APROXIMACIONES CUADRÁTICAS CON POLINOMIOS DE TAYLOR Y VALORES PROPIOS PARA CLASIFICAR ALGUNAS FUNCIONES DE $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

JUAN PABLO JIMÉNEZ PERALTA

CC: 1.073.234.691 Mosquera (Cund.)

Código: 2009240028

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C., COLOMBIA

2017

APROXIMACIONES CUADRÁTICAS CON POLINOMIOS DE TAYLOR Y VALORES PROPIOS PARA CLASIFICAR ALGUNAS FUNCIONES DE $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

JUAN PABLO JIMÉNEZ PERALTA

CC: 1.073.234.691 Mosquera (Cund.)

Código: 2009240028

Trabajo de grado asociado al interés profesional del estudiante, presentado como requisito para optar al título de:

Licenciado en Matemáticas

ASESOR:

MG. ORLANDO AYA CORREDOR.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C., COLOMBIA

2017

DEDICATORIA

La dedicación de este trabajo de grado es primero para Dios Todo Poderoso y la Virgen María, que siento me dan fuerza, constancia, serenidad y sabiduría para hacer las cosas de la mejor manera las cuales me propongo, en mis estudios y en mi diario vivir.

A mis padres, mis hermanos y todos los familiares que con su amor incondicional, paciencia y consejos, me dieron aliento para nunca desfallecer en los objetivos que he alcanzado y que me sigo proponiendo para mi vida.

A mi novia que es una parte muy importante de mi vida y que con su apoyo absoluto e ideas me hace crecer, todos los días, como una persona íntegra.

Por último, dedico este trabajo de grado a mis amigos, a mis compañeros de clase universitarios, que fueron numerosos, y a las personas allegadas, quienes de una u otra forma han intervenido de buena manera para que este objetivo se cumpliera y que han contribuido a mi formación académica, profesional y personal.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia por permitir formarme profesional, académicamente, pero ante todo como persona.

Al asesor de mi trabajo de grado, Profesor Orlando Aya Corredor, primero por aceptar esta responsabilidad, por sus aportes intelectuales, por su mucha paciencia y por su gestión, que fueron de grandísima importancia para avanzar y culminar con éxito este objetivo propuesto.

A todos los profesores, que dejaron una huella imborrable en mi vida y a los cuales les debo todos los conocimientos que, como docente, desarrolle en la Universidad.

1.Información General	
Tipo de documento	Trabajo de Grado.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Aproximaciones cuadráticas con polinomios de Taylor y valores propios para clasificar algunas funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Autor(es)	Jiménez Peralta, Juan Pablo.
Director	Orlando Aya Corredor.
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2017, 82 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional.
Palabras Claves	PUNTO CRÍTICO, APROXIMACIÓN CUADRÁTICA, FUNCIÓN CUADRÁTICA, VALORES PROPIOS, MATRIZ HESSIANA.

2.Descripción

Este trabajo de grado propone la descripción de algunas funciones cuadráticas de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, primero por medio de polinomios de Taylor, donde se deduce la prueba de la matriz Hessiana, y luego con el análisis de los valores propios de la representación matricial asociada a la función. A partir de ello se desarrolla una generalización sobre el signo de una función cuadrática de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, para finalmente, caracterizar el comportamiento de expresiones de la forma $d = Ax^2 + By^2 + Cz^2$ en términos de sus coeficientes.

3.Fuentes

Apostol, T. (2001). Calculus. Vol 1. Segunda edición. Editorial Reverté, S. A.

Apostol, T. (2001.A). Calculus. Vol 2. Segunda edición. Editorial Reverté, S. A.

Alegre, A. (2010). *Las funciones homogéneas y sus características de mayor relevancia en su utilización como instrumentos de modelización de ciertos tipos de relaciones entre variables económicas.* Madrid: Universidad Autónoma de Madrid. Recuperado el 18 de noviembre de: 2015 de https://repositorio.uam.es/handle/10486/5620.

Derivadas parciales segundas. (2005, Abril 21). Recuperado el 22 de agosto de 2015 de: http://www3.uah.es/fsegundo/calcTeleco/esquemas/220DerivadasParcialesSegundasPolinomiosTaylor.pdf.

Funciones homogéneas. Funciones implícitas. (2011, Diciembre 12). Recuperado el 18 de noviembre de 2015 de: http://personal.us.es/pnadal/Informacion/Leccion4%20Funhomog_implic.pdf.

Gancho, T. (2009). *Approximation, numerical differentiation and integration.*

based on taylor polynomial. Vol. 10. Article 18, 7 pp. Sofia: Victoria University.

Kolman, B., Hill,D. (2006). Álgebra lineal. Editorial Pearson Educación.

Ramírez, P. (1991). *Las funciones homogéneas y su uso en economía.* Antioquia: Universidad de Antioquia. Recuperado el 18 de Octubre de 2015 de: http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/lecturasdeeconomia/article/view/5116/4481.

Salazar, L. (1987). *Superficies de segundo orden.* Manizales: Universidad Nacional de Colombia. Recuperado el 24 de abril de 2016 de: http://www.bdigital.unal.edu.co/5103/1/luisalvarosalazarsalazar.1987_Parte1.pdf.

Stewart, J. (2006). Cálculo: conceptos y contextos. Tercera edición. México. Thomson learning.

Stewart, J., Redlin, L., Watson, S. (2007). Precálculo: Matemáticas para el cálculo. Quinta edición. México. Thomson learning.

Stewart, J. (2008). Cálculus. Sexta edición. México.Thomson learning.

Superficies y curvas. (2010, Septiembre 10). Recuperado el 18 de abril de 2016 de: www.bdigital.unal.edu.co/250/4/81_-_3_Capi_2.pdf.

Sydsaeter, K., Hammond, P. (1996). Matemáticas para el análisis económico. México: Editorial Prentice-Hall.

Swokowski, E. (1988). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Wang, K. (2014). *A Rationalization for the method of Classifying Critical Points.* Cambridge: Harvard University. Recuperado el 23 de agosto de 2015 de: http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic1478527.files/2nd%20Derivative%20Test.pdf.

4.Contenidos
El trabajo se presenta en seis capítulos a continuación se describe brevemente el contenido de

cada uno de ellos.

Capítulo 1: Se presentan, por medio de factorización y la prueba del segmento, algunas situaciones que permiten la descripción global de los puntos máximos y mínimos de funciones cuadráticas de la forma $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Así como una generalidad a partir de estas poder establecer un paralelo con el criterio de la segunda derivada para algunas funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y de esta forma extenderlo hacia el criterio de la matriz Hessiana.

Capítulo 2: Se hace un estudio sobre funciones cuadráticas generales de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, en donde se analizan funciones con restricciones lineales y sin ellas, en busca de una generalización de su caracterización.

Capítulo 3: Se caracterizan los signos de funciones cuadráticas pero de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por medio de valores propios haciendo un paso por el análisis de los menores de la matriz asociada o característica de los coeficientes de dichas funciones. , en relación con lo presentado en capítulo 2 para funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Capítulo 4: Se caracterizan algunas de las formas particulares de funciones en $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, más específicamente para ecuaciones cuya expresión es de la forma $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = d$. Como un análisis complementario se sugieren algunos applets que apoyan la visualización de dichas formas.

Capítulo 5: Se presenta la aplicación de los hallazgos reportados en los capítulos 2 y 4 para el caso de resolución de situaciones de optimización de formas cuadráticas.

Capítulo 6: En este capítulo se presentan las conclusiones y consideraciones finales. Buscando presentar los análisis principales que el estudio permitió y los posibles desarrollos del mismo.

5.Metodología

El trabajo inicia proponiendo una forma alterna de deducir el criterio de la segunda derivada para los puntos críticos de una función, sin estudiar las derivadas direccionales de esta, sino haciendo un estudio preliminar de la función $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ y la expresión de los polinomios de Taylor de segundo grado. Para la primera parte, se determinan en qué casos la función tiene un mínimo, un máximo o un punto silla (en algunos casos) a partir de sus coeficientes, tomando la factorización como herramienta para ello. Luego de esto, se compara con la expresión del polinomio de Taylor de segundo grado para cualquier función y se identifica que tanto los coeficientes de la primera como los coeficientes de la segunda deben ser los mismos y por tal razón se llega a la prueba de la segunda derivada.

Por otra parte, se caracteriza el signo de las funciones cuadráticas de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a partir de algebra lineal, es decir, utilizando valores y vectores propios de las matrices de coeficientes de dichas funciones, llegando de esta forma a una generalidad sobre las mismas. Con lo anterior, se entra a caracterizar con más especificidad el comportamiento de un conjunto de expresiones como lo son las de la forma $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = d$, a partir de sus coeficientes; con el fin de evidenciar las conclusiones que puedan ser descritas, y desde allí hacer uso de ellas en la resolución de algunos problemas de optimización que pueden ser modeladas a partir de estas expresiones matemáticas.

Finalmente se consolidan y concluyen los resultados obtenidos por medio de los ejemplos y las verificaciones realizadas a lo largo del trabajo.

6.Conclusiones
Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el documento, se evidencia que se alcanzó el objetivo principal de caracterizar los puntos críticos (máximos y mínimos) de algunas funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, así como el estudio de ciertas familias de expresiones cuadráticas. Por otro lado, se avanzó en la clasificación del signo de ciertas funciones cuadráticas de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, por medio de operaciones con matrices, y autovalores. Con lo anterior, se pudo analizar el comportamiento de la representación gráfica de expresiones cuadráticas de la forma $ax^2 + by^2 + cz^2 + mxy + nxz + ryz = d$, a medida que cambia su representación algebraica, es decir, como se comportan las funciones cuadráticas en la medida que cambian sus coeficientes. Finalmente se aplican los resultados en la solución de situaciones que puedan ser modelados a través de este tipo de funciones cuadráticas, particularmente en contextos de optimización.

Elaborado por:	Juan Pablo Jiménez Peralta.
Revisado por:	Orlando Aya Corredor.

Fecha de elaboración del Resumen:	20	04	2017

1. TABLA DE CONTENIDO

Lista de Figuras

JUSTIFICACIÓN

El estudio de las funciones en varias variables es uno de los campos de la matemática en los que están más interesados no solo los matemáticos sino los profesionales de otras ciencias, ya que con ellas es posible modelar muchas situaciones que son inherentes a los fenómenos que se estudian en los diversos campos de cada una de las disciplinas. Es en este sentido que se hace necesario que se recurra a trabajar con funciones que involucren más de una variable independiente, pues en muchos de los campos de trabajo en construcción y análisis de modelos, el hacerlo en términos de funciones de una variable no alcanza a suplir los requerimientos condicionales que pueda implicar la resolución o solución de una situación problema o el abordaje de una situación a modelar.

Es en este contexto que surgen procesos y conceptos matemáticos que han permitido el desarrollo de modelos multivariables. Sin embargo, y debido principalmente a aspectos asociados con la visualización y la posibilidad de ser representadas de alguna manera, se han privilegiado aquellas que consideren dos variables independientes o máximo tres de ellas; en particular las de la forma $f(x,y)$ o $f(x,y,z)$, es decir funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Así mismo, muchas de las situaciones que se quieren resolver en el tratamiento de estos problemas pueden implicar el análisis de situaciones de optimización de funciones en varias variables, y particularmente de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que se dan por medio de la maximización y minimización de las cantidades que se están relacionando en una expresión, es decir, encontrar los valores mínimos y máximos que se pueden dar en una función específica. Sin embargo algunas situaciones hacen que sea necesario emplear estrategias que ayuden a analizar y conceptualizar el trabajo con ciertas funciones y la determinación de sus puntos críticos. Una de ellas podría ser la aproximación a estos puntos, mediante aproximaciones lineales o la generalización del comportamiento de algunas familias de expresiones.

OBJETIVO GENERAL

Estudiar algunas de las variaciones algebraicas y las representaciones gráficas del comportamiento de algunas funciones polinómicas de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que permitan clasificar los puntos críticos (máximos y mínimos) por medio de aproximaciones con polinomios de Taylor o mediante la caracterización de los valores propios de la matriz asociada a ellas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar algunas formas algebraicas de miembros de familias de superficies de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
- Caracterizar desde los coeficientes de algunas expresiones cuadráticas que tipos de gráficas se pueden obtener y la forma de algunos miembros de familias de funciones de la forma $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ o cuya expresión esté asociada con $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = d$
- Hallar las aproximaciones cuadráticas por medio de polinomios de Taylor para expresiones de la forma $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$
- Clasificar los puntos críticos (máximos locales, mínimos locales) en funciones de la forma $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f$ que permita establecer relaciones con lo que se conoce como prueba (o criterio) de la segunda derivada.

1. CAPÍTULO 1: OTRA MIRADA PARA LA PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA

En el presente capítulo se hace un estudio de las funciones cuadráticas de la forma $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + d$, más exactamente de las condiciones que deben cumplir los coeficientes de esta, para que tenga un máximo o un mínimo. Lo anterior se logra, recurriendo a la comparación entre los valores funcionales de f y los valores funcionales determinados por dos puntos que se encuentran en la función, esta misma estrategia se aplica para ecuaciones cuadráticas con n variables. En los resultados se hace una comparación con respecto a la expresión de un polinomio de Taylor de segundo grado, para así llegar a la prueba de la segunda derivada para puntos críticos de una función en dos variables. Para los referentes matemáticos empleados en el desarrollo se emplearon las fuentes citadas en las referencias y por un asunto de estilo no se referencian autores específicos a menos que sean estrictamente tomados de manera textual. En general se referirán los conceptos matemáticos como son conocidos en los libros de texto y por ello no se adjudican a un autor en específico.

1.1. Un marco teórico general

El estudio de funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ usualmente es presentado en los libros de texto universitarios (Apostol (2001, 2001A), Stewart (2006,2007,2008), Sydsaeter(1996)) luego de hacer un estudio del comportamiento de los planos planos tangentes a superficies e introduciendo el Teorema del valor extremo:

Sea f una función continua de dos variables x y y definida en una región acotada cerrada R en el plano xy.

- Existe por lo menos un punto en R, en el que f toma un valor mínimo.
- Existe por lo menos un punto en R, en el que f toma un valor máximo.

para luego definir los extremos absolutos y relativos de f como sigue:

Sea f una función defina en una región R que contiene al punto (x_0, y_0), entonces

- La función f tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0) si $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ para todo (x, y) en un disco abierto que contiene a (x_0, y_0).
- La función f tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0) si $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ para todo (x, y) en un disco abierto que contiene a (x_0, y_0).

Posteriormente a partir del gradiente de f se indican o definen los puntos críticos así:

Sea f definida en una región abierta R que contiene (x_0, y_0). El punto (x_0, y_0) es un punto crítico de f si satisface una de las condiciones siguientes:

- $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$
- $f_x(x_0, y_0)$ o $f(x_0, y_0)$ no existe.

Con lo anterior, se aborda un criterio que clasifica, con la ayuda de las segundas derivadas de la función f, qué tipo de extremos relativos o puntos críticos tiene dicha función.

- Sea f una función con segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene un punto (a, b) para el cual se cumple que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, se define la cantidad D (Hessiana H en algunos textos) como

  $D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - \left[f_{xy}(a, b)\right]^2$, entonces:
  - ✓ Si $D > 0$, y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en (a, b)
  - ✓ Si $D > 0$, y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en (a, b)
  - ✓ Si $D < 0$ entonces el punto $(a, b, f(a, b))$ es un punto de silla
  - ✓ $Si\ D = 0$ el criterio no aplica o no es concluyente.

