{A\prime}{B\prime}$, no $\frac{A\prime}{B\prime} > \frac{A}{B}$. Porque si $\frac{A}{B} > \frac{A\prime}{B\prime}$, entonces, por definición:

- Si i es impar y, o no hay m_1 (pero hay sin embargo un p_1 como i es el rango en el que la anthypaieresis es diferente) o $m_1 > p_1$(que excluye que $p_1 > m_1$); no podemos tener $\frac{A'}{B'} > \frac{A}{B}$ ya que esto requeriría, o que no p_1 o $p_1 > m_1$;
- Si i es par y, o no hay p_1(pero hay un m_1) o $m_1 < p_1$ (que excluye que $p_1 < m_1$); no puede estar aquí o bien $\frac{A\prime}{B\prime} > \frac{A}{B}$.

2) Que si no $\frac{A}{B} > \frac{A\prime}{B\prime}$, entonces $\frac{A'}{B'} > \frac{A}{B}$. Porque si $\frac{A}{B} > \frac{A\prime}{B\prime}$, entonces, por definición:

- Si i es impar hay un m_1 y no hay $m_1 > p_1$, es decir que si hay un p_1 , $p_1 > m_1$ por lo tanto $\frac{A\prime}{B\prime} > \frac{A}{B}$;
- Si i es par hay un p_1 y no hay $m_1 < p_1$, es decir que si hay un m_1 , por lo tanto $\frac{A\prime}{B\prime} > \frac{A}{B}$.

[40] Al lector moderno puede que lo hagan con mayor facilidad mediante la reducción de la demostración de que escribir una alternativa única algebraica$m_1 > p_1$, a aceptar una condición que puede ser $m_1 = \infty$.

este argumento no contiene nada que pueda hacer sospechar un griego del siglo IV °, incluso si uno está de acuerdo con Oskar Becker[41] un seguidor de Brouwer ahora puede sospechar, para lo que tiene dos propuestas, una de las cuales era ciertamente verificable por medios finitos (la anthyphaireses de dos razones diferentes para algunos *i*), pero no nos dio los medios para comprobar otros, es decir, la negación de la primera. Recordar que Aristóteles rechaza el dominio de validez de la exclusión del medio que las propuestas para futuras contingencias que podríamos asimilar la propuesta de que dos anthypairese no difieren en ningún rango de metros finales sin duda la noción misma de la inconmensurabilidad, como tal, ha caracterizado a la propuesta 2[42] el libro X de los elementos. Para después del comienzo de este libro presupone muchas aplicaciones de X como el tercero excluido de la siguiente forma:

Para cualquier par de magnitudes homogéneas o hay una medida común o no existe.

Como la transitividad de la igualdad de razones, mientras que el quinto libro se muestra a la propuesta 11, que se obtuvo inmediatamente por la identidad de anthyphairese. Por su parte, la transitividad de la superioridad de las razones del libro V, podría ser una demostración bastante fácil.

Si, en efecto, las tres razones $\frac{A}{B}$, $\frac{A\prime}{B\prime}$ y $\frac{A\prime\prime}{B\prime\prime}$ tales que: $\frac{A}{B} > \frac{A\prime}{B\prime}$ Y $\frac{A\prime}{B\prime} > \frac{A\prime\prime}{B\prime\prime}$.

Designamos para $m_1\ y\ p_1$ los primeros enteros para que la anthypairese de $\frac{A}{B}$ y la de $\frac{A\prime}{B\prime}$ diferentes, para $p_{1\ y\ q_1}$ los primeros enteros para que la anthypairese de$\frac{A\prime}{B\prime}$ y la de $\frac{A\prime\prime}{B\prime\prime}$. Diferentes. Tres casos se debe considerar en función de si i es menor, igual o superior a j:

[41] eudoxos-studien I, pp. 317-318. Becker no sólo el razonamiento en este punto, en principio, no nos convence, pero parece que, incluso si aceptamos el principio, todavía sería un error. como admitir que los griegos no podían haber considerado y la falta de estableci finito significa que si dos razones no son el más grande es más pequeño que el otro, entonces es ¿por qué no son iguales (que es decir, si su anthypairese difiere en algunos rango finito), entonces son más grandes o más pequeños

[42] Si dos diferentes tamaños se resta siempre a su vez el más pequeño de los más grandes, y el resto no se mide por encima del resto, las magnitudes son inconmensurables

1) Si i<j entonces p_i y q_i existen y $p_i = q_i$; en este caso,
- Si i es impar entonces , o no hay m_i o $m_i > p_i, m_i > q_i$
- Si i es par entonces como $m_i < p_{i,} m_i < q_i$; en ambos casos $\frac{A}{B} > \frac{A''}{B''}$.

2) Si i=j,
- o el número de por medio ya sea i o j es impar, y luego o bien no hay m_i o m_i $>p_i$, y en ambos casos $p_i > q_i$
- o el número designado por i y j es par, y entonces o bien no hay $q_i$ni p_i>q_i y en ambos casos $m_i > p_i$

En ambos casos $\frac{A}{B} > \frac{A''}{B''}$.

3) Si i>j, entonces m_iy $> p_i$ son buenas y m_i= p_i, en esta hipótesis
- o j es impar, entonces, ya que $p_{j>q_j}, m_j > q_j$;
- o j es par, entonces, o no hay q ni después $p_{j<q_j}, m_j < q_j$

En ambos casos $\frac{A}{B} > \frac{A''}{B''}$.

