Aproximación a los Sistemas Dinámicos

Julian David Lozano Murillo

Universidad Pedagógica Nacional
Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C.
2017

Aproximación a los Sistemas Dinámicos

Julian David Lozano Murillo
CC. 80098720 Cód. 2012140034

Trabajo de grado presentado ante el Departamento de Matemáticas
de la Universidad Pedagógica Nacional
Asociado al estudio de un asunto de interés del estudiante
Para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Director:
Gil Alberto Donado Núñez
Profesor de la Universidad Pedagógica Nacional

Codirector:
Alberto Campos
Doctor de la Universidad de París
Profesor honorario Universidad Nacional de Colombia

Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Enero 2017

Agradecimientos

Primeramente agradezco a mi hermosa esposa Alejandra por la tan importante ayuda que me brindó, por estar a mi lado siempre, inclusive en los momentos y situaciones más difíciles dándome la motivación suficiente y esperanzadora, diciéndome que lo lograría perfectamente.

Agradezco también a mi Madre por la ayuda y apoyo incondicional, por educarme, y sobre todo por la paciencia que ha tenido durante toda mi vida.

A mi Padre que aunque no está presente, en donde está me hace sentir lo orgulloso que estaría de mí.

Agradezco al Profesor Alberto Campos, que como codirector de este trabajo me ha orientado, apoyado y corregido mi labor con una gran entrega.

Agradezco al Profesor Alberto Donado, que confió en este proyecto.

Y finalmente agradezco a mi mayor inspiración: Dios.

A todos ellos dedico este trabajo.

1. Información General

Tipo de documento	Trabajo de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	Aproximación a los sistemas dinámicos
Autor(es)	Lozano Murillo, Julian David
Director	Gil Alberto Donado Núñez; Alberto Campos
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2016, 98p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	ECUACIONES DIFERENCIALES, VALORES Y VECTORES PROPIOS, SISTEMAS DIFERENCIALES, SISTEMAS DINÁMICOS.

2. Descripción

Se propone una aproximación a los sistemas dinámicos con el fin de conocer el tema a través de sus aplicaciones basándonos en un libro de texto llamado Sistemas Dinámicos, una introducción a través de ejercicios, se compone de 159 problemas repartidos en 9 capítulos, de los cuales unos 127 acarrean cuestiones propias de sistemas dinámicos, Sánchez, González y Gutiérrez (2014). Sus autores "son profesores del Departamento de Matemáticas del Área Industrial de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad Politécnica de Madrid".
Por otro lado, se quiere complementar el trabajo dando una mirada al surgimiento histórico de esta rama por medio de uno de los documentos mencionados en la bibliografía, este será elegido en el transcurso del estudio del libro.

3. Fuentes

[1] ANDERSEN K.G. (1994). Poincaré's discovery of homoclinic points. Archive for history of exact sciences. Volume 48 No. 2. 133-147 pp.
[2] ARNAUD Marie – Claude, et autres. (2013). Voyages en Mathematiques. Destination Systemes dynamiques avec Poincaré. Paris: Editions Le Pommier. 146 p.
[3] AUBIN D. y DAHAN-DALMEDICO Amy. (2002). Writting the History of Dynamical Systems and Chaos. Historia de la Mathematica. Volume 29. 273 - 339 pp.
[4] BARROW Green, June. (1994). Oscar II's Prize competition and the error in Poincaré's Memor on the Three Body Problem. Archivo for the History of Exact Science. Volumen 48 No. 2. p 107 – 131.
[5] CAMPOS Alberto. (2007). Bosquejo Histórico de los sistemas dinámicos desde Poincaré hasta 1960. Bogota. 12 p.
[6] CAMPOS Alberto. (2013). Epistemología de la matemática. Colección OBRA SELECTA. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. xlvi+781 p.
[7] DAHAN-DALMEDICO Amy. (1996). Le difficile héritage de Henri Poincaré en systemes dynamiques. P 13 – 33. En: Henry Poincaré Science et philosiphie. Paris: Albert Blan – Chard. p 598.
[8] HIRSCH Morris W., SMALE Stephen y DEVANEY Robert L. (2013). Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introdution to Chaos 3rd ed. Academic Press, Waltham, MA.
[9] HUBBARD John H. y WEST Beverly H. (1991). Differential Equations: A Dynamical Systems Approach. I y II. Texts in Applied Mathematics: 5, 18. Springer- Verlag, Berlín. III
[10] MADRID Carlos M. Las Matemáticas del cambio climático. Colección: ciencia al viento No. 15. febrero 2016. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá 60 p.

[11] SANCHEZ Eva, GONZALEZ José y GUTIERREZ Joaquín. (2014). Sistemas dinámicos: una introducción a través de ejercicios. Madrid: Quinta edición. DEXTRA editorial. 425 p.
[12] TABOR Michael. (1989). Chaos and Integrability in nolinear mechanics. An introduction. Wiley. xiii+364 pp.
[13] VILLANI Cédric. (2013). La meilleure et la pire des erreurs de Poincaré. Compterendu de la conférence de Cédric Villani a Metz, rédigé par Catherine Conbelles, et revu par Villani. Bulletin APMEP No. 503. Mars - avril. 195 - 216 pp.
[14] YOCCOZ Jean-Christophe. (2006). Une erreur féconde du mathématicien Henri Poincaré. Gazette des mathématiciens. S.M.F. # 107. Janvier. 19-26 pp.

4. Contenidos

Capítulo 1
- Recorrido histórico de los sistemas dinámicos.

Capítulo 2
- Distribución temática de los ejercicios del libro guía.

Capítulo 3
- Métodos elementales de solución de ecuaciones diferenciales ordinales.
- Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes.
- Ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes.
- Sistemas lineales no autónomos.

Capítulo 4
- Introducción a los sistemas dinámicos.
- Sistemas dinámicos lineales.
- Sistemas dinámicos no lineales.
- Comportamiento global de los sistemas planos.

Capítulo 5
- Ejemplos de sistemas dinámicos.

5. Metodología

Consistió en pasar por los capítulos del libro del 1 al 6, excepto el capítulo 2 que está enfocado a lo teórico y no a las aplicaciones, resolviendo los ejercicios propuestos a partir de la teoría allí expuesta.
Una labor conjunta es la de recibir asesoría continua por parte del profesor director del proyecto, resolviendo dudas e identificando aspectos relevantes en la teoría y las aplicaciones.
Una actividad al lado será leer algunos de los otros títulos de los que figuran en la bibliografía para indagar la parte histórica.
También se recibirá asesoría por parte del profesor Alberto Campos Sánchez, profesor honorario de la Universidad Nacional de Colombia, doctor de la Universidad de Paris, a quien le pedimos su ayuda y él la ofreció muy amablemente sin ánimo de lucro o reconocimiento alguno, lo hace por su entrega a la labor investigativa y pedagógica.

6. Conclusiones

- La teoría de los sistemas dinámicos consiste en estudiar el comportamiento de cuanta cosa cambia en el Universo por medio de modelos matemáticos, en el caso del estudio realizado los procesos se llaman diferenciables pues la ley que marca su evolución viene dada por una función diferenciable. Entonces los sistemas dinámicos y los sistemas de ecuaciones diferenciales están estrechamente relacionados pues estas marcan una ley de evolución.
- Esta teoría en particular involucra varias ramas de la matemática; como el álgebra, la geometría, el cálculo, el análisis, los métodos numéricos, la topología, y otras más; lo que la hace muy enriquecedora matemáticamente hablando.
- El paso de lo lineal a lo no-lineal introduce un gran cambio en el estudio de los sistemas dinámicos. En el caso lineal la solución general de los sistemas se obtiene analíticamente, en cambio en lo no-lineal esto no es posible, por lo tanto, gracias a Poincaré se introduce un estudio cualitativo de los sistemas de ecuaciones diferenciales, dándonos información del comportamiento de las trayectorias definidas por estos sistemas.
- El estudio analítico y cualitativo de los sistemas dinámicos nos ofrece información tanto local como global del retrato de fase del sistema, permitiendo caracterizar el comportamiento de las trayectorias. El caso de los sistemas planos queda caracterizado por las diferentes técnicas presentadas.
- Las ecuaciones ordinarias diferenciables y sistemas de ecuaciones y su empleo sistemático, son un instrumento muy efectivo para resolver muchas cuestiones de diferentes ramas del conocimiento.
- Debido a las leyes de Newton las ecuaciones diferenciales de los primeros ordenes son las más utilizadas para las aplicaciones en la Física, Química, Biología y otras ramas. El cambio de la posición de un cuerpo con respecto al tiempo, es decir la velocidad, y el cambio de la velocidad con respecto al tiempo, es decir la aceleración; son la primera y segunda derivada de la posición con respecto al tiempo, por lo tanto, las ecuaciones de movimiento de los cuerpos van a venir dadas en términos de primeras y segundas derivadas en la mayoría de los casos.
- Estudiar una teoría matemática, o más bien esta parte de la teoría, y ver la cantidad de aplicaciones que esta tiene, junto con el surgimiento histórico ha sido realmente muy interesante porque nos muestra por un aparte lo que han tenido que pasar los matemáticos y científicos involucrados para desarrollar sus ideas, y por otra el contexto cultural e histórico de la época.
- El gran matemático Henri Poincaré es el innegable punto de origen de los sistemas dinámicos, el inesperado suceso del concurso mostró al mundo científico las revolucionarias ideas de este genio, que quizás por ser tan revolucionarias hubo que esperar un tiempo para que algunos matemáticos y físicos se interesaran en estas. Y tal es el caso que hoy en día ese estudio de la teoría al parecer no tiene como detenerse.

Elaborado por:	Julian David Lozano Murillo
Revisado por:	Gil Alberto Donado Núñez; Alberto Campos Sánchez

Fecha de elaboración del Resumen:	10	02	2017

Índice general

Introducción

Encontrar aplicaciones de la matemática a situaciones de la vida real es una tarea difícil para muchos colegas; no con todos los tópicos matemáticos es posible lograr esto, pero los sistemas dinámicos es un tema que puede ser tanto teórico como apropiado para muchas aplicaciones a cuanto evoluciona en la naturaleza. Es allí donde se propone una aproximación a los sistemas dinámicos con el fin de conocer el tema a través de sus aplicaciones basándonos en el estudio del libro Sistemas dinámicos: una introducción a travéz de ejercicios. Eva Sánchez, José González y Joaquín Gutierrez. 5.ª edición. DEXTRA Editorial. Se compone el libro guía de 159 problemas repartidos en 9 capítulos, de los cuales unos 127 acarrean cuestiones propias de sistemas dinámicos. Sus autores Sánchez, González y Gutiérrez (2014), "son profesores del Departamento de Matemáticas del Área Industrial de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad Politécnica de Madrid".

El presente trabajo de grado está dividido en 5 capítulos o divisiones en donde se pretende exponer la teoría. Se ha visto la necesidad de consultar otras fuentes para complementar el estudio y aclarar los conceptos expuestos en el libro guía. También se ha hecho un acercamiento a la epistemología de los sistemas dinámicos tomando como referencia algunos estudios de historiadores acerca de la evolución de este conocimiento, en la bibliografía se encuentran citados.

En el primer capítulo se ha hecho una recopilación de información histórica y epistemológica del surgimiento de la teoría, consultando artículos de historiadores como el de Barrow-Green (1994), el de Andersen (1994) y el de Dahan-Dalmédico (1996) que centran el estudio en el gran matemático francés Henri Poincaré, considerado el innegable punto de origen de los sistemas dinámicos.

En el segundo capítulo se hace un estudio inicial del libro guía con el fin de identificar los temas que ayuden a realizar un mapa mental de la disciplina, es decir, un análisis más pormenorizado de esta rama de las matemáticas. Luego se hace una lista de algunos de los tantos temas de aplicación de esta teoría.

En el tercer capítulo se expone la teoría básica que fue necesaria abordar para tener las bases teóricas suficientes para adentrarnos en los sistemas dinámicos, por supuesto que dentro de estos temas están las ecuaciones diferenciales ordinarias y métodos básicos de resolución; se añadió parte de la teoría espectral de matrices que tiene que ver con valores y vectores propios, algo vital y de suma importancia para la teoría de los sistemas dinámicos. Al final, se transcribe algo acerca de sistemas de ecuaciones diferenciales y ecuaciones diferenciales lineales de orden n.

En el cuarto capítulo se presenta una visión de lo que son los sistemas dinámicos y su relación con los sistemas diferenciales. Se presenta el caso lineal y una muy buena clasificación de los sistemas planos lineales bien caracterizados. Luego se tienen en cuenta técnicas cualitativas para estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos que no se pueden integrar, y para sistemas no lineales.

Y por último en el quinto capítulo se presentan 8 ejemplos muy bien seleccionados del libro guía que hacen un recorrido por todas la teoría y por las técnicas de resolución de sistemas dinámicos, técnicas analíticas en el caso que se puedan integrar las ecuaciones y cualitativas en los casos no lineales.

Objetivos

Objetivo General

- Estudiar los conceptos introductorios de los sistemas dinámicos continuos y discretos a través del libro guía.

Objetivos Específicos

- Identificar los conceptos básicos de la teoría de los sistemas dinámicos.
- Elegir algunos ejemplos de sistemas dinámicos que sean de nuestro interés o que sean significativos en la enseñanza.
- Indagar cómo surge históricamente la disciplina de los sistemas dinámicos por medio de algunos de los documentos citados en la bibliografía.
- Elaborar una monografía recopilando toda la información obtenida en el estudio del libro principal y de la biografía citada.

Capítulo 1

Innegable punto de origen: Poincaré

Cuestiones sobre lo observable en la naturaleza han dado puntos de partida a grandes ideas que al desarrollarse produjeron formidables teorías físicas y matemáticas en el transcurso de la historia. La observación sistemática del firmamento ha sido una actividad científica muy antigua que ha proporcionado ideas matemáticas excepcionales, la preocupación sobre el movimiento de los planetas, lo que conocemos hoy en día como mecánica celeste, ha sido y sigue siendo una motivación de investigación muy fuerte entre los físicos y matemáticos; el famoso problema de los n cuerpos es la pregunta de investigación que quisieron resolver grandes personajes y que impulsó el surgimiento de la teoría de los sistemas dinámicos. El indiscutible punto de origen de esta teoría fue Poincaré y su revolución conceptual al estudiar el problema de los 3 cuerpos.

1.1. Antecedentes

Por supuesto que antes de Poincaré hubo científicos que hicieron grandes aportes al querer explicar el movimiento de los planetas y de todo lo que se iba observando en el universo. Encontramos un registro claro de aportes desde Platón. Aquí un pequeña reseña de algunos de ellos y su contribución:

Platón. ($-427\pm$, $-347\pm$). Plantéa el problema para el movimiento de los planetas sobre esferas concéntricas donde la Tierra es el centro.
Eudoxio de Cnido. ($-408\pm$, $-355\pm$). Da respuesta al problema propuesto por Platón para el movimiento de los planetas forjando un sistema de 27 esferas concéntricas.
Heráclides de Ponto. (-388, -310). Admite rotación de la Tierra sobre sí misma. Sis-

tema semi-heliocéntrico con la Tierra en el centro. El sol tiene dos satélites: Mercurio y Venus.
Aristarco de Samos. $(-310, -230)$. Afirmó que la Tierra rota sobre sí misma y que la Tierra rota al rededor del sol.
Claudio Ptolomeo. (90-168). Completó el sistema astronómico de Eudoxio, que ya no alcanzaba a explicar los movimientos estelares para las aplicaciones, con uno de 77 esferas concéntricas.
Nicolás Copérnico. Polaco (1473-1543). Creó un sistema heliocéntrico en donde la Tierra y los otros planetas giran alrededor del Sol. En orden, se encuentran Mercurio, Venus, Tierra, Luna, Marte, Júpiter y Saturno (Aún no se conocían Urano y Neptuno). La Tierra tiene tres movimientos: la rotación diaria, la revolución anual y la inclinación anual de su eje. Decía que el sistema estelar conocido hasta entonces funciona pero que se podría pensar uno mejor.
Galileo Galilei. Italiano (1564-1642). El primer científico a la manera actual. Introdujo el telescopio para la observación astronómica lo que le permitió descubrir muchos hechos astronómicos y físicos. Se pronunció por el sistema copernicano.
Johannes Kepler. Alemán (1571-1630). Inductivamente obtuvo tres leyes satisfactorias y sobre el camino de Copérnico. Al tener acceso a las observaciones de Tycho Brahe (astrónomo imperial) se dio cuenta de que las órbitas circulares no concordaban con lo observado, dejó esa idea a un lado y adoptó órbitas elípticas para su sistema.
Isaac Newton. Inglés (1643-1727). Formuló la ley de la gravitación universal. Obtuvo deductivamente las tres leyes de Kepler a partir de esta ley. Da a entender los fenómenos físicos más importantes del universo observable. Considerado el padre de la Mecánica celeste.
Joseph-Louis Lagrange. Matemático francés nacido en Turín (1736-1813). Trabajó en el problema de los 3 cuerpos. Descubrió los puntos que llevan su nombre, puntos de equilibrio potencial entre la Tierra y el Sol.
William Herschel. Alemán (1738-1822). Descubrió el planeta Urano del sistema solar (1781). Descubrió dos satélites de Urano (1787). Descubrió dos satélites de Saturno (1789).
Pierre-Simón Laplace. Francés (1749-1827). Compendió la astronomía de su época perfeccionando el método de Newton. Creyó haber establecido la estabilidad del sistema solar, formulando un rígido determinismo. Con oscilaciones pero todo el sistema solar funciona.
Urbain Le Verrier. Francés (1811-1877). Gracias a cálculos matemáticos llegó a la conclusión de la existencia de otro planeta (Neptuno).
Johann Galle. Alemán (1812-1910). Localizó (1846) el planeta Neptuno predicho por

Le Verrier y Adams.
Johan Couch Adams. Inglés (1819-1892). Independientemente de Le Verrier, también predice la existencia de Neptuno.
Henri Poincaré. Francés (1854-1912)...

Se ha hecho un pequeño analisis epistemológico de la teoría de los sistemas dinámicos antes de Poincaré, teniendo en cuenta que la interrogante que está detrás de todo esto es saber cuál es la dinámica de los cuerpos celestes, esto ha sido posible por medio de observaciones simples, luego con observaciones mas sofisticadas con telescopios y por supuesto por medio de la matemática.

1.2. Circunstancias que llevaron a Poincaré a dar inicio a la teoría de los sistemas dinámicos

Hubo un concurso internacional matemático en 1889 que es recordado porque Henri Poincaré participó y su publicación resultó ganadora, pero en esta hubo un error que según Poincaré fue un error de principiante; Jean-Christophe Yoccoz (2012) lo llamó: un fecundo error.

En consecuencia, Poincaré se da a la tarea de revisar su trabajo, añade ideas nuevas y excepcionales, que dan origen a la teoría actual de los sistemas dinámicos. Puede verse en los dos siguientes trabajos intensamente investigativos:

H. Poincaré. *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.* Acta Mathematica. Volumen 13. (1890). 1-270. También en las obras completas de Poincaré volumen 7. pp 262-479.

H. Poincaré. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste.* Tres volúmenes. (1892-1899).

1.2.1. Concurso Internacional Matemático

El 21 de enero de 1889, se cumpliría el sexagésimo aniversario de Oscar II, rey de Suecia y Noruega. Para que tal acontecimiento no fuera fácilmente olvidado surgió la propuesta de organizar el otorgamiento de un premio a una investigación matemática concursada. El rey había estudiado matemática en la que después se constituyó en la

Universidad de Estocolmo por esto él tenía gran interés en patrocinar el concurso.

Gösta Mittag-Leffler profesor de matemática en la misma Universidad de Estocolmo, director de la revista Acta Mathematica, creada por él mismo en 1882, subsidiada por el Estado, y propulsor de la idea del concurso fue declarado organizador de la competición. Mittag-Leffler, doctorado en la Universidad de Uppsala, había estudiado luego con Charles Hermite en Paris; con Ernst Schering en Göttingen; con Karl Weierstrass en Berlín.

1.2.2. El Concurso

Fué abierto en 1884. Al cerrarse las inscripciones había doce candidatos, se conocen tres de ellos: Guy de Longchamps, #4; Paul Appell, #8 y Jean Escary, #10. Prioritariamente había que trabajar en una de las cuatro cuestiones propuestas, entre ellas estaba por supuesto el problema de los n cuerpos sugerida por Weierstrass y una relacionada con las ecuaciones de quinto grado sugerida por Hermite, la cual fue muy criticada por Kronecker. Había que enviar lo logrado al editor en jefe de Acta Mathematica antes del 1 de junio de 1888. El jurado estaba compuesto por Charles Hermite, Karl Weierstrass y Gösta Mittag-Leffler.

1.2.3. Primera versión

La primera versión de Poincaré fué proclamada vencedora en la víspera del evento esperado, es decir, el 20 de enero de 1889. Vino entonces la lectura del texto sometido. Mittag-Leffler encargó de tal cometido al recién doctorado matemático Lars Eduard Phragmén (1863-1937).

El cuestionario para la competición pedía la solución para el problema de n cuerpos:

> Si n partículas se mueven en el espacio bajo la atracción gravitacional mutua y condiciones iniciales dadas ¿es posible determinar los movimientos posteriores?

Poincaré limitó sus investigaciones al actualmente llamado problema restringdo de los tres cuerpos: Sol, Tierra, Luna.

Una cosa es reconocer la calidad de la obra de Poincaré y otra cosa es entenderla. Hermite en su correspondencia testimonió tal dificultad. Además, difícil de resolver, como lo muestra el hecho contado por Hermite y transcrito por Barrow-Green (1994), de que Picard demandaba de Poincaré más información acerca de los artículos en *Comptes Rendus*. Obtenía la respuesta: "es esto, es así". Picard comentaba: "...parece un vidente a quien las verdades se presentan con una luz que brilla, pero fundamentalmente solo para él...". Curioso saber esto de alguien, es decir de Poincaré, quien posteriormente escribió artículos claros y profundos que ocuparían cuatro pequeños volúmenes.

1.2.4. Nueve notas

La explicación puede estar en la alta originalidad de Poincaré: no tiene como decirlo si no es con una nueva idea.

Acosado de preguntas, Poincaré fue añadiendo notas hasta completar 93 páginas más. Los temas manifiestan diversidad:

Nota A: Divergencia de las series de Lindstedt

Nota B: Explicación en las coordenadas empleadas en astronomía

Nota C: Invariantes integrales

Nota D: Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos

Nota E: Método de los mayorantes de Cauchy

Nota F: Superficies asintóticas

Nota G: No existencia de integrales primeras

Nota H: Exponentes característicos

Nota I: Soluciones asintóticas

Para ponderar la importancia de estos temas baste pensar que Weierstrass esperaba la nota A para resolver dudas surgidas en su lectura del trabajo de Poincaré del cual era uno de los tres jurados. O baste pensar en la nota H de los exponentes característicos acerca de un importante criterio según el cual si todos los exponentes característicos son imaginarios puros entonces está asegurada la estabilidad de las soluciones, de lo contrario la inestabilidad.

La teoría de soluciones periódicas de Poincaré incluye el descubrimiento de soluciones asintóticas. Soluciones que paulatinamente se aproximan o se alejan de una solución periódica. En el espacio tridimensional de soluciones para el problema restringido, las soluciones asintóticas generan familias de curvas que llenan superficies y que se aproximan asintóticamente de una curva que representa la generación de soluciones periódicas.

Poincaré había ya enriquecido el dominio de las ecuaciones diferenciales con su tesis, brillante memoria acerca de las curvas definidas por una ecuación diferencial, en la cual particularmente había encontrado la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. El estudio cualitativo permite adentrarse en el comportamiento global de las soluciones de un sistema diferencial.

Sin embargo, el dominio iniciático de tan diversos temas hace difícil la comprensión de textos posteriores. Es en particular la queja de Phragmén el 16 de diciembre de 1888 pero ya Mittag-Leffler desde el 15 de noviembre de 1888 escribía a Poincaré que él y Weierstrass habían tomado todo un mes tratando de entender su trabajo.

Poincaré escribe que está listo para aligerar la lectura de su trabajo. El mismo comienza a revisarlo.

1.2.5. El error de Poincaré

Es entonces cuando Poincaré se da cuenta de un error en su trabajo. Claro está que no es fácil forjar una explicación rápida de en qué consistió. Involucra un concepto que en el texto de Tabor (1989) recibe el nombre de órbita homoclínica.

Poincaré estaba considerando ciertas curvas que llamaba de orden n obtenidas por una n-ésima iteración. Para un determinado detalle de su investigación utilizó el término "cuasi-cerrado" en diversas ocurrencias; infortunadamente lo "cuasi-cerrado" resultó "cerrado" según Barrow-Green (p123). Poincaré no vio la posibilidad de que la curva en cuestión no fuera cerrada si no que poseía intersecciones. Cuatro o cinco páginas después Barrow-Green intenta exponer la falla en el procedimiento de Poincaré.