Como puede verse el desarrollo teórico parte de la definición de punto crítico de la manera como se estipuló anteriormente. Sin embargo para el presente trabajo se partirá de una generalidad dentro de una particularidad esto es; estudiar un caso particular de funciones f que tengan la forma $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + d$, pero que de manera global y sin pérdida de generalidad permitan para el estudio asumir que $d = 0$, y que f satisface las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{array}{c} f(0,0) = 0 \\ \text{Existe en } (0,0) \text{ un punto crítico de } f \\ f \text{ es diferenciable en } (0,0) \end{array}\right\} \quad (\mathbf{A})$$

Con el fin de abordar su estudio sin recurrir, de manera inicial al Hessiano de f y poder describir analíticamente el comportamiento de este tipo de funciones.

1.2. Puntos críticos para un tipo de ecuación cuadrática en dos variables

Para estudiar el comportamiento de los puntos críticos de una función de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que cumplan con las condiciones dadas anteriormente, es necesario utilizar la prueba de las segundas derivadas o el denominado criterio de la segunda derivada o criterio de la hessiana para clasificar sus puntos críticos. Sin embargo, en los siguientes apartados se estudiará una forma diferente de clasificar los puntos máximos y mínimos, igualmente se realizará una deducción para construir un criterio de la clasificación de dichos puntos sin la necesidad de recurrir directamente a la hessiana sino que se explora de manera inicial unas propiedades que permitan justificar su uso en un contexto analítico y hacer uso posterior del mismo; esto es, llegar a comprender porque el criterio utilizado tiene potencia analítica y es consistente con otros análisis preliminares.

Para ello, primero se estudiará el comportamiento de cierta clase de familias de funciones en dos variables asociadas a polinomios, realizando el estudio de la misma desde la factorización de su expresión algebraica. Sea la familia de funciones de la forma $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$; al estar definida a través de un polinomio, entonces es continua y diferenciable en todo su dominio, esto es en $\mathbb{R}^2$, con lo cual se satisfacen las condiciones impuestas en $(\mathbf{A})$. Ahora buscando los números críticos por medio del criterio de la primera derivada, tomando las derivadas direccionales de f, se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax + by = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2cy + bx = 0$$

y se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, de la forma:

$$\begin{cases} 2ax + by = 0 \\ 2cy + bx = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema para x e y se tiene

$$\begin{array}{c} 4acx + 2cby = 0 \\ \underline{-b^2x - 2cby = 0} \\ 4acx - b^2x = 0 \end{array}$$

$$x(4ac - b^2) = 0$$

Luego

$$x = 0, \quad o \quad 4ac - b^2 = 0$$

y similarmente para y se tiene que:

$$y = 0, \quad o \quad b^2 - 4ac = 0$$

que admite como única solución a $(0,0)$, esto es la solución trivial, con lo cual se tiene un único punto crítico en $(0,0,f(0,0))$ lo que nuevamente hace que se satisfaga la segunda condición impuesta en (**A**)**.**

El resultado anterior servirá a la hora de decidir qué tipo de punto crítico se tiene con relación a cualquier valor que tomen las constantes a, b, c, esto se debe a que el sistema admite como un caso particular, lo que ocurre si $b^2 = 4ac$. En particular, si $a = 0 \wedge c = 0$ entonces $b = 0$, de donde $f(x,y) = 0$ lo que representa el plano $z = 0$. Como puede verse tendrán que imponerse condiciones en dichas constantes.

Ahora bien, si $a \neq 0$ y se reescribe la forma general de la función, el polinomio asociado a la misma, y se completa el cuadrado para la variable x, se tiene:

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2\\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2\right]\\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}xy + \frac{b^2y^2}{4a^2} - \frac{b^2y^2}{4a^2} + \frac{c}{a}y^2\right]\\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 - \frac{b^2y^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}y^2\right]\\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}y^2\right] \quad (\mathbf{1})
\end{aligned}
$$

y esta será la forma que retomara más adelante dentro del análisis, al establecer la deducción de la prueba de la segunda derivada, que se hace en el apartado 1.3 del presente trabajo. Ahora bien, para caracterizar el comportamiento del polinomio y más exactamente de sus puntos críticos se analiza la siguiente situación de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para ser explorada por analogía para el caso de más dimensiones:

Se tiene un segmento determinado por (x_0, y_0) y (x_1, y_1) sobre la gráfica de una función continua y diferenciable en un intervalo $[a,b]$ que contenga a $[x_0, x_1]$ en una variable, si dicho segmento siempre está por debajo de la función para (a,b) y además se sabe que en este intervalo hay un punto crítico, entonces se puede afirmar que dicho punto crítico corresponde a un máximo.

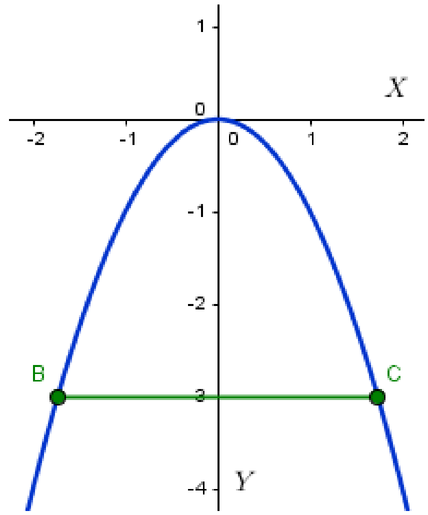

Figura 1: Gráfica del punto máximo de una función en una variable.

Por el contrario, será un mínimo si el segmento está por encima, como muestra la figura 2.

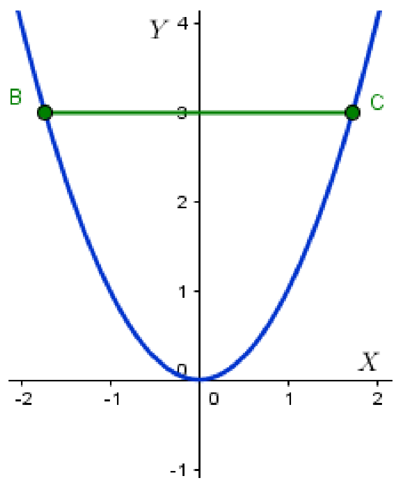

Figura 2: Gráfica del punto mínimo de una función en una variable.

Esta idea geométrica fundamental será importante para caracterizar los puntos críticos de una función en dos variables, como se describe en el siguiente apartado.

1.3. Puntos críticos para la función cuadrática en dos variables (Prueba del segmento).

Sea $f(x, y)$ una función definida de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y S un conjunto del dominio de la función tal que $X_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ y $X_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$ y (x_k, y_k) un punto crítico entre X_0 y $X_1 \in S$ y f continua y diferenciable en S. Empleando la parametrización de un segmento en $\mathbb{R}^3$ se tiene que si $f\big((1-\lambda)X_0 + \lambda X_1\big) \geq (1-\lambda)f(X_0) + \lambda f(X_1)$ para todo $\lambda \in [0,1]$ entonces el punto crítico es un mínimo, , ya que el lado izquierdo evalúa las imágenes en cualquier punto que este en el segmento determinado por $(1-\lambda)X_0 + \lambda X_1$, en tanto en el lado derecho se está evaluando los valores funcionales para el segmento determinado por los puntos $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1, f(x_1, y_1)$

Lo anterior indica que para $-f$ el punto crítico es un máximo. Con base en esto, se pueden estudiar de una manera preliminar los puntos críticos de la función inicial. Para elegir los dos puntos de S se utilizan los inversos de cada uno de ellos en forma general, es decir, $X_0 = \langle -x, -y \rangle$ y $X_1 = \langle x, y \rangle$ así, si se quiere garantizar que X_0 y X_1 sean diferentes y podamos determinar un segmento esto se dará si y solo si se tiene que $X_0 \neq \langle 0,0 \rangle$.

Ahora se procede a evaluar la función en los puntos, así:

$$f\big((1-\lambda)X_0 + \lambda X_1\big) =$$
$$f\big((1-\lambda)(-x, -y) + \lambda(x, y)\big) =$$

$$f\big((-x + \lambda x, , -y + \lambda y) + (\lambda x, \lambda y)\big) =$$

$$f\big((-x + \lambda x + \lambda x, -y + \lambda y + \lambda y)\big) =$$

$$f(2\lambda x - x, 2\lambda y - y) =$$
$$f\big((2\lambda - 1)x, (2\lambda - 1)y\big) =$$

y sustituyendo en (1) se tiene:

$$= a\left[\left((2\lambda-1)x + \frac{b}{2a}(2\lambda-1)y\right)^2 + \left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)(2\lambda-1)^2y^2\right]$$

$$= a\left[\left((2\lambda-1)^2\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + (2\lambda-1)^2\frac{4ac-b^2}{4a^2}y^2\right)\right]$$

$$= (2\lambda-1)^2a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}y^2\right]\ (\mathbf{2})$$

Ahora se determinan las imágenes correspondientes al segmento de recta determinado por dos puntos sobre la función.

$$(1-\lambda)f(X_0) + \lambda f(X_1) =$$

$$= (1-\lambda)a\left[\left(-x + \frac{b}{2a}(-y)\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}(-y)^2\right] + \lambda a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}y^2\right]$$

$$= (1-\lambda)a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}y^2\right] + \lambda a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}y^2\right]$$

$$= (a - \lambda a + \lambda a)\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}y^2\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}y^2\right]\ (\mathbf{3})$$

Ahora si se compara $(\mathbf{2})$ y $(\mathbf{3})$, si el único punto crítico es (0,0), con respecto a las constantes λ, a, b, c se presentan las siguientes situaciones:

- $f\big((1-\lambda)X_0 + \lambda X_1\big) \leq (1-\lambda)f(X_0) + \lambda f(X_1)$
  Si $a > 0$ y $4ac - b^2 > 0$ entonces tiene un mínimo.

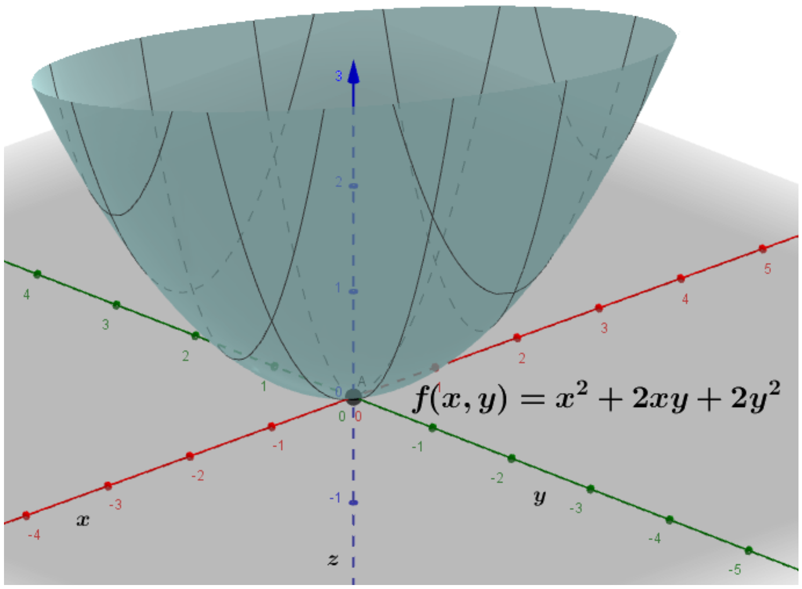

Figura 3: Gráfica del punto mínimo de una función en dos variable.

- $f\big((1-\lambda)X_0 + \lambda X_1\big) \geq (1-\lambda)f(X_0) + \lambda f X_1)$

  Si $a < 0$ y $4ac - b^2 > 0$ entonces tiene un máximo.

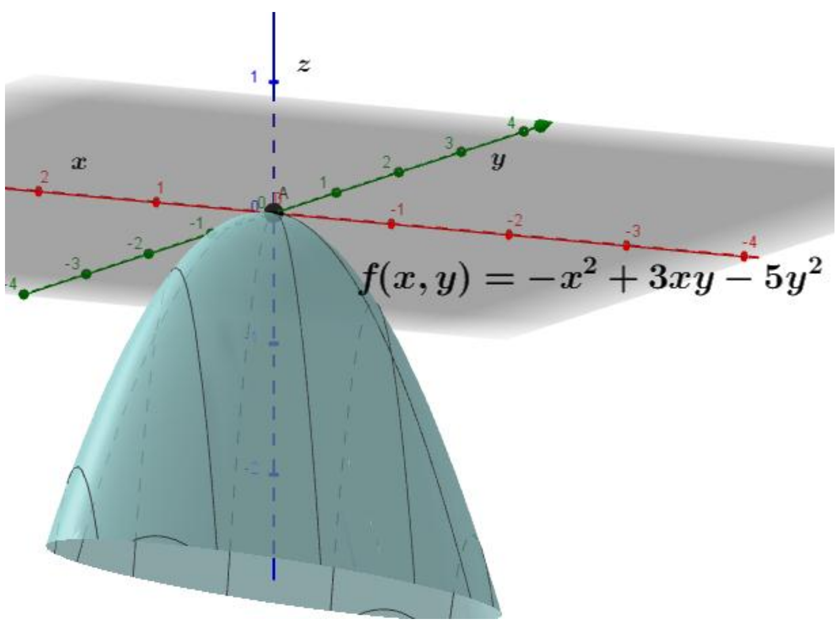

Figura 4: Gráfica del punto máximo de una función en dos variable.

Para ilustrar lo anterior se muestra la siguiente gráfica, donde se muestra un caso particular de una representación estática de una función de la forma $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, y el correspondiente segmento entre los puntos dados.[1]

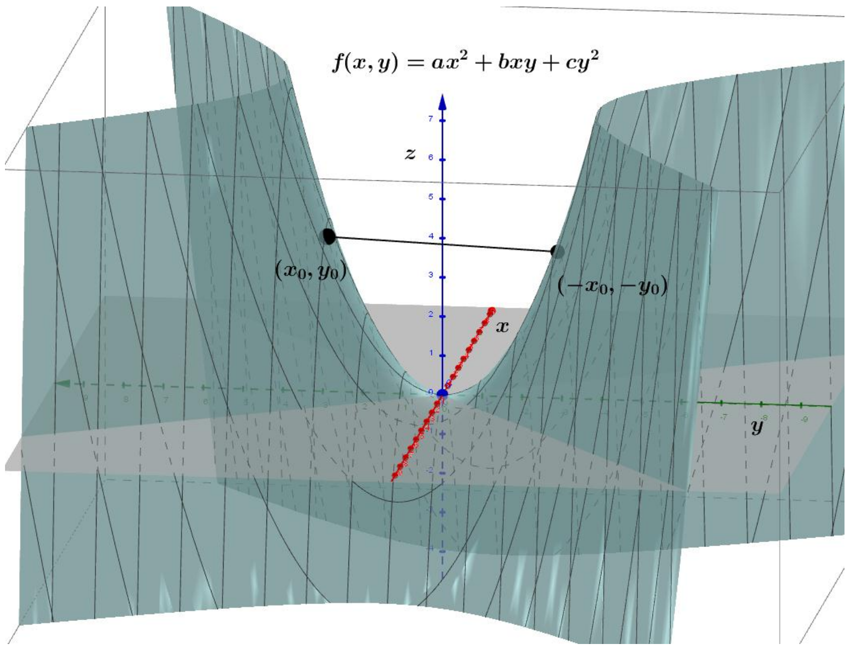

Figura 5: Máximo o Mínimo por medio de comparación entre un segmento y la función.