Por lo tanto, las propiedades inherentes a las tradicionales relaciones de igualdad o desigualdad de las razones por las que fácilmente se puede establecer sobre la base de anthypairese. Este servicio podría alentar el inspector levantó esta idea de la razón, números abstractos, así como las variables en un objeto directamente operativa, tiene el inverso de la línea observada por el quinto libro de los elementos, al llegar a por lo tanto, la obra de Aristóteles, nos parece, se demuestra la existencia º siglo IV a.C, una construcción matemática del edificio dotado de una coherencia real y significativamente diferente de la construcción euclídea, que es pero lejos de ser perfectamente coherente, sobre todo porque la culpa, gramatical, hemos esbozado la proposición 5 del libro X, pero todos aquellos que todavía tiene sus seguidores, se hizo cargo de la idea de que dos las variables pueden tener estas mismas razones que los dos números.

tal vez nos hemos encontrado en la base de la construcción euclídea básicamente el mismo diseño que el número de Aristóteles, incluso el reconocimiento de una dualidad fundamental de los números y tamaños de llamar a dos teorías en su mayor parte, distinta

pero aguas arriba de estas dos teorías, la concepción aristotélica de la abstracción requiere el desarrollo de una proto-teoría de una base mereológico, que encontramos la huella suficiente en el primer libro de elementos discretos, el proto-teoría era en sí una teoría envoltura primaria basada en la anthypairese proporciones. y debe haber una única versión de algunos teoremas, que se encuentran en Euclides división impar. En construcción tales, igual a la tasa de dos variables con la tasa de dos números tiene sentido, porque el anthypairese para caracterizar alguna razón entre dos términos y que está haciendo la misma manera que estos dos términos son dos números, o se trata de dos tamaños, mientras que la tasa de dos palabras, pero las proporciones de los cuatro términos, cuatro términos son cuatro tamaños en un caso en los otros cuatro números.

∴

LAS IMPLICACIONES DE LA ANTHYPHAIRESIS

Nuestras consideraciones anteriores conducen naturalmente a la pregunta: si los beneficios de la anthypharese son tales, ¿por qué el autor de los elementos, familiarizado con este procedimiento, no se elige sobre la base de la definición de la proporción? La sorpresa en este aspecto es tanto más legítima cuanto que el ejemplo geométrico proporcionado por Aristóteles en los temas es un caso especial de la proposición 1 del libro VI de elementos:

triángulos y paralelogramos, cuando tienen la misma altura, son el uno al otro como sus bases

con una demostración de Euclides no es cualquier llamada a anthyphairese, lo que Aristóteles nunca ha escrito, pero en realidad se refiere a la definición 5 del libro V

Maurice Caveing parace que quiere decir[43] si Euclides, para demostrar esta proposición, según la definición de la proporción eudoxienne da el V libro es que, para el establecimiento de la anthyphairese debe ser capaz de mostrar siempre una

[43] la formación del tipo de idealidad matemática en el pensamiento griego t III, p. 1262: "si la inconmensurabilidad de las bases en general, la propuesta puede ser establecido por antanerese es la razón por Euclides hizo la institución en cualquier generalidad, que el Libro VI, con eudoxeenne de proporcionalidad

anthyphairese determinado, lo que es, obviamente, no es posible cuando el procedimiento no se detiene, es decir, cuando las bases son inconmensurables. De hecho, para establecer la proposición 1 del libro VI es de la definición de la proporción de anthyphairese, lo hizo no beison a exhibir una anthyphairese determinado.

Representamos la figura correspondiente a esta propuesta se limita al caso del paralelogramo

Si restamos EA de AZ muchas veces que esta reducción es posible, sabemos de las propuestas 38 y 41 del Libro 1 de los *elementos*, el paralelogramo construido sobre los segmentos muy arraigados son iguales a los EARB del paralelogramo, y que estará en una situación similar cuando el resto del segmento de AZ y el paralelogramo construido sobre los restos, a su vez cortó el segmento, respectivamente, y EA paralelogramo EARB. La anthyphairese será la misma, ocurre en los segmentos de línea o del paralelogramo construido sobre estos segmentos.

Razonamiento se aplica a cualquier número de cercenadura y cualquier número (fue esta vez incluso ilimitado) reversiones (anthypherese) el procedimiento de reducción. Hay, en este razonamiento, no usa una corriente de infinito que tiene en la definición de proporción eudoxienne, que fue la demostración real propuesta 1-VI utilizar los dos presupone que una operación, multiplicación en un caso, la división con restos (como diríamos hoy) en la otra, se puede realizar cualquier número de veces sin apartarse del resultado anunciado. No es suficiente, incluso si esta cuantificación se aplica a un conjunto infinito de elementos.

Demostrar la proposición 1 del libro VI sobre la base de la definición de la proporción mencionada en la actualidad era por lo tanto de ninguna dificultad más que la de proceder, al igual que Euclides, apelando a la definición de Eudoxo. Esta no es la razón para buscar la preferencia mostrada por el autor de los Elementos.

Oscar Becker, su Eudoxo-Studien, a partir de la muy probable precedencia histórica de la definición de la identidad por la proporción de anthyphereses la definición 5 del libro V de los elementos, pensó que había encontrado la razón de que empujaría a Eudoxo no ha Contener la definición anterior y proponer uno nuevo: sobre la base de

1'anthyphérèse, podríamos decir Becker, demuestran gran parte de las 24 proposiciones del Libro V, pero hacen una excepción, continúa, la propuesta de 16, 22 y 24, estos últimos, de hecho, no se puede establecer sobre esta base que para algunas especies de magnitud, sobre todo en las rectas, por medio de teoremas, como la propuesta 16 del Libro VI[44], pero no para el tamaño en general. la definición de Eudoxo permitió sin embargo que el anexo de una teoría general del contenido de las magnitudes de las propuestas 16, 22 y 23, es decir, el equivalente de una forma elemental de "multiplicación" de la razón, que hasta que pudiera ser la de los individuos teoremas geométricos.