Más claro es Poincaré con diversos corresponsales. Escribe a Mittag-Leffler el 1 de diciembre:

"Escribí al señor Phragmén para hablarle de un error que cometí...las consecuencias de este error son más serias de lo que pensé inicialmente...no es cierto que las superficies asintóticas sean cerradas, por lo menos no en el sentido que había pensado. Lo que es cierto es que si uno considera las dos porciones de la superficie (que todavía ayer creía que coincidían) ellas se intersecan a lo largo de infinitas trayectorias asintóticas y además distan entre sí en un infinitésimo de valor mayor que μ^p por grande que sea p".

"Creí que todas las curvas asintóticas, luego de haber sobrepasado una curva cerrada representante de una solución periódica, aproximarían asintóticamente la misma curva cerrada. Lo que es cierto es que hay infinitas curvas asintóticas con tal propiedad".

1.2.6. Toda la edición fué destruida

Mittag-Leffler procedió con rapidéz a parar la distribución del número de la revista. Había sido ya enviada a Hermite, Weierstrass, Kovalevskaya, Jordan, Von Dyck, Gyldén, Lindstedt, Lie, Hill. En principio, por la sugerencia de Mittag-Leffler devolvieron el número en cuestión.
Mitag-Leffler escribió a Poincaré ciertas consignas:

- El error debía quedar entre ellos, por lo menos, hasta cuando apareciera la edición definitiva de la memoria de Poincaré.
- La nueva redacción había de ser muy cuidadosa para evitar que algo del error se colara.
- Poincaré pagaría toda la reedición.

No se sabe hasta donde logró Mittag-Leffler su cometido. El hecho es que en la biblioteca del instituto Mittag-Leffler hay la siguiente nota escrita: "destruida toda la edición. M.L."

El premio del concurso era de 2500 coronas, la reedición le costó a Poincaré 3500 coronas. El volumen 13 de Acta Mathematica apareció finalmente en diciembre de

1890. Poincaré había entregado la edición revisada el 5 de enero de 1890. Los años restantes del siglo XIX fueron dedicados por Poincaré a desarrollar las teorías surgidas a lo largo de la corrección del "fecundo error".

No se puede sino estar muy de acuerdo con el aserto de Barrow-Green (1994, p120): "La memoria de Poincaré aseguró que el sexagésimo aniversario del rey Oscar II nunca sería olvidado".

1.3. La difícil herencia de Henri Poincaré. Dahan-Dalmédico (1996)

A Poincaré se deben grandes contribuciones a la teoría de los sistemas dinámicos. Dalmédico reenumera los temas de innovación de Poincaré: teoría cualitativa, bifurcación, estabilidad, métodos cuantitativos, teoría ergódica.

Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales

Estudio geométrico del conjunto de las soluciones de una ecuación diferencial que no se sabe integrar. Se llega a su retrato de fase. El espacio de fases es el espacio de las coordenadas de las posiciones y de las velocidades de los cuerpos considerados como puntos. Por tanto, a priori, es de dimension 6 n si n es el número de los cuerpos considerados. El retrato de fase es el conjunto de las curvas soluciones trazadas en el espacio de fase.

En dimensión dos, Poincaré hizo la clasificación de puntos singulares.

Ciclo Límite es una solución periódica aislada. *Teorema de Poincaré-Bendixon*: En la vecindad de un ciclo límite, las soluciones que no llegan al punto singular se enrrollan asintóticamente, en el pasado y en el futuro, hacia el ciclo límite. El teorema no tiene equivalente en tres dimensiones.

Aborda el problema restringido de los tres cuerpos partiendo de las soluciones periódicas. Desarrolla así:

- Un punto de vista local en la vecindad de una solución periódica;
- y un punto de vista global, dado que hace consideraciones a lo largo de la solución

periódica.

Utiliza luego:

- El método de la sección transversal o sección de la trayectoria por un plano normal;

- y el método de la aplicación del primer retorno.

Curiosamente, el estudio de los puntos de impacto sobre la sección transversal hace aparecer analogías con el estudio de los diferentes tipos de puntos singulares encontrados en el caso del plano.

Estudio de la estabilidad global de conjuntos de trayectorias

En Lagrange: la estabilidad consiste en la estricta periodicidad en las trayectorias. Poisson había llegado a la estabilidad hasta el caso en que la trayectoria reviene, no forzadamente hasta el punto de partida, sino una infinidad de veces hasta una vecindad inmediata del punto de partida.

En Poincaré introduce la noción de estabilidad de comportamientos de un conjunto de trayectorias; tal estabilidad será medida por la desviación de una trayectoria respecto a las vecinas en un instante dado.

Las soluciones se dividen entonces en trayectorias estables y en trayectorias inestables, de acuerdo con los exponentes característicos. Tal noción global de estabilidad será precisada por Lyapunov.

Poincaré utiliza las trayectorias periódicas para estudiar otras trayectorias en una vecindad de la periódica. Introduce el concepto de soluciones asintóticas y el de doblemente asintóticas, en pasado y en futuro, respecto de las soluciones periódicas. Birkhoff introduce los términos de trayectorias elípticas y trayectorias hiperbólicas.

Finalmente, Poincaré, llegó a distinguir trayectorias que llamó *homoclínicas*, tan complicadas que renuncia a trazarlas.

La noción de bifurcación

Poincaré se interesa en otro tipo de estabilidad, el de un conjunto de sistemas dinámicos que dependen de un parámetro.

Poincaré establece la existencia de series lineales de figuras de equilibrio, dependientes cada una de un parámetro. Puede suceder que una misma figura pertenezca a dos series diferentes. Se tiene una figura de equilibrio de bifurcación. A cada figura de equilibrio está asociada una sucesión infinita de coeficientes. La estabilidad se da cuando todos son positivos. Anulación de coeficientes indica figura de bifurcación.

Introducción a conceptos probabilísticos en dinámica

Poincaré muestra que hay una infinidad de soluciones particulares no estables en el sentido de Poisson, pero que ellas son excepcionales en el sentido de la probabilidad, es decir, son de medida nula.

Se obtiene uno de los teoremas de Poincaré, el "teorema de recurrencia"de Poincaré: el estado futuro de un sistema mecánico aislado se acercará arbitrariamente de su estado inicial salvo de un conjunto excepcional de estados iniciales, de probabilidad nula.

En la discusión de una hipótesis de existencia, Poincaré aludió a la "densidad de trayectorias de moléculas en el espacio de fase", con lo cual introdujo lo que más tarde se llamó "la hipótesis ergódica". Pero, según Dahan Dalmédico, "hubo que esperar los años treinta para tener los dos primeros grandes teoremas de la teoría ergódica, Birkhoff, 1931 y Von Neumann en 1932".

Transformaciones puntuales

Años mas tarde, Poincaré se centró en el estudio del problema restringido de los tres cuerpos y logró lo que se llamó el "último teorema"de Poincaré: si una transformación de una curva sobre sí misma es tal que, primero, retorna los círculos frontera en sentidos opuestos, y segundo, conserva las áreas, entonces, posee dos puntos fijos.

Métodos cuantitativos y asintóticos

Poincaré estableció, en el volumen segundo de "Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste", la divergencia de las series utilizadas por los astrónomos para aproximar las soluciones de las ecuaciones del movimiento secular de los planetas. Este resultado arruina desde luego las esperanzas de Laplace respecto a la garantía de estabilidad para el sistema solar, dado que aproximado no es lo mismo que exacto.

El genio de Poincaré fue reconocido internacionalmente pero no formó escuela por lo menos no antes de terminar la segunda guerra mundial, no tuvo alumnos. Se le rendía pleitesía, se sabía quien era el más grande pero no para impulsar las grandes ideas de Poincaré y cultivarlas. Lo cual solo sucedió en Estados Unidos a partir de la mitad del siglo XX. Actualmente la intensa investigación en sistemas dinámicos comienza por republicar las obras de Poincaré. Fué la NASA la que se interesó en la traducción al inglés de *Nouvelles méthodes de la Mécanique celeste*.

Ahora mencionaremos algunos de los más conocidos científicos que continuaron sobre el camino de los sistemas dinámicos:

Aleksandr Lyapunov. Ruso (1857-1918). Acerca de la teoría de la estabilidad, con énfasis en la evolución cuantitativa de la tasa de divergencia entre soluciones para diferentes condiciones iniciales.
Ivar Otto Bendixon Sueco. (1861-1935). Contribuyó en el estudio cualitativo de las soluciones en vecindades alrededor de puntos de equilibrio. Teorema de Poincaré-Bendixon.
George David Birkhoff. Estadounidense (1884-1944). Acerca de sistemas dinámicos conservativos mediante técnicas topológicas.
Aleksandr Andronov. Ruso (1901-1952). Aportó resultados particulares concernientes a sistemas toscos (coarse sistems) en dos dimensiones.
Andrei N. Kolmogorov. Ruso (1903-1987). El estudio de la estabilidad de sistemas hamiltonianos y mecánica celeste condujo al celebrado teorema KAM.
Lev Pontryagin. Ruso (1908-1988). Junto con Andronov desarrolla la teoría de los llamados sistemas toscos.
Juergen K. Moser. Alemán (1928-1999). Trabajó en estabilidad en los sistemas de Hamilton y ecuaciones diferenciales no lineales. Teorema KAM.
Stephen Smale. Estadounidense (1930-). Publicó un artículo importante “Differentiable Dynamical Systems” fundamentación sobre una original base topológica. Conocido por la herradura de Smale.
Vladímir I. Arnold. Ruso (1937-2010). Conocido por resolver el problema trece de

Hilbert. Contribuyó en la estabilidad de los sistemas Hamiltonianos integrables. Teorema KAM.

Capítulo 2

Distribución temática de los ejercicios del libro

Parte del estudio que se hizo del libro guía, fue el de clasificar los ejercicios de aplicación según los diferentes temas. A continuación se presenta la distribución en tablas de los capítulos que parecieron los más relevantes, matemáticamente hablando, en el estudio realizado.

En esta primera tabla se muestra la distribución de temas que correponde a conceptos básicos iniciales o requisitos para adentrarse en los sistemas dinámicos.

Capítulo 1. Métodos elementales de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias	
Temas	**# de Ejercicios**
Ecuaciones diferenciales exactas	6
Factores integrantes	6
Ecuaciones de variables separables	22
Ecuaciones homogéneas	7
E. diferenciales lineales de primer orden	9
Trayectorias ortogonales	1
Ecuación de Bernoulli	6
Ecuación de Riccati	6

Tabla 2.1: Capítulo 1

Podemos ver que una gran parte de los ejercicios involucran el método de separación de variables, mencionada en ([11], 18).

La siguiente tabla corresponde al capítulo 3 sobre sistemas de ecuaciones diferenciales lineales:

Capítulo 3. Sistemas diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes	
Temas	**# de Ejercicios**
Diagonalización de una matriz en $\mathbb{R}$	4
Diagonalización de una matriz en $\mathbb{C}$	6
Exponencial de una matriz: método directo	2
Exp. de una matriz: forma canónica de Jordan	1
Exp. de una matriz: método de interpolación	4
Exp. de una matriz: método del operador diferencial	1
Sistemas no homogéneos: variación de constantes	8
S. en diferencias finitas: matriz diagonalizable en $\mathbb{R}$	2
S. en diferencias finitas: matriz diagonalizable en $\mathbb{C}$	1
S. en diferencias finitas: matrices no negativas	2
S. en diferencias finitas no homogéneo	2
Espacio de fases: sistemas planos	2

Tabla 2.2: Capítulo 3

Esta tabla muestra la distribución del capítulo 4 que es el caso general de sistemas de ecuaciones lineales:

Capítulo 4. Ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes	
Temas	**# de Ejercicios**
Polinomio característico	9
Variación de constantes	5
Coeficientes indeterminados	5
Caso discreto: en diferencias finitas	5

Tabla 2.3: Capítulo 4

Un tema que no aparece en las tablas anteriores pero que está involucrado en casi todos los anteriores temas es el de valores y vectores propios que es **capital** en la teoría de sistemas dinámicos.

Esta tabla muestra una distribución parecida a los diagramas de pareto, en el sentido de que en un ejercicio o sistema se emplearon varios de los temas o métodos listados, entonces la distribución es dela siguiente manera:

Capítulo 6. Introducción a los sistemas dinámicos	
Temas	**# de Ejercicios**
Integrales primeras	16
Estabilidad en el sentido de Liapunov	5
Criterio de estabilidad por linealización	18
Estabilidad por el método directo de Liapunov	7
Teorema Bendixon	3
Teorema Poincaré-Bendixon	5
Teorema Poincaré	7
Ciclo Límite	5
Sistema Gradiente	1
Sistemas mecánicos conservativos	3

Tabla 2.4: Capítulo 6

La siguiente tabla muestra una clasificación, también por capítulos, de la gran diversidad de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias en los sistemas dinámicos:

Capítulo 1 Métodos elementales de solución de ecuaciones diferenciales ordinales	Fuerzas Velocidad Velocidad de enfriamiento de un cuerpo Reacción química, transformación de substancia a una velocidad determinada Circuitos eléctricos Crecimiento en peso de un pez Curvas de persecución Depósitos de agua Tubería cilíndrica

Capítulo 3 Sistemas diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes	Tres depósitos Tres partidos políticos Acciones de la Bolsa (Cadenas de Markov) Distribución de temperaturas de una barra (Ley de enfriamiento de Newton) Poblacion de insectos (Modelo de Leslie) Modelo económico del precio de un producto de lujo
Capítulo 4 Ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes	Vibraciones de una masa pendiente de un resorte Movimiento libre No Amortiguado Amortiguado Movimiento forzado Amortiguado
Capítulo 5 Sistemas lineales no autónomos	Depósitos con soluciones salinas con diferentes concentraciones
Capítulo 6 Introducción a los sistemas dinámicos	Dos especies de animales en competición Modelo simplificado de la evolución temporal de los efectivos de dos ejércitos en una batalla Dos especies de animales compitiendo por el mismo alimento Propagación de una enfermedad infecciosa Caída libre de un objeto hacia la Tierra Modelo de Kepler del movimiento de un cuerpo celeste
Capítulo 7 Estabilidad de los sistemas dinámicos discretos	Cantidad de droga en el cuerpo de un paciente administrado cada 4 horas Modelo sencillo de comportamiento de precios del mercado

Tabla 2.5: Aplicaciones

Capítulo 3

Conceptos básicos iniciales

Por medio de este capítulo se pretende presentar un marco teórico o conceptos básicos necesarios para adentrarnos en los sistemas dinámicos. Habrá algunas definiciones y métodos elementales de resolución de ecuaciones diferenciales, también nociones y procedimientos básicos sobre valores y vectores propios.

3.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias

3.1.1. Definiciones

Una ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.) es de la forma:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0 \tag{3.1}$$

en donde x es la variable independiente, $y = y(x)$ es la función incógnita y $y', y'', \dots, y^n$ son sus derivadas sucesivas hasta el orden n. Se le llama ordinaria porque la función incógnita depende de una sola variable y no de varias, en tal caso aparecerían derivadas parciales. El orden de la ecuación está dado por la derivada de mayor orden.

Una E.D.O. de orden n también puede escribirse en *forma normal* o *canónica* de la siguiente manera:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Definición 3.1 (solución de una E.D.O.). *Se dice que $y = \varphi(x), x \in (a, b)$ es una solución de la E.D.O. (3.1) si al sustituirla en ella se transforma en una identidad. También es necesario que φ sea derivable hasta el orden n en el intervalo (a, b).*

Una *curva integral* admite la representación gráfica de una solución de una E.D.O. Una ecuación del tipo $G(x, y) = 0$ también puede ser una solución de la ecuación diferencial pues define las soluciones implícitamente.

Solución general de una E.D.O. de orden n. Es una familia n-paramétrica de soluciones de la E.D.O.

Solución particular. Es una solución obtenida a partir de la solución general, asignando valores numéricos a las constantes que figuran en dicha solución general.

Solución singular. Es una solución de la E.D.O. que no está englobada en la solucion general.

Problema de valor inicial

Un problema de *valor inicial* consiste en encontrar una solución a la E.D.O. que satisfaga una condicion inicial. Por ejemplo veamos el siguiente problema de valor inicial:

$$x' = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0$$

la E.D.O. es escalar y t_0 y x_0 son valores reales preestablecidos.

La existencia y unicidad de la solución para el problema de valores iniciales es un resultado que se tiene como un teorema: dado un punto arbitrario en el dominio de la función incógnita se puede asegurar que por este punto pasa una y solo una curva integral de la E.D.O.

3.1.2. Ecuaciones de variables separables

Consideremos una E.D.O. de primer orden de la forma

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \tag{3.2}$$

Se dice que la E.D.O. (3.2) es separable cuando puede transformarse a la siguiente forma

$$M(x) + N(y)y' = 0; \tag{3.3}$$

en este caso la solución general de (3.3) es

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

3.1.3. Ecuaciones diferenciales exactas

Un resultado conocido del Análisis Matemático asegura que si Ω es un subconjunto abierto y simplemente conexo de $\mathbb{R}^2$ existe una función U escalar tal que:

$$\forall(x,y)\in\Omega, \qquad \nabla U(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)), \qquad \text{donde} \qquad \nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

sí y solo sí

$$\forall(x,y)\in\Omega, \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Se dice que la ecuacion (3.2) en donde $y = y(x)$ es la función incógnita, y P, Q son funciones de clase C^1 definidas en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es *exacta* si existe una función escalar $U : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $(x,y) \in \Omega$ se tiene que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$$

A la función U se le llama función potencial de la ecuación diferencial.

Teorema 3.1. ([11], 16). *La solución general de la ecuación (3.2) es*

$$U(x,y) = C$$

siendo U la función potencial y C una constante arbitraria.

Es decir, si se verifica que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ entonces se asegura la existencia de $U(x,y)$. Una vez se tenga la existencia de U se puede proceder al cálculo de la solución general, una forma sencilla de encontrarla es la siguiente:

Como $Q = \partial U/\partial y$, se obtiene

$$U(x,y) = \int Q(x,y)dy + h(x);$$

la función $h(x)$ se determina con la condición

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$$

Factor integrante

En muchas ocasiones la E.D.O. (3.2) resulta no ser exacta; una manera de proceder es buscar una función $\varphi(x,y)$ definida en Ω tal que

$$\varphi P + \varphi Q y' = 0$$

sea exacta. A tal función la llamamos el factor intgrante de (3.2). Esta nueva función debe hacer que se cumpla la condición

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varphi P) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi Q)$$

que resulta en la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\varphi\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Si conocemos condiciones sobre φ es posible solucionar esta ecuación.

Por ejemplo, si se sabe que $\varphi = \varphi(y)$, la ecuación anterior se convierte en una E.D.O.

$$\varphi(y)\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + P(x,y)\varphi'(y) = \varphi(y)\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

escrita de otra manera

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \frac{(\partial Q/\partial x)(x,y) - (\partial P/\partial y)(x,y)}{P(x,y)}$$

entonces el factor integrante será

$$\varphi(y) = e^{\int w(y)dy}, \qquad \text{donde} \qquad w(y) = \frac{(\partial Q/\partial x) - (\partial P/\partial y)}{P}.$$

Si sabemos que $\varphi = \varphi(x)$ entonces se obtiene un resultado análogo.

3.1.4. Ecuaciones homogéneas

Una función es homogénea cuando cumple la siguiente propiedad

$$f(tx,ty) = t^{\alpha} f(x,y), \qquad \text{para} \quad \text{algún} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

en este caso se dice que la función es de orden α.

Consideremos nuevamente la E.D.O. (3.2). Diremos que es homogénea cuando las funciones P y Q ambas son homogéneas del mismo orden.

Entoces la ecuación (3.2) puede escribirse de la siguiente forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

en este caso podemos realizar la siguiente sustitución

$$y = ux \qquad \Rightarrow \qquad y' = u'x + u;$$

al reemplazarla en la ecuación se obtiene una de variables separables y la solución general es

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

también puede darse el caso en el que la ecuación (3.2) puede escribirse en la siguiente forma

$$x' = g\left(\frac{x}{y}\right)$$

así haremos la siguiente sustitución

$$x = vy \qquad \Rightarrow \qquad x' = v'y + v$$

y se obtiene un resultado similar.

Cuando la ecuación (3.2) no es homogénea pero tiene la siguiente forma

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{3.4}$$

es fácilmente reducible a una de ellas.

Llamemos l_1 a la recta de ecuación $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ y l_2 la de ecuación $a_2x+b_2y+c_2 = 0$. Gráficamente se distinguen tres casos de posiciones relativas entre ellas dos:

1. Las rectas l_1 y l_2 se cortan en un punto.

   Es cuando $(a_1/a_2) \neq (b_1/b_2)$, se puede hacer una traslación del origen de coordenadas al punto donde se cortan las dos rectas asi

   $$x = X + \alpha, \qquad y = Y + \beta$$

   donde (α, β) es el punto de corte de las rectas. Esta traslación transforma la ecuación diferencial (3.4) en

   $$Y' = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1(Y/X)}{a_2 + b_2(Y/X)}\right)$$

   que resulta ser homogénea.

2. Las rectas l_1 y l_2 son paralelas pero no coinciden.

   Es cuando $(a_1/a_2) = (b_1/b_2) \neq (c_1/c_2) = \lambda$. Se realiza el siguiente cambio de función

   $$u = a_2x + b_2y \qquad \Rightarrow \qquad u' = a_2 + b_2y'$$

   entonces la ecuacion (3.4) se reduce a una de variables separables

   $$\frac{u' - a_2}{b_2} = f\left(\frac{\lambda u + c_1}{u + c_2}\right).$$

3. Las rectas l_1 y l_2 coinciden.

   Es cuando $(a_1/a_2) = (b_1/b_2) = (c_1/c_2) = \lambda$, por lo tanto, la ecuación (3.4) se reduce a
$$y' = f(\lambda) \qquad \Rightarrow \qquad y = f(\lambda)x + C.$$

3.1.5. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Se dice que una E.D.O. es lineal y de primer orden en su forma estandar cuando tiene la siguiente forma
$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{3.5}$$
Cuando la ecuación (3.5) tiene el termino Q nulo se dice que es la *ecuación homogénea asociada*.

Se tiene un famoso teorema para la existencia y unicidad de esta ecuación

Teorema 3.2. ([11], 20). *Supongamos que P y Q son funciones continuas en un intervalo abierto I. Elijamos cualquier punto a en I y sea b un número real cualquiera. Entonces existe una y sólo una función $y = f(x)$ que satisface la ecuación diferencial (3.5) y la condición inicial $f(a) = b$. Esa función viene dada por la fórmula*
$$f(x) = be^{A(x)} + e^{A(x)} \int_a^x Q(t)dt \qquad \text{donde} \qquad A(x) = -\int_a^x P(t)dt$$

3.1.6. Ecuacion de Bernoulli

Una variación de la ecuación (3.5) es
$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \tag{3.6}$$
si $n = 0$ la ecuación es lineal y si $n = 1$ se vuelve una ecuación lineal homogénea, pero en los casos en que $n \in \mathbb{R}$ y $n \neq 0, 1$ se puede realizar el siguiente cambio de función incógnita
$$u = y^{1-n} \qquad \Rightarrow u' = (1-n)y^{-n}y'$$
que produce
$$\frac{1}{1-n}u' + P(x)u = Q(x)$$
que es una ecuación lineal de primer orden.

3.1.7. Ecuaciones de Riccati

Una ecuación de Riccati es de la forma

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x); \tag{3.7}$$

esta ecuación se puede resolver usando dos sustituciones consecutivas, la primera sustitución de función incógnita es

$$y = y_p + z \qquad \Rightarrow \qquad y' = y_p' + z'$$

donde y_p es una solución particular de (3.7); esta sustitución resulta en la siguiente ecuación

$$z' + [P(x) + 2Q(x)y_p]z = -Q(x)z_2$$

que tiene la forma de una de Bernoulli, y ahora hacemos la segunda sustitución que es

$$u = \frac{1}{z} \qquad \Rightarrow \qquad u' = -\frac{z'}{z_2}$$

para finalmente obtener la siguiente forma lineal de primer orden

$$-u' + [P(x) + 2Q(x)y_p]u = -Q(x)$$

Si se hubiera hecho la sustitución

$$y = y_p + \frac{1}{u}$$

inicialmente se hubiera obtenido la forma lineal de primer orden con una sola sustitución.

3.2. Valores y vectores propios

En esta sección se hará un breve resumen sobre valores y vectores propios con el fin de tener una base teórica en diagonalización de matrices y por consiguiente en el cálculo de la exponencial de una matriz. En los capítulos 4 y 5 esto será un conocimiento importante en el desarrollo de la teoría de los sistemas dinámicos lineales.

Definición 3.2. *Sea A una matriz $n \times n$. Si u es un vector y λ un escalar tales que*

$$u \neq 0 \qquad y \qquad Au = \lambda u$$

se dice que λ es un valor propio de A y que u es un vector propio asociado a λ.

Podemos notar que el vector propio u es un vector no nulo que no cambia de dirección al aplicarle A como operador en $\mathbb{R}^n$.

