CARACTERIZACIÓN DE LAS CONCEPCIONES DE PROBABILIDAD: UN ESTUDIO REALIZADO CON ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

CHRISTIAN CAMILO LÓPEZ MORA
JOEL FERNANDO MORERA ROBLES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
BOGOTÁ D.C.
2012

CARACTERIZACIÓN DE LAS CONCEPCIONES DE PROBABILIDAD:
UN ESTUDIO REALIZADO CON ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

CHRISTIAN CAMILO LÓPEZ MORA
2008240040

JOEL FERNANDO MORERA ROBLES
2008240048

Trabajo de grado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas
Asesor de Trabajo de grado

WILLIAM ALFREDO JIMÉNEZ GÓMEZ

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
BOGOTÁ D.C.
2012

DEDICATORIA

Brindo este trabajo a Dios por todas las bondades ofrecidas, por ser mi guía espiritual, por involucrarse de la mejor manera en mi vida, siendo él mi apoyo en momentos difíciles en el transcurso de mi vida profesional.

Gratifico a mis padres María Stella Mora P. y Fernando López P. por su apoyo constante e incondicional, por la comprensión y la paciencia que han tenido a lo largo de mi vida, en especial en el transcurso de mi formación como docente.

Le doy gracias a mi hermana Francia Catalina López M. y a mi compañera sentimental Johana Romero M. por su vital apoyo y comprensión a lo largo de mi proceso de formación.

Christian Camilo López Mora

Dedico este trabajo a Dios por todas las bondades ofrecidas, por ser el guía incondicional en mi carrera y por ser mi apoyo y mi escudo en momentos difíciles de mi aprendizaje.

Agradezco a mis padres Marlene Robles C. y José Benigno Morera C. por el apoyo incondicional, comprensión y paciencia a lo larga de mi vida en especial en el transcurso de mi formación como docente.

Le doy gracias a mi hermano Néstor Danilo Morera R. por su vital apoyo y comprensión a lo largo de mi proceso de formación.

Joel Fernando Morera Robles

AGRADECIMIENTO

Agradecemos a todos aquellos que nos apoyaron en este proceso de formación en especial a nuestras familias por su compresión y paciencia.

A la Universidad Pedagógica Nacional e Instituto Pedagógico Nacional, a su cuerpo docente por su dedicación y transición de conocimientos y valores.

Al profesor William Jiménez por su apoyo incondicional y por ser un ejemplo como profesional y persona.

A la profesora Sandra Rojas por su apoyo y aporte significado para la conformación de este documento.

A la profesora Margarita Rojas y al profesor Felipe Fernández por ser nuestros líderes en el proceso de formación como futuros docentes de Matemáticas.

***Christian Camilo López Mora y Joel Fernando Morera Robles*.**

1. Información General	
Tipo de documento	Trabajo de grado asociado a práctica educativa, monitorias académicas o pasantías.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional e Instituto Pedagógico Nacional.
Titulo del documento	Caracterización de las concepciones de probabilidad: un estudio realizado con estudiantes de secundaria.
Autor(es)	LÓPEZ MORA, Christian Camilo y MORERA ROBLES, Joel Fernando
Director	William Alfredo Jiménez Gómez, Docente del Instituto Pedagógico Nacional
Publicación	Bogotá D.C. 2012 (104 páginas).
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	Concepciones de probabilidad, Probabilidad.

2. Descripción

Este es un documento realizado para todos aquellos interesados en el estudio del concepto de probabilidad, específicamente a los docentes que revelen algún interés por la enseñanza y el aprendizaje de este objeto matemático en el trabajo con estudiantes de secundaria. Se encuentran aspectos históricos que describen el trabajo desarrollado desde puntos de vista teológicos, filosóficos y matemáticos, algunas definiciones de las concepciones evidenciadas en libros de texto, y una propuesta para el trabajo de las concepciones de la probabilidad en un ámbito escolar de educación media. Lo cual se determinó con base en la interpretación de soluciones propuestas por estudiantes entre 15 y 17 que participaban en el estudio de la probabilidad en el grado undécimo del Instituto Pedagógico Nacional.

3. Fuentes

Para la elaboración de la presente monografía se revisaron diversas fuentes bibliográficas, las cuales abarcan libros, tesis de maestría, doctorado, y documentos digítales. Las fuentes bibliográficas más importantes son:

Collette, J. (1985). *Historia de las Matemáticas*. Vol. 2, Las Matemáticas De La Época De Descartes Y De Fermat. España.

Batanero, C. (2005). *Significados de la Probabilidad en la educación secundaria. Relime, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 8, no. 3.*

Barragués, J. Guisasola G. y Morais A. (2005). *Concepciones de los estudiantes de primer ciclo de universidad sobre estimación de la Probabilidad*. Documento de educación matemática. Santillana. México.

García, M. (2001). *La Probabilidad como concepto: sus antecedentes*. Departamento de métodos cuantitativos para la Economía. Universidad de San pablo CEU. España.

Fernández, F. (s.f). Curso de Probabilidad. Capítulo 3. En prensa. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá. Colombia. Documento entregado por el profesor Felipe Fernández curso de Probabilidad en septiembre del 2010. UPN. Bogotá. Colombia

Mateos, G. Aparicio, M. (1985). *Teoría subjetiva de la Probabilidad: fundamentos, evolución y determinación de Probabilidades*. Tesis Doctoral. Departamento de estadística y métodos de decisión facultad de ciencias económicas y empresariales. Universidad complutense de Madrid. España

Muñoz, A. (1998). *Algunas ideas preconcebidas sobre Probabilidad*. Artículo de la revista SUMA, Noviembre 1998, pp. 29-34. España.

Gutiérrez-Cabria, S. (1985). *El que de la Probabilidad*. Trabajos de Estadística y de investigación operativa. *Vol.36, Núm. 3, 1985, pp. 185 a 197*. Departamento de Estadística e investigación operativa Universidad de Valencia. España.

Toretti, R. (2003), *El concepto de Probabilidad*. Profesor Emérito de la universidad de Puerto Rico.

4. Contenidos

El trabajo está compuesto por cuatro capítulos:

El primero comprende los antecedentes que revelan los estudios realizados por algunos autores en torno al tema de las concepciones de Probabilidad, se presenta la definición del problema y la justificación.

En el segundo capítulo se despliega el marco teórico en tres apartados principales. El primero hace referencia a una reseña histórica de la Probabilidad enmarcada en el desarrollo de los distintos trabajos sobre el concepto de Probabilidad, un segundo apartado que muestra las definiciones de las concepciones de la Probabilidad (clásica, frecuentista y subjetiva) desde documentos que se denominaron educativos o científicos, esta información permitió la conformación del último apartado que está compuesto por las ideas más representativas de la definición de cada autor expuesto en el segundo apartado y con base en eso se construyeron las definiciones de las concepciones de la Probabilidad que fueron presentadas a los estudiantes por medio de actividades.

La metodología para el desarrollo del estudio realizado con los estudiantes del grado undécimo del Instituto Pedagógico Nacional y el diseño de actividades conformado en tres etapas, se presentan en el capítulo tres. Un último capítulo muestra el análisis y los resultados obtenidos por medio de la implementación de las actividades propuestas en el capítulo 3, de tal manera que con la información obtenida se determinaron las debidas conclusiones de este estudio.

5. Metodología

Se inicia el estudio sobre las concepciones de probabilidad en estudiantes de secundaria con la revisión de la literatura de las concepciones de Probabilidad, obteniendo información de libros de texto y de documentos digitales para la conformación de los antecedentes y el marco teórico.

La propuesta de la metodología realizada para este estudio fue consolidada en tres etapas. La primera etapa guiada a identificar las concepciones de probabilidad de los estudiantes observando su significado personal a partir de la solución de problemas que enmarcan sucesos aleatorios, una segunda etapa que permitió que los estudiantes conocieran las concepciones de probabilidad con sus debidas definiciones y sus características principales, la tercera etapa guiada por una actividad para consolidar el significado institucional de las concepciones y entablar asignación de Probabilidad a un suceso aleatorio.

En última instancia se realizó un análisis de los resultados obtenidos con las actividades propuestas, de tal manera que se concretaron las conclusiones de este trabajo.

6. Conclusiones

El interés principal de este trabajo era el diseño e implementación de una secuencia de actividades para estudiantes de grado undécimo del IPN que les permitiera identificar, caracterizar y establecer relaciones entre las concepciones de la probabilidad que subyacen en un suceso aleatorio. Las conclusiones que se presentan en esta sección están organizadas en relación a los objetivos propuestos.

En la conformación del marco teórico, específicamente en la revisión de textos educativos y textos científicos, se identificó que las concepciones de la probabilidad son usadas como actividades introductorias de la noción de probabilidad, viendo a estas como las principales fuentes para dar un significado de probabilidad en sucesos aleatorios. Es de recalcar que la literatura revisada permitió la propuesta de algunas situaciones enmarcadas en las concepciones de la probabilidad en los cursos 1101 y 1102, así como la determinación de las categorías de análisis de la información; sin embargo, después del proceso de implementación y análisis se concreta que el libro de Fernández (s.f) y el documento de Mateos (1985), son fuente adecuadas para caracterizar las concepciones de probabilidad.

Por su parte, los referentes históricos dan cuenta de que el inicio del cálculo de probabilidades se dio a partir del intercambio de cartas entre los matemáticos Fermat y Pascal; no obstante, la noción de probabilidad ha estado presente en pensamientos filosóficos, religiosos y matemáticos a través de la historia desde civilizaciones antiguas como Grecia y Roma. Los documentos revisados permitieron identificar nociones subjetivas inherentes a los pensamientos filosóficos y teológicos, un trabajo posterior de la concepción Frecuentista por Jacob Bernoulli y la concepción Clásica de Pierre Simon de Laplace, por último la propuesta de la concepción Matemática o Axiomática del matemático Ruso Kolmogórov. En este sentido, se puede evidenciar que la evolución del concepto y concepciones de probabilidad se debe a un proceso sociocultural.

Establecer la existencia de similitudes o diferencias entre las distintas concepciones de la probabilidad, no es un planteamiento inmediato ni unifero, ya que los criterios para concluir lo antes nombrado pueden llevar a un estudio bastante complejo implicando diversos trabajos en torno al tema; sin embargo, fue claro por medio de este estudio que el conocer las distintas concepciones de probabilidad, y caracterizarlas de tal manera que los estudiantes reconocieran las ideas principales de cada concepción, conllevó a que se estableciera en el aula de clase que la asignación de probabilidad desde concepciones clásica y frecuentista involucra una asignación de carácter objetivo referente a datos estadísticos, información estadística o la noción de equiprobabilidad sobre un espacio muestral, mientras que en la subjetiva prevalece las intuiciones primarias y el sentido común sin justificaciones teóricas.

Elaborado por:	LÓPEZ MORA, Christian Camilo y MORERA ROBLES, Joel Fernando
Revisado por:	William Alfredo Jiménez Gómez

Fecha de elaboración del Resumen:	12	Noviembre	2012

CONTENIDO

INDICE DE TABLAS

INDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

El interés por el campo de probabilidad en la Educación Matemática en los últimos años es notorio, prueba de ello son los documentos como: *Significados de la probabilidad en la educación secundaria*, (Batanero, 2005) y *Estocástica y su didáctica para maestros* (Batanero, y Godino, 2002) relacionados con la enseñanza y aprendizaje de probabilidad, reconociendo que el quehacer docente debe incorporar una actividad indagadora e investigativa.

Este quehacer docente se basa en la idea de reconocer la pertinencia del estudio continuo en el campo de la probabilidad, enfatizando en procesos, en que el estudiante no solo recopile información, sino que descubra, establezca relaciones, discuta sus ideas con otros, relacione conocimientos nuevos con los de anclaje (conocimientos antiguos), evalúe y contraste sus resultados permitiéndole dar significado a lo que aprende y el por qué lo aprende. En este sentido, la clase de probabilidad sería un espacio que permite el desarrollo de un escenario con las características descritas, ya que la noción de probabilidad es primordial para las aplicaciones que generan cambios en razonamientos sobre los sucesos aleatorios a medida que se obtiene o se infiere información a partir de estos sucesos; es un concepto básico para fortalecer y establecer una relación con eventos de un espacio muestral, su buena comprensión permite el entendimiento de la asociación de variables, la probabilidad condicional, la regla de Bayes, entre otros (Estrada, y Díaz, 2006). Además, en la vida diaria la toma de decisiones adecuadas en situaciones de incertidumbre se basa en gran medida en el razonamiento probabilístico.

Dado lo anterior, los autores de este documento consideran que una propuesta para la enseñanza y el aprendizaje del tema *concepciones de Probabilidad* permite ser un aporte para el currículo de la asignatura de probabilidad, impartida en el Instituto Pedagógico Nacional con estudiantes de educación media, haciendo hincapié en procesos que involucren la identificación de concepciones en los estudiantes, una posterior definición de estas con sus relaciones y, la consolidación y confrontación de los resultados obtenidos por los estudiantes.

El interés por el presente trabajo, parte de la experiencia llevada a cabo en el 2011-II, donde uno de los participes de este trabajo cursó el espacio académico "Práctica en aula" en el Instituto Pedagógico Nacional, práctica que se implementó, en la materia de probabilidad en los cursos: énfasis en Ciencias Sociales (1101) y énfasis en Matemáticas (1102). En el análisis de los resultados obtenidos durante el desarrollo de este proceso, se evidenció, que en el curso 1101 existe una preferencia de los educandos a problemas en contextos vivenciales o cercanos a ellos, mientras que en el curso 1102 prima la participación de estudiantes que generan un ambiente para la justificación de conjeturas, la propuesta de diferentes estrategias de solución a un problema, se encuentra en la solución de problemas en diferentes contextos, con una preferencia en el uso del lenguaje simbólico-matemático.

En el desarrollo de la práctica, el equipo de trabajo, profesor asesor, tutor y profesor en formación, propusieron un conjunto de actividades para el núcleo temático: "*concepciones de probabilidad*" para los cursos. Uno de los objetivos de esta actividad, era que los estudiantes caracterizaran a partir de sus respuestas a problemas propuestos, las concepciones de probabilidad. Si bien en primera instancia había indicios de que la preferencia de algún tipo de concepción está relacionada con el contexto académico en el que el estudiante se encuentra inmerso, también se considera la necesidad de profundizar en el diseño una propuesta para estudiantes de grado undécimo del Instituto Pedagógico Nacional, centrada en las concepciones de probabilidad. Con esta intención surge el presente trabajo, conformado como se describe en los párrafos procedentes.

En el primer capítulo se encuentran los antecedentes como fuentes principales de sustento de la propuesta, la definición del problema y la justificación respectiva del estudio realizado. En el segundo, se presenta el marco teórico; en primera instancia una reseña histórica de la probabilidad, luego una presentación de definiciones de las concepciones de la probabilidad tomadas de libros de texto y literatura relacionada con el tema, lo que permitió hacer en este marco teórico una caracterización de las concepciones de probabilidad.

En el tercer capítulo, se muestra la metodología propuesta para la implementación de las actividades con los estudiantes seleccionados para el estudio, actividades enmarcadas en el trabajo de lo expuesto en los capítulos uno y dos. Un último capítulo está conformado por el análisis de información, específicamente los resultados obtenidos en lo propuesto en el capítulo tres.

1. JUSTIFICACIÓN Y DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

En este primer capítulo del documento se establecen los aspectos específicos que sitúan el problema de investigación. En primera instancia, se presentan los antecedentes o estudios realizados en torno a las concepciones de la probabilidad, mostrando su vigencia y pertinencia de estudio, a partir de lo cual se justifica y se define el problema de la presente investigación. Finalmente, se formulan los objetivos de este estudio.

1.1. ANTECEDENTES

Se presenta una mirada concreta a algunos documentos relacionados con el estudio de concepciones de la Probabilidad en estudiantes de secundaria o de primer semestre de universidad con el objetivo de conformar una base sólida para la propuesta de las actividades a implementar en dos cursos de grado undécimo del Instituto Pedagógico Nacional.

El primero es un artículo escrito por Muñoz (1998), titulado: "*Algunas ideas preconcebidas sobre Probabilidad*". Para este autor es fundamental establecer en primera instancia que los alumnos tienen ideas preconcebidas sobre muchos conceptos antes de recibir una instrucción formal en el aula de clase, aunque estas ideas no concuerden con el concepto científico netamente; estas ideas permiten identificar y determinar cómo nuestros alumnos responden ante un problema con sus conocimientos de anclaje o sus experiencias. En el mismo sentido, reconoce que el concepto de probabilidad ha sido con gran frecuencia objeto de estudio en la Psicología siendo Jean Piaget (Ver Piaget, l974) uno de los grandes pioneros en la investigación sobre este concepto, con niños y adolescentes.

El trabajo de Muñoz (1998) describe un estudio con estudiantes de secundaria en España, quienes no han tenido ningún acercamiento al estudio de la probabilidad formalmente. La metodología implementada por el autor consiste en la realización de entrevistas a estudiantes, en las que les plantea algunos problemas de situación aleatoria, específicamente: sucesos equiprobables e independencia de sucesos.

Los fragmentos de las entrevistas y su interpretación pretenden ilustrar distintas concepciones de la Probabilidad en los razonamientos de los alumnos y no suponen un análisis exhaustivo de los datos; por ejemplo asociaciones como: Lo raro es menos probable y el pasado condiciona el futuro, son las concepciones identificadas.

En una de las entrevistas se identificó: "Lo raro es menos probable", por ejemplo una respuesta en esta concepción es: para un alumno el número 11111 es más raro que salga en un juego de balotas que el número 12472, el estudiante entrevistado está dispuesto a justificar su intuición mediante algún mecanismo generador de casos; la segunda concepción es denominada como "El pasado condiciona el futuro", la cual se sustenta en una idea importante asociada a un razonamiento en donde la idea de Probabilidad es como un límite de frecuencias.

Como conclusión el autor muestra que aunque los alumnos no hayan estudiado Probabilidad formalmente, manejan ideas previas importantes y son capaces de argumentar con ellas y de defenderlas. Estas ideas o concepciones tienen origen en experiencias de la vida cotidiana, sustentadas en experiencias vividas por los estudiantes o en sus intuiciones.

El identificar concepciones de la probabilidad en estudiantes, es un primer paso para el posterior diseño de actividades y estrategias que permitan profundizar en este trabajo de tal manera que sean tenidas en cuenta como un contenido clave para el currículo de la probabilidad. Por tal razón el identificar concepciones de la probabilidad en estudiantes de secundaria es el primer paso para el trabajo en su enseñanza y aprendizaje.

Ahora, se realizará una descripción del documento escrito por Barragués, Guisasola y Morais (2005) que se titula: *"Concepciones de los estudiantes de primer ciclo de universidad sobre estimación de la Probabilidad*", en este trabajo se investiga el uso particular de concepciones en los estudiantes de primer ciclo de universidad, concepciones de las heurísticas de accesibilidad y de representatividad y, la existencia del sesgo de equiprobabilidad, las cuales se distinguirán más adelante. Aunque los autores nombran una investigación sobre las dificultades en alumnos de secundaria, se logra identificar con el estudio que los alumnos universitarios no presentan tantas dificultades como los de secundaria.

A continuación se describirá la categorización tratada por los autores de acuerdo a los criterios que dan idea del nivel de aprendizaje en los estudiantes.

La primera categoría es nombrada como *Heurística de accesibilidad*, la cual consiste en estimar la probabilidad de un suceso ocurrido relativo a la facilidad con que pueden generarse ejemplos en los que tal suceso ocurre (Scholz, 1991; Hirsch y O' Donnell, 2001; Sáenz, 1998), citados en Barragués, Guisasola y Morais (2005). La siguiente es nombrada como *Heurística de representatividad*, la cual consiste en estimar la probabilidad según lo representativo que para cierta población parece ser dicho suceso (Kahneman y Tversky, 1972), esto es, la asignación de probabilidades altas para los sucesos que parecen ser prototípicos de una población y baja probabilidad para los que no parecen serlo; la tercera y última categoría se nombra como *Sesgo de equiprobabilidad*, la cual consiste en la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los sucesos a cualquier experimento aleatorio, incluso en aquellos en los que no sea aplicable el principio de inferencia. Con estas tres concepciones los estudios realizados se centran en analizar las dificultades de un grupo de estudiantes universitarios españoles, después de recibir un curso introductorio de probabilidad y estadística en segundo curso de ingeniería industrial. Para el diseño experimental los autores tuvieron en cuenta dos objetivos: el primero es indagar en los contenidos y habilidades cognitivas necesarias para comprender de manera significativa la teoría de la probabilidad. El segundo es estudiar las estrategias de resolución adoptadas por los alumnos al enfrentarse a las tareas propuestas.

Para cumplir con éxito los anteriores objetivos, los autores han ideado un diseño múltiple y convergente que incluye métodos cualitativos (entrevistas) y cuantitativos (cuestionario escrito); en los cuestionarios se plantean seis enunciados de tipo abierto relacionados con situaciones en las que interviene el azar, donde el interés de los autores se ha centrado precisamente en las razones del alumno para elegir una u otra respuesta.

Como conclusión, los autores resaltan que una gran parte de los alumnos contestan correctamente un problema cuando se trata de aplicar un procedimiento memorístico a una cuestión similar a las realizadas en clase. A la hora de juzgar la verosimilitud de un suceso, la mayoría de los alumnos acude a una concepción subjetiva de lo que es representativo de una población, sin ningún intento de análisis formal.