En el siguiente apartado se abordará una prueba para los puntos críticos desde las aproximaciones que se pueden obtener desde los polinomios de Taylor para funciones de $\mathbb{R}^{\mathbf{2}} \to \mathbb{R}$**.**

[1] Para visualizar mejor la estrategia de comparar los valores de un segmento respecto a los valores de la función en cierto dominio de esta, puede manipular el applet "Punto crítico 3D" que se encuentra en la carpeta Applets o en http://181.50.246.238:8078/construccionescuadraticas/punto_crtico_3d.html. Este fue diseñado en el programa GeoGebra 5.0.247.0-3D. El applet consta de 5 deslizadores, tres de ellos modifican los valores de los parámetros de la función $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, los otros dos conforman las coordenadas de los puntos sobre la función en un cierto dominio

1.4. Deducción de la prueba de la segunda derivada a partir de polinomios de Taylor para funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Ahora se supondrá que f es cualquier función de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con las condiciones impuestas en (**A**), por medio de polinomios de Taylor se procede a hacer la aproximación de 2 grado a la función en el punto estacionario de $f(x,y)$.

El polinomio de Taylor de segundo grado para funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en el punto (a,b) está dado por la expresión:

$$P(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \frac{1}{2}f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}f_{yy}(a,b)(y-b)^2$$

donde f_x , f_y representan las derivadas parciales de la función f con respecto a x y y respectivamente, f_{xx} , f_{xy} , f_{yy} representan la derivada de segundo orden con respecto a x, la derivada de segundo orden con respecto a x respecto a y, y la derivada segundo orden con respecto a y respectivamente

Luego la aproximación de f en (0,0) que es el punto de interés para el análisis será:

$$P(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0) + \frac{1}{2}f_{xx}(0,0)(x-0)^2 + f_{xy}(0,0)(x-0)(y-0) + \frac{1}{2}f_{yy}(0,0)(y-0)^2$$

por ser (0,0), un punto estacionario y por las condiciones (**A**) la expresión se simplifica a :

$$P(x,y) = \frac{1}{2}f_{xx}(0,0)x^2 + f_{xy}(0,0)xy + \frac{1}{2}f_{yy}(0,0)y^2$$

Luego la anterior aproximación tiene una forma análoga a la presentado en el apartado 1.2. si se consideran las siguientes equivalencias:

$$a = \frac{1}{2} f_{xx}(0,0)$$
$$b = f_{xy}(0,0)$$
$$c = \frac{1}{2} f_{yy}(0,0)$$

Como se había establecido, en dicho apartado, que si $a > 0$ y $4ac - b^2 > 0$ entonces f tiene un mínimo en (0,0), esto se cumplirá, estableciendo la comparación, si $f_{xx} > 0$ y $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$.

Situaciones análogas se pueden escribir para los demás casos presentados en 1.2. y así se muestra por medio de comparación de las expresiones del polinomio de Taylor de segundo grado con el análisis para los puntos críticos de la función $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, una deducción del criterio de las segundas derivadas para puntos críticos de una función de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

En el siguiente apartado se hará el análisis de la matriz hessiana para el caso particular de un polinomio cuadrático de $\mathbb{R}^{\mathbf{2}} \to \mathbb{R}$ para aproximarse al criterio usual de clasificación de los puntos críticos de la función mediante el análisis de la representación matricial asociada al polinomio de la forma $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

1.5. Estudio de la matriz hessiana a partir de un polinomio cuadrático de $\mathbb{R}^{\mathbf{2}} \to \mathbb{R}$.

En los apartados 1.2. y 1.3. se estudió el polinomio cuadrático de dos variables de la forma $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ factorizando y comparando su curvatura con respecto a un segmento que une dos puntos extremos de la función y analizando la correspondencia con la aproximación brindada por el polinomio de Taylor para la función. En este apartado, se hará el tratamiento por medio de matrices y vectores, pues la intención es permitir ampliar el análisis a funciones en más de dos variables. La matriz hessiana fue introducida en el campo del análisis en 1844 por el matemático alemán Ludwig Otto Hesse para determinar el carácter de los puntos críticos de funciones.

Por facilidad en el análisis, se supone que la función objeto de estudio puede ser expresada de la forma $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$. La función anterior puede ser reescrita en términos de multiplicaciones matriciales de la forma:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

así

$$f_x = 2ax + 2by \qquad f_{xx} = 2a$$

$$f_y = 2bx + 2cy \qquad f_{yy} = 2c$$

$$f_{xy} = 2b$$

por la definición de matriz hessiana de f en el punto (x, y) se tiene

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

$$= 4ac - 4b^2 = 4(ac - b^2) \text{ o } H(x) = 4 \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

a esta matriz, se le puede asociar un determinante el cual permite establecer una clasificación.

Clasificación

A continuación se presenta una clasificación haciendo uso de una caracterización a través de los coeficientes de la forma cuadrática y se relacionan las correspondientes demostraciones a cada una de ellas, estas tienen como base algunas que son abordadas por Sydsaeter (1996).

a) Una función f de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es definida Positiva $\leftrightarrow a > 0$ y $c > 0$ y $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$ dado que $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$.

Demostración:

Si se supone que $f(x, y)$ es definida positiva. Tomando convenientemente los puntos $(1{,}0)$ y $(0{,}1)$, entonces $f(1{,}0) = a$, pero $a > 0$ luego $f(1{,}0) = a > 0$, análogamente $f(0{,}1) = c > 0$.

Ahora f puede ser reescrita, complementando cuadrados en x se tiene:

$f(x, y) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)y^2$, como $a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2$ es positivo, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, o como mínimo es cero, esto es cuando $x = -\frac{b}{a}y$ así, $f\left(-\frac{b}{a}y, y\right) = \left(c - \frac{b^2}{a}\right)y^2 = \frac{ac-b^2}{a}\ y^2 > 0$. Si $y \neq 0$, como $f\left(-\frac{b}{a}y, y\right) > 0$ al ser positiva definida entonces $ac - b^2$ ya que $a > 0$.

Para demostrar la implicación contraria, se supone que $a > 0$ y $ac - b^2 > 0$. Si la función es $f(x, y) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)y^2$, entonces $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y). Si $f(x, y) = 0$, entonces $x + \frac{b}{2a}y = 0$ e $y^2 = 0$, que admite como única solución $x = y = 0$, por tanto, $f(x, y)$ es definida positiva.

b) Una función f de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es Semidefinida Positiva $\leftrightarrow a \geq 0$ y $c \geq 0$ y $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$

Demostración:

Supóngase que $f(x, y)$ es semidefinida positiva. Tomando nuevamente de manera conveniente los puntos $(1{,}0)$ y $(0{,}1)$ se tiene: $f(1{,}0) = a \to f(1{,}0) \geq 0$, por ser $a \geq 0$ y $f(0{,}1) = c \to f(0{,}1) \geq 0$, por ser $c \geq 0$.

Si $a = 0$ entonces $f(x, 1) = 2xb + c$, que solamente puede ser positivo o cero para todo x siempre que sea $b = 0$. (Si $b > 0$, haciendo x negativo lo suficientemente pequeño se hace positivo $f(x,1)$. Si $b < 0$, tomando x positivo lo suficientemente pequeño se hace positivo $f(x,1)$), caso en el cual $ac - b^2 = 0$.

Si $a > 0$, entonces $f(-b,a) = ab^2 - 2ab^2 + ca^2 = ca^2 - ab^2 = a(ac - b^2)$, que debe ser no negativo, luego $ac - b^2 \geq 0$ dado que $a > 0$.

Ahora para la implicación contraria, asumiendo que $a \geq 0, c \geq 0$ y $ac - b^2 \geq 0$. Si $a = 0$, entonces $ac - b^2 \geq 0$ se deduce que $b = 0$ y así $f(x,y) = cy^2 \geq 0$ para todo (x,y) dado que $c \geq 0$.

Si $a > 0$, se puede escribir como:

$$f(x,y) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2$$

$$= a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)y^2$$

como $c - \frac{b^2}{a} \geq 0$ y $a > 0$, se tiene que $f(x,y) \geq 0$ para todo (x,y).

c) Una función f de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es Definida Negativa $\leftrightarrow$ $a < 0$ y $c < 0$ y $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$

Demostración:

Supóngase que $f(x,y)$ es definida negativa. Entonces, con los puntos que se han venido asumiendo, $f(1,0) = a < 0$ y $f(0,1) = c < 0$. Entonces evaluando $f\left(-\frac{b}{a}y, y\right)$ en $f(x,y) = a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)y^2$ se tiene que $f\left(-\frac{b}{a}y, y\right) = \left(c - \frac{b^2}{a}\right)y^2 = \frac{ac-b^2}{a}y^2 < 0$, luego como $f\left(-\frac{b}{a}y, y\right)$ debe ser negativa definida y $y^2 > 0$ entonces $\frac{ac-b^2}{a} < 0$, y como $a < 0$ por lo tanto $ac - b^2 > 0$ que corresponde al determinante.

Para demostrar la implicación contraria, se supone que $a < 0$ y $ac - b^2 > 0$. Por la función $f(x,y) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)y^2$, y por lo tanto $f(x,y) \leq 0$ para todo (x,y). Si $f(x,y) = 0$, entonces $x + \frac{b}{2a}y = 0$ e $y^2 = 0$, que se satisface si $x = y = 0$. Por tanto, $f(x,y)$ es definida negativa.

d) f de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es Semidefinida Negativa $\leftrightarrow a \leq 0$ y $c \leq 0$ y $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \geq 0$

Demostración:

Supóngase que $f(x, y)$ es semidefinida negativa. Como se ha venido procediendo $f(1,0) = a \leq 0$ y $f(0,1) = c \leq 0$ por ser f semidefinida negativa. Si $a = 0$ entonces $f(x, 1) = 2xb + c$, que solamente puede ser negativo o cero para todo x siempre que sea $b = 0$. (Si $b > 0$, haciendo x negativo lo suficientemente grande se hace negativo $f(x, 1)$. Si $b < 0$, tomando x positivo lo suficientemente pequeño se hace negativo $f(x, 1)$). Así, $ac - b^2 = 0$.

Si $a < 0$, entonces $f(-b, a) = ab^2 - 2ab^2 + ca^2 = a(ac - b^2)$, que debe ser negativo, luego $ac - b^2 > 0$.

Ahora se prueba la implicación contraria, si se supone que $a \leq 0, c \leq 0$ y $ac - b^2 \geq 0$. Si $a = 0$, entonces $ac - b^2 \geq 0$ se deduce que $b = 0$ y así $f(x, y) = cy^2 \geq 0$ para todo (x, y).

Si $a < 0$, podemos escribir

$$f(x, y) = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2$$
$$= a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)y^2$$

como $c - \frac{b^2}{a} \leq 0$ y $a < 0$, se ve que $f(x, y) \leq 0$ para todo (x, y).

e) Una función f de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es Indefinida $\leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} < 0$

Demostración:

Supóngase que $f(x, y)$ es indefinida. Como no se puede satisfacer ninguna de las desigualdades de **b)** ni de **d)** o bien, a y c tienen signos opuestos o, $ac - b^2 < 0$. Pero si a y c tienen signos opuestos, entonces $ac < 0 \leq b^2$, luego $ac - b^2 < 0$ para cualquier caso.

Para probar la implicación contraria, si se supone que $ac - b^2 < 0$. Si $a \neq 0$, entonces $f(1,0) = a$ y $f(-b, a) = ab^2 - 2ab^2 + ca^2 = ca^2 - ab^2 = a(ac - b^2)$ que tiene signos contrarios por las condiciones dadas $f(x, y)$ es indefinida.

Si $a = 0$ y $c = 0$, entonces $f(1,1) = 2b$ y $f(-1,1) = -2b$. Como $ac - b^2 < 0$ implica que $b^2 > 0$ en este caso, se tiene que $b \neq 0$ y así $f(x, y)$ es indefinida.

Si $a = 0$, y $c \neq 0$, entonces $f(0,1) = c$ y $f(c, -b) = -b^2c$ tienen signos distintos, luego $f(x, y)$ es indefinida.

En el siguiente capítulo se centrará la atención en el estudio de las formas cuadráticas generales de funciones en dos variables con el fin de analizar el comportamiento de las mismas sin restricciones y con restricciones lineales.

2. CAPÍTULO 2: FORMAS CUADRÁTICAS GENERALES EN DOS VARIABLES

Si se desea estudiar las formas cuadráticas generales para dos variables, no bastaría con una función de la forma $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ puesto que se dejarían de lado una familia de funciones, por ejemplo $f(x,y) = 15x^2 - 5xy + 3y^2 - 7x + 8y + 1$; es decir, que si se tiene la función g de la forma $g(x,y) = px + qy + r$ se tendría una familia determinada por la suma de f y g conformando así la función, $f_1 = f + g$, que constituye una cuadrática general en dos variables. A continuación se estudiaran algunos casos en relación con estas formas cuadráticas generales.

2.1. Formas cuadráticas sin restricciones lineales.

Para analizar estas formas, se estudiará su comportamiento a partir de sus coeficientes, y se seccionará por casos particulares dentro de lo general.

Caso A: $\boldsymbol{ac \neq b^2}$

Dada $f_1(x,y)$ se puede reescribir como una función transformada en sus coordenadas así:

$$f_1(x,y) = f(x+\varepsilon, y+\eta)$$

luego se tiene que f_1 debe tener la forma

$$f_1(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + px + qy + r$$

Evaluando f se obtiene:

$$f(x+\varepsilon, y+\eta) = a(x+\varepsilon)^2 + 2b(x+\varepsilon)(y+\eta) + c(y+\eta)^2$$

y resolviendo las correspondientes operaciones, es decir expandiendo

$$= a(x^2 + 2x\varepsilon + \varepsilon^2) + 2b(\eta x + xy + \eta\varepsilon + \varepsilon y) + c(y^2 + 2y\eta + \eta^2)$$

$$= ax^2 + 2ax\varepsilon + a\varepsilon^2 + 2b\eta x + 2bxy + 2b\eta\varepsilon + 2b\varepsilon y + cy^2 + 2cy\eta + c\eta^2$$

agrupando convenientemente se tiene que

$$= f(x,y) + 2(a\varepsilon + b\eta)x + 2(b\varepsilon + c\eta)y + a\varepsilon^2 + c\eta^2 + 2b\eta\varepsilon$$

por lo tanto, comparando con la forma de f_1, se tiene que:

$$2(a\varepsilon + b\eta) = p\ (\mathbf{4}),$$
$$2(b\varepsilon + c\eta) = q\ (\mathbf{5})$$

Ahora si se resuelve el sistema lineal, con **(4)** y **(5),** para hallar los valores de $\varepsilon\ y\ \eta$ en términos de los coeficientes se tiene que:

$$\begin{array}{c} -2ab\varepsilon - 2b^2\eta = -bp \\ 2ab\varepsilon + 2ac\eta = aq \\ \hline 2\eta(ac - b^2) = aq - bp \end{array}$$

$$\eta = \frac{aq - bp}{2(ac - b^2)}$$

Luego

$$2b\varepsilon = q - 2c\left(\frac{aq - bp}{2(ac - b^2)}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{acq - b^2q - acq + acp}{2b(ac - b^2)}$$

$$\varepsilon = \frac{cp - bq}{2(ac - b^2)}$$

Caso B: $\boldsymbol{ac = b^2}$

Para este caso se tienen dos opciones, una en la que $b \neq 0$ y la otra considerar que $b = 0$

- Si $b \neq 0$ entonces, b es expresable[2] en términos de a y c, $f_1(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + px + qy + r$

$$f_1(x,y) = ax^2 + 2\sqrt{ac}xy + cy^2 + px + qy + r$$

$$f_1(x,y) = a\left(x^2 + \frac{2\sqrt{ac}}{a}xy + \frac{c}{a}y^2\right) + px + qy + r$$

$$f_1(x,y) = a\left(x^2 + 2\sqrt{\frac{c}{a}}xy + \frac{c}{a}y^2\right) + px + qy + r$$

$$f_1(x,y) = a\left(x + \sqrt{\frac{c}{a}}y\right)^2 + px + qy + r$$

[2] Dado que $ac = b^2$, se tiene que $b = \pm\sqrt{ac}$, por tal razón, la expresión para b también podría ser negativa, que para efecto del análisis y los procedimientos, no atañe en los resultados finales.