Un escalar λ es un valor propio de A si y sólo si el problema homogéneo

$$(A - \lambda I)u = 0$$

tiene soluciones diferentes a la trivial, es decir, si y sólo si

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Esta es una ecuación polinómica de grado n en λ, es la llamada *ecuación característica* de A.

A $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ se le llama el *polinomio característico* de A. Encontrar los valores propios de la matriz A se reduce a encontrar las raíces de este polinomio. Por tener coeficientes reales los valores propios son, o bien reales, o bien pares de complejos conjugados.

3.2.1. Diagonalización de matrices

Diagonalización en $\mathbb{R}$

Se dice que una matriz A $n \times n$ es diagonalizable cuando existe una matriz P tal que

$$P^{-1}AP$$

sea una matriz diagonal.

Esta propiedad depende de la cantidad de valores propios que tenga la matriz A.

Supongamos primero que todos los valores propios de A son reales y distintos, así tenemos el siguiente resultado

Teorema 3.3. ([8], 84). *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ son valores propios reales y distintos de A con vectores propios asociados $u_1, \ldots, u_l$, entonces los vectores propios u_j son linealmente independientes.*

Se tiene, por lo tanto, un resultado importante como consecuencia del teorema 3.3

Corolario 3.1. ([8], 85). *Si A es una matrix $n \times n$ con valores propios $\lambda_j (j = 1, \dots, n)$ reales, distintos y conn vectores asociados u_j, entonces existe una matriz T tal que*

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{donde} \qquad T = (u_1 \mid \dots \mid u_n)$$

Es decir, si una matriz A $n \times n$ tiene n valores propios reales y diferentes entonces es diagonalizable.

Diagonalización en $\mathbb{C}$

Supongamos ahora que la matriz A tiene unicamente valores propios complejos diferentes. Anteriormente se veía que si hay valores propios complejos sus conjugados también son valores propios.

Si $\alpha + i\beta$ es un valor propio complejo de una matriz A, entonces se cumple que

$$Av = (\alpha + i\beta)v,$$

donde v es el vector propio asociado al valor propio $\alpha + i\beta$ cuyas entradas son complejas con la forma

$$v = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix}$$

Sea $\overline{v}$ el vector propio asociado al valor propio $\overline{\alpha + i\beta}$ con la forma

$$\overline{v} = \begin{pmatrix} x_1 - iy_1 \\ \vdots \\ x_n - iy_n \end{pmatrix}$$

Los vectores v y $\overline{v}$ son linealmente independientes. Los resultados de la sección anterior en $\mathbb{R}$ también se tienen para $\mathbb{C}$, por lo tanto, supongamos que A es una matriz $2n \times 2n$ con valores propios complejos distintos $\alpha_j + i\beta_j$ con $j = 1, \dots, n$ y vectores propios v_j y $\overline{v_j}$ entonces existe una matriz T tal que

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\beta_1 & & & & 0 \\ & \alpha_1 - i\beta_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \alpha_n + i\beta_n & \\ 0 & & & & \alpha_n - i\beta_n \end{pmatrix}, \ T = (v_1 \mid \overline{v_1} \mid \dots \mid v_n \mid \overline{v_n})$$

Combinando los resultados de las dos secciones previas nosotros tenemos

Teorema 3.4. ([8], 89). *Suponga que una matriz A $n \times n$ tiene valores propios distintos. Entonces existe una matriz T tal que*

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_k & & & & & \\ & & & \alpha_1 + i\beta_1 & & & & \\ & & & & \alpha_1 - i\beta_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \alpha_l + i\beta_l & \\ 0 & & & & & & & \alpha_l - i\beta_l \end{pmatrix}$$

donde λ_j con $j = 1, \ldots, k$ y $\alpha_p \pm i\beta_p$ con $p = 1, \ldots, l$ son los distintos valores propios reales y complejos respectivamente que podría tener la matriz A y con $n = k + 2l$.

No diagonalizable: forma canónica de Jordan

Una matriz A no es diagonalizable cuando no es posible encontrar una matriz T invertible tal que $T^{-1}AT$ sea diagonal.

Cuando la matriz A resulta no ser diagonalizable es posible encontrar una matriz T cuyas columnas sean vectores linealmente independientes tal que la matriz $T^{-1}AT$ sea aproximadamente diagonalizable.

Supongamos inicialmente que la matriz A tiene valores propios repetidos. Entonces se tiene un resultado más general que dice lo siguiente

Teorema 3.5. ([8], 95). *Sea A una matriz $n \times n$. Entonces existe una matriz T tal que*

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix}$$

donde cada J_j es una matriz cuadrada de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

A cada bloque J_k se le llama *celda o bloque de Jordan*. La matriz formada por estos bloques situados a lo largo de la diagonal y en los demás lugares ceros es la *forma canónica de Jordan* de la matriz A.

El siguiente resultado para matrices 3×3 nos ayudará a entender cómo es la forma canónica de Jordan o cómo son sus bloques dependiendo de la multiplicidad geométrica (m.g.) del valor propio repetido.

Teorema 3.6. ([18], 96). *Sea A una matriz 3×3 cuyo único valor propio es λ de multiplicidad algebraica 3. Entonces podemos encontrar una matriz T tal que $T^{-1}AT$ asume una de las siguientes tres formas*

$$\text{(i)} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{(iii)} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Para el primer caso la m.g. es tres, para el caso dos la m.g. es dos y para el caso tres la m.g. es uno. Es claro que para el primer caso aún cuando el valor propio sea repetido la matriz resulta ser diagonalizable por que la multiplicidad geométrica resulta igual a la algebraica.

Ilustraremos a continuación un ejemplo de una matriz 4×4.

Ejemplo 3.1. *Sea la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica de A es

$$(2-\lambda)^2((2-\lambda)^2+1) = 0$$

así los valores propios son $2 \pm i$ y 2 con multiplicidad 2.
Resolviendo la ecuación $(A-(2+i)I)u = 0$ se tiene que el vector propio es $u_1 = (0,-i,0,1)$, también su conjugado $\overline{u_2} = (0,i,0,1)$ es un vector propio asociado al valor propio $2-i$.
Ahora resolviendo la ecuación $(A-2I)u = 0$ se tiene que el único vector propio asociado es $u_3 = (1,0,0,0)$, es decir que la multiplicidad geométrica es uno, diferente a la multiplicidad algebraica que es dos. Entonces resolvemos $(A-2I)u = u_3$ y encontramos $u_4 = (0,0,1,0)$.

Ahora formamos la matriz T con los vectores propios encontrados así

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Rightarrow \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2i & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2i & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.2.2. Exponencial de una matriz

La función exponencial es posible expresarla, gracias al cálculo, como una serie infinita así

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Sabemos que esta serie converge para cada $x \in \mathbb{R}$. Ahora nos preguntamos si es posible cambiar la variable x por una matriz; como ya se tiene suma, potencia y multiplicación por un escalar de matrices entonces podemos dar la siguiente definición

Definición 3.3. *Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Definimos la exponencial de la matriz A como una matriz dada por*

$$e^A \equiv I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$$

Proposición 3.1. ([18], 125). *La serie definida e^A converge para cada A.*

Demostración. Sea $a_{ij}(k)$ para denotar la entrada ij de A^k. Sea $a = \max |a_{ij}|$. Entonces

$$|a_{ij}(2)| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj} \right| \leq na^2$$

$$|a_{ij}(3)| = \left| \sum_{k,l=1}^{n} a_{ik} a_{kl} a_{lj} \right| \leq n^2 a^3$$

$$\vdots$$

$$|a_{ij}(k)| \leq n^{k-1} a^k.$$

Entonces tenemos una acotación para las entradas ij de la matriz exponencial

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{ij}(k)}{k!}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_{ij}(k)|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^{k-1}a^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(na)^k}{k!} \leq e^{na}$$

y así la serie converge absolutamente por la prueba de comparación. □

Ya tenemos un método para encontrar la *exponencial de una matriz* y es aplicando directamente su definición por la serie infinita. Veamos un par de ejemplos de como hacerlo.

Ejemplo 3.2.

$$e^{tI} = I + tI + \frac{t^2I^2}{2!} + \frac{t^3I^3}{3!} + \cdots = e^tI.$$

Ejemplo 3.3.

$$e^{t\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & t\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

y esto se tiene pues

$$\begin{pmatrix}0 & t\\ 0 & 0\end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad \text{para} \quad m \geq 2.$$

Ejemplo 3.4.

$$e^{t\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}.$$

Otras propiedades que cumple la matriz e^A son:

Proposición 3.2. ([9], 88). *Sean A, B y T matrices $n \times n$. Entonces:*

(1) ***Si*** $B = TAT^{-1}$***, entonces*** $e^B = Te^AT^{-1}$.

(2) ***Si*** $AB = BA$***, entonces*** $e^{A+B} = e^A e^B$.

(3) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

(4) $\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = Ae^{tA} = e^{tA}A$.

Solo demostraremos el numeral (1) y (4)

Demostración (1).

$$\begin{aligned} e^B = e^{T^{-1}AT} &= I + T^{-1}AT + \frac{(T^{-1}AT)^2}{2!} + \frac{(T^{-1}AT)^3}{3!} + \cdots \\ &= I + T^{-1}AT + \frac{T^{-1}A^2T}{2!} + \frac{T^{-1}A^3T}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

esto se tiene por

$$(T^{-1}AT)^m = (T^{-1}A\underbrace{T)(T^{-1}}_{I}AT)\cdots(T^{-1}AT) = T^{-1}A^mT$$

Y ahora se tiene que

$$e^B = T^{-1}\left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots\right)T = T^{-1}e^AT.$$

$\square$

Demostración (4). Por la definición de derivada

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{tA} &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{tA}e^{hA} - e^{tA}}{h} \\ &= e^{tA}\lim_{h\to 0}\frac{e^{hA} - I}{h} \end{aligned}$$

y como $e^{hA} - I = hA + \frac{1}{2}(hA)^2 + \cdots$, entonces $\lim_{h\to 0}(e^{hA} - I)/h = A$. Para cualquier A cuadrada, las matrices A y e^A conmutan, por lo tanto

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

$\square$

Ejemplo 3.5. *Si A es una matriz diagonal con entradas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ con $\lambda_i \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, entonces e^{tA} es también diagonal, con entradas $e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_n}$ a lo largo de la diagonal. Si*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$$

El siguiente resultado es una consecuencia del ejemplo (3.5) junto con la propiedad (1) de la matriz exponencial.

Teorema 3.7. ([9], 90). *Sea A una matriz $n \times n$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sus valores propios reales o complejos y distintos, sean $u_1, \ldots, u_n$ los vectores propios asociados. Sea P la matriz cuyas columnas son los vectores propios v_i. Entonces la exponencial e^{tA} puede ser calculada como sigue:*

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En el caso donde la matriz no sea diagonalizable, por el teorema (3.5) se sabe que puede volverse casi diagonal, es decir, a la forma canónica de Jordan. Calculemos la exponencial de una celda de Jordan de orden tres ([11], 100):

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N \qquad \text{con} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz N cumple que $N^3 = 0$, entonces al calcular la exponencial de tJ tenemos que

$$\begin{aligned} e^{tJ} &= e^{\lambda t I + tN} = e^{\lambda t I} e^{tN} = e^{\lambda t} e^{tN} \\ &= e^{\lambda t} \left(I + tN + \frac{t^2}{2!} N^2 \right). \end{aligned}$$

De otra forma:

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Si la celda de Jordan J es de orden p, su exponencial es:

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{p-2}}{(p-2)!}e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{p-3}}{(p-3)!}e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Ahora, si la matriz A está en su forma canónica de Jordan, va a estar formada por varias celdas o bloques de Jordan,por lo tanto su exponencial es

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & J_k \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{tJ_k} \end{pmatrix}.$$

Método de interpolación

Este es un método para calcular la exponencial de una matriz aplicando un teorema general sobre funciones de matrices. Su enunciado es el siguiente:

Teorema 3.8. ([11], 101). *Sean dos funciones complejas de variable compleja, holomorfas en $B(0;R) = z \in \mathbb{C} : |z| < R$. Sea A una matriz real o compleja, cuadrada de orden $n \times n$, cuyos valores propios λ_i pertenecen a $B(0;R)$. Supongamos que la multiplicidad de λ_i es m_i $(i = 1, \ldots, p)$, siendo $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$.*
Se verifica que:

$$f(\lambda_i) = g(\lambda_i) \quad , \quad f'(\lambda_i) = g'(\lambda_i) \quad , \; \ldots \; , \quad f^{(m_i-1)}(\lambda_i) = g^{(m_i-1)}(\lambda_i) \qquad (i = 1, \cdots, p)$$

entonces

$$f(A) = g(A)$$

Para encontrar la exponencial de una matriz apliquemos este resultado a la función $f(z) = e^{tz}$ para cada $t \in \mathbb{R}$ y se determinará un polinomio $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1}z^{n-1}$ que satisfaga las condiciones:

$$e^{t\lambda_i} = g(\lambda_i) \quad , \quad te^{t\lambda_i} = g'(\lambda_i) \quad , \; \ldots \; , \quad t^{m_i-1}e^{t\lambda_i} = g^{m_i-1}(\lambda_i) \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

La exponencial de la matriz es:

$$e^{tA} = g(A).$$

Veamos un ejemplo de como aplicar este método.

Ejemplo 3.6. *Sea la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

En primer lugar calculemos los valores propios de A*:*

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 6 \\ 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(10-\lambda) = 0.$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 3$*,* $\lambda_2 = 10$*. Apliquemos el método utilizando las funciones* $f(z) = e^{tz}$ *y* $g(z) = az + b$ ***así:***

$$\begin{aligned} g(3) = 3a + b = f(3) = e^{3t} \\ g(10) = 10a + b = f(10) = e^{10t} \end{aligned}$$

Que es un sistema de ecuaciones para las constantes a *y* b*; resolviendo se obtiene:*

$$a = \frac{1}{7}(e^{10t} - e^{3t}) \quad , \quad b = \frac{1}{7}(10e^{3t} - 3e^{10t})$$

y, por lo tanto,

$$e^{tA} = aA + bI = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4e^{10t} + 3e^{3t} & 6(e^{10t} - e^{3t}) \\ 2(e^{10t} - e^{3t}) & 3e^{10t} + 4e^{3t} \end{pmatrix}$$

Otro método para calcular la matriz exponencial

Este es otro método para calcular la exponencial de una matriz ([11], 166) que utiliza resultados de la sección (3.4) de E.D.O. lineales con coeficientes constantes.

Utilizaremos la notación $D = d/dt$ de modo que, si

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^k,$$

entonces denotamos

$$p(D)x(t) = a_0 x(t) + a_1 \frac{dx}{dt}(t) + \cdots + a_n \frac{d^k x}{dt^k}(t).$$

Derivando sucesivamente la identidad $De^{tA} = Ae^{tA}$, se obtiene

$$\begin{aligned} D^2 e^{tA} &= A^2 e^{tA} \\ &\cdots \\ D^k e^{tA} &= A^k e^{tA} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$p(D)e^{tA} = p(A)e^{tA}$$

Supongamos ahora que $p(\lambda)$ es un polinomio anulador de la matriz A, es decir, $p(A) = 0$. Como es sabido, son los polinomios anuladores de una matriz su polinomio mínimo y su polinomio característico. La igualdad anterior, aplicada a este caso, implica que

$$p(D)e^{tA} = 0$$

y, por lo tanto, cada elemento $y(t)$ de la matriz es solución de la E.D.O. lineal homogénea $p(D)y(t) = 0$.

Este resultado proporciona un método sencillo para determinar la exponencial e^{tA}.

Supongamos que

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

es el polinomio mínimo de A. Entonces, todo elemento de la matriz e^{tA} es solución de una E.D.O. lineal homogénea con coeficientes constantes que tiene como polinomio característico $p(\lambda)$, y cuya solución general conocemos:

$$\begin{aligned} y(t) = C_1 e^{t\lambda_1} + \cdots + C_{m_1} t^{m_1-1} e^{t\lambda_1} + B_1 e^{t\lambda_2} + \cdots + B_{m_2} t^{m_2-1} e^{t\lambda_2} \\ + \cdots + F_1 e^{t\lambda_k} + \cdots + F_{m_k} t^{m_k-1} e^{t\lambda_k} \end{aligned}$$

donde la multiplicidad de λ_i es m_i $(i = 1, \ldots, k)$. Por lo tanto, la matriz exponencial es de la forma

$$\begin{aligned} e^{tA} = e^{t\lambda_1} E_1 + \cdots + t^{m_1-1} e^{t\lambda_1} E_{m_1} + e^{t\lambda_2} F_1 + \cdots + t^{m_2-1} e^{t\lambda_2} F_{m_2} \\ + \cdots + e^{t\lambda_k} H_1 + \cdots + t^{m_k-1} e^{t\lambda_k} H_{m_k}, \end{aligned}$$

donde $E, F, \ldots, H$ son matrices reales cuadradas constantes del mismo orden que la matriz A, que deben determinarse. Para esto derivamos la ecuación anterior hasta obtener p ecuaciones con p matrices incógnitas y particularizar en $t = 0$. Se podría aplicar el método usando el polinomio característico en lugar del polinomio mínimo y daría el mismo resultado. Veamos un ejemplo del método.

Ejemplo 3.7. *Sea la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz tiene un único valor propio $\lambda = 1$ con multiplicidad tres. Como $(A-I)^2 \neq 0$, el polinomio mínimo y el característico coinciden y la exponencial de la matriz A tiene la forma

$$e^{tA} = Ee^t + Fte^t + Gt^2e^t$$

Derivamos dos veces para obtener tres ecuaciones

$$\begin{aligned} Ae^{tA} &= Ee^t + Fte^t + Fe^t + Gt^2e^t + 2Gte^t, \\ A^2e^{tA} &= Ee^t + Fte^t + Fe^t + Fe^t + Gt^2e^t + 2Gte^t + 2Gte^2 + 2Ge^t; \end{aligned}$$

las particularizamos en $t = 0$ y resulta el sistema

$$I = E \quad , \quad A = E + F \quad , \quad A^2 = E + 2F + 2G$$

cuya solución es

$$E = I \quad , \quad F = A - I \quad , \quad G = A^2 - 2A + I.$$

Finalmente calculamos la exponencial

$$e^{tA} = Ie^t + (A-I)te^t + \frac{1}{2}(A^2 - 2A + I)t^2e^t = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 \\ 2t + \frac{t^2}{2} & -t & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden es una colección de n ecuaciones diferenciales interrelacionadas de la forma

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{aligned}$$

Para simplificar usaremos la notación

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

y en forma matricial

$$X' = A(t)X + B(t), \tag{3.8}$$

donde A es una matriz $n \times n$ y B es un vector, ambos tienen en sus entradas funciones de t.

Si $B(t) = 0$, el sistema de ecuaciones lineales es llamado *homogéneo*, si $B(t) \neq 0$ se llama *no homogéneo*. Al sistema $X' = A(t)X$ se le llama sistema lineal *homogéneo asociado*. Un sistema de ecuaciones es llamado *autónomo* si la matriz A no depende de t.

Enunciaremos dos resultados importantes sobre los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Teorema 3.9 (Principio de linealidad)**.** ([9], 74)**.** *Si $u_1(t)$ y $u_2(t)$ son dos soluciones del sistema diferencial lineal homogéneo $X' = A(t)X$, entonces cualquier combinación lineal de estas soluciones*

$$u(t) = C_1u_1(t) + C_2u_2(t),$$

para cualquier par de números C_1 y C_2, es también una solución.

Teorema 3.10 (Solución general del sistema no homogéneo)**.** ([9], 75)**.** *Si $u_p(t)$ es una solución particular de un sistema diferencial lineal no homogéneo*

$$X' = A(t)X + B(t)$$

entonces un vector $u(t)$ es una solución del sistema sí y solo si $u(t)$ puede ser escrita

$$u(t) = u_p(t) + u_h(t)$$

donde $u_h(t)$ es la solución general del sistema homogéneo asociado.

3.3.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes

Son sistemas de la forma

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1(t)\\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2(t)\\
&\vdots\\
x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n(t)
\end{aligned}$$

en donde cada coeficiente $a_{ij}(i,j=1,\dots,n)$ es un número real y las funciones incógnita $x_i(t)(i=1,\dots,n)$ son funciones reales de variable real. En forma matricial el sistema se escribe:

$$X' = AX + B(t) \tag{3.9}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Sistemas homogéneos

Primero veamos el caso en el que la matriz A sea diagonalizable ([11], 96). Consideremos el sistema

$$X' = AX \quad , \quad X(0) = X_0 \tag{3.10}$$

donde la condición inicial X_0 es un vector de $\mathbb{R}^n$. Como A es diagonalizable entonces existe la matriz P tal que

$$A = PA^*P^{-1}$$

con

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad , \quad P = (u_1|u_2|\cdots|u_n)$$

donde $\lambda_i(i=1,\dots,n)$ son los valores propios de la matriz A, y $u_i(i=1,\dots,n)$ son los vectores propios asociados.

Realicemos el siguiente cambio de función incógnita en (3.10)

$$X = PY$$

resulta

$$Y' = A^*Y \quad , \quad Y(0) = Y_0 = P^{-1}X_0$$

Este es un sistema sencillo de resolver pues cada y_i de Y satisface la E.D. escalar

$$y_i' = \lambda_i y_i$$

y su solución es

$$Y = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} Y_0.$$

Regresando a la función original obtenemos la solución del problema de valores iniciales

$$X = PY = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} Y_0 = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P^{-1} X_0.$$

Si la condición inicial es arbitraria entonces obtendremos la solución general del sistema

$$X(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix};$$

finalmente en la forma

$$X(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + k_2 e^{\lambda_2 t} u_2 + \cdots + k_n e^{\lambda_n t} u_n.$$

A continuación enunciaremos un teorema mayor sobre la solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales

Teorema 3.11. ([11], 99). *Sea una matriz real $n \times n$. El problema de valor inicial o de Cauchy*

$$X' = AX \quad , \quad X(0) = X_0 \quad \text{con} \quad X_0 \in \mathbb{R}^n$$

tiene siempre la solución única

$$X(t) = e^{tA} X_0 \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

El teorema anterior nos dice que solucionar un sistema de ecuaciones se reduce a encontrar la exponencial de la matriz A asociada al sistema. Podemos usar cualquiera de los métodos expuestos en la sección 3.2.2.

Sistemas no homogéneos

El teorema (3.10) nos dice que para resolver el sistema (3.9) es necesario encontrar una solución particular del sistema y sumarla a la solución general del sistema homogéneo asociado.

Es posible encontrar una solución particular por medio del método de *coeficientes indeterminados*; sin embargo, existe una fórmula para atacar este problema y es la *fórmula de variación de las constantes*, esta es la que ilustraremos a continuación ([9], 102).

La idea es resolver el problema de Cauchy

$$X' = AX + B(t) \quad , \quad X(0) = X_0$$

Si $A = 0$, el problema $X' = B(t)$, $X(0) = X_0$, tiene la solución

$$X(t) = X_0 + \int_0^t B(s)ds.$$

El caso general puede reducirse al anterior efectuando el cambio de función incógnita

$$X(t) = e^{tA}Y(t) \quad \Longrightarrow Y'(t) = e^{-tA}B(t) \quad , \quad Y(0) = X_0.$$

Por lo tanto se tiene que

$$Y(t) = X_0 + \int_0^t e^{-sA}B(s)ds$$

y la solución del problema de Cauchy no homogéneo viene dada por la siguiente *fórmula de variación de las constantes*

$$X(t) = e^{tA}\left[X_0 + \int_0^t e^{-sA}B(s)ds\right].$$

3.4. Ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes constantes

Son E.D.O. de la forma

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x' + a_0x = b(t) \tag{3.11}$$

donde los coeficientes $a_i(0 \leq i \leq n-1)$ son números reales, $b(t)$ es una función real y $x = x(t)$ es la función incógnita.

El problema de valores iniciales o de Cauchy consiste en encontrar una solución que satisfaga las condiciones iniciales

$$x(t_0) = x_0 \quad , \quad x'(t_0) = x_1 \quad , \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

donde cada $x_i(0 \leq i \leq n-1)$ y t_0 son constantes reales. De ahora en adelante y sin perdida de generalidad elegiremos siempre $t_0 = 0$

3.4.1. La ecuación diferencial homogénea

Consideremos inicialmente la ecuación homogénea, es decir, cuando $b(t) = 0$.

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x' + a_0x = 0 \tag{3.12}$$

Definimos las siguientes funciones incógnitas

$$x_1 = x \quad , \quad x_2 = x' \quad , \quad x_3 = x'' \quad , \quad \ldots \quad , \quad x_n = x^{n-1};$$

esto hace que la ecuación (3.12) se transforme en un sistema de n ecuaciones que tiene una forma matricial así

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ \vdots \\ x_{n-1}' \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

La ecuación (3.12) es *equivalente* al sistema (3.13) en el siguiente sentido:

Si $x = x(t)$ es solución de (3.12) entonces el vector $(x(t), x'(t), \ldots, x^{n-1}(t))^T$ es solución de (3.13) y recíprocamente si $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T$ es solución de (3.13) entonces $x_1(t)$ es solución de (3.12).