Las observaciones de Oscar Becker plantean una cuestión, a la que se esboza una respuesta en dos pasos: primero nos preguntamos si la proposición 16 del libro V se deja demostrar una teoría de las magnitudes basa su definición de la proporción de la Antipairesis; es sólo en un segundo tiempo vamos a hacer la misma pregunta sobre las propuestas 22 y 23, vemos que, efectivamente, la respuesta, en ambos casos, puede ser significativamente diferente.

∴

Que por lo tanto, la definición operativa de la proporción de cuatro términos (en la ocurrencia de cuatro tamaños) por el Antipairesis identidad y tratar de demostrar que

Si cuatro magnitudes son proporcionales, sino que también será después de la permutación

Es por lo tanto, para demostrar que, cualesquiera que sean cuatro variables homogéneas, a, b, c y d

$$si\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ entonces\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

[44] Véase más arriba p. 19, nota 17; Maurice Caveing está de acuerdo con Becker que admitir que la demostración general de 16-V "puede llevarse a cabo si uno no apela directamente 5 V def". la constitución del tipo de idealidad matemática en el pensamiento griego, t. III p. 158

Se procede por la contradicción y, por tanto asumir que tenemos la negación de la tesis fue desmontada, a saber:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \; y \; \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Por lo tanto, es cierto que en cualquiera de las tres magnitudes admitir a un cuarto proporcional, o existe una cantidad x, tal que:

$$\frac{x}{c} = \frac{b}{d} \quad y \quad x < a$$

O bien si existe una variable x, tal que

$$\frac{x}{c} = \frac{b}{d} \quad y \quad x > a$$

1) suponemos en primer lugar que:

$$\frac{x}{c} = \frac{b}{d} \quad y \quad x < a$$

Si admitimos que, en los elementos, la proposición 1 del libro X[45], se dice que es posible dividir b por 2^n, n siendo un entero natural, garantizar que el resultado de esta división es una magnitud e, tal que

$$e < a - x$$

Y existe un entero natural m, tal que

$$a > me > x$$

Luego, en virtud de lo que está en los elementos 8-V[46]

[45] dos magnitudes desiguales está dando, si restamos el más grande y más de la mitad de lo que queda más de la mitad y que se siga estas zanjas, se mantendrá un cierto tamaño, que es más pequeño que la mayoría pequeñas magnitudes de datos.
Euclides, después de haber mostrado esta propuesta, son: "la prueba será similar, si restamos de cada medio"

[46] dos magnitudes desiguales, la más grande tiene un tamaño incluso mayor que la más mínima razón: del mismo tamaño y tiene la más mínima razón mayor cuenta con la mayor

$$\frac{a}{b} > \frac{me}{2^n e} > \frac{x}{b}$$

ya que pidió

$$2^n e = b$$

Como

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

que, en el elemento, es 13-V[47] se puede deducir de lo anterior

$$\frac{c}{d} > \frac{me}{2^n e} > \frac{x}{b}$$

Pero como

$$\frac{me}{2^n e} = \frac{md}{2^n e} = \frac{mb}{2^n b}$$

que en primer lugar, se

$$\frac{c}{d} > \frac{md}{2^n d}$$

Y en segundo lugar

$$\frac{mb}{2^n b} > \frac{x}{b}$$

Cuyas proposiciones son 13-V y 15-V[48] permiten deducir respectivamente

$$\frac{2^n c}{2^n d} > \frac{md}{2^n d}$$

y

[47] Si el primero a el segundo tiene la misma razón que el tercero al cuerto y la tercera a la cuarta una razón mas grande que la quinta a la sexta, la primera también a la segunda una razón mas grande que la quinta a la sexta

[48] para 13-V cf. la nota anterior: menos de 15-V ", y las partes reportan que tienen la misma razón que sus equimúltiplos"

$\frac{mb}{2^n b} > \frac{2^n x}{2^n b}$ Pero si admitimos que el 10-V ", por una razón, con magnitudes que tengan una misma magnitud, que tiene una mayor razón es más", se deduce, respectivamente,

$$2^n c > md$$

y

$$mb > 2^n x$$

8-V[49] , ahora puede escribirse

$$\frac{mb}{md} > \frac{mb}{2^n c}$$

y

$$\frac{mb}{2^n c} > \frac{2^n x}{2^n c}$$

Esto justifica, por transitividad de la relación es mayor que entre la razón[50]

$$\frac{mb}{md} > \frac{2^n x}{2^n c}$$

es decir, bajo 13-V de 15-V

$$\frac{b}{d} > \frac{x}{c}$$

Contrario a nuestra hipótesis inicial

2) Nos queda suponer que

$$\frac{x}{c} = \frac{b}{d} \quad y \quad x > a$$

Nuestro razonamiento es similar al del caso anterior. Se dice que es posible dividir b por $2^{n'}$, n' siendo un entero natural, garantizar que el resultado de esta división es una magnitud f, tal que