Luego, como la forma de f_1 tiene un comportamiento afín a la estructura que se pretendía definir, entonces el comportamiento de la función $f_1(x, y)$ solo depende de los coeficientes p , q y r.

- Si $b^2 = 0$ entonces $a = 0$ o $c = 0$ y por lo tanto se tiene que

$$f_1(x, y) = cy^2 + px + qy + r \text{ , o , } f_1(x, y) = ax^2 + px + qy + r$$

Se tiene, para el caso en que $a = 0$, que $f_1(x, y) = cy^2 + px + qy + r$

$$f_1(x, y) = cy^2 + qy + px + r$$

$$f_1(x, y) = c\left(y^2 + \frac{q}{c}y\right) + px + r$$

$$f_1(x, y) = c\left(y^2 + \frac{q}{c}y + \frac{q^2}{4c^2}\right) - \frac{q^2}{4c^2} + px + r$$

$$f_1(x, y) = c\left(y + \frac{q}{2c}\right)^2 + px + s \qquad \text{con} \quad s = r - \frac{q^2}{4c^2}$$

Análogamente ocurre si $b^2 = 0$ y $a \neq 0$, entonces tenemos que

$$f_1(x, y) = ax^2px + qy + r$$

$$f_1(x, y) = a\left(x^2 + \frac{p}{a}x + \frac{p^2}{4a^2}\right) - \frac{p^2}{4a^2} + qy + r$$

$$f_1(x, y) = a\left(x + \frac{p}{2a}\right)^2 + qy + t \qquad \text{donde} \quad t = r - \frac{p^2}{4a^2}$$

Ahora si $a = 0$ y $c = 0$ se tiene que $f_1(x, y) = px + qy + r$ es decir, no conlleva a una expresión cuadrática, y su representación gráfica es la de un plano.

Lo anterior muestra que en general se tienen funciones cuadráticas de la forma

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + d$$

En el siguiente apartado se analizará precisamente este tipo de funciones sujetas a restricciones lineales.

2.2. Formas cuadráticas con restricciones lineales

Sea f de la forma $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + d$ sujeta a la restricción lineal $px + qy = 0$. Con $q \neq 0$ entonces $y = -\frac{p}{q}x$ luego

$$f(x,y) = ax^2 + 2bx\left(-\frac{p}{q}x\right) + c\left(-\frac{p}{q}x\right)^2 + d$$

o lo que es igual a

$$f(x) = \frac{x^2}{q^2}(aq^2 - 2bpq + cp^2) + d,$$

donde, sin pérdida de generalidad, y atendiendo a que d representa un desplazamiento de la función entonces f puede ser escrita de la forma $f(x) = \frac{x^2}{q^2}(aq^2 - 2bpq + cp^2)$.

Entonces $f(x,y)$ sujeta a la restricción $px + qy = 0$ se clasifica considerando el determinante δ como:

$$\delta = -\begin{vmatrix} 0 & p & q \\ p & a & b \\ q & b & c \end{vmatrix}$$

toda vez que la representación matricial permite expresar la función haciendo uso de una matriz simétrica asociada que tiene como entradas la correspondientes a δ.

Así el valor del determinante estará dado por

$$\delta = -\left[-p\begin{vmatrix} p & q \\ b & c \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} p & q \\ a & b \end{vmatrix}\right]$$

$$\delta = p(pc - bq) - q(pb - qa)$$

$$\delta = p^2c - bpq - bpq + q^2a$$

$$\delta = aq^2 - 2bpq + p^2c$$

y por lo tanto f puede ser reescrita como

$$f(x,y) = f(x) = \frac{\delta x^2}{q^2}$$

lo que es igual a $f(x,y) = \zeta x^2$ con $\zeta = \frac{\delta}{q^2}$

Por lo tanto $f(x,y)$ es definida positiva sujeta a $px + qy = 0$ si $\zeta > 0$ o lo que es lo mismo que $\delta > 0$ o $\begin{vmatrix} 0 & p & q \\ p & a & b \\ q & b & c \end{vmatrix} < 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

que en últimas coincide con los conceptos básicos con los cuales una función cuadrática es analizada ya sea desde el sentido de apertura o con el criterio de la primera y segunda derivada de una función en una variable.

En el siguiente capítulo se abordará el tratamiento de funciones cuadráticas en varias variables, tratando de hacer una aproximación para funciones de este tipo de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

3. CAPÍTULO 3: FORMAS CUADRÁTICAS EN VARIAS VARIABLES

En los anteriores capítulos se hizo el estudio de las formas cuadráticas en dos variables, en este se abordan las formas cuadráticas de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}} \rightarrow \mathbb{R}$, primero expresando estas por medio de operaciones de matrices, es decir, utilizando la matriz de coeficientes, y así, propiedades de los determinantes, autovalores e indicar para que situaciones las formas cuadráticas son definidas positivas, negativas, semi-positivas, semi-negativas o indefinidas.

3.1. Expresión de una función cuadrática por medio de operaciones entre matrices.

Una forma cuadrática general de n-variables tiene la forma general:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} a_{ij} a_{ji} = a_{11} {x^2}_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + \cdots + a_{nn} {x^2}_n,$$

con $\vec{x} = (x_1 \quad , x_2 \quad , x_3 \, , \ldots x_n)$

Para efectos de escribir los coeficientes separados se puede hacer en términos de una multiplicación de matrices, de la siguiente forma, con

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

bajo la condición de que $\vec{A}$ sea una matriz simétrica,lo que implica que $a_{ij} = a_{ji}$ entonces, $f(\vec{x}) = \vec{x}\vec{A}\vec{x}^t$, dado $x_{ij} = x_{ji}$.

Ejemplo:

Sea el polinomio

$$p(x) = -7{x_1}^2 + 3x_1x_2 - 4x_1x_3 - 7x_2x_1 - 8{x_2}^2 + 10x_2x_3 - 2x_3x_1 + 2x_3x_2 - 5{x_3}^2$$

inicialmente al expresarlo como una multiplicación de matrices, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 & -4 \\ -7 & -8 & 10 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

pero se observa que la matriz de coeficientes no es simétrica, y teniendo en cuenta lo anterior, la matriz puede ser reescrita considerando lo siguiente:

Sumando las entradas correspondientes y luego dividiendo entre dos:

$$\frac{a_{12} + a_{21}}{2} = \frac{3 + (-7)}{2} = -2$$

$$\frac{a_{13} + a_{31}}{2} = \frac{-4 + (-2)}{2} = -3$$

$$\frac{a_{23} + a_{32}}{2} = \frac{10 + 2}{2} = 6$$

Cada resultado son las nuevas entradas de una matriz que resulta ser simétrica, como se muestra a continuación

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -2 & -3 \\ -2 & -8 & 6 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Así, bajo las consideraciones expresadas anteriormente se tiene que cualquier forma cuadrática es expresable en función de una matriz $n \times n$ simétrica.

3.2. Estudio del signo de una forma cuadrática

Así como en dos variables, es de interés saber cuándo una función cuadrática en varias variables es positiva o negativa definida, inclusive se podría expresar como se hizo al estudiar el caso de las funciones en dos variables, como semidefinida positiva, semidefinida negativa o indefinida en el apartado 1.4. del presente trabajo.

Sea $P(\vec{x})$ una función cuadrática definida de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y A es una matriz $n \times n$ simétrica, asociada a $P(\vec{x})$; se definen los siguientes comportamientos:

a) $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x > 0 \ \forall \ (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ entonces A es positiva definida.

b) $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x < 0 \ \forall \ (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ entonces A es negativa definida.

Si se incluye el cero en la desigualdad se tendrá que $P(\vec{x})$ es semidefinida positiva o semidefinida negativa.

Ahora si $P(\vec{x})$ no es semidefinida positiva ni semidefinida negativa entonces es indefinida, esto es existen $x_i \wedge x_j \in \vec{x}$ tal que $x_i{}^T A x_i < 0$ y $x_j{}^T A x_j > 0$.

3.3. Un camino hacia una generalidad a través de valores propios.

Para desarrollar este apartado es necesario tener una noción sobre los valores propios o autovalores para una matriz, así que a continuación se presentan la clasificación de las formas cuadráticas en relación con estos objetos.

3.3.1. Valores propios de una matriz $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$.

Sea $D = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ la matriz diagonal $n \times n$. Así:

$$P(\vec{x}) = x^T D x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$P(\vec{x}) = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \cdot \\ \vdots \\ \lambda_2 x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1 x^2{}_1 + \lambda_2 x^2{}_2 + \lambda_3 x^2{}_1 + \cdots + \lambda_n x^2{}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,(x_i)^2$$

Si $\lambda_i < 0 \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$, entonces es una función cuadrática definida negativamente.

Si $\lambda_i > 0 \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$, entonces es una función cuadrática definida positivamente.

Si $\lambda_i \leq 0 \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$, entonces es una función cuadrática semidefinida negativamente.

Si $\lambda_i > 0 \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$, entonces es una función cuadrática semidefinida positivamente.

Si $\exists\, \lambda_i > 0 \wedge \lambda_i < 0 |\ i = 1, \ldots, n$, entonces es una función cuadrática indefinida.

Ahora como los autovalores se definen como los λ tal que si A es una matriz $n \times n$ existe un vector $\vec{x}$ no nulo $\in \mathbb{R}^n$ tal que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ es un autovector del autovalor λ esto es $\left(\vec{A} - \lambda\vec{I}\right)\vec{x} = \vec{0}$ y tendrá solución única no trivial , esto es , $(\vec{x} \neq \vec{0})$ si y solo si la matriz de coeficientes tiene determinante nulo, esto es, si y solo si $|A - \lambda I| = 0$

Ahora, sea $p(\lambda) = |A - \lambda I|$ con $A = (a_{ij})$ entonces

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

para la ecuación característica de A, siendo $p(\lambda)$ el polinomio característico de A donde sus raíces son los autovalores de A.

Y así se tiene que, los polinomios que se han trabajado a la hora de definir y encontrar los puntos críticos (máximos y mínimos) han sido cuadráticos en varias variables, los cuales se hacen con la matriz de coeficientes, que por facilidad, se expresa en una matriz simétrica.

3.3.2. Valores propios de una matriz simétrica

Si $D = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ una matriz diagonal $n \times n$ entonces

$$|D - \lambda I| = \begin{vmatrix} c_1 - \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 - \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & \ddots & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \dots & c_n - \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= (c_1 - \lambda)(c_2 - \lambda)(c_3 - \lambda)(c_4 - \lambda)(c_5 - \lambda) \dots (c_n - \lambda)$$

pero dado que

$$|D - \lambda I| = 0$$

debe cumplirse que:

$$c_1 = \lambda_1 \vee c_2 = \lambda_2 \vee c_3 = \lambda_3, \dots, \vee c_n = \lambda_n$$

Ahora aplicando esto a algunos casos que se presentan a continuación se pueden sacar ciertas conclusiones que permiten hacer un tratamiento de la clasificación de las formas cuadráticas a través de estos valores.

3.4. Caso de formas cuadráticas básicas en dos variables

Se mostró que la matriz asociada a una forma cuadrática de dos variables se puede escribir de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Luego

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2$$

$$= ac - a\lambda - c\lambda + \lambda^2 - b^2 = 0$$

por tanto

$$\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0$$

Entonces, resolviendo la ecuación cuadrática para λ

$$\lambda = \frac{a + c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac - b^2)}}{2}$$

$$\lambda = \frac{a + c \pm \sqrt{a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2}}{2}$$

$$\lambda = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$$

Ahora

$$\lambda = \frac{1}{2}(a+c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}$$

Dado que el discriminante siempre será positivo, entonces se tendrán raíces reales. Así, si se asume que λ_1 y λ_2 son los autovalores reales de entonces debe cumplirse que

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

Pero de la forma matricial se tiene que

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2$$

lo que muestra que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + c$$

$$\lambda_1\lambda_2 = ac - b^2$$

Pero $ac - b^2$ es precisamente $\det(A)$ luego se tienen las siguientes situaciones:

1. Los autovalores son positivos si y solo si $a + c > 0$ y $|A| > 0$
2. Los autovalores son negativos si y solo si $a + c < 0$ y $|A| > 0$
3. Los autovalores tienen signo distinto si y solo si $|A| < 0$
4. Uno de los autovalores es cero si y solo si $|A| = 0$ y el otro será $\lambda = a + c$

En relación con A se puede afirmar que:

A es semidefinida positiva si y solo si $a \geq 0, c \geq 0$ y $\det(A) \geq 0$; así esto equivale a verificar que $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c \geq 0$ y $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \geq 0$ pero esto equivaldría a decir que, λ_1, λ_2 sean no negativos.

En forma general se tiene que:

Teniendo como referencia el análisis anterior, se puede afirmar que si A una matriz simétrica asociada a una forma cuadrática, entonces:

a) A es definida positiva si y solo si todos los autovalores de A son positivos.
b) A es semidefinida positiva si y solo si todos los autovalores de A son tales que $\lambda_i \geq 0$.
c) A es definida negativa si y solo si todos los autovalores de A son negativos.
d) A es semidefinida negativa si y solo si todos los autovalores de A son tales que $\lambda_i \leq 0$.
e) A es indefinida si y solo si A tiene dos autovalores con signos opuestos.

Ejemplo

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3{x_1}^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + {x_2}^2 - 2x_2x_3 + 3{x_3}^2$$

$$= 3{x_1}^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + \frac{3}{2}x_1x_3 + \frac{3}{2}x_1x_3 + {x_2}^2 - x_2x_3 - x_2x_3 + 3{x_3}^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{3}{2} & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{3}{2} & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

en términos de los valores propios se tiene entonces que:

$$\det(A) = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \frac{3}{2}\begin{vmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1-\lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - \frac{43}{4}\lambda + \frac{15}{4} = 0$$

Por división sintética se tiene que los valores de λ son:

$$\lambda_1 = 5$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{3}{2}$$

finalmente

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$$

y dado que los valores son todos positivos entonces la función cuadrática es definida positiva.

3.5. Clasificación por los menores

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$, se definen los menores principales dominantes de A a los n determinantes de la forma:

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n$$

Así, si $A = (a_{ij})$ es una matriz simétrica con menores principales dominantes D_k, si

- $D_k > 0$ para todo $k \leftrightarrow A$ es definida positiva.
- $(-1)^k D_k > 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n \leftrightarrow A$ es definida negativa.