Además, se encontró en el estudio que sólo la minoría de estudiantes universitarios analizan los fenómenos aleatorios propuestos desde un punto de vista formal de la teoría de la probabilidad y utiliza correctamente los procedimientos necesarios para el cálculo de probabilidades; al parecer existen dificultades serias de aprendizaje en el campo de los procedimientos normativos necesarios para calcular la probabilidad de un suceso, hasta un punto en que tales procedimientos se ven de hecho desplazados por criterios de decisión intuitivos erróneos.

Los resultados obtenidos por los autores llevan a afirmar que los sucesos aleatorios no presentan explicaciones "naturales" ni sencillas de dar y que no constituyen fenómenos elementales que se puedan impartir de manera rápida sin detenerse a analizarlos de acuerdo con una teoría que ocupó a los matemáticos durante mucho tiempo.

Así pues, conocer los procesos y resultados descritos anteriormente, nos permite consolidar una base sólida para el diseño de materiales y estrategias de enseñanza capaces de facilitar un cambio conceptual y metodológico que generen procesos significativos y saberes matemáticos dinámicos en la solución de problemas, partiendo de estos como una herramienta clave y de interés, fortaleciendo la comunicación de ideas entre los estudiantes y el profesor en un ámbito escolar.

El siguiente articulo consultado se titula *"significados de la probabilidad en la educación secundaria"*, trabajo desarrollado y dirigido por Batanero (2005), quien actualmente forma parte de la línea de investigación en estadística de la Universidad de Granada (España) y que entre sus numerosas producciones se pueden encontrar documentos que describen las concepciones y significados enmarcados en la probabilidad desde un ámbito escolar, además varios de estos artículos testifican el constante cambio a la que se expone la enseñanza de la probabilidad, y aun así, no se desconoce su presencia en la educación escolar la cual se aproxima a los veinte años con un notorio recorrido por parte de profesores investigadores con la iniciativa de reconstruir su enseñanza, volviéndola más experimental y nutritiva para los estudiantes y maestros, llevándolos a la constante reflexión sobre la naturaleza de la probabilidad y los diferentes componentes de su comprensión.

Como objetivo general, el artículo pretende estudiar los distintos significados desde la historia de la probabilidad haciendo uso de un modelo teórico que les permita dar una interpretación semiótica al razonamiento matemático, como también en la identificación e interpretación de nuevos errores que frecuentemente se presentan a la hora de estar sometidos a una situación problema de probabilidad en términos de conflictos semióticos, con el objetivo de concluir algunas implicaciones pertinentes para la enseñanza de la probabilidad.

El modelo teórico planteado se resalta en gran parte en Godino y Batanero (1998) y Godino (2002) para estudiar la noción de situación-problema en la que se concibe el objeto matemático como aquel que emerge progresivamente del *sistema de prácticas socialmente compartidas*. El significado que se le da a éste como entidad compuesta, es el de conjunto de prácticas operativas y discursivas relacionadas con dicho campo de problemas; es decir, que para los autores, el objeto es aquel conjunto de prácticas operativas que se identifican en un determinado problema matemático. De este modo, el grupo de trabajo diferencia entre el conjunto de prácticas ligadas a la resolución del campo de problemas correspondientes al estudio, análisis y predicción de fenómenos aleatorios, los cuales englobarían todo lo que se hace cuando se trabaja en la solución de este tipo de problemas, generando así un estudio del objeto matemático *probabilidad*, el cual surge históricamente con el objetivo no *estático*, es decir que se expone continuamente a cambios como consecuencia de dichas prácticas.

Asimismo, Batanero (2005) afirma que el modelo anteriormente citado, deducirá de forma esporádica la diferencia entre el significado institucional y personal del objeto a estudiar, ya que las prácticas relativas a un cierto campo de problemas son compartidas dentro de una institución, o son específicas de un sujeto que pertenece a la institución. A continuación se presenta una matriz de cada concepción de la Probabilidad expuesta en (Batanero, 2005, p.256):

SIGNIFICADO DE LA PROBABILIDAD	CAMPOS DE PROBLEMAS	ALGORITMOS Y PROCEDIMIENTOS	ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	DEFINICIONES Y PROPIEDADES	ALGUNOS CONCEPTOS RELACIONADOS
Intuitivo	• Sorteos • Adivinación	• Manipulación de generadores de azar: dados, cartas…	• Lenguaje ordinario	• Opinión impredecible, creencia	• Suerte • Destino
Clásica	• Cálculo de esperanzas o riesgos en juegos de azar	• Combinatoria • Proporciones • Análisis a priori de la estructura del experimento	• Triangulo aritmético • Listado de sucesos • Formulas combinatorias	• Cociente de casos favorables y posibles • Equiprobabilidad de sucesos simples	• Esperanza • Equitatividad • Independencia
Frecuencial	• Estimación de parámetros en poblaciones	• Registros de datos estadísticos a posteriori • Ajuste de curvas matemáticas • Análisis matemático • Simulación	• Tablas y gráficos estadísticos • Curvas de densidad • Tablas de números aleatorios • Tablas de distribuciones	• Límite de las frecuencias relativas • Carácter objetivo basado en la evidencia empírica	• Frecuencia relativa • Universo • Variable aleatoria • Distribución de probabilidad
Subjetiva	• Mejora del conocimiento sobre sucesos inciertos, incluso no repetibles	• Teorema de Bayes • Asignación subjetiva de probabilidades	• Expresión de la probabilidad condicional	• Carácter subjetivo • Revisable con la experiencia	• Probabilidad condicional • Distribuciones a priori y a posteriori
Axiomática	• Cuantificar la incertidumbre de resultados en experimentos aleatorio abstractos	• Teoría de conjuntos • Algebra de conjuntos • Teoría de la medida	• Símbolos conjuntista	• Función medible	• Espacio muestral • Espacio de probabilidad • Conjuntos de Borel

Tabla 0. Concepciones Batanero (2005)

1.2. JUSTIFICACIÓN

Uno de los principales objetivos de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) ha sido establecer acuerdos institucionales que generen aportes sociales y culturales, intenciones compartidas por el Instituto Pedagógico Nacional (IPN), registradas en el Acuerdo 020 del 2011 en el que se establece la necesidad de fortalecer dichas relaciones. En el caso específico del Departamento de Matemáticas de la UPN y el Área de Matemáticas del IPN, se pretende que dichas relaciones vayan más allá de la práctica educativa que desarrollan los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas.

La práctica educativa es un espacio considerado como aquel que le permite al docente en formación, no solo poner en acción sus habilidades y capacidades como docente y reflexión de su gestión, sino que es un espacio que le permite a estudiantes y docentes plantearse interrogantes surgidos en la praxis del quehacer docente relacionados con cuestiones didácticas, disciplinares, sociales o pedagógicas (Camargo, Rojas y Lozano, 2004), por lo tanto emergió la posibilidad de fortalecer estas alianzas institucionales mediante la realización conjunta de un trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas y así ampliar los campos de trabajo entre las dos instancias.

En el desarrollo de la práctica se propuso un conjunto de actividades para el contenido temático *concepciones de la probabilidad*; el objetivo principal de las actividades era que los estudiantes caracterizaran, a partir de sus respuestas a problemas propuestos, las concepciones de la probabilidad Subjetiva, Clásica y Frecuentista. En la evaluación de esta actividad se identificó que los estudiantes del énfasis en sociales tienen preferencia por la noción subjetiva o frecuentista, mientas que los estudiantes del énfasis en matemáticas prefieren el punto de vista frecuentista o clásico, hecho que determinó como posible conclusión que el contexto académico puede influir en la concepción de probabilidad; sin embargo, no fue posible certificar dicha conclusión desde el conjunto de actividades propuestas ya que no tenían la intención ni las cualidades para ser un instrumento que permitiera identificar y caracterizar estas concepciones, por lo tanto surge la necesidad de construir una propuesta que permita que los estudiantes de grado undécimo del Instituto Pedagógico Nacional conozcan las concepciones de la probabilidad, establezcan relaciones entre ellas, identifiquen la pertinencia de cada una en diferentes situaciones y, que los estudiantes reconozcan que no existe una sola concepción de probabilidad.

Por otra parte, una de las principales razones de la enseñanza de la probabilidad y situaciones aleatorias en el currículo de matemáticas en la educación escolar y universitaria es que tales situaciones son frecuentes en la vida cotidiana (Batanero, y Godino, 2002). Esta relación cercana con la vida cotidiana permite que el profesor plantee problemas, ejercicios y tareas en un contexto que involucre experiencias vividas por el educando, de manera que se generé en él, una familiarización y sentido en el saber matemático que está institucionalizando en el ámbito escolar.

La enseñanza de la Probabilidad en Colombia prioriza el fortalecimiento de un pensamiento aleatorio y de sistema de datos, denominado también probabilístico o estocástico. Este se basa netamente en conceptos y procesos desarrollados en la teoría de la Probabilidad y de la Estadística Inferencial, relativos a identificar y proponer soluciones razonables a problemas en los que no se evidencia una solución concreta o segura. De igual manera la exploración de estrategias de solución en la simulación de experimentos, la realización de conteos e inferencia de datos, la asignación de Probabilidad a sucesos que dependan de la ocurrencia de otros sucesos (MEN, 2006). Estas descripciones del pensamiento aleatorio justifican el debido tratamiento para plantear propuestas de enseñanza y aprendizaje de los contenidos en el campo de la Probabilidad.

De manera específica en Muñoz (1998) se resalta que el identificar concepciones de la Probabilidad en estudiantes de secundaria, es un primer paso para el posterior diseño de actividades y estrategias que permitan profundizar en este trabajo de tal manera que sean tenidas en cuenta como un contenido fundamental para el currículo de la probabilidad. Por su parte, Batanero (2005) describe las concepciones y significados enmarcados en la probabilidad desde un ámbito escolar como principal fuente para la reflexión sobre la naturaleza de la probabilidad y los diferentes componentes de su comprensión, razones que cimentan la propuesta enmarcada en el diseño de actividades para la identificación de concepciones de la probabilidad en estudiantes de secundaria y la posterior caracterización de estas en el ámbito escolar.

1.3. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Las propuestas de enseñanza enmarcadas en el estudio de contenidos temáticos del campo de la probabilidad en un currículo escolar específico en el que se privilegien el desarrollo de temáticas relativo a situaciones aleatorias en contextos vivenciales o matemáticos con significado y sentido en pro del aprendizaje de los estudiantes, fue el cimiento para el diseño de propuestas para la enseñanza en la asignatura de Probabilidad en los cursos de énfasis en Matemáticas y énfasis en Sociales del Instituto Pedagógico Nacional (IPN), en dicha institución la implementación de actividades estaban enfocadas a edificar y fortalecer saberes matemáticos que permanecen inherentes a situaciones donde surge la incertidumbre, al intentar establecer un resultado concreto a un suceso expuesto.

Para dar inició a la propuesta se tuvo que indagar sobre la definición o el significado de Probabilidad como noción fundamental de partida en esta asignatura, de tal manera que se realizara una actividad que permitiera a los estudiantes describir con su propio lenguaje lo que entendiesen por Probabilidad. Sin embargo, se generó una discusión en el grupo de trabajo sobre el diseño de tal actividad, ya que se pensó que las respuestas que serían propuestas por los estudiantes frente a una situación que involucrará incertidumbre serían distintas para determinar una asignación de Probabilidad a un suceso, esta suposición fue basada en lo indagado en libros de texto donde resaltaban las concepciones de la probabilidad.

En la indagación de la literatura para el estudio del concepto de Probabilidad y conformación del marco teórico para la propuesta, se evidenció que efectivamente la asignación de probabilidad en una situación aleatoria genera distintas posiciones de reflexión para responder a una problemática de aleatoriedad, de esta manera se hizo evidente el trabajo con las concepciones de la probabilidad que permitiese al estudiante establecer que su significado personal orientado a lo que denomina probable, esta enlazado con algunas perspectivas teóricas inherentes a la historia, y al tratamiento didáctico del mismo concepto.

Con lo descrito en la justificación y la definición del problema se plantearon las siguientes preguntas como base para el estudio de las concepciones en un ámbito escolar:

- *¿Cuál es el significado de probabilidad? ¿Cuál es el sentido mismo de la palabra?*
- *En una situación que involucre la noción de incertidumbre ¿Cuáles son las distintas perspectivas que permiten establecer una asignación de Probabilidad a un suceso?*
- *En el desarrollo histórico: ¿Qué papel ha jugado la noción de lo probable en las distintas culturas? ¿Ha estado siempre presente?*

Posterior a estas preguntas subyacen cuestiones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del concepto de Probabilidad, las cuales son:

- *¿Cuál es el significado de probabilidad que tienen los estudiantes?*
- *¿Cuál es la definición de probabilidad que presentan los libros de texto o los escritos científicos?*
- *¿Existe alguna relación o diferencia entre las concepciones de la probabilidad? ¿Cómo abordar estas relaciones o diferencias en el ámbito escolar?*
- *¿Qué actividades permiten identificar y caracterizar concepciones de la probabilidad con estudiantes de secundaria?*

Las preguntas planteadas anteriormente dieron origen a la pregunta general de este trabajo:

¿Cuáles actividades permiten caracterizar y ejemplificar las concepciones de la probabilidad en un grupo de estudiantes de educación secundaria, de tal manera que el significado de probabilidad sea inherente a las características que subyacen en un suceso aleatorio?

1.4. OBJETIVOS

1.4.1. Objetivo general

Diseñar e implementar una secuencia de actividades para estudiantes del grado undécimo (énfasis en matemáticas y sociales) del Instituto Pedagógico Nacional, que les permita identificar, caracterizar y establecer relaciones entre las concepciones de la probabilidad que subyacen en un suceso aleatorio.

1.4.2. Objetivos específicos

1. Realizar una indagación en la literatura lo que comprende: revisión bibliográfica referente a las concepciones de la Probabilidad en estudiantes de secundaria o universitarios, con el fin de identificar y establecer relaciones entre las concepciones de probabilidad definidas en la literatura indagada.
2. Conformar un conjunto de actividades enmarcadas en una o más concepciones de la Probabilidad, que permitan identificar las concepciones priorizadas por los estudiantes y la caracterización de estas en el ámbito escolar.
3. Implementar el conjunto de actividades diseñadas a los estudiantes del grado undécimo (énfasis en Sociales y Matemáticas) del Instituto Pedagógico Nacional.
4. Analizar la información recolectada en el desarrollo de las actividades propuestas, de tal manera que se concreten los resultados obtenidos que darán sustento a la propuesta de este estudio de las concepciones de la probabilidad con estudiantes de grado undécimo del IPN.

2. MARCO TEÓRICO

Para la conformación del marco teórico se realizó una indagación en libros de textos, artículos y trabajos de grado de maestría y doctorado, lo que permitió la propuesta de tres apartados fundamentales para el cimiento de este documento encaminado a las concepciones de la Probabilidad. El primero es una reseña histórica de la noción de la Probabilidad que presenta características del desarrollo histórico de las concepciones que subyacen en fenómenos aleatorios, en segunda instancia se presentan las definiciones encontradas en algunos libros de texto de matemáticas y artículos científicos relacionados con el concepto de Probabilidad, por último se enmarca la propuesta del grupo de trabajo para la conformación de ideas principales para las concepciones de la Probabilidad.

2.1. RESEÑA HISTÓRICA DE LA PROBABILIDAD

La noción de Probabilidad ha estado presente en pensamientos filosóficos, religiosos y matemáticos a través de la historia; en este sentido, se realizará una descripción de los pensamientos antes nombrados desde culturas antiguas de la humanidad hasta fechas del siglo XX. En esta reseña histórica se resalta la identificación de una concepción subjetiva inherente a los pensamientos filosóficos y teológicos, posteriormente se caracteriza la concepción Frecuentista enfatizando en el trabajo de Jacob Bernoulli y la concepción Clásica de Pierre Simon de Laplace; por último, la propuesta de la concepción Matemática o Axiomática del matemático Ruso Kolmogórov. Cabe aclarar que es posible que se dejen de lado algunas personas que han tenido influencia en el desarrollo de la Probabilidad, pero la intención principal de éste recorrido histórico, es identificar los aportes representativos relacionados con las concepciones de la Probabilidad.

2.1.1. Pensamientos filosóficos en Grecia y Roma

Fueron los juegos de azar practicados en culturas antiguas como Grecia, Roma y Egipto, los que involucraron huesos de animales u otros objetos que permitieron identificar que el hombre no conocía resultados a ciertos sucesos (Wilhelmi, 2004), siendo ésta falta de certidumbre la característica principal para diferenciar ciertos procesos de dos maneras específicamente, la primera es cuando se conoce el resultado de un proceso que no se afecta por ninguna causa y no importa cuántas veces se realice, el resultado siempre será el mismo, mientras que, la segunda clasificación involucra procesos en donde el resultado no es predecible, puede que existan diversos resultados y por lo tanto no se determina una única solución; es en esta clasificación en la que se enfocará y son a estos procesos a los que el pensamiento helénico denominó fenómenos contingentes. En este mismo sentido, el filósofo griego Aristóteles ($384 - 322\ A.C.$) propuso el razonamiento dialéctico, entendido como un razonamiento que está afectado de incertidumbre, parte de una premisa verdadera pero no alcanza una determinada conclusión, sucesos que son relativos al pensamiento en donde el individuo no posee la verdad absoluta y se hace presente el razonamiento probable.

Estos pensamientos filosóficos griegos trascendieron a la cultura romana y uno de sus mayores receptores y divulgadores fue Cicerón ($106 - 43\ A.C.$) quién continuó con un trabajo en donde efectivamente el fundamento básico que explica lo relacionado al principio "probable" es la falta de conocer la absoluta verdad frente algo y por lo tanto, permanecer en incertidumbre de veracidad o falsedad. Según Cicerón, para solucionar esta incertidumbre es posible apoyarse en tres cosas*: (i) la experiencia de lo que ha sucedido la mayor parte de los casos, (ii) las creencias de la gente o (iii) aquello que está relacionado de alguna manera con lo anterior* (García, 2001).

2.1.2. Pensamientos filosóficos y teológicos después de cristo hasta el siglo XVI

Los desarrollos filosóficos expuestos anteriormente datan de épocas anteriores a Jesús Cristo. Continuando en referencia del documento de García (2001) se observará que el trabajo en torno a lo "probable" recibe una influencia del pensamiento teológico en épocas después de Cristo, sin embargo con estos pensamientos no se alcanza a realizar un trabajo formal acerca del cálculo de Probabilidades.

2.1.2.1. Filosóficos

Es hasta Santo Tomás $(1225 - 1274)$ que se presenta de manera concreta una recuperación del pensamiento aristotélico basándose en que el entendimiento humano escasea ante los fenómenos que considera contingentes (de incertidumbre) y determinando que lo probable debe considerarse como aquello que sucede la mayoría de veces.

2.1.2.2. Teológicos

Para San Agustín $(354 - 430)$, el concepto de fortuna o azar no existe objetivamente, pues es relativo al entendimiento humano frente a ciertos sucesos, la mente establece una relación entre lo que puede pasar y lo que sienta el individuo, sin embargo, es claro que todo está controlado por la voluntad de Dios.

A mediados del Siglo XVI en España, Bartolomé de Medina $(1528 - 1580)$ un profesor de teología, quien defendió que una acción puede ser probable aunque esta sea de alguna manera menos probable que otra, es correcto seguirla sea por intuición o experiencias previas, Bartolomé fue el fundador del *Probabilismo moral de tradición cristiana.*

Este probabilismo moral permitía validar que una acción fuese probable cuando esta moralmente fuera probable; no obstante este pensamiento generó algunos opositores principalmente jansenistas (doctrina religiosa) y de manera indirecta las discusiones permitieron un paso clave para el cálculo de Probabilidades a partir de los matemáticos Fermat y Pascal.

2.1.3. Pensamientos matemáticos en el Siglo XVI hasta el siglo XX

En Wilhelmi (2004), se trae a colación un envío de cartas entre los matemáticos Blaise Pascal $(1623 - 1662)$ y Pierre Fermat $(1601 - 1665)$, en donde la discusión giraba en torno a ciertos juegos de azar relacionados con el lanzamiento de un dado y con juegos que involucran el reparto.

Anterior a dicho carteo, en el siglo XVI el matemático Jerónimo Cardano ($1501 - 1576$) había enunciado algunas reglas para resolver problemas de dados inherentes a precauciones para toma de decisiones evitando las trampas en dichos juegos. El trabajo de Cardano permite la comprensión de principios fundamentales de la ley de los grandes números y la obtención casi general de los sucesos repetitivos. En este mismo tiempo Galileo Galilei ($1564 - 1642$) presentó la solución al siguiente problema: *tomando tres dados, se debe tener que el número 10 aparece más frecuente que el número 9,* Galileo propone que de los 216 casos favorables, existen 27 favorables al número 10 y 25 para el número 9 (Collette, 1985)

En la conversación de Blaise Pascal y el caballero de Méré, aparece una carta centrada en responder al siguiente enunciado:

> "*Un jugador debe obtener un seis con un dado lanzado ocho veces; supongamos que después de tres lanzamientos sin éxito, decide retirarse; ¿Qué proporción de la apuesta le corresponde?"*(Collette, 1985, p. 55)

Siendo éste un comienzo para el cambio de información de las seis cartas intercambiadas, que dieron el punto de partida a la moderna teoría de las Probabilidades. Aunque Pascal como Fermat no publicaron sus resultados sobre el cálculo de las Probabilidades, en el año 1657 se publicaron cinco problemas propuestos por Fermat y uno por Pascal reunidos por Huygens, además unos propuestos por él mismo; esta publicación es considerada la primera que haya aparecido frente al tema.