$$f < x - a$$

Y existe un entero natural m', tal que

$$x > m'f > a$$

[49] Véase la nota 4

[50] Véase más arriba pp 28-29

Así sucesivamente como anteriormente

$$\frac{x}{b} > \frac{m'f}{2^{n'}f} > \frac{a}{b}$$

$$\frac{x}{b} > \frac{m'f}{2^{n'}f} > \frac{c}{d}$$

$$\frac{x}{b} > \frac{m'b}{2^{n'}b} \; y \; \frac{m'd}{2^{n'}d} > \frac{c}{d}$$

$$\frac{2^{n'}x}{2^{n'}b} > \frac{m'd}{2^{n'}b} \; y \; \frac{m'd}{2^{n'}d} > \frac{2^{n'}c}{2^{n'}d}$$

$$2^{n'}x > m'b \; y \; m'd > 2^{n'}c$$

$$\frac{2^{n'}x}{2^{n}c} > \frac{m'b}{2^{n}c} \; y \; \frac{m'b}{2^{n'}c} > \frac{m'b}{m'd}$$

$$\frac{2^{n'}x}{2^{n}c} > \frac{m'b}{m'd}$$

$$\frac{x}{c} > \frac{b}{d}$$

A diferencia de la suposición que partimos.

Se podría afirmar que esta demostración fue la demostración históricamente exacta de lo que conocemos como proposición 16 del libro V, anterior a la demostración, debido a Eudoxo, Euclides la reemplazaría. Por otra parte, hemos observado que la reconstrucción propuesta no ha llamado ninguna definición de igualdad de dos razones, ni tampoco la base de la Antipairesis es otra. Todo lo que quería establecer es que, para una demostración de esta manera, usted podría recibir la propuesta de 16-V sin recurrir a la definición de Eudoxo. Esto es suficiente para conciliar la aprobación el pasaje de *Segundo Analiticos* o Aristóteles habla de una única demostración de la posible permutación de términos medios de una proporción, con la de los *Topicos* o que evoca la Antipairesis ya que, sin ánimo de ofender a Oskar Becker y Maurice ha

Caveing, creemos que es posible que la primera de esos dos textos aluden a la demostración euclidiana del 16-V.

Ahora observemos un pasaje d ela demostración que sugiere presuponer[51] el postulado, a veces llamado el cuarto *proporcional*, es decir que.

Para cualquiera de las tres magnitudes, incluyendo al menor las dos primeras son del mismo tipo, hay una cuarta magnitud que complementa la proporción

Se sabe que, de Euclides, esta propiedad no se demuestra nada en toda su generalidad, por lo que Clavius lo convirtió en un axioma, mientras que otros autores como De Morgan, indicó una Posible demostración. En cualquier caso, la ausencia de tal postulado explícita fue la base del edificio que no es euclidiana, pero la admisibilidad de la demostración que aquí se sugiere, ni mas ni menos problemático que el de la prueba de la proposición 18 del libro V, los comentaristas tienen notas largas que se basa en el mismo postulado[52]. Esta primera observación nos obliga solamente a reconocer que los que construyeron la igualdad de dos razones en la Antipairesis no debe pensar más en cuenta para imponer la economía del postulado que no pensara despues del libro V.

Todavía será capaz de señalar que nuestra demostración. presupone también como propiedades que se exponen en las propuestas de 8,10,13, y 15 en el Libro V de los elementos actuales Pero Oscar Becker ha reconocido[53] que la prueba de las propuestas presentadas no hay problema de una teoría fundada en la Antipairesis. El más importante es que nuestra demostración no puede llamar, que es el caso, las propuestas del quinto libro que Becker considera, no sin razón, como

[51] Consulte la pagina 34

[52] que la propuesta de 18 V (y el hecho mismo de la totalidad del libro V) se puede establecer sin tener que recurrir a este supuesto (ver los Elementos de Euclides de Robert Simson pp 314-316; Euclides, de los trece libros de Elementos, Sir Thomas L. de calor, Vol. 2 pp.171 y ss., y Jean Itard, los libros aritméticos de Euclides, nota en la página 57) y fortalece aún más nuestra observación tiende a probar la existencia de cuarto proporcional a la magnitud, en el espíritu del quinto libro de la autora y sus contemporáneos, fue a la tierra

[53] Eudoxo-Studien I, pp. 319-320.

"específicamente eudoxiana" como 14, 20 y 21. Sin embargo, esto puede parecer vergonzoso es nuestro llamamiento a la proposición 1 del libro de X[54], es decir, a una proposicion que se establece mucho más tarde en el cuerpo euclidiano.

Esto, por si misma, sin embargo, no tiene nada sorprendente.

Una teoría que pone la Antipairesis en la definición de la proporción se vio obligado a desarrollar antes una consecuencia del *axioma de Arquímedes* como la proposición de 1-X. ya habíamos tenido ocasión de señalar que ela Antipairesis, redujo la estructura e euclidiana en su modesto papel un algoritmo de Euclides determina un uso, casi no apareció como la Proposición 1 y 2 del libro VII, 2 y 3 de Libro X. Dejando de lado VII 1 y 2, ya que son la media aritmética. Por tanto, es significativo que la evocación de Antipairesis llega tan pronto después de la propuesta 1-X. comentaristas que se maravillaron en el lugar ocupado por esta proposicion en la economía del cuerpo euclidiano, pretendiendo que no era antes de las demostraciones utilizadas en libro XII, Heath[55] fue señalado correctamente que la aplicación ya está hecho en la demostracion de la proposición se sigue de inmediato.