Volviendo al caso de funciones cuadráticas en dos variables de la forma

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ con } \quad D_1 = a \quad D_2 = ac - b^2$$

Será positiva definida si y solo si $a > 0$ y $ac - b^2 > 0$ a su vez tenemos que

$$ac > b^2 \geq 0$$

luego $c > 0$.

Por ejemplo:

$f(x, y) = 6xy - 9y^2 - x^2$ Para este caso se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 9 - 9$$

$$\det(A) = 0 \quad \text{y} \quad a = -1 < 0$$

con lo que se tiene que es semidefinida negativa. A continuación se muestra la gráfica de la función cuadrática $f(x, y) = 6xy - 9y^2 - x^2$:

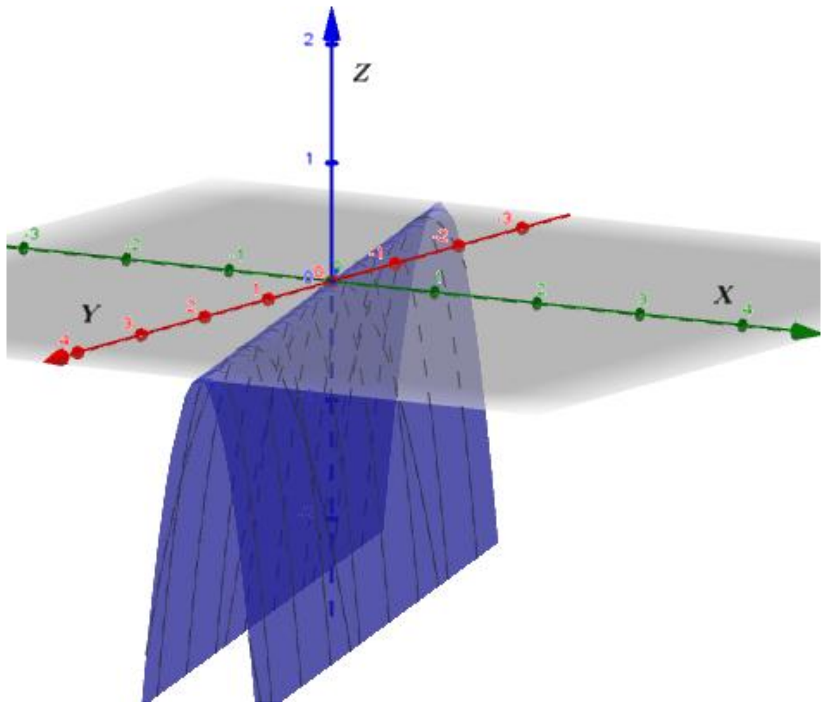

Figura 6: Ejemplo Clasificación por los menores.[3]

3.6. Formas semidefinidas

No se puede generalizar que una forma semidefinida se sustituye en el teorema las desigualdades estrictas por desigualdades no estrictas. Para estudiar este caso se deben comprobar los signos de todos los menores principales de A y no solo los menores principales dominantes, así para una forma cuadrática expresable de la forma X^tAX, al suprimir $n-r$ filas y $n-r$ columnas con la misma numeración, el determinante resultante corresponde al menor principal de orden r. Con ellos también es posible caracterizar el signo de la forma cuadrática asociada como sigue:

1. Todos los menores principales de A son tales que $M_{n-r}(A) \geq 0$ entonces A es semidefinida positiva.

[3] Para mejorar la visualización del ejemplo mirar la construcción nombrada "Ejemplo Clasificación por los menores" en la carpeta Applets, o en http://181.50.246.238:8078/construccionescuadraticas/ejemplo_clasificacin_por_los_menores.html.

2. Todos los menores principales de A tienen el mismo signo que $(-1)^k$ entonces A es semidefinida negativa.

   Ejemplo:

   Clasifique la forma cuadrática $-3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 + 2x_2x_3 - 5x_3^2$ por medio de los menores principales.

   Solución:

   Expresando la forma cuadrática matricialmente se tiene que:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

   Luego

   Los menores principales de orden 1 son:

$$M_1$$

$$-3, -3, -5$$

   Los menores principales de orden 2 son:

$$M_2$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 5\,, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 14$$

   El menor principal de orden 3 es:

$$M_3$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -15$$

   Como el signo de todos los menores principales de orden k corresponde al signo para $(-1)^k$ entonces la forma cuadrática es semidefinida negativa.

En el siguiente capítulo se abordará el estudio de algunas formas particulares, que podrían denominarse prototípicas para el caso de $\mathbb{R}^{\mathbf{3}} \to \mathbb{R}$**.**

4. CAPÍTULO 4: ESTUDIO DE ALGUNAS FORMAS CUADRÁTICAS EN $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

En este capítulo se muestra la caracterización de las formas cuadráticas del tipo $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = d$. Para llevar a cabo dicho estudio de las formas cuadráticas de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, se recurrirá a los métodos sobre restricciones lineales, anteriormente vistos y a las superficies de nivel, soportado por construcciones en software matemático con el que se podrá interactuar.

Las formas cuadráticas que se someten a estudio, en este capítulo, son aquellas que tienen la forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + mxy + nxz + ryz = d$$

o lo que es lo mismo

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + mxy + nxz + ryz - d = 0$$

Estas son ecuaciones que se pueden expresar, como ya se presentó en los capítulos anteriores, por medio de valores propios, como una estructura de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = d$$

es decir que el análisis de su comportamiento se reduce a la evaluación de las formas cuadráticas a través de los coeficientes A, B, C, d.

4.1. EL ELIPSOIDE

Sea

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = d$$

donde $A = \frac{1}{a^2}, B = \frac{1}{b^2}, C = \frac{1}{c^2}$, para $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$, es decir, de la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=d$$

se estudiará el comportamiento de la gráfica por medio de las superficies de nivel y algunas trazas.

Cuando $d>0$ existe un $k\in\mathbb{R}$ tal que $k^2=d$, luego $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=k^2$ esto es

$$\frac{x^2}{(ka)^2}+\frac{y^2}{(kb)^2}+\frac{z^2}{(kc)^2}=1$$

La anterior ecuación muestra todos los conjuntos de curvas de nivel para k^2.

Para poder reconocer comportamiento del conjunto de trazas se deben poner fija algunas (o alguna) de las variables, para este caso será z.

- Si $z=0$ entonces las trazas tendrán la forma

$$\frac{x^2}{(ak)^2}+\frac{y^2}{(bk)^2}=1$$

el cual representa un conjunto de elipses en el plano xy como se muestra en la figura 5.

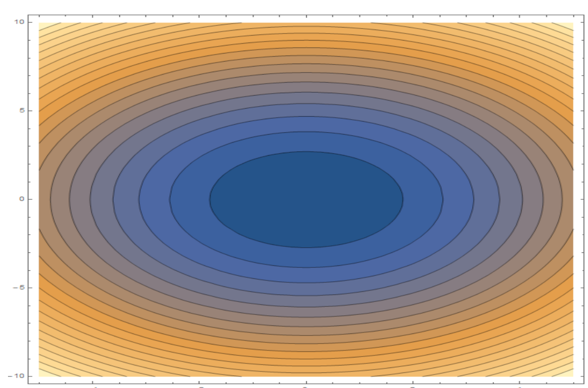

Figura 7: Curvas de nivel para z = 0 de $\frac{x^2}{(ka)^2}+\frac{y^2}{(kb)^2}+\frac{z^2}{(kc)^2}=1$

- Si $z \neq 0$, se tiene que la ecuación queda determinada por
$$\frac{x^2}{(ka)^2} + \frac{y^2}{(kb)^2} + \frac{z^2}{(kc)^2} = 1$$
donde, en particular si $z^2 = (kc)^2$ la ecuación se puede escribir
$$\frac{x^2}{(ka)^2} + \frac{y^2}{(kb)^2} + 1 = 1$$
$$\frac{x^2}{(ka)^2} + \frac{y^2}{(kb)^2} = 0$$
cuyo conjunto solución es el punto $(0,0)$.

  Ahora si $z^2 > (kc)^2$ entonces la ecuación se convierte en
$$\frac{x^2}{(ka)^2} + \frac{y^2}{(kb)^2} = 1 - \frac{z^2}{(kc)^2}$$
$$\frac{x^2}{(ka)^2} + \frac{y^2}{(kb)^2} = h \quad \text{donde } h < 0$$
y por lo tanto no existen valores reales en (x, y) que la satisfagan.

  Por último, si $z^2 < (kc)^2$ entonces la ecuación se convierte en
$$\frac{x^2}{(ka)^2} + \frac{y^2}{(kb)^2} = 1 - \frac{z^2}{(kc)^2}$$
$$\frac{x^2}{(ka)^2} + \frac{y^2}{(kb)^2} = h \quad \text{donde } h > 0$$
la cual representa una elipse para cualquier valor de (x, y).

Así mismo, para los casos en que $x = 0$ y $y = 0$ se tiene que los conjuntos de las trazas tienen las formas:

$$\frac{y^2}{(kb)^2} + \frac{z^2}{(kc)^2} = 1 \qquad y \qquad \frac{x^2}{(ka)^2} + \frac{z^2}{(kc)^2} = 1$$

respectivamente, y para estos casos se tiene que, si existen valores que satisfacen las ecuaciones entonces las trazas que representarán serán elipses, y por tal razón la ecuación

$$\frac{x^2}{(ka)^2} + \frac{y^2}{(kb)^2} + \frac{z^2}{(kc)^2} = 1$$

representa un elipsoide.

Ejemplo:

Sea la ecuación $3x^2 + 2y^2 + 2\sqrt{2}xy + 9z^2 = 36$

Si se encuentra una expresión que sea equivalente de la forma $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = d$ se puede entrar a decidir qué tipo de gráfica representa.

Determinando el polinomio característico a partir de valores propios, y haciendo la matriz simétrica de coeficientes, se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

luego

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 9 \end{vmatrix}$$

y el polinomio característico estará dado por:

$$P(x) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda - 9) - 2(\lambda - 9)$$

$$P(x) = (\lambda - 9)[(\lambda - 3)(\lambda - 2) - 2]$$

$$P(x) = (\lambda - 9)(\lambda^2 - 5\lambda + 4)$$

$$P(x) = (\lambda - 9)(\lambda - 4)(\lambda - 1)$$

Igualando a 0 se tiene que los valores propios son $\lambda = 9, \lambda = 4, \lambda = 1,$ y la ecuación equivalente es:

$$9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$$

Como $d = 36 > 0$ y los coeficientes son positivos, se tiene que la ecuación representa un Elipsoide, como se muestra en la gráfica 6.

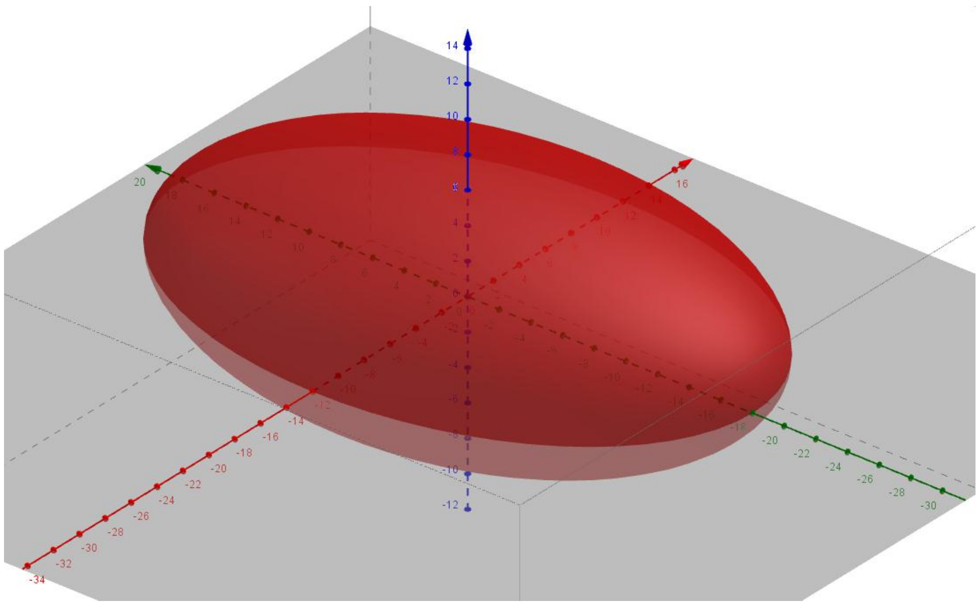

Figura 8: Elipsoide[4] .

En caso tal de que dos de los coeficientes sean iguales, se hará referencia a un sólido de revolución con respecto a alguno de los ejes coordenados, en caso que los tres coeficientes sean iguales se estará hablando de una esfera.

En general, para la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = d$$

los únicos casos, por la estructura de los números reales, que se pueden dar para el valor de d son:

---

[4] Para visualizar mejor tanto el ejemplo como la generalidad, manipular el applet "Elipsoide" que se encuentra en la carpeta Applets, o en http://181.50.246.238:8078/construccionescuadraticas/elipsoide.html.

i) Si $d = 0$ se tiene que la única solución en el punto $(0,0,0)$

ii) Si $d > 0$ el conjunto solución es un Elipsoide.

iii) Si $d < 0$ el conjunto solución no existe, es decir, no tiene una representación gráfica en los reales.

4.2. EL CONO ELÍPTICO

Sea $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = d$ donde $A = \frac{1}{a^2}, B = -\frac{1}{b^2}, C = -\frac{1}{c^2}$, para $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$, es decir, de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = d$$

se estudiará el comportamiento de la gráfica por medio de curvas de nivel y algunas trazas.

Cuando $d = 0$ entonces se tiene que

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Para estudiar el comportamiento de la ecuación se estudian sus curvas de nivel.

- Cuando $x = 0$, la ecuación es

$$-\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

  y por tanto la única solución es el punto $(0,0)$.

- Ahora si $x = k$ para $k \neq 0$ se tiene que

$$\frac{k^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$\frac{k^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

$$1 = \frac{y^2}{\left(\frac{kb}{a}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{kc}{a}\right)^2}$$

lo que representa un conjunto de elipses. A continuación se representan algunos miembros de las trazas para este caso.

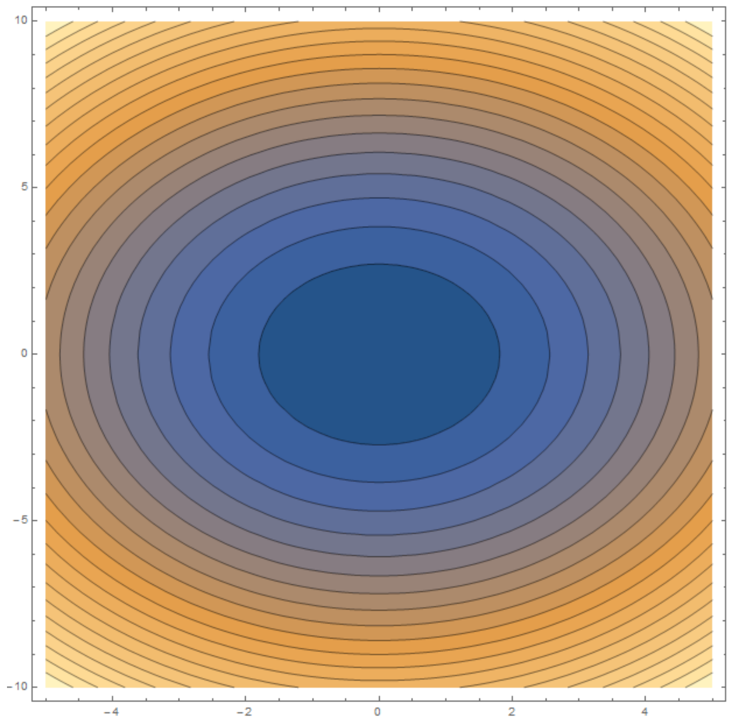

Figura 9: Curvas de nivel para el cono elíptico.