Fue Jacob Bernoulli ($1654 - 1705$), un matemático suizo quien en su obra: "*El arte de la conjetura*", hizo explícito de manera relevante el *Teorema de Bernoulli*, que permitió dar la base para la teoría de la Probabilidad y que la observación para los procesos aleatorios dejarán de trabajarse como casos particulares, enfatizando con resultados de manera general para una mayor comprensión de esta teoría.

Abraham De Moivre ($1667 - 1754$) fue quien concretó los principios para el cálculo de Probabilidades, de igual manera planteó numerosos problemas de aplicación (con dados, partidas y urnas) a partir de los principios propuestos trabajó sobre la teoría de las permutaciones y combinaciones, expuestos en la *Doctrina de las Probabilidades, sus* *anualidades* (1725) y sus *Miscellanea anlytica* (1730) en donde se encuentra una fórmula[1] de aproximación para el factorial de *n*:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

De igual manera, la aproximación de la fórmula de Probabilidad $\int_0^x e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$ y su contribución al descubrimiento de la distribución normal de frecuencia. Moivre también expresa en una notación algebraica propia de las Probabilidades que, si designamos por x la Probabilidad que un suceso ocurra entonces $1 - x$ será la Probabilidad que el suceso no ocurra (Collette, 1985).

Pierre Simon de Laplace (1749-1827) fue un Matemático y Físico francés quien realizó trabajos relacionados con la teoría y el cálculo de Probabilidades, mientras que algunos matemáticos de épocas anteriores coincidían que un individuo podría tener conocimiento de Probabilidades de eventos. Laplace consideraba que las cosas no pueden tener una Probabilidad ya que esta es consecuencia absoluta de nuestra falta de conocimiento, en este sentido establecía que:

La teoría del azar consiste en reducir todos los acontecimientos del mismo tipo a un cierto número de casos igualmente posibles, es decir, tales que estemos igual de indecisos respecto a su existencia, y en determinar el número de casos favorables al acontecimiento cuya Probabilidad se busca (Hawking, 2010, p. 363), definiendo la Probabilidad de un evento como: "*la razón entre el número de casos favorables y el de todos los casos posibles"* (p. 358).

El interés del matemático ruso Andrei Kolmogórov (1903 − 1987) por la Teoría de la Probabilidad empezó en 1924; su primer paso en esta área fue realizado conjuntamente con A.Y. Khinchin, en: "*Una teoría general de la medida y el cálculo de Probabilidades*" (1929), en donde se esboza una primera propuesta de un sistema de axiomas para dicha teoría con fundamentos en la teoría de la medida y la teoría de funciones de variable real. Tiempos atrás había existido un tratamiento para la

[1] Denominada la fórmula de Stirling.

Probabilidad en primera instancia por E. Borel en 1909, y tratada con mayor profundidad por Lomnicki en 1923, estructurándola de manera general tan precisa por Kolmogórov en el año 1933. La edición corta del libro "*Fundamentos del cálculo de Probabilidades*", en el año 1933, se convirtió en la conformación determinante sobre el tema, esto generó de manera concreta dos aportes, el primero enfocado al desarrollo de la teoría de la Probabilidad inmersa como una rama de las Matemáticas, y segundo, constituyó ciertas bases para el trabajo de procesos aleatorios, luego, las ideas trabajadas por Kolmogórov permanecen inmersas en la teoría moderna de los procesos aleatorios, que lo hacen el mejor representante en esta disciplina. (Carrillo, 2002).

Aunque la concepción propuesta por Kolmogórov evidencia un papel estructural de la Probabilidad, es claro que durante la historia, la noción de Probabilidad ha estado ligada a experiencias de incertidumbre que involucran al individuo y permiten que el hombre busque soluciones o respuestas a situaciones aleatorias desde puntos de vista subjetivos, frecuentistas o clásicos, por tal razón el trabajo propuesto en este documento estará relacionado con las concepciones, subjetiva evidenciada desde juegos de azar en culturas antiguas y en pensamientos filosóficos y teológicos, Clásica trabajada especialmente por Simon de Laplace y Frecuentista estipulada por Jacob Bernoulli.

2.2. CONCEPCIONES DE LA PROBABILIDAD: EDUCATIVOS Y CIENTÍFICOS

Para realizar el análisis en la literatura de las concepciones de la Probabilidad en los libros o artículos a revisar, se diseñaron dos cuadros en los que se enmarcan las características esenciales de las concepciones expuestas en dos tipos de documentos, uno de ellos son los libros escolares y universitarios los cuales denominaremos como "Educativos" que se utilizan para la enseñanza de la Probabilidad, y los artículos de investigación científica que provienen de revistas educativas y comunicaciones breves, los cuales se denominaremos como "Científicos".

En concordancia con lo anterior este capítulo mostrará concretamente información relacionada con las concepciones de la Probabilidad identificadas en el análisis tanto de nivel escolar (educación secundaria) como de nivel universitario, textos en donde prima el concepto de Probabilidad desde varios puntos de vista, privilegiando las concepciones clásica, frecuentista y subjetiva para la definición de probabilidad, por tal razón se ha enfatizado y propuesto el desarrollo de este estudio con estas concepciones. Como primera instancia se encuentran las concepciones que presentan algunos libros de nivel escolar seleccionados por su facilidad de identificación y caracterización, entre estos se encuentran el libro de Chávez (1995) el cual lleva como título "*Cálculo*" y el libro de Goñi y otros (2011) titulado como "*Matemáticas: Complementos de formación disciplinar"*, en el que se podrá categorizar claramente algunas de las tres concepciones ya identificadas; por otra parte las concepciones que se identificaron en los libros de nivel universitario se ven reflejadas en las proporcionadas en el libro de F. Fernández (s.f) titulado como *"Curso de Probabilidad"*.

En el segundo cuadro se presentan las concepciones de la Probabilidad en documentos referentes del año 1985 hasta el año 2003 en donde se resalta uno de los documentos publicados en este periodo, el cual fue escrito por el profesor Toretti (2003), la información propuesta por el profesor sobre el papel del saber matemático será fundamento de las actividades para las concepciones de la Probabilidad en grado undécimo en el IPN.

Para facilitar la organización y el análisis de la información recolectada posterior a las actividades que se implementarán, se ha propuesto un reglón donde se ilustra un código de identificación; el primer carácter representará el tipo de texto (educativo o científico[2]), el segundo carácter será la primera cifra del apellido del escritor o autor y por último el tercer carácter representará el tipo de concepción de la Probabilidad. A continuación se presenta un ejemplo:

[2] Se refiere a *texto científico* a los documentos académicos publicados como resultados de una investigación o un estudio realizado.

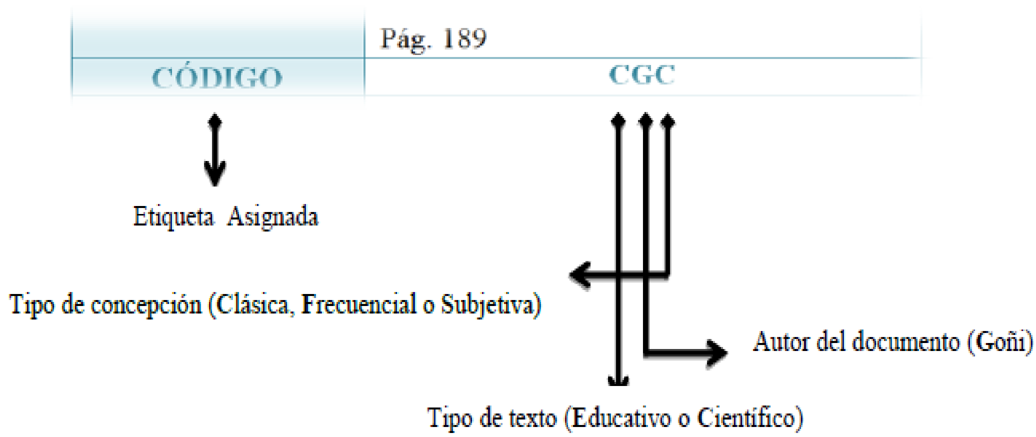


Ilustración 1. Indicaciones previas de la categorización

2.2.1. Concepciones de tipo educativo

El siguiente arreglo rectangular presentará de acuerdo al autor del libro la(s) definiciones de las concepciones de la Probabilidad.

Concepciones **Libros**	**CONCEPCIONES DE LA PROBABILIDAD DE TIPO EDUCATIVO** **CLÁSICA**	**FRECUENCIAL**	**SUBJETIVA**
Serret J. (1995). *Manual de estadística universitaria: inductiva.*	"Cuando no se dispone previamente de los datos del comportamiento del suceso, hay que recurrir al concepto matemático de Probabilidad y hacer uso de los métodos de conteo entre ellos fundamentalmente la teoría combinatoria". Pág. 18 (Probabilidad a priori)	"Debemos conocer la información previamente al cálculo de la Probabilidad. Esta información será una tabla de un estadística en las que conoceremos las frecuencias con que se ha producido el suceso, por lo tanto, pondremos determinar las frecuencias relativas y utilizando la definición estadística de Probabilidad del suceso". Pág. 17 (Probabilidad a posteriori)	**NO DEFINE**
CÓDIGO	**ESC**	**ESF**	**ESS**
Chávez H. (1995). *Cálculo.*	"Si A es un suceso que acontece si se verifica cualquiera de h sucesos $A_1 \dots A_h$ y que no acontece si se verifica cualquiera de los sucesos $A_{h+1} \dots A_p$,entonces: $P(A) = \frac{h}{n} = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos probables}}$ " Pág. 202	"Si A es un suceso de un cierto experimento aleatorio, al repetir el experimento n veces y hacer que $n \to \infty$, la frecuencia relativa f de A tiende a un límite". Pág. 202	**NO DEFINE**
CÓDIGO	**ECC**	**ECF**	**ECS**
Pliego J. y Pérez L. (2006). *Fundamentos de la Probabilidad.*	"La Probabilidad de un suceso es el cociente entre el número de casos favorables y el número total de casos, siempre que todos sean igualmente posibles. $P(S) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número total de casos}}$,, Pág. 11	"La frecuencia absoluta de un sucesos en el desarrollo de un experimento aleatorio, repetido de forma independiente N veces, es el número n apariciones del suceso. La frecuencia relativa del suceso es el cociente entre la frecuencia absoluta, n, y el número de veces que se ha repetido el experimento, N: $f = \frac{n}{N}$" Pág. 12	"La Probabilidad hace referencia a la impresión que cada persona tiene acerca de la posible ocurrencia o no de un suceso en un momento concreto; es decir, la posibilidad subjetiva, también llamada personalista, no es una propiedad física de los fenómenos, sino que expresa el grado de creencia personal que cada individuo tiene acerca del resultado de un fenómeno aleatorio". Pág. 34
CÓDIGO	**EPC**	**EPF**	**EPS**

Goñi J. y otros. (2011). *Matemáticas: Complementos de formación disciplinar.*	"No se define específicamente, pero se realiza un recuento histórico sobre el trabajo de Laplace, la cual define Probabilidad como: $$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número total de casos}}"$$ Pág. 199	"La Probabilidad P(A) del suceso puede ser estimada a partir de las frecuencias relativas de una muestra $f_n(A)$". Pág. 204	"La Probabilidad es un grado de creer acerca de un fenómeno impredecible". Pág. 205
CÓDIGO	**EGC**	**EGF**	**EGS**
Fernández F. (s.f).*Curso De Probabilidad.*	"La visión clásica de la Probabilidad posibilita el cálculo de las Probabilidades antes de que cualquier prueba sea realizada. Bajo esta concepción la Probabilidad se define como el cociente entre los resultados favorables y todos los resultados posibles que se puedan determinar en un espacio muestral, en el que se asume la equiprobabilidad de los resultados. $$P = \frac{\text{Resultados Favorables}}{\text{Resultados Posibles}}"$$	"Utiliza la frecuencia relativa de un evento, en la repetición de una serie de pruebas, para determinar la Probabilidad de un evento. Los seguidores de esta concepción utilizan una aproximación experimental a posteriori para estimar las Probabilidades luego de que muchas pruebas hayan sido realizadas. Bajo esta mirada, se debe realizar un número suficiente de pruebas para observar todos los posibles resultados y para obtener suficientes datos para establecer patrones en los resultados, esperando que las frecuencias relativas reflejen las Probabilidades teóricas, si es que se pueden asignar desde la concepción clásica".	"Esta concepción de la asignación de Probabilidades incluye la evaluación de Probabilidades basada en creencias personales, que usualmente se sustentan en patrones implícitos de preferencias entre decisiones e intuiciones primarias, basadas en un conocimiento ingenuo o en experiencias previas. Para un subjetivista, las Probabilidades proporcionan un grado de confianza en eventos inciertos. Aunque los subjetivistas también consideran la simetría desde una concepción clásica y la frecuencia desde una concepción frecuencial, ellos usualmente revisan sus Probabilidades basados en un modelo de "experiencia del aprendizaje"
CÓDIGO	**EFC**	**EFF**	**EFS**

Tabla 1. Concepciones tipo educativo

2.2.2. Concepciones de tipo científico

El siguiente arreglo rectangular presenta el autor del texto de tipo científico la(s) concepción(es) definidas para Probabilidad, siguiendo las mismas indicaciones del cuadro anterior.

Concepciones / Libros	**CONCEPCIONES DE LA PROBABILIDAD DE TIPO CIENTÍFICO**		
	CLÁSICA	**FRECUENCIAL**	**SUBJETIVA**
Gutiérrez, S. (1985). *El que de la Probabilidad.*	"Puedes decir que conoces a P (verdad de la proposición o realidad del suceso) o que conoces; si no la conoces no tienes razón suficiente para creer en ella; si la conoces no hay lugar a la Probabilidad; no hay, pues, ningún grado de justificada creencias entre 0 y 1. No es fácil tomar un punto de partida para argumentar satisfactoriamente a favor o en contra de posición tan externa". Pág. 189	"Cuando la Probabilidad se toma como equivalente a la "proporción" en una clase finita, tampoco aparecen dudas ontológicas. Si la clase es finita consta de elementosE, debe haber algún número definido de tales elementos. Una "proporción", entre uno y cero (inclusive), de estos elementosE, las leyes de "no contradicción" y medio "excluso"". Pág. 189	"El "sentido común" de Probabilidad no presenta problemas. Cuando el pueblo dice "es probable P" hace una afirmación cautelar acerca de P. Admite tanto la defensa de P como su refutación". Pág. 189
CÓDIGO	**CGC**	**CGF**	**CGS**
Mateos, G. y Aparicio, M. (1985) *Teoría subjetiva de la Probabilidad: fundamentos, evolución y determinación de Probabilidades*	"Relacionada con los juegos de azar, tiene un punto de partida clásico: la existencia de una simetría recíproca entre los distintos resultados posibles; simetría que viene a significar que cualquiera de los resultados posibles pueden ser considerados equivalentes desde el punto de vista de la Probabilidad Así, si suponemos todos los resultados posibles del juego, y estos se consideran igualmente favorables igualmente verosímiles, existe una simetría mutua del tipo referido antes; por tanto, para el jugador es indiferente, en este caso, arriesgar su apuesta por cualquiera de los resultados posibles". Pág. 102	"Considera la Probabilidad como una frecuencia relativa ideal, esto es, como el límite de la sucesión de frecuencias relativas de un suceso al aumentar indefinidamente el número de realizaciones". "Si repetimos un determinado experimento aleatorio "n" veces en las mismas condiciones y ocurre "f" veces el suceso "S", al número "f" será la frecuencia absoluta del suceso, y el cociente f/n determinará la frecuencia relativa". Pág. 110	"Llamada también personal por algunos autores, abandona el criterio del grado de confirmación como grado de creencia objetivo y racional, expresando, por contra, el grado de confirmación como grado de creencia real de una persona, tal y como lo manifestaría en una apuesta de juego". Pág. 129
CÓDIGO	**CMC**	**CMF**	**CMS**
Toretti, R. (2003) *El concepto de la Probabilidad*	"La Probabilidad de un evento es el cociente entre el número de casos "igualmente posibles" favorables a ese evento y el total de todos los casos igualmente posibles.	"El frecuentismo identifica la Probabilidad de un evento con la frecuencia relativa con que se presentan, a la larga, eventos como ese entre los eventos de su clase". Pág. 7. "Un frecuentista solo habla de Probabilidad a propósito de colecciones numerosas de casos,	"La Probabilidad es un atributo de nuestras opiniones subjetivas sobre aquellos asuntos acerca de los cuales

	La equiprobabilidad es manifiesta y se explica por sí misma en las situaciones aleatorias donde hay simetría entre los varios desenlaces posibles". Pág. 6	de secuencias muy numerosas de sucesos; y emplea el término para referirse a la proporción estable que a la larga ocupan los casos o sucesos de un cierto tipo en el total de esas colecciones o secuencias". Pág. 8.	no podemos o no queremos hacer una aseveración objetiva". Pág.14
CÓDIGO	**CTC**	**CTF**	**CTS**

Tabla 2. Concepciones de tipo científicos

2.3. DEFINICIÓN CONCEPCIONES DE LA PROBABILIDAD

En la propuesta de la metodología general en el desarrollo de las actividades, el trabajo realizado en la sección 2.2, permitió consolidar las características generales de las concepciones de la Probabilidad: Clásica, Frecuentista y Subjetiva que condescendieron la institucionalización de estas en el aula de clase, con los cursos de énfasis en Sociales y énfasis en Matemáticas del IPN.

En primera instancia se identificó una idea principal en la definición propuesta por cada autor[3], de tal manera que se establecieran algunas relaciones entre las definiciones de las concepciones, esta información se relaciona en la siguiente tabla:

CONCEPCIONES	CÓDIGO	IDEA REPRESENTATIVA
CLÁSICA	CMC	*Existencia de una simetría y noción de equiprobabilidad*
	CGC	*Asignación numérica a [0,1]*
	ESC	*Trabajo en torno a las técnicas de conteo*
	EFC, ECC, EPC, EGC, CTC	$P = \frac{Resultados\ Favorables}{Resultados\ Posibles}$"
FRECUENTISTA	ECF	*Existencia de un limite* $n \to \infty$
	EFF	*Obtención de un número suficiente de datos.*
	ESF	*Información que se deduce de una tabla de datos estadística.*
	CTF, CGF	*Proporción; Una comparación.*
	EPF, CMF, EGF	*Hacen referencia a un cociente:* $f = \frac{n}{N}$
	CGS	*Un sentido común.*

3 Información de las tablas 1 y 2.

SUBJETIVA	ESS, ECS	*No Definen.*
	EGS	*Creencia sin justificación.*
	CTS	*Prevalencia de lo subjetivo no siendo objetivo.*
	EFS, EPS, CMS	*Basándose en creencias dadas por la experiencia o una intuición primaria.*

Tabla 3. Ideas principales de autores

Con la información estipulada en las tablas 1, 2 y 3 se presentan las ideas principales de las definiciones de las concepciones de la Probabilidad que serán explicadas a los estudiantes en el desarrollo de la actividad 2:

CONCEPCIÓN	IDEAS PRINCIPALES
CLÁSICA	Esta concepción esta definida por: • Una noción de equiprobabilidad, (sucesos equiprobables).Se establece una asignación *a priori* • Una recurrencia a las técnicas de conteo • Un cociente entre los resultados favorables y todos los resultados posibles $$P = \frac{\text{Resultados Favorables}}{\text{Resultados Posibles}}"$$
FRECUENTISTA	Esta concepción esta definida por: • Incrementar indefinidamente el número de realizaciones de un suceso en un experimento. • Utilizar una aproximación experimental *a posteriori* luego de que muchas pruebas hayan sido realizadas • Interpretar información de datos en términos de frecuencias con que se ha producido un suceso, una concepción que establece una frecuencia relativa a partir de una absoluta.
SUBJETIVA	Esta concepción esta definida por: • Una asignación de Probabilidad enmarcada en creencias personales, relacionando patrones implícitos de preferencias e intuiciones primarias, se hace explicito un conocimiento construido por experiencias previas de

	aprendizaje. • La recurrencia al “sentido común” de ocurrencia de un suceso.

Tabla 4. Definiciones concepciones de la Probabilidad

Estipuladas las ideas principales para las concepciones de la Probabilidad, se realiza una propuesta para el desarrollo general de las actividades.

3. METODOLOGÍA GENERAL ACTIVIDADES

La metodología propuesta para el trabajo inherente a la noción de Probabilidad con estudiantes de grado undécimo del Instituto Pedagógico Nacional se concretó en dos ejes centrales: el primero es el diseño de cinco problemas inmersos en situaciones que involucran sucesos aleatorios con el objetivo de identificar concepciones de la Probabilidad en torno a un significado personal de los educandos, aclarando que a la hora de su implementación los estudiantes no habrán tenido ningún trabajo institucional formal con el concepto de Probabilidad en el ámbito escolar.

Con los resultados obtenidos en el proceso de identificación de las concepciones, se realizará una actividad que tiene como objetivo la caracterización de las concepciones de la Probabilidad Clásica, Frecuentista y Subjetiva, donde el educando tendrá que establecer relaciones y diferencias entre ellas, y por supuesto concretar la existencia de diferentes concepciones para la asignación de Probabilidad en un suceso aleatorio; por último, como tercera instancia se realizará una actividad con el objetivo de profundizar las nociones sobre estas concepciones .