¿Qué podría pasar es que el desarrollo de la teoría eudoxiana de las magnitudes, lo que constituye el actual Libro V, Euclides cuenta con los permisos para hacerlo más adelante incluir consideraciones tales como la proposicion de 1-X, que una teoría de la proporción que se basa en la Antipairesis contrario difícilmente podía moverse desde el principio. Así, la sustitución de la definición eudoxiana de la proporción a su definición por la que se refería Antipairesis reordenamientos importantes de toda la estructura de matemática anterior, ahora llegado a aceptar que es bastante difícil para reclamar a reconstituir su totalidad.

En cualquier caso, se puede observar que la demostración de la Proposición 1-X, que es válido para las magnitudes en general, como se encuentra en Euclides, no utiliza la debida consideración geométrica y, más importante aún, ninguna proposicion que se ha demostrado posteriormente en el Libro V. Se basa

[54] Véase más arriba p. 34 y nota 3 y p 36

[55] Euclides, los trece libros de los elementos, vol 3, p. 15.

esencialmente en el axioma de Arquímedes, y siguiendo el axioma de la infinita divisibilidad de las magnitudes, uno y el otro al menos implícitamente admitió desde el principio del Libro V. Nada impedía por lo tanto, este teorema se puede colocar mucho antes

$\therefore$

Ahora queda examinar si las proposiciones 22 y 23 del libro V, por el uso de los medios mismos, sobre la base de la definición de la proporción por identidad de la Antipairesis, podría fácilmente demostrar que la proposición 16. En este sentido, creo que él comenta que Oscar Becker sigue siendo válida.

la proposición 22, que veremos con mayor detenimiento en la siguiente, establece que

$$si\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ y\ \frac{b}{e} = \frac{d}{f}, entonces\ \frac{a}{e} = \frac{c}{f}$$

Tendremos ocasión de ver que esta proposición establece y lo que podríamos llamar un equivalente temporal de una forma restringida de la multiplicación de la razón, esta multiplicación de que nosotros, los en notación moderna

$$\frac{c}{d} x \frac{d}{f} = \frac{c}{f}$$

limitado en el caso de que el mismo término, aquí d, por lo tanto, Por lo tanto, como se puede encontrar respectivamente el antecedente primero y segundo de las razones “múltiplos” finalmente esta proposición haciendo corresponder las razones $\frac{c}{d}$ y $\frac{d}{f}$ un mismo numero y único resultado $\frac{c}{f}$. La proposición 23 añade su propia manera de que esta "multiplicación" es conmutativa, diciendo en efecto que

$$si\ \frac{a}{b}=\frac{d}{f}\ y\ \frac{b}{e}=\frac{c}{d}, entonces\ \frac{a}{e}=\frac{c}{f}$$

Lo que significa que el resultado de la"multiplicación" de $\frac{d}{f}\ por\ \frac{c}{d}$ es el mismo que el de $\frac{c}{d}\ por\ \frac{d}{f}$

la proposición 22 del libro V encuentra su equivalente para los números con la Proposición 14 del Libro VII, toda la similitud más evidente que las dos proposiciones enunciadas son exactamente idénticas, la diferencia esta entre las palabras "números" y la "magnitudes". Sin embargo, la demostración de 22-V no obstante, podría ser similar a la de 14-VII únicamente si el autor del libro V ha acordado para restringir la consideración de las proporciones entre cuatro variables han de deducir homogénea. que podría tener esta condición, proceda con el libro V, como en el libro VII, de la siguiente manera: a partir de

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ y\ \frac{b}{e}=\frac{d}{f}$$

16-V. como 13-VII, permite deducir

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\ y\ \frac{b}{d}=\frac{e}{f}$$

La transitividad de las razones de igualdad, establecido por el 11-V[56], luego esto deja

$$\frac{a}{c}=\frac{e}{f}$$

La inclusión de una nueva aplicación de 16-V, a partir del 13-VII, justifica la conclusión de

$$\frac{a}{e}=\frac{c}{f}$$

Este enfoque tiene en sí nada de ilegítimo. Pero, en la medida en que se requiere una cuenta cada vez que una especie perversa de la grandeza que pertenecía a los cuatro términos en cada proporción, ya que hizo una propuesta para el 22-V igualdades inaplicable entre una tasa de dos otras magnitudes, probablemente obviamente, estas homogéneo, sino heterogéneo en los dos primeros, pocas palabras,

[56] Véase mas arriba, pp. 11-12

la validez de la proporción era de 22-V en estas condiciones, limitada por el 16-V restricción que sigue siendo sujetas en todo caso[57]. Sabemos, por el ejemplo proporcionado por Aristóteles, incluso para ilustrar la Antanairesis, que nunca podría haber acordado una teoría de las proporciones, presuponiendo cuatro variables homogéneas, había dado por el hecho de que algunas manifestaciones de apoyo mediocres de la geometría

Todos los comentaristas coinciden en que las proposiciones como el 22-23-V y llegar a ser extremadamente fácil de desmontar cuando, en lugar de razonar sobre las magnitudes en general, se limita a determinadas magnitudes geométricas, tales como líneas y áreas. De ahí la tesis, muy probable, Becker, que una teoría de las proporciones, el quinto libro, basado en su definición 5, llega a la opuesta a mantener como parte de una teoría general de magnitudes