Se le llama a

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

el *polinomio característico* asociado a la E.D.O. (3.12), y a $P(\lambda) = 0$ la *ecuación característica*.

Lema 3.1. ([11], 162). *Las raíces del polinomio característico son los valores propios de la matriz A asociada al sistema diferencial equivalente.*

Por lo tanto, una forma de encontrar la solución de la ecuación (3.12) es obtener la solución del sistema diferencial equivalente, que se estudió en la sección 3.3.

Solución de la E.D.O. en el caso general

Teorema 3.12. ([11], 163). *El conjunto de las soluciones reales de la E.D.O. (3.12) es un espacio vectorial real de dimensión n.*

De este teorema resulta que la solución general de la E.D.O. (3.12) es combinación lineal de n soluciones linealmente independientes. Esta base del espacio de soliciones puede conseguirse a partir de las raíces de la ecuación característica de la siguiente forma:

(a) Si λ es una raíz real simple de la ecuación característica, se tiene la solución

$$e^{\lambda t}.$$

(b) Si λ es una raíz real de multiplicidad m de la ecuación característica, se tienen las m soluciones linealmente independientes

$$e^{\lambda t} \quad , \quad te^{\lambda t} \quad , \quad \dots \quad , \quad t^{m-1}e^{\lambda t}.$$

(c) Si $\alpha \pm i\beta$ son raíces complejas conjugadas simples de la ecuación característica, se tiene las soluciones

$$e^{\alpha t}\cos\beta t \quad , \quad e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

(d) Si $\alpha \pm i\beta$ son raíces complejas conjugadas de multiplicidad m de la ecuación característica, se tiene las soluciones linealmente independientes

$$\begin{array}{ccccccc} e^{\alpha t}\cos\beta t & , & te^{\alpha t}\cos\beta t & , & \dots & , & t^{m-1}e^{\alpha t}\cos\beta t \\ e^{\alpha t}\sin\beta t & , & te^{\alpha t}\sin\beta t & , & \dots & , & t^{m-1}e^{\alpha t}\sin\beta t \end{array}$$

3.4.2. La ecuación diferencial no homogénea

Consideremos ahora la ecuación no homogénea, es decir, de la forma (3.11) donde $b(t) \neq 0$ es el término independiente.

La solución general de esta ecuación diferencial es la suma de la *solución general de la ecuación homogénea asociada* con la *solución particular de la ecuación no homogénea*. Encontrar una solución particular no es algo sencillo, pero hay métodos para encontrarla, por ejemplo, el método de variación de parámetros y el método de los coeficientes indeterminados.

Capítulo 4

Conceptos básicos de la teoría de los Sistemas Dinámicos

En este capítulo pretendemos realizar una aproximación a lo que hoy se conoce como *sistemas dinámicos* pasando por *sistemas lineales planos* y una clasificación importante, y un acercamiento a los *sistemas no lineales* por medio de un estudio *cualitativo* mencionando importantes teoremas.

Un sistema dinámico es un proceso que evoluciona con el tiempo, es una forma de describir el paso del tiempo de un proceso en el futuro o en el pasado. Los procesos se pueden clasificar como *deterministas* y *semideterministas*; determinista es cuando su estado presente permite predecir sus futuros estados y también pasados, semideterminista es cuando su estado presente permite averiguar su evolución futura pero no permite el pasado. También hay procesos *finitos* que son los que se necesitan un número finito de variables para describir completamente su estado. Un proceso se dice *diferenciable* cuando la ley que enmarca su evolución viene dada por una función diferenciable

Un modelo matemático adecuado para describir la evolución en el tiempo de un cierto proceso es el *flujo* o *sistema dinámico*. Las ecuaciones diferenciales son modelos matemáticos adecuados para la descripción de procesos que cambian con el tiempo. El espacio de fases de un proceso es la colección de todos los estados posibles del sistema, por lo tanto, los espacios de fases que consideraremos serán siempre subconjuntos abiertos $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$.

4.1. Definiciones

Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y no vacío. Un *grupo uniparamétrico de transformaciones* en $\mathcal{U}$ es una familia de aplicaciones $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ T(t) : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}.$$

tal que satisface las siguientes condiciones

(a) $T(0)$ es la identidad

(b) $\forall t, s \in \mathbb{R} \quad , \quad T(t)T(s) = T(t+s)$

Un *grupo uniparamétrico de difeomorfismos* se llama al par

$$(\mathcal{U}\ ,\ \{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}})$$

como se definió anteriormente y además cumple que la función de $n+1$ variables definida por

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times \mathcal{U} &\longrightarrow \mathcal{U} \\ (t, X) &\longmapsto \Phi(t, X) = T(t)X \end{aligned}$$

es una función de clase C^1 en todo su dominio.

Por lo tanto damos la definición formal de sistema dinámico:

Definición 4.1 (SISTEMA DINÁMICO)**.** *Un sistema dinámico o flujo se define como un grupo uniparamétrico de difeomorfismos.*

Nótese que la definición anterior implica que tanto $T(t)$ como $T^{-1}(t)$ son funciones de clase C^1. Si elegimos un estado inicial $X_0 \in \mathcal{U}$ en el espacio de fases, $T(t)X_0$ es el estado correspondiente al cabo de un tiempo t.

A continuación presentamos algunas definiciones relacionadas con la terminología asociada a los sistemas dinámicos, en otras palabras en terminos dinámicos.

Definición 4.2 (Órbita)**.** *Sea X_0 un punto del espacio de fases $\mathcal{U}$, la aplicación*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{U} \\ t &\longmapsto \varphi(t) = T(t)X_0 \end{aligned}$$

se llama movimiento del punto X_0 por la acción del flujo. La órbita o trayectoria correspondiente a este punto es la imagen de la aplicación φ

$$\mathcal{O}(X_0) = \{T(t)X_0 \in \mathcal{U} : t \in \mathbb{R}\}.$$

Teorema 4.1. ([11], 234). *Por cada punto del espacio de fases pasa una órbita y solo una.*

Demostración. Sea $X_0 \in \mathcal{U}$ y sea $\mathcal{O}(X_0)$ la órbita correspondiente. Supongamos que $X_0 \in \mathcal{O}(X_1)$ para algún $X_1 \in \mathcal{U}$, es decir, que existe algún $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $X_0 = T(t_0)X_1$. También podemos ver que

$$T(-t_0)X_0 = T(-t_0)T(t_0)X_1 = T(-t_0 + t_0)X_1 = T(0)X_1 = X_1.$$

Ahora veamos que $\mathcal{O}(X_0) = \mathcal{O}(X_1)$,

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{O}(X_0) &\Longrightarrow X = T(t)X_0 = T(t)T(t_0)X_1 = T(t + t_0)X_1 \in \mathcal{O}(X_1) \\ X \in \mathcal{O}(X_1) &\Longrightarrow X = T(t')X_1 = T(t')T(-t_0)X_0 = T(t' - t_0)X_0 \in \mathcal{O}(X_0). \end{aligned}$$

□

Definición 4.3 (punto de equilibrio)**.** *Un punto $X_0 \in \mathcal{U}$ es un punto de equilibrio de un flujo si su órbita se reduce al punto, es decir, si $\mathcal{O}(X_0) = X_0$.*

Definición 4.4 (curva integral)**.** *Sea $X_0 \in \mathcal{U}$ en el espacio de fases. La curva integral de este punto es la representación gráfica del movimiento del punto, es decir, la gráfica de la aplicación $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{U}$ dada por $\varphi(t) = T(t)X_0 (t \in \mathbb{R})$.*

Esta representación gráfica se efectúa en el espacio de $(n+1)$-dimensional $\mathbb{R} \times \mathcal{U}$, que se denomina *espacio de fases ampliado* del sistema dinámico.

Definición 4.5 (velocidad del flujo en un punto)**.** *Sea X_0 un punto del espacio de fases. La velocidad del flujo en ese punto se define como:*

$$v(X_0) = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)X_0 - X_0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0)$$

donde $\varphi(t) = T(t)X_0$ es el movimiento del punto X_0.

La velocidad de flujo es la derivada parcial respecto a t de la función antes definida $\Phi(t, X_0)$ particularizada en $t = 0$, por lo tanto, la velocidad es un vector de $\mathbb{R}^n$, es decir, un campo de velocidades asociado al flujo

$$\begin{aligned} v : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ X_0 &\longmapsto v(X_0) \end{aligned}$$

Definición 4.6 (punto singular)**.** *Sea $X_0 \in \mathcal{U}$, este es un punto singular del* campo de velocidades *asociado al flujo si $v(X_0) = 0$.*

De lo anterior podemos ver que a cada sistema dinámico $(\mathcal{U}, \{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}})$ se puede asociar un campo de vectores en $\mathcal{U}$, que es el campo de velocidades del flujo.

4.1.1. Definiciones concernientes a ecuaciones diferenciales

Definición 4.7 (sistema diferencial). *Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y no vacío y sea $v : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial, que supondremos de clase $C^1(\mathcal{U})$. Se define el sistema diferencial autónomo asociado al campo v mediante:*

$$X' = v(X) \quad (X \in \mathcal{U}) \tag{4.1}$$

El conjunto $\mathcal{U}$ se llama el espacio de fases del sistema.

Definición 4.8 (solución de un sistema diferencial). *Llamamos solución del sistema diferencial (4.1) a toda función*

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow \mathcal{U} \\ t &\longmapsto \varphi(t) \end{aligned}$$

definida en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ con valores vectoriales en el espacio de fases del sistema, derivable en I y tal que satisface el sistema (4.1), es decir

$$\forall t \in I \quad , \quad \varphi'(t) = v(\varphi(t)).$$

Definición 4.9 (problema de valor inicial). *Dados $t_0 \in \mathbb{R}$, $X_0 \in \mathcal{U}$, un problema de valor inicial o de Cauchy para el sistema diferencial (4.1) trata de encontrar una solución φ tal que $\varphi(t_0) = X_0$*

Sin perdida de generalidad asumiremos de ahora en adelante $t_0 = 0$

Definición 4.10 (órbita (compárese con la definición 4.2)). *La órbita positiva $\mathcal{O}_+(X_0)$, órbita negativa $\mathcal{O}_-(X_0)$ y órbita $\mathcal{O}(X_0)$ del punto $X_0 \in \mathcal{U}$ se definen, respectivamente, como los siguientes subconjuntos del espacio de fases*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_+(X_0) &= \{\varphi(t, X_0) : t \in [0, \beta_{X_0})\} \\ \mathcal{O}_-(X_0) &= \{\varphi(t, X_0) : t \in (\gamma_{X_0}, 0]\} \\ \mathcal{O}(X_0) &= \{\varphi(t, X_0) : t \in (\gamma_{X_0}, \beta_{X_0})\} \end{aligned}$$

Definición 4.11 (solución de equilibrio (compárese con la definición 4.3)). *Si X_0 es un punto del espacio de fases tal que $v(X_0) = 0$, entonces $\varphi(t) = X_0$ es solución del sistema diferencial. Se llama solución de equilibrio o estacionaria y su órbita se reduce al punto X_0.*

Definición 4.12 (curva integral (compárese con la definición 4.4)). *Es la representación gráfica en $\mathbb{R} \times \mathcal{U}$ de una solución del sistema diferencial.*

4.2. Relación entre sistemas dinámicos y sistemas diferenciales

Teorema 4.2. ([11], 239). *El movimiento de un punto $X \in \mathcal{U}$, definido por*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{U} \\ t &\longmapsto \varphi(t) = T(t)X \end{aligned}$$

es solución del sistema diferencial

$$X' = v(X)$$

Demostración. Se tiene

$$\varphi'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} = v(T(t)X) = v(\varphi(t))$$

□

Hemos relacionado los sistémas dinámicos o flujos con sistemas diferenciales, lo que significa que resolver un sistema n-dimensional $X' = v(X)$, que es una ley local de evolución pues defne una velocidad en cada punto, consiste en encontrar el flujo asociado al campo de velocidades.

Teorema 4.3. ([11], 239). *Un punto del espacio de fases X_0 es un punto de equilibrio del sistema dinámico si y solo si es un punto singular para el campo de velocidades del flujo.*

Demostración. a) Si X_0 es un punto de equilibrio del flujo, esto significa que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad T(t)X_0 = X_0$$

por lo tanto, la velocidad $v(X_0)$ es nula.
b) Sea X_0 un punto tal que $v(X_0) = 0$ entonces la función $\varphi(t) = X_0$ es solución del sistema diferencial $X' = v(X)$ y satisface la condición inicial $\varphi(0) = X_0$. Ahora por el teorema 4.2 la función $\psi(t) = T(t)X_0$ es solución del sistema diferencial y también satisface la misma condición inicial $T(X_0) = X_0$, por lo tanto, las dos soluciones coinciden por la unicidad de solución, entonces

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad T(t)X_0 = X_0.$$

□

4.3. Sistemas dinámicos lineales

4.3.1. Grupos uniparamétricos de difeomorfismos lineales en $\mathbb{R}^n$

Teorema 4.4. ([11], 241). *La familia de transformaciones $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ con $T(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un grupo de difeomorfismos lineales en $\mathbb{R}^n$ si y solo si existe una matriz constante A, real $n \times n$, tal que*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad T(t) = e^{tA}$$

Demostración. a) Si A es una matriz constante real $n \times n$ es claro que $T(0) = e^{0A} = I$, y también tenemos que

$$T(t+s) = e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} = T(t)T(s)$$

y por la propiedad (4) de la exponencial se cumple que la función $\Phi(t, X) = T(t)X = e^{tA}X$ es de clase C^1; entonces $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un grupo uniparamétrico de difeomorfismos. Para ver que sea lineal definimos la función

$$\begin{aligned} \phi_t(X) : \mathcal{U} &\longrightarrow \mathcal{U} \\ X &\longmapsto \phi_t(X) = e^{tA}X \end{aligned}$$

y verificamos que dados $u, v \in \mathcal{U}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que

i) $\phi_t(u+v) = e^{tA}(u+v) = e^{tA}u + e^{tA}v = \phi_t(u) + \phi_t(v)$

ii) $\phi_t(\lambda u) = e^{tA}\lambda u = \lambda e^{tA}u = \lambda\phi_t(u)$.

b) Si $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un grupo uniparamétrico de difeomorfismos lineales en $\mathbb{R}^n$, es fácil ver que el campo de velocidades asociado $v : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ es también una aplicación lineal. Entonces existe una matriz real $n \times n$ constante A tal que

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \quad , \quad v(X) = AX.$$

El sistema diferencial asociado a este campo de velocidades es el sistema lineal con coeficientes constantes

$$X' = AX.$$

Tenemos entonces dos teoremas asociados a este hecho, el teorema 3.11 que nos dice que la solución de este sistema diferencial es $X(t) = e^{tA}X_0$ y el teorema 4.2 nos dice que para un punto X_0 la función $\varphi(t) = T(t)X_0$ es solución del sistema diferencial, por la unicidad de la solución tenemos que $T(t)X_0 = e^{tA}X_0$, por lo tanto, $T(t) = e^{tA}$. $\square$

4.3.2. Sistemas planos

En esta sección consideraremos sistemas $X' = AX$ con coeficientes constantes donde A es una matriz 2×2; estos sistemas son de gran importancia porque se pueden relacionar con E.D.O. lineales de segundo orden $x'' + a_1 x' + a_0 x = b(t)$. Estas son de las más importantes ecuaciones encontradas en la ciencia y en la ingeniería.

El sistema $X' = AX$ podemos notarlo así:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad , \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

El conjunto

$$\{X(t) = (x(t), y(t)) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^2$$

es el de las órbitas de la solución $X(t)$ del sistema diferencial. El plano $\mathbb{R}^2$, donde viven las órbitas o trayectorias, es el espacio de fases o en este caso *plano de fase*.

El aspecto general de las trayectorias con flechas que indican el recorrido se llama *retrato de fases* o retrato de trayectorias (descripción de trayectorias).

Según el teorema 3.11 la solución del problema de Cauchy o de valores iniciales del sistema es

$$X(t) = e^{tA} X_0 \quad , \quad X(0) = X_0 \quad , \quad X_0 \in \mathbb{R}^2$$

con lo cual nos bastaría para trazar mecánicamente las soluciones.

Sin resolver analíticamente el sistema se pretende encontrar propiedades cualitativas de las soluciones, por ejemplo: perioricidad o no perioricidad, límite cuando $t \to \infty$, etc. Los datos que usaremos son las propiedades espectrales, es decir, las de los valores propios de la matriz A.

Primero que todo el único punto (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ tal que $AX = 0$ es $(x_0, y_0) = (0, 0)$, así que $X = 0$ es la única solución de equilibrio para el sistema.

Como A es una matriz 2×2 entonces su polinomio característico debe ser un polinomio de grado dos con un máximo de dos raíces complejas o reales. Para identificar cada caso calculemos de forma general este polinomio así:

$$\det(A - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \right| = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

reorganizando y teniendo en cuenta que

$$\text{tr } A = a + d \quad \text{y} \quad \det A = ad - bc$$

se tiene que

$$\begin{aligned} &\lambda^2 - \lambda(a+d) + (ad - bc) = \\ &\quad \lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + (\det A) = 0. \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula cuadrática para λ tenemos que

$$\lambda = \frac{\text{tr } A \pm \sqrt{(\text{tr } A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

con *discriminante*

$$\Delta = (\text{tr } A)^2 - 4 \det A.$$

Dependiendo del signo del discriminante se obtienen los diferentes valores propios que los clasificaremos de la siguiente manera:

- Valores propios reales y distintos ($\Delta > 0$).
- Valores propios complejos conjugados ($\Delta < 0$).
- Valores propios repetidos (necesariamente reales) ($\Delta = 0$).

Valores propios reales y distintos

Este caso es cuando la matriz es diagonalizable con valores propios λ_1 y λ_2 y sus respectivos vectores propios v_1 y v_2. La solución viene dada por:

$$X(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + k_2 e^{\lambda_2 t} v_2. \tag{4.2}$$

La solución expresada en las coordenadas de la nueva base $\{v_1, v_2\}$ del plano es:

$$\widetilde{X}(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esta solución corresponde al sistema diagonalizado

$$\widetilde{X}'(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \widetilde{X}(t) \quad \text{donde} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

y $P = (v_1|v_2)$ es la matriz de paso de la base canónica $\{e_1, e_2\}$ a la base $\{v_1, v_2\}$.

Así tenemos que

$$P\widetilde{X}(t) = P\left(k_1 e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + k_2 e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = k_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + k_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = X(t).$$

como veíamos en el caso general en la sección 3.3.1.

Para identificar el aspecto de las trayectorias usaremos la solución del sistema diagonalizado $\widetilde{X}(t) = (\widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t))$

$$\begin{aligned} \widetilde{x}(t) &= k_1 e^{\lambda_1 t}, \\ \widetilde{y}(t) &= k_2 e^{\lambda_2 t}, \end{aligned}$$

se puede eliminar el parámetro t y se obtienen las ecuaciones cartesianas de la forma

$$\widetilde{y} = k\widetilde{x}^p \tag{4.3}$$

donde k es una constante real y $p = \lambda_2/\lambda_1$.

Primero trazamos los vectores propios v_1 y v_2 y las rectas que los contienen. Ahora dependendiendo del signo que tengan los valores propios tenemos los siguientes casos:

1. Si $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, entonces todas las trayectorias tienden a ∞ cuando $t \to \infty$ y a 0 cuando $t \to -\infty$. De acuerdo con las ecuaciones cartesianas (4.3) se tiene que $p > 1$, así las trayectorias se escapan del origen tangencialmente a v_1 excepto aquellas que son multiplos de v_2. Al origen se le llama un *nodo fuente o inestable* (Figura 4.1).

2. Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, entonces todas las trayectorias tienden a 0 cuando $t \to \infty$ y a ∞ cuando $t \to -\infty$. De acuerdo con las ecuaciones cartesianas (4.3) se tiene que $0 < p < 1$, así las trayectorias tienden hacia el origen tangencialmente a v_2 excepto aquellas que son multplos de v_1. Se dice que el origen es un *nodo sumidero o estable* (Figura 4.2).

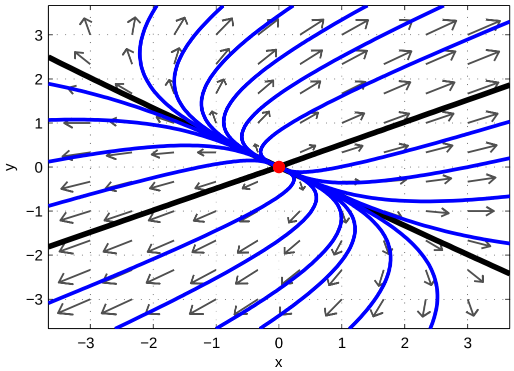

Figura 4.1: Nodo inestable

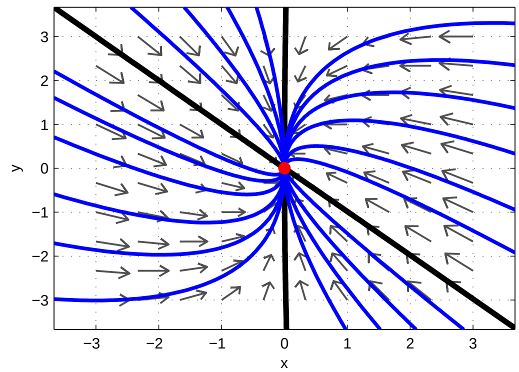

Figura 4.2: Nodo estable

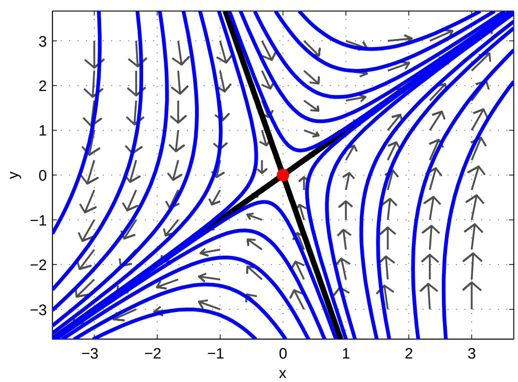

Figura 4.3: Puerto

3. Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, las trayectorias son una mezcla de los dos casos anteriores. Si las trayectorias son multiplos de v_1 entonces tienden a 0 cuando $t \to \infty$ y a ∞ cuando $t \to -\infty$, si las trayectorias son multiplos de v_2 entonces tienden a ∞ cuando $t \to \infty$ y a 0 cuando $t \to -\infty$. De acuerdo con las ecuaciones cartesianas (4.3) se tiene que $p < 0$, así cuando $t \to \infty$, $\widetilde{x} \to \pm\infty$ y $\widetilde{y} \to 0$. Al origen se le llama un *punto de silla, cuello o puerto* (Figura 4.3).

4. Si $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 > 0$, en este caso la solución general del sistema diagonalizado es así

$$\begin{aligned} \widetilde{x}(t) &= k_1, \\ \widetilde{y}(t) &= k_1 e^{\lambda_2 t}; \end{aligned}$$

por lo tanto las trayectorias son semi-rectas paralelas a v_2 y tienden a ∞ cuando $t \to \infty$ (Figura 4.4).

5. Si $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 < 0$, las trayectorias son iguales a las del caso (4) solo que las trayectorias tienden a ∞ cuando $t \to -\infty$ (Figura 4.5).

Estos dos ultimos casos se presentan cuando $\det A = 0$.

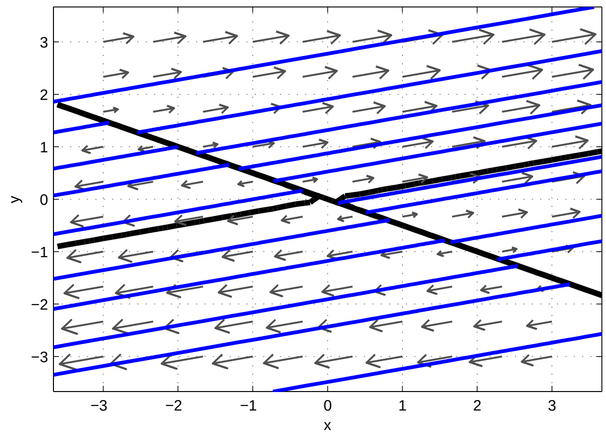

Figura 4.4: Inestable

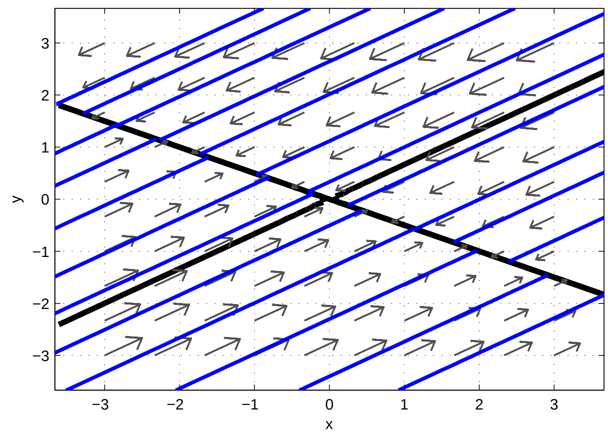

Figura 4.5: Estable

Valores propios complejos conjugados

Supongamos en este caso que los valores propios son $\alpha \pm i\beta$ con vectores propios v_1 y v_2 respectivamente, pero estos vectores estan en $\mathbb{C}^2$. Para describir las trayectorias en el plano de fase real realizamos el siguiente tratamiento:

Como vimos de forma general en la sección 3.2.1. que si v_1 es el vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ entonces $v_2 = \overline{v_1} = \alpha - i\beta$ es el otro vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, ahora sean los vectores

$$w_1 = \frac{1}{2}(v_1 + \overline{v_1}),$$
$$w_2 = \frac{-i}{2}(v_1 - \overline{v_1});$$

estos son vectores propios reales de A y de hecho w_1 es la parte real de v_1 y w_2 la parte imaginaria de v_1. Además w_1 y w_2 son linealmente independientes por lo tanto son una base para $\mathbb{R}^2$.