El conjunto de actividades que serán gestionadas en el aula tendrá un orden en la implementación, es decir, una primera etapa es el proceso de implementación de las cinco situaciones problema de Probabilidad, luego como segunda etapa la situación problema que se denominó "Laura en el centro comercial" y la tercera etapa será la actividad con un juego de balotas conocida en la comunidad Colombiana (el Baloto) enmarcado en una recolección de datos en hojas de cálculo con la herramienta Excel.

La organización de las actividades implementadas en el aula de clase se presenta en el siguiente gráfico:

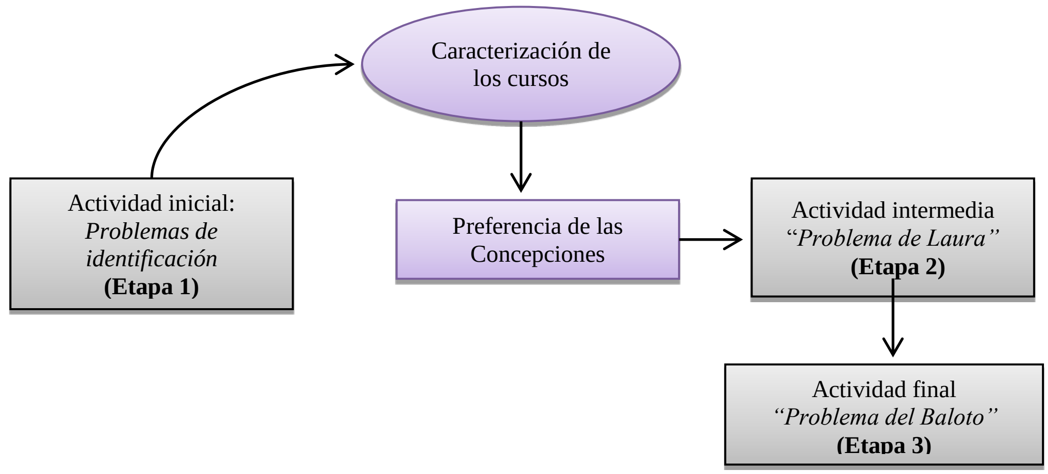


Ilustración 2. Metodología general

La organización de los estudiantes en el aula para la implementación de las actividades en las etapas 1, 2 y 3, se describe a continuación:

> *Se les dirá a los estudiantes que para el desarrollo de las actividades específicas se conformarán grupos de tres personas, en las que tendrán que reflexionar y escribir las distintas soluciones a los problemas planteados. El tiempo aproximado es de 30 minutos para cada actividad.*

3.1. DESCRIPCIÓN DE LOS PROBLEMAS (ETAPA 1)

En la primera etapa de la implementación del conjunto de actividades se diseñaron 5 problemas, para los cuales los hechos históricos relacionados con el concepto de Probabilidad fueron necesarios, de igual manera los avances didácticos inmersos en la enseñanza de este tópico.

El problema 1 y 2 tienen gran similitud, sin embargo el contexto y la descripción de las situaciones son diferentes una de la otra.

Problema 1:

En uno de los periódicos nacionales se divulga una noticia muy interesante para Carlos, la noticia relata la historia de una persona que siendo económicamente pobre, un pedazo de papel le cambia radicalmente su vida, llevándolo a ser un gran millonario solo haciendo la lotería con un número rojo escrito en aquel trozo viejo de papel.

Esa misma mañana Carlos debía ir a trabajar pero su automóvil se encontraba averiado, situación que lo obligó a caminar el corto trayecto que había de su casa a su oficina. En el transcurso del camino, Carlos se topa con un viejo y arrugado papel, el cual recogió y abrió con curiosidad observando en el dos números escritos de color negro, el 99999 y 16947; recordando esa noticia “fantasiosa” que había leído esa mañana, decidió arriesgarse haciendo la lotería, dirigiéndose rápidamente a la tienda más cercana de su barrio, al llegar, el dueño de la tienda le solicita a Carlos el número que él deseaba hacer en la lotería, escuchando con discreción dicha solicitud, Carlos no sabe qué número elegir si el 99999 o el 16947 para tener la posibilidad de ganar en este juego de azar.

CUESTIONARIO (Estudiantes):

Si estuvieras en la misma situación, ¿Cuál elegirías el 99999 o el 16947? y ¿Por qué?

DESCRIPCIÓN:

El diseño de esta situación estuvo fundamentado en lo descrito por Muñoz (1998), en su artículo publicado en la revista SUMA, el cual lleva como título *Algunas ideas preconcebidas sobre Probabilidad.* El autor describe toda una teoría sobre las preconcepciones que tiene los estudiantes cuando se ven sometidos a la experimentación aleatoria, en donde se ve claramente que los estudiantes no son mentes en blanco, como generalmente pensamos los docentes de Matemáticas, sino por el contrario ellos guardan ideas experimentales y frecuentistas de objetos matemáticos antes de haber tenido algún acercamiento hacia tales objetos. Es importante resaltar que el contexto que enmarca la situación no se notó importante para el autor, es por esto que la propuesta que hace el grupo de trabajo del presente documento, es la de incursionar en el contexto que marca al estudiante, generando en el aula la discusión y extensión de los conceptos de la Probabilidad.

Problema 2:

Un día Carlos se dirige a su oficina caminando, en el transcurso del camino él se encuentra un papel, en el cual hay dos números escritos, el 99999 y el 16947; él recuerda que un día una persona se ganó la lotería con un número que él encontró en la calle tirado, es por eso que Carlos decide hacer la lotería con uno de los números que ha encontrado, pero no sabe cuál elegir si el 99999 o el 16947.

CUESTIONARIO (Estudiantes):

Si estuvieras en la misma situación, ¿Cuál elegirías el 99999 o el 16947? y ¿Por qué?

DESCRIPCIÓN:

Aunque los cuestionarios de las dos opciones del numeral 1 son iguales, su interpretación puede ser variable, que sería lo ideal para el estudio que se desarrolla, pero también es posible que el estudiante tenga la misma interpretación hecha para la anterior opción, acción que generara en el aula la posibilidad de encontrar respuestas variables o muy parecidas a las de la opción 1, aunque la hipótesis para esta situación sea la de identificar fácilmente la concepción frecuentista.

Problema 3:

Dos jóvenes aficionados al *Rock and Roll* en Colombia, han apostado las boletas del concierto de Metálica, pero Pedro sabe que su amigo Juan es un jugador empedernido a los juegos de azar llevándolo a pensar en la posibilidad de perder la apuesta, por esta razón él toma la iniciativa de condicionar el juego, en el cual cada uno deberá lanzar 8 veces seguidas una moneda, de tal manera que:

- Pedro compraría las boletas sí Juan en los ocho lanzamientos obtiene 7 caras seguidas y un sello al final.
- Juan compraría las boletas sí Pedro en los ocho lanzamientos obtiene 5 caras seguidas y 3 sellos al final.

CUESTIONARIO (Estudiantes):

¿Cuál de los dos aficionados no tendrá que comprar las boletas?

DESCRIPCIÓN:

La situación problema se diseñó con el objetivo que el estudiante hiciera uso de la concepción clásica de la Probabilidad para poder determinar la posibilidad del evento que se encuentra inmerso en la situación descrita en el segundo ítem de la segunda etapa, para esto se usó los problemas descritos por Muñoz (1998) en un artículo titulado como *Algunas ideas preconcebidas sobre Probabilidad*, en el que se indaga la adquisición del concepto de Probabilidad.

Problema 4:

En uno de los casinos de Bogotá se encuentra jugando el Señor Rodríguez, a él le gusta todo juego de azar, gusto que lo lleva a jugar a los dados, el juego consiste en lanzar un dado seis veces, la persona que gana tendrá que sacar estrictamente un número mayor a tres; el señor Rodríguez ha lanzado cinco veces el dado, donde ha ganado dos veces y ha perdido tres veces, evidenciando la mala racha que ha tenido esta noche, él decide retirarse de dicho juego.
Si el Señor Rodríguez hubiera decidido continuar en el juego que crees:

CUESTIONARIO (Estudiantes):

¿El señor Rodríguez perdería o ganaría? y ¿Por qué?

DESCRIPCIÓN:

Para este ítem se tuvo como hipótesis de resultado que los estudiantes seleccionarían entre la concepción clásica o frecuentista de la Probabilidad, ya que su diseño no hacia una distinción directa entre las concepciones, es por esto que el contexto del ítem hace traslucir el uso de la concepción frecuentista o clásica de la Probabilidad.

Problema 5: [4]

Chévalier de Mére era un jugador empedernido que frecuentemente invitaba a sus amigos a jugar en su palacio distintos juegos de dados. Uno de dichos juegos consistía en lanzar seis veces un dado y si en por lo menos uno de los lanzamientos obtiene un "seis", Chévalier ganaba. Después de haber jugado más de tres partidas seguidas los invitados se ofuscaron pues, a la larga, ellos siempre perdían. Por esta razón Chévalier propone cambiar las reglas del juego: Chévalier gana si en 24 lanzamientos de dos dados aparece, por lo menos una vez, un "doble seis".

CUESTIONARIO:

¿Cuál de los dos juegos que Chévalier propone creerías que generaría mayor ganancias para él? Y ¿Por qué?

3.2. ACTIVIDAD INTERMEDIA (ETAPA 2)

La actividad propuesta para esta etapa presenta una descripción de una situación de un suceso en el que intervienen factores aleatorios inmersos en la vida cotidiana del estudiante.

Problema:

Laura es una estudiante del Instituto Pedagógico Nacional que decide ir almorzar al centro comercial Unicentro. En total existen 7 restaurantes a los cuales ella puede ingresar y cada uno está ubicado como lo muestra el siguiente gráfico:

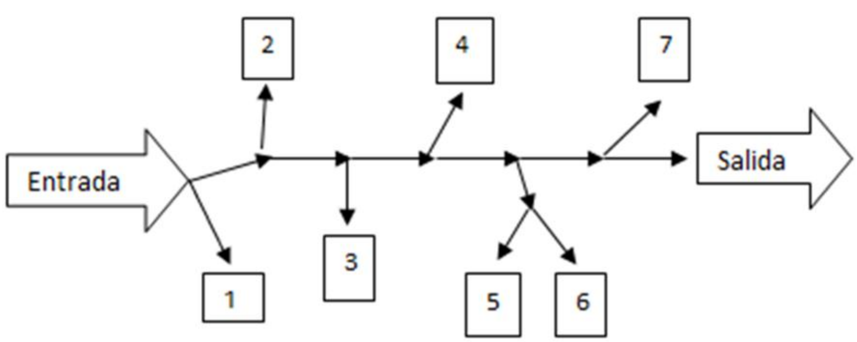


Ilustración 3. Problema de Laura

[4] El diseño de este problema fue basado en Blanco L. (2005) con el fin de fortalecer la noción de equiprobabilidad en un cambio de espacios muéstrales.

Laura se encuentra en la entrada, si ella decide avanzar ya no puede regresar (siguiendo siempre el orden de las flechas). Considerando que, ella ha comido 2 veces en el restaurante 1, una vez en el restaurante 5, y tres veces en el restaurante 3.

CUESTIONARIO (Estudiantes):

1) ¿A cuál de los siete restaurantes entraría Laura? ¿Por qué?
2) ¿Qué aspectos se podrían tener en cuenta para que Laura decida ir al restaurante número 3 y no al restaurante número 7?

DESCRIPCIÓN: El objetivo que tiene la actividad en esta etapa es que los estudiantes conozcan las diferentes concepciones de la Probabilidad (Clásica, Frecuentista y Subjetiva) con el fin de establecer diferencias y similitudes entre ellas, reconociendo que no existe una única concepción.

3.3. ACTIVIDAD FINAL (ETAPA 3)

Terminada la etapa 2 se realizará una actividad con el propósito de concretar las nociones que han construido o reforzado los estudiantes en relación con las concepciones de Probabilidad por medio de las etapas 1 y 2.

La actividad final consiste en presentar a los estudiantes un estudio realizado sobre un juego de balotas (Baloto) el cual consiste en seleccionar de manera aleatoria 6 balotas de 45 balotas; el ganador del Baloto es aquella persona que su tiquete corresponda con los números de las 6 balotas extraídas de la "esfera balotera" sin importar el orden de salida de dichas balotas.

La información para la actividad se relaciona en dos hojas de cálculo: en la primera se encuentran los resultados obtenidos en los juegos realizados desde el año 2001 hasta el año 2010, destacando el día de juego, la fecha y seleccionando en amarillo los boletos ganadores del sorteo. En la segunda hoja se relaciona una grafica de frecuencias que indica cuantas veces ha salido cada balota en los juegos realizados.

Primera hoja de cálculo:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	966	17	18	22	23	28	45	miércoles, 21 de julio de 2010		
2	965	8	9	13	14	19	39	sábado, 17 de julio de 2010		
3	964	9	18	19	21	29	35	miércoles, 14 de julio de 2010		
4	963	3	7	11	14	17	23	sábado, 10 de julio de 2010		
5	962	6	14	20	24	37	38	miércoles, 07 de julio de 2010		
6	961	1	10	22	27	29	34	sábado, 03 de julio de 2010		
7	960	3	10	17	19	25	44	miércoles, 30 de junio de 2010		
8	959	4	6	18	21	27	33	sábado, 26 de junio de 2010		
9	958	27	30	36	38	39	45	miércoles, 23 de junio de 2010		

Ilustración 4. Juegos Realizados en el año 2010

919	48	4	9	13	28	32	43	sábado, 29 de septiembre de 2001
920	47	1	7	11	12	24	39	miércoles, 26 de septiembre de 2001
921	46	2	14	21	28	33	37	sábado, 22 de septiembre de 2001
922	45	4	15	25	29	30	44	miércoles, 19 de septiembre de 2001
923	44	1	6	7	12	27	34	sábado, 15 de septiembre de 2001
924	43	18	28	30	32	34	37	miércoles, 12 de septiembre de 2001
925	42	14	18	22	28	32	35	sábado, 08 de septiembre de 2001
926	41	24	27	36	37	41	43	miércoles, 05 de septiembre de 2001
927	40	13	23	25	27	38	40	sábado, 01 de septiembre de 2001
928	39	3	4	9	10	12	42	miércoles, 29 de agosto de 2001
929	38	4	5	8	13	15	36	sábado, 25 de agosto de 2001
930	37	2	4	9	16	17	23	miércoles, 22 de agosto de 2001
931	36	1	16	19	25	38	44	sábado, 18 de agosto de 2001
932	35	3	12	14	37	40	44	miércoles, 15 de agosto de 2001
933	34	13	16	21	25	29	43	sábado, 11 de agosto de 2001

Ilustración 5. Juegos Realizados en el año 2001

Segunda hoja de cálculo:

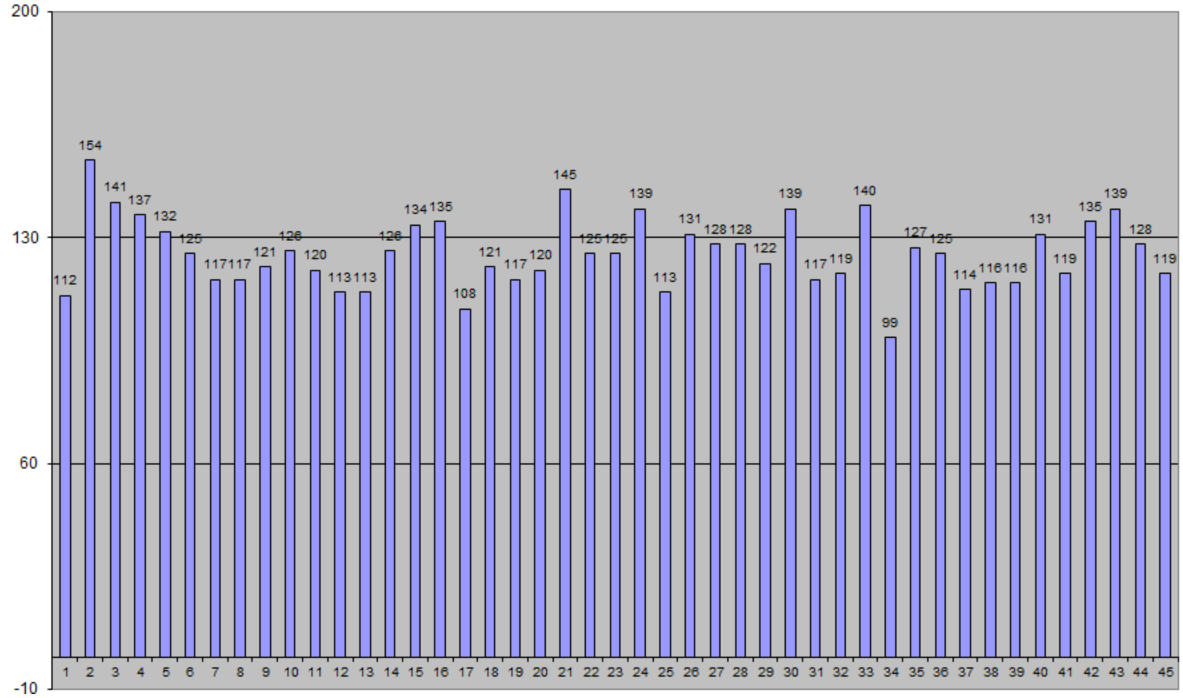


Ilustración 6. Frecuencia por cada balota

<u>CUESTIONARIO (Estudiantes):</u>

Los estudiantes tendrán que responder a la siguiente pregunta con base en un análisis que realicen a la información entregada:

- Una persona se encuentra frente a una máquina que realiza sorteos del juego de azar (Baloto), si dicha persona es usted, entonces:

¿Qué números formarían parte de su boleto? y ¿Por qué?

<u>DESCRIPCIÓN:</u> Esta actividad se propone con el objetivo de fortalecer las nociones de los estudiantes en torno de las concepciones de la Probabilidad tratadas en las anteriores etapas, con el fin confrontar y evaluar dichas nociones.

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

El análisis de resultados que se presenta en esta sección del documento, se realiza a partir de la tabulación, y la relación de las características asociadas a las concepciones de la Probabilidad con las evidencias obtenidas en la implementación del desarrollo de las etapas 1, 2 y 3. Para la organización de la información se hizo sistematización de frecuencias absolutas, empleando gráficos estadísticos (gráfico de columnas) que permiten inferir relaciones entre los diferentes aspectos que se tuvieron en cuenta para el desarrollo de las etapas, de tal manera que se muestren los resultados obtenidos en cada etapa del proceso con el respectivo análisis de la información.

4.1. ANÁLISIS ETAPA 1

Para la sistematización de la información obtenida en la implementación de la primera etapa, se diseñó una tabla por cada problema propuesto. La tabla presenta tres columnas; la primera columna muestra el grupo de estudiantes en donde se realizó la implementación, usando la numeración (1,2,3,4,5) para los grupos de estudiantes del curso (1102) y una numeración (A,B,C,D,E) para los grupos del curso (1101), una columna denominada *código de concepción* que hace referencia a la concepción de la Probabilidad citada en el marco teórico, y una columna denominada *Análisis*, en la cual se muestran las frases primordiales que conllevaron a la determinación del código de la concepción, y la evidencia de la respuesta establecida por el grupo.

Es de aclarar que en la implementación de los cinco problemas, los problemas 1 y 2 presentaban el mismo cuestionario con una descripción distinta (contexto) para su planteamiento, para este análisis se decidió trabajar con el problema 1 y no con el problema 2, justificando esta decisión por las diversas respuestas que generaron los estudiantes al problema 1, permitiendo una mayor riqueza e inferencia de resultados.

4.1.1. Análisis tabular

A continuación se presentan las tablas con la información indicada y posterior se relacionan los gráficos estipulados para la interpretación de la información.

PROBLEMA 1: Carlos y la Lotería		
GRUPOS	**CÓDIGO DE CONCEPCIÓN**	**ANÁLISIS**
Grupo 1	EFS	Sustentación en patrones implícitos de preferencias entre decisiones e *intuiciones primarias*[5], basadas en un conocimiento ingenuo o experiencias previas. **Evidencia:** El grupo afirma, "es más probable que salgan números diferentes en las opciones a que salgan *el mismo número en todas las posibilidades*". **Anexo 1, (1.1.1)[6]. Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo 2	ESC	Hacer uso de *métodos de conteo* entre ellos fundamentalmente la teoría combinatoria. **Evidencia:** El grupo afirma, Le quedan menos posibilidades sin contemplar, justificando mediante un conteo Multiplicativo dado por "*9p*8p*7p*6p*5p*". **Anexo 1, (1.1.2). Con argumentación de conteo.**
	CMC	Existencia de una simetría recíproca entre los *distintos resultados posibles*. **Evidencia:** El grupo afirma, Existe "el mismo número de posibilidades" y "*Escogería un número cualquiera distinto*[7]".

[5] Se agregaron los subrayados con el fin de resaltar las relaciones entre las definiciones expuestas en las tablas 1 o 2, y lo evidenciado en las respuestas de los estudiantes de cada curso.
[6] La etiqueta (1.1.1) relaciona en la primera posición *la primera etapa*, la segunda posición el *problema propuesto* y la tercera posición el *grupo de trabajo*.
[7] Se mantiene la ortografía de los estudiantes.