Tenemos el capítulo siguiente que si el interés de ambas proposiciones es introducir una forma restringida de la multiplicación de la razón, el autor de V no ha tenido éxito y, al parecer, los malos, no podría tener éxito era presentar el resultado de la multiplicación tomada en toda su generalidad, en una simple teoría de las magnitudes y la necesidad de agregar consideraciones geométricas (lo que sucede en el libro VI) para entrar en una forma restringida de una forma generalizada de la multiplicación. Pero entonces, ¿qué se gana en la generalidad de la multiplicación, se pierde en lo que respecta a la generalidad de los objetos (en adelante, un objeto geométrico en particular), que se considera la razón. Que las prposiciones 22 y 23 del libro V dar sólo una forma restringida de la multiplicación de la razón, como veremos, nos obliga a considerarlos como medio de éxitos, es decir, la mitad de los fracasos. Estas fallas tienen la mitad de un paso para tener éxito al fracaso total, en el que se introdujo una propuesta de como o 22 V en la teoría de las proporciones con las limitaciones que le privó de gran parte de su participación en los ojos el geómetra, o (lo que prácticamente equivalía a lo mismo) fue rechazado por las proporciones toriados y referido únicamente a la esfera de la geometría

Así, el estudio del texto de Euclides y algunos testimonios de Aristóteles (en particular) hemos más bien sugieren que, históricamente, había tres pasos:

1) En la primera, lo que demostraría el paso de una etapa analítica segundo pasa, el proyecto de 16-V (con mayor razón, por supuesto, 22 y 23-V) no se había demostrado de las magnitudes en general ; 16-Vse se encontró, sin embargo, demostrado y sin duda una forma mucho más simple que las manifestaciones que siguieron los objetos particulares, como la geometría, líneas rectas y áreas

2) El texto de los Segundos Analíticos saludo caso de que el siguiente paso, o retener el Antipairesis nos las arreglamos para demostrar que la propuesta de 16-V no sólo por las magnitudes en general, sino también para los números, en definitiva, de acuerdo con el vocabulario de Aristóteles, por cosas por las que no tienen nombre

[57] curiosamente, esta restricción de 16-V permanece implícito en el texto de Euclides, que ha sobrevivido

común. Este paso era el que mejor se adapta a sí mismo la filosofía de Aristóteles: en su concepción de la abstracción, lo importante era contar con una definición general de la proporción, así como el número de variables, y una una y la misma demostración de las propiedades de fundamental, al igual que la suma de Euclides se dividirá entre el 16-V y 13_VII. En cuanto a lo que percibimos hoy como la multiplicación de la razón, en cualquier caso, el autor de V se dejará de leer el completo en el establecimiento de los límites de una teoría de las magnitudes, por lo tanto, podría resignarse a abandonar la geometría.

3) El tercer paso, el de Aristóteles acepta sin saber a unirse, sería que el autor ha marcado el quinto libro, que es la oreja, como se vio con claridad Becker, la ventaja estructural de 5 definición de libro electrónico que permite una prueba simple de 22-V y 23 V-, es decir a anexo tiene una teoría de las magnitudes en general, no ciertamente la multiplicación de res, pero ya forma una multiplicación de primaria.

∴

Anexo 4: Ponencia ¿Puede la conmensurabilidad cerrar el cerco a la inconmensurabilidad?

¿Puede la conmensurabilidad cerrar el cerco a la inconmensurabilidad?

Edwin Yesyd Parra - edwinyesyd@gmail.com -Universidad Pedagógica Nacional
Erica Senid Vargas - evargas379@gmail.com - Universidad Pedagógica Nacional
Edgar Alberto Guacaneme - guacaneme@pedagogica.edu.co - Universidad Pedagógica Nacional

Resumen. *La idea de los pitagóricos de expresar diferentes relaciones entre cantidades de magnitud geométrica a través de números, los condujo a intentar expresar la relación entre la cantidad de longitud de la diagonal y la del lado de un cuadrado, cuestión que abrió la puerta al problema de la inconmensurabilidad. La perseverancia del pensamiento humano encuentra entonces en los pitagóricos una expresión sin igual, al construir métodos geométricos que originan sucesiones de parejas de números naturales cuya razón se aproxima secuencial y alternantemente a la relación en cuestión. La demostración de la inconmensurabilidad del lado y la diagonal del cuadrado y los métodos aludidos para tales objetos geométricos, son el objeto de este trabajo.*

Palabras-clave: *inconmensurabilidad, razón y proporcionalidad, relación geométrica, sucesión.*

Presentación del problema

En el marco del desarrollo del Trabajo de grado titulado “La teoría de las proporciones en la escuela pitagórica”, llevado a cabo en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, hemos estudiado aspectos del trabajo de dicha escuela, en tanto hito en la evolución de la teoría de las proporciones, y hemos centrado la atención en dos métodos (adición sucesiva y sustracción sucesiva) a través de los cuales los pitagóricos encontraron una aproximación a la razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado. La presentación de la comprensión que sobre los mismos hemos logrado, es el objeto de esta comunicación.

Metodología

En el desarrollo del Trabajo de grado citado antes, hemos procurado el estudio de documentos que refieren información sobre la *antanairesis* y *antipairesis* (Filep, 1999; Gardies, 1988; Thorup, 1992); por esta vía encontramos los métodos de adición y sustracción sucesiva, entendidos como métodos pitagóricos para aproximar la razón de magnitudes inconmensurables. Ligado al estudio de los métodos, hemos debido comprender el problema de la inconmensurabilidad (de Guzmán, 1986) y a valorar la genialidad pitagórica expresada en tales métodos. En este sentido, en lo que sigue, primero abordamos tres maneras de enunciar el concepto de conmensurabilidad, y por ende de inconmensurabilidad; esta última la ilustramos a través del estudio de la relación entre la diagonal y el lado de un cuadrado. Posteriormente hacemos una descripción de los métodos de adición y sustracción sucesiva, probablemente ideados por los pitagóricos para aproximarse a la relación en cuestión, a través de razones entre números naturales. Finalmente establecemos algunas reflexiones a propósito del trabajo realizado y de sus resultados.