Notemos que

$$\begin{aligned}
Aw_1 &= \frac{1}{2}(Av_1 + A\overline{v_1}) \\
&= \frac{1}{2}((\alpha + i\beta)v_1 + (\alpha - i\beta)\overline{v_1}) \\
&= \frac{\alpha}{2}((v_1 + \overline{v_1}) + (v_1 - \overline{v_1})) \\
&= \alpha w_1 - \beta w_2
\end{aligned}$$

Analogamente

$$Aw_2 = \beta w_1 + \alpha w_2$$

por lo tanto se tiene que la diagonalización de A da

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = P^{-1}AP \quad \text{donde} \quad P = (w_1|w_2).$$

La solución del sistema diagonalizado

$$\widetilde{X}'(t) = A^*\widetilde{X}(t) \quad \text{con} \quad A^* = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

según el teorema 3.11 es

$$\widetilde{X}(t) = e^{tA^*}X_0$$

ahora solo hay que calcular la exponencial de la matriz A^*. Lo hacemos de la siguiente manera:

Reescribimos la matriz A^* así

$$A^* = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$e^{A^*} = e^{\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = e^{\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} e^{\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

estas dos exponenciales ya se calcularon en los ejemplos (3.2) y (3.4), por lo tanto tenemos que:

$$e^{A^*} = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = e^{\alpha} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Expresamos la solución general del sistema diagonalizado

$$\widetilde{X}(t) = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} X_0$$

Ahora es facil ver la forma de las trayectorias o el movimiento del punto X_0. Al mismo tiempo que la órbita gira a una velocidad de β radianes por unidad de tiempo por la acción de la matriz de rotación también se aproxima o se aleja del origen por la acción de e^{α} dependiendo del signo de α, por lo tanto tenemos los siguientes casos:

1. Si $\alpha > 0$, las trayectorias son espirales que tienden hacia afuera cuando $t \to \infty$. El origen es una *fuente espiral o un foco inestable* (Figura 4.6).

2. Si $\alpha < 0$, las trayectorias son espirales que tienden al origen cuanto $t \to \infty$. El origen es un *sumidero espiral o foco estable* (Figura 4.7).

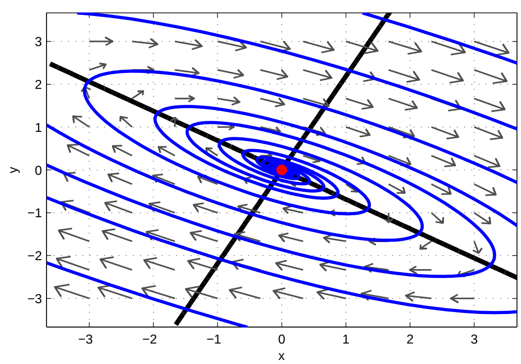

Figura 4.6: Inestable

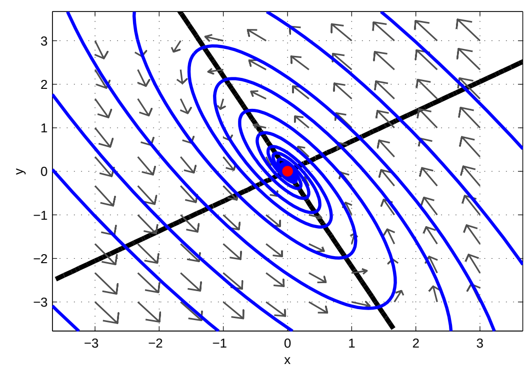

Figura 4.7: Estable

3. Si $\alpha = 0$, las trayectorias no se ven afectadas por e^{α} por lo tanto las trayectorias son órbitas cerradas, elipses con centro en el origen. Al origen se le llama *centro* (Figura 4.8).

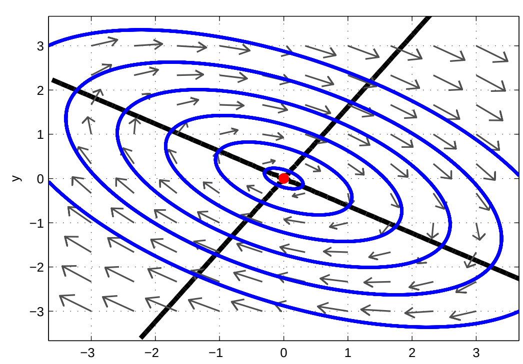

Figura 4.8: Centro

La dirección de rotación de las trayectorias depende del signo de la entrada c de la matriz A, si $c > 0$ entonces la rotación es en contra del movimiento de las manecillas del reloj y si $c < 0$ la rotación es la misma que la de las manecillas del reloj.

Valores propios repetidos

1. Un primer caso es cuando la matriz es diagonalizable, es decir cuando la multiplicidad geométrica del valor propio es dos, entonces las trayectorias podemos verlas en las ecuaciones cartesianas (4.3) pues como $\lambda_1 = \lambda_2$ entonces $p = 1$, por lo tanto las ecuaciones en las coordenadas del sistema diagonalizado tienen la forma

$$\widetilde{y} = k\widetilde{x}.$$

Las órbitas son semi-rectas que pertenecen a rectas que pasan por el origen. El origen es estable si $\lambda > 0$ e inestable si $\lambda < 0$. Si $\lambda = 0$ entonces la solución es trivial, es decir, $\widetilde{x}(t) = k_1$ y $\widetilde{y}(t) = k_2$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

2. Un segundo caso es cuando la matriz A no es diagonalizable, entonces su forma canónica o de Jordan es

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

una celda de Jordan de orden 2. De acuerdo a la sección 3.2.2. su exponencial es

$$e^{tA^*} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces la solución general en las coordenadas del sistema diagonalizado es:

$$\widetilde{X}(t) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} X_0,$$

es decir

$$\begin{aligned} \widetilde{x}(t) &= k_1 e^{t\lambda} + k_2 t e^{t\lambda}, \\ \widetilde{y}(t) &= k_2 e^{t\lambda}. \end{aligned}$$

Si $\lambda < 0$ las trayectorias tienden al origen cuando $t \to \infty$ (Figura 4.9), si $\lambda > 0$ entonces las trayectorias tienden a ∞ cuando $t \to \infty$ (Figura 4.10). Todas las trayectorias son tangenciales al vector v_1.

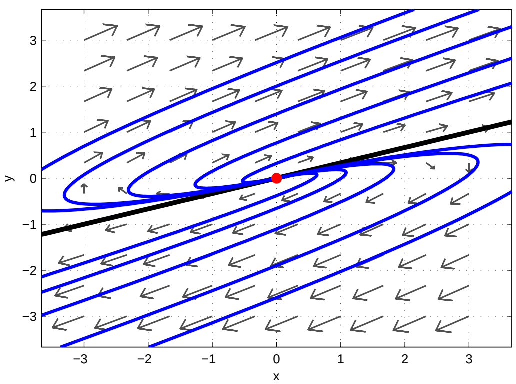

Figura 4.9: Inestable

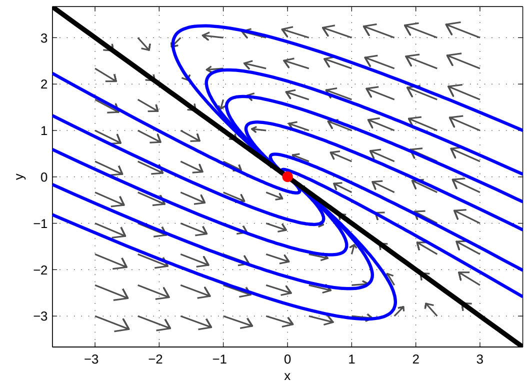

Figura 4.10: Estable

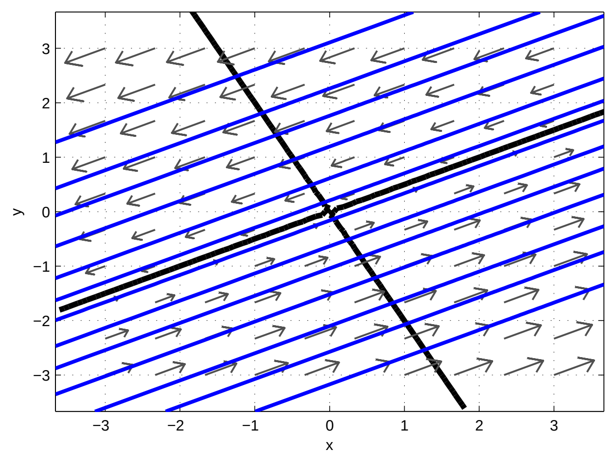

Figura 4.11: Valor propio doble nulo

Si $\lambda = 0$ entonces las soluciones son

$$\widetilde{x}(t) = k_1 + k_2 t$$
$$\widetilde{y}(t) = k_2$$

Por lo tanto las trayectorias son rectas paralelas al vector v_1, la recta que contiene a v_1 está formada por puntos de equilibrio (Figura 4.11).

El plano traza-determinante

La información que tenemos respecto del comportamiento de las trayectorias de acuerdo con los valores propios podemos resumirla en un plano determinado por $\operatorname{tr} A$ y $\det A$. Este plano, no es el plano de fase xy, nos ayuda a estudiar como la $\operatorname{tr} A$ y $\det A$ y las

relaciones entre ellos determinan el comportamiento de las trayectorias del sistema plano lineal.
El plano-$(\operatorname{tr} A, \det A)$ esta dividido por los ejes $\det A = 0$ y $\operatorname{tr} A = 0$ y la parábola

$$(\operatorname{tr} A)^2/4 = \det A,$$

que divide entre los casos $\Delta > 0$ y $\Delta < 0$.

La siguiente gráfica muestra los diferentes casos dependiendo de los parámetros traza y determinante. Se le llama diagrama de bifurcación.

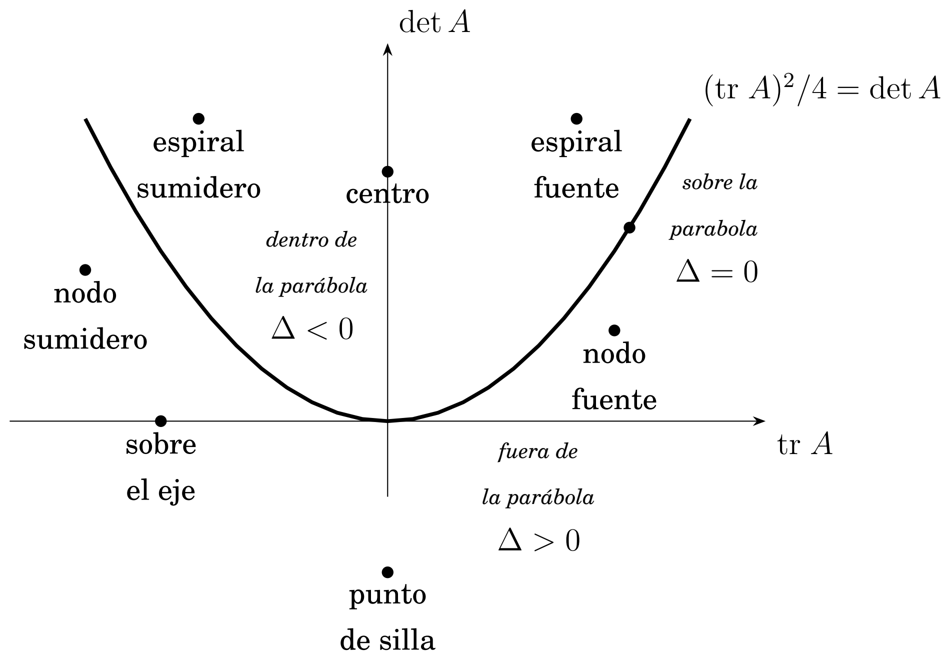

Figura 4.12: El plano traza-determinante. Diagrama de bifurcación

4.4. Sistemas dinámicos no lineales

Este sección es de gran importancia para este trabajo de grado, pues muestra una forma diferente de atacar los problemas y ejercicios sobre sistemas de ecuaciones lineales desde un enfoque cualitativo. En el caso lineal las ecuaciones diferenciales se pueden integrar permitiendo así encontrar la forma general de las soluciones; ahora nos enfocaremos en el caso no lineal, es allí donde la integrabilidad directa de las ecuaciones no es posible, por lo tanto las técnicas para este tipo de ecuaciones y sistemas son diferentes. Consideremos el sistema diferencial de la siguiente forma

$$X' = v(X) = \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ v_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ v_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

donde cada $v_i (i = 1, \dots, n)$ es no lineal. Nos enfocaremos un poco más en los sistemas de dos dimensiones, sea de la forma:

$$\begin{aligned} x' &= v_1(x, y) \\ y' &= v_2(x, y) \end{aligned} \tag{4.4}$$

pues son de gran importancia para las aplicaciones y además parte de la teoría que se expondrá es solo para sistemas planos.

4.4.1. Integrales primeras

Definición 4.13 (derivada de un campo escalar respecto de un campo vectorial)**.** *Dado $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, sea $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 y sea $v : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial que supondremos continuo en $\mathcal{U}$. Se define la derivada del campo f según el campo vectorial v como la aplicación:*

$$\mathcal{L}_v f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad (\mathcal{L}_v f)(X) = \nabla f(X) \cdot v(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) v_i(X).$$

Definición 4.14 (integrales primeras)**.** *Se dice que el campo escalar $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 es una integral primera del sistema diferencial anterior si, para cada solución del dicho sistema*

$$\varphi : I \longrightarrow \mathcal{U} \qquad \text{con} \qquad I \subseteq \mathbb{R}$$

se verifica

$$\forall t \in I \qquad , \qquad f(\varphi(t)) = constante.$$

Teorema 4.5. ([11], 242)*. En las condiciones de regularidad anteriores, el campo escalar f es una integral primera del sistema diferencial (4.1) si y solo si:*

$$\forall X \in \mathcal{U} \quad , \quad \mathcal{L}_v f(X) = 0$$

Encontrar una integral primera de un sistema dinámico puede ser algo muy complicado, aveces se requiere ensayar y equivocarse muchas veces, sin embargo, en sistemas planos puede encontrarse una integral primera con ayuda de los métodos elementales de resolución de E.D.O.

Dado un sistema (4.4) considere la E.D.O.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_2(x,y)}{v_1(x,y)}$$

Si es posible encontrar su solución general escrita como

$$f(x,y) = C \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

entonces f es una integral primera del sistema plano.

Las integrales primeras son funciones importantes en la teoría por que nos permiten obtener información en entornos alrededor de los puntos de equilibrio, en las secciones siguientes mostraremos algunas formas de usarlas.

4.4.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio

A los puntos singulares del campo vectorial, también se les llama puntos de equilibro, y se corresponde con una solución estacionaria. Lo que quiere decir que dado un estado inicial $\varphi(0) = X_0$ con $X_0 \in \mathcal{U}$ entonces $\forall t \in \mathbb{R}$ satisface que $\varphi(t) = X_0$.

Definición 4.15 (Estabilidad en el sentido de Liapunov)**.** *Sea X_0 un punto de equilibrio del sistema diferencial (4.1). Se dice que X_0 es estable en el sentido de Liapunov si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para cada punto $X \in \mathcal{U}$ con $\|X - X_0\| < \delta$, la solución φ del sistema con $\varphi(0) = X$ satisface las dos condiciones siguientes:*

a) *φ está definida para todo $t > 0$ (es decir, es indefinidamente prolongable en el tiempo hacia el futuro);*

b) *$\forall t > 0$, $\|\varphi(t) - X_0\| < \varepsilon$.*

Definición 4.16 (punto de equilibrio asintóticamente estable)**.** *Un punto de equilibrio X_0 es asintóticamente estable si es estable y, además, para cada solución φ de las mencionadas en la definición anterior, se verifica que*

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = X_0$$

.

Un punto de equilibrio es *inestable* si no es estable. Decimos que el punto de equilibrio X_0 es *aislado* si existe un entorno suyo en el que no hay ningún otro punto de equilibrio.

Lema 4.1. ([11], 245). *Si X_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable, entonces es aislado.*

Teorema 4.6. ([11], 245). *Sea X_0 un punto de equilibrio asintóticamente estable de un sistema diferencial y sea f una posible integral primera del sistema, entonces f es constante en un entorno de X_0.*

Linealización: comportamiento local cercano a singularidades

Considere el sistema plano (4.4) y sean las funciones v_1 y v_2 continuas y dos veces diferenciables en un entorno a un punto de equilibrio (x_0, y_0). Expandimos las funciones en el polinomio de Taylor alrededor de este punto:

$$v_1(x,y) = \left.\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial v_1}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} (y - y_0) + P(x - x_0, y - y_0)$$

$$v_2(x,y) = \left.\frac{\partial v_2}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial v_2}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} (y - y_0) + Q(x - x_0, y - y_0)$$

Donde P y Q son polinomios cuyos primeros terminos por lo menos cuadráticos en $(x - x_0)$ y $(y - y_0)$. En cercanías al punto (x_0, y_0) del campo vectorial tanto P como Q son despreciables comparadas con el termino lineal de la serie de Taylor. Entonces solo tomamos en cuenta los términos lineales de los polinomios de Taylor y así el sistema original no lineal

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix}$$

se aproxima por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} & \left.\frac{\partial v_1}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \\ \left.\frac{\partial v_2}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} & \left.\frac{\partial v_2}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Este último sistema se llama la *linealización del sistema* (4.4) *en el punto* (x_0, y_0) trasladado al origen.

La siguiente definición generaliza el concepto de sistema linealizado para sistemas dinámicos en $\mathbb{R}^n$.

Definición 4.17 (sistema linealizado en un punto de equilibrio aislado)**.** *Sea* X_0 *un punto de equilibrio del sistema diferencial (4.1). La linealización de este sistema en* X_0 *es el sistema diferencial lineal*

$$X' = Dv(X_0)X$$

en donde $Dv(X_0)$ *es la matriz jacobiana del campo vectorial* v *particularizada en el punto* X_0.

$$Dv(X_0) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right|_{X_0} & \cdots & \left.\frac{\partial v_1}{\partial x_n}\right|_{X_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left.\frac{\partial v_n}{\partial x_1}\right|_{X_0} & \cdots & \left.\frac{\partial v_n}{\partial x_n}\right|_{X_0} \end{pmatrix}$$

Definición 4.18 (punto de equilibrio hiperbólico)**.** *Un punto de quilibrio* X_0 *se llama hipebólico si todos los valores propios de la matriz* $Dv(X_0)$ *tienen parte real no nula.*

Teorema 4.7 (Hartman-Grobmann)**.** ([11], 249). *Si* X_0 *es un punto de equilibrio hiperbólico del sistema diferencial no lineal (4.1), entonces dicho sistema y el sistema linealizado* $X' = Dv(X_0)X$ *son localmente topológicamente equivalentes.*

El anterior teorema es de gran importacia pues nos está diciendo que en un entorno del punto de equilibrio hiperbólico las trayectorias del sistema (4.1) son homeomorfas (deformaciones contínuas) con las trayectorias del sistema linealizado en un entorno del origen, en otras palabras tienen el mismo comportamiento.

Teorema 4.8 (criterio de estabilidad por linealización)**.** ([11], 249). *Sea* X_0 *un punto de equilibrio del sistema (4.1). Entonces:*

a) Si todos los valores propios de la matriz $Dv(X_0)$ *tiene su parte real negativa, el punto de equilibrio es asintóticamente estable.*

b) Si la matriz $Dv(X_0)$ *tiene algún valor propio con parte real positiva, el punto de equilibrio es inestable.*

Este criterio no nos da información en el caso que el sistema linealizado tenga valores propios con parte real nula, por lo tanto, no es posible aplicar el teorema de Hartman-Grobmann.

Como en los sistemas planos ya tenemos una caracterización completa (véase sección 4.3.) del único punto de equilibrio que es el origen, es decir, su estabilidad y comportamiento de las órbitas en un entorno suyo, entonces la linealización de un sistema no lineal plano en un punto de equilibrio hiperbólico nos da información geométrica del comportamiento de las órbitas y la estabilidad del punto de equilibrio gracias al teorema de Hartman-Grobmann.

Las figuras 4.13 y 4.14 muestran el comportamiento de un sistema no lineal y el del sistemal ienalizado, se puede observar que tienen el mismo comportamiento.

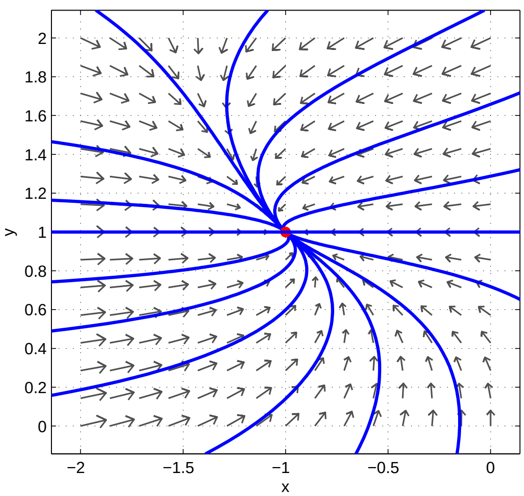

Figura 4.13: Sistema no lineal

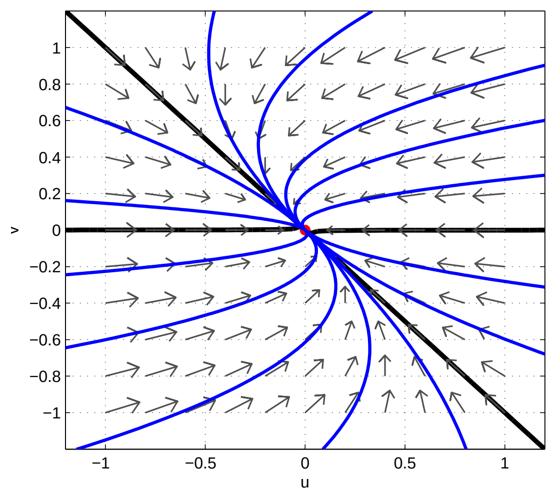

Figura 4.14: Sistema linealizado

Del teorema de Hartman-Grobmann se deduce que un punto de equilibrio hiperbólico es siempre aislado y es o bien asintóticamente estable o bien inestable. Tenemos por tanto la siguiente caracterización

1. Si todos los valores propios del sistema linealizado en el punto de equilibrio tienen parte real negativa, el punto de equilibrio se denomina *sumidero*.

2. Si todos los valores propios del correspondiente sistema linealizado tienen su parte real positiva, el punto de equilibrio se denomina *fuente*.

3. Si la matriz del sistema linealizado tiene unos valores propios con parte real negativa y otros con parte real positiva, el punto de equilibrio se denomina *punto de silla o puerto*.

Estabilidad por el método directo de Liapunov

Definición 4.19 (Función de Liapunov)**.** *Sea* X_0 *un punto de equilibrio del sistema diferencial* $X' = v(X)$*. Una función* $F : B(X_0) \to \mathbb{R}$ *definida en* $B(X_0)$*, una vecindad de* X_0*, es una función de Liapunov para el sistema diferencial* $X' = v(X)$ *en* $B(X_0)$ *si*

1. F *es continua en* $B(X_0)$ *y diferenciable en* $B(X_0)\backslash\{X_0\}$*,*
2. F *tiene un mínimo local estricto en* X_0 *,*
3. $\forall X \in B(X_0)\backslash\{X_0\}$*, se verifica que* $\mathcal{L}_v F(X) = \nabla F(X) \cdot v(X) < 0$

Teorema 4.9. ([11], 250)*. Si un punto de equilibrio* X_0 *del sistema diferencial (4.1) admite una función de Liapunov, entonces el punto es asintóticamente estable.*

Si la condición 3) de la definición 4.19 fuera menor o igual y no estrictamente igual, es decir $\nabla F(X) \cdot v(X) \leq 0$, entonces el punto es estable en el sentido de Liapunov según la definición 4.15.