		Anexo 1, (1.1.2). Con argumentación de equiprobabilidad.
Grupo 3	EFS	Evaluación de Probabilidad basada en creencias personales y la sustentación en patrones implícitos de preferencias entre decisiones e intuiciones primarias, basadas en un conocimiento ingenuo o <u>*Experiencias previas*</u>. **Evidencia:** El grupo afirma, "Creo que es más probable que salga el número de diferentes dígitos a que gane el mismo digito repetido varias veces, <u>*según lo que he visto*</u>". **Anexo 1, (1.1.3). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo 4	EGS	La Probabilidad es un grado de <u>*creer acerca de un fenómeno impredecible*</u>. **Evidencia:** El grupo afirma, "Porque <u>*me parece menos probable*</u> que caiga el 99999 ya que son números repetidos". **Anexo 1, (1.1.4). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
	CMC	Existencia de una simetría recíproca entre los <u>*distintos resultados posibles*</u>… y estos se consideran Igualmente favorables… En este caso arriesgar <u>*su apuesta a cualquiera de sus casos posibles*</u>. **Evidencia:** El grupo afirma, "<u>*Elegiría cualquiera ya que al tener la misma Probabilidad de que salgan*</u>, no importa y <u>*lo dejaría a la suerte*</u>". **Anexo 1, (1.1.4). Con argumentación de equiprobabilidad.**
Grupo 5	EGS	La Probabilidad es un grado de <u>*creer acerca de un fenómeno impredecible*</u>. **Evidencia:** El grupo afirma, "<u>*es mas probable que llegue a ganar la lotería el número a escoger sea el Segundo*</u> sea el 16947 porque es menos probable que salga una sucesión de los mismos números". **Anexo 1, (1.1.5). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo A	EFS	Sustentación en patrones implícitos de preferencias entre decisiones e

		intuiciones primarias basadas en un conocimiento ingenuo o experiencias previas. **Evidencia:** El grupo afirma, "*Los números pocas veces salen repetidos* y hay más Probabilidad de que salgan los números diferentes". **Anexo 1, (1.1.A). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo B	EGS	La Probabilidad es un grado de *creer acerca de un fenómeno impredecible*. **Evidencia:** El grupo afirma, "*para nosotros es mas probable que salga el número intermedio* a que salga el ultimo número con el mismo digito". **Anexo 1, (1.1.B). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo C	EFS	Sustentación en patrones implícitos de preferencias entre decisiones e *intuiciones primarias*, basadas en un *conocimiento ingenuo* o experiencias previas. **Evidencia:** El grupo afirma, Es más posible que "*Salgan cinco números diferentes que cinco números iguales en la lotería*". **Anexo 1, (1.1.C). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
	CMC	Existencia de una simetría recíproca entre los *distintos resultados posibles..* y estos se *consideran Igualmente favorables.* **Evidencia:** El grupo afirma, "*Son iguales de probables* ya que los dos números tienen la misma cantidad de cifras *y de equitatividad* para el momento en que se juega la lotería" **Anexo 1, (1.1.C) con argumentación de equiprobabilidad**.
Grupo D	SIN CLASIFICAR	En esta respuesta no se identificaron evidenciadas que permitan clasificarla en alguna concepción. **Anexo 1, (1.1.D). No es posible clasificar la respuesta de este grupo.**

Grupo E	ESC	Hacer uso de *<u>métodos de conteo</u>* entre ellos fundamentalmente la teoría combinatoria. **Evidencia:** El grupo afirma, "La Probabilidad es la misma porque *<u>cada posición</u>* de los números es Independiente de las otras, de esta forma no importa en lo absoluto *<u>si un valor es igual o diferente al Precedente o al procedente del que se encuentra</u>*". **Anexo 1, (1.1.E). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**

Tabla 5. Respuestas problema 1

PROBLEMA 3: Apuesta de balotas		
GRUPOS	**CÓDIGO DE CONCEPCIÓN**	**ANÁLISIS**
Grupo 1	EFS	Sustentación en patrones implícitos de preferencias entre decisiones e *<u>intuiciones primarias</u>*, basadas en un conocimiento ingenuo o experiencias previas. **Evidencia:** El grupo afirma, "*<u>por que hay mas Probabilidad que sale pedro 5 caras seguidas y 3 sellos a 7 caras seguidas y un sello al final</u>*" **Anexo 1, (1.3.1). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo 2	EFS	Sustentación en patrones implícitos de preferencias entre decisiones e *<u>intuiciones primarias</u>*, basadas en un conocimiento ingenuo o experiencias previas. **Evidencia:** El grupo afirma : "*<u>hay mas posibilidades de que ninguno de los dos gane</u>*, porque es más posible que caiga intercalados en algunos casos" **Anexo 1, (1.3.2). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo 3	EGS	La Probabilidad es un grado de *<u>creer acerca de un fenómeno impredecible</u>*. **Evidencia:** El grupo afirma, "*<u>Creo</u>* que lo mejor que cada uno compre su

		boleta, ya que *creo que es muy difícil que salgan sobre todo los últimos intentos*". **Anexo 1, (1.3.3). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo 4	EFS	Sustentación en patrones implícitos de preferencias entre decisiones e *intuiciones primarias*, basadas en un conocimiento ingenuo o experiencias previas. **Evidencia:** El grupo afirma, "*Pierde Juan ya que es mas probable que salgan 5 caras seguidas a 7 caras seguidas, independientemente de la habilidad de juan*". **Anexo 1, (1.3.4). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo 5	CGS	*"El sentido común"* de la Probabilidad, admite tanto la defensa como su refutación. **Evidencia:** El grupo afirma, "Juan no tendrá que comprar las boletas para el concierto *porque es muy bueno en los juegos de azar*". **Anexo 1, (1.3.5). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo A	CGS	*"El sentido común"* de la Probabilidad, admite tanto la defensa como su refutación. **Evidencia:** El grupo afirma, "Es mas probable que Pedro gané porque *el condiciona el juego de acuerdo a sus posibilidades*". **Anexo 1, (1.3.A). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
	CTF	El término frecuentísimo se emplea para *referirse a la proporción estable* que a larga ocupan los casos o sucesos **Evidencia:** El grupo afirma, "Es más probable que Juan gané *porque ha ganado más veces en el azar*". **Anexo 1, (1.3.A). Con argumentación de proporción estable acerca de las victorias de Juan.**
Grupo B	EGS	*"El sentido común"* de la Probabilidad, admite tanto la defensa como su

		refutación. **Evidencia:** El grupo afirma: "Pedro porque ha así hayan menos posibilidades *Juan es mejor en los juegos de azar*". **Anexo 1, (1.3.B). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo C	EGS	*"El sentido común"* de la Probabilidad, *admite tanto la defensa como su refutación*. **Evidencia:** El grupo afirma, "*Es mucho más probable que juan deba pagar las boletas ya que es aun mas Equilibrado que se ha 45% y luego 35% y no el 90% porciento y luego el 10%*" **Anexo 1, (1.3.C). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo D	EFS	Sustentación en patrones implícitos de preferencias entre decisiones e *intuiciones primarias*, basadas en un conocimiento ingenuo o experiencias previas. **Evidencia:** El grupo afirma, "*Juan, porque es más probable que pedro no saque las 7 caras seguidas a que juan saque 5 caras*". **Anexo 1, (1.3.D). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo E	CMC	Existencia de una simetría reciproca entre los *distintos resultados posibles...* y estos se *consideran Igualmente favorables.* **Evidencia:** El grupo afirma, "La Probabilidad de que salgan 7 caras seguidas y un sello al final ó de que salgan 5 caras seguidas y 3 sellos al final *resulta ser la misma*" **Anexo 1, (1.3.E). Con argumentación de equiprobabilidad.**

Tabla 6. Respuestas problema 3

PROBLEMA 4: Señor Rodríguez en el casino		
GRUPOS	**CÓDIGO DE CONCEPCIÓN**	**ANÁLISIS**

Grupo 1	EFC	Se define como el *cociente entre los resultados favorables y todo los resultados posibles en el que se asume la equiprobabilidad de los resultados.* **Evidencia:** El grupo afirma, ”Tienen la misma Probabilidad de tanto perder como ganar debido a que…*el dado se compone de 6 caras las posibilidades se reparten en un 50%* ” **Anexo 1, (1.4.1). Argumentan una razón entre los casos favorables y el total de casos posibles.**
Grupo 2	CGS	*“El sentido común”* de la Probabilidad, admite tanto la defensa como su refutación. **Evidencia:** El grupo afirma, “*Perdera porque tiene mala racha*”. **Anexo 1, (1.4.2). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo 2	CMC	Existencia de una simetría recíproca entre los *distintos resultados posibles...* y estos se *consideran Igualmente favorables.* **Evidencia:** El grupo afirma, “*Tiene las mismas posibilidades de ganar y perder* porque tiene 3 Posibilidades de ganar al igual q` de perder”. **Anexo 1, (1.4.2). Con argumentación de equiprobabilidad.**
Grupo 3	EFS	Sustentación en patrones implícitos de preferencias entre decisiones e *intuiciones primarias*, basadas en un conocimiento ingenuo o experiencias previas. **Evidencia:** El grupo afirma, “*Creo que ganaría ya que ha comenzado ganando, luego perdio así que creo que sería como una sucesión, primero ganó luego perdió, así que lo que sigue es que gane*” **Anexo 1, (1.4.3). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**

Grupo 4	CGS	*“El sentido común”* de la Probabilidad, admite tanto la defensa como su refutación. **Evidencia:** El grupo afirma, “*Hubiera perdido ya que ya que lleva desventaja*” **Anexo 1, (1.4.4). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo 5	CGS	*“El sentido común”* de la Probabilidad, admite tanto la defensa como su refutación. **Evidencia:** El grupo afirma, “*el señor Rodriguez perdería debido a que a perdido 3 veces y hay muy pocas Probabilidades de que gane al lanzar el dado*” **Anexo 1, (1.4.5). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo A	EFS	Sustentación en patrones implícitos de preferencias entre decisiones e intuiciones primarias, basadas en un conocimiento ingenuo o *experiencias previas*. **Evidencia:** El grupo afirma, “*El señor Rodriguez perdería porque si se gana sacando el resultado después de 3 y el en 5 tiros solo obtuvo dos veces este resultado entonces seria más probable de que obtuviera menos de tres en tres resultados*”. **Anexo 1, (1.4.A). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo B	SIN CLASIFICAR	En esta respuesta no se identificaron evidenciadas que permitan clasificarla en alguna concepción. **Anexo 1, (1.4.B)**
Grupo C	EPF	La frecuencia relativa del suceso es *el cociente entre la frecuencia absoluta, n, y el número de veces que se ha repetido el experimento, N.* **Evidencia:** El grupo afirma, “*el señor Rodriguez tiene la posibilidad de ganar ya que la Probabilidad 3/6, Mientras la posibilidad de que el señor Rodriguez pierda es 2/6*”. **Anexo 1, (1.4.C). Con argumentación de frecuencias.**

Grupo D	CMC	Existencia de una simetría recíproca entre los *distintos resultados posibles...* y estos se *consideran Igualmente favorables.* **Evidencia:** El grupo afirma, "Tiene *igual posibilidad de perder o ganar*" **Anexo 1, (1.4.D). Con argumentación de equiprobable.**
Grupo E	EFC	Se define como el *cociente entre los resultados favorables y todo los resultados posibles en el que se asume la equiprobabilidad de los resultados.* **Evidencia:** El grupo afirma, "La Probabilidad de que el señor Rodriguez pierda es de ½ y de que gane tambien". **Anexo 1, (1.4.E). Argumentan una razón entre los casos favorables y el total de casos posibles.**

Tabla 7. Respuestas problema 4

PROBLEMA 5: Chévalier de Mére		
GRUPOS	**CÓDIGO DE CONCEPCIÓN**	**ANÁLISIS**
Grupo 1	CGS	*"El sentido común"* de la Probabilidad, admite tanto la defensa como su refutación. **Evidencia:** El grupo afirma, "Opino que el primer juego es el que tiene mas posibilidad de ganar *porque en las tres jugadas se ganó*". **Anexo 1, (1.5.1). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo 2	ESC	Hacer uso de *métodos de conteo* entre ellos fundamentalmente la teoría combinatoria. **Evidencia:** El grupo afirma, "gana mas en el primero, porque en el primero tiene 1 de 6 posibilidades 6 veces y en el segundo tiene *1 de 36 posibilidades solamente, y 24 veces*" **Anexo 1, (1.5.2). Con argumentación de axioma de multiplicación.**
Grupo 3	EFS	Sustentación en patrones implícitos de preferencias entre decisiones e *intuiciones primarias*, basadas en un *conocimiento ingenuo* o *experiencias previas.*

		Evidencia: El grupo afirma, "*creo que ganaría mas con el primer juego ya que es mas fácil ganar con un dado que con dos*". **Anexo 1, (1.5.3). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo 4	EFS	Sustentación en patrones implícitos de preferencias entre decisiones e *intuiciones primarias*, basadas en un conocimiento ingenuo o *experiencias previas.* **Evidencia:** El grupo afirma, "el juego 2 le da mas ganancia a chevalier ya que tiene *mas opciones de lanzamiento*" **Anexo 1, (1.5.4). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo 5	ESC	Hacer uso de *métodos de conteo* entre ellos fundamentalmente la teoría combinatoria. **Evidencia:** El grupo afirma, "El juego de chevalier 1 le daría mas ganancias a chevalier *ya que tiene 6 oportunidades para sacar 1 numero, mientras que la otra se demoraría mas en sacar la pareja de 1 numero teniendo en cuenta que existen 6 posibilidades para el primer dado y 6 para el segundo*" **Anexo 1, (1.5.5). Con argumentación de la existencia de métodos de conteo.**
Grupo A	EFS	Sustentación en patrones implícitos de preferencias entre decisiones e intuiciones primarias, basadas en un conocimiento ingenuo o *experiencias previas*. **Evidencia:** El grupo afirma, "El chevalier dos tendría mejor resultado ya *que entre más oportunidad de turnos hay mas Probabilidad de obtener un par de seis*" **Anexo 1, (1.5.A). Sin argumentación por conteo o frecuencias.**
Grupo B	SIN CLASIFICAR	En esta respuesta no se identificaron evidenciadas que permitan clasificarla en alguna concepción. **Anexo 1, (1.5.B)**
Grupo C	EFS	Sustentación en patrones implícitos de preferencias entre decisiones e *intuiciones primarias*, basadas en un conocimiento ingenuo o *experiencias previas.* **Evidencia:** El grupo afirma, "el primer jugo generaría más ganancias para chevalier ya que esta comprobado por el y sus amigos que siempre ha salido un 6 lo que seria mucho mas seguro"

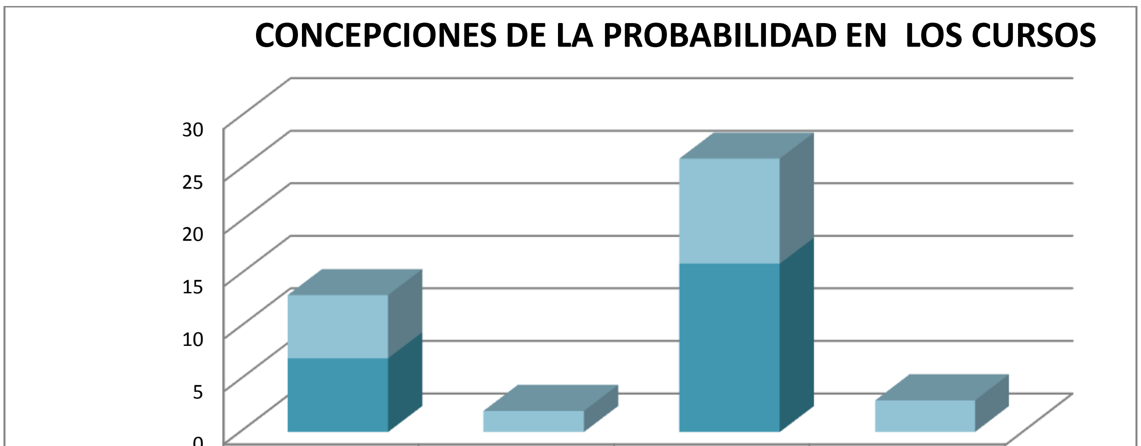
		Anexo 1, (1.5.C). Sin argumentación por conteo o frecuencias.
Grupo D	SIN CLASIFICAR	En esta respuesta no se identificaron evidenciadas que permitan clasificarla en alguna concepción. **Anexo 1, (1.5.D)**
Grupo E	EFC	Se define como el *cociente entre los resultados favorables y todo los resultados posibles en el que se asume la equiprobabilidad de los resultados.* **Evidencia:** El grupo afirma, "*La Probabilidad de un número de un tiro: 1/6… posibilidad de dos Números iguales de un tiro de dos dados 1/36* " **Anexo 1, (1.5.E). Argumentan una razón entre los casos favorables y el total de casos posibles.**

Tabla 8. Respuestas problema 5

4.1.2. Análisis gráfico

Con la información presentada en la sección 4.1.1, se realizaron gráficas[8] que relacionan la información obtenida, lo que permitió la conformación de conclusiones y la verificación o contraste de los resultados obtenidos en términos de frecuencias.

En el primer gráfico se muestran los resultados obtenidos en la identificación de las concepciones de la Probabilidad (Clásica, Frecuentista, y S1ubjetiva), es de notar que en ambos cursos existe una noción de la Probabilidad enmarcada primordialmente en una concepción subjetiva, seguida por una concepción clásica, y la concepción frecuentista es el significado menos resaltado en este grupo de estudiantes, se presenta la existencia de una columna denominad *sin clasificar* que presenta las respuestas que por motivos de escritura, comprensión, procesos no sistemáticos no permitieron la clasificación en una de las concepciones nombradas en el marco teórico.



	Conteo de respuestas concepción Clásica	Conteo de respuestas concepción Frecuentista	Conteo de respuestas concepción Subjetiva	Conteo de respuestas sin Clasificar
Sociales	6	2	10	3
Matemáticas	7	0	16	0

Ilustración 7. Concepciones de la probabilidad en los cursos

En el gráfico titulado *Autores de preferencia según las respuestas de los estudiantes* se resaltan las respuestas clasificadas por los estudiantes según el registro tabular relacionados con los autores propuestos en las tablas 1 y 2 del marco teórico, que evidencia

[8] Ver anexo 2.

en términos de textos educativos al libro de Fernández (s.f), como el mejor representante para la clasificación de las concepciones de la Probabilidad en la identificación del significado personal de los estudiantes, y en términos de tipo científico el autor Mateos (1985) y los autores Gutiérrez (1985) y Goñi (2011) de parte educativa, permitieron con certeza dicha identificación de las concepciones en los estudiantes y su posterior caracterización.

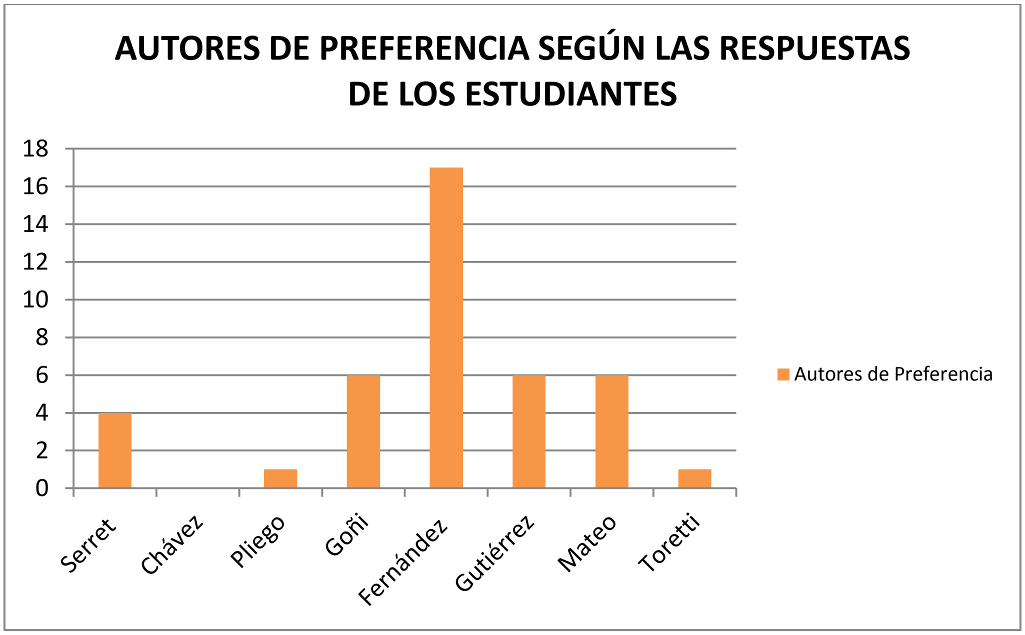


Ilustración 8. Autores de preferencia según las respuestas de los estudiantes

Para determinar la pertinencia de los problemas propuestos en cuanto a permitir identificar las concepciones de la Probabilidad se muestran los siguientes resultados:

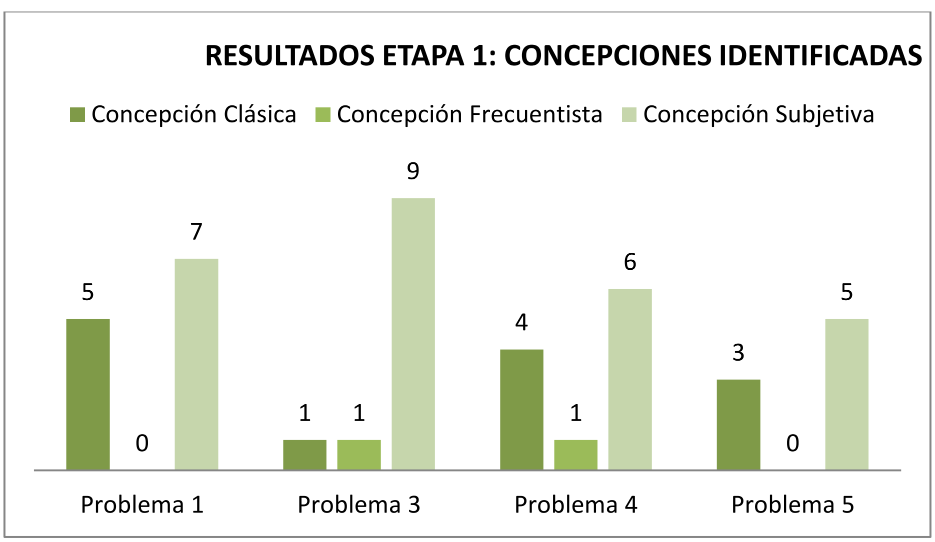


Ilustración 9. Resultados Etapa 1: concepciones identificadas

Con la información presentada en el gráfico se entiende que, los problemas 1 y 5, permitieron la identificación de una concepción clásica y una concepción subjetiva en los razonamientos usados por los estudiantes para resolver las situaciones, el problema 4 muestra una evidencia para identificar una concepción frecuentista pero dicho problema también es enfocado a las otras dos concepciones, el problema 3 es caracterizado por una concepción subjetiva de la Probabilidad, por tanto las concepciones previas que presentan los estudiantes de la Probabilidad son enmarcadas primordialmente desde una concepción subjetiva.

