

EL MÉTODO DE ANÁLISIS – SÍNTESIS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
ARITMÉTICOS ESCOLARES DE ENUNCIADO VERBAL

ORLANDO RAFAEL BARRIOS BUSTILLO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

2011

EL MÉTODO DE ANÁLISIS – SÍNTESIS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
ARITMÉTICOS ESCOLARES DE ENUNCIADO VERBAL

ORLANDO RAFAEL BARRIOS BUSTILLO

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE
MAGÍSTER EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos.

ASESOR

ÉDGAR ALBERTO GUACANEME SUÁREZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

2011

*A Jesús, a mis padres
y a Ricardo, mis maestros*

RESUMEN ANALÍTICO

Tipo de documento: Tesis

Acceso al documento: Universidad Pedagógica Nacional

Título del documento: El método de análisis – síntesis en la resolución de problemas aritméticos escolares de enunciado verbal

Autor(es): BARRIOS BUSTILLO, Orlando Rafael

Publicación: Bogotá, D.C., 2011, (124)

Unidad patrocinante: Universidad Pedagógica Nacional

Palabras claves: Análisis, Síntesis, Heurística, Problema Aritmético de Enunciado Verbal, Currículo Propuesto, Currículo Logrado, Representación Discursiva del Razonamiento, Representación Esquemática del Razonamiento.

Descripción: Se reporta a través de este documento un estudio desarrollado en el Colegio Italiano Leonardo da Vinci en relación con una adaptación escolar del método de análisis – síntesis que se utiliza en el tratamiento de los problemas aritméticos de enunciado verbal.

El objetivo principal de este estudio consiste en la identificación y caracterización de las relaciones entre el currículo propuesto y el currículo logrado con respecto a la temática seleccionada. En el proceso, se revisan referentes conceptuales e investigativos sobre la resolución de problemas y sobre el análisis y la síntesis en algunos contextos en donde ha aparecido a través de la historia. Como conclusiones, se emiten las relaciones entre los dos niveles de desarrollo curricular y se formulan consideraciones acerca de cómo podrían reorientarse o complementarse las acciones educativas, para que la utilización del método analítico – sintético sea más significativa en el contexto de la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal.

Fuentes: Para la descripción del currículo propuesto sobre la temática en cuestión, se retoman los documentos de tipo conceptual y operativo que describen el contexto

institucional en el que se plantea el estudio (Colegio Italiano Leonardo da Vinci, 2007i, 2007ii). Para la consolidación del marco de referencia conceptual se retoman los resultados de investigaciones en el ámbito disciplinar de las Matemáticas y de las Matemáticas escolares, con respecto al método de análisis y síntesis y su pertinencia en la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal (Kalmykova, 1975; Ritchey, 2006). Así mismo, se tuvieron en cuenta conceptualizaciones en torno a la resolución de problemas en Matemáticas y a las representaciones semióticas para completar y abrir nuevas opciones de análisis posteriores (Puig y Cerdán, 1988; Santos Trigo, 2008; Duval, 1999).

Contenidos: La resolución de problemas en Matemáticas es una fuente productora de conocimiento matemático. Este conocimiento se determina a partir de los tipos de problemas que se resuelven, en tanto proveen distintos contextos de experiencia, y de las heurísticas construidas para la resolución de los mismos, en tanto articulan y caracterizan la actividad matemática de los resolutores, estudiantes, en el proceso de resolución.

El método de análisis y síntesis aparece en la historia de las ciencias en diferentes momentos. Es sistematizado inicialmente en Grecia clásica en los *Elementos* de Euclides en el ámbito de la resolución de problemas en geometría. Pappus describe de manera detallada el análisis y la síntesis y diferencia diferentes tipos de análisis. Posteriormente, estas realizaciones de Pappus son retomadas por Descartes, Newton y Riemann, entre otros, cada uno de los cuales propone adaptaciones del método, que permiten ampliar los contextos en donde el análisis y la síntesis son aplicables identificando las condiciones que deben tener los problemas, sistemas o fenómenos para que dicha aplicación sea pertinente.

El método de análisis – síntesis en la resolución de problemas aritméticos aparece reportado en el ámbito escolar en investigaciones soviéticas desarrolladas entre los años sesenta y setenta. Estos estudios se fundamentaron en una postura psicológica desde la cual se considera al pensamiento humano como analítico y sintético. Así pues, el método

que se describe en la historia de las Matemáticas y de otras ciencias incursionó en la escuela convirtiéndose en una heurística para la resolución de problemas.

En el Colegio Italiano Leonardo da Vinci, el método es utilizado desde los años noventa, consolidándose como uno de los principales objetos de aprendizaje de los estudiantes, considerados en el currículo propuesto de matemáticas en la escuela primaria.

En la actualidad, los estudiantes muestran algunas dificultades en el trabajo en la resolución de problemas aritméticos que, en su mayoría, se remiten a la utilización y comprensión de los elementos propios del método. Tales dificultades inciden en la concepción de los estudiantes sobre la resolución de problemas matemáticos en general y en la actividad resolutoria misma. No obstante, los estudiantes han asimilado un método que difiere del propuesto desde la teoría y que permite cuestionar la validez o pertinencia de los que se presume desde el currículo propuesto.

Este documento se encuentra dividido en varios capítulos. El capítulo 1, *Aspectos generales de la investigación*, contiene la información relativa a los antecedentes y justificación del estudio, a la formulación del problema y descripción de las intenciones de estudio, y a los elementos metodológicos que orientaron el desarrollo del estudio. En el capítulo 2, *Elementos conceptuales del marco de interpretación del estudio*, se hace un recorrido por los principales referentes conceptuales que constituyen un marco teórico con el cual interpretar la actividad de los estudiantes en torno a la resolución de PAEV con el método de análisis – síntesis. El capítulo 3, *Descripción y aplicación de los instrumentos de recolección de la información*, contiene la información relativa a las pruebas aplicadas para recoger la información, a la población seleccionada para el desarrollo de las pruebas y a la actividad de los estudiantes frente a las pruebas, conteniendo, además, las justificaciones de las decisiones metodológicas y análisis previos vía a la caracterización del currículo logrado para el establecimiento de relaciones con el propuesto. El capítulo 4, *Caracterización del currículo logrado con respecto al método de análisis – síntesis en la resolución de PAEV*, se presenta un resumen y ampliación de los análisis sobre los

resultados de los estudiantes en las pruebas y de las intervenciones en la entrevista semiestructurada, con el objetivo de caracterizar el currículo logrado. Por último, el capítulo 5, *Conclusiones*, contiene los resultados del estudio.

Metodología: El diseño metodológico atiende al objetivo de identificar y clasificar las relaciones entre el currículo propuesto y el currículo logrado en torno al uso del método de análisis – síntesis en la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal. En un primer momento se realizaron revisiones y estudios documentales. Así, inicialmente, se revisaron documentos institucionales, conceptuales y operativos, que permitieron describir y caracterizar el currículo propuesto en torno a la temática de estudio; otra revisión bibliográfica permitió establecer los elementos conceptuales a partir de los cuales fue posible modelar la temática de estudio, construir los instrumentos de recolección de la información y consolidar un marco de interpretaciones sobre la actividad de los estudiantes con el objetivo de caracterizar el currículo propuesto. Tal marco de interpretaciones se consolidó en un contexto de significación *a posteriori* del trabajo de los estudiantes sobre las pruebas diseñadas y de las intervenciones en la entrevista aplicada. La selección de los estudiantes para las pruebas obedeció a una serie de criterios sobre el desempeño.

Conclusiones: El estudio muestra que el currículo logrado difiere sustancialmente del currículo propuesto en relación con el uso del método de análisis – síntesis en la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal (PAEV) en el Colegio Italiano Leonardo da Vinci. Con frecuencia, los estudiantes utilizan estrategias que les ayudan a completar los pasos requeridos desde el método, pero que van en contravía de la naturaleza del mismo; así, por ejemplo, ante problemas de una estructura diferente a la que usualmente trabajan, los estudiantes utilizan síntesis parciales antes de representar el razonamiento analítico y la analogía, evocando modelos de problemas ya resueltos para acomodarlos y complementarlos en el proceso de resolución del problema que se les solicita. El objetivo educativo que se formula desde el programa de Matemáticas en la institución tiene que ver con la habilidad de resolver problemas matemáticos; sin

embargo, en lo que refiere a los PAEV, los estudiantes fácilmente interpretan la aplicación del método como el objetivo principal de la actividad y, de hecho, a partir de lo indagado, parecería que el camino seleccionado para orientar la resolución de problemas, termina siendo la meta del aprendizaje.

Fecha de elaboración del resumen (26, 11, 2011).

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	1
1 ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN	3
1.1 ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN	3
1.1.1 Antecedentes institucionales.....	5
1.1.1.1 Contexto institucional.....	5
1.1.1.2 Programa institucional de Matemáticas para la <i>scuola primaria</i>	8
1.1.1.3 Historia del objeto de estudio en la institución.....	12
1.1.1.4 Problemáticas docentes identificadas.....	15
1.1.2 Panorama general del objeto de estudio en contextos de investigación a nivel internacional.....	25
1.1.2.1 Concepción sobre la resolución de problemas en Matemáticas.....	25
1.1.2.2 Enfoques de investigación	28
1.1.2.3 Investigaciones sobre la resolución de problemas en Matemáticas.....	32
1.1.2.4 Estudios sobre la resolución de problemas y su incidencia en el diseño curricular en Matemáticas	35
1.1.2.5 El método de análisis – síntesis como interés de la Educación Matemática	39
1.2 PROBLEMA E INTENCIONES DE INVESTIGACIÓN	42
1.2.1 Preguntas e Hipótesis del estudio.....	42
1.2.2 Objetivos	45
1.2.2.1 General.....	45

1.2.2.2	Específicos.....	45
1.3	DESCRIPCIÓN METODOLÓGICA DEL DESARROLLO DEL ESTUDIO.....	45
2	ELEMENTOS CONCEPTUALES DEL MARCO DE INTERPRETACIÓN DEL ESTUDIO	51
2.1	EL MÉTODO DE ANÁLISIS – SÍNTESIS EN LA HISTORIA DE LAS CIENCIAS.....	51
2.2	EN MÉTODO DE ANÁLISIS – SÍNTESIS EN LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES	58
2.3	MARCO DE INTERPRETACIONES EN LOS ESTUDIOS SOVIÉTICOS SOBRE EL MÉTODO DE ANÁLISIS – SÍNTESIS EN LA ESCUELA	65
2.4	ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS	75
3	DESCRIPCIÓN Y APLICACIÓN DE LOS INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN	81
3.1	PRUEBA NÚMERO 1	81
3.1.1	Descripción del grupo de estudiantes.....	81
3.1.2	Descripción de la prueba número 1.....	82
3.1.3	Descripción de la actividad general de los estudiantes	84
3.1.4	Análisis parcial de los resultados para la prueba 1	86
3.2	PRUEBA NÚMERO 2	88
3.2.1	Descripción del grupo de estudiantes.....	88
3.2.2	Descripción de la prueba número 2.....	89
3.2.3	Descripción de la actividad general de los estudiantes	91
3.2.4	Análisis parcial de los resultados para la prueba número 2	97
3.3	ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA	98
3.3.1	Descripción del grupo de estudiantes.....	98
3.3.2	Descripción de la entrevista.....	99

3.3.3	Sistematización de las respuestas de los estudiantes	100
3.3.4	Análisis parcial de los resultados	107
4	CARACTERIZACIÓN DEL CURRÍCULO LOGRADO CON RESPECTO AL MÉTODO DE ANÁLISIS – SÍNTESIS EN LA RESOLUCIÓN DE PAEV	109
5	CONCLUSIONES	114
5.1	EN RELACIÓN CON LOS OBJETIVOS DEL ESTUDIO	114
5.2	IMPACTO DEL ESTUDIO	118
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	121

INTRODUCCIÓN

En el Colegio Italiano Leonardo da Vinci se trabaja la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal utilizando el método de análisis - síntesis. Este método, que tiene su génesis en la Grecia clásica, presenta una opción de trabajo en aula a partir de la cual se presume que los estudiantes tienen la posibilidad de desarrollar el pensamiento lógico desde un esquema de razonamiento que hace uso de deducciones partiendo de lo que se pretende encontrar.

Con los años, se ha visto que los estudiantes han presentado dificultades particulares en la actividad de resolver problemas que se remiten, en su mayoría, al dominio sobre el método. Pese a que en la presentación que se hace del método se sostiene que su adaptación escolar tiene incidencias positivas, tanto en el desarrollo de habilidades básicas para la resolución de problemas en Matemáticas como en el desarrollo del pensamiento lógico en general, la manera en que este método ha sido incluido en el currículo propuesto no ha sido cuestionada ni reevaluada con base en los resultados de los estudiantes.

Lo que se ha visto es que, aun sabiendo resolver problemas, los niños se ven conminados a utilizar el método con todas las implicaciones de trabajo que éste conlleva. Así, los estudiantes tienen un doble requerimiento, resolver correctamente el problema que se les propone y utilizar de manera adecuada el método.

El análisis y la síntesis son métodos que han permitido el desarrollo de las ciencias en tanto han posibilitado el estudio de fenómenos que desde un punto de vista concreto sería imposible abordar. Se presume que el desarrollo del análisis y la síntesis, como estilos de pensamiento, puede potenciar habilidades científicas en los estudiantes y, por consiguiente, mejore el desempeño de los estudiantes en Matemáticas. Pero, ante las situaciones actuales, vale la pena preguntarse, cuáles son los logros que realmente se han

alcanzado con los estudiantes a partir de la adaptación escolar de dicho métodos, para poder discutir si esta adaptación escolar ha sido o no ventajosa.

El desarrollo de este estudio se plantea en el marco del programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional y responde a las constantes socializaciones académicas que tienen lugar al interior de las reuniones de área del grupo de profesores de Matemáticas de la *Scuola Primaria* del Colegio Italiano Leonardo da Vinci. De este estudio se espera obtener información importante que permita orientar nuevas discusiones académicas, a partir de las cuales se puedan generar alternativas de trabajo en clase, para rescatar y fortalecer las bondades del método y hacer frente a las dificultades que presentan los estudiantes. El documento que resulte de su realización será insumo principal para reorientar prácticas académicas del grupo de profesores, en tanto será un referente conceptual sobre un fenómeno del aula real de Matemáticas.

1 ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presentan los elementos generales que determinaron el interés de estudio sobre el método de análisis – síntesis en la resolución de problemas aritméticos escolares de enunciado verbal (PAEV), y se ilustran los elementos conceptuales e investigativos que permitieron delimitar, perfilar y modelar el objeto de investigación con base en teorías existentes en Matemáticas y Educación Matemática. En este sentido, se describe el contexto institucional en el que se enmarca la formulación del estudio y se ilustran los antecedentes que, en este contexto, promovieron el interés por la temática de estudio y que se coligen del análisis documentos de trabajo (*v.g.*, programas institucionales, actas de reuniones) y de algunas situaciones de aula percibidas desde la observación no participante, identificadas como problemáticas docentes y primeras evidencias en torno a las cuales se suscitó la reflexión sobre objeto de estudio en el contexto real específico. Para finalizar, se presenta el problema de investigación y los objetivos específicos que caracterizan las consecuciones en el desarrollo de esta investigación.

En suma, se responde en este capítulo a las preguntas: ¿Qué características tiene el contexto educativo en donde se identifica la problemática de investigación?, ¿Por qué estudiar la resolución de problemas aritméticos?, ¿Cuál es la pertinencia del estudio? y ¿Qué hay documentado sobre la situación actual de la problemática de estudio?

1.1 ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN

Las reformas educativas a nivel internacional han coincidido en que la resolución de problemas en Matemáticas es una fuente productora de conocimiento matemático. A pesar de diferencias en formas y estructuras de los sistemas educativos, un gran número de propuestas del currículo escolar identifican la resolución de problemas como un eje central en la organización de los contenidos (Santos Trigo, 2008). Puig y Cerdán (1988) consideran que el proceso de resolución de problemas es un lugar de producción de

conocimiento matemático y que el núcleo del currículo no debería estar determinado por los conocimientos que hay que transmitir, contenidos, sino por los procesos de producción de conocimiento que se deben impulsar desde la enseñanza. Por consiguiente, si se pretende comprender cómo se genera el aprendizaje matemático o cómo se puede promover éste desde la enseñanza de las Matemáticas, es preciso estudiar entonces la actividad matemática y extramatemática de quienes resuelven los problemas.