- Si $y = 0$, la ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

y por tanto se tiene

$$x^2 = \frac{a^2}{c^2} z^2$$

$$x = \pm \frac{a}{c} z$$

que corresponden con funciones lineales; igual ocurre para el caso en que $z = 0$

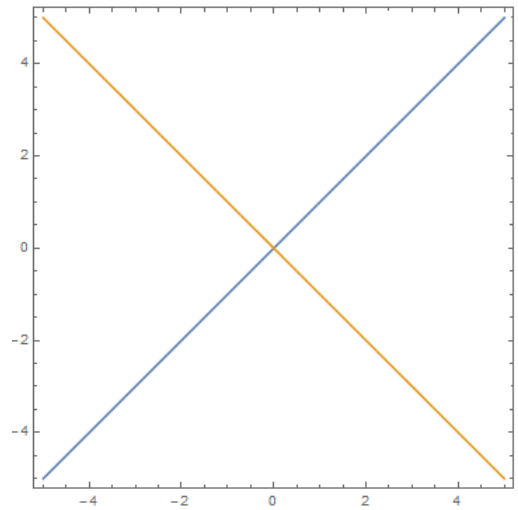

Figura 10: Curvas de nivel para las trazas en $y = 0$.

Como en la superficie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

las curvas de nivel son elipses y cuando $y = 0$ y $z = 0$ son funciones lineales entonces la superficie resultante es un cono elíptico.

Ejemplo:

Sea la ecuación $4x^2 - 2y^2 - 5z^2 + 4yz = 0$. Encontrando una expresión que sea equivalente de la forma $Ax^2 - By^2 - Cz^2 = 0$ y con el análisis de los coeficientes decidir qué tipo de gráfica representa.

Determinando el polinomio característico a partir de valores propios, haciendo la matriz de coeficientes simétrica, se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

luego

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda + 5 \end{vmatrix}$$

por lo tanto el polinomio característico es:

$$P(x) = (\lambda - 4)(\lambda + 2)(\lambda + 5) - 4(\lambda - 4)$$

$$P(x) = (\lambda - 4)[(\lambda + 2)(\lambda + 5) - 4]$$

$$P(x) = (\lambda - 4)(\lambda^2 + 7\lambda + 6)$$

$$P(x) = (\lambda - 4)(\lambda + 6)(\lambda + 1)$$

e igualando a 0 se tiene que los valores propios son $\lambda = 4, \lambda = -6, \lambda = -1$, y la ecuación semejante es

$$4x^2 - 6y^2 - z^2 = 0$$

Como $d = 0$ y los coeficientes A, B, C son positivo, negativo y negativo respectivamente, y por lo tanto se tiene que, la ecuación representa un Cono Elíptico, como se muestra en la gráfica 10.

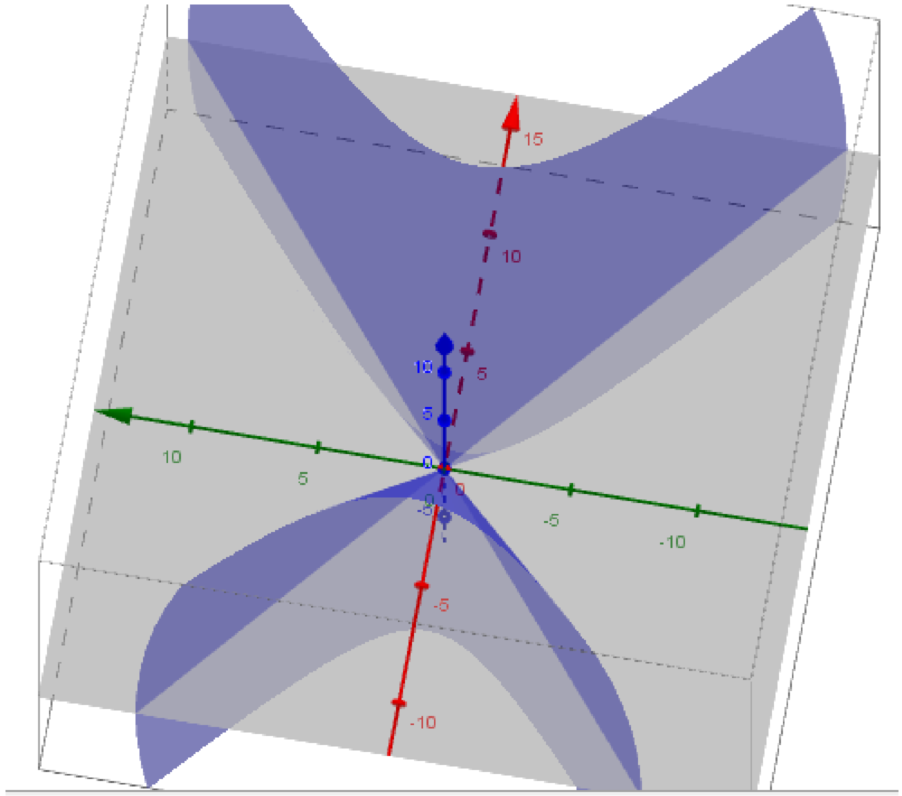

Figura 11: Cono elíptico[5].

La superficie representada por la ecuación

$$Ax^2 - By^2 - Cz^2 = 0 \quad \text{donde } A, B, C \text{ son diferentes de cero}$$

es un Cono Elíptico. Para el caso en que $A = B$ se estaría hablando de un cono circular con respecto al eje z. Las trazas hechas con respecto a los planos xz y yz son funciones lineales. Las secciones paralelas a los planos xz y yz son Hipérbolas. Por otro lado, las secciones paralelas al plano xy son elipses. En general se caracteriza por ser simétrico con respecto a cualquiera de los ejes coordenados.

[5] Para visualizar mejor tanto el ejemplo como la generalidad, manipular el applet "Cono Elíptico" que se encuentra en la carpeta Applets, o en http://181.50.246.238:8078/construccionescuadraticas/cono_elptico.html.

4.3. HIPERBOLOIDE ELÍPTICO DE UNA HOJA

Si $d \neq 0$ se tiene que la ecuación tiene la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = d$. Se hará, como en el caso anterior el análisis de las curvas de nivel y las trazas

- Si $d < 0$ se tiene la expresión

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = d$$

o lo que es igual

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = d$$

donde $d > 0$

Analizando sus curvas de nivel, se considera que:

a) Si $x = 0$ se tiene que

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = d$$

$$\frac{y^2}{(d_1 b)^2} + \frac{z^2}{(d_1 c)^2} = 1$$

donde $(d_1)^2 = d$

y así el conjunto de curvas de nivel corresponden a una serie de elipses.

b) Si $y = 0$ se tiene que

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = d$$

$$-\frac{x^2}{(d_1 a)^2} + \frac{z^2}{(d_1 c)^2} = 1$$

donde $(d_1)^2 = d$

cuya ecuación corresponde a un conjunto de hipérbolas, con focos ubicados en el eje z.

c) Si $z = 0$ se tiene que

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = d$$

$$-\frac{x^2}{(d_1 a)^2} + \frac{y^2}{(d_1 b)^2} = 1$$

donde $(d_1)^2 = d$

cuya ecuación corresponde a un conjunto de hipérbolas, con focos ubicados sobre el eje y.

Ejemplo 3:

Sea la ecuación $-3x^2 + 7y^2 + 5z^2 - 4\sqrt{2}yz = 27$.

Determinar una expresión que sea equivalente de la forma $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = d$ y decidir a partir de los coeficientes qué tipo de gráfica representa.

El polinomio puede ser reexpresado de la forma

$$3x^2 - 7y^2 - 5z^2 + 4\sqrt{2}xz = -27$$

Se determina el polinomio característico a partir de valores propios, haciendo la matriz simétrica de coeficientes, así

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & -5 \end{pmatrix}$$

luego

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 7 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & \lambda + 5 \end{vmatrix}$$

$$P(x) = (\lambda - 3)(\lambda + 7)(\lambda + 5) - 8(\lambda - 3)$$

$$P(x) = (\lambda - 3)[(\lambda + 7)(\lambda + 5) - 8]$$

$$P(x) = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 12\lambda + 27)$$

$$P(x) = (\lambda - 3)(\lambda + 9)(\lambda + 3)$$

Igualando a 0 tenemos que los valores propios son $\lambda = 3, \lambda = -9, \lambda = -3$, y la ecuación semejante es

$$3x^2 - 9y^2 - 3z^2 = -27$$

Como $d < 0$ y los coeficientes A, B, C son positivo, negativo y negativo respectivamente tenemos que la ecuación representa un Hiperboloide Elíptico de una hoja, como se muestra en la Figura 11.

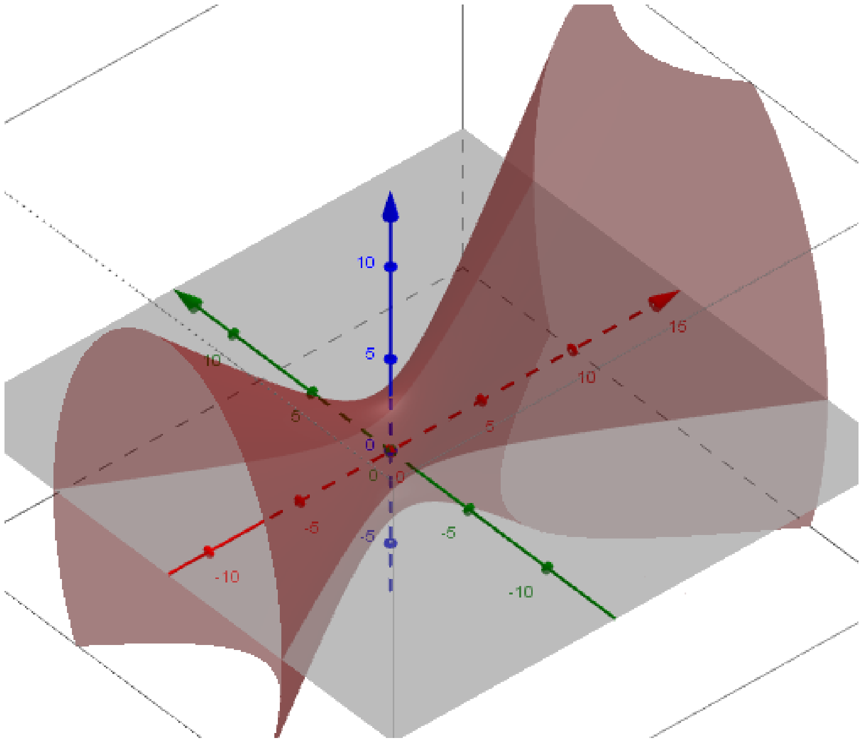

Figura 12: Hiperboloide Elíptico de una hoja[6].

La superficie representada por la ecuación

$Ax^2 - By^2 - Cz^2 = d$ donde A, B, C son diferentes de cero y $d < 0$ es un Hiperboloide Elíptico de una hoja. En el caso donde $A = B$ se estaría hablando de un Hiperboloide de Revolución de una hoja con respecto al eje z. Las trazas paralelas hechas con respecto a los planos xz y yz son hipérbolas. Las secciones paralelas a los planos xy son elipses. Se caracteriza porque es simétrico con respecto a cualquiera de los planos coordenados.

[6] Para visualizar mejor tanto el ejemplo como la generalidad, manipular el applet "Hiperboloide Elíptico de una hoja" que se encuentra en la carpeta Applets, o en http://181.50.246.238:8078/construccionescuadraticas/hiperboloide_elptico_de_una_hoja.html.

4.4. HIPERBOLOIDE ELÍPTICO DE DOS HOJAS

Para el caso estudiado en el 4.3. si $d \neq 0$ se tiene que

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = d$$

A continuación se analizan las curvas de nivel y sus trazas. Si $d < 0$ se vuelve a tener el caso analizado en el apartado anterior. Así falta analizar lo que ocurre si $d > 0$

a) $x = 0$ se tiene que

$$-\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = d$$

y la expresión no tiene soluciones reales.

b) Si $x = h$ para $h \neq 0$ se tiene que el conjunto de expresiones o superficies nivel son de la forma:

$$\frac{h^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = d$$

$$\frac{h^2}{(d_1a)^2} - \frac{y^2}{(d_1b)^2} - \frac{z^2}{(d_1c)^2} = 1$$

Donde $(d_1)^2 = d$

$$\frac{h^2}{(d_1a)^2} - 1 = \frac{y^2}{(d_1b)^2} + \frac{z^2}{(d_1c)^2} \quad (\mathbf{6})$$

Ahora en $(\mathbf{6})$ tiene solución si y solo si $h^2 > (d_1a)^2$, y la ecuación tiene la forma

$$\frac{y^2}{(d_1b)^2} + \frac{z^2}{(d_1c)^2} = r$$

donde $r > 0$ con $r = \frac{h^2}{(d_1a)^2} - 1$

con lo que se tiene un conjunto de elipses.

En caso contrario, es decir, si $h^2 < (d_1a)^2$ no existen soluciones para la ecuación. Ahora, si $h^2 = (d_1a)^2$, se tiene que la única solución es el punto (0,0).

c) Si $y = 0$ se tiene que la ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = d$$

y por lo tanto se determina un conjunto de hipérbolas.

d) Si $z = 0$ se tiene que la ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = d$$

que determina también un conjunto de hipérbolas en el plano xy.

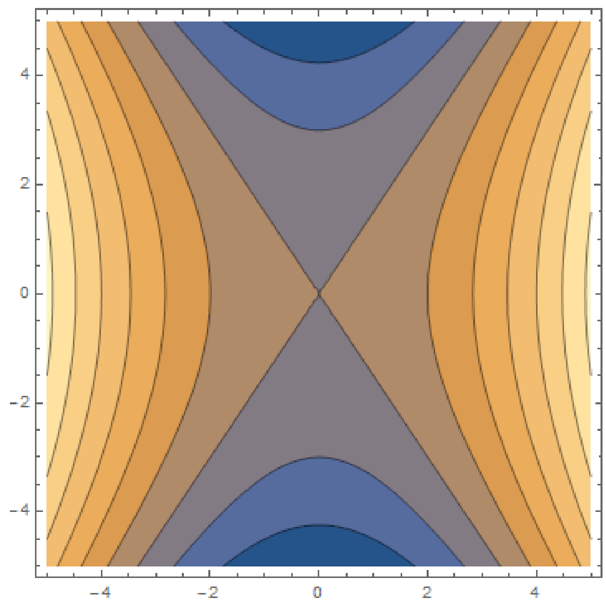

Figura 13: Curvas de nivel para el plano xy, en el hiperboloide helíptico de dos hojas.