4.2. Análisis etapa 2

Para el desarrollo de esta etapa se habían realizado algunos planteamientos para su socialización en torno a las respuestas propuestas por lo estudiantes, tales como:

- Laura decide ir al restaurante 3, porque es más barato (precio), la comida es más rica en un lugar específico o Laura ha tenido malas experiencias en los otros restaurantes.

Respuestas que permiten hablar al profesor en el ámbito escolar de una asignación de Probabilidad a un suceso, basándose en creencias personales y en preferencia de decisiones con justificaciones en experiencias vividas por el individuo. Esto permite referenciar una característica de lo que más adelante se definirá como asignación de Probabilidad desde una ***concepción subjetiva***.

Otro tipo de respuesta:

- Laura decide ir al restaurante 3, teniendo en cuenta que ella ha ingresado 3 veces a este lugar y no ha ingresado ni una sola vez al restaurante 7.

Esto permite referirse a la importancia que tienen las frecuencias dadas, para el ingreso a cada restaurante, las veces que Laura ha ido almorzar a Unicentro. Se reconoce entonces una asignación de Probabilidad, basándose en datos ya obtenidos y en comparación de datos después de varios experimentos. ***(Concepción Frecuentista)***

Se podría presentar lo siguiente:

- Ya que el problema dice que Laura debe seguir las flechas y ella no puede devolverse, es mayor la Probabilidad que ingrese al restaurante 3 y no al restaurante 7. Puede que lo digan de esa manera o diciendo que el restaurante 3 es más cercano a la entrada.

Lo que se está teniendo en cuenta para este tipo de respuestas es considerar todas las decisiones que Laura puede tomar cada vez que avanza. Es decir que para ir al restaurante uno, ella puede decidir entrar o no entrar, por lo tanto se tiene un total de dos posibilidades, pero tomando solo una decisión de las dos. Respuestas que permiten referenciar la introducción a una ***Concepción Clásica*** que será consolidada en el desarrollo de la clase posteriormente.

Si se presentan otro tipo de respuestas se encaminarán hacia algún tipo de concepción, si no es posible se dará la debida explicación al estudiante de reformular su solución para que pueda ser justificada a partir de alguna concepción.

Efectivamente durante el desarrollo de la actividad se presentaron las respuestas antes nombradas por parte de los estudiantes, de tal manera que permitieron realizar la clasificación de dichas respuestas guiadas hacia una concepción con su debida definición.

A continuación se muestran algunas respuestas dadas por los estudiantes en los respectivos cursos:

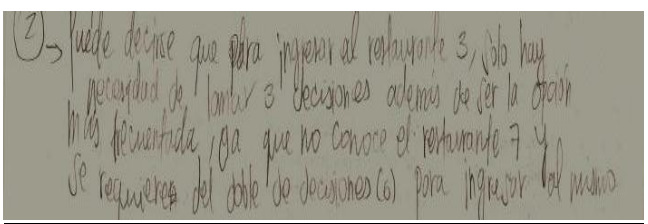

(2) → Puede decirse que para ingresar al restaurante 3, solo hay necesidad de tomar 3 decisiones además de ser la opción más frecuentada, ya que no conoce el restaurante 7 y se requiere del doble de decisiones (6) para ingresar al mismo

Ilustración 10.Evidencia actividad Laura (1101)

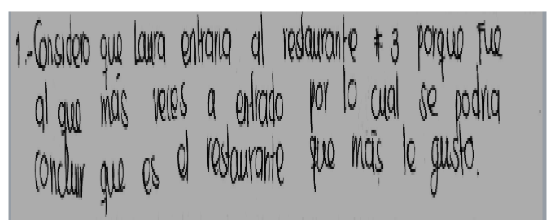

1.-Considero que Laura entraria al restaurante # 3 porque fue al que más veces a entrado por lo cual se podria concluir que es el restaurante que más le gusto.

Ilustración 11.Evidencia actividad Laura (1102)

La grafica 1 relaciona el trabajo guiado por el docente en la socialización de respuestas:

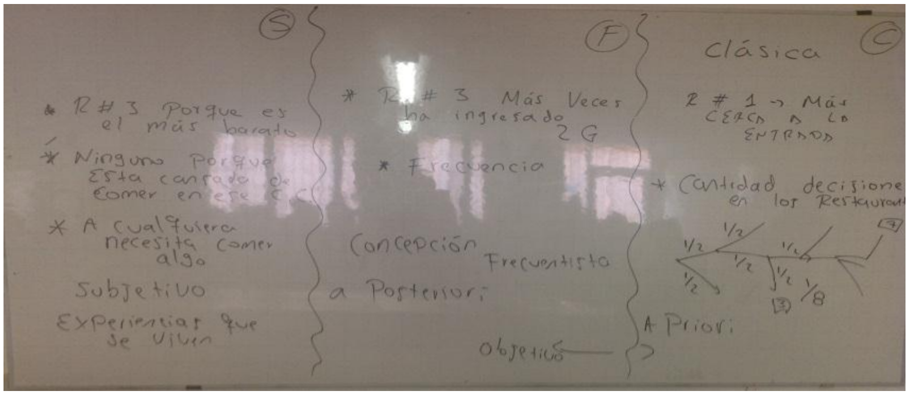


Ilustración 12. Evidencia de socialización

Al terminar la socialización de las concepciones de la Probabilidad (Clásica, Subjetiva y Frecuentista) los estudiantes reconocieron que, en una situación donde existen distintas soluciones de respuesta subyacen distintas concepciones para la asignación de Probabilidad a un suceso.

En términos generales, se esperaban un grupo de respuestas específicas por parte de los estudiantes, pero surgen soluciones y respuestas válidas y diferentes a las planeadas, de igual manera existía la premisa que los estudiantes se posicionarían en una única concepción de la Probabilidad (clásica, frecuentista o subjetiva), pero las respuestas observadas y propuestas en clase, muestran la relación de dos o más concepciones para darle una mayor justificación a su respuesta. La mayoría de alumnos buscan en sus conocimientos de anclaje o herramientas que les sean útiles para proponer y construir estrategias de solución dentro de un marco matemático en otras ramas, por ejemplo: la búsqueda constante de una sucesión, (Entablar relaciones entre las frecuencias o los números impares), son procesos mentales realizados por los educandos para construir, interpretar, comprender, organizar y aplicar tanto la información que existe en el medio que los rodea, como aquellos conocimientos ya edificados en su estructura cognitiva. Por lo tanto esta actividad permite que se generen en clase, algunas características que permitieron definir las concepciones de la Probabilidad.

4.3. ANÁLISIS ETAPA 3

Para la sistematización de la información obtenida en el desarrollo de esta etapa, se realizó una metodología similar a la propuesta en la etapa 1 en el capítulo 4.1 de este documento. Por tanto se mostrarán los resultados obtenidos mediante un análisis tabular y un análisis gráfico.

4.3.1. Análisis tabular

En la primera columna de la tabla se presenta el grupo de trabajo conformado por los estudiantes del curso 1101 o 1102, en esta ocasión no se hizo una distinción explicita de los estudiantes, por motivo a conformar conclusiones generales de la actividad y de las concepciones mismas de la Probabilidad en términos de los significados construidos por estudiantes de grado undécimo al finalizar los procesos desarrollados en las etapas 1, 2 y 3. En la segunda columna se presenta la concepción de la probabilidad identificada en las respuestas de los estudiantes, es de resaltar que esta identificación se realizó con base a la propuesta realizada en el marco teórico, específicamente en las definiciones construidas con la información de la tabla 1 y 2. En la tercera columna se presenta la evidencia, es decir, la respuesta escrita por los estudiantes.

<table>
<tr><th colspan="3">PROBLEMA BALOTO</th></tr>
<tr><th>GRUPOS</th><th>CONCEPCIÓN</th><th>EVIDENCIA</th></tr>
<tr><td>**Grupo 1**</td><td>FRECUENTISTA: Analizando el gráfico de frecuencias absolutas determinan el conjunto con mayor posibilidad.

CLÁSICA: Determinan equiprobabilidad entre los números que presentan la misma frecuencia Absoluta.</td><td>EL grupo afirma: “El próximo número ganador tendrá las siguientes cifras 2,21, 3, (24, 30, 43), 4, 16.
Ya que al **observar los datos de frecuencia en las cifras del 1 al 45 encontramos una mayor repetición en los números mencionados** anteriormente **teniendo el (24, 30 y el 43) con una misma frecuencia**. Sin embargo al tratarse de un sorteo esto puede o no suceder, pues es cuestión de suerte y azar”</td></tr>
<tr><td>**Grupo 2**</td><td>FRECUENTISTA: Analizando el gráfico de frecuencias absolutas determinan el conjunto con mayor posibilidad tomando como parámetro frecuencias superiores a 130.

CLÁSICA: Establecen la cantidad de combinaciones de posibles boletos ganadores haciendo uso de las técnicas de conteo.</td><td>EL grupo afirma: “**se tomarian[9] los números que mas han salido, es decir los que están arriba de 130**:
2 30
3 33
4 40
5 42
15 43
16

Luego, teniendo en cuenta los datos nombrados anteriormente, la Probabilidad de que salgan combinaciones de 6 números dentro de los 14 nombrados, es de 3003,
Basándonos en la frecuencia de la grafica, y las Probabilidades</td></tr>
</table>

[9] Se mantiene la ortografía de los estudiantes.

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>sacadas anteriormente, estableceríamos el siguiente pronóstico para el próximo juego de baloto:
2
24
21
33
30
43
Claro que también depende de usted hacer todas las combinaciones posibles para obtener un resultado mas aproximado”.</td>
</tr>
<tr>
<td>Grupo 3</td>
<td>SUBJETIVA: Establecen un conjunto de posibles ganadores usando como criterio una intuición primaria.
FRECUENTISTA: Con el subconjunto determinado calculan las frecuencias y estipulan el boleto ganador.</td>
<td>El grupo afirma:
Números ganadores durante el año 2008 hasta el 2010:

Fechas:
12-01-08→2, 8, 13, 24,29, 30
14-06-08→1, 2, 5, 22, 31, 43
10-12-08→1, 2, 8, 9, 12, 19
18-02-09→1, 5, 7, 14, 27, 32
05-09-09→1, 9, 12, 13, 22, 33
20-02-10→1, 9, 12, 13, 22, 23
02-12-09→2, 9,1 5, 22, 39, 40
31-03-10→1, 9, 10, 14, 15, 18
07-04-10→8, 23, 26, 27, 31, 43

Segunda conclusión: de los números que se tomaron durante las fechas del 2008 al 2010, de los números ganadores los que más veces</td>
</tr>
</table>

		aparecen son: 1, 2, 9, 8, 12, 22 (mayor Probabilidad de que salgan números 2) por lo tanto estos valores serian para nosotros la mayor Probabilidad de que salieran en el próximo juego de baloto.
Grupo 4	SUBJETIVA: Establecen un conjunto de posibles ganadores usando criterios personales. FRECUENTISTA: Analizando el gráfico de frecuencias absolutas determinan el conjunto con mayor posibilidad.	EL grupo afirma: "02 21 33 03 43 24 - Por Probabilidad frecuentista, estos son los números con más posibilidad de acierto. - 07 05 09 20 46 39 - Por subjetiva, estos números son significativos y parecen adecuados para el acierto. 07 - Soler cumpleaños. 05 - Miguel cumpleaños. 09 - mes en el que estamos. 20 – aniversario. 46 - año de nacimiento de mi padre. 39 - edad madre"
Grupo 5	SUBJETIVA: Establecen un conjunto de posibles ganadores usando como criterio la intuición primaria. FRECUENTISTA: Analizando el gráfico de frecuencias absolutas determinan el conjunto con mayor Posibilidad. CLÁSICA: Establecen la cantidad de	El grupo afirma: • Se jugaría el baloto con los números que más veces han caído (los que salen con más frecuencia), algunas combinaciones posibles serían: 2 21 3 33 43 30; 2 21 3 33 30 24; 2 21 3 33 24 43. • Se tiene en cuenta que la Probabilidad de ganar el baloto es 1/45P6 es decir el $1.705x10^{-10}$ %.

	combinaciones de posibles boletos ganadores haciendo uso de las técnicas de conteo, y establecen un cociente Entre los casos favorables y los caso posibles.	• Se podría apostar al último que ganó (14 de Julio de 2010), es decir: 9 18 19 21 29 35. Aconsejaríamos que se jugara un día sábado ya que se han ganado más veces el baloto los días sábado.
Grupo 6	SUBJETIVA: Establecen un boleto ganador determinado por criterios personales. FRECUENTISTA: Analizando el gráfico de frecuencias absolutas determinan el conjunto con mayor posibilidad. CLÁSICA: Se reconoce la noción de equiprobabilidad.	El grupo afirma: "Teniendo en cuenta la frecuencia con la que ha salido cada una de las 45 balotas pesadas y certificadas por ICONTEC durante los 966 juegos sorteados entre el sábado 27 de enero de 2001 y el miércoles 21 de julio de 2010, se evidencia que los seis números que con mayor frecuencia resultaron dentro de la cifra ganadora fueron: 02, 21, 03, 33, 24, 30, 43 (los últimos tres con igual frecuencia). Teniendo en cuenta que dentro de la cifra ganadora únicamente se pueden tomar seis números y considerando el hecho de que cada una de las 45 balotas sorteadas tienen la misma posibilidad de aparecer dentro de la cifra ganadora, el número que consideramos jugar es 02, 21, 03, 33, 24, 43. Descartamos el número 30 porque para ninguno de los dos es un número de agrado"
Grupo 7	SUBJETIVA: Establecen un boleto ganador determinado por criterios personales y recurriendo a un sentido común". CLÁSICA: Establecen un cociente entre los casos favorables y los caso posibles.	El grupo afirma: 1. " Mediante la Probabilidad frecuentita podemos decir que los siguientes números van a ser los ganadores del sorteo porque estos números son los que más veces han **salido** (pueden ser números ganadores o no)en el sorteo del Baloto: **2 21 33 24 43 30**

	FRECUENTISTA: Analizando el gráfico de frecuencias absolutas determinan el conjunto con mayor posibilidad.	2. Mediante la Probabilidad subjetiva, podemos deducir que los siguientes números ganadores del sorteo porque estos números son los que más veces han **ganado** el premio mayor en el sorteo del Baloto: **1 31 9 33 40 10** 3. Mediante la Probabilidad clásica, podemos decir que la Probabilidad de ganarse el baloto es de $\frac{\mathbf{11-25-45-36-01-02}}{\mathbf{45C6}}$”
Grupo 8	FRECUENTISTA: Analizando el gráfico de frecuencias absolutas determinan el conjunto con mayor posibilidad CLÁSICA: Establecen la cantidad De combinaciones de posibles boletos Ganadores haciendo uso de las técnicas De conteo, y establecen un cociente Entre los casos favorables y los caso Posibles.	El grupo afirma: “Probabilidad de que salga el número ganador del siguiente Baloto: #Balotas: 45 = n #Posiciones: 6 = r c(n,r) = n!/(n-r)! C(45,6) = 45!/(39!-6!) = 45x44x43x42x41x40x39!/39!6! = 5864443200/720 = 8’145.060 1 en 8’145.060 es la Probabilidad de que salga este numero: 2 – 21 – 3 – 33 – 24 – 30 Y por mayor frecuencia de aparición en las seis posiciones. ”
Grupo 9	SUBJETIVA: Establecen un boleto ganador determinado por criterios personales y recurriendo a un sentido común”	El grupo afirma: “Creemos que el numero del próximo baloto será **01-02-09-23-33-4** Nuestro resultado lo damos contando todos los números del baloto que han logrado ganar, apuntamos todos los resultados ganadores y luego de esto hicimos un conteo de las veces que cada numero

<table>
<tr>
<td></td>
<td>FRECUENTISTA: Con el subconjunto determinado calculan las frecuencias y estipulan el boleto ganador.</td>
<td>apareció en dicha lista.
Resultando los 6 números con mas repeticiones en los resultados ganadores, y para nosotros son los que van a caer en el siguiente baloto”</td>
</tr>
<tr>
<td>Grupo 10</td>
<td>FRECUENTISTA: Analizando el gráfico de frecuencias absolutas determinan el conjunto con mayor posibilidad.

CLÁSICA: Establecen la cantidad de combinaciones de posibles boletos ganadores haciendo uso de las técnicas de conteo, y establecen un cociente entre los casos favorables y los caso posibles.</td>
<td>El grupo afirma:
“La posibilidad de combinar las 45 balotas en 6 opciones se expresa de la siguiente manera
45 C 6, es decir que todas las posibles combinaciones son 8.145.060.
Para hallar una sola de las posibilidades encontramos por Probabilidad clásica que es 1/8.145.060, es decir 1/45c6
<table>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>112</td><td>154</td><td>141</td><td>137</td><td>132</td><td>125</td><td>117</td><td>117</td><td>121</td><td>125</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr>
<tr><td>120</td><td>113</td><td>113</td><td>126</td><td>134</td><td>135</td><td>108</td><td>121</td><td>117</td><td>120</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td></tr>
<tr><td>145</td><td>125</td><td>125</td><td>139</td><td>113</td><td>131</td><td>128</td><td>128</td><td>122</td><td>139</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>31</td><td>32</td><td>33</td><td>34</td><td>35</td><td>36</td><td>37</td><td>38</td><td>39</td><td>40</td></tr>
<tr><td>117</td><td>119</td><td>140</td><td>99</td><td>127</td><td>125</td><td>114</td><td>116</td><td>116</td><td>131</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td><td>45</td></tr>
<tr><td>119</td><td>135</td><td>139</td><td>128</td><td>119</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Tabla 9. Respuestas actividad baloto

4.3.2. Análisis gráfico

La información mostrada en la tabla del capítulo 4.3.1, evidencia que en las respuestas de los estudiantes se hacen presentes las tres concepciones de la Probabilidad (Clásica, Frecuentista y Subjetiva) trabajadas en la etapa 2 en el aula de clase por medio de la actividad denominada Laura, sin embargo se recalca la pertinencia de observar algunas relaciones existentes entre las respuestas estipuladas en términos de frecuencias, de tal modo que permita la estipulación de los resultados de esta actividad.

En la primera columna de la siguiente tabla se nombran las concepciones de la Probabilidad evidencias, en la segunda columna se presenta su respectiva frecuencia absoluta, posterior se presenta el gráfico de frecuencias:

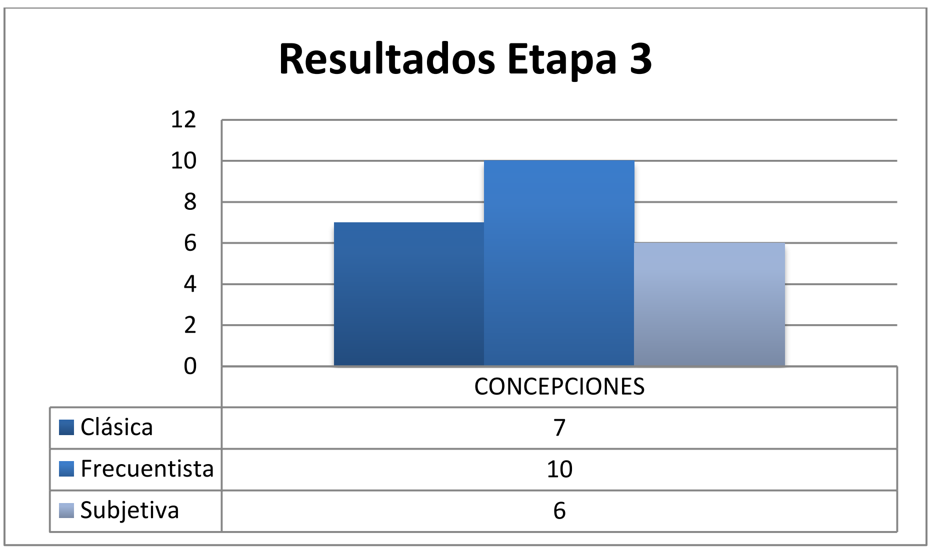


Ilustración 13. Resultados etapa 3

Con la información anterior, es posible decir que:

- Todos los grupos de trabajo hacen uso de proposiciones enmarcadas en una concepción frecuentista. (Remite al 100% de la muestra).
- Más de la mitad de los grupos establecen respuestas desde una concepción subjetiva y clásica de la Probabilidad. (60% y 70% respectivamente).
- Todos los grupos de trabajo no enmarcan su respuesta en una única concepción de la Probabilidad. (presentan respuestas desde dos o tres concepciones).