Schoenfeld (1992, citado en Santos Trigo, 2008) plantea la necesidad de explicitar el significado en el uso de la expresión “resolución de problemas”, en los programas de investigación o propuestas del currículo, puesto que las concepciones sobre esta actividad varían fácilmente, inclusive, en producciones académicas de un mismo país. Esta diversidad de principios e interpretaciones sobre el proceso de resolución de problemas en Matemáticas se relaciona con la forma en que se conciben las Matemáticas, en particular, con la forma en que se conceptualiza en esta disciplina. Schoenfeld advierte que es necesario identificar y delimitar el dominio y los alcances de la resolución de problemas en las prácticas de enseñanza y en la construcción de conocimiento matemático nuevo por parte de los estudiantes, puesto que, en muchas situaciones, se atribuyen bondades a la resolución de problemas matemáticos que no dependen solamente del hecho de resolver problemas sino de las características específicas de la heurística utilizada en el proceso resolución. Así mismo, conviene identificar y caracterizar la ruta entre los resultados de los programas de investigación y su consideración o uso en el diseño curricular y la instrucción con el objetivo de dar sentido y carácter de validez a este conocimiento didáctico producto de investigación.

Bajo este enfoque, la resolución de problemas en el aula, como objeto de investigación, requiere de la consideración del contexto inmediato del estudiante, es decir, el salón de clases que pertenece a una institución en la cual se han determinado ciertas directrices educativas que orientan la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Es este contexto el que, mediado por las concepciones institucionalizadas y personales de los profesores de matemáticas sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, determina, en

particular, la manera en que los problemas matemáticos son asumidos en el proceso educativo.

Dado que un problema matemático puede tener diferentes connotaciones (Labarrere, 1987; Borasi, 1986; Charles y Lester, 1982; Butts, 1980; citados en Casajús, 2005; Puig y Cerdán, 1988, Peltier, 2003), resulta conveniente identificar cuál es el rol de la resolución de problemas, como actividad que se desarrolla en el aula de matemáticas de la institución en cuestión, frente al objetivo de generar espacios de construcción de conocimiento matemático.

A continuación se presentan los antecedentes institucionales correspondientes al contexto en el que se desarrolla el estudio, con el objetivo de caracterizar el currículo propuesto en relación con la utilización del método de análisis – síntesis en la resolución de PAEV e identificar los elementos que se consideran problemáticos desde el punto de vista investigativo.

1.1.1 ANTECEDENTES INSTITUCIONALES

1.1.1.1 CONTEXTO INSTITUCIONAL

Este estudio se desarrolla en el Colegio Italiano Leonardo da Vinci, institución educativa privada de calendario B y perteneciente a la *Istituzione Leonardo da Vinci*. Las realizaciones académicas en esta institución se orientan en términos de una filosofía desde la cual se pretende formar una persona íntegra, partiendo de la consideración de cada individuo como un ser creador, y por lo tanto libre y responsable. Se enfatiza en la importancia de las acciones educativas que propendan a desarrollar la creatividad de las personas en el proceso de formación y educación, puesto que se considera que ésta es la característica humana que permite ser capaces de producir pautas nuevas en vez de ser obligados a seguir unas dadas. Formar al hombre es entonces educarlo para la creatividad y para la libertad, lo cual, en esta institución, no significa prescindir de las normas, sino considerarlas en un proceso de perfeccionamiento a partir de diferentes construcciones

grupales para lograr una formación humana y crítica de la personalidad, y una serena y auténtica convivencia democrática.

Desde las directrices que determinan la filosofía institucional, los conocimientos en cada disciplina no son considerados como la realidad misma, sino como una interpretación de ella, por lo tanto, “no deben ser impuestos y ni siquiera ofrecidos como una verdad absoluta, sino conquistados en libertad y con creatividad” (*Istituzione Leonardo da Vinci*). Por consiguiente, los esquemas interpretativos de la realidad deben ser estudiados pero no obligatoriamente compartidos.

El proceso educativo en la institución se encuentra dividido en cuatro grandes grupos escolares que se identifican como etapas en el proceso de formación (Ver tabla 1).

<i>Scuola materna</i> (niños entre los 3 y 6 años de edad)	<i>Prekinder</i> <i>Kinder</i> <i>Basico</i>
<i>Scuola primaria</i> (niños entre los 6 y 11 años de edad)	<i>Classe prima</i> <i>Classe seconda</i> <i>Classe terza</i> <i>Classe quarta</i> <i>Classe quinta</i>
<i>Scuola media</i> (jóvenes entre los 11 y 15 años de edad)	<i>Classe prima</i> <i>Classe seconda</i> <i>Classe terza</i>
<i>Liceo</i> (jóvenes entre los 15 y 19 años de edad)	<i>Classe prima</i> <i>Classe seconda</i> <i>Classe terza</i>

Tabla 1. Grupos escolares del Colegio Italiano Leonardo da Vinci

Aunque la división por cursos parecería equivalente con el currículo escolar colombiano, no hay una correspondencia entre cada *classe* y cada curso en los que se ha dividido la programación escolar colombiana. Así mismo, la programación curricular, en términos de competencias y contenidos, obedece a una combinación de ambos programas académicos, el colombiano y el italiano. Esta decisión es consecuencia del objetivo social por el cual se fundó el colegio: “la convivencia armoniosa y solidaria entre alumnos colombianos e italianos, sobre la base de una absoluta igualdad de tratamiento y una auténtica integración cultural” (*Istituzione Leonardo da Vinci*). Así, la aplicación más evidente de estos principios consiste en la fusión de los programas académicos

colombiano e italiano en un sólo pensum, para que la totalidad de los alumnos pueda obtener dos diplomas a la vez.

En la *scuola primaria*, contexto específico del estudio, se considera que el propósito fundamental de las acciones educativas consiste en “favorecer la alfabetización cultural y la educación en la convivencia democrática con el fin de garantizar, en estrecha y permanente colaboración con la familia y con los otros ciclos escolares, la continuidad en la formación personal, social y cultural de los alumnos” (*Istituzione Leonardo da Vinci*). Con el propósito de favorecer tanto el aspecto educativo como el formativo, la *scuola primaria* propone (i) Desarrollar las competencias adecuadas de acuerdo a las diferentes edades de los niños y llevarlos a reflexionar sobre sus propias experiencias; (ii) Fomentar el interés por la lectura y la adquisición de conocimientos; (iii) Estimular la creatividad, la autonomía, la capacidad de iniciativa y favorecer la formación del criterio personal; (iv) Motivar a los niños para que participen con interés en las diferentes actividades propuestas; (v) Promover la aceptación de los diferentes puntos de vista, con el fin de evitar prejuicios y estereotipos; (vi) Favorecer el respeto hacia los demás y hacia el cuidado del medio ambiente; (vii) Hacer comprender la importancia del respeto por la convivencia democrática, asegurando el cumplimiento de las normas establecidas; y (viii) Promover y valorar el pluriculturalismo en el proceso de aprendizaje. (*Istituzione Leonardo da Vinci*)

El Cuerpo Docente, en armonía con los programas establecidos por los dos países, se propone fomentar desde la enseñanza la autonomía, el interés, el empeño y el buen comportamiento, como objetivos educativos básicos para el aprendizaje en las distintas disciplinas. Y se propone alcanzar objetivos didácticos específicos para cada una de las asignaturas, de los cuales se retoman los siguientes: En el área Lingüística: Escuchar, comprender y comunicar oralmente; leer y comprender diferentes tipos de texto; producir y reelaborar textos escritos; y reconocer la estructura de la lengua y enriquecer el léxico. Con respecto al área de Matemáticas: Adquirir habilidades de cálculo; reconocer,

representar y resolver problemas; trabajar con figuras geométricas, tamaños y medidas; y utilizar lenguajes lógicos y simples procesos de informática.

La *scuola primaria* está dividida en dos fases. La primera fase, denominada Primer Ciclo, comprende la *classe prima* y la *classe seconda*, en donde se inicia el proceso de lectoescritura y, a través del trabajo manipulativo, se dan los primeros pasos hacia la construcción de conocimiento referido a los objetos formales de cada asignatura. La segunda fase, Segundo Ciclo, está compuesto por las *classe terza, quarta y quinta*. En este ciclo se reúnen y formalizan los aprendizajes de primer ciclo para utilizarlos como instrumentos en la construcción de conocimientos específicos y transversales en cada asignatura. Además, en el segundo ciclo se presenta el Método de Estudio, impulsado desde el área de humanidades y ciencias naturales, que consiste en una serie de directrices y disposiciones con las que se pretende orientar el trabajo autónomo de los estudiantes frente a las actividades extraclase, con el objetivo de fomentar una disciplina de estudio que pueda ser fructífera en situaciones posteriores de aprendizaje.

Cada asignatura se describe en términos de unas intenciones generales de aprendizaje sistematizadas en la programación curricular correspondiente en torno a objetos específicos de conocimiento. A continuación, se presenta de manera resumida, los elementos de la programación curricular de matemáticas que hacen parte del currículo propuesto en esta institución con respecto al objeto de estudio de la investigación, esto es, el proceso de resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal.

1.1.1.2 PROGRAMA INSTITUCIONAL DE MATEMÁTICAS PARA LA *SCUOLA PRIMARIA*

El programa de Matemáticas de la *scuola primaria* del Colegio Italiano Leonardo da Vinci, está organizado con base en la consideración de varios estilos de pensamiento asociados a sistemas matemáticos, a saber, pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medida, y pensamiento analítico y sistemas de datos. La resolución de problemas se considera como un proceso matemático transversal al estudio en cada uno de los sistemas

matemáticos (Colegio Italiano Leonardo da Vinci, 2007i). Sin embargo, en el programa aparece independiente, como si se tratara de otro sistema matemático.

En la tabla siguiente, se ilustran los objetivos específicos del área de matemáticas para cada *classe* que tienen que ver con la resolución de problemas, determinados en el programa del año escolar 2007 – 2008 que fue producto de una reestructuración general que obedeció a la organización curricular con base en las competencias.

Prima	Seconda	Terza	Quarta	Quinta
Reconocer una situación real.	Identificar la pregunta de una situación problemática dada.	Identificar y nombrar los datos de un problema matemático.	Resolver problemas de dos o más operaciones partiendo de la pregunta.	Resolver problemas de dos o más operaciones partiendo de la pregunta.
Representar gráficamente una situación dada.	Identificar la información necesaria, datos, para responder a la preguntas de una situación problemática dada.	Identificar la pregunta de un problema como un dato incógnito.	Identificar y efectuar las operaciones necesarias para resolver el problema.	Identificar y efectuar las operaciones necesarias para resolver el problema.
Formular e identificar preguntas partiendo de una situación real dada.	Identificar y desarrollar la operación (adición o sustracción) necesaria para resolver la situación problemática dada.	Identificar y efectuar la operación necesaria para resolver el problema.	Identificar los datos implícitos o preguntas intermedias en la resolución de problemas.	Identificar los datos implícitos o preguntas intermedias en la resolución de problemas.
Responder a las preguntas de una situación dada.	Inventar situaciones problemáticas con características dadas.	Resolver problemas partiendo de los datos.	Resolver problema de costo unitario – costo total.	Resolver problemas de gasto-ahorro-ganancia.
		Resolver problemas partiendo de la pregunta.		

Tabla 2. Objetivos específicos de la programación curricular de Matemáticas en la *scuola primaria* con respecto a la resolución de problemas

En el programa oficial se pueden dilucidar algunos de los pasos determinados para el proceso de resolución de situaciones problemáticas.

En primer ciclo se da importancia al reconocimiento de situaciones del contexto real de los estudiantes que pueden considerarse problemáticas en la medida en que requieren de

una solución. Se formulan preguntas que concretizan el objeto problemático de la situación, se identifica como conjunto de datos a la información importante y necesaria para reflexionar resolutivamente sobre la situación, se reconoce la operación aritmética como acción resolutiva en situaciones numéricas aritméticas, y se proponen respuestas articulando los resultados de las operaciones con los datos identificados para lograr responder de manera completa y coherente a la pregunta planteada.

El problema aritmético, que inicialmente aparece como objeto de aprendizaje de las matemáticas escolares, rápidamente se transforma en un contexto de ejercicio sobre la comprensión de las operaciones adición y sustracción, una vez que estos conceptos han sido construidos en el ejercicio institucionalizador de la clase. Los estudiantes identifican en el lenguaje de las situaciones concretas planteadas aquellos términos que se asocian a las operaciones aritméticas, de las que conocen el algoritmo, y, en consecuencia, tienen la oportunidad de ampliar la concepción que han construido sobre la operación aritmética implícita en el problema. De igual manera, los diagramas utilizados en el estudio de las operaciones, máquinas de transformaciones, intervienen en el proceso de resolución de problema como alternativa de representación de la estructura del enunciado del problema.

En segundo ciclo se tiene por objetivo la presentación formal de la resolución de PAEV con base en representaciones discursivas y esquemáticas del razonamiento analítico - sintético con el que se resuelve el problema. El primer paso consiste en construir el enunciado sincopado del problema a través de la identificación y denominación de las magnitudes, y sus medidas correspondientes, involucradas en el problema. Se estudian los problemas con varias operaciones, para los cuales el tratamiento consiste en una reiteración del esquema sobre la resolución de problemas con una operación. Sin embargo, estos problemas de varias etapas implican la dificultad del trabajo con magnitudes desconocidas de otra naturaleza, los datos implícitos, sobre los cuales no aparece mayor referencia en el programa institucional. Tampoco se hace alusión a

actividades o indicadores de competencia relativos a la manera en que los estudiantes gradualmente aprenden a construir los esquemas analíticos y sintéticos.

En resumen, en el programa institucional de matemáticas se percibe que la resolución de problemas es abordada como contexto de aplicación de las operaciones ya estudiadas. No se identifica una organización sobre el estilo de trabajo relativo a las situaciones problemáticas que permita aseverar que se utiliza el *enfoque* de resolución de problemas como metodología de trabajo en el aula de Matemáticas; en otras palabras, el análisis de situaciones problemáticas no se identifica como el contexto en el que se detonan aprendizajes sobre las operaciones u otros objetos matemáticos sino como la manera de aplicar las operaciones aritméticas con el objetivo de darles utilidad en distintos contextos en las que pueden ser interpretadas. Se identifica una influencia, sobre todo en primer ciclo, del proceso de representación gráfica como actividad que permite traducir y, por tanto, tener otro referente de interpretación para la comprensión del enunciado de un PAEV. De manera especial, se percibe cierta tendencia por orientar el proceso de resolución de problemas *partiendo de la pregunta*, es decir, encaminando el trabajo en términos del análisis, puesto que en el proceso se parte de lo que se quiere encontrar.

Finalmente, si bien el programa institucional de Matemáticas para primaria es un documento oficial, necesario para caracterizar el contexto institucional en el que se formula el estudio, los elementos que se coligen de su análisis no son suficientes para comprender el sentido y las justificaciones de la escogencia de la metodología de trabajo en torno a la resolución de PAEV. Este programa ha sido constantemente objeto de estudio en el grupo de trabajo del área de matemáticas y, por ende, ha estado sujeto a sucesivas reelaboraciones. En la actualidad se pretende evaluar la secuencia didáctica relativa al tratamiento de la resolución de PAEV para todos los cursos de la *scuola primaria*. Hasta ahora ese trabajo ha permitido la identificación de los indicadores de competencia específicos para los cursos primero y segundo, permitiendo esto una descripción más detallada de los aprendizajes esperados en cada caso.

Pese a que el programa institucional de Matemáticas para la *scuola primaria* no revela mayor información sobre el método que se utiliza en la resolución de problemas, sobre todo en segundo ciclo, permite dilucidar algunas características básicas del mismo, particularmente el hecho de *partir de la pregunta*. Además, existen otras fuentes de donde se puede extraer información para complementar la visión inicial sobre el método que se propone para la enseñanza en la resolución de problemas aritméticos. A continuación, se presenta un recorrido por algunas de las principales situaciones que promovieron la utilización de un método especial unificado para la resolución de PAEV en la institución.

1.1.1.3 HISTORIA DEL OBJETO DE ESTUDIO EN LA INSTITUCIÓN

En el programa propuesto se sitúa la resolución de problemas como una actividad de aplicación de conocimientos, más que un proceso generador de ellos. El grupo de trabajo del área es consciente de esta escogencia y la justifican en el hecho que permite la construcción de otros conocimientos que también son necesarios para el desarrollo de las competencias matemáticas.