Ejemplo:

Sea la ecuación $3x^2 - 4y^2 - 6z^2 + 2\sqrt{3}yz = 21$

Determinar una expresión que sea equivalente y de la forma $Ax^2 - By^2 - Cz^2 = d$ y decidir qué tipo de gráfica representa.

Se encuentra el polinomio característico a partir de valores propios, haciendo la matriz simétrica de coeficientes, así

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -6 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 4 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & \lambda + 6 \end{vmatrix}$$

$$P(x) = (\lambda - 3)(\lambda + 4)(\lambda + 6) - 3(\lambda - 3)$$

$$P(x) = (\lambda - 3)[(\lambda + 4)(\lambda + 6) - 3]$$

$$P(x) = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 10\lambda + 21)$$

$$P(x) = (\lambda - 3)(\lambda + 7)(\lambda + 3)$$

Igualando a 0 tiene que los valores propios son $\lambda = 3, \lambda = -7, \lambda = -3$, y la ecuación semejante es

$$3x^2 - 7y^2 - 3z^2 = 21$$

Como $d > 0$ y los coeficientes A, B, C son positivo, negativo y negativo respectivamente tenemos que la ecuación representa un Hiperboloide Elíptico de dos hojas, como se muestra en la gráfica.

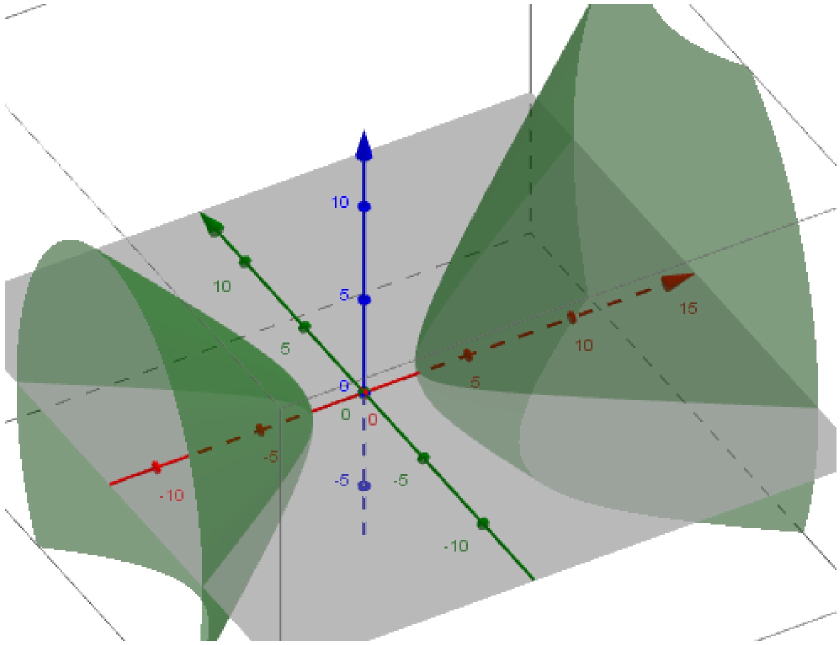

Figura 14: Hiperboloide Elíptico de dos hojas[7].

La superficie representada por la ecuación

$Ax^2 - By^2 - Cz^2 = d$ donde A, B, C son diferentes de cero y $d > 0$ es un Hiperboloide Elíptico de dos hojas. En el caso donde $B = C$ se estaría hablando de un Hiperboloide de Revolución de una hoja, con trazas circulares, con respecto al eje x. Las trazas paralelas hechas con respecto a los planos xz y yz son hipérbolas. Las secciones paralelas a los planos xy en general son elipses.

La gráfica se divide en dos partes, la primera que es la región $y > a$ y la segunda es la región $y \leq a$. Se caracteriza porque es simétrico con respecto a cualquiera de los planos coordenados.

[7] Para visualizar mejor tanto el ejemplo como la generalidad, manipular el applet "Hiperboloide Elíptico de dos hojas" que se encuentra en la carpeta Applets, o en http://181.50.246.238:8078/construccionescuadraticas/hiperboloide_elptico_de_dos_hojas.html.

4.5. REMOCIÓN DE TÉRMINOS LINEALES

Si una ecuación en tres variables comprende los términos de segundo grado y uno o más de los términos lineales pero ninguno de los llamados términos de los productos, entonces puede ser puesta en la forma de la ecuación de un elipsoide, un hiperboloide, o un cono completando los cuadrados en x, y, z y reemplazando los términos lineales que se elevan al cuadrado por x_1, y_1, z_1. Esencialmente esto constituye en una translación del origen. Si los términos lineales son de la forma $(x-h), (y-k)$, y $(z-l)$, el origen es trasladado a (h, k, l).

Una vez que una ecuación de la forma $ax^2 + 2bxy + cy^2 + px + qy + r = 0$ se transforma a $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = d$ con lo discutido en los capítulos 1 y 2 del presente documento, y en los anteriores apartados del presente capítulo, resulta factible transformarla a partir de los coeficientes A, B, C, d y determinar el tipo de superficie. Así se tiene:

i) Si $d > O$, y A, B, C son positivos la ecuación corresponde a un elipsoide; para el caso particular en que $A = B = C$ el elipsoide corresponde a una esfera.

ii) Si $d > O$, y exactamente uno de los coeficientes A, B, C, es negativo, entonces la ecuación corresponde a un hiperboloide elíptico de una hoja.

iii) Si $d > 0$ y de los tres coeficientes A, B, C dos de ellos son negativos la ecuación corresponde a un hiperboloide elíptico de dos hojas.

iv) Si $d = 0$ se puede esperar que corresponde a un cono Elíptico.[8]

[8] Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/5103/1/luisalvarosalazarsalazar.1987_Parte1.pdf

5. CAPÍTULO 5: OPTIMIZACIÓN DE FORMAS CUADRÁTICAS

Muchas de las situaciones en la vida cotidiana se pueden modelar con funciones y especialmente con funciones cuadráticas. En algunas de ellas puede resultar relevante determinar bajo que condiciones un valor específico de una magnitud puede resultar óptimo, esto es máximo o mínimo. En el estudio de las mismas se encuentran situaciones donde estas pueden estar sujetas a diversas variantes que intervienen en el resultado final. Teniendo en cuenta esas condiciones particulares, que usualmente son denominadas restricciones, en el presente capítulo se aplicarán algunos de los procesos estudiados en el documento para dar solución a tres ejemplos de problemas prototípicos que se modelan por medio de expresiones cuadráticas.

Primer problema[9].

Calcule la distancia más corta desde el punto $A\ (2,0,-3)$ al plano $x+y+z=1$.

Solución:

La figura 13 muestra una representación gráfica de la situación para el enunciado anterior, donde se busca la distancia del punto A dado al punto B que se encuentra en el plano sea mínima. Una solución intuitiva desde la teórica indica que $\overline{AB}$ debe ser perpendicular al plano $x+y+z=1$ y con esto se garantizaría que la distancia será la más corta desde A al plano.

Para empezar, la fórmula para la distancia de dos puntos en el espacio $A(x_0, y_0, z_0)$ y $B(x, y, z)$ esta dada por:

$$d_{AB} = d = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

[9] El ejercicio es tomado de Stewart, J. (2008). Calculus 6ta edición. (p.968) Thomson learning internacional.

para este caso $A(2,0,-3)$ y en general $B(x,y,z)$, donde más adelante se deberá considerar que B pertenece al plano dado, entonces se tiene que

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z+3)^2}$$

como se tiene la restricción mencionada anteriormente, se cumple que $x + y + z = 1$, de donde

$$z = 1 - (x + y)$$

y por lo tanto en la ecuación de distancia

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (1-(x+y)+3)^2}$$

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (4-(x+y))^2}$$

La anterior expresión nos indica la distancia que existe entre el punto A y el plano, pero como se debe encontrar la distancia mínima, entonces se debe minimizar dicha expresión.

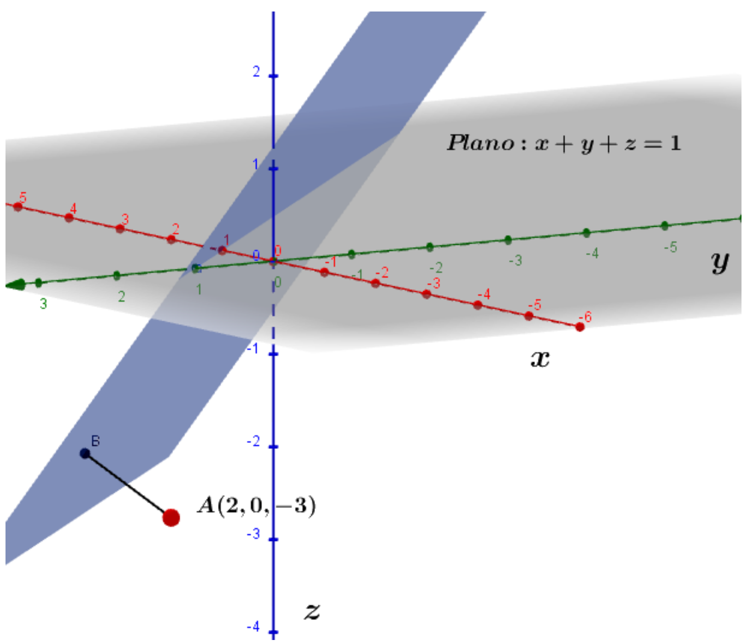

Figura 15: $\overline{AB}$ *perpendicular al plano* $x + y + z = 1$.

como $d = \sqrt{(x-2)^2 + y^2 + (4-(x+y))^2}$ no es una forma cuadrática, por tanto se eleva al cuadrado ambos lados de la igualdad, obteniendo

$$d^2 = (x-2)^2 + y^2 + (4-(x+y))^2$$

pero maximizar o minimizar una expresión es igual al hacerlo con su cuadrado, así que simplificando se tiene

$$d^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 16 - 8(x+y) + (x+y)^2$$

$$d^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 16 - 8x - 8y + x^2 + 2xy + y^2$$

$$d^2 = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 12x - 8y + 20$$

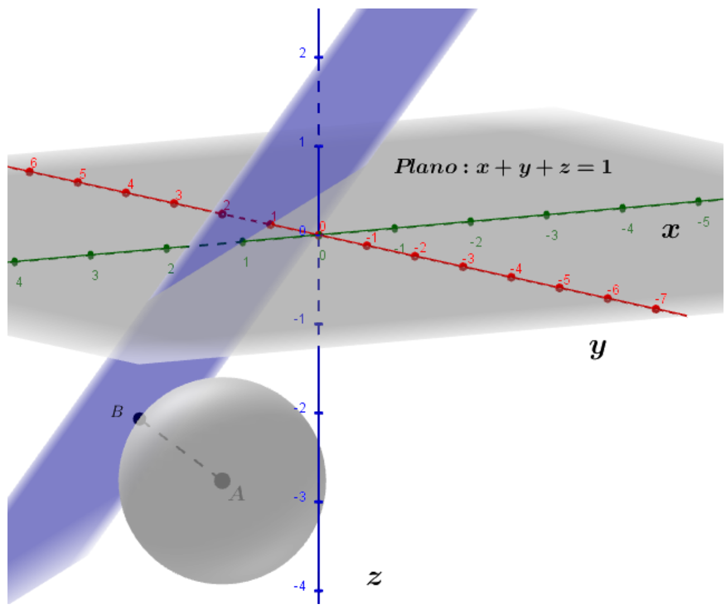

Figura 16: Distancia mínima del punto A al plano.

pero la anterior es una expresión cuadrática general sin restricciones lineales, estudiadas en el capítulo 2, así que utilizando los coeficientes podemos saber en qué punto se encuentra el mínimo, ya que en últimas, y como se ilustra en la figura 14, se está determinando el desplazamiento del paraboloide y su punto mínimo, como se realizó puntualmente en el apartado 2.1.

Para hallar los valores de los factores de la translación ε y η se aplican los resultados encontrados en dicho apartado, esto es:

$$\varepsilon = \frac{cp - bq}{2(ac - b^2)}$$

$$\varepsilon = \frac{2(-12) - 1(-8)}{2(4 - 1^2)}$$

$$\varepsilon = \frac{-24 + 8}{2(3)}$$

$$\varepsilon = -\frac{16}{6}$$

$$\varepsilon = -\frac{8}{3}$$

por lo tanto la coordenada en x sobre la superficie del paraboloide será

$$x = \frac{8}{3}$$

Ahora para η

$$\eta = \frac{aq - bp}{2(ac - b^2)}$$

$$\eta = \frac{2(-8) - 1(-12)}{2(4 - 1^2)}$$

$$\eta = \frac{-16 - 1(-12)}{2(4 - 1^2)}$$

$$\eta = -\frac{4}{6}$$

$$\eta = -\frac{2}{3}$$

por lo tanto la coordenada en y sobre la superficie del paraboloide será

$$y = \frac{2}{3}$$

Para determinar de la distancia mínima se evalúa el valor funcional sobre el paraboloide en el punto del dominio $\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$$d^2 = 2\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 12\left(\frac{8}{3}\right) - 8\left(\frac{2}{3}\right) + 20$$

$$d^2 = \frac{4}{3}$$

Ahora sacando raíz cuadrada a ambos lados y racionalizando se tiene que:

$$d = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

por tanto la distancia más corta del punto $A(2,0,-3)$ al plano $x + y + z = 1$ es

$$d = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Segundo problema[10].

Encuentre tres números positivos cuya suma sea 12 y que la suma de sus cuadrados sea tan pequeña como sea posible.

Solución:

Al igual que en el anterior problema, se determina la función a optimizar es este caso la suma de los cuadrados s, que se encuentra sujeta a la restricción de la suma dada.

[10] El ejercicio adaptado de Stewart, J. (2008). Calculus 6ta edición. (p.968) Thomson learning internacional.

Como los tres números son positivos y la suma de estos da como resultado 12 la ecuación de la restricción es:

$$x + y + z = 12 \qquad (\mathbf{7})$$

Ahora, la función objetivo es la suma de los cuadrados, entonces

$$s = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (\mathbf{8})$$

que para este caso se debe minimizar. Así despejando z en $(\mathbf{7})$ y sustituyendo en $(\mathbf{8})$ se tiene:

$$z = 12 - (x + y)$$

de donde en $(\mathbf{8})$

$$s = x^2 + y^2 + \big(12 - (x + y)\big)^2$$

Desarrollando

$$s = x^2 + y^2 + (144 - 24(x + y) + (x + y)^2)$$

$$= x^2 + y^2 + (144 - 24x - 24y + x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 24x - 24y + 144$$

La anterior es una expresión cuadrática que se minimiza a partir de lo analizado en la sección 2.1. Así

$$\varepsilon = \frac{cp - bq}{2(ac - b^2)}$$

$$\varepsilon = \frac{2(-24) - 1(-24)}{2(4 - 1^2)}$$

$$\varepsilon = \frac{-48 + 24}{6}$$

$$\varepsilon = -\frac{24}{6}$$

$$\varepsilon = -4$$

Ahora para η

$$\eta = \frac{aq - bp}{2(ac - b^2)}$$

$$\eta = \frac{2(-24) - 1(-24)}{2(4 - 1^2)}$$

$$\eta = \frac{-48 + 24}{6}$$

$$\eta = -\frac{24}{6}$$

$$\eta = -4$$

Por lo tanto por la translación las coordenadas de x e y serán:

$$x = 4 \ , \ \ y = 4$$

y evaluando en la restricción se tiene que z será:

$$z = 12 - (4 + 4)$$

$$z = 12 - 8$$

$$z = 4$$

luego

$$x = 4, \qquad y = 4, \qquad z = 4$$

y la suma de sus cuadrados es

$$s = 4^2 + 4^2 + 4^2$$

$$s = 16 + 16 + 16$$

$$s = 48$$

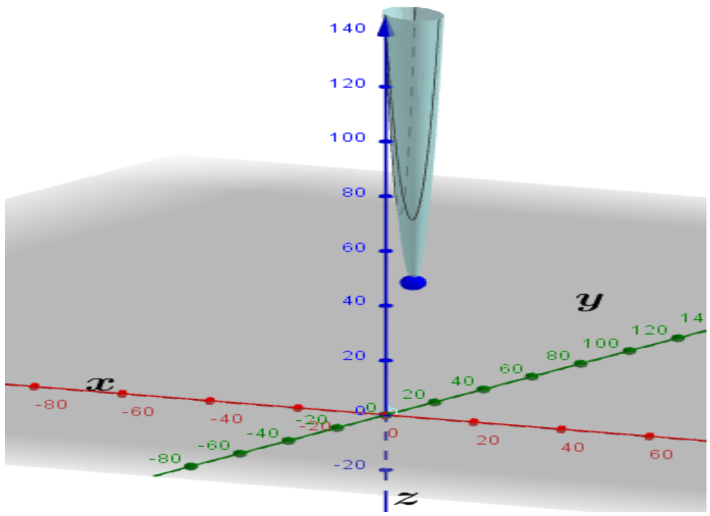

Figura 17: Gráfica de la función $s = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 24x - 24y + 144$ con la solución al segundo problema.