Marco de referencia conceptual

La noción de conmensurabilidad podemos enunciarla (o entenderla) de tres maneras diferentes, aunque interrelacionadas. La primera consiste en partir de dos magnitudes distintas A y B y construir múltiplos de cada una de ellas (mA, nB; m y n números naturales) hasta encontrar una tercera magnitud C tal que $C = mA = nB$; en la figura 1 se ilustra esta manera de entender la conmensurabilidad para el caso de los segmentos A y B. Si bien en esta primera manera se privilegia la suma de las magnitudes, en la segunda se hace uso de sustracciones sucesivas. Así, dadas dos magnitudes D y E se procura encontrar una tercera magnitud F tal que $rF=D$ y $sF=E$ (r y s números naturales); ello se consigue restando siempre la magnitud menor de la mayor, hasta el momento en que el resto sea cero. En la figura 2 hemos considerado los segmentos iniciales D y E, siendo $D>E$ y luego de restar dos veces E de D se obtuvo el resto C; posteriormente de E se restó C, obteniendo F, que se logró restar cuatro veces de C.

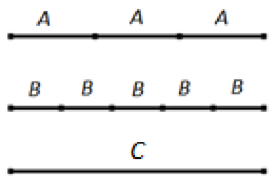


Figura 1. En este caso *C = 3A = 5B*

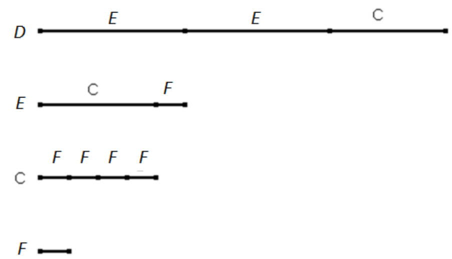


Figura 2. En este caso *14F=D y 5F=E;*

C es el resto entre *D* y *2E*

La tercera y última manera involucra proporciones entre las magnitudes y los números que aparecen en las dos primeras maneras, $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$ o $\frac{E}{D} = \frac{s}{r}$, de modo que dos magnitudes son conmensurables si existen tales números con los cuales configurar una proporción. Si la relación entre dos magnitudes no se puede expresar con ninguna de las tres maneras anteriores (es decir que no podemos encontrar los números *n* y *m* o *r* y *s*) las magnitudes son inconmensurables.

Como es bien conocido, un ejemplo particular de magnitudes inconmensurables son las representadas por el lado y la diagonal de un cuadrado. No tan conocida es la deducción de la inconmensurabilidad entre estos objetos, veamos:

Sea el cuadrado *ABCD* (ver Figura 3). Supongamos que la diagonal y el lado son conmensurables. Existe entonces un segmento $\overline{HK}$ tal que divide a $\overline{BC}$ (lado) y $\overline{AC}$ (diagonal). Sea ahora $\overline{FC}$ congruente con $\overline{BC}$ y determínese E como corte de la perpendicular a $\overline{AC}$ con $\overline{AB}$.

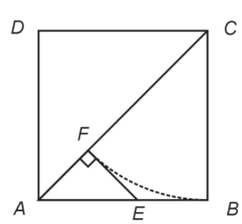


Figura 3. Construcción usada para deducir la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado

Así, como ∢*AFE* y ∢*CBE* son rectos, $\overline{FE}$ y $\overline{BE}$ no son solo tangentes a la circunferencia con centro en *C* y radio $\overline{FC}$, sino que además son congruentes. Los *ΔEFA* y *ΔCBA* comparten el ∢*FAE* y cada uno tiene un ángulo recto, luego éstos son semejantes y se puede establecer que $\frac{FE}{BC} = \frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Así se puede decir que como *ΔCBA* es isósceles, el *ΔEFA* también lo es, luego $\overline{AF}$ es congruente con $\overline{FE}$. Como se estableció que $\overline{HK}$ divide a $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, es decir que $\overline{HK}$ cabe un número finito de veces en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, además $AC = AF + FC$, o lo que es equivalente $AC = AF + BC$, entonces $\overline{HK}$ también cabe un número entero de veces en $\overline{AF}$, del mismo modo como $AB = AE + EB$, lo cual equivale a $AB = AE + FA$, así también $\overline{HK}$ cabe un número entero de veces en $\overline{AE}$.

Como los triángulos Δ*EFA* y Δ*CBA* se comportan de la misma manera y tienen características semejantes, el proceso anterior se continúa indefinidamente, es decir, siempre existirá el segmento $\overline{HK}$ que divide a los lados y las diagonales de los cuadrados que se generan. El $\overline{HK}$ siempre será menor que el lado, lo cual es imposible ya que si éste divide el lado llegará el momento en el que son iguales.

Ante esta evidencia de imposibilidad de existencia de dos números cuya relación fuera la misma que la existente entre la longitud de la diagonal y el lado de un cuadrado (entre otros fenómenos de inconmensurabilidad), los pitagóricos construyeron dos originales métodos para encontrar sucesiones de parejas de números cuya relación se aproxima secuencialmente a la relación entre las cantidades de magnitud geométrica en cuestión.