4.4.3. Soluciones periódicas en sistemas planos

Como habíamos anunciado anteriormente, varios resultados solamente son válidos para sistemas planos, esta sección se enfoca en estos sistemas. Poincaré se interesó muy particularmente en encontrar soluciones periódicas de los sistemas dinámicos, gracias a él muchos de los siguientes resultados los debemos a su investigación.

Definición 4.20. *(conjunto* ω*-límite) Un punto* $X \in \mathcal{U}$ *es un punto* ω*-límite de la órbita* $\mathcal{O}(X_0)$ *si existe una sucesión* $\{t_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset (\gamma_{X_0}, \beta_{X_0})$*, con* $\lim_{n\to\infty} t_n = \beta_{X_0}$*, tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, X_0) = X.$$

El conjunto de todos los puntos ω*-límite de* $\mathcal{O}(X_0)$ *se denomina* conjunto ω-límite*, y se represente por* $\omega(X_0)$*.*

De manera análoga se define el conjunto α-límite invirtiendo en sentido del tiempo

Definición 4.21. *(conjunto* α*-límite) Un punto* $X \in \mathcal{U}$ *es un punto* α*-límite de la órbita* $\mathcal{O}(X_0)$ *si existe una sucesión* $\{t_j\}_{j=1,2,\ldots} \subset (\gamma_{X_0}, \beta_{X_0})$*, con* $\lim_{j\to\infty} t_j = \gamma_{X_0}$*, tal que*

$$\lim_{j\to\infty} \varphi(t_j, X_0) = X.$$

El conjunto de todos los puntos α-límite de $\mathcal{O}(X_0)$ se denomina conjunto α-límite*, y se represente por* $\alpha(X_0)$.

Definición 4.22 (ciclo límite)**.** *Una órbita periódica plana* Γ *se denomina* ciclo límite *si existe un punto* $X_0 \in \mathcal{U}$ *tal que la órbita* $\mathcal{O}(X_0)$ *tiende en espiral hacia* Γ*. En otras palabras,* Γ *es el conjunto ω-límite de alguna órbita* $\mathcal{O}(X_0)$ *no cerrada.*

Teorema 4.10 (Poincaré-Bendixson)**.** ([11], 251)*. Se considera el sistema diferencial plano*

$$\begin{cases} x' = v_1(x,y) \\ y' = v_2(x,y) \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} (x,y) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \\ v_1, v_2 \in C^1(\mathcal{U}) \end{cases}$$

que tiene a lo sumo una cantidad finita de puntos de equilibrio. Si la órbita positiva $\mathcal{O}_+(X_0)$ *de un punto* $X_0 \in \mathcal{U}$ *es un conjunto acotado, entonces una y solo una de las siguientes afirmaciones es cierta:*

(a) El conjunto ω-límite $\omega(X_0)$ *es un único punto* $X^* \in \mathcal{U}$*, que es un punto de equilibrio del sistema y, además,* $\lim_{t\to\infty} \varphi(t, X_0) = X^*$.

(b) $\omega(X_0)$ *es una órbita peródica* Γ *y, o bien* $\mathcal{O}_+(X_0) = \omega(X_0) = \Gamma$*, o bien* $\mathcal{O}_+(X_0)$ *tiende en espiral hacia* Γ.

(c) $\omega(X_0)$ *es un conjunto formado por una cantidad finita de puntos de equilibrio y órbitas tales que sus correspondientes conjuntos* α *y* ω-límite *son dichos puntos de equilibrio.*

Corolario 4.1. ([8], 230)*. Sea* F *una integral primera del sistema plano 4.4. Si* F *no es constante en cualquier conjunto abierto, entonces allí no hay ciclos límite.*

Definición 4.23 (conjunto positivamente invariante)**.** *Un subconjunto* $F \subset \mathcal{U}$ *se dice positivamente invariante si, para cada punto* $X \in F$*, la solución* φ *del sistema diferencial tal que* $\varphi(0) = X$ *es prolongable para todo* $t > 0$ *y, además,* $\varphi(t) \in F$ *para todo* $t > 0$.

Corolario 4.2. ([8], 252)*. Sea un conjunto* $\Omega \subseteq \mathcal{U}$ *abierto, acotado, positivamente invariante y que no contenga puntos de equilibrio. Si existe un punto* $X_0 \in \Omega$ *cuyo ω-límite no contiene puntos de la frontera de* Ω*, entonces dicho conjunto ω-límite es una órbita cerrada.*

Teorema 4.11 (Poincaré)**.** ([11], 253)*. Si el espacio de fases es un subconjunto simplemente conexo del plano, entonces en el interior de cualquier órbita cerrada del sistema diferencial hay al menos un punto de equilibrio.*

A continuación presentaremos algunas herramientas que se tienen para ciertos sistemas con características especiales, es importante conocerlos y sobre todo saber que tienen gran aplicación a la física.

4.4.4. Sistema gradiente

Un sistema gradiente sobre $\mathcal{U}$ es un sistema diferencial de la forma

$$X' = v(X) = -\nabla W(X)$$

donde $W : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ es una función tal que $W \in C^2(\mathcal{U})$. A esta función se llama *función potencial* del sistema diferencial. Podemos ver inicialmente que los puntos de equilibrio del sistema coinciden con los puntos críticos de W.

Definición 4.24 (punto crítico no degenerado)**.** *Un punto $X^* \in \mathcal{U}$ es un punto crítico no degenerado de W si $W(X^*) = 0$ y la matriz hessiana de W en el punto X^*:*

$$H(X^*) = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}(X^*) \right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

tiene todos sus valores propios con parte real no nula.

Vemos que si X^* es un punto de equilibrio del sistema gradiente en tonces la matriz del sistema linealizado en dicho punto es

$$Dv(X^*) = -H(X^*)$$

lo que quiere decir que X^* es un punto de equilibrio hiperbólico del sistema diferencial si y solo si X^* es un punto crítico no degenerado de W. Además se tiene que

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}(X^*) \right)(X^*) = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x_i}(X^*) \right)(X^*) \quad \text{con} \quad a_{ij} = -\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}(X^*) \right)(X^*)$$

entonces $a_{ij} = a_{ji}$, osea que la matriz $H(X^*)$ es una matriz simétrica. Se sigue la siguiente proposición

Proposición 4.1. ([8], 207). *Dado un sistema gradiente $X' = -\nabla W(X)$. El sistema linealizado en cualquier punto de equilibrio tiene solo valores propios reales.*

Ahora si tenemos que X^* es un punto crítico no degenerado de W entonces se tiene el siguiente resultado

Lema 4.2. ([11], 254). *Sea X^* un punto de equilibrio hiperbólico del sistema diferencial gradiente. Entonces:*

a) X^* *es una fuente si y solo si* X^* *es un máximo relativo estricto de* W*;*

b) X^* *es asintóticamente estable si y solo si* X^* *es un mínimo relativo estricto de* W*;*

c) X^* *es un puerto si y solo si* X^* *es un punto de silla de* W.

Proposición 4.2. ([8], 206). *Sea X un punto tal que $\omega(X_0) = X$ o $\alpha(X_0) = X$ para algún X_0 , es decir que X_0 es el conjunto límite para alguna órbita del sistema gradiente, entonces X_0 es un punto de equilibrio.*

Una consecuencia inmediata de esta proposición es

Corolario 4.3. ([11], 254). *Un sistema gradiente no puede tener soluciones periódicas.*

4.4.5. Sistemas mecánicos conservativos

En física existen campos de fuerza con características especiales. Si existe una función $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(X) = -\nabla U(X)$$

entonces el campo de fuerza F es llamado conservativo. El sistema diferencial asociado

$$X'' = -\nabla U(X) \quad \text{con} \quad X' = V$$

es llamado *sistema conservativo*. La función U es llamada la *energía potencial* del sistema.

Consideremos ahora la segunda ley de Newton $F = ma$ para el movimiento de una partícula. Esta nos provee de un *sistema mecánico* de segundo orden

$$mX'' = F(X) \quad \text{con} \quad X' = V \tag{4.5}$$

donde V es la velocidad de la partícula.

El campo de fuerza F de la segunda ley de Newton es conservativo, por lo tanto, el sistema (4.5) es considerado un *sistema mecánico conservativo*.

Ahora particularmente analicemos las ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$x'' = f(t, x, x') \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R}$$

Por la segunda ley de Newton tenemos que la ecuación de movimiento unidimensional de una partícula en cada instante t sometida a un campo de fuerzas F

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t, x, x'),$$

donde la función incógnita es $x = x(t)$, representa la posición de la partícula en cada instante t.
Si suponemos que el campo de fuerzas F depende solamente de la posición x, osea $F = F(x)$ con $x \in I$, con I un intervalo de $\mathbb{R}$, entonces podemos asegurar que existe una función escalar $U(x)$ también definida en I tal que $F(x) = -U'(x)$.
Entonces el campo F de fuerzas es conservativo y la función U es la energía potencial del campo.

Sin perdida de generalidad en los resultados podemos suponer que $m = 1$, entonces la ecuación de movimiento queda así

$$x'' = F(x) = -U'(x) \tag{4.6}$$

Si la ecuación (4.6) se puede reducir a una de primer orden definiendo una nueva función incógnita $v = x'(t)$ que depende de la posición, osea $v = v(x)$, entonces la ecuación se transforma en

$$x''(t) = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v$$

y finalmente

$$v'(x)v(x) = -U'(x);$$

integrando se tiene que

$$\frac{1}{2}v^2(x) = -U(x) + C \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}v^2(x) + U(x) = C \tag{4.7}$$

Esta relación se conoce como el Teorema de conservación de la energía.

Ahora vamos a encontrar el sistema diferencial equivalente de dos dimensiones descrito en la sección 3.4.1. Definimos las nuevas funciones $x_1 = x$ y $x_2 = x'$ que representan la *posición* y la *velocidad* respectivamente; el sistema diferencial equivalente es

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -U'(x_1) \end{cases} \tag{4.8}$$

Por la ecuación (4.7) tenemos la función

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + U(x_1) \tag{4.9}$$

y esta es una integral primera del sistema diferencial (4.8) pues va a cumplir el teorema 4.5; sea $v_1 = x_2$ y $v_2 = -U'(x_1)$, se sigue que

$$\mathcal{L}_v f(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} v_2 = U'(x_1)x_2 - x_2 U'(x_1) = 0.$$

Los puntos de equilibrio del sistema son aquellos en donde $x_2 = 0$ y $U'(x_1) = 0$; entonces estos puntos tienen la forma $(x_1^*, 0)$ donde x_1^* es un punto crítico de la energía pontencial $U(x_1)$.

Supongamos $(x_1^*, 0)$ es un punto de equilibrio del sistema (4.8) y un mínimo relativo estricto de U. Como la función f es también una función de Liapunov no estricta para este punto, entonces por el teorema 4.9 se tiene que $(x_1^*, 0)$ es un punto estable en el sentido de Liapunov, y como esta integral primera no es constante en un entorno de este punto entonces no es asintóticamente estable.

Analicemos por el criterio de linealización el punto de equilibrio, la matriz del sistema linealizado en dicho punto es

$$Dv(x_1^*, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -U''(x_1^*) & 0 \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-U''(x_1^*)}$; por lo tanto, el criterio se puede aplicar cuando $U''(x_1^*) < 0$ que es cuando el punto es hiperbólico, en este caso corresponde un máximo relativo estricto de la energía potencial, por lo tanto el punto es un puerto, de acuerdo con la clasificación de la sección 4.3.2.

Por lo anterior se tiene el siguiente resultado:

Proposición 4.3. ([11], 256). *Sea $(x_1^*, 0)$ un punto de equilibrio entonces:*

(a) Si la energía potencial tiene en x_1^* un mínimo relativo estricto, entonces el punto de equilibrio es estable, no asintóticamente.

(b) Si la energía potencial tiene en x_1^* un máximo relativo estricto o un punto de inflexión, el punto de equilibrio es inestable.

4.4.6. Sistemas Hamiltonianos

Los sistema Hamiltonianos son muy importantes en las aplicaciones en la física sobre todo en mecánica clásica. En esta sección vamos a restringir nuestra atención a sistemas planos.

Un *sistema Hamiltoniano* es un sistema de la forma

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \\ y' &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $H \in C^\infty$ es llamada la *función Hamiltoniana*.

Un importante hecho es que la función H es una integral primera, en otras palabras es constante a lo largo de cada solución del sistema.

Comprobamos esto verificando que cumple el teorema 4.5, sea $v_1 = \partial H/\partial y$ y $v_2 = -\partial H/\partial y$ entonces

$$\mathcal{L}_v H(x,y) = \frac{\partial H}{\partial x}v_1 + \frac{\partial H}{\partial y}v_2 = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

Entonces se tiene la siguiente proposición

Proposición 4.4. ([8], 209). *Para un sistema Hamiltoniano plano, H es constante a lo largo de cada curva solución.*

Por último mencionamos una proposición importante sobre una caraterización de los valores propios de la matriz del sistema linealizado

Proposición 4.5. *Sea (x_0, y_0) un punto de equilibrio del sistema Hamiltoniano plano. Entonces los valores propios del sistema linealizado son ambos $\pm\lambda$, ó, $\pm i\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.*

4.4.7. Comportamiento global de sistemas planos

El comportamiento de las trayectorias es el objetivo del estudio cualitativo de los sistemas dinámicos. Se puede estudiar el comportamiento local en los entornos de los puntos de equilibrio del sistema, en las secciones anteriores se presentaron unos resultados que nos dieron herramientas para esto.

A continuación presentaremos una estrategia para estudiar el comportamiento global de las trayectorias en los sistemas planos.

La estrategia general para entender el comportamiento general de los sistemas planos es:

1. Dibujar las curvas isoclinas.

Las curvas *isoclinas* son las que en cada punto de ellas tienen la misma pendiente del campo de pendientes del sistema, en particular se dibujan las que tienen pendiente horizontal (donde $y' = 0$) y pendiente vertical (donde $x' = 0$). Estas isoclinas de pendientes verticales y horizontales se les llaman tambien *nulclinas*. Podemos ver que los puntos donde se cruzan las nulclinas son los mismos puntos de equilibrio del sistema plano.
También se puede usar el signo de x' y y' para ver el sentido de las trayectorias. Se pueden dibujar flechas sobre las nulclinas, cuando es pendiente vertical flechas hacia arriba (cuando $y' > 0$)o flechas hacia abajo (cuando $y' < 0$), cuando es pendiente horizontal flechas a la derecha (cuando $x' > 0$) y flachas a la izquierda (cuando $x' < 0$)).
En cada región determinada por las nulclinas se puede dibujar la dirección del campo resultante usando las anteriores flechas.

2. Dibujar si es posible las curvas separatrices.

Las curvas *sepatrices* son las que separan el plano en regiones donde las trayectorias tienen diferentes comportamientos, por ejemplo órbitas cerradas con órbitas que tienden al infinito.

3. Localizar los puntos de equilibrio del sistema y analizarlos.

Analizar los puntos de equilibrio depende de la naturaleza de estos, por lo tanto hay q identificar si son asintóticamente estables o inestables, o son estables en el sentido de Liapunov, o son hiperbólicos. Se utilizan estos métodos:

i) Por medio del criterio de estabilidad por linealización

ii) Usando integrales primeras en el caso de que puedan encontrarse, buscando funciones de Liapunov en estos puntos.

4. Localizar trayectorias cerradas o ciclos límites si se puede.

5. Dibujar algunas trayectorias en las regiones que de limitan las separatrices y siguiendo la guía de las isoclinas.

Capítulo 5

Ejemplos de Sistemas Dinámicos

En este capítulo se pretende presentar una serie de ejemplos de sistemas dinámicos con la idea de mostrar como la teoría antes presentada es usada para resolverlos, algunos de los ejercicios son de aplicación en la física o en otra rama del conocimiento. Los ejemplos fueron cuidadosamente seleccionados para poder abarcar todo el contenido del trabajo. También se quiere hacer enfasis en las diferentes técnicas que se usan cuando el sistema es lineal cuando el sistema es no lineal. En lo no lineal cobra gran importancia el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales, una de las herencias de Poincaré.

5.1. Ejemplo 1: Sistema diferencial lineal

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1) Resolver el problema

$$X' = AX\,, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Resolver el problema no homogénego

$$X' = AX + B(t)\,, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Desarrollo:

Hallamos los valores propios de A

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 5\\ -1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(-2-\lambda)+5=\lambda^2-4+5=\lambda^2+;$$

por lo tanto, los valores propios de A son $\lambda=\pm i$. Calculamos ahora el vector propio asociado al valor propio $\lambda=i$

$$\begin{pmatrix}2-i & 5\\ -1 & -2-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix};$$

que resulta el sistema

$$\begin{cases}(2-i)x+5y=0,\\ -x+(-2-i)y=0;\end{cases}$$

por tanto una solución es

$$v_1=\begin{pmatrix}5\\ -2+i\end{pmatrix}.$$

Para el valor propio $\lambda=-i$ tomamos como vector propio a

$$\overline{v_1}=v_2=\begin{pmatrix}5\\ -2-i\end{pmatrix}.$$

La matriz P (de cambio de base) y su inversa son

$$P=\begin{pmatrix}5 & 5\\ -2+i & -2-i\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad P^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1-2i & -5i\\ 1+2i & 5i\end{pmatrix}$$

entonces la exponencial de A se calcula así

$$e^{tA}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1-2i & -5i\\ 1+2i & 5i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{it} & 0\\ 0 & e^{-it}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 5\\ -2+i & -2-i\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}5e^{it}(1-2i)+5e^{-it}(1+2i) & -25e^{it}i+25e^{-it}i\\ e^{it}(-2+i)(1-2i)+e^{-it}(-2-i)(1+2i) & -5ie^{it}(-2+i)+5ie^{-it}(-2-i)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}+2\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} & 5\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\\ -\frac{e^{it}-e^{-it}}{2} & \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}-2\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\end{pmatrix}$$

y con las fórmulas

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \quad \text{y} \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

se llegua a la forma

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t & 5\sin t \\ -\sin t & \cos t - 2\sin t \end{pmatrix}$$

1) La solución del sistema homogéneo es

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{tA} X_0 \\ &= \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t & 5\sin t \\ -\sin t & \cos t - 2\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El sistema por tener valores propios complejos $\lambda = \pm i$ es un centro. La órbita es una elipse con centro en el origen. Eliminando el parámetro t se obtiene la ecuación cartesiana de la órbita:

$$\begin{cases} x(t) &= \cos t + 2\sin t \\ y(t) &= -\sin t \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad (x + 2y)^2 + y^2 = 1$$

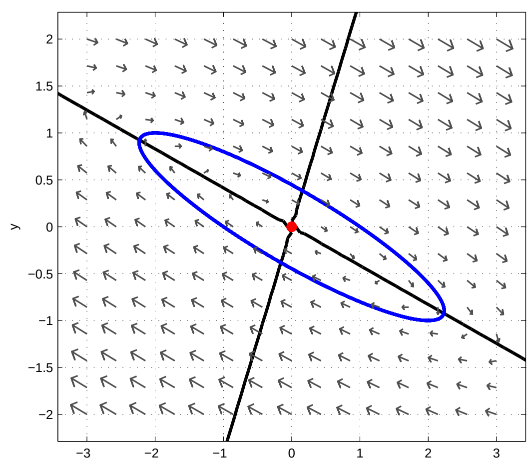

Figura 5.1: Plano de fases: solución particular $(1, 0)$

2) Aplicamos la fórmula de variación de constantes para el sistema no homgéneo

$$X(t) = e^{tA} \left[X_0 + \int_0^t e^{-sA} B(s) ds \right].$$

Entonces calculamos la solución así

$$
\begin{aligned}
e^{-sA}B(s) &= \begin{pmatrix} \cos s - 2\sin s & -5\sin s \\ \sin s & \cos s + 2\sin s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -5\sin^2 s \\ \frac{1}{2}\sin 2s + 2\sin^2 s \end{pmatrix};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \sin^2 s ds &= \frac{1}{2}\int_0^t (1-\cos 2s) ds = \frac{1}{2}\left.(s - \frac{1}{2}\cos 2s)\right|_0^t \\
&= \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t; \\
\int_0^t \sin 2s ds &= \left.(-\frac{1}{2}\cos 2s)\right|_0^t = -\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Y finalmente la solución es

$$
\begin{aligned}
X(t) &= \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t & 5\sin t \\ -\sin t & \cos t - 2\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}\sin 2t \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t + t - \frac{1}{2}\sin 2t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{9}{2}\sin t + \cos t - \frac{5}{2}t\cos t \\ \frac{1}{2}t\sin t - 2\sin t + t\cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

5.2. Ejemplo 2: Ecuación lineal de orden 2

Considere un resorte de longitud natural L, situado en un plano vertical y con un extremo fijo. Del extremo libre se cuelga una masa puntual m, siendo l la elongación que se produce en el resorte cuando el sistema está en equilibrio.

Se provoca inicialmente un desplazamiento x de la masa respecto de su posición de equilibrio, y deseamos obtener la ecuación del movimiento de la masa m.

Supondremos que el sistema se encuentra en un medio que ejerce una resistencia al movimiento proporcional a la velocidad.

La *ley de Hooke* afirma que la magnitud de la fuerza necesaria para producir un alargamiento s de un resorte es proporcional a s, con una constante k de proporcionalidad que depende solo del resorte y que se denomina constante del resorte. La segunda ley de Newton nos dice que $F = ma$ donde F es la fuerza total del sistema, m es la masa y a es la aceleración.

La ecuación de movimiento será

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x+l) - a\frac{dx}{dt}$$

donde mg es la fuerza producida por la gravedad, $k(x+l)$ es la fuerza debido a la ley de Hook y adx/dt es la resistencia del medio al movimiento $(a \geq 0)$.

Al analizar el caso donde la masa está en equilibrio, se tiene que $mg = kl$, entonces la ecuación de movimiento queda así

$$x'' + \frac{a}{m} + \frac{k}{m}x = 0$$

reescribiéndola obtenemos la forma

$$x'' + 2bx' + c^2x = 0 \quad \text{con} \quad 2b = \frac{a}{m} \geq 0 \quad , \quad c^2 = \frac{k}{m} > 0$$

Se pide:

1) Escribir un sistema diferencial lineal de primer orden equivalente a la E.D.O.

2) Clasificar y representar el espacio de fases de dicho sistema, distinguiendo todos los casos posibles según los valores de los diferentes parámetros de la ecuación.

Desarrollo:

1) Introducimos dos nuevas funciones incógnitas $x_1 = x$ y $x_2 = x'$ que son la posición y la velocidad respectivamente. El sistema diferencial equivalente es

$$\begin{cases} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -c^2x_1 - 2bx_2; \end{cases}$$

y en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & -2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

2) Este es un sistema diferencial lineal con coeficientes constantes, por lo tanto, debemos encontrar los valores propios de la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & -2b \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -c^2 & -2b-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2b\lambda + c^2.$$

Entonces los valores propios son

$$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2}.$$

Dependiendo del tipo de valores propios se tendrá la clasificación del espacio de fases. Veamos los diferentes casos:

Caso $b > c$.

Los valores propios de la matriz A son reales, distintos y estrictamente negativos. El origen es un nodo estable. Este caso corresponde con la situación de amortiguamiento supercrítico. A partir de cualquier posición inicial $(x_1(0), x_2(0))$ la masa tiende a su posición de equilibrio cuanto $t \to \infty$ (Figura 5.4).

Caso $b < c$.

Los valores propios son complejos conjugados, entonces debemos distinguir dos posibles situaciones:

Si $b = 0$.

Significa que el termino $2bx'$ de la ecuación es nulo, es decir, el movimiento no tiene amortiguamiento, la resistencia del medio al movimiento es nula. Los valores propios son puramente imaginarios, entonces el espacio de fases es un centro y todas las órbitas son periódicas. El movimiento de la masa es un oscilador armónico (Figura 5.2).

Si $b > 0$

Los valores propios son complejos conjugados con parte real estrictamente negativa, por lo tanto el espacio de fases es un foco estable o sumidero espiral. La masa a partir de una condición inicial oscilará al rededor del punto de equilibrio disminuyendo cada vez la amplitud del movimiento (Figura 5.3).