Por tanto los tres números son el mismo $x = y = z = 4$, que suman 12 y cuya suma de cuadrados es 48 que es mínima dadas las condiciones del problema.

Tercer problema[11].

Tres alelos (otras versiones de un gen), A, B y O determinan los cuatro tipos de sangre, a saber, $A(AA\ o\ AO)$, $B(BB\ o\ BO)$, $O(OO)$ y AB. La ley de Hardy – Weinberg[12] establece que la proporción de individuos de una población que llevan dos alelos diferentes es

$$P = 2pq + 2pr + 2rq \quad (\mathbf{9})$$

[11] El ejercicio es tomado de Stewart, J. (2008). Calculus 6ta edición. (p.968) Thomson learning internacional.

[12] El nombre se debe al del matemático inglés G. H. Hardy y del médico alemán Wilhelm Weinberg, quienes establecieron el teorema de manera independientemente en 1908.

Donde p, q y r son las proporciones de A, B y O en la población. Use el hecho de que $p + q + r = 1 \quad (\mathbf{10})$ para demostrar que P es cuando mucho $\frac{3}{2}$.

Solución:

Se quiere optimizar la función P sujeta a la restricción $p + q + r = 1$ (donde implícitamente se tiene que $0 \leq p \leq 1,\ 0 \leq q \leq 1, 0 \leq r \leq 1$)

Despejando r en $(\mathbf{10})$

$$r = 1 - (p + q)$$

y sustituyendo en $(\mathbf{9})$ se tiene:

$$P = 2pq + 2p(1 - (p + q)) + 2(1 - (p + q))q$$

$$P = 2pq + 2p(1 - p - q) + 2(1 - p - q)q$$

$$P = 2pq + 2p - 2p^2 - 2pq + 2q - 2qp - 2q^2$$

$$P = -2p^2 - 2pq - 2q^2 + 2p + 2q \quad (\mathbf{11})$$

La anterior es la función que modela la proporción de individuos de una población que llevan dos alelos diferentes, y es la expresión que se va a maximizar.

Nuevamente considerando lo estudiado en el apartado 2.1. se tiene que:

$$\varepsilon = \frac{cp - bq}{2(ac - b^2)}$$

$$\varepsilon = \frac{(-2)(2) - 1(2)}{2(4 - 1^2)}$$

$$\varepsilon = \frac{-4 + 2}{2(3)}$$

$$\varepsilon = -\frac{2}{6}$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{3}$$

Ahora con η

$$\eta = \frac{aq - bp}{2(ac - b^2)}$$

$$\eta = \frac{(-2)(2) - 1(2)}{2(4 - 1^2)}$$

$$\eta = \frac{-4 + 2}{2(3)}$$

$$\eta = -\frac{2}{6}$$

$$\eta = -\frac{1}{3}$$

así por la translación se tiene que $p = \frac{1}{3}$ y $q = \frac{1}{3}$, es decir $p = q = \frac{1}{3}$

de donde para hallar r

$$r = 1 - (p + q)$$

$$r = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$$

$$r = \frac{1}{3}$$

Como

$$p = \frac{1}{3}, \qquad q = \frac{1}{3}, \qquad r = \frac{1}{3}$$

en estos valores es donde se encuentra el valor máximo de la función. Así el valor máximo funcional estará dado por:

$$P\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = -2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$P = \frac{2}{3}$$

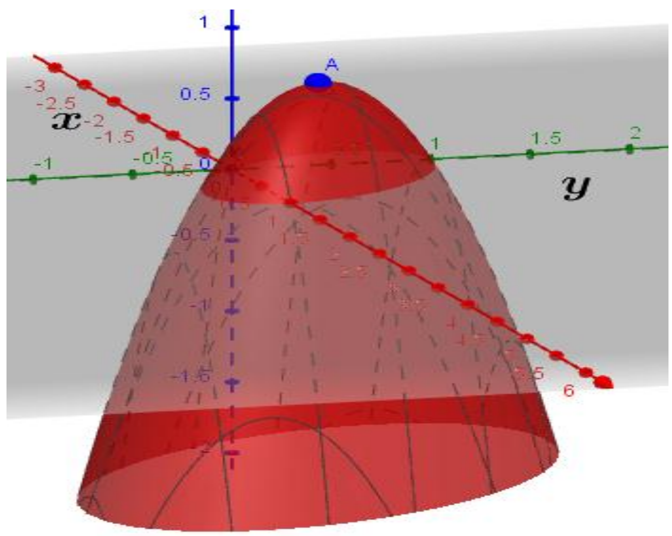

Figura 18: Gráfica de la función $P = -2p^2 - 2pq - 2q^2 + 2p + 2q$ con la solución al tercer problema.

Luego la proporción máxima de individuos en una población que tiene dos alelos diferentes es de $P = \frac{2}{3}$.

6. CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES

A continuación se presentan las conclusiones que surgen luego de la realización del presente estudio, con respecto a los resultados matemáticos que se encontraron y que son un insumo para avanzar en la formación profesional. Para una mejor caracterización de las mismas se procura presentarlas en relación con los objetivos específicos propuestos.

6.1. Comparación de expresiones cuadráticas y polinomios de Taylor de segundo grado para una aproximación a la prueba de la segunda derivada para funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Generalmente cuando se estudian los puntos críticos en funciones de varias variables y especialmente en funciones de dos variables, se aborda a través del criterio de la segunda derivada, para esto se necesitan las derivadas parciales de la función con respecto a las variables independientes. La justificación para este procedimiento se basa en que, al obtener las derivadas parciales, se muestran los comportamientos de la función en las trazas correspondientes a estas, es decir, los crecimientos y decrecimientos en direcciones específicas.

Por lo anterior, se propone una deducción del criterio de la segunda derivada para cualquier función en $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con punto crítico en $(0,0)$ y $f(0,0) = 0$, y f diferenciable en $(0,0)$ tratamiento que es presentado en el capítulo 1. Primero se caracteriza el comportamiento de una función de la forma $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ a través de sus coeficientes.

Dado que la expresión es polinómica de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y cumple las condiciones expresadas anteriormente, se tiene la condición de que sea diferenciable en el orden 2, y por medio de polinomios de Taylor se puede expresar como:

$$P(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \frac{1}{2}f_{xx}(a,b)(x-a)^2$$
$$+ f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}f_{yy}(a,b)(y-b)^2$$

que al simplificarla algebraicamente resulta en una forma análoga a la función cuadrática mencionada anteriormente.

Esto sugiere que en vez de estudiar el comportamiento, y más exactamente de los puntos críticos de la función directamente con su expresión original, se haga en cambio el análisis con un polinomio y se caracterice únicamente a través de sus coeficientes y así decidir si su punto crítico es máximo o mínimo.

6.2. Clasificación de puntos críticos para funciones cuadráticas.

Para completar el estudio de las formas cuadráticas en dos variables, se aplica un análisis a expresiones generales de la forma $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + px + qy + r$, donde identificamos, en su dominio, valores donde la función tiene puntos críticos teniendo en cuenta que dichas expresiones se someten a restricciones o no. Lo anterior, se logra a partir de ciertas fórmulas que dependen únicamente de los coeficientes de la expresión cuadrática.

Los estudios anteriores, por su naturaleza de ubicarse de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se llevaron a cabo utilizando herramientas matemáticas como la factorización, donde expresamos de formas convenientes las funciones cuadráticas para deducir los resultados encontrados. Sin embargo, en el momento que se quiere generalizar el estudio a las formas cuadráticas de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se recurre a la representación que las matrices permiten hacer de dichas funciones, como se ve cuando se escribe un polinomio como una multiplicación de matrices en la que se tiene la matriz característica de coeficientes. A partir de ello, se utilizan valores propios para caracterizar y definir algunas formas teniendo en cuenta el comportamiento "positivo" o "negativo" de estas, por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes de una ecuación cuadrática, entonces se tiene que los autovalores son positivos si y solo si $a + c > 0$ y $|\mathrm{A}| > 0$, los dos autovalores son negativos si y solo si $a + c < 0$ y $|\mathrm{A}| > 0$, los autovalores tienen signo distinto si y solo si $|\mathrm{A}| < 0$, uno de los autovalores es cero si y solo si $|\mathrm{A}| = 0$ y el otro será $\lambda = a + c$, lo anterior da pie a decir que, A es definida positiva si y solo si todos los autovalores de A son positivos, A es semidefinida positiva si y solo si todos los autovalores de A son tales que $\lambda_i \geq 0$, A es definida negativa si y solo si todos los autovalores de A son negativos, A es semidefinida negativa si y solo si todos los autovalores de A son tales que $\lambda_i \leq 0$, A es indefinida si y solo si A tiene dos autovalores con signos opuestos; y en consecuencia decidir si la función se define de la misma manera.

6.3. Caracterización de algunas gráficas de expresiones cuadráticas de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Con los resultados encontrados hasta el capítulo 3, se caracterizaron las formas cuadráticas de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cuya expresión es de la forma $ax^2 + by^2 + cz^2 + mxy + nxz + ryz = d$. Así, dependiendo de los coeficientes se pueden definir el elipsoide, el cono elíptico, el hiperboloide elíptico de una hoja y el hiperboloide elíptico de dos hojas. Cada una de estas es estudiada, apoyadas por una construcción con software matemático, donde se pueden variar los coeficientes y mirar como es el cambio de la gráfica de la misma a partir de la expresión algebraica general.

Como futuros desarrollos, se podrían caracterizar funciones cuadráticas $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, y de manera general de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ haciendo todo el tratamiento desde autovalores para caracterizar el signo y a la vez expresarlas de diversas formas equivalentes.

Finalmente se logró establecer una relación con algunas de las aplicaciones más representativas a la hora de encontrar valores críticos en cualquier función y especialmente en funciones cuadráticas, que es optimización. Se trabajan tres situaciones totalmente diferentes y prototípicas que se modelan por medio de expresiones cuadráticas y para las cuales se deben encontrar los valores máximos y mínimos. Para solucionarlos se utilizan ecuaciones cuadráticas generales con y sin restricciones, las cuales se abordaron en el capítulo 2 y donde se encontraron las expresiones para hallar las translaciones de dichos puntos críticos.

Personalmente, y desde el punto de vista de la formación inicial como docente de matemáticas, la realización del presente documento me ha mostrado una visión más amplia y profunda de lo que es un punto crítico en una función, no solo en expresiones cuadráticas sino en general para cualquier función, dejando ver que existe más de una forma para hallar dichos puntos, construyendo otro camino totalmente diferente y un poco más apegado al proceso temático que se aborda en la academia, y que posiblemente esté más próximo a los desarrollos históricos del concepto, pudiendo convertirse así en una estrategia para que los estudiantes de diferente nivel académico iniciaran una mirada hacia estos temas.

Por otra parte, el estudio me permitió complementar el conocimiento que tenía sobre las funciones en varias variables y sobre todo en las funciones cuadráticas de $\mathbb{R}^{\mathbf{2}} \rightarrow \mathbb{R}$ y aproximarme a comprender lo que ocurre de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R}$, y relacionar el mismo con el uso que tienen para modelar y resolver problemas que involucran los procesos de optimización.

7. BIBLIOGRAFÍA

Apostol, T. (2001). Calculus. Vol 1. Segunda edición. Editorial Reverté, S. A.

Apostol, T. (2001.A). Calculus. Vol 2. Segunda edición. Editorial Reverté, S. A.

Alegre, A. (2010). *Las funciones homogéneas y sus características de mayor relevancia en su utilización como instrumentos de modelización de ciertos tipos de relaciones entre variables económicas.* Madrid: Universidad Autónoma de Madrid. Recuperado el 18 de noviembre de: 2015 de https://repositorio.uam.es/handle/10486/5620.

Derivadas parciales segundas. (2005, Abril 21). Recuperado el 22 de agosto de 2015 de: http://www3.uah.es/fsegundo/calcTeleco/esquemas/220DerivadasParcialesSegundasPolinomiosTaylor.pdf.

Funciones homogéneas. Funciones implícitas. (2011, Diciembre 12). Recuperado el 18 de noviembre de 2015 de: http://personal.us.es/pnadal/Informacion/Leccion4%20Funhomog_implic.pdf.

Gancho, T. (2009). *Approximation, numerical differentiation and integration.*

based on taylor polynomial. Vol. 10. Article 18, 7 pp. Sofia: Victoria University.

Kolman, B., Hill,D. (2006). Álgebra lineal. Editorial Pearson Educación.

Ramírez, P. (1991). *Las funciones homogéneas y su uso en economía.* Antioquia: Universidad de Antioquia. Recuperado el 18 de Octubre de 2015 de: http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/lecturasdeeconomia/article/view/5116/4481.

Salazar, L. (1987). *Superficies de segundo orden.* Manizales: Universidad Nacional de Colombia. Recuperado el 24 de abril de 2016 de: http://www.bdigital.unal.edu.co/5103/1/luisalvarosalazarsalazar.1987_Parte1.pdf.

Stewart, J. (2006). Cálculo: conceptos y contextos. Tercera edición. México. Thomson learning.

Stewart, J., Redlin, L., Watson, S. (2007). Precálculo: Matemáticas para el cálculo. Quinta edición. México. Thomson learning.

Stewart, J. (2008). Cálculus. Sexta edición. México.Thomson learning.

Superficies y curvas. (2010, Septiembre 10). Recuperado el 18 de abril de 2016 de: www.bdigital.unal.edu.co/250/4/81_-_3_Capi_2.pdf.

Sydsaeter, K., Hammond, P. (1996). Matemáticas para el análisis económico. México: Editorial Prentice-Hall.

Swokowski, E. (1988). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Wang, K. (2014). *A Rationalization for the method of Classifying Critical Points.* Cambridge: Harvard University. Recuperado el 23 de agosto de 2015 de: http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic1478527.files/2nd%20Derivative%20Test.pdf.