Método de Adición Sucesiva. En suma, el método consiste en formar cuadrados cada vez más grandes a partir de un cuadrado de lado 1, sumando al lado *a* la diagonal *d* y a la diagonal dos veces el lado (ver Figura 4) y posteriormente calcular el valor de la razón entre la diagonal y el lado, bajo la consideración de que $d = 1$ (ver la Tabla 1; en ella hemos usado notación moderna).

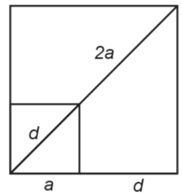


Figura 4. El cuadrado de lado $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d}$ se construye a partir del cuadrado de lado $\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{d}$	$d = 1$	$d_1 = 2a + d$	$d_2 = 4a + 3d$	$d_3 = 10a + 7d$	$\cdots$	$d_n = 2a_{n-1} + d_{n-1}$
$\boldsymbol{a}$	$a = 1$	$a_1 = a + d$	$a_2 = 3a + 2d$	$a_3 = 7a + 5d$	$\cdots$	$a_n = a_{n-1} + d_{n-1}$
Razón	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{3}{2} = 1{,}5$	$\frac{7}{5} = 1{,}4$	$\frac{17}{12} = 1{,}4166$	$\cdots$	$\frac{d_n}{a_n} \approx \sqrt{2}$

Tabla 1. Relación entre el lado y la diagonal usando el método de adición sucesiva

La sucesión de las razones se aproxima alternadamente a lo que hoy conocemos como $\sqrt{2}$.

Método de sustracción sucesiva. En resumen, el método consiste en tomar un cuadrado de lado *a* y sustraerlo de la diagonal *d*; posteriormente, construir un cuadrado sobre el lado resultante (residuo) y para éste hacer el mismo proceso (ver Figura 5). Finalmente, se calcula el valor de la razón tomando $a = 1$ y $d = 1$ (ver la Tabla 2; en ella hemos usado notación moderna).

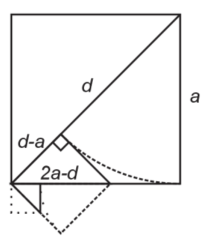


Figura 5. El segundo cuadrado se construye a partir del cuadrado del resto de *d-a*

$\boldsymbol{d}$	$d = 1$	$d_1 = \|2a - d\|$	$d_2 = \|3d - 4a\|$	$d_3 = \|10a - 7d\|$	$\cdots$	$d_n = \|2a_{n-1} - d_{n-1}\|$
$\boldsymbol{a}$	$a = 1$	$a_1 = \|d - a\|$	$a_2 = \|3a - 2d\|$	$a_3 = \|5d - 7a\|$	$\cdots$	$a_n = \|-a_{n-1} + d_{n-1}\|$
Razón	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{3}{2} = 1{,}5$	$\cdots$	$\frac{d_n}{a_n} \approx \sqrt{2}$

Tabla 2. Relación entre el lado y la diagonal usando el método de sustracción sucesiva

Ahora, si observamos el valor que toma la diagonal luego del *n*-ésimo paso impar (*n*≥3), este resulta ser negativo. Algo similar ocurre con los valores del lado luego del *n*-ésimo paso par (*n*≥4). Dado que en el contexto geométrico no podemos involucrar magnitudes negativas, posiblemente los pitagóricos optaron por restar el menor valor del mayor en cada uno; por tanto al emplear la notación moderna para encontrar los valores de a_n y d_n, tomamos el valor absoluto de las magnitudes involucradas. De esta manera, aquí también, la sucesión de las razones se aproxima alternadamente a lo que hoy conocemos como $\sqrt{2}$; de hecho, a partir del tercer término, coincide con la del método de adición sucesiva.

Conclusiones

Al observar y analizar los resultados de cada uno de los métodos encontramos que ambos generan, en esencia, *una misma* sucesión de lo que hoy llamaríamos números racionales, a través de los cuales se va *cerrando el cerco* y capturando la inconmensurabilidad (o si se prefiere, la irracionalidad); sin embargo, hay que advertir que uno de los métodos la genera dirigiéndose hacia lo infinitamente grande, en tanto que el otro lo hace transitando hacia lo infinitamente pequeño. No deja de sorprendernos que esta condición de tratamiento diferenciado conduzca al mismo resultado y no podemos menos que imaginar un espacio que se extiende infinitamente en dos direcciones antípodas para cerrarse sobre sí mismo y finalmente encontrarse. Esta visión, que más parece una fantasía, nos revela un halo de misterio que, por un lado, rescata el carácter estético de las matemáticas, a veces tan esquivo a la mayoría de humanos y, por otro lado, nos deja entrever el aspecto mitológico que parecía envolver la cosmovisión pitagórica mediada por las matemáticas mismas. Todo lo anterior emerge como un resultado supremamente valioso para nuestra condición de maestros de matemáticas en formación, pues más allá de suministrarnos un poco más de erudición (y con ello atacar nuestra infinita ignorancia), nos ofrece un panorama para redimensionar la belleza de las matemáticas y para comprender potenciales bases desde las cuales escolarmente se aborde el problema de los números irracionales y su profunda relación con los números racionales (o viceversa).

Referencias

de Guzmán, M. (1986). Los Pitagóricos. Retrieved 20 de mayo, 2011, from http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/pitagoricos.htm

Filep, L. (1999). Pythagorean side and diagonal numbers. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 15*, 1-7.

Gardies, J.-L. (1988). *L'Héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide. Un essai de reconstitution*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Thorup, A. (1992). A pre-euclidean theory of proportions. *Archive for History of Exact Sciences, 45*(1), 1-16.