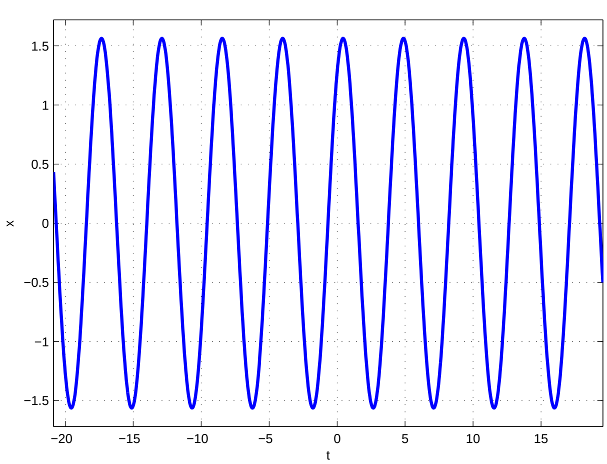

Figura 5.2: Sin amortiguamiento

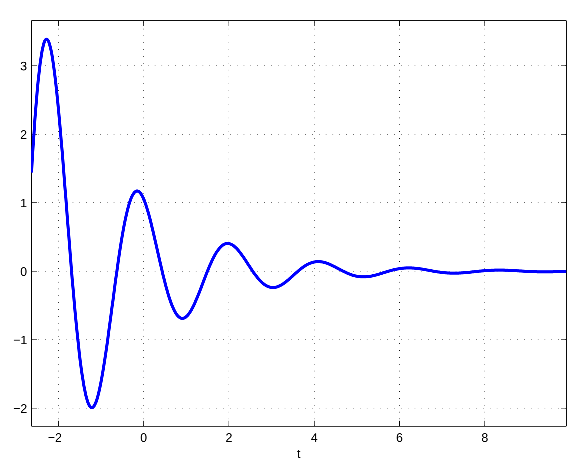

Figura 5.3: Oscilatorio amortiguado

Caso $b = c$.

la matriz tiene un autovalor real doble negativo. La matriz no es diagonalizable. El espacio de fases es un nodo estable. En este caso se dice que es una situación de amortiguamiento crítico. La masa dada cualquier posición inicial tiende a la posición de equilibrio (Figura 5.5).

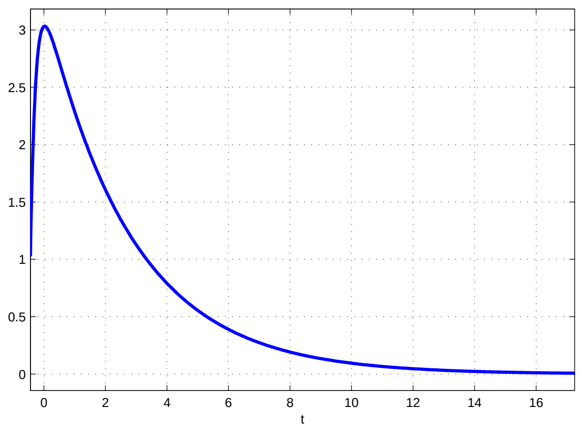

Figura 5.4: Amortiguamiento supercrítico

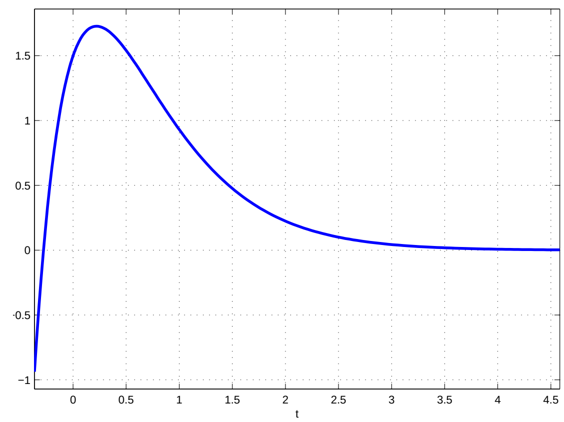

Figura 5.5: Amortiguamiento crítico

5.3. Ejemplo 3: Sistema no lineal plano

Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = x^2 + y - 1 \quad ; \quad y' = -2xy$$

Se pide hacer un dibujo cuidadoso de las distintas órbitas en el espacio de fases.

Desarrollo:

Los puntos de equilibrio del sistema son las soluciones del sistema

$$x^2 + y - 1 = 0 \quad , \quad xy = 0$$

que son

$$(0, 1) \quad , \quad (1, 0) \quad , \quad (0, 1).$$

Llamemos a $v_1 = x^2 + y - 1$ y a $v_2 = -2xy$ para calcular la matriz jacobiana del campo $v = (v_1, v_2)$ y estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio por linealización

$$Dv(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ -2y & -2x \end{pmatrix}.$$

Las matrices de los respectivos sistemas linealizados en los puntos de equilibrio son:

$$Dv(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad Dv(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad Dv(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios de la matriz jacobiana para cada uno de los puntos de equilibrio:

$$\det(Dv(0,1) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}i$$

El criterio no nos dice nada de este punto pues no es un punto de equilibrio hiperbólico.

$$\det(Dv(1,0) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 2$$

Es un punto hiperbólico, entonces el criterio nos dice que este es un punto de silla, por lo tanto inestable. Los vectores propios son $v_1 = (1,0)$ para $\lambda = 2$ y $v_2 = (-1,4)$ para $\lambda = -2$. El gráfico del sistema linealizado es:

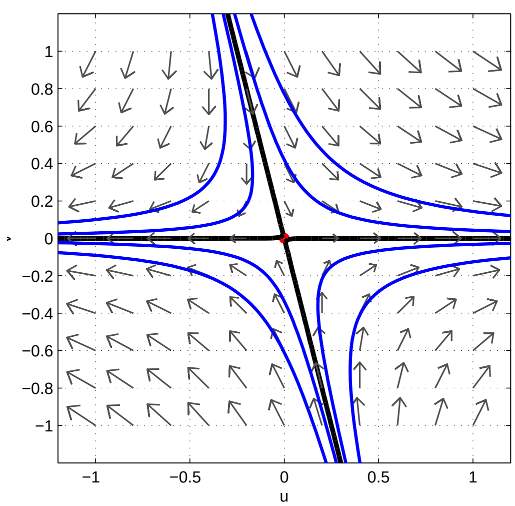

Figura 5.6: Linealización para $(1,0)$

$$\det(Dv(-1,0) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 2$$

Es también un punto hiperbólico, entonces el criterio nos dice que este es un punto de silla, por lo tanto inestable. Los vectores propios son $v_1 = (1,4)$ para $\lambda = 2$ y $v_2 = (1,0)$ para $\lambda = -2$. El gráfico del sistema linealizado es:

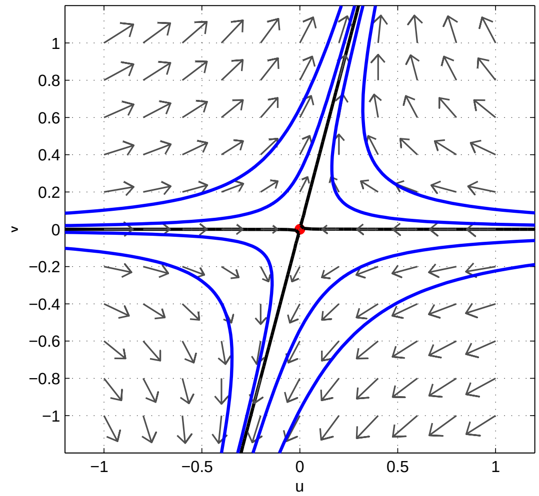

Figura 5.7: Linealización para $(-1, 0)$

El único punto de equilibrio que queda para determinar su estabilidad es $(0, 1)$. Para esto podemos encontrar una integral primera del sistema intentando integrar esta E.D.O.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{-2xy}{x^2 + y - 1}$$

que resulta ser una E.D.O. exacta y al resolverla tiene como solución general $2x^2y + y^2 - 2y = C$, entonces la integral primera del sistema es

$$f(x, y) = 2x^2y + y^2 - 2y.$$

La curva de nivel que contiene los puntos de equilibrio $(\pm 1, 0)$ que es de nivel cero es

$$2x^2y + y^2 - 2y = 0,$$

se compone por la recta $y = 0$ y la parábola $y = 2 - 2x^2$.

La integral primera encontrada anteriormente es candidata para ser una función de Liapunov en $(0, 1)$ pues cumple la condición

$$\mathcal{L}_v f(x, y) = 0.$$

Veamos que cumple las condiciones; primero calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2y - 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 > 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

lo cual conduce a

$$D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 8 > 0$$

Se concluye que f es una función contínua y diferenciable y hay un mínimo relativo estricto en $(0, 1)$. Por lo tanto, el origen es un punto de equilibrio estable, no asintóticamente pues la integral primera no es constante en un entorno del punto de equilibrio.

Según el teorema de Poincaré, las órbitas cerradas rodean a los puntos de equilibrio y como las trayectorias no pueden cortarse se infiere del aspecto de la curva de nivel cero de la intergral primera que solo podría haber órbitas cerradas en el conjunto limitado por la parábola $y = 2 - 2x^2$ y $y = 0$.

Este conjunto es positivamente invariante puesto que su frontera está formada por órbitas del sistema dinámico.

Como la integral primera f no es constante en ningun abierto del espacio de fases entonces por el corolario 4.1. el sistema no tiene ciclos límite en ninguna parte. La afirmación c) del teorema 4.10. de Poincaré-Bedixson no es posible por la forma de las órbitas en la curva de nivel 0 de la integral primera. Se concluye entonces que todas las órbitas contenidas en este conjunto son cerradas. La gráfica 5.8 representa el plano de fases del sistema no lineal plano.

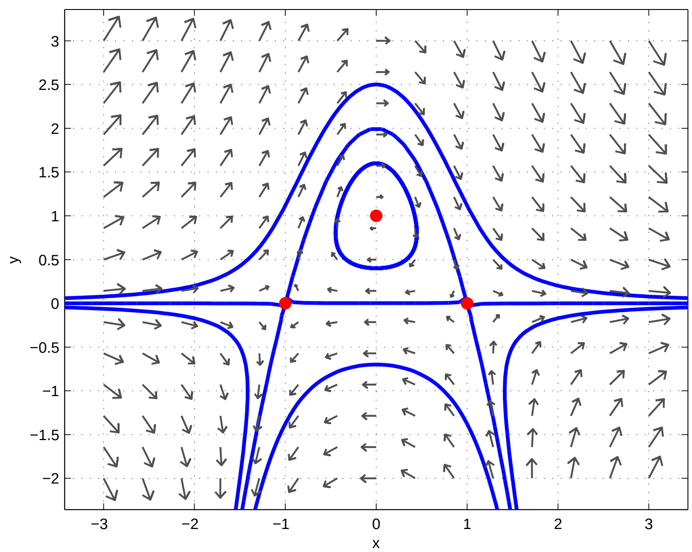

Figura 5.8: Plano de fases

5.4. Ejemplo 4: Sistema gradiente

Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = xy^2 - x \quad , \quad y' = x^2y - y.$$

Se pide hacer un dibujo cuidadoso de las distintas órbitas en el plano de fases.

Desarrollo:

Primero denotamos por $v = (v_1, v_2)$ al campo vectorial asociado al sistema diferencial. El campo satisface la condición

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial v_2}{\partial x}$$

por lo tanto el sistema diferencial es gradiente, podemos calcular la función potencial W así

$$-\frac{\partial W}{\partial x} = v_1 \quad , \quad -\frac{\partial W}{\partial y} = v_2$$

tomamos la primera igualdad e integramos

$$W(x,y) = -\int (xy^2 - x)dx + h(y)$$

$$-\frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + h(y),$$

luego de la segunda igualdad tenemos que

$$\frac{\partial W}{\partial y} = -x^2y + h'(y) = -x^2y + y \quad \Rightarrow \quad h'(y) = y \quad \Rightarrow \quad h(y) = \frac{y^2}{2} + k$$

Resulta en este caso:

$$W(x,y) = -\frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

Como el sistema es gradiente entonces no tiene órbitas cerradas.

Los puntos de equilibrio son solución del sistema

$$x(y^2-1) = 0 \quad , \quad y(x^2-1) = 0)$$

y resultan los puntos

$$(0,0) \quad , \quad (1,1) \quad , \quad (1,-1) \quad , \quad (-1,1) \quad , \quad (-1,-1)$$

La matriz jacobiana del campo vectrial es

$$Dv(x,y) = \begin{pmatrix} y^2-1 & 2xy \\ 2xy & x^2-1 \end{pmatrix}$$

Las matrices de los respectivos sistemas linealizados en los puntos de equilibrio son:

$$Dv(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad Dv(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad Dv(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Dv(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad Dv(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos ahora los valores propios de cada matriz y tenemos que:

$$\det(Dv(0,0) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1$$

Esta matriz solo tiene un único valor propio negativo entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable. Los vectores propios son $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (0,1)$ para $\lambda = -1$. Las órbitas en este entorno son rectas que tienden al origen desde cualquier dirección. La gráfica 5.9 muestra el sistema linealizado en $(0,0)$.

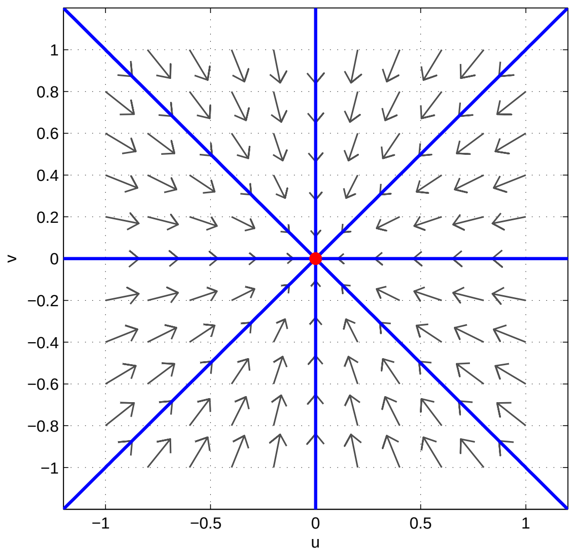

Figura 5.9: Linealización en $(0,0)$

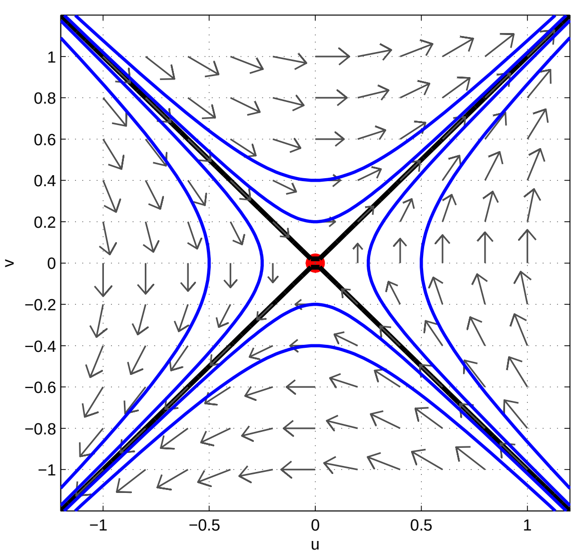

Figura 5.10: Linealización en $(1,1)$

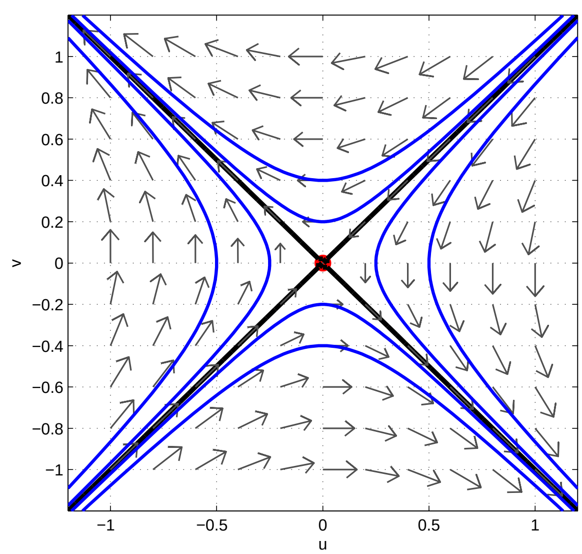

Figura 5.11: Linealización en $(-1,1)$

Veamos los otros puntos.

$$\det(Dv(1,1)-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & 2\\ 2 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\pm 2$$

Esta matriz tiene dos valores propios, uno positivo y uno negativo, el punto es inestable, es un puerto. Los vectores propios son $v_1=(-1,1)$ para $\lambda=-2$ y $v_2=(1,1)$ para $\lambda=2$. Los demás puntos de equilibro tienen los mismos valores propios, por lo tanto todos son inestables y puertos. Las gráficas 5.10 y 5.11 representan la linealización para los puntos $(1, 1)$ y $(-1, 1)$. Para los otros dos puntos de equilibrio se tiene algo semejante.

Las rectas $y = x$ y $y = -x$ son invariantes y tienden al origen o al infinito. Las rectas $y = 0$ y $x = 0$ son positivamente invariantes y tienden al origen. Las demás órbitas tienden al origen cuando $t \to \infty$ ó tienden a infinito cuando $t \to \infty$ dependiendo del punto de partida (Figura 5.12).

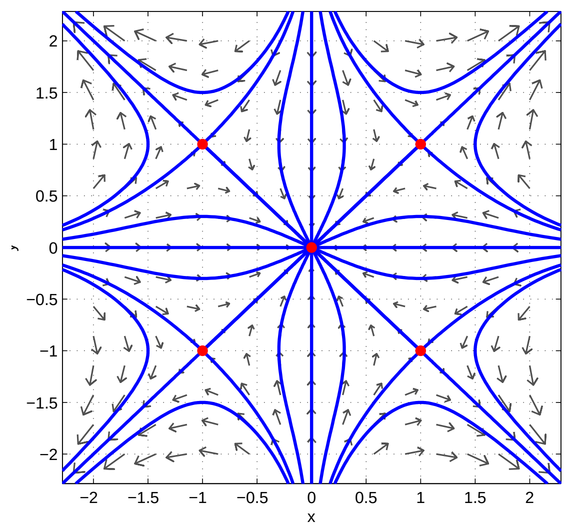

Figura 5.12: Plano de fases

5.5. Ejemplo 5: Modelo de Kepler del movimiento de un cuerpo celeste

Considere el modelo de Kepler del movimiento de un cuerpo celeste alrededor del Sol:

$$r'' = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^2}$$

donde $r > 0$ representa la distancia del cuerpo celeste al Sol. Se pide estudiar el sistema y obtener el plano de fases.

Desarrollo:

La ecuación de movimiento es una E.D.O. de orden dos no lineal, podemos escribir un sistema diferencial equivalente de primer orden llamando a $x = r$ y a $y = r'$ y queda así

$$\begin{cases} x'(t) = y, \\ y'(t) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Calculamos los puntos de equilibrio del sistema con la solución de

$$\begin{cases} y = 0, \\ \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} = 0; \end{cases}$$

y nos da un único punto de equilibrio que es $(1,0)$. Eso quiere decir que si un cuerpo celeste esta situado a una distancia $r = 1$ del Sol tendrá velocidad radial cero, entonces se moverá por curvas cuyos puntos están todos a la misma distancia $r = 1$ del Sol.

Como el segundo miembro de la ecuación en y' es una función contínua en $(0, \infty)$ y depende solamente de r entonces el sistema es conservativo. Podemos calcular la energía potencial del campo

$$-U'(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad U(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + C$$

La constante C la encontramos con la condicion de equilibrio $U(1) = 0$ y nos da $C = 1/2$, luego

$$U(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{(x-1)^2}{2x^2}.$$

Y como es un sistema conservativo la energía total del sistema es:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{(x-1)^2}{2x^2},$$

y esta es una integral primera del sistema.

Ahora analizando la energía potencial encontramos sus puntos críticos haciendo $U'(x) = 0$. Tiene un punto crítico y es $(1,0)$ que es un mínimo estricto, entonces este punto es estable pero no asintóticamente.

Llamamos E a la energía total del sistema, despejamos y y obtenemos

$$y = \pm\sqrt{2E - \frac{(x-1)^2}{x^2}};$$

dando valores a E se obtienen las curvas de nivel de la integral primera. Esta función es simétrica respecto del eje x. Entonces puede tener dos intersecciones con el eje x, se encuentran igualando la función a cero

$$2E - \frac{(x-1)^2}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (2E-1)x^2 + 2x - 1 = 0$$

entonces los puntos de corte son cuando

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{2E}}{(2E-1)}.$$

Se distinguen varios casos:

a) Si $E < 0$, no existen curvas de nivel;

b) Si $E = 0$, se obtiene la curva de nivel correspondiente al punto de equilibrio, que se reduce al punto;

c) Si $E > 0$, existen dos casos:

   i) Si $0 < E < 1/2$, la curva de nivel corta al eje x en la parte positiva en dos puntos, lo que nos dice que las órbitas son cerradas;

   ii) Si $E \geq 1/2$, la curva de nivel corta al eje x en la parte positiva en un punto, por tanto las curvas no son cerradas.

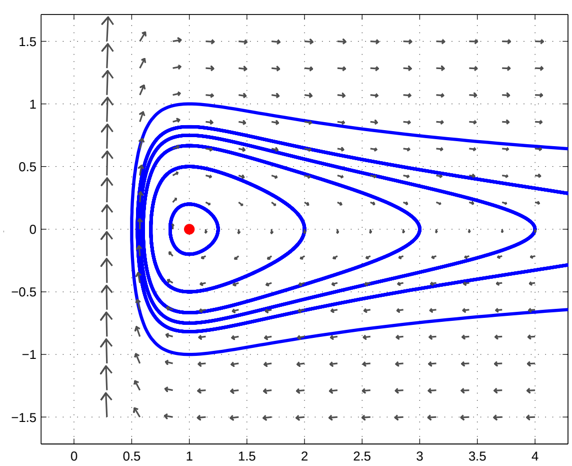

Figura 5.13: Plano de fases

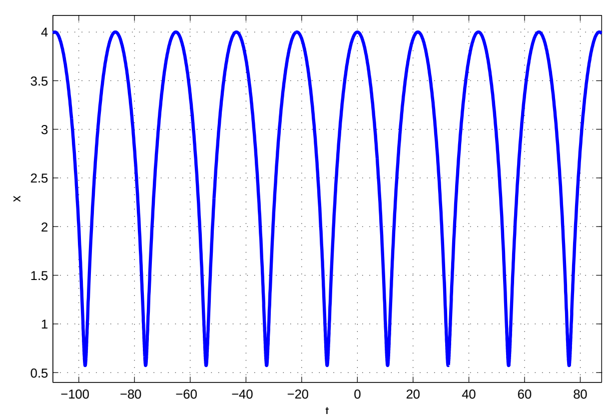

Figura 5.14: Gráfica de x vs. t

5.6. Ejemplo 6: Ciclo límite

Se considera el sistema diferencial de primer orden no lineal plano dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x' = -y - x(x^2 + y^2 - a) \\ y' = x - y(x^2 + y^2 - a). \end{cases}$$

Se pide realizar un esbozo del plano de fases según los diferentes valores de a.

Desarrollo:

Por la forma del sistema podemos realizar un cambio de coordenadas a polares haciendo $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$ y resulta

$$\begin{cases} r'\cos\theta - r\sin\theta\theta' = -r\sin\theta - r\cos\theta(r^2 - a) \\ r'\sin\theta + r\cos\theta\theta' = r\cos\theta - r\sin\theta(r^2 - a) \end{cases}$$

y despejando r' y θ' se tiene:

$$\begin{cases} r' = -r(r^2 - a) \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

Resultan dos E.D.O. de variables separables que se pueden integrar fácilmente. Veamos los casos que resutan para los diferentes valores de a. La solución general de la segunda ecuación del sistema es $\theta(t) = t + \theta_0$ y es igual para todos los casos.

Si $a < 0$.
Escribimos $a = -b^2$ con $b > 0$ para comodidad de los cálculos. Entonces el sistema es:

$$\begin{cases} r' = -r(r^2 + b^2), \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

De este sistema se ve que el punto de equilibrio es cuando $r = 0$, es decir el origen.

La solución general de la primera ecuación la encontramos así:

$$\frac{r'}{r(r^2 + b^2)} = 1.$$

Usamos fracciones parciales

$$\frac{1}{r(r^2 + b^2)} = \frac{A}{r} + \frac{Br + C}{r^2 + b^2}$$

resolviendo se llega a que

$$A = \frac{1}{b^2} \quad , \quad B = -\frac{1}{b^2} \quad , \quad C = 0.$$

Integrando a ambos lados del igual se obtiene

$$\frac{1}{b^2}\ln r - \frac{1}{2b^2}\ln(r^2 + b^2) = -t + k_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{r^2}{r^2 + b^2} = Ke^{-2b^2 t} \quad \text{con} \quad K = e^{2b^2 k_1}$$

$$\Rightarrow \quad r(t) = \frac{\sqrt{K}be^{-b^2 t}}{\sqrt{1 - Ke^{-2b^2 t}}}$$

Si $t = 0$ entonces
$$K = \frac{r_0^2}{r_0^2 + b^2}.$$
Calculamos el límite cuando t tiende a infinito de $r(t)$
$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{K} b e^{-b^2 t}}{\sqrt{1 - K e^{-2b^2 t}}} = 0$$
por lo tanto el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable, y no hay soluciones periódicas.