En esta institución, existen disposiciones metodológicas específicas que determinan un estilo de trabajo propio en relación con la resolución de problemas aritméticos (*v. g.*, fases convenidas en el grupo de trabajo para la resolución de problemas, representaciones esquemáticas seleccionadas para la modelación de las situaciones, material estructurado y no estructurado para manipular la información) que desde el punto de vista del colectivo inciden de manera positiva en la construcción de conocimiento matemático, o bien, en relación con la aplicación del conocimiento construido sobre las operaciones, en un nivel algorítmico y de significado en un contexto, o bien, en relación con aprendizajes de tipo metacognitivo con los que los estudiantes se hacen conscientes del propio proceso y estructuran un pensamiento estratégico que pueda ser utilizado también en otros contextos disciplinares, en el sentido en que lo plantea Bell (1976, citado en Puig y Cerdán, 1988).

El estilo de trabajo sobre la resolución de problemas aritméticos se formalizó en el Colegio Italiano Leonardo da Vinci cuando, en los años noventa, el grupo académico de la institución identificó en los niños dificultades en la resolución de problemas. El profesor Federici (Granés y Caicedo, 2002) desarrolló un estudio sobre el trabajo de los estudiantes frente a la resolución de problemas, en el que se consideran, además, los elementos matemáticos involucrados en dichos problemas (v.g. magnitudes, tipos y cantidad de operaciones involucradas) como referentes que determinaron las unidades de análisis del estudio. Desde su punto de vista, las dificultades que presentan los estudiantes no se han identificado de manera eficaz, no sólo en el contexto del colegio italiano sino en general, y, por tanto, no se han diseñado estrategias de intervención que mejoren el proceso de comprensión matemática sobre la resolución de problemas a través de la instrucción.

Dado el enunciado de un PAEV, Federici propone focalizar la atención en las magnitudes que intervienen en el problema, entre las cuales se definen las relaciones operacionales necesarias para la resolución. Estas magnitudes deben ser plenamente identificadas y denominadas, con el objetivo de construir el enunciado sincopado del problema. Posteriormente, sugiere representar el razonamiento *analítico*, que consiste en delimitar una ruta deductiva desde la incógnita del problema a los datos, identificando progresivamente las relaciones binarias entre las magnitudes involucradas. Esta representación puede hacerse de dos maneras: en un esquema gráfico o un esquema discursivo, en los que se ponen en relación operacional los datos, dados y emergentes, escritos de manera sincopada (magnitudes). Una vez que el razonamiento *analítico* es representado, la ruta contraria que permite ir de los datos a la incógnita, *síntesis*, es utilizada para concluir el proceso. Así, en esta fase se parte de la sustitución numérica de la información conocida y de la ejecución de los algoritmos de las operaciones aritméticas involucradas, para encontrar la medida de la magnitud correspondiente a la incógnita. Es decir, el problema queda resuelto una vez que se complementa el razonamiento *analítico* con el *sintético* y se validan los resultados obtenidos (Ver gráfico 1).



Gráfico 1. Proceso de resolución de un PAEV con la adaptación escolar del método de análisis - síntesis

Esta propuesta, que determina una secuencia didáctica para la enseñanza de la resolución de problemas, pretende, según su autor, facilitar los mecanismos de análisis, comprensión y representación de los problemas matemáticos vía a la resolución asertiva de los mismos, justificándose además en las revisiones que desarrolla sobre la funcionalidad del cerebro, operaciones mentales, que en general son de carácter binario. A partir de ello agrega una condición más al método: Dado que las operaciones mentales son de carácter binario, las operaciones que los niños deben representar entre los datos en el razonamiento analítico, discursivo o esquemático, deben ser binarias, por tanto no toma en cuenta algoritmos en los que se operan más de dos datos (*v.g.*, cuando se halla la suma de más de dos sumandos).

Es notorio que esta propuesta no considera las diferencias de tipo semántico entre la estructuras de los diferentes problemas aritméticos planteados a los niños, y, en su lugar, propone un mismo tratamiento para todos, previendo complejidad en el momento de resolver problemas que involucran más de una operación. En consecuencia, el método de análisis – síntesis no permite a los niños hacer explícitas las diferencias semánticas de los problemas dispuestos para la resolución.

El grupo de profesores de Matemáticas de primaria del Colegio Italiano Leonardo da Vinci ha acogido esta propuesta y desde algunos años la implementa con los estudiantes. En la

actualidad, se reporta que los estudiantes muestran dificultades, particularmente, en relación con la escritura de los datos (identificación y nominación de las magnitudes) y con la representación del razonamiento analítico (discursivo o gráfico) como requerimiento para la resolución de problemas aritméticos de dos o más etapas. A continuación, se presenta de manera más detallada las situaciones de aula que llamaron la atención del grupo de trabajo y que sirvieron como motivaciones particulares en el desarrollo de este estudio.

1.1.1.4 PROBLEMÁTICAS DOCENTES IDENTIFICADAS

- Evidencias en actas de reuniones.

Con frecuencia, la resolución de PAEV resulta objeto de discusiones académicas en el grupo de profesores de primaria del Colegio Italiano Leonardo da Vinci. Con la sistematización del programa el año escolar 2007 – 2008 surgieron una serie de cuestionamientos sobre el deber ser de la actividad de resolución de problemas en la clase de Matemáticas, en particular, sobre las características que debe tener el tratamiento del proceso de resolución de PAEV en cada curso de la *scuola primaria*. En primer ciclo se recalcó la importancia de comenzar con el análisis de situaciones cotidianas que requirieran una solución y llegar hasta el análisis de la información relevante del enunciado para resolver el problema, mientras que en segundo ciclo se partió de una reflexión de base sobre la pertinencia o no de enfocar la resolución de problemas “partiendo de la pregunta” o “partiendo de los datos”. Al finalizar el año escolar, se contaba con una descripción un poco más detallada del proceso, teniendo como conclusión el acuerdo de trabajar el proceso de resolución de problemas partiendo de la pregunta, esto es, en el sentido del análisis - síntesis.

En el año escolar 2008 – 2009 se hizo un recorrido por el programa efectivamente desarrollado en cada curso. Cada grupo de profesores expuso las actividades que desarrollaba con los estudiantes en el tratamiento de la resolución de problemas. Se pudo constatar la importancia que se le da al método, como secuencia de pasos organizados

para resolver un problema, partiendo de la pregunta y estructurando representaciones esquemáticas o discursivas con los datos escritos de manera sincopada, en el caso del segundo ciclo. Sobre este respecto, se puso en evidencia los principales elementos que resultan inquietantes en el trabajo con los estudiantes, éstos se resumen en la tabla 3.

La mayor parte de las dificultades identificadas tienen que ver con los pasos específicos que se han determinado como necesarios para la resolución de PAEV, a saber, la escritura en forma sincopada de las magnitudes involucradas en el problema (datos), la representación en forma discursiva o esquemática del razonamiento analítico, y la identificación de los datos emergentes o incógnitas auxiliares, que en algunos casos se asocian a preguntas intermedias.

Primer ciclo	<i>Classe Prima</i>	Formulación de la pregunta. Reconocimiento de la máquina de adición y sustracción como representación de la operación que se debe efectuar.
	<i>Classe Seconda</i>	Identificación de la información importante o necesaria para poder resolver el problema. Escritura en forma sincopada de las magnitudes involucradas (datos).
Segundo ciclo	<i>Classe Terza</i>	Escritura en forma sincopada de las magnitudes involucradas (datos). Reconocimiento de la operación necesaria para resolver un problema. Escritura del razonamiento en forma discursiva o esquemática con una operación. Reconocimiento de la máquina de la multiplicación como representación de la operación que se debe efectuar.
	<i>Classe Quarta</i>	Escritura del razonamiento en forma discursiva o esquemática con dos o más operaciones. Identificación de los datos intermedios o preguntas auxiliares.
	<i>Classe Quinta</i>	Escritura del razonamiento en forma discursiva o esquemática con dos o más operaciones. Identificación de los datos intermedios o preguntas auxiliares.

Tabla 3. Dificultades de los estudiantes en el proceso de resolución de PAEV manifestadas en las reuniones de área

A partir de estas reflexiones colectivas, se generó el interés por identificar las estrategias que, desde el punto de vista del grupo de trabajo, contribuirían de manera positiva en la comprensión de los estudiantes sobre la resolución de problemas. Sin embargo, el punto que generó mayor interés tuvo que ver con el estudio sobre la operación necesaria para resolver un problema: Visto que los estudiantes presentaban dificultades en la identificación de la operación necesaria para resolver un problema y que esta dificultad se

remitía posteriormente a los cursos sucesivos, se decidió analizar la manera en que el tratamiento de estas operaciones tuviera mayor incidencia positiva en la resolución de los PAEV. Es así que en el año escolar 2009 – 2010 se inició un estudio sobre la manera en que, desde la planificación curricular, se pueden proponer actividades específicas orientadas a mejorar la comprensión sobre dichas operaciones, de manera que pudieran reconocer sus diferentes interpretaciones y, en consecuencia, los estudiantes pudieran tener otras herramientas que les permitieran reconocer la operación implicada en la resolución de un PAEV.

Si bien varias de las dificultades que presentan los estudiantes hacen alusión al método de análisis – síntesis, en su momento, el interés se centró sobre las operaciones aritméticas y no sobre las actividades que se podrían sugerir como complemento de la programación curricular referida a la resolución de PAEV, con el objetivo de facilitar el análisis como estilo de razonamiento inicial en el proceso de resolución. No fue objeto de discusión el carácter analítico y sintético del razonamiento requerido a los estudiantes ni la manera en que éste debía representarse, ni las dificultades intermedias en el momento de dicha escritura.

En consecuencia, es necesario desarrollar un estudio que permita caracterizar la actividad analítico - sintética de los estudiantes cuando resuelven un PAEV, con miras a identificar las distintas actuaciones que manifiestan y la manera en que se les puede ayudar frente a las dificultades que presentan. De esta forma, se podrían sugerir disposiciones específicas que permitan reestructurar la programación curricular existente.

Con el ánimo de caracterizar un poco más de cerca la situación actual de los estudiantes, se desarrollaron algunas observaciones no participantes a algunos grupos en los que los profesores de matemáticas encargados identificaron ciertas situaciones de interés en el contexto de la discusión sobre los PAEV. Tales situaciones se retoman a continuación.

- Observaciones de clase

A través de algunas observaciones participantes desarrolladas en varios cursos en el periodo 2009 - 2010, se pudo constatar las dificultades identificadas en el tratamiento de la resolución de PAEV en el aula. También se pudo identificar algunas particularidades en las formas de trabajo de los grupos de estudiantes, como privilegiar la representación en esquema discursivo del razonamiento sobre la representación gráfica, utilizar abreviaciones especiales para algunas magnitudes en particular, recurrir a representaciones alternativas de las relaciones operacionales antes de construir los esquemas, etc., que, en conjunto funcionan como estrategias para aligerar el proceso.

Hubo situaciones particulares de algunos grupos que llamaron la atención. A continuación se retoman y comentan dichas circunstancias.

El problema diferente. En dos grupos de *classe quarta* y uno de *classe quinta* se propuso a los estudiantes un problema en el que se debía analizar diferentes posibilidades y encontrar aquella o aquellas que correspondían a lo que se solicitaba desde la pregunta.

El problema propuesto no pertenece a la tipología de problemas que pueden ser resueltos con ayuda del método de análisis - síntesis en tanto presenta diferentes posibilidades de respuesta basadas en la verificación de condiciones específicas; es decir, el problema propuesto presentaba una estructura que no se corresponde con la estructura de los PAEV objeto de estudio en esta investigación. Sin embargo, entre un 80 y un 90% de los estudiantes utilizaron la secuencia de pasos relativa al método de análisis - síntesis y, de éstos, un alto porcentaje llegó a la conclusión que el problema no podía ser resuelto de esa manera, pero tampoco propusieron otra manera de hacerlo.

Este hecho llamó la atención por dos razones. De un lado, se vio que frente a un problema cuya estructura difería de los problemas usuales que resolvían en clase, los estudiantes aplicaron infructuosamente el método estudiado. Parecería que la concepción que han construido sobre este respecto tiene que ver con que, o bien, el método que han aprendido para resolver problemas es universal, o bien, todos los problemas en

matemáticas se resuelven de la misma manera. De otro lado, se pudo percibir que, en general, los estudiantes no conocen estrategias alternativas o modos de acercarse a contextos de problemas diferentes, que les permita razonar de manera resolutiva independientemente de la estructura del problema.

A partir de esta situación, y otras similares, se generó una discusión en el grupo académico de profesores de Matemáticas de la institución puesto que parecería que los objetivos de aprendizaje sobre la resolución de problemas en Matemáticas estuvieran limitados a un tipo especial de problemas, y que las estrategias para abordar problemas diferentes dependieran de las experiencias personales de los estudiantes, en tanto no se prevé esto desde los elementos del currículo propuesto.

La estrategia alternativa. Se propuso a varios grupos de *classe quarta* resolver un problema cuya estructura permite su resolución con el método, pero cuyo contenido semántico en términos de la cantidad de operaciones, etapas y magnitudes involucradas, correspondía a lo propuesto para *classe quinta*.

También en este caso, intentaron aplicar el método infructuosamente puesto que había magnitudes que no sabían cómo nombrar y el número de operaciones por efectuar (y por tanto el número de incógnitas intermedias por identificar) era mayor del acostumbrado. En sus intervenciones dejaron claro que los pasos propuestos en el método son la única manera permitida o válida para resolver problemas y que la escritura del razonamiento, discursivo o esquemático, les facilitan la comprensión aún cuando con este método no lograban ninguna aproximación en la resolución de este problema.

Como estrategia alternativa se propuso a los estudiantes un ejemplo de otro problema similar, cuya resolución se apoyó en una representación pictórica de los elementos y situaciones al interior del problema. A partir de los dibujos se colegían las operaciones que se debían efectuar para así llegar a la respuesta. De esta forma lograron construir el análisis habiendo visto la resolución. Sin embargo, al proponerles otro problema de la misma estructura los estudiantes, aun sin comprender el texto, regresaron

inmediatamente al método y en un muy bajo porcentaje recurrieron a la estrategia del dibujo.

Como se ha dicho, pareciera que el método encuentra limitaciones en el análisis de situaciones que no corresponden al estereotipo de problemas cuya resolución puede modelarse a partir de los pasos especificados en el proceso. Pero además, este método ha adquirido una fuerza tal en la concepción de los estudiantes, que ellos no encuentran confiable o válida otra estrategia de resolución.

¿Cuál es la tarea? Fue particularmente interesante que, en general, los estudiantes que se caracterizan por un alto rendimiento académico en matemáticas, se cuestionaran, frente a la resolución de problemas convencionales, sobre el objeto y el objetivo de la actividad de clase. Así, se reportan preguntas del tipo: ¿tengo que resolver el problema y hacer el esquema del razonamiento? ¿Tengo que hacer los pasos o resolver el problema como yo sé?

Este tipo de intervenciones, bastante presentes, permite aseverar que los estudiantes identifican dos tareas en el contexto de los PAEV: (i) resolver el problema y (ii) seguir los pasos estipulados; la segunda, condición fundamental para garantizar la validez de la primera.

- Encuesta

Con base en las situaciones antes descritas, se aplicó una encuesta a 40 estudiantes de *clase quinta*, cuyos estilos de trabajo, aunque coherentes con la propuesta del profesor Federici en términos del tipo de análisis sobre las magnitudes, difieren en la prelación u orden que daban en los pasos asociados al proceso de resolución con el método de análisis - síntesis, en especial, en el caso de la representación del razonamiento analítico. También hay diferencia en el tratamiento que se hace de la pregunta del problema, puesto que varios grupos la incluyeron dentro del conjunto de datos expresándola como una información desconocida que se debe hallar, mientras que otros grupos la trataron como un elemento de naturaleza diferente a la de los datos.

El cuestionario de la encuesta estuvo compuesto de cinco preguntas con el objetivo de recoger información inicial sobre las concepciones de los estudiantes frente a la actividad de resolver PAEV. Las preguntas, que se retoman a continuación, fueron proporcionadas de manera oral y las respuestas debían ser diligenciadas en una hoja.

1. *Cuando el profesor de matemáticas sugiere o solicita resolver un problema, ¿cómo te sientes?*
2. *¿Cuál es el paso de la resolución de problemas que requiere mayor atención? ¿Por qué?*
3. *¿Qué necesitas para poder representar el razonamiento, discursivo o gráfico, cuando resuelves un problema?*
4. *¿Para qué sirve el razonamiento, discursivo o gráfico, en la resolución de un problema?*
5. *Si encuentras dificultad en la representación del razonamiento, ¿qué estrategias utilizas para superarla?*

Pregunta 1. Las respuestas a esta pregunta pueden clasificarse en dos grupos de igual cantidad de estudiantes. De una parte se encuentran aquellas de los estudiantes que se muestran motivados frente a la actividad de resolver problemas. Justifican este hecho en la facilidad o gusto que encuentran en el desarrollo de dicha actividad, a la que algunos, además, atribuyen características benéficas en el proceso de aprendizaje. De otro lado se identifican las respuestas de los estudiantes que manifiestan ansiedad frente a la actividad de resolver PAEV. En general, estos estudiantes explican tal respuesta emotiva basándose en la inseguridad que les genera el proceso de resolución, puesto que, o bien, manifiestan no saber cómo enfrentar un problema de manera inmediata, o bien, se muestran inseguros al momento de validar de manera efectiva la respuesta a la que se llegue.

Pregunta 2. La mayor parte de los estudiantes coincide en que el paso que requiere mayor atención es la escritura del razonamiento analítico. Las respuestas se encuentran divididas en relación con el tipo de representación utilizada, debido a la particularidad de los grupos de estudiantes. Las justificaciones que presentan para la escogencia de dichos pasos como los que requieren mayor atención, coinciden en tres elementos particulares, a saber, (i) precisión en la escritura de los datos al interior del esquema o en el razonamiento, (ii) recurrencia acertada al paso anterior, escritura de los datos, para configurarlos de manera

adecuada en el esquema y (iii) necesidad de traducir un proceso ya desarrollado en la mente, a un lenguaje de álgebra sincopada en el que se ponen en relación las magnitudes ya identificadas con otras que no se conocen o cuyas medidas no han sido determinadas. Así mismo, se encuentran casos particulares de estudiantes para quienes el paso que requiere mayor atención es la escritura de los datos, en términos de una escogencia adecuada de palabras para nominar las magnitudes, también mencionan la operación, en términos de lo algorítmico, y la escritura de la respuesta, en términos de la coherencia que tenga ésta con la pregunta del problema una vez desarrollado el proceso de su resolución.

Pregunta 3. Un grupo de niños responde que los datos son lo único necesario para escribir el razonamiento analítico, en forma gráfica o discursiva. La omisión de la pregunta como requerimiento para la construcción del razonamiento, en forma gráfica o discursiva, coincide con que los niños que respondieron de esta manera pertenecen a los grupos en los que se consideró la pregunta como un dato incógnito. No obstante, estas respuestas no expresan mayor atención a la relación operacional entre dichos datos que se colige de la lectura del problema; es decir, pareciera que conocer el listado de datos (entre los que se supone se encuentra la pregunta) fuera suficiente para enfrentar la tarea de construir el esquema o escribir el razonamiento.

Otro grupo de niños hace explícita la consideración de la pregunta, además de los datos, y evidencia el hecho de tener que remitirse a una relectura del enunciado del problema. Entre estas respuestas se identifican dos que generan interés particular para el estudio: (i) “necesito haber entendido toda la situación problemática para luego construir el esquema de manera adecuada”, y (ii) “hay que traducir los números en palabras para poder escribir el razonamiento, en el que se deben poner en relación (los datos) con base en la operación que sirve para resolver el problema”.

Pregunta 4. A esta pregunta varios niños respondieron tener desconocimiento de la intención de construir el esquema o escribir el razonamiento. Otros respondieron aludiendo al paso sucesivo dentro del proceso de resolución de una situación

problemática, esto es, reconocen la utilidad de la construcción del esquema, o de la escritura del razonamiento, en términos de que posibilita y facilita efectuar la operación aritmética requerida en dicho proceso, es decir, la fase sintética. Finalmente, en un tercer tipo de respuesta encontrado, los niños manifiestan que la construcción del esquema, o la escritura del razonamiento discursivo en la fase del análisis, les facilitan el proceso y les permite llegar de manera segura y acertada a la respuesta de la situación problemática.

Pregunta 5. En general las únicas estrategias a las que los niños recurren cuando se encuentran de frente a una dificultad en la comprensión de un problema son la relectura y acudir a un adulto. Sólo dos estudiantes exponen una estrategia que consiste en inventar otro problema, cambiando las magnitudes pero manteniendo las medidas de las mismas y la relación entre ellas, por tanto, parecería que para utilizar esta estrategia habría que comprender de antemano la situación problemática.

Las respuestas a la encuesta pueden asociarse como se muestra en la tabla 4, en la que además, aparecen los porcentajes de estudiantes que respondieron en cada caso.

A través de las diferentes situaciones de aula se pueden identificar algunos elementos en la actividad de los estudiantes, que resultan interesantes desde el punto de vista investigativo en la medida en que se consolidan como problemáticas docentes, en el contexto de la resolución de PAEV con base en la utilización del método de análisis - síntesis. Entre los más notorios, cabe resaltar (i) la identificación, denominación en lenguaje sincopado, y puesta en relación de las magnitudes involucradas en el problema (ii) el tipo de razonamiento que se debe representar, analítico o sintético, y (iii) la naturaleza del método de análisis - síntesis, como heurística, estrategia o objeto de aprendizaje adicional, en el contexto de la resolución de PAEV.

Pregunta	Clasificación de las respuestas
1	A. Demuestra ansiedad frente a la actividad de resolver problemas. (50%) B. Muestra una actitud positiva frente a la actividad de resolver problemas. (50%)
2	A. Encuentra que la escritura del razonamiento, en forma discursiva o gráfica, es el paso que requiere mayor atención. (65%) B. Encuentra que los pasos que requieren mayor atención son la escritura de los datos, la operación aritmética o la escritura de la respuesta. (35%)
3	A. Identifica los datos, la pregunta y el contexto del problema como necesarios para escribir el razonamiento, en forma discursiva o gráfica. (45%) B. Identifica solamente los datos como elementos necesarios para escribir el razonamiento en forma discursiva o gráfica. (55%)
4	A. Considera que la escritura del razonamiento, en forma discursiva o gráfica, facilitan la resolución del problema concretando respuestas seguras y confiables. (35%) B. Considera que la escritura del razonamiento, en forma discursiva o gráfica, hacen parte de una secuencia de pasos que tienen por objeto llegar al siguiente, esto es, la operación aritmética. (35%) C. Manifiesta desconocer el objetivo de la escritura del razonamiento, en forma discursiva o gráfica. (30%)
5	A. Recurre a un adulto o a la relectura del problema para superar una dificultad en la resolución de una situación problemática. (95%) B. Inventa un problema alternativo para comprender mejor uno planteado. (5%)

Tabla 4. Clasificación de las respuestas de los estudiantes a la encuesta aplicada

A nivel internacional, se han desarrollado investigaciones que apuntan sus intereses hacia diferentes elementos en torno a la resolución de problemas en Matemáticas. Los centros de interés difieren en relación con las concepciones que se tengan sobre la resolución de problemas en Matemáticas, pero de ellas se pueden retomar algunas consideraciones de tipo teórico o práctico que complementan un marco de interpretación propicio para modelar el objeto de este estudio. A continuación se retoman los elementos principales de las mismas, proponiendo, inicialmente, un referente conceptual sobre la resolución de problemas como una actividad matemática en general.

1.1.2 PANORAMA GENERAL DEL OBJETO DE ESTUDIO EN CONTEXTOS DE INVESTIGACIÓN A NIVEL INTERNACIONAL

1.1.2.1 CONCEPCIÓN SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS

Luis Puig (1996) caracteriza el proceso de resolución de problemas como “la actividad mental y manifiesta que desarrolla el resolutor desde el momento en que, presentándosele un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea” (Puig, 1996, p. 31).

Schoenfeld (1985, p. xii) establece que en relación con la resolución de problemas “aprender a pensar matemáticamente involucra más que tener una gran cantidad de conocimiento de la materia al dedillo. Incluye ser flexible y dominar los recursos dentro de la disciplina, usar el conocimiento propio eficientemente, y comprender y aceptar las reglas tácitas de juego”.

Schoenfeld (1992, citado en Santos Trigo, 2008) presenta una caracterización de las dimensiones o categorías a partir de las cuáles es posible describir y explicar el accionar de los estudiantes en la resolución de problemas: (a) el conocimiento o recursos básicos que incluye definiciones, hechos, formulas, algoritmos y conceptos fundamentales asociados con un dominio matemático particular o tema; (b) estrategias cognitivas o heurísticas que involucran formas de representar y explorar los problemas con la intención de comprender los enunciados y plantear caminos de solución. Algunos ejemplos de estas estrategias son dibujar un diagrama, buscar un problema análogo, establecer submetas, descomponer el problema en casos simples, etc. (c) las estrategias metacognitivas que involucran conocimiento acerca del funcionamiento cognitivo propio del individuo (¿Qué necesito? ¿Cómo utilizo ese conocimiento?) y estrategias de monitoreo y control del propio proceso cognitivo (¿Qué estoy haciendo? ¿Por qué lo hago? ¿A dónde voy?) y (d) las creencias y componentes afectivos que caracterizan la conceptualización del individuo acerca de las matemáticas y la resolución de problemas, y la actitud y disposición a involucrarse en actividades matemáticas. Este marco de explicación del fracaso o éxito en

la resolución de problemas ha sido referencia relevante en el desarrollo de otros marcos conceptuales o perspectivas (Santos Trigo, 2008)

Vale la pena aclarar el uso de varios términos particulares que aparecen con cierta frecuencia en el cuerpo de este documento. Para la conceptualización de problema aritmético de enunciado verbal (PAEV) se retoma el referente de Puig y Cerdán (1988), en donde se enuncian las siguientes consideraciones al respecto:

“En la escuela los problemas aritméticos se proponen, se enuncian o se presentan enunciados, y se resuelven. [...] [S]i queremos saber qué entenderemos por un problema aritmético, habrá que describir las características de su enunciado y de su resolución. En el enunciado, la información que se proporciona tiene carácter cuantitativo ya que los datos suelen ser cantidades; la condición expresa relaciones de tipo cuantitativo y la pregunta se refiere a la determinación de una o varias cantidades, o relaciones entre cantidades. La resolución del problema, o lo que es preciso hacer para contestar la pregunta del problema, fundamentalmente parece consistir en la realización de una o varias operaciones aritméticas. Además, si estos problemas se consideran inmersos en el currículo escolar, por el momento en que aparecen en éste no cabe el recurso al álgebra para su resolución. [...] Para nosotros [...] un problema será un problema aritmético siempre que los conceptos, conocimientos o recursos no estrictamente aritméticos de los contextos que aparecen en el enunciado no sean decisivos a la hora de resolver el problema. Por otro lado, un problema [...] que se resuelve haciendo uso de conceptos y relaciones aritméticas, [pero en el que] la respuesta no se obtiene como consecuencia inmediata de la realización de operaciones aritméticas; siendo además crucial para su resolución el uso [otras] de técnicas tales como el examen de posibilidades, el análisis de los supuestos implícitos o la utilización de representaciones adecuadas, [no será considerado problema aritmético]. (pp. 5,6)

Heurística será entendida en términos de la aproximación conceptual que hace Horst Müller (1987)

“Como disciplina científica, la heurística es aplicable a cualquier ciencia e incluye la elaboración de medios auxiliares, principios, reglas, estrategias y programas que faciliten la búsqueda de vías de solución a problemas; o sea, para resolver tareas de cualquier tipo para las que no se cuente con un procedimiento algorítmico de solución. Los procedimientos heurísticos son formas de trabajo y de pensamiento que apoyan la realización consciente de actividades mentales exigentes, [éstos] pueden dividirse en principios, reglas y estrategias.

Los principios heurísticos constituyen sugerencias para encontrar —directamente— la idea de solución; posibilita determinar, por tanto, a la vez, los medios y la vía de solución. Dentro de estos principios se destacan la analogía y la reducción. Las reglas heurísticas actúan como impulsos generales dentro del proceso de búsqueda y ayudan a encontrar, especialmente, los medios para resolver los problemas. Las reglas heurísticas que más se emplean son: (i) separar lo dado de lo buscado, (ii) confeccionar figuras de análisis: esquemas, tablas, mapas, etc., (iii) representar magnitudes dadas y buscadas con variables, (iv) determinar si se tienen fórmulas adecuadas, (v) utilizar números —estructuras más simples— en lugar de datos, y (vi) reformular el problema. Las estrategias heurísticas se comportan como recursos organizativos del proceso de resolución, que contribuyen especialmente a determinar la vía de solución del problema abordado. Existen dos estrategias: El trabajo hacia adelante: se parte de lo dado para realizar las reflexiones que han de conducir a la solución del problema, [síntesis], y el trabajo hacia atrás: se examina primeramente lo que se busca y, apoyándose de los conocimientos que se tienen, se analizan posibles resultados intermedios de lo que se puede deducir lo buscado, hasta llegar a los datos, [análisis]”.
(<http://ia.comeze.com/subtemas/un1/1.7.html>)

El currículo propuesto y el currículo logrado hacen referencia, respectivamente, al *intended curriculum* y al *attained curriculum* que se definen en la estructura conceptual de las pruebas TIMSS como sigue:

“El *intended curriculum* [currículo propuesto] consiste en el contenido matemático [...] definido para cada nivel [escolar] y se ambienta al interior de un contexto educativo que incluye los programas institucionales. [...] El [currículo propuesto] está incorporado en libros de texto, en guías curriculares, [...] en políticas, regulaciones y otros documentos rectores del sistema educativo. El [currículo propuesto], el contenido matemático que se propone para el estudio y aprendizaje de los estudiantes, puede ser descrito a través de conceptos, procesos y actitudes matemáticas.

[...]

El “*attained curriculum*” [currículo logrado] consiste en el resultado de la escolarización: el contenido matemático que los estudiantes han aprendido durante sus estudios. Lo que los estudiantes aprendan estará influenciado por lo que se habrá propuesto desde la enseñanza y por las oportunidades que tuvieron a disposición. También el [currículo logrado] se puede describir a través de conceptos, procesos y actitudes matemáticas, y se ambienta en el contexto educativo individual del estudiante en términos de los planes que elabora o ha elaborado para su propio aprendizaje”. (TIMSS, 1991, pp. 5,6)

1.1.2.2 ENFOQUES DE INVESTIGACIÓN

Castro, Rico y Gil (1992) desarrollan un estudio en el que identifican cuatro enfoques de investigación en los estudios sobre la resolución de problemas aditivos desarrollados antes de los años noventa, que, si bien limita el interés a los problemas aditivos, da una serie de indicaciones sobre los puntos sobre los cuales se puede centrar el interés o a partir de los cuales se pueden orientar reflexiones y análisis inclusive en el caso de los PAEV; estos son, el enfoque lingüístico, el enfoque de variables estructurales, el enfoque de sentencias abiertas y el enfoque semántico, que, no obstante, pueden ser extrapolados al análisis de problemas aritméticos en general.

El enfoque lingüístico centra su atención en el lenguaje, sosteniendo la premisa de que la comprensión de lectura garantiza en cierta medida el éxito en la resolución de problemas. Pertenecen a este enfoque dos tipos de estudios señalados por los autores. El primer tipo tiene que ver con investigaciones ligadas a los procesos de enseñanza, en los que los profesores utilizan estrategias como la formulación de preguntas intermedias, orientadas a la interpretación de la situación problema, la construcción de textos alternativos con base en el enunciado de un problema, o la lectura dramatizada de los problemas; en general, estrategias en las que predomina el lenguaje como portador de una información sobre un contexto situado en el ambiente de la clase de matemáticas. El segundo tipo de estudios tiene que ver con aquellos en los que se reconoce la existencia de diferentes lenguajes, matemáticos y no matemáticos, que pueden interactuar en una situación problemática de enunciado verbal. Aquí el interés de investigación recae sobre la comprensión de la situación problemática global, vista a través de la traducción entre los diferentes lenguajes involucrados, o bien, sobre la comprensión de una situación problemática, cuyo enunciado verbal está dado en términos de un lenguaje, versus la comprensión de otra dada en términos de otro lenguaje. Ejemplos de este tipo de estudio se pueden encontrar en Bell, Fischbein y Greer (1984) y Caldwell y Goldin (1979).

El enfoque de variables estructurales sitúa la problemática de investigación en las características de los enunciados que pueden variar con base en las situaciones que se propongan a través de los enunciados. La premisa fundamental consiste en que estas variables inciden decisivamente en las dificultades de los estudiantes. De esta forma, se reconoce la existencia de variables de tipo sintáctico, relacionada con la estructura superficial del enunciado, y las variables de contenido y contexto que tienen que ver con los significados matemáticos y no matemáticos relacionados con el problema. Kilpatrick (1978, citado en Puig y Cerdan, 1988) denomina estas variables como variables de la tarea dentro del conjunto de variables independientes.

Se identifican dos tipos de investigaciones en este enfoque. De una parte se encuentran los estudios que priorizan un análisis global de las variables, bajo la concepción de que las dificultades en la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal pueden entenderse como la suma de las dificultades con cada una de las variables estructurales. El otro tipo de investigaciones considera un análisis parcial de variables que significa establecer relaciones entre variables específicas y rendimientos específicos.

El enfoque de sentencias abiertas clasifica los problemas aditivos a partir de la consideración de las sentencias abiertas involucradas. Con base en esa primera clasificación analiza los métodos que utilizan los estudiantes para resolverlas y las dificultades que se encuentran en el proceso de resolución. Para este análisis se considera la simbolización de las relaciones operaciones con lenguaje algebraico, y a partir de ello, se determina el conjunto de variables que pueden incidir en la comprensión de las problemas.

El enfoque semántico corresponde a las investigaciones en las que se determina las unidades de análisis a partir del significado del enunciado verbal. Parte de una primera clasificación de las palabras involucradas distinguiendo aquellas que inciden en la selección de la operación matemática, necesaria para resolver el problema, de aquellas que no lo son. Se identifican dos tipos de investigaciones desde este enfoque, aquellas

basadas en las palabras claves y aquellas que consideran los esquemas mentales como unidades de análisis. Los estudios que se enmarcan en el primer tipo fueron impulsados por el enfoque de variables estructurales. Sin embargo, este análisis parcial en el que la variable palabra clave es considerada no ilustra mayores incidencias en las dificultades de los estudiantes (Puig y Cerdan, 1989; citados en Castro, Rico y Gil, 1992). De otro lado, las investigaciones que consideran los esquemas se fundamentan en los procesos mentales que utilizan los estudiantes. Se identifican dos corrientes dentro de este enfoque, el cálculo relacional (Vernaugd, 1990) y las categorías semánticas (Nesher y Katriel, 1977; Nesher, Greeno y Riley, 1982; y Heller y Greeno, 1979, citados en Castro, Rico y Gil, 1992).

Partiendo de su conceptualización sobre el campo conceptual, Vernaugd (1990) construye un sistema de categorías que describen el significado de los problemas de estructura aditiva de enunciado verbal en el contexto de los números enteros. Para tal fin, analiza primero si los datos expresan o no una relación que se desarrolla en el tiempo e identifica seis grandes tipos de problemas. No obstante, esta conceptualización sobre los problemas aditivos no tuvo gran acogida, a diferencia de la propuesta similar que hizo en el contexto del campo conceptual multiplicativo.

Estos enfoques dan una luz sobre los elementos a tener en cuenta en el momento de estudiar los diferentes fenómenos de aula alrededor de la actividad de resolver problemas en Matemáticas. Si bien aparecen en el contexto de los problemas de estructura aditiva, las consideraciones generales a través de las cuales se plantean los estudios en dichos enfoques, dejan ver cuáles son las posibles unidades de análisis en cada caso y, en consecuencia, ilustran sobre los aspectos que, en general, pueden resultar problemáticos desde el punto de vista investigativo en la resolución de PAEV.

Más recientemente, Casajús (2005) en su tesis doctoral estudia la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal, con estudiantes que presentan trastornos de déficit de atención con hiperactividad. El autor presenta un amplio recorrido sobre los marcos teóricos de las investigaciones que se han desarrollado sobre la resolución de problemas.

Este análisis sobre las investigaciones realizadas le permite identificar diferentes concepciones sobre a la resolución de problemas aritméticos como tarea y actividad matemática del aula. Particularmente, identifica que existen algunas investigaciones desde las que se enfatiza en la secuencia de pasos utilizados para llegar a la respuesta o solución del problema planteado, y otras que se interesan en el pensamiento matemático que interviene en el estudio de los problemas en el aula.

Así mismo, identifica que el interés de investigación varía también en relación con el tipo de tarea que se proponga, es decir, si la resolución problemas tiene que ver más con ejercicios de aplicación de conocimientos matemáticos ya aprendidos (Leif y Delazy, 1961, citados en Casajús, 2005), o si más bien tiene que ver con el estudio de situaciones a partir de contextos o enunciados bien planteados, con el objetivo de hacer emerger un conocimiento matemático nuevo vía a la formalización. De todas formas, aunque en el estudio se plantea esta diferenciación, Casajús (2005) manifiesta que una correcta interacción entre ambos estilos puede aumentar el nivel de comprensión matemática asociada al estudio de contenidos matemáticos, como las operaciones aritméticas en relación con los problemas aditivos.

Una constante en la mayoría de investigaciones consultadas tiene que ver con la ilustración de las fases, en algunos casos desde varios y diferentes puntos de vista, en las que se puede describir el proceso de resolución de un problema. De hecho, se menciona que la mayoría de investigadores que con su estudio han aportado a desarrollar cambios en los procesos de instrucción sobre la resolución de problemas, han dejado ver un modelo desde cual pareciera necesario prescribir los pasos que debe seguir quien resuelve el problema (Puig y Cerdán, 1988). A este respecto Schoenfeld (1985, citado en Santos Trigo, 2008) manifiesta que no es posible determinar fases perfectas y que, de hecho, la experticia de quien resuelve problemas no se basa en la capacidad para recorrer fases de manera precisa y secuencial, sino en el rápido estudio e intercambio de estrategias y recursos requeridos por el problema con el que se esté trabajando.

1.1.2.3 INVESTIGACIONES SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS

A nivel internacional, los programas de investigación en el campo de la resolución de problemas, en general, intentan explicar las formas en que los estudiantes o individuos desarrollan el conocimiento matemático a partir de la actividad de resolver problemas. Entre las preguntas más relevantes que describen el interés de estudio en estos programas de investigación, Santos Trigo (2008) destaca: ¿Qué significa aprender o construir el conocimiento matemático en términos de la resolución de problemas? ¿Cómo los estudiantes desarrollan o construyen las ideas matemáticas? ¿Qué formas de pensar manifiestan y exhiben los estudiantes en la resolución de problemas?

En Japón, Hino (2007, citado en Santos Trigo, 2008) identifica varias líneas de investigación sobre el análisis de los procesos cognitivos del estudiante al trabajar actividades de resolución de problemas. En particular reporta estudios sobre el comportamiento de los estudiantes en los procesos de resolver problemas, en aspectos relacionados con las estructuras y contextos de los problemas, y en relación con el desarrollo de las habilidades de resolución de problemas, en particular, el uso de las estrategias.

Da Ponte (2007, citado en Santos Trigo, 2008) utiliza el término “exploraciones matemáticas e investigaciones” para presentar elementos relacionados con la resolución de problemas y que han sido objeto de estudio desde principios de la década de los noventa. En las “exploraciones matemáticas e investigaciones” los estudiantes simulan o practican aspectos como la formulación de preguntas, o la búsqueda y justificación de conjeturas. En particular, la actividad de investigar “significa trabajar a partir de una pregunta en la cual uno está interesado, que al principio puede ser confusa, pero que uno es capaz de clarificar y estudiar en una forma organizada” (Da Ponte, 2007, p. 421, citado en Santos Trigo, 2008). Esta manera de propiciar espacios de investigación requiere de un tipo de razonamiento analítico similar al que se utiliza en el método de análisis - síntesis, en la medida en que supone partir de lo que se quiere hallar para organizar y ejecutar acciones con miras a responder la pregunta.

En Alemania, donde existen raíces históricas en áreas como la psicología y el desarrollo de las matemáticas, la investigación buscó investigar los procesos mentales del individuo cuando resuelve problemas; sin embargo, los resultados de la investigación no se relacionaron directamente con el aprendizaje de las matemáticas (Reiss, & Törner, 2007, citados en Santos Trigo, 2008). Este hecho, pone en evidencia el carácter transversal que tiene el tratamiento en la resolución de problemas en Matemáticas, dados los elementos de distinta naturaleza que intervienen en el proceso. Por lo tanto, es de esperar que al estudiar la resolución de problemas en matemáticas, los elementos que resulten del análisis no necesariamente estén contenidos en su totalidad en un conjunto de cuestiones relativas a las matemáticas escolares, sino que pueden trascender en cuestiones de carácter global, por ejemplo, aprendizajes de tipo metacognitivo.

English, Lesh & Fennewald (2008, citados en Santos Trigo, 2008) identifican tres obstáculos que han limitado el desarrollo de la investigación en la resolución de problemas: (i) no existe una acumulación de información sobre resultados de estudios que se han realizado en la resolución de problemas y que pueda ser analizada y contrastada de manera sistemática. Teorías o marcos que surgieron en la fase inicial de resolución de problemas han sido reciclados sin pasar por un escrutinio acerca de su pertinencia y limitaciones; (ii) las teorías existentes no explican de manera consistente los procesos que involucran el desarrollo de conceptos o habilidades básicas o cómo se relacionan con la resolución de problemas; (iii) la debilidad inherente a los estudios que involucran observaciones o experimentos de enseñanza y las hipótesis o suposiciones que sostienen, muchas veces implícitamente, que una gran teoría puede ser capaz de describir todos los sistemas conceptuales, de instrucción y de evaluación que son moldeados por las mismas perspectivas teóricas que están siendo utilizadas para desarrollarlas.

Un tema relevante en los programas de investigación y en las prácticas de instrucción ha sido el documentar el empleo de estrategias heurísticas (Polya, 1965; Krulik & Reys, 1980, citados en Santos Trigo, 2008) en el desarrollo de competencias de resolución de problemas en los estudiantes. Las revisiones de la literatura relacionada con el uso de las

heurísticas, (Begle, 1979; Silver, 1985; Schoenfeld, 1992, citados en Santos Trigo, 2008) reportan que los intentos de enseñar a los estudiantes el empleo de las heurísticas no había sido exitoso. Schoenfeld (1992, citado en Santos Trigo, 2008) propone ir más allá de una descripción de las estrategias, que era el caso de la heurística expuesta por Polya, y ofrecer oportunidades para que los estudiantes desarrollen la previsión del uso de una u otra heurística basados en la observación y estudio de los problemas propuestos. En particular sugiere (a) ayudar a los estudiantes a desarrollar un gran número de estrategias de resolución de problemas más específicas y que relacionen de forma clara clases específicas de problemas, (b) enseñar estrategias de monitoreo que permitan a los estudiantes aprender cuándo pueden utilizar estrategias apropiadas y el contenido matemático relevante en la resolución de problemas, y (c) desarrollar formas de consolidar las creencias de los estudiantes sobre la naturaleza de las matemáticas, la resolución de problemas, y sobre sus propias competencias o formas de interactuar con situaciones matemáticas.

En resumen, la resolución de problemas es un objeto de investigación presente en la Educación Matemática que ha sido modelado desde diferentes perspectivas y con distintos objetivos, tal y como lo advierte Schoenfeld (1992, citado en Santos Trigo, 2008). No obstante, se percibe una línea de interpretación transversal a partir de la cual se pueden colegir los siguientes hechos: (i) es importante estudiar, describir y analizar las heurísticas que se proponen desde la enseñanza en la resolución de problemas, y (ii) los aprendizajes logrados en el proceso pueden ser de distinta naturaleza, en tanto la resolución de problemas conlleva la interacción entre elementos de distinta naturaleza (i.e. contextos semi-reales, contenidos matemáticos, heurísticas)

Otra componente transversal que se identifica en los diferentes programas de investigación (Santos Trigo, 2008) tiene que ver con las incidencias que tienen y han tenido los resultados de los estudios sobre la resolución de problemas en Matemáticas, en el currículo escolar. A continuación, se presenta una síntesis de los principales elementos

que retoma Santos Trigo (2008) acerca de la relación entre los resultados de las investigaciones y el diseño curricular.

1.1.2.4 ESTUDIOS SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y SU INCIDENCIA EN EL DISEÑO CURRICULAR EN MATEMÁTICAS

La NCTM (2000) propone un marco con una visión global de las matemáticas que tiene una incidencia importante en la programación curricular de diferentes países en los niveles pre-universitarios. En el documento destacan cinco estándares de contenidos (números y operaciones; geometría y sentido espacial; patrones, relaciones y álgebra; medición, análisis de datos y probabilidad) y cinco estándares de procesos del pensamiento matemático (resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representaciones). Con base en estos elementos generales, se han organizado los currículos de Matemáticas, al menos, en su nivel de currículo propuesto. Así, es común encontrar propuestas donde se introduce la terminología de los estándares pero se mantiene la estructura de los contenidos en forma tradicional, como sustento inamovible de la programación curricular; o se adjuntan, a propuestas tradicionales, ciertos apartados que hacen referencia a los propósitos de los estándares (Santos Trigo, 2007).

Muchas de las investigaciones en Educación Matemática se han formulado alrededor de los estándares destacados en el documento de la NCTM y, en especial, las investigaciones sobre la resolución de problemas en Matemáticas acogen en gran medida las conceptualizaciones sobre los estándares de contenidos matemáticos, impulsados desde la actividad de resolver problemas y la manera en que, en el contexto de dicha actividad, intervienen los otros procesos de pensamiento.

Arcavi & Friedlander (2007, citados en Santos Trigo, 2008) documentan los puntos de vista sobre los problemas y la resolución de problemas que manifiestan líderes de grupos responsables del diseño y uso de proyectos curriculares en la educación elemental (grados 1-6) en Israel. A partir de sus resultados, que tratan aspectos específicos de la resolución

de problemas, como tipologías de problemas y diversidad de estrategias, sugieren realizar proyectos de investigación donde “se observe, documente y discuta a un nivel fino o de detalle cómo la enseñanza de la resolución de problemas puede fomentarse en el salón de clases o cómo un currículum intentado es implementado” (p. 363).

En los Países Bajos (Holanda) se reconoce la importancia de implementar una programación curricular organizada en torno a la resolución de problemas, y de acuerdo con los principios de la educación matemática realista, es decir, partiendo del reconocimiento del mundo real como una fuente para el desarrollo de los conceptos matemáticos. Problemas contextuales bien seleccionados ofrecen oportunidades para que los estudiantes desarrollen estrategias de solución informales, altamente contextualizadas y, por tanto, significativas en la construcción de conceptos matemáticos. “El contexto puede aún ser no realista o ubicarse dentro de las matemáticas, si el desarrollo del concepto lo requiere. Sin embargo, el contexto del problema debe ser experimentado como real por los estudiantes” (Doorman, Drijvers, Dekker, Van den Heuvel-Panhuizen, de Lange & Wijers, 2007, p.406-407, citados en Santos Trigo, 2008).

En China los estudios sobre la resolución de problemas se orientan alrededor de dos ejes temáticos principales: los contenidos curriculares y los aspectos de instrucción. “Una de las metas en la enseñanza de las matemáticas continúa siendo el ayudar a los estudiantes a aprender métodos, los cuáles pueden ser transferidos y aplicados a otros problemas” (Cai y Nie, 2007, citados en Santos Trigo, 2008). En relación con las prácticas de instrucción, existen tres actividades de aprendizaje que son relevantes en el desarrollo de la instrucción: (i) Un problema con soluciones múltiples donde el profesor presenta un problema e invita o provee oportunidades a sus estudiantes para que resuelvan el problema de maneras distintas; (ii) un problema con múltiples cambios donde el profesor motiva a sus estudiantes a resolver variaciones de un problema después de que el problema original ha sido resuelto. La variación del problema puede también ocurrir en el proceso de resolver el problema; (iii) múltiples problemas con una solución donde los

profesores orientan o guían a sus estudiantes a usar un método de solución para resolver un conjunto de problemas.

De acuerdo con Da Ponte (2007, citado en Santos Trigo, 2008), las actividades alrededor de las “exploraciones matemáticas e investigación” han influido en el diseño e implementación del currículum oficial portugués y documenta que las experiencias realizadas a pequeña escala muestran su potencial en el logro de los objetivos del currículum.

Burkhardt & Bell (2007, citados en Santos Trigo, 2008) documentan características generales de la resolución de problemas en el Reino Unido. Empiezan identificando la resolución de problemas con el proceso de abordar tareas que son significativamente diferentes de aquellas que uno ha aprendido mecánicamente; una parte del reto está en decidir cómo abordar el problema y qué tipo de conocimiento o recurso matemático se puede utilizar. Un resolutor de problemas necesita un entendimiento de las matemáticas rico así como la habilidad de ver patrones de similitud y asociación, también como las destrezas para llevar a cabo un plan de solución y revisar que los resultados tienen sentido en el contexto del problema (Burkhardt & Bell, 2007, p. 395, citados en Santos Trigo, 2008). Así la resolución de problemas se enfoca principalmente en la construcción de modelos que permitan matematizar diversas situaciones. El reporte Cockcroft (1982, citado en Santos Trigo, 2008) en respuesta a la preocupación expresada por líderes de negocios y de la industria en relación al mejoramiento de la educación, indica que la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles debe incluir oportunidades para: (i) La exposición del profesor, (ii) la discusión entre el profesor y los estudiantes y entre los mismos estudiantes, (iii) un trabajo práctico apropiado (iv) la consolidación y práctica de destrezas fundamentales y rutinas, y (v) la resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las matemáticas en situaciones cotidianas.

Burkhardt & Bell (2007, citados en Santos Trigo, 2008) sugieren que el reporte Cockcroft fue la base para construir un progreso sólido en la educación matemática y propició el

diseño de materiales interesantes para la enseñanza y el desarrollo profesional de los profesores en la resolución de problemas.

Con respecto a la enseñanza en Japón, Hino (2007, citado en Santos Trigo, 2008) sugiere que el empleo de problemas abiertos es uno de los métodos representativos para promover el desarrollo de las habilidades de los estudiantes en la resolución de problemas. En términos de la estructura de la clase, Hino describe las siguientes actividades de instrucción (a) revisión de la lección previa y presentación preliminar del problema del día; (b) el trabajo individual y la presentación de las ideas a todo el grupo; (c) presentación del problema del día y el trabajo del problema individual y la presentación a la clase; (d) comparación de las soluciones y analizar las ventajas y limitaciones de los métodos de solución; (e) reflexiones sobre la sesión.

Santos (2007, citados en Santos Trigo, 2008) reporta que varias propuestas curriculares explícitamente identifican a la resolución de problemas como una actividad central en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y el lenguaje en la presentación distingue aspectos del quehacer matemático; sin embargo, no existe claridad en cuanto al significado de organizar un currículum bajo la perspectiva de la resolución de problemas.

La resolución de problemas exitosa requiere del conocimiento del contenido matemático, del conocimiento de estrategias de resolución de problemas, de un automonitoreo efectivo, y una disposición productiva a plantear y resolver problemas. La enseñanza de la resolución de problemas requiere aún más de los profesores, ya que deben ser capaces de promover tal conocimiento y actitudes en sus estudiantes. La enseñanza en sí misma es una actividad de resolución de problemas (NCTM, 2000,p. 341).

A modo de síntesis, las investigaciones en Educación Matemática sobre la resolución de problemas han aportado elementos significativos a las programaciones curriculares sobre las matemáticas escolares en diversos países. Estos elementos se concretan en disposiciones particulares en relación con métodos y estrategias (heurísticas) en el

proceso de resolución de problemas en el aula, documentación sobre tipologías de problemas que sirven para diversificar las actividades de clase, entre otras. Se reconoce que pueden existir caminos distintos para promover el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, sin embargo, es necesario conceptualizar la disciplina en términos de las cuestiones que los estudiantes necesitan responder con base en los recursos matemáticos accesibles.

Sin embargo, se señala la importancia de evaluar y contrastar el impacto en las propuestas curriculares de esos programas de investigación, dadas las diferencias en lenguaje y concepciones sobre la resolución de problemas. En particular, se rescata el interés común en algunos programas, por analizar la relación entre el currículo propuesto y el desarrollado, o entre el propuesto y el logrado, con el objetivo de tener una visión menos defectuosa de la manera en que la resolución de problemas en matemáticas entra como detonante de conocimiento matemático y extramatemático en los estudiantes.

En el caso de este estudio y habiendo identificado algunos de los elementos más relevantes del currículo propuesto correspondiente, conviene consultar además algunos referentes investigativos sobre el método que se utiliza en el aula de Matemáticas de primaria en el Colegio Italiano Leonardo da Vinci para la resolución de PAEV. El referente investigativo principal se ilustra a continuación y aporta elementos importantes para construir categorías descriptivas de la actividad del resolutor de PAEV, es decir, para describir las características principales del currículo logrado.

1.1.2.5 EL MÉTODO DE ANÁLISIS – SÍNTESIS COMO INTERÉS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Como se mencionó anteriormente, la mayor parte de las investigaciones sobre resolución de problemas tienen que ver con problemas de una etapa, es decir, con problemas de una operación. Existen pocos trabajos sobre los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas. Puig y Cerdán (1988) manifiestan que la razón principal de esta carencia recae en la dificultad intrínseca del estudio del proceso de resolución de estos problemas en los que intervienen tantas variables simultáneamente. Además, tomando como

referente el análisis y la síntesis como método de resolución de problemas de este tipo, el desarrollo de un estudio sobre esta temática requiere que se tengan en cuenta, al menos, la estructura que se representa en el razonamiento analítico, gráfico o discursivo, y la naturaleza de las operaciones implicadas en los contextos específicos, siendo estos elementos bastante complejos.

Kalmykova (1975) desarrolla un estudio sobre el análisis y la síntesis en la resolución de problemas aritméticos de varias etapas con operaciones combinadas, atendiendo a unas características particulares de la programación curricular en Rusia, en la que se privilegiaba la resolución de problemas aritméticos con el uso de dichos métodos. Esta adaptación escolar de los métodos de análisis - síntesis encuentra justificación en la siguiente premisa: “Podemos empezar con el principio familiar en materialismo dialéctico de que el pensamiento es analítico y sintético y que los procesos analíticos y sintéticos están vinculados el uno al otro inseparablemente” (Kalmykova, 1975, p.5) Y así, “el propósito de la actividad analítica-sintética al resolver un problema debería ser exponer su contenido matemático tal como está descrito por la situación concreta en la hipótesis, así como averiguar las relaciones de los datos unos con otros y con la cantidad desconocida, y, una vez aislados los principios apropiados, determinar el valor de la incógnita a partir de los datos conocidos” (p.7)

En el desarrollo de su estudio, Kalmykova hace una serie de preguntas de gran interés, que son retomadas en Puig y Cerdán (1988), muchas de las cuales aún hoy en día necesitan ser investigadas:

- Los metodólogos aseguran que el método de análisis es útil porque desarrolla el pensamiento lógico. ¿Qué fundamento tiene esa afirmación?
- ¿Basta el argumento meramente lógico de que el método de análisis requiere que se construya una cadena rigurosa de deducciones?

- ¿Hasta qué punto el método de análisis y la construcción de la cadena de deducciones ayuda a elaborar el significado de un problema concreto o a encontrar una vía de solución?
- ¿Es posible descomponer por el método del análisis un problema no familiar?
- ¿Es útil la descomposición analítica de los problemas una vez han sido resueltos? Si es así, ¿para qué?
- ¿Qué influencia tiene la instrucción en el análisis en la habilidad para resolver problemas?

Las consecuencias en el estudio de Kalmykova pueden describirse en términos de cuatro aspectos particulares: (i) Cómo se ve y cómo se describe la actividad analítico-sintética de los niños en la resolución problemas aritméticos. (ii) Hasta qué punto la instrucción en análisis permite comprender el problema y su proceso de resolución. (iii) Si la práctica y la instrucción en análisis es un procedimiento útil y eficaz para la búsqueda de la solución de cualquier PAEV. Y (iv) Si es posible diseñar con base en el análisis y la síntesis un procedimiento de instrucción productivo para la resolución de cualquier PAEV.

Kalmykova concluye su estudio describiendo la actividad de varios grupos de estudiantes con distinta metodología de trabajo frente a la resolución de problema y caracterizando los tipos de análisis que presentan en la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal. Así mismo, propone una serie de pasos que pueden tomarse como referencia para la instrucción, frente a los objetivos de enseñanza en la resolución de problemas. Los interrogantes retomados anteriormente quedan abiertos como posibles intereses de investigación posteriores, entre los cuales, se identifican algunos que se corresponden con las problemáticas docentes identificadas en la primera aproximación al currículo propuesto sobre la resolución de PAEV en el Colegio Italiano Leonardo da Vinci.

Teniendo en cuenta los antecedentes institucionales e investigativos, en el apartado siguiente se presentan las intenciones generales del estudio a través de preguntas, hipótesis y objetivos.

1.2 PROBLEMA E INTENCIONES DE INVESTIGACIÓN

1.2.1 PREGUNTAS E HIPÓTESIS DEL ESTUDIO

En la *Scuola Primaria* del Colegio Italiano Leonardo da Vinci el uso del método de análisis - síntesis en la resolución de PAEV tiene por objetivo la construcción de conocimiento estratégico que permita a los estudiantes prever, relacionar y representar las operaciones aritméticas requeridas para hallar una incógnita específica. El análisis – síntesis es también el medio o instrumento a través del cual los niños manipulan y configuran la información del problema en una representación gráfica o discursiva en la que también se pone en evidencia las operaciones requeridas para el problema.

No obstante, esta concepción de instrumento es cuestionable en la medida en que puede, efectivamente, convertirse en un obstáculo para el aprendizaje de la resolución de problemas aritméticos más que facilitarlos, puesto que sugiere dificultades adicionales para los estudiantes en el proceso de resolución de PAEV, tales como:

- El trabajo con entidades sincopadas en un momento en el que no se han dado elementos de procesos de generalización, que permitan a los estudiantes comprender que una palabra puede ser tratada como número aún cuando ésta no haya sido puesta en equivalencia con la cantidad que representa.
- La configuración de la información de un problema y las relaciones existentes, en una representación gráfica o discursiva que incluye las entidades sincopadas y que responde a unas reglas específicas del registro de representación seleccionado.
- El razonamiento analítico que es requerido a los niños, cuando aún su desarrollo cognitivo corresponde a etapas deductivas e inductivas sobre razonamientos sintéticos.

Las dos maneras de representar el razonamiento, sea a través de la escritura de palabras que interactúan como entidades matemáticas sincopadas al interior de las ecuaciones, o a través de un arreglo gráfico con forma de mapa conceptual, presentan a su vez

dificultades específicas, como la ubicación espacial adecuada de datos emergentes, la recursión a datos escritos con anterioridad, la interpretación adecuada del orden de jerarquía entre las operaciones o la nominación pertinente de las magnitudes involucradas, entre otras. Además, dado que se trata de dos representaciones de un mismo proceso o estilo de razonamiento, es necesario mostrar las congruencias entre ellas para que el paso de una a otra sea coherente e, inclusive, un facilitador del proceso. El tratamiento adecuado desde la enseñanza de estos objetos de aprendizaje puede permitir a los niños estrategias más formales con las cuales afrontar la resolución de los PAEV.

Los trabajos de los niños muestran una dualidad bastante interesante sobre la concepción que puedan tener sobre la resolución de PAEV. De una parte, manifiestan que el conjunto de pasos presentados, que tienen como núcleo la escritura del razonamiento, en forma discursiva o esquemática, son una estrategia que facilita y asegura la resolución del problema aún cuando encuentran en estos pasos la mayor dificultad en el proceso. Además, el estilo de trabajo los ha llevado a suponer que no existen otras estrategias válidas y frente a la actividad de resolver problemas de diferente naturaleza encuentran mayor limitación puesto que este estilo de razonamiento no es el más adecuado para esos casos. Tan es así, que aún cuando fue socializada la estrategia del dibujo como manera de facilitar el análisis y comprensión de los problemas, los niños, frente a otro problema, regresaron al uso de los pasos ya mencionados aunque estos no les mostraban más de lo que podían leer del enunciado.

El tratamiento que se da a la resolución de PAEV en el Colegio Italiano Leonardo da Vinci muestra una serie de características que lo hacen específico de este contexto escolar. Desde la propuesta del profesor Federici hasta sus posteriores modificaciones, se percibe un gran interés por que los niños logren comunicar de manera formal y acertada los razonamientos que en conjunto los llevan a la toma de decisiones frente a la actividad de resolver problemas. Es así que el proceso de resolución de problemas, compuesto por las fases descritas con anterioridad, tiene adicional y prevalentemente una naturaleza de

objeto de aprendizaje, más que un instrumento para el aprendizaje de la resolución de problemas.

La inexistencia de una aclaración a nivel del currículo propuesto sobre el rol específico del método de análisis – síntesis en la resolución de PAEV ha podido ser la causa de las siguientes situaciones, que se emiten aquí como hipótesis de estudio y que concuerdan, en parte, con los aspectos retomados del estudio de Kalmykova (1975)

H1. La aplicación del método de análisis – síntesis es una tarea adicional que los estudiantes deben desarrollar además de resolver el PAEV.

H2. La adaptación escolar del método no ha permitido a los niños la construcción de estrategias alternativas o complementarias en el proceso de resolución de un PAEV.

H3. Los estudiantes prestan mayor atención a seguir los pasos del método, que a la validez o pertinencia del trabajo que realizan en relación con el PAEV que deben resolver.

H4. Cuando el PAEV tiene una estructura familiar, la actividad analítico – sintética de los estudiantes consiste en una repetición de modelos aprendidos sobre problemas ya resueltos, pero ante un problema nuevo o complejo el método usado por ellos difiere sustancialmente de lo que se presume desde la teoría.

La verificación o refutación de estas hipótesis a partir de las actividades programadas en el desarrollo de este estudio, servirá como punto inicial de referencia para la formulación de una serie de consideraciones conceptuales en torno al rol que desempeña el método de análisis – síntesis en el aula de Matemáticas, visto desde la óptica de lo que se propone en la programación curricular y los referentes teóricos que la sustentan. Los objetivos que se presentan a continuación permiten detallar las consecuciones que se presumen en el desarrollo del estudio. A cada objetivo específico se le asocia una actividad contemplada como elemento metodológico del estudio.

1.2.2 OBJETIVOS

1.2.2.1 GENERAL

Describir, analizar y caracterizar el currículo logrado en la *scuola primaria* del Colegio Italiano Leonardo da Vinci, con respecto al uso del método de análisis - síntesis en la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal.

1.2.2.2 ESPECÍFICOS

- Estructurar un marco conceptual que permita describir y modelar las características de la actividad de los estudiantes cuando resuelven PAEV con la utilización del método de análisis - síntesis.
- Diseñar y aplicar pruebas y entrevistas semiestructuradas sobre la resolución de PAEV a estudiantes entre los 9 y 11 años del Colegio Italiano Leonardo da Vinci.
- Describir y analizar, con base en los elementos relacionados en el marco conceptual, los resultados de los estudiantes en las pruebas y entrevistas.
- Caracterizar el currículo logrado en relación con el uso del método de análisis - síntesis en la resolución de PAEV.
- Establecer relaciones entre el currículo logrado y el currículo propuesto con respecto a la resolución de PAEV con base en el uso del método de análisis - síntesis.

1.3 DESCRIPCIÓN METODOLÓGICA DEL DESARROLLO DEL ESTUDIO

La forma de trabajo seleccionada para el estudio atiende al objetivo de observar, analizar y describir la actividad de los estudiantes mientras resuelven PAEV con el método de análisis - síntesis. De esta forma se pretende caracterizar el currículo logrado en relación con el objeto de estudio en cuestión para lograr establecer comparaciones entre lo propuesto y lo logrado. El estudio es de tipo cualitativo, por tanto, se utiliza un análisis macroscópico a través de la observación (Puig, 1988), en el que la principal fuente de información serán las producciones verbales de los estudiantes frente a las tareas

propuestas; a saber, dos pruebas escritas constituidas con base en las consideraciones emergentes de los estudios de Kalmykova (1975) y un cuestionario para casos específicos en el contexto de entrevista semiestructurada.

Para detallar de manera más precisa el diseño metodológico del estudio, se describen a continuación las fases que orientaron la consecución de los objetivos.

- Fase 0. Modelación de la problemática del estudio

Inicialmente, las intenciones de estudio emergieron de una serie de situaciones descritas como problemáticas docentes en torno a la resolución de PAEV en el Colegio Italiano Leonardo da Vinci. La modelación de la problemática de estudio en el contexto de real implicó, en particular, una revisión de los documentos rectores que describen y fundamentan en contexto institucional (real) del estudio y que dan cuenta de las realizaciones conceptuales del grupo de trabajo del área de Matemáticas. Esta actividad metodológica, cuyos resultados se presentan en apartados precedentes a éste, permitió la caracterización del currículo propuesto sobre la temática específica, es decir, se logró establecer el deber ser de las acciones educativas de la institución con respecto a la resolución de PAEV con la adaptación escolar del método de análisis – síntesis.

Los elementos que permitieron modelar teóricamente el objeto de estudio, en el contexto matemático y de las Matemáticas escolares, surgieron de una revisión bibliográfica sobre los antecedentes investigativos relacionados con la resolución de problemas en Matemáticas y con el método de análisis – síntesis. La clasificación del material pertinente se dio teniendo en cuenta los siguientes criterios: (i) pertinencia a nivel escolar de los documentos seleccionados, identificando aquellos que se remitieran a las cuestiones relativas al contexto escolar del estudio; (ii) pertinencia a nivel matemático de los documentos seleccionados, prefiriendo aquellos que proporcionaran una descripción teórica en las Matemáticas sobre el método usado en la resolución de PAEV; y (iii) pertinencia a nivel institucional, retomando aquellos documentos que contienen los elementos teóricos que han sido tomados como referente conceptual en el grupo

académico de los profesores de Matemáticas de la *Scuola Primaria* del Colegio Italiano Leonardo da Vinci.

Con base en los elementos anteriores, fue posible conocer a ciencia cierta cuál es el estado actual de la problemática de estudio puesto que, además, la información se validó con base en las distintas fuentes.

Para la presentación del problema y las intenciones de investigación se enlistan primero una serie de preguntas e hipótesis emergentes de la revisión bibliográfica inicial y de las experiencias reales relatadas. Tales preguntas e hipótesis implican además la consideración de elementos específicos o la proposición de tareas concretas que, se pretende, sean asequibles a partir del desarrollo del estudio. Posteriormente, se identifican los objetivos específicos del estudio que emergen de una consecuencia natural de las preguntas orientadoras e hipótesis planteadas.

- Fase 1. Revisión bibliográfica

Con el objetivo de estructurar un marco conceptual que permita describir y modelar las características de la actividad de los estudiantes cuando resuelven PAEV con la utilización del método de análisis – síntesis, es decir, que permita describir el currículo logrado, se desarrolló una revisión bibliográfica especializada sobre los elementos teóricos que modelan la resolución de problemas en matemáticas, en general, y sobre el método de análisis – síntesis visto a través de la adaptación escolar que se propone en la institución en cuestión.

Para la construcción del marco conceptual se tuvo como principal referente los desarrollos teóricos sobre el análisis y la síntesis como métodos científicos y estilos de pensamiento, ubicándolo en la historia de las ciencias, exactas y naturales, y en las Matemáticas escolares. Se obtuvo, además, una aproximación al estado del conocimiento referido a la temática en cuestión en contexto investigativo de la Educación Matemática, que, en el caso de este estudio resulta bastante reducido.

Al referente sobre el método se le adjunta la teoría de las representaciones semióticas (Duval, 1999) en tanto permite dar una mirada paralela al proceso de resolución con el análisis – síntesis, focalizando los aspectos de tipo cognitivo que permiten modelar la solución del problema con los lenguajes de representación pertinentes o subyacentes al uso del método como se propone en el Colegio Italiano Leonardo da Vinci. Sin embargo, no fue esta teoría la fuente de las categorizaciones sobre la actividad de los estudiantes, su inclusión en el cuerpo de este documento obedece a la intención de presentar una alternativa de interpretación de la actividad de los estudiantes.

- Fase 2. Diseño y aplicación de los instrumentos de recolección de la información

Con el objetivo de diseñar y aplicar pruebas y entrevistas semiestructuradas sobre la resolución de PAEV a estudiantes entre los 9 y 11 años del Colegio Italiano Leonardo da Vinci, se retomaron elementos emergentes de los estudios soviéticos (Kalmykova, 1975), priorizando la información sobre los tipos de actuaciones de los estudiantes frente a diferentes tipos de tareas propuestas, y del marco de referencia conceptual sobre el método (Ritchey, 1996) para construir las pruebas, instrumentos de recolección de la información de este estudio.

La selección de los estudiantes que desarrollaron las pruebas se hizo de la manera en que se describe a continuación. En la prueba 1 participaron todos (100) los estudiantes de *classe quinta*. Ellos, quienes se encontraban en el último nivel escolar de la *scuola primaria*, tenían hasta ese momento una experiencia de un poco más de dos años utilizando el método de análisis – síntesis en la resolución de PAEV, por tanto, se consideró que esta muestra de la población del estudio cumplía con el requisito necesario para proveer información suficiente que permita caracterizar el currículo logrado.

En la prueba 2 participaron estudiantes que tuvieron buenos resultados en la prueba 1 y que, según el profesor titular del grupo, tienen habilidades verbales sobresalientes, puesto que se requería que ellos fueran capaces de dar cuenta de lo que han hecho o comprendido. La prueba se aplicó en los cuatro grupos de estudiantes de *classe quinta* en

momentos diferentes y en las aulas de clase respectivas, utilizando, para ello, el tiempo relativo a dos horas de clase de Matemáticas (100 minutos).

La entrevista semiestructurada se aplicó a un grupo reducido de estudiantes que tuvieron buenos resultados en las pruebas 1 y 2, que ilustraron diferentes estilos de trabajo, con buen rendimiento académico en Matemáticas y habilidades de expresión oral; los dos últimos ítems identificados por el profesor titular.

- Fase 3. Análisis de los resultados de las pruebas

El análisis de los resultados de las pruebas se hizo con base en dos aproximaciones, una descriptiva y una interpretativa, con el objetivo de caracterizar el currículo logrado en relación con el uso del método de análisis – síntesis en la resolución de PAEV.

En la etapa descriptiva se presenta, en este documento, el relato de la actividad de los estudiantes, identificando y clasificando actuaciones o decisiones de trabajo comunes al grupo. Pese a que las pruebas contaban con una serie de características previamente identificadas y deducibles del marco de referencia investigativo y teórico, el análisis de los resultados de las pruebas no contó con un conjunto de categorías *a priori* sobre la actividad de los estudiantes. Por tanto, en la fase interpretativa se recurrió a clasificar tales comportamientos o decisiones de trabajo generales en grupos a través de categorías *a posteriori* para poder emitir consideraciones conceptuales, retomando los elementos descriptivos y analíticos de la actividad de los estudiantes emergentes como resultados de los estudios soviéticos.

Así, con base en el referente investigativo y con la mirada de una teoría sobre el aprendizaje y comprensión de las ideas matemáticas, se hizo un análisis de los trabajos de los estudiantes el cual fue validado, en parte, a partir de la aplicación de la entrevista que tenía por objetivo indagar sobre la percepción de los estudiantes frente a su trabajo en las pruebas y sobre sus concepciones acerca de la resolución de PAEV como actividad de la clase de Matemáticas. Tal entrevista fue constituida con una naturaleza semiestructurada formulando dos grupos de preguntas: uno relacionado con la actividad matemática

individual en el desarrollo de las pruebas y el otro relacionado con elementos propios de las creencias de cada uno sobre el proceso de resolución de problemas en el Colegio Italiano. Se prefirió una entrevista semiestructurada puesto que esta permite seguir de manera más personalizada la línea de razonamiento de cada estudiante a través de sus respuestas; no obstante, la clasificación de las intervenciones de los estudiantes obedeció, nuevamente, a una clasificación *a posteriori* que permitió identificar regularidades y matices generales de la concepción de los estudiantes. Cada estudiante fue entrevistado de manera individual sin un límite de tiempo preestablecido.

- Fase 4. Escritura de las conclusiones

Las conclusiones del estudio se expresan en dos contextos. De una parte, se presentan aquellas consecuciones que permiten establecer el grado de logro de los objetivos trazados, en relación con las preguntas orientadoras e hipótesis planteadas. Así, se establecen relaciones entre el currículo logrado y el currículo propuesto con respecto a la resolución de PAEV con base en el uso del método de análisis - síntesis. De otro lado, se presentan aquellas consecuciones que, a nivel profesional, tuvieron lugar para el autor de este documento consolidándose como impacto real del estudio. Ambos tipos de conclusiones emergen como resultado del paso reflexivo por cada una de las fases del estudio.

No se pretende ser exhaustivos con la descripción de las fases anteriores. Otras justificaciones a las decisiones metodológicas se encuentran inmersas en el texto, completando esto la visión general del modo en que fue desarrollado el estudio y evitando ser repetitivos, más de lo necesario, en la escritura.

2 ELEMENTOS CONCEPTUALES DEL MARCO DE INTERPRETACIÓN DEL ESTUDIO

En este capítulo se retoman y organizan los referentes de tipo conceptual, de las Matemáticas y Didáctica de las Matemáticas, que configuran el estudio sobre el método de análisis – síntesis en la resolución de PAEV en el contexto escolar en cuestión. Habiendo situado el interés de investigación en el proceso de resolución de PAEV, caracterizado por la adaptación escolar del método de análisis – síntesis, se ilustra la manera en que aparece este método en la historia de las Matemáticas, en el contexto de las demostraciones de teoremas y en la resolución de problemas matemáticos, para luego, con base en realizaciones del área de la Psicología sobre los procesos de pensamiento humano convertirse en una alternativa en la escuela para el tratamiento de la resolución de problemas aritméticos escolares. Así mismo, se estudia la manera en que los diagramas y esquemas intervienen, desde el punto de vista de las representaciones semióticas, como mediadores o facilitadores en el proceso de análisis – síntesis en la resolución de PAEV, influyendo además en la concepción del resolutor sobre los PAEV.

2.1 EL MÉTODO DE ANÁLISIS – SÍNTESIS EN LA HISTORIA DE LAS CIENCIAS

El método de análisis – síntesis aparece en la historia de las ciencias en diferentes momentos, en particular, en la historia de las Matemáticas (Panza, 1997). En la Grecia clásica se advierte ya un uso sistemático en los Elementos de Euclides en el ámbito de la resolución de problemas en geometría. Para los griegos, el camino que lleva desde la incógnita a los datos, estableciendo progresivamente sus relaciones mutuas entre las entidades emergentes del proceso, se considera *análisis*, y proporciona un plan de solución del problema. El camino contrario, que va desde los datos hasta la incógnita siguiendo los pasos determinados en el análisis, corresponde a la *síntesis*. Así, cuando el

análisis ha proporcionado el plan de solución de un problema, la síntesis ejecuta el plan, obteniendo la solución del problema.

Pappus (citado en Puig y Cerdán, 1988) explica más en detalle en qué consiste el método de análisis - síntesis, distinguiendo además entre dos tipos de análisis, el teórico, que tiene lugar cuando se quiere probar una conjetura o demostrar un enunciado, y el problemático, que hace referencia a los problemas de encontrar o determinar una incógnita. La regla del análisis-síntesis para el análisis teórico puede leerse a través del texto de Lakatos (1981, citado en Puig y Cerdán, 1988), que la adapta de la siguiente manera:

“Saca conclusiones de tu conjetura, una tras otra, suponiendo que la conjetura es verdadera. Si llegas a una conclusión falsa, entonces tu conjetura era falsa. Si llegas a una conclusión indudablemente verdadera, tu conjetura quizá haya sido verdadera. En este caso, invierte el proceso, trabaja hacia atrás, e intenta deducir tu conjetura original por el camino inverso, desde la verdad indudable hasta la conjetura dudosa. Si tienes éxito, habrás probado tu conjetura”. (Lakatos, 1981, pgs. 106-107)

En el caso del análisis problemático, que atañe al interés de este estudio, la regla estaría escrita de la siguiente manera:

“Si x es la incógnita del problema, supóngala conocida. Indague e investigue cuáles son aquellos antecedentes de los cuales x resulta y que permiten determinar x . Considere cada uno de estos antecedentes como una nueva incógnita (auxiliar). Indague e investigue de nuevo, iterando el proceso, hasta que (i) o bien todos los antecedentes sean datos del problema, (ii) o bien alguno de los antecedentes entre en contradicción con los datos del problema. En el caso (i), volviendo sobre sus pasos y trabajando hacia atrás, esto es, desde los datos hasta la incógnita, podrá determinar esta última. En el caso (ii), abandone el problema, su solución es imposible”. (Puig y Cerdán, 1996)

La diferenciación de Pappus permite identificar dos tipos de aplicación del método de análisis - síntesis asociados con dos tipos de actividad matemática. En ambos casos, se presenta al análisis y a la síntesis como dos procesos que se complementan, aunque parecería darse cierta prelación al análisis, en tanto es presentado como aquel que

permite elaborar un plan de acción, mientras que la síntesis puede verse como el proceso a través del cual se valida lo previsto en el análisis.

A este respecto, Descartes (Raftopoulos, 2003) plantea que la relación entre el análisis y la síntesis no puede ser descrita en términos de dos elementos que se complementan para dar sentido a un método, puesto que se reconoce al análisis como el método de descubrimiento y prueba que no necesita de la síntesis para ser validado (Raftopoulos, 2003). No obstante, esta característica del método analítico tiene sentido en el contexto de la geometría, o de las Matemáticas en general, en donde se conoce la validez y certeza de los teoremas y axiomas que intervienen en el proceso, no siendo así el caso de la física o de la biología puesto que estas áreas requieren de experimentos reales para comprobar las hipótesis, esto es, requieren de la articulación del método analítico con el sintético. Así mismo, Descartes describe una regla más específica que tiene sentido cuando se pretenden resolver problemas de tipo algebraico y que se puede consultar en Puig y Cerdán (1990).

Tanto en el caso de las Matemáticas como en el caso de las ciencias naturales, Descartes propone un marco desde el cual se pueden interpretar los procesos analíticos y sintéticos, a través de los cuales se pueden orientar las investigaciones científicas o la resolución de problemas. En particular, en la presentación de los algoritmos a través de los cuales se describe el proceso de utilización del método de análisis en el contexto de las Matemáticas, Descartes pone en evidencia la importancia de los teoremas y axiomas como elementos que conectan unas conclusiones con otras, a través de deducciones, dando esto consistencia y validez al plan de acción seleccionado. Esta alusión a enunciados matemáticos saca a relucir un elemento que parecería obvio, pero que no había sido mencionado con anterioridad, y se puede resumir así: quien desea resolver un problema o demostrar una conjetura en matemáticas debe conocer los teoremas y axiomas, principios matemáticos, asociados al contexto de los objetos matemáticos involucrados en dicho problema o conjetura, o, al menos, probarlos en el proceso.

Posteriormente, en los trabajos de Newton (Gucciardini, 2009) y Leibniz (Ritchey, 1996) se encuentra cierta concordancia al rescatar a la síntesis como método importante en la investigación y desarrollo científico. Ambos coinciden en que la

“[s]íntesis es el proceso en el cual se parte de principios y [se procede] a formular teoremas y resolver problemas [...] Mientras que el análisis es el proceso en el cual se parte de una conclusión o un problema propuesto y se indagan los principios a través de los cuales se puede demostrar dicha conclusión o resolver el problema” (Ritchey, 1996, P. 10).

En esta apreciación, Newton y Leibniz, cada uno por su cuenta, deja ver la diferencia entre ambos métodos sin darle a alguno poder o prelación sobre el otro y, si bien Descartes defiende el método analítico por ser válido *per se*, Newton y Leibniz sugieren que el método de síntesis tiene igualmente validez en las situaciones en las que es posible y necesario utilizarlo.

Riemann (Ritchey, 1996) identifica en un estudio de Hermann Helmholtz (1863, citado en Ritchey, 1996) desarrollado en el ámbito de la Anatomía y relacionado con el funcionamiento del oído, un método de investigación científica con la cual el autor pretendía explicar las características de dicho órgano humano, con base en la descripción de las características específicas de sus componentes y de hechos físicos tomados de la teoría de la mecánica clásica de Newton; en otras palabras, tenía un enfoque sintético. Sin embargo, Helmholtz no logró dar respuesta a muchas de las cuestiones que aparecieron en el proceso de su estudio puesto que, según Riemann, su método no le permitía tomar en consideración fenómenos no deducibles desde los principios y datos con los que se contaba.

En respuesta a dicho estudio, Riemann escribe *El mecanismo del Oído* en el cual presenta un método diferente que podría ser extendido a la investigación científica en general y que, a su modo de ver, sería más pertinente en la tarea de describir, en particular, el funcionamiento del órgano en cuestión. En *El mecanismo del Oído*, Riemann propone una manera diferente de abordar el problema, puesto que en vez de abordar su pregunta desde el conocimiento sobre cómo funciona cada una de las partes que componen al oído,

se preguntó por la manera en que dichas partes se tendrían que articular funcionalmente para que el oído pudiera desarrollar su función principal. En otras palabras, en este estudio se utilizó un método analítico para sentar las bases y determinar los puntos de partida, en cambio de un método sintético, conocido también como reduccionista, que hasta la época reinó en este tipo de investigaciones científicas.

En el marco de este trabajo, Riemann identifica cuáles son las condiciones que debe tener un objeto de estudio para que se pueda utilizar el método analítico o el método sintético, y concluye su exposición recalcando la reciprocidad de ambos métodos, que si bien son opuestos en un sentido metodológico, son complementarios y coexisten cada vez que alguno de ellos es utilizado. Aunque expone sus conceptualizaciones aún en el contexto del estudio en Anatomía, Riemann extrae estos métodos de estudio, presentándolos como métodos alternativos de investigación científica y, en este proceso de presentación, deja ver a través de sus conceptualizaciones y argumentaciones sucesivas, la aplicabilidad del análisis y de la síntesis no sólo en los campos anteriormente ilustrados de las ciencias puras, sino en procesos de construcción de conocimiento en general.

Al expandir el carácter de aplicabilidad de los métodos de análisis y síntesis, Riemann propone un marco de interpretaciones que se podría extrapolar al ámbito de la construcción de conocimiento en la escuela, particularmente en el caso de las matemáticas escolares, en las que la resolución de problemas resulta ser una actividad significativa para los procesos de aprendizaje. Así pues, con el antecedente histórico en relación con la existencia del análisis y la síntesis como métodos de estudio, de resolución de problemas y de investigación científica, y las reelaboraciones que tienen lugar en los estudios relatados sobre el análisis y la síntesis, particularmente en el caso de Riemann, se cuenta entonces con dos métodos que pueden ser considerados como una heurística en la resolución de problemas matemáticos en el contexto de la escuela.

Sin embargo, aunque estos métodos vayan de la mano, la manera más conveniente de utilizarlos no siempre es la misma, puesto que hay situaciones en las que es más

pertinente usar un método en vez del otro. Para aclarar esta idea Ritchey (1996), quien relata e interpreta el estudio de Riemann, utiliza la terminología de sistemas para referirse a los objetos de estudio que serían asequibles con el uso del análisis y de la síntesis. En este lenguaje de sistemas se puede leer la condición fundamental que Riemann antepone al uso de los métodos, esta es, conocer las leyes naturales que regulan el funcionamiento del sistema.

“Nuestro conocimiento sobre las “leyes de la naturaleza” no está dado solamente por el Dios de la Naturaleza. Esas leyes son constructos intelectuales que han sido desarrolladas a través de los siglos mediante los mismos procesos que Riemann describe en el caso del estudio del oído. Es decir, a través de una interacción continua entre los procedimientos analítico y sintético”. (P.16)

De esta forma, en el caso de las matemáticas, dichas leyes naturales corresponderían a los teoremas y axiomas que Descartes enuncia como fundamentales y en el caso de la resolución de problemas matemáticos, o aritméticos en particular, tales leyes naturales tienen que ver con las magnitudes que aportan significado al contexto del problema propuesto y a la manera en que éstas se relacionan.

En relación con la pertinencia del uso del método sintético o el analítico, Ritchey (1996) retoma del trabajo de Riemann las siguientes apreciaciones.

“La aproximación sintética [...] es entonces apropiada cuando se conocen las leyes y los principios que gobiernan los procesos internos de un sistema, pero se carece de una imagen detallada de cómo se comporta el sistema como un todo. Por ejemplo, no contamos con una comprensión suficiente sobre la dinámica a largo plazo de los sistemas galácticos, ni siquiera sobre la dinámica de nuestro propio sistema solar. Esto se debe a que no podemos observar los cuerpos celestes durante los miles, y mucho menos millones, de años que se necesitarían para poder modelar su comportamiento global. Sin embargo, conocemos algo sobre los principios que gobiernan tales dinámicas (v.g. interacción gravitacional entre las estrellas y planetas respectivamente). Podemos, por lo tanto, aplicar un procedimiento sintético para simular las dinámicas generales de tales cuerpos celestes a través de modelos computacionales y así aproximarnos a tal comprensión.

La aproximación analítica [...] es apropiada cuando el comportamiento general del sistema es conocido, pero no se tiene claridad o conocimiento suficiente sobre los procesos internos del sistema o sobre los principios que lo gobiernan. Por ejemplo, no podemos observar directamente la

estructura y dinámica interna de la tierra para establecer la causa del movimiento de las capas tectónicas. De otro lado, nuestro conocimiento sobre el movimiento de las capas tectónicas, como un efecto de la dinámica interna de la tierra, nos provee una base de la cual inferir causas y formular conclusiones sobre los procesos en cuestión” (P.9)

Queda claro entonces que para Riemann ambos métodos son igualmente válidos en los contextos en los que, respectivamente, tiene sentido utilizarlos. Así, en el caso de las investigaciones científicas, relacionadas en el objetivo del escrito de Riemann, se deben tener en cuenta las condiciones y características del sistema y el conocimiento que se tenga sobre él, para decidir cuál aproximación utilizar. Por tanto, si se considera un problema aritmético de enunciado verbal como sistema, al cual se le aplicará un método con el objetivo de estudiarlo y resolverlo, es entonces posible utilizar la aproximación sintética o la analítica dependiendo del conocimiento que sobre él tenga quien se encuentra en la tarea de resolverlo. Así, la pertinencia de uno u otro método no viene dada por las características del objeto de estudio, problema aritmético de enunciado verbal, sino, por el bagaje con el que cuenta el individuo que resuelve.

A esta consideración se puede sumar la aclaración que Ritchey (1996) agrega.

“Hay, por supuesto, muchos sistemas para los cuales contamos – para propósitos prácticos – con conocimiento claro y veraz sobre ambos elementos, causas y efectos: entendemos tanto el comportamiento general del sistema (o qué función desempeña) y cómo sus componentes y procesos internos trabajan para producir tal comportamiento. Esos sistemas pueden ser llamados transparentes”. (P.9)

En muchas ocasiones, los problemas planteados a los estudiantes son sistemas transparentes, en tanto requieren de una aplicación de conocimientos construidos en unos contextos familiares. Aquí la síntesis o el análisis pueden ser seleccionados y utilizados con igual validez. Este hecho plantea entonces la necesidad de identificar las diferencias entre los diferentes problemas aritméticos de enunciado verbal que se proponen a los estudiantes con el objetivo de determinar el rol que el análisis o la síntesis juegan y la pertinencia de los mismos. Inicialmente, esta diferenciación puede plantearse en relación con el hecho mencionado acerca de la pertinencia de un método u otro, con

base en el bagaje de quien resuelve el problema. Así, una primera categorización de los problemas daría como resultado dos clases: (i) aquellos problemas sobre los cuales el resolutor conoce tanto las leyes naturales generales como las relaciones entre los elementos particulares, problemas familiares, y (ii) aquellos problemas que por su estructura o elementos, salen del dominio del resolutor, problemas no familiares.

El breve recorrido en la historia de las ideas relativas al análisis y la síntesis como método de investigación científica, en general, y como método de construcción de ideas matemáticas, en particular, deja ver la aplicabilidad de estos métodos en el contexto de las matemáticas escolares, precisando una serie de condiciones que debe satisfacer el sujeto que resuelve el problema y el problema a resolver, para poder aplicar el análisis y/o la síntesis.

A continuación se presenta la adaptación escolar del método de análisis - síntesis en la resolución de PAEV que es objeto de estudio en esta investigación.

2.2 EN MÉTODO DE ANÁLISIS – SÍNTESIS EN LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

La consideración del método de análisis - síntesis en el contexto escolar encuentra eco, en la literatura consultada, en los años sesenta y setenta, cuando en Rusia se propone el estudio de este método en la resolución de problemas en Matemáticas. En este reporte se propone un marco de referencia conceptual cuyo énfasis recae en estudios y teorías de corte psicológico, a través de los cuales se precisa que el pensamiento humano es fundamentalmente analítico y sintético (Kalmykova, 1975). Esta premisa justifica, al menos en parte, la pertinencia de la utilización de estos métodos en la construcción de conocimiento o, dicho de otra manera, en los procesos que impulsan el aprendizaje sobre objetos de conocimiento específicos.

El método descrito en los estudios soviéticos no presenta diferencias ni estructurales ni fundamentales con el método clásico de análisis - síntesis utilizado en la resolución de

problemas matemáticos, siendo también coherente con el método que se propone en el Colegio Italiano Leonardo da Vinci descrito a través de los trabajos de Federici (Granés y Caicedo, 2001). Así pues, básicamente, al resolver un problema matemático, los niños deben comprender cuál es la pregunta que se busca responder o cuál es el dato que se busca identificar y cuantificar, y desde allí, partiendo de la comprensión general del enunciado, formular una serie de ecuaciones que relacionen la incógnita del problema con otras incógnitas emergentes, en el caso de los problemas de varias etapas y, finalmente, que relacionen estas incógnitas con la información contenida en el enunciado del problema, es decir, los datos. Posteriormente, luego de haber descrito la ruta a través de la cual se puede llegar de la incógnita a los datos, análisis, los niños deben devolverse en el proceso, síntesis, para llegar a la respuesta de la pregunta del problema sustituyendo los valores numéricos de los datos y operando para encontrar, progresivamente, los valores de las incógnitas auxiliares hasta llegar al valor de la incógnita principal del problema. Puig y Cerdán (1988) proponen los siguientes esquemas para ilustrar la manera en que funcionan el análisis y la síntesis en la resolución de PAEV.

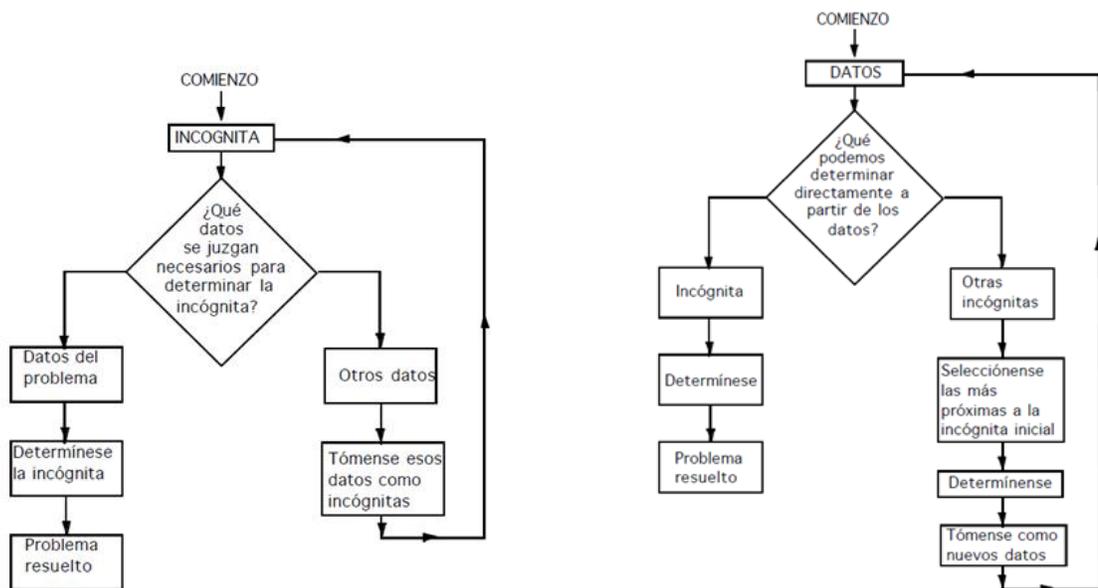


Gráfico 2. El análisis y la síntesis como algoritmos en Puig y Cerdán (1988)

A la izquierda, el método analítico que tiene como punto de partida la pregunta, mientras que el método sintético, a la derecha, sugiere partir de los datos.

Pese a esta ilustración, los métodos de análisis y síntesis no se constituyen en un algoritmo mecánico óptimo, en tanto hay momentos en los que el resolutor debe tomar decisiones sobre la información que relacionará con la incógnita para determinarla, en el caso del análisis, o, acerca de la manera en que operará los datos para obtener otros datos “más próximos” a la incógnita, en el caso de la síntesis. Estos momentos de decisión tienen que ver con la comprensión que tengan sobre el contexto del problema y, por ende, no dependen del método seleccionado, sino del bagaje que el resolutor haya construido sobre los PAEV.

A continuación se presenta un ejemplo del proceso de resolución de problemas para el caso de uno en cuya resolución intervienen varias operaciones aritméticas (Granés y Caicedo, 2001). Además, es un problema que tiene una estructura típica de los que se proponen a los estudiantes en *cuarta* y *quinta*.

Una señora compra 7 tarros de yogur a \$1.740 cada uno y 2 tarros de champiñones a \$1.820 cada uno, y entrega a la cajera un billete de \$20.000. ¿Cuánto recibe de vueltas?

- Enunciado sincopado

N° tarros de yogur comprados.....	7
Precio (en pesos) de un tarro de yogur.....	1.740
N° de tarros de yogur comprados.....	2
Precio (en pesos) de un tarro de champiñones.....	1.820
Dinero entregado a la cajera.....	20.000
Dinero devuelto (en pesos).....	?

En este primer paso de la resolución los niños deben identificar y nominar los datos relevantes del problema. Luego de varias lecturas (de todo el texto, de partes del texto) los estudiantes suelen señalar primero los números incluidos en el enunciado para luego

nominarlos teniendo en cuenta el significado de la cantidad que representa dentro de la situación planteada, esto es, la magnitud involucrada. De la pregunta se deduce el dato desconocido y es escrita como la incógnita del problema. Es un primer de nivel de representación en el que los estudiantes deben conocer las magnitudes que están identificando para que la nominación que le den sea adecuada.

Uno de los objetivos de esta escritura sincopada del enunciado consiste en que el estudiante sea capaz de resumir la situación en un bloque de información simplificada que, a su vez, le facilite la relectura del problema. El niño debe ser capaz de relatar la historia del problema con sólo observar el bloque de información registrada. En la propuesta, el profesor Federici (Granés y Caicedo, 2001) hace énfasis en el carácter de premisa que tienen los datos formulando un enunciado del tipo “Si se tienen los datos D_1 , D_2 , ..., D_n , entonces se puede calcular el valor de la incógnita X ”, aunque en el momento del análisis la implicación se plantea en el otro sentido.

- Análisis (discursivo)

$$\text{Dinero devuelto} = \text{Dinero entregado} - \text{Costo total}$$

$$\text{Costo total} = \text{Costo yogur} + \text{Costo champiñones}$$

$$\text{Costo yogur} = \text{Costo de un tarro de yogur} \times \text{N}^\circ \text{ tarros yogur}$$

$$\text{Costo champiñones} = \text{Costo de un tarro de champiñones} \times \text{N}^\circ \text{ de tarros champiñones}$$

En esta paso los niños deben escribir el razonamiento analítico que los ayudará a resolver el problema. Se parte de la pregunta, escrita como dato desconocido, identificando las relaciones entre las magnitudes que sean necesarias (auxiliares) para llegar a los datos del problema. En palabras de uno de los niños que participó en la encuesta inicial, “luego de traducir los números a palabras fenómenos que identificar las operaciones entre las palabras para construir el razonamiento [análisis]”.

En la resolución de problemas en los que intervienen varias operaciones se deben identificar las magnitudes correspondientes a datos auxiliares, que no hacen parte del

primer bloque de información simplificada o enunciado sincopado. Esta identificación se lleva a cabo de la siguiente manera: Una vez escrita la primera igualdad que relaciona la incógnita del problema con otros datos, los niños deben preguntarse si conocen cada uno de los datos utilizados. Estos datos emergentes serán, a su vez, nuevas incógnitas que eventualmente corresponden a otras preguntas formuladas con miras a responder la inicial y, por tanto, requerirán un tratamiento análogo al que se le da a la pregunta principal. En palabras de los niños, “es como resolver varios problemas en uno solo”. La identificación de estos datos auxiliares o intermedios se constituye en la dificultad más notoria en la utilización del método de análisis - síntesis.

- Síntesis (discursiva)

$$\text{Costo champiñones (en pesos)} = 1.820 \times 2 = 3.640$$

$$\text{Costo yogur (en pesos)} = 1.740 \times 7 = 12.180$$

$$\text{Costo total (en pesos)} = 12.180 + 3.640 = 15.820$$

$$\text{Dinero entregado por la cajera} = 20.000 - 15.820 = 4.180$$

En este paso los niños deben sustituir la escritura sincopada de cada dato, o magnitud, por la cantidad que representa o el valor numérico correspondiente. El orden en el que se efectúan las operaciones es inverso al del razonamiento analítico escrito puesto que las últimas proposiciones o igualdades logradas son aquellas en las que se conocen todos los datos. Vale la pena aclarar que dichas operaciones deben ser efectuadas utilizando el algoritmo convencional de cada una puesto que éste es también un objeto de aprendizaje que es requerido para la resolución de problemas.

- Análisis (esquemático)

Como se mencionó con anterioridad, el análisis puede también representarse a través de un esquema de bloques que debe ser coherente con el discursivo (Ver Gráfico 2), puesto que son dos representaciones del mismo procedimiento.

Así, de manera similar a la escritura del razonamiento analítico en forma discursiva, la construcción del esquema requiere de la consideración de las magnitudes o datos involucrados, escritos en forma sincopada para representar entre ellos las relaciones aritméticas existentes, esta vez, en un diagrama en el que la ubicación espacial de las casillas determina los órdenes de jerarquía entre los datos. Cabe