Con estos resultados se establece que:

Con esta actividad se encamina el trabajo hacia una concepción frecuentista de la Probabilidad, que en la etapa 1 se clasificó como la concepción con menor frecuencia existente en el significado personal de los estudiantes para a la asignación de sucesos aleatorios, por tal razón en esta etapa se propuso una actividad denominada Baloto que fortalece el significado de la Probabilidad enfatizando en el uso de una concepción frecuentista sin dejar de lado la concepción clásica y subjetiva de la Probabilidad.

Con los resultados obtenidos por medio del análisis realizado en las etapas 1, 2 y 3, se establecerán las conclusiones de este estudio enmarcadas en el objetivo de continuar en la indagación e investigación de las concepciones de la Probabilidad en estudiantes de secundaria.

CONCLUSIONES

El interés principal de este trabajo era el diseño e implementación de una secuencia de actividades para estudiantes de grado undécimo del IPN que les permitiera identificar, caracterizar y establecer relaciones entre las concepciones de la probabilidad que subyacen en un suceso aleatorio. Las conclusiones que se presentan en esta sección están organizadas en relación a los objetivos propuestos.

En la conformación del marco teórico, específicamente en la revisión de textos educativos y textos científicos, se identificó que las concepciones de la probabilidad son usadas como actividades introductorias para el concepto de probabilidad, viendo a estas como las principales fuentes para dar un significado de probabilidad en sucesos aleatorios. Es de recalcar que la literatura revisada permitió la propuesta de algunas situaciones enmarcadas en las concepciones de la probabilidad en los cursos 1101 y 1102, así como la determinación de las categorías de análisis de la información; sin embargo, después del proceso de implementación y análisis se concreta que el libro de Fernández (s.f) y el documento de Mateos (1985), son fuente adecuadas para caracterizar las concepciones de la probabilidad.

Por su parte, los referentes históricos dan cuenta de que el inicio del cálculo de probabilidades se dio a partir del intercambio de cartas entre los matemáticos Fermat y Pascal; no obstante, la noción de probabilidad ha estado presente en pensamientos filosóficos, religiosos y matemáticos a través de la historia desde civilizaciones antiguas como Grecia y Roma. Los documentos revisados permitieron identificar nociones subjetivas inherentes a los pensamientos filosóficos y teológicos, un trabajo posterior de la concepción Frecuentista por Jacob Bernoulli y la concepción Clásica de Pierre Simon de Laplace, por último la propuesta de la concepción Matemática o Axiomática del matemático Ruso Kolmogórov. En este sentido, se puede evidenciar que la evolución del concepto y concepciones de la probabilidad se debe a un proceso sociocultural.

Establecer la existencia de similitudes o diferencias entre las distintas concepciones de la probabilidad, no es un planteamiento inmediato ni unifero, ya que los criterios para concluir lo antes nombrado pueden llevar a un estudio bastante complejo implicando diversos trabajos en torno al tema; sin embargo, fue claro por medio de este estudio que el conocer las distintas concepciones de la probabilidad, y caracterizarlas de tal manera que los estudiantes reconocieran las ideas principales de cada concepción, conllevo a que se estableciera en el aula de clase que la asignación de probabilidad desde concepciones clásica y frecuentista involucra una asignación de carácter objetivo referente en términos de datos, información estadística o la noción de equiprobabilidad sobre un espacio muestral, mientras que en la subjetiva prevalece las intuiciones primarias y el sentido común sin justificaciones teóricas.

En cuanto a la implementación de la propuesta, se tiene que:

En el proceso de identificación de concepciones de la probabilidad (etapa 1), que consintió en la implementación de cinco problemas que permitieron identificar las concepciones de los estudiantes para la asignación de probabilidad en un suceso, se concluyó que estos asignan probabilidad en la mayoría de las situaciones basándose en sus experiencias previas, en resultados de sentido común o en ocasiones guiados por una intuición primaria, de tal manera que se enmarcan en una concepción subjetiva de la probabilidad, no obstante los estudiantes en ciertas ocasiones reconocen la noción de sucesos igualmente probables y reconocen la noción del azar.

En esta etapa se resalta la importancia de la descripción de escritura de un problema, se refiere al problema 1 y al problema 2 que presentaron el mismo cuestionario, sin embargo, el contexto que involucraba el problema 1 conllevó a que los estudiantes generaran mayor número de respuestas encaminadas a concepciones clásica y subjetiva; el problema 2 fue conciso y llevó a soluciones concretas pero no era evidente una asignación de la probabilidad en términos de las concepciones establecidas para el estudio.

En la implementación de la actividad en la etapa 2, las respuestas propuestas por los estudiantes se centraron en criterios relativos a intuiciones primarias y sentido común, se evidenció la importancia de construir una respuesta en términos de frecuencias (absoluta y relativa), la toma de decisiones generó puntos de vista atendiendo a la noción de equiprobabilidad. Por tanto, en esta etapa la actividad permitió dar a conocer las concepciones de la probabilidad (clásica, frecuentista y subjetiva) a partir de las soluciones presentadas por los estudiantes, establecer características principales de cada una.

La propuesta en la etapa 3, fue encaminada a fortalecer la asignación de probabilidad desde una concepción frecuentista, se evidenció que en las respuestas de los estudiantes prevaleció dicha concepción, pero, sin dejar de lado la asignación desde una concepción clásica y subjetiva. Lo que permite concluir que dada la intencionalidad de esta actividad y su coherencia con los resultados obtenidos, la actividad propuesta en esta etapa es un buen instrumento para el establecimiento de relaciones entre las concepciones de probabilidad, resaltando el continuo trabajo de actividades para un mayor fortalecimiento del concepto.

Como reflexión final se concreta lo relacionado en las etapas 1, 2 y 3, que presenta una propuesta para la enseñanza y el aprendizaje del tema: concepciones de la probabilidad, validando la pertinencia de reconocer el significado personal de los estudiantes como primer eje central para el trabajo de las concepciones en un aula de clase, posterior una actividad que permite establecer las características principales de cada concepción a partir de respuestas construidas por los estudiantes, por último una actividad que consolida y evalúa el trabajo realizado.

Comentarios finales

La propuesta realizada que se presenta en este documento permite fortalecer la importancia de la revisión de literatura relacionada con el tema a tratar y la importancia del desarrollo histórico en términos de su proceso evolutivo y las nociones que enmarcan el estudio a través de distintas culturas y pensamientos en la humanidad, es claro que la conformación de los cuatro capítulos permitieron presentar una propuesta con sentido, un aporte curricular para la asignatura de probabilidad impartida en el IPN.

Como cuestión abierta, se propone continuar con este estudio del significado de la probabilidad en estudiantes de secundaria, así como sus implicaciones en la comprensión de temáticas posteriores y aunque este trabajo fue enfatizado a las concepciones clásica, frecuentista y subjetiva, se recalca la pertinencia de ahondar en propuestas de una concepción axiomática de la probabilidad, es por tanto que esto es apenas el inicio del estudio del magno concepto de probabilidad.

BIBLIOGRAFÍA

1. **Blanco L.** (2005). *Probabilidad.* Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Sede Bogotá. Colombia.
2. **Barragués, J. Guisasola G. y Morais A**. (2005). *Concepciones de los estudiantes de primer ciclo de universidad sobre estimación de la Probabilidad*. Documento de educación matemática. Santillana. México.
3. **Batanero, C.** (2005). *Significados de la Probabilidad en la educación secundaria. Relime, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 8, no. 3. México. Versión digital en:*

   http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33508302

4. **Batanero, C. Godino, J.** (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Pág. 1-75. Universidad de Granada. España Recuperable en:

   http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/6_Estocastica.pdf

5. **Camargo, L. Rojas, M. Lozano, L.** (2004). *La práctica educativa en el proyecto Curricular de licenciatura en matemáticas*. Comité de práctica educativa. Octubre de 2004. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá. Colombia.
6. **Carrillo, F.** (2002). *Andrei Nikoláyevich Kolmogórov*. Documento de: *Apuntes de historia de las matemáticas. Vol. 1, no. 3, septiembre 2002. pág. 1-12.* Versión digital en:

   http://euler.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-3-5-kolmogorov.pdf

7. **Chávez H** (1995) "*Cálculo*", Capitulo 5: *Probabilidad*. Santillana.
8. **Collette, J.** (1985). "*Historia de las Matemáticas*". Vol. 2, Las matemáticas de la época de Descartes y de Fermat. España.
9. **Estrada, A. Díaz C.** (2006). *Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios*. Universidad de Lleida. Universidad de granada. Pág. 1-8. Recuperable en http://funes.uniandes.edu.co/1295/1/Estrada2006Un_SEIEM_277.pdf

10. **García, M.** (2001). *La Probabilidad como concepto: sus antecedentes*. Departamento de métodos cuantitativos para la Economía. Universidad de San pablo CEU. España.

11. **Godino, J.** (2002). *Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática*. Recherches en Didactiques des Mathématiques 22(2-3), 237-284.

12. **Godino, J. y Batanero, C. (1998).** Clarifying the meaning of the mathematical objects as a priority of research in Mathematics Education. In A. Sierpinski y J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics education as a research domain: A search for identity (pp. 177-195) Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

13. **Goñi, J. y otros. (2011).** *Matemáticas: Complementos de formación disciplinar*. Formación del profesorado. Educación secundaria. 1ª edición. GRAÓ, de IRIF, S.L. Ministerio de Educación. Barcelona. España.
14. **Gutiérrez-Cabria, S. (1985).** *El que de la Probabilidad*. Trabajos de Estadística y de investigación operativa. *Vol.36, Núm. 3, 1985, pp. 185 a 197*. Departamento de Estadística e investigación operativa Universidad de Valencia. España.
15. **Fernández, F.** (s.f) *Curso de Probabilidad*. Capítulo 3. En prensa. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá. Colombia. Documento entregado por el profesor Felipe Fernández curso de Probabilidad en septiembre del 2010. UPN. Bogotá. Colombia.
16. **Hawking, S.** Edición comentada (2010). *Dios creó los números: Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia*. 1ª Edición, segunda impresión. Crítica. Barcelona. España.
17. **Mateos, G. Aparicio, M. (1985).** *Teoría subjetiva de la Probabilidad: fundamentos, evolución y determinación de Probabilidades*. Tesis Doctoral. Departamento de estadística y métodos de decisión facultad de ciencias económicas y empresariales. Universidad complutense de Madrid. España
18. **Ministerio de Educación Nacional. (MEN).** (2006)**.** *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas***.** Bogotá. Colombia.

19. **Muñoz, A.** (1998). “*Algunas ideas preconcebidas sobre Probabilidad*”. Artículo de la revista SUMA, Noviembre 1998, pp. 29-34. España. Versión electrónica en:

http://revistasuma.es/IMG/pdf/29/029-034.pdf

20. **Piaget y Longeot** (l974) EPL. Escala para medir el desarrollo del pensamiento lógico. Manual de instrucciones
21. **Pliego J. y Pérez L.** (2006) *Fundamentos de la Probabilidad*. Segunda Edición. Editorial Thomson. España
22. **Serret, J. (1995).** *Manual de estadística universitaria: inductiva***.** ESIC editorial. Madrid. España.
23. **Toretti, R**. (2003). *El concepto de Probabilidad*. Profesor Emérito de la universidad de Puerto Rico. Versión electrónica en:

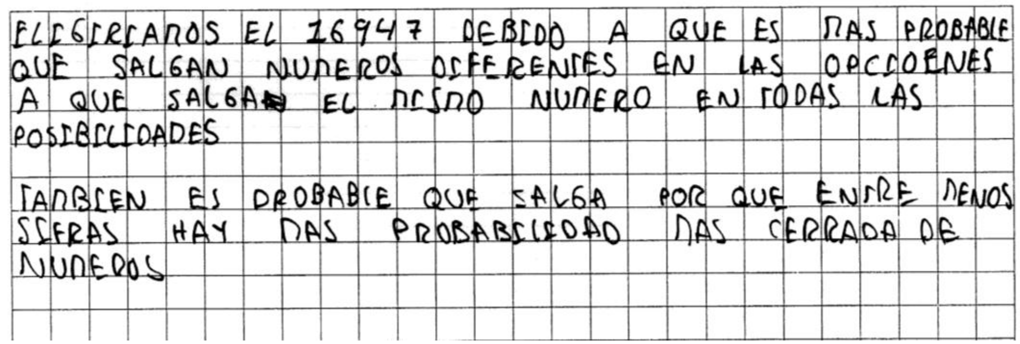
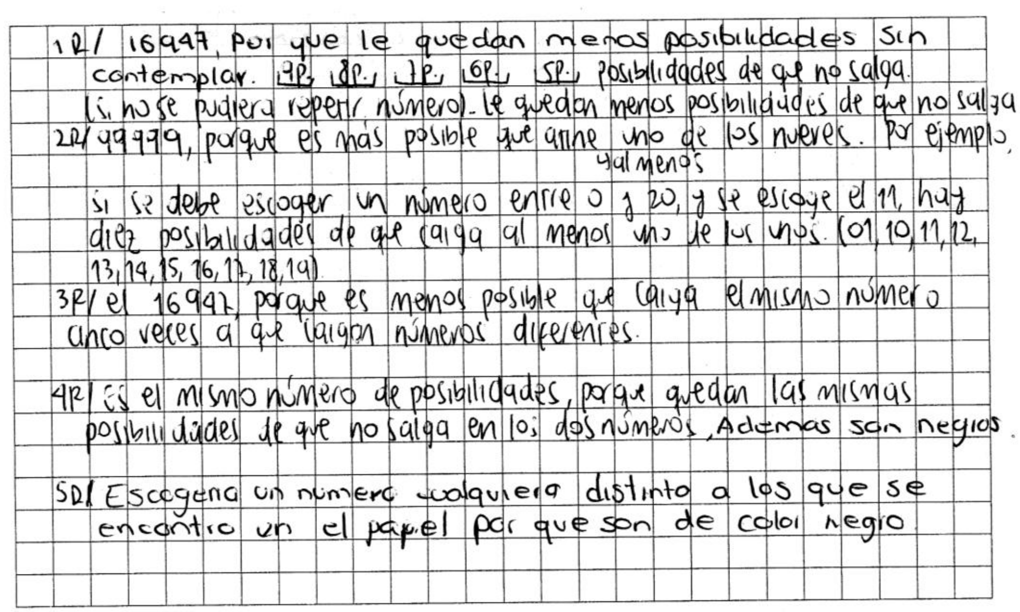
http://www.memoriachilenaparaciegos.cl/archivos2/pdfs/MC0031046.pdf

24. **Wilhelmi, M.** (2004). *Combinatoria y Probabilidad*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada. España. Versión electrónica en:

http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/cp-book.pdf

ANEXOS

ANEXO 1. RESULTADOS DE ETAPA 1.

Etapa	Problema	Grupo De Estudiantes	Evidencia	Etiqueta
1	1	1	 ELEGIRIAMOS EL 16947 DEBIDO A QUE ES MAS PROBABLE QUE SALGAN NUMEROS DIFERENTES EN LAS OPCIONES A QUE SALGAN EL MISMO NUMERO EN TODAS LAS POSIBILIDADES TAMBIEN ES PROBABLE QUE SALGA POR QUE ENTRE MENOS ESFERAS HAY MAS PROBABILIDAD MAS CERRADA DE NUMEROS	1.1.1
		2	 1R/ 16947, Por que le quedan menos posibilidades sin contemplar. 9P., 8P., 7P., 6P., 5P. posibilidades de que no salga. (si no se pudiera repetir número). Le quedan menos posibilidades de que no salga. 2R/ 99999, porque es más posible que atine uno de los nueves. Por ejemplo, si se debe escoger un número entre 0 y 20, y se escoge el 11, hay diez posibilidades de que caiga al menos uno de los unos. (01, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19) y al menos 3R/ el 16947, porque es menos posible que caiga el mismo número cinco veces a que caigan números diferentes. 4R/ Es el mismo número de posibilidades, porque quedan las mismas posibilidades de que no salga en los dos números, Ademas son negros. 5R/ Escogeria un numero cualquiera distinto a los que se encontro en el papel por que son de color negro	1.1.2

		3	• Jugaría el 16947 creo que es más probable que caiga un número de diferentes dígitos a que gane el mismo dígito repetido varias veces según lo que he visto. • Yo jugaría el 16947 porque en la mayoría de las loterías es más probable que salgan números distintos a varios números iguales, aparte en la lotería nunca salen números iguales, de acuerdo a los resultados históricos que he evidenciado. • Yo jugaría los dos, seguramente habría más probabilidad de ganar y no me quedaría la espinita de haber jugado el número ganador. • Yo elegiría el 16947 por que pienso que tiene más posibilidades pues por que se ve que se dan diferentes dijitos. • Yo combinaría los dos números de la forma: 19694 porque me gustan esos números. • Yo no jugaría ya que no creo en esos juegos • El 16947 ya que tiene más posibilidades de que salgan numeros diferentes a numeros iguales.	1.1.3
		4	Respuesta: 16947 "porque me parece menos probable que salga el 99999 ya que son números repetidos" Respuesta: "Yo elegiría los dos ya que al no gastar plata en gasolina, puedo comprar los 2 boletos con cada uno de los números, además al ser un o inclusivo eso hace válido que se pueden elegir ambos números Respuesta: "Elegiría cualquiera ya que al tener la misma probabilidad de que salgan no importa y lo dejaría a la suerte". Respuesta: "Elegiría ninguno ya que es una persona que no necesita dinero puesto que si se iba en carro sabiendo que vive cerca a su oficina entonces le sobra la plata para pagar el gasto en gasolina"	1.1.4

		5	Elegiriamos ambas porque habria la posibilidad de jugar el billete de loteria dos veces. Ademas es mas probable que para llegar a ganar la loteria el numero a escojer sea el segundo. puesto que es menos probable que salga una sucesion de los mismos numeros	1.1.5
		A	El cojería ~~16~~ 16947 ya que los números pocas veces salen repetidos y hay más posibilidad de que salgan los números diferentes.	1.1.A
		B	El 16947, por que para nosotros es más probable que salga el número intermedio a que salga el ultimo número con el mismo digito. ~~el~~	1.1.B
		C	1 Elegirnamos el número 16947 porque es mucho más probable que dentro de la lotería salgan cinco números diferentes, que cinco números iguales en la loteria 2 Elegiriamos el número 99999 ya que al tener en cuenta que las posibilidades son equitativas en el momento de escogerse es más probable 3 Son iguales de probables ya que los dos números tienen la misma cantidad de cifras y de equitatividad para el momento que se juega la lotería.	1.1.C
		D	Elegiriamos los 2, porque tiene más posibilidades de ganar.	1.1.D

ANEXO 1. RESULTADOS DE ETAPA 1.

		E	→ la probabilidad es la misma porque cada posición de los números es independiente, de esta forma no importa en absoluto si un valor es igual o diferente al precedente o al procedente del que se encuentra.	1.1.E
	2	1	ELEGIRIAMOS EL 16.947 DEBIDO A QUE ES MAS PROBABLE QUE SALGAN NUMEROS DIFERENTES EN LAS OPCIONES A QUE SALGA EL MISMO NUMERO EN TODAS LAS POSIBILIDADES	1.2.1
		2	1/ las mismas posibilidades del problema anterior por que el color no cambia nada. 2/ El numero que debé jugar en la loteria Debe ser el que aun no se ha jugado ya que es menos probable que Vuelva a caer el mismo numero.	1.2.2
		3	• yo elegiría el que no ha caído, sin importar cual sea. • yo elegiria el numero que no habia escogido antes. • Yo no jugaría porque no me gusta la loteria. • Yo jugaria cualquiera o los dos porque es posible que vuelva a caer • Si ya Hay un ganador, puede haber la posibilidad de volver a caer el mismo numero.	1.2.3

		4	Respuesta: "Elegiría ninguno porque es probable que el no crea en los juegos de azar." Respuesta: "No jugaría ya que al tener tan pocos opciones de ganar (1 o 2) dentro de tantas opciones posibles, es poco probable ganar el juego y más probable perder, 2(números) a 10^5-2."	1.2.4
		5	Elegiría el 99999 porque es su número de la suerte Escoge el 16947 ya que en pocas ocasiones el número de la lotería no ha sido una sucesión del mismo número.	1.2.5
		A	Escogeríamos el 99999 ya que como en el anterior salió como resultado el 16947 habría muy baja probabilidad de que vuelva a salir el mismo número.	1.2.A
		B	El 16947 tiene menos posibilidades de caer porque ya cayó y es menos probable de que vuelva a caer	1.2.B
		C	1 Teniendo en cuenta que existe una cantidad equitativa frente a cualquiera de los dos números, se cree pertinente afirmar que existe la misma posibilidad de que cualquiera de los dos números sea el ganador	1.2.C

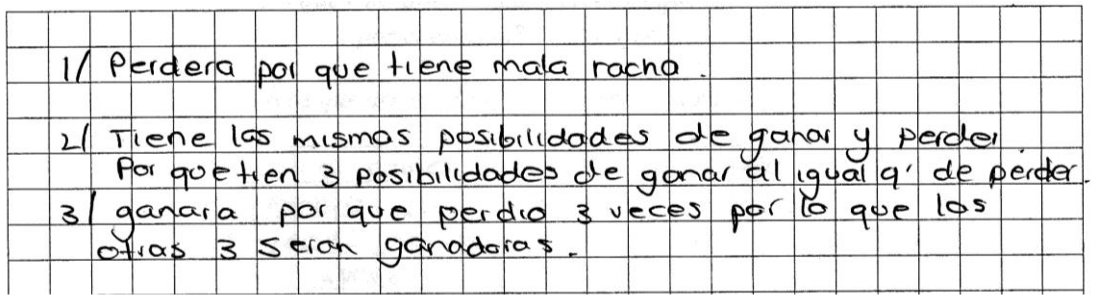
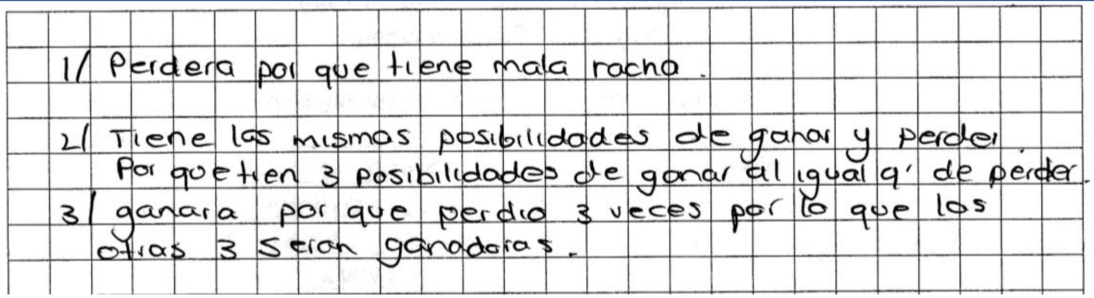
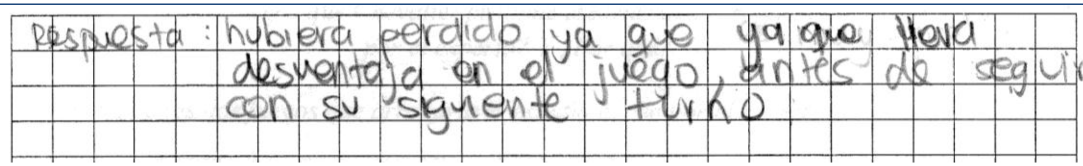
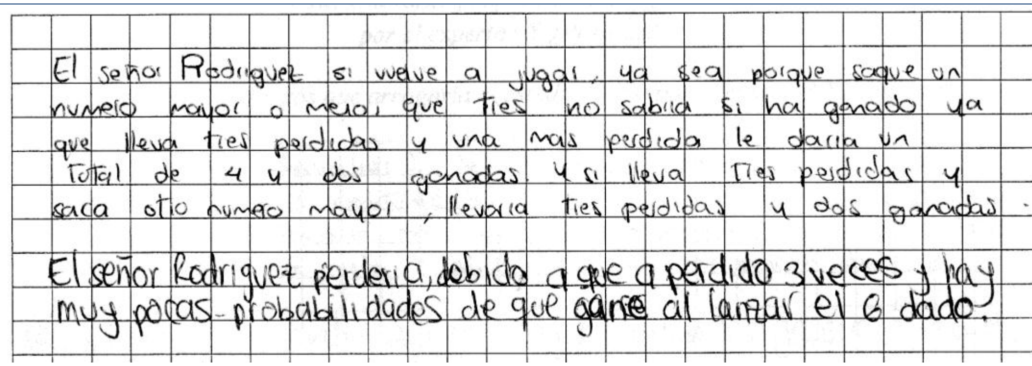
		D	Los dos los numeros ya que se tiene más posibilidad de ganar al tener más opciones.	1.2.D
		E	Se elegiría el número 16947 puesto que la frecuencia con la que un número de 5 dígitos iguales salga es mucho menor a la de que un número de cifras diferentes pueda salir o resultar ganador.	1.2.E
	3	1	PEDRO NO PAGA POR QUE HAY MAS PROBABILIDAD QUE SACE PEDRO 5 CARAS SEGUIDAS Y 3 SELLOS A 7 CARAS SEGIDAS Y UN SELLO AL FINAL	1.3.1

		2	1/ Pedro por que joan con la tecnica de lanzamiento saca 7 caras seguidas, y puede cambiar el lado de la moneda para sacar sello al final. 2/ Pedro, hay más posibilidades de que saque 7 veces, teniendo la posibilidad luego de sacar un unico sello al final. 3/ Hay más posibilidades de que ninguno de los dos gane, porque es más posible que caiga intercalado en algunos casos.	1.3.2
		3	• Creo que lo mejor es que cada uno compre su boleta, ya que creo que es muy dificil que salgan sobre todo los últimos intentos. • Yo creo que ~~[illegible]~~ Pedro no tendria que comprar las boletas pues el rango de caras y sellos en los lanzamientos para Pedro son más pequeños, por lo cual hay más posibilidades de que lo logre • Yo creo que los dos tendrán que comprar las boletas, por que la probabilidad de que salga esa sucesión en las monedas es muy dificil. • Pienso que los dos deberían comprar las boletas y no dejarlo al azar. • Creo que cada uno debería comprar su boleto con la claridad de que Metallica no es Rock and Roll, sino trashmetal • yo creo que cada uno compre que dejar a la aza porque no hay poco probabilidad de que salga una sucesión que sea tan seguida.	1.3.3

		4	RT: Pierde Juan ya que es más probable que salgan 5 caras seguidas a 7 caras seguidas, independientemente de la habilidad de Juan, porque para llegar a 7 primero hay que pasar por 5; Así pues, ya teniendo 5 es más factible obtener los sellos	1.3.4
		5	~~Juan~~ Pedro no tendría la posibilidad de comprar la balote ya que hay mas posibilidades de que Pedro haga 5 a que Juan haga 7. Juan no tendría que comprar los boletos para el concierto, porque es muy bueno en los juegos de azar	1.3.5
		A	• Es más probable que Pedro gané porque el condiciona el juego de acuerdo a sus posibilidades. • Es más probable que ~~Pedro~~ Juan gané porque ha ganado más veces en el azar • Pedro ganaría ya que hay más probabilidad de sacar 5 caras y 3 sellos ya que los resultados son más variados.	1.3.A

		B	•Pedro porque así hayan menos posibilidades Juan es mejor en los juegos de azar. - Juan porque es mejor en los juegos de azar aunque pedro tengo mas posibilidades. (Juan gana por experiencia)	1.3.B
		C	1. Es mucho más probable que Juan deba pagar las boletas ya que es aún más equilibrado que se ha 45% y luego el 35% y no el 90% porciento y luego un 10%.	1.3.C
		D	Juan, porque es más probable que Pedro no saque las 7 caras seguidas a que Juan saque 5 caras.	1.3.D

		E	→ La probabilidad de que salgan 7 caras seguidas y un sello al final y de que salgan 5 caras seguidas y 3 sellos ya al final resulta ser la misma. Ahora bien, es importante analizar ¿qué representa la probabilidad de un suceso y la frecuencia del mismo? ~~[illegible]~~ Cuando hablamos de un caso como este es evidente que la frecuencia de que todas las caras salgan iguales consecuentemente es mucho más baja que de la que salgan parejas, en conclusión la probabilidad se determina a priori y la frecuencia ya de esta forma se determinará a posteriori. Siendo la probabilidad la cantidad de posibilidades dentro de ciertas posiciones, basándose en métodos matemáticos que no tienen la necesidad de recurrir a la experiencia.	1.3.E
	4	1	TIENE LA MISMA PROBABILIDAD DE TANTO PERDER COMO GANAR DEBIDO A QUE 3 ES LA MITAD DEL DADO, DEBIDO A QUE EL DADO SE COMPONE DE 6 CARAS LAS POSIBILIDADES SE REPARTEN EN UN 50%. Y EL AZAR TOMARÍA SU IMPORTANCIA.	1.4.1

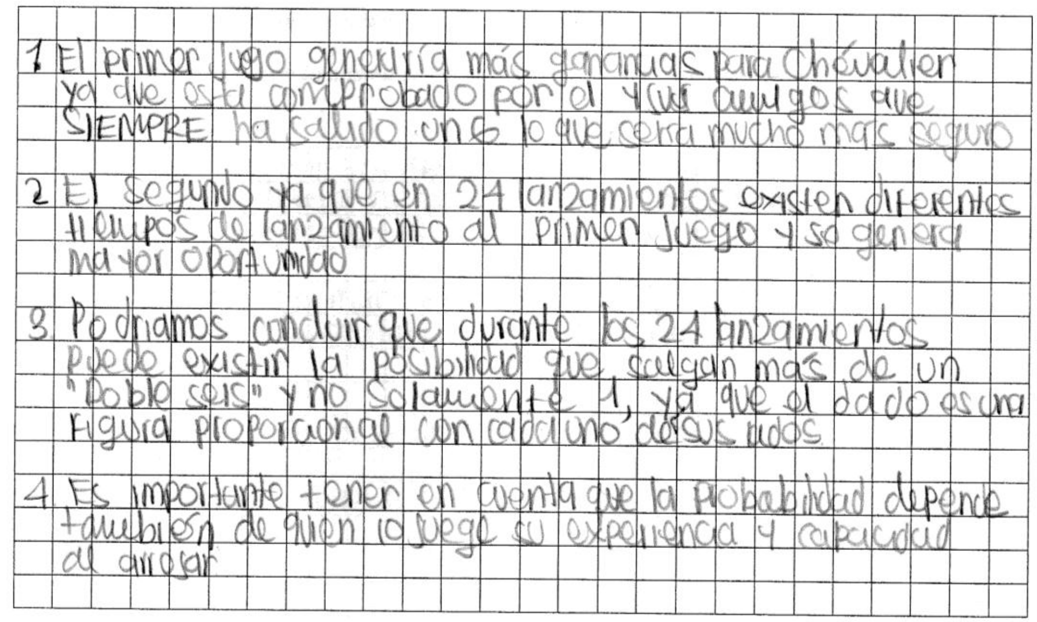
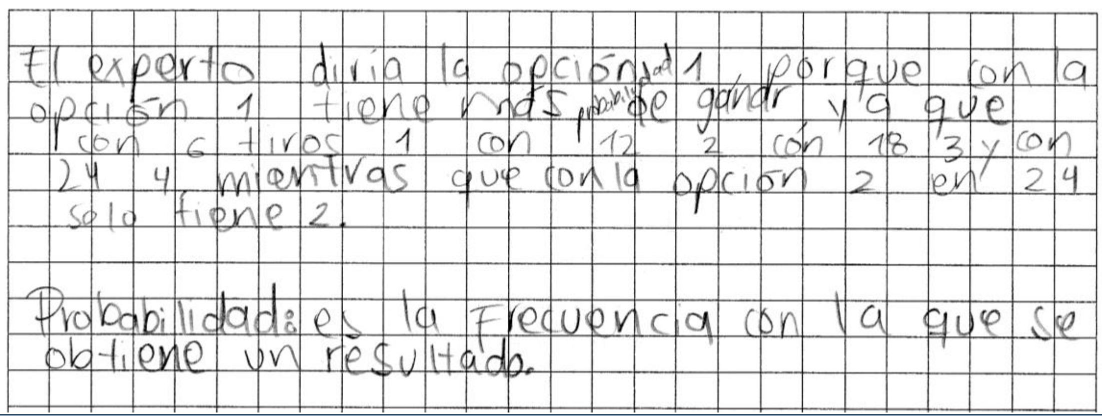
		2	 1/ Perdera por que tiene mala racha. 2/ Tiene las mismos posibilidades de ganar y perder. Por que tien 3 posibilidades de ganar al igual q' de perder. 3/ ganara por que perdio 3 veces por lo que los otras 3 seran ganadoras.	1.4.2
		3	 1/ Perdera por que tiene mala racha. 2/ Tiene las mismos posibilidades de ganar y perder. Por que tien 3 posibilidades de ganar al igual q' de perder. 3/ ganara por que perdio 3 veces por lo que los otras 3 seran ganadoras.	1.4.3
		4	 Respuesta: hubiera perdido ya que ya que lleva desventaja en el juego antes de seguir con su siguente turno	1.4.4
		5	 El señor Rodriguez si vuelve a jugar, ya sea porque saque un numero mayor o meno, que tres no sabria si ha ganado ya que lleva tres perdidas y una mas perdida le daria un total de 4 y dos ganadas. y si lleva tres perdidas y saca otro numero mayor, llevaria tres perdidas y dos ganadas. El señor Rodriguez perderia, debido a que a perdido 3 veces y hay muy pocas probabilidades de que gane al lanzar el 6 dado.	1.4.5

		A	• Que el señor Rodriguez perdería porque si se gana sacando el resultado después de 3 y el en 5 tiros solo obtuvo dos veces este resultado entonces sería más probable que obtuviera menos de tres en tres resultados (si seguiría jugando)	1.4.A
		B	probablemente pierda debido a que esta en una relacion de 1 y 3 en donde uno es igual a las veces que gana y 3 a las veces que pierde porque aun falta saber el resultado del ultimo tiro para saber si pierde o queda en empate	1.4.B
		C	1 Creemos que el Señor Rodrigues tiene posibilidad de ganar ya que la probabilidad 3/6, mientras la posibilidad de que el señor Rodrigues pierda es 2/6 2 también es cierto que durante las 3 últimas oportunidades ha salido números menores, existe la posibilidad que a continuación saque un número mayor.	1.4.C

		D	Tiene igual posibilidad de perder o ganar, porque su suerte se define con un solo tiro, y ese tiro puede ser que lo ayude a ganar o lo ayude a perder.	1.4.D
		E	Teniendo como base, el uso de la probabilidad no podría conducirnos a una respuesta contundente, ya que la ~~pos~~ probabilidad no conduce a la experiencia (A priori) puesto que la misma simplemente nos indica un número de probables posiciones o posibilidades. En este caso, la probabilidad de que el señor Rodriguez pierda es de $\frac{1}{2}$ y de que gane también lo que nos lleva a concluir que requerimos de la experiencia para llegar a una respuesta ~~Pa~~ que de solución a este problema.	1.4.E
	5	1	OPINO que el primer juego es el que tiene mas probabilidad de ganar porque en las tres jugadas se ganó.	1.5.1

		2	1/ Gana mas con el primer juego por que solo son 6 lanzamiento y no se demora con cada jugado, mientras que si lanzan 24 veces se demora mas con cada jugador. 2/ Gana más en el ~~segundo~~ primero, porque en el primero tiene 1 de 6 posibilidades 6 veces, y en el segundo tiene 1 de 36 posibilidades solamente, y 24 veces. 3/ Gana más en el segundo, porque en este tiene más posibilidades de que el jugador en su turno de 24 lanzamientos arroje un doble seis, que solamente con 6 lanzamientos.	1.5.2
		3	• Creo que ganaría mas con el primer juego, ya que es más facil ganar con un dado que con dos. • Creo que ganaría el segundo juego porque hay más posibilidades. • Creo que ganaria en el segundo juego, ya que hay mas oportunidades • Yo creo que ganaria el segundo porque hay posibilidades y mas oportunidades aunque el primero tambien tiene un modo de oportunidades	1.5.3
		4	Respuesta: el juego 2 le da mas ganancias a Chevalier ya que tiene más opciones de lanzamiento.	1.5.4

		5	① El juego de Chavalier 1 le daría más ganancias a Chavalier ya que tiene 6 oportunidades para sacar 1 numero, mientras que la otra se demoraría más en sacar la pareja de 1 numero teniendo en cuenta que que existen 6 posibilidades para el primer dado y 6 para el segundo. ① El juego de chavalier 2 tiene más posibilidades ya que se le cuatriplicaría el lanzamiento del doble seis.	1.5.5
		A	• El chevalier uno tendría mejor resultado ya que es más probable en un solo dado sacar 6 en seis lanzamientos. • El chevalier dos tendría mejor resultado ya que entre más oportunidad de turnos hay más probabilidad de obtener un par de seis • Los dos tiene la misma probabilidad	1.5.A
		B	El juego de chevalier2 es mas probable que gane porque las obciones de ganancias se cuadriplican y las de perdida se duplican pero de igual manera hay mas obciones de ganar que en la de chevalier1	1.5.B

		C	 1 El primer juego generaría más ganancias para Chevalier ya que está comprobado por el y sus amigos que SIEMPRE ha salido un 6 lo que sería mucho más seguro 2 El segundo ya que en 24 lanzamientos existen diferentes tiempos de lanzamiento al primer juego y se generará mayor oportunidad 3 Podríamos concluir que durante los 24 lanzamientos puede existir la posibilidad que salgan más de un "Doble seis" y no solamente 1, ya que el dado es una figura proporcional con cada uno de sus lados 4 Es importante tener en cuenta que la probabilidad depende también de quien lo juegue su experiencia y capacidad al arrojar	1.5.C
		D	 El experto diría la opción 1 porque con la opción 1 tiene más probabilidad de ganar ya que con 6 tiros 1 con 12 2 con 18 3 y con 24 4 mientras que con la opción 2 en 24 solo tiene 2. Probabilidad: es la frecuencia con la que se obtiene un resultado.	1.5.D

		E	Es más probable que gane con el juego de 2 dados y 24 tiros, ya que es más probable que en 24 tiros saque 2 números iguales, a que en 6 tiros saque un número específico Probabilidad de un número en un tiro: $\frac{1}{6}$ Posibilidad de un número en 6 tiros: $1 = \frac{6}{6}$ $\frac{24}{36} = \frac{4}{6}$ Posibilidad de dos números iguales en un tiro de dos dados: $\frac{1}{36}$ Posibilidad de dos números iguales en 24 tiros $= \frac{24}{36}$	1.5.E

ANEXO 2. RESULTADOS DE ETAPA 1.

Grupo	Problema	Código De Problema		
1	1	E	F	S
	2	S.C	S.C	S.C
	3	E	F	S
	4	E	F	C
	5	C	G'	S
2	1	E	S	C
	1	C	M	C
	2	S.C	S.C	S.C
	3	E	F	S
	4	C	M	C
	4	C	G'	S
	5	E	S	C
3	1	E	F	S
	2	S.C	S.C	S.C
	3	E	G	S
	4	E	F	S
	5	E	F	S
4	1	E	G	S
	1	C	M	C
	2	S.C	S.C	S.C
	3	E	F	S
	4	C	G'	S
	5	E	F	S
5	1	E	G	S
	2	S.C	S.C	S.C
	3	C	G'	S
	4	C	G'	S
	5	E	S	C

Grupo	Problema	Código De Problema		
A	1	E	F	S
	2	S.C	S.C	S.C
	3	C	G'	S
	3	C	T	F
	4	E	F	S
	5	E	F	S
B	1	E	G	S
	2	S.C	S.C	S.C
	3	E	G	S
	4	S.C	S.C	S.C
	5	S.C	S.C	S.C
C	1	E	F	S
	1	C	M	C
	2	S.C	S.C	S.C
	3	E	G	S
	4	E	P	F
	5	E	F	S
D	1	S.C	S.C	S.C
	2	S.C	S.C	S.C
	3	E	F	S
	4	C	M	C
	5	C.S	C.S	C.S
E	1	E	S	C
	2	S.C	S.C	S.C
	3	C	M	C
	4	E	F	C
	5	E	F	C

Ilustración 14. Conteo de concepciones Probabilidad

Matemáticas Problema 1 - 5	
Conteo de respuestas concepción Clásica	7
Conteo de respuestas concepción Frecuentista	0
Conteo de respuestas concepción Subjetiva	16
Conteo de respuestas sin Clasificar	0

Sociales Problema 1 - 5	
Conteo de respuestas concepción Clásica	6
Conteo de respuestas concepción Frecuentista	2
Conteo de respuestas concepción Subjetiva	10
Conteo de respuestas sin Clasificar	3

Matemáticas y Sociales Problema 1	
Conteo de respuestas concepción Clásica	5
Conteo de respuestas concepción Frecuentista	0
Conteo de respuestas concepción Subjetiva	7
Conteo de respuestas sin Clasificar	1

Matemáticas y Sociales Problema 3	
Conteo de respuestas concepción Clásica	1
Conteo de respuestas concepción Frecuentista	1
Conteo de respuestas concepción Subjetiva	9
Conteo de respuestas sin Clasificar	0

Matemáticas y Sociales Problema 4	
Conteo de respuestas concepción Clásica	4
Conteo de respuestas concepción Frecuentista	1
Conteo de respuestas concepción Subjetiva	6
Conteo de respuestas sin Clasificar	1

ANEXO 2. RESULTADOS DE ETAPA 1.

Matemáticas y Sociales	
Problema 5	
Conteo de respuestas concepción Clásica	3
Conteo de respuestas concepción Frecuentista	0
Conteo de respuestas concepción Subjetiva	5
Conteo de respuestas sin Clasificar	1

Matemáticas y Sociales				
Autores de Preferencia		Concepción Clásica	Concepción Frecuentista	Concepción Subjetiva
Conteo de preferencia de Serret	4	3	0	0
Conteo de preferencia de Chávez	0	0	0	0
Conteo de preferencia de Pliego	1	0	1	0
Conteo de preferencia de Goñi	6	0	0	6
Conteo de preferencia de Fernández	17	3	0	14
Conteo de preferencia de Gutiérrez	6	0	0	6
Conteo de preferencia de Mateo	6	6	0	0
Conteo de preferencia de Toretti	1	0	1	0

Ilustración 15. Conteo de repuestas por problema