Si $a = 0$.
El sistema es:
$$\begin{cases} r' = -r^3, \\ \theta' = 1. \end{cases}$$
Nuevamente resultan el único punto de equilibrio es cuando $r = 0$, es decir el origen. También resultan dos ecuaciones de variables separables, integrando se obtiene:
$$\frac{r'}{r^3} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2} = 2t + C \quad \Rightarrow \quad r(t) = \frac{1}{\sqrt{2t + C}}$$
Haciendo $t = 0$ se obtiene $C = 1/r_0^2$.

Tomando el límite de $r(t)$ cuando t tiende a infinito se obtiene que
$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2t + C}} = 0.$$
Por lo tanto el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. No hay trayectorias cerradas.

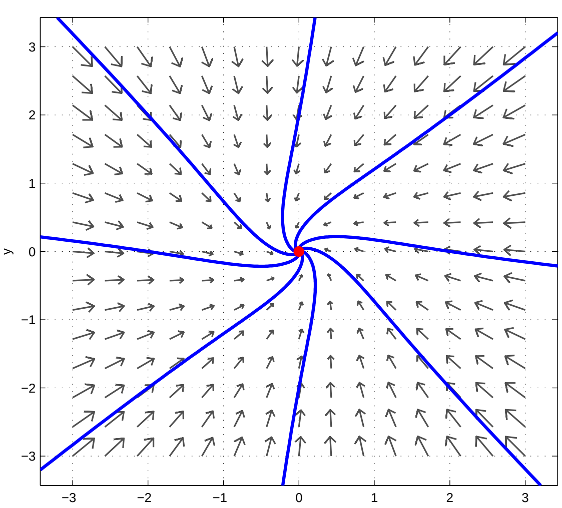

Figura 5.15: Caso $a < 0$

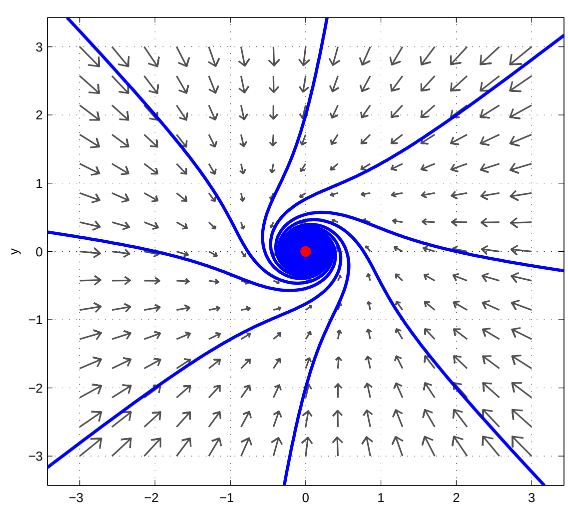

Figura 5.16: Caso $a = 0$

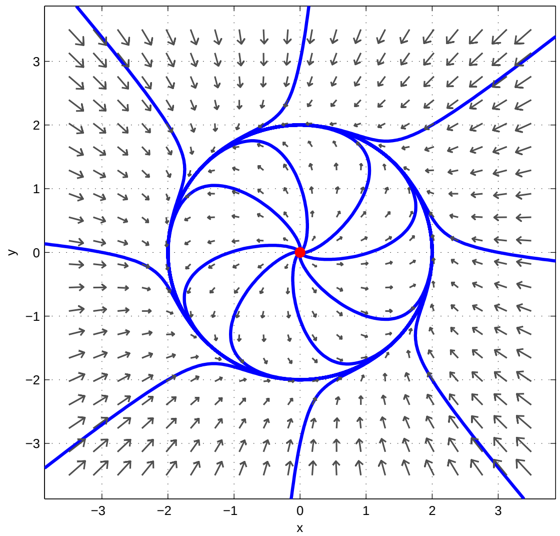

Figura 5.17: Caso $a > 0$

Si $a > 0$.
Escribimos $a = b^2$ con $b > 0$. El sistema es:

$$\begin{cases} r' = -r(r^2 - b^2) \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

El único punto de equilibro es cuando $r = 0$ y es nuevamente el origen. Nuevamente dos ecuaciones de variables separables que se resuelven así:

$$\frac{r'}{r(r^2 - b^2) = -1}$$

Aplicamos fracciones parciales

$$\frac{1}{r(r^2 - b^2)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r - b} + \frac{C}{r + b}$$

resolviendo se obtiene

$$A = -\frac{1}{b^2} \quad , \quad B = C = \frac{1}{2b^2}.$$

Integrando resulta:

$$\ln \frac{|r^2 - b^2|}{r^2} = -2b^2 t + \ln |K| \quad \Rightarrow \quad \frac{r^2 - b^2}{r^2} = K e^{-2b^2 t}$$

Entonces la solución general es

$$r(t) = \frac{b}{\sqrt{1 - K e^{-2b^2 t}}}$$

Tomando el límite cuando t tiende a infinito resulta

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{b}{\sqrt{1-Ke^{-2b^2t}}} = b.$$

Por lo tanto, el origen es un punto de equilibrio inestable, es un nodo fuente. Las trayectorias tienden desde cualquier posición inicial a la órbita $r = b$, por lo tanto esta es un ciclo límite y es estable.

5.7. Ejemplo 7: Modelo simplificado de especies en competición

Se considera el siguiente sistema diferencial plano definido en el primer cuadrante $x \geq 0$ y $y \geq 0$:

$$\begin{cases} x' = x(1-x-ay) \\ y' = y(2-x-2y) \end{cases}$$

En el que $a > 0$ es un parámetro real. Este repsistema resenta un modelo simplificado de la dinámica de dos especies de animales de población $x(t)$ y $y(t)$, que viven en un mismo ecosistema y que compiten por los mismos recursos. Se pide analizar el espacio de fases para los diferentes valores del parámetro a. Determinar los valores de a para los cuales ambas especies coexisten.

Desarrollo:

Primero calculamos los puntos de equilibrio del sistema diferencial resolviendo

$$\begin{cases} x(1-x-ay) \\ y(2-x-2y). \end{cases}$$

Los puntos de equilibrio son:

$$(0,0) \quad , \quad (0,1) \quad , \quad (1,0) \quad , \quad \left(\frac{2(1-a)}{2-a}, \frac{1}{2-a}\right).$$

Si $a = 1$ entonces el último punto se reduce al segundo; ese caso no nos interesa. Si $a = 2$ los únicos puntos son los tres primeros. También como solo estamos considerando el plano de fases en el primer cuadrante entonces el último punto está en este cuadrante si y solo si $a < 1$. Por lo tanto, los casos a considerar son dos: $0 < a < 1$ con los cuatro puntos de equilibrio considerados y $a > 1$ con los tres primeros puntos de equilibrio.

Estudiemos los puntos de equilibrio por el criterio de linealización. La matriz jacobiana del campo vectorial es

$$Dv(x,y) = \begin{pmatrix} 1-2x-ay & -ax \\ -y & 2-x-4y \end{pmatrix}$$

Si $a > 1$.
En cada punto de equilibrio se tiene

$$Dv(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 2$$

El punto $(0,0)$ punto tiene dos valores propios, uno positivo y otro negativo, es inestable, es un puerto.

$$Dv(0,1) = \begin{pmatrix} 1-a & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1-a < 0 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -2.$$

El $(0,1)$ punto tiene dos valores propios negativos por lo tanto es asintóticamente estable, un sumidero.

$$Dv(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 1.$$

El $(1,0)$ punto tiene dos valores propios, uno positivo uno negativo entonces es inestable, un puerto. El diagrama de fases es el siguiente:

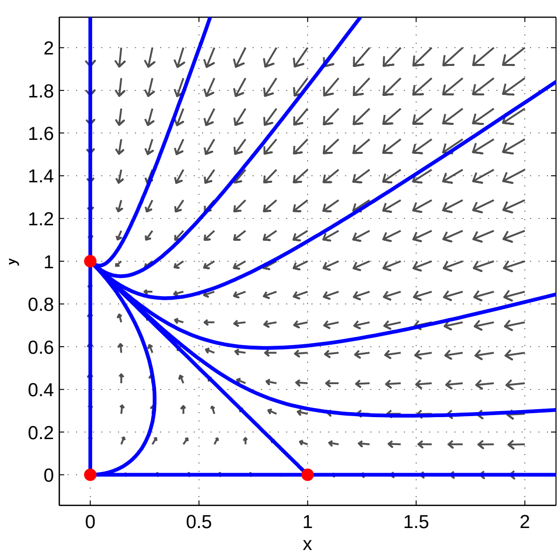

Figura 5.18: Caso $a > 1$

Si $0 < a < 1$.
La estabilidad de los puntos de equilibrio $(0,0)$ y $(1,0)$ es exactamente igual que en caso anterior, una fuente y un puerto respectivamente. El punto $(0,1)$ tiene dos valores propios $\lambda_1 = 1-a > 0$ y $\lambda_2 = -2$ uno positivo y otro negativo, entonces ahora este punto es inestable, es un puerto.

Analicemos ahora el cuarto punto de equilibrio:

$$Dv\left(\frac{2(1-a)}{2-a}, \frac{1}{2-a}\right) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{4(1-a)}{2-a} - \frac{a}{2-a} & \frac{2a(1-a)}{2-a} \\ -\frac{1}{2-a} & 2 - \frac{2(1-a)}{2-a} - \frac{4}{2-a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2(1-a)}{2-a} & \frac{2a(1-a)}{2-a} \\ -\frac{1}{2-a} & -\frac{2}{2-a} \end{pmatrix}.$$

Para saber la estabilidad de este punto calculamos la traza y el determinante de la matriz

$$\mathrm{Tr}A = \frac{-2-2(1-a)}{2-a} = -2 < 0$$

$$\det A = \left(\frac{-2(1-a)}{2-a}\right)\left(\frac{-2}{2-a}\right) - \left(\frac{2a(1-a)}{2-a}\right)\left(\frac{-1}{2-a}\right) = \frac{2(a+2)(1-a)}{(2-a)^2} > 0$$

Por lo tanto según la clasificación en el plano traza-determinante este punto es estable. El plano de fases es el siguiente:

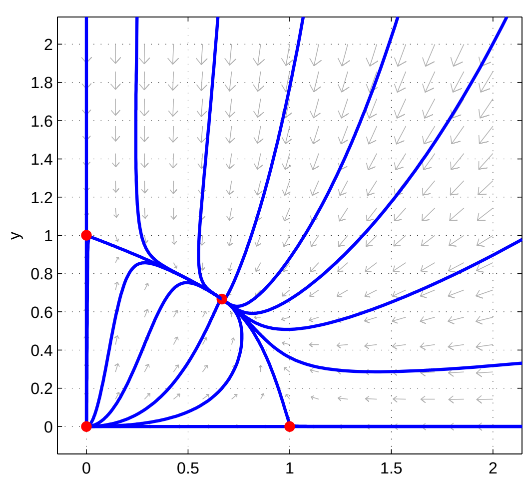

Figura 5.19: Caso $0 < a < 1$

Las dos especies en competición pueden coexistir si $0 < a < 1$. Si $a < 1$ la especie que representa x se extingue siempre.

5.8. Ejemplo 8: Péndulo no lineal

Considere la siguiente ecuación diferencial

$$\theta'' = -\sin\theta$$

que representa las oscilaciones de un péndulo, siendo $\theta = \theta(t)$ el ángulo que forma el péndulo en el instante t con su posición de equilibrio, que es la vertical.

Se pide realizar un gráfico del espacio de fases cuidadoso.

Desarrollo:

El sistema diferencial equivalente se obtiene introduciendo las nuevas variables $x_1 = \theta$ y $x_2 = \theta'$, resultando:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -\sin x_1. \end{cases}$$

Resulta ser un sistema mecánico conservativo pues el segundo miembro de la ecuación de x_2' depende de x_1 solamente, entonces la energía potencial es

$$-U'(x_1) = \sin x_1 \quad \Longrightarrow \quad U(x_1) = -\cos x_1$$

y cuya integral primera, que es la energía total, es:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - \cos x_1.$$

Encontramos los puntos de equilibrio del sistema hallando los puntos críticos de $U(x_1) = -\cos x_1$. Como es la función coseno se sabe que los puntos críticos son de la forma $x_1 = n\pi$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Entonces los puntos de equilibrio del sistema diferencial son de la forma $(n\pi, 0)$.

Se pueden distinguir de dos clases; los de la forma $(2n\pi, 0)$ son mínimos relativos estrictos, entonces estos puntos son estables pero no aistóticamente porque la integral primera no es constante en entornos de estos. Los puntos de la forma $((2n+1)\pi, 0)$ son máximos relativos estrictos, entonces estos puntos son inestables. Para saber el comportamiento alrededor de estos puntos analizamos por el criterio de linealización. La matriz jacobiana viene dada por:

$$Dv(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos x_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad Dv(2n\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene valores propios complejos puros, entonces el criterio no nos dice nada.

$$Dv(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos x_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad Dv((2n+1)\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de esta matriz son $\lambda = \pm 1$, por lo tanto es un puerto o punto de silla, los vectores propios asociados son $v_1 = (1, 1)$ para $\lambda = -1$ y $v_2 = (-1, 1)$ para $\lambda = 1$. La forma del sistema linealizado en un entorno de uno de ellos es así:

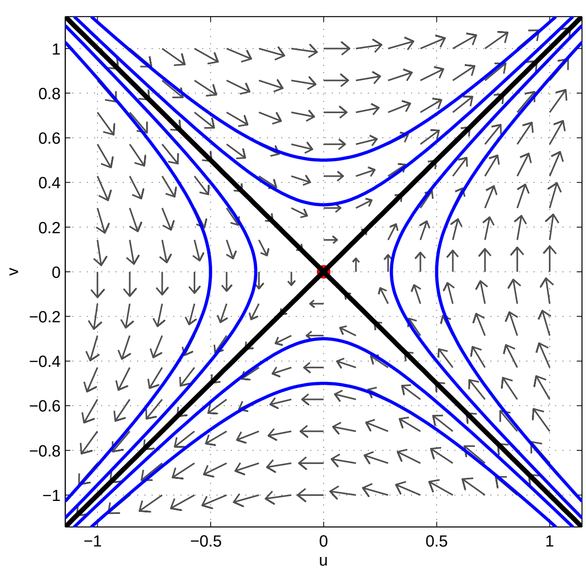

Figura 5.20: Linealización en $(\pi, 0)$

Si llamamos a la energía total E tenemos que

$$E = \frac{1}{2}x_2^2 - \cos x_1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \pm\sqrt{2(E + \cos x_1)}$$

La curva de nivel correspondiente a $E = 1$ es la que contiene los puntos de equilibrio que son inestables y forma conjuntos conpactos como se ve en la figura 5.21.

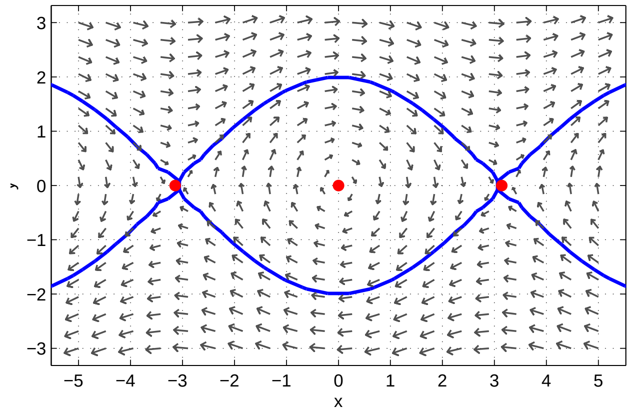

Figura 5.21: $E = 1$

Para $E > 1$ y para $0 < E < 1$ las curvas de nivel se representan en las gráficas siguientes:

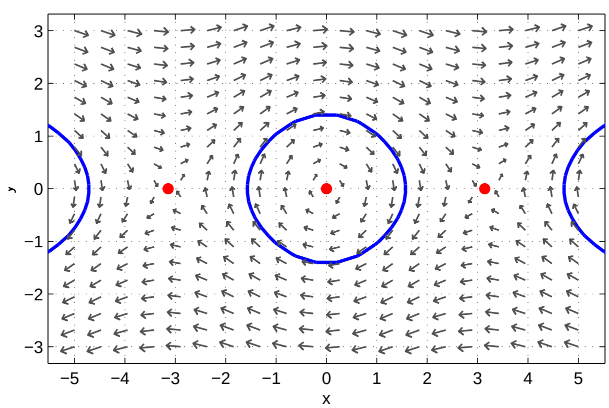

Figura 5.22: $0 < E < 1$

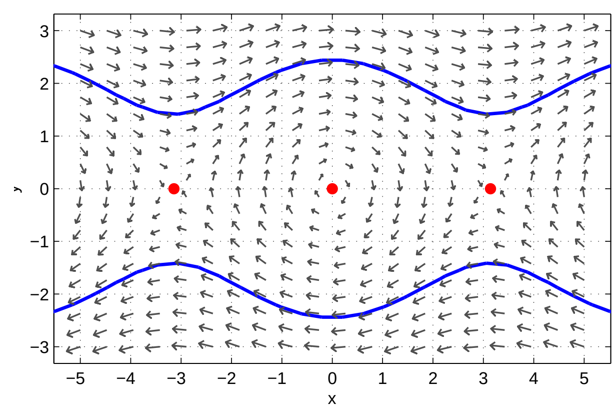

Figura 5.23: $E > 1$

La curva de nivel $E = 1$ delimita conjuntos compactos que son positivamente invariantes pues sus fronteras estan formadas por órbitas del sistema. La integral primera no es constante en ningún subconjunto abierto entonces no hay ciclos límite. Ninguna trayectoria tiende a los puntos de equilibrio que están dentro de estos conjuntos.

Por el teorema de Poincaré-Bendixson se tiene que todas las órbitas contenidas en los subconjuntos invariantes formados por la curva del nivel $E = 1$ son cerradas y además rodean puntos de equilibrio.

Finalmente obtenemos el retrato de fases para el péndulo no lineal

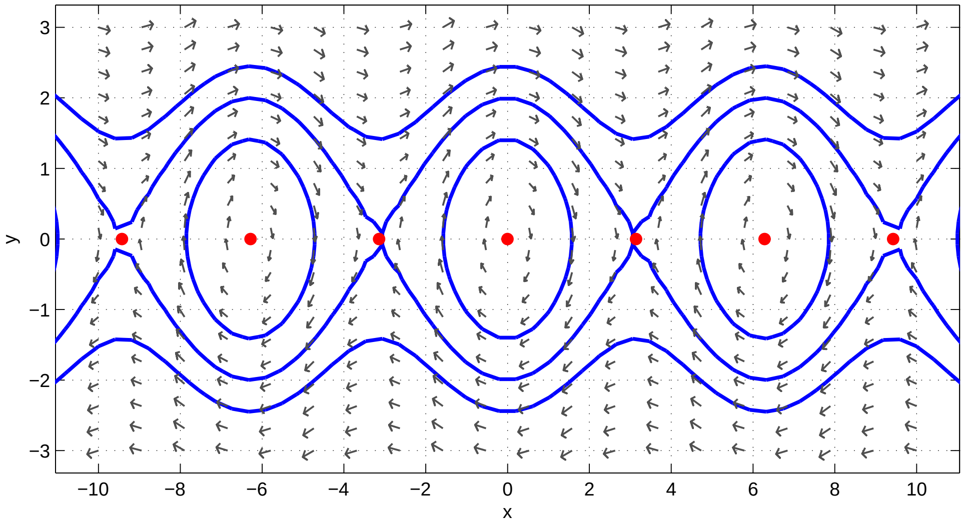

Figura 5.24: Plano de fases péndulo no lineal

Conclusiones

- La teoría de los sistemas dinámicos consiste en estudiar el comportamiento de cuanta cosa cambia en el Universo por medio de modelos matemáticos, en el caso del estudio realizado los procesos se llaman diferenciables pues la ley que marca su evolución viene dada por una función diferenciable. Entonces los sistemas dinámicos y los sistemas de eciaciones diferenciables estan estrechamente relacionados pues estas marcan una ley de evolución.

- Esta teoría en particular involucra varias ramas de la matemática; como el álgebra, la geometría, el cáculo, el análisis, los métodos numéricos, la topología, y otras más; lo que la hace muy enriquecedora matemáticamente hablando.

- El paso de lo lineal a lo no-lineal introduce un gran cambio en el estudio de los sistemas dinámicos. En el caso lineal la solución general de los sistemas se obtiene analíticamente, en cambio en lo no-lineal esto no es posible, por lo tanto, gracias a Poincaré se introduce un estudio cualitativo de los sistemas de ecuaciones diferenciables, dándonos información del comportamiento de las trayectorias definidas por estos sistemas.

- El estudio analítico y cualitativo de los sistemas dinámicos nos ofrece información tanto local como global del retrato de fase del sistema, permitiendo caracterizar el comportamiento de las trayectorias. El caso de los sistemas planos queda caracterizado por las diferentes técnicas presentadas.

- Las ecuaciones ordinarias diferenciables y sistemas de ecuaciones y su empleo sistemático, son un instrumento muy efectivo para resolver muchas cuestiones de diferentes ramas del conocimiento.

- Debido a las leyes de Newton las ecuaciones diferenciables de los primeros ordenes son las más utilizadas para las aplicaciones en la Física , Química, Biología y otras ramas. El cambio de la posición de un cuerpo con respecto al tiempo ,es decir la velocidad, y el cambio de la velocidad con respecto al tiempo, es decir la aceleración; son la primera y segunda derivada de la posicion con respecto al tiempo, por lo tanto, las ecuaciones de movimiento de los cuerpos van a venir dadas en términos de primeras y segundas derivadas en la mayoría de los casos.

- Estudiar una teoría matemática, o mas bien esta parte de la teoría, y ver la cantidad de aplicaciones que esta tiene, junto con el surgimiento histórico ha sido realmente muy interesante porque nos muestra por un aparte lo que han tenido que pasar los matemáticos y científicos involucrados para desarrollar sus ideas, y por otra el contexto cultural e histórico de la época.

- El gran matemático Henri Poincaré es el innegable punto de origen de los sistemas dinámicos, el inesperado suceso del concurso mostró al mundo científico las revolucionarias ideas de este genio, que quizas por ser tan revolucinarias hubo que esperar un tiempo para que algunos matemáticos y físicos se interesaran en estas. Y tal es el caso que hoy en día ese estudio de la teoría al parecer no tiene como detenerse.

Bibliografía

[1] ANDERSEN K.G. (1994). *Poincaré's discovery of homoclinic points*. Archive for history of exact sciences. Volume 48 No. 2. 133-147 pp.

[2] ARNAUD Marie – Claude, et autres. (2013). *Voyages en Mathematiques. Destination Systemes dynamiques avec Poincaré*. Paris: Editions Le Pommier. 146 p.

[3] AUBIN D. y DAHAN-DALMEDICO Amy. (2002). *Writting the History of Dynamical Systems and Chaos*. Historia de la Mathematica. Volume 29. 273 - 339 pp.

[4] BARROW Green, June. (1994). *Oscar II's Prize competition and the error in Poincaré's Memor on the Three Body Problem*. Archivo for the History of Exact Science. Volumen 48 No. 2. p 107 – 131.

[5] CAMPOS Alberto. (2007). *Bosquejo Histórico de los sistemas dinámicos desde Poincaré hasta 1960*. Bogota. 12 p.

[6] CAMPOS Alberto. (2013). *Epistemología de la matemática*. Colección OBRA SELECTA. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá. xlvi+781 p.

[7] DAHAN-DALMEDICO Amy. (1996). *Le difficile héritage de Henri Poincaré en systemes dynamiques*. P 13 – 33. En: Henry Poincaré Science et philosiphie. Paris: Albert Blan – Chard. p 598.

[8] HIRSCH Morris W., SMALE Stephen y DEVANEY Robert L. (2013). *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introdution to Chaos* 3rd ed. Academic Press, Waltham, MA.

[9] HUBBARD John H. y WEST Beverly H. (1991). *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach*. I y II. Texts in Applied Mathematics: 5, 18. Springer-Verlag, Berlín.

[10] MADRID Carlos M. *Las Matemáticas del cambio climático*. Colección: ciencia al viento No. 15. febrero 2016. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá 60 p.

[11] SANCHEZ Eva, GONZALEZ José y GUTIERREZ Joaquín. (2014). *Sistemas dinámicos: una introducción a través de ejercicios*. Madrid: Quinta edición. DEXTRA editorial. 425 p.

[12] TABOR Michael. (1989). *Chaos and Integrability in nolinear mechanics. An introduction*. Wiley. xiii+364 pp.

[13] VILLANI Cédric. (2013). *La meilleure et la pire des erreurs de Poincaré*. Compte-rendu de la conférence de Cédric Villani a Metz, rédigé par Catherine Conbelles, et revu par Villani. Bulletin APMEP No. 503. Mars - avril. 195 - 216 pp.

[14] YOCCOZ Jean-Christophe. (2006). *Une erreur féconde du mathématicien Henri Poincaré*. Gazette des mathématiciens. S.M.F. # 107. Janvier. 19-26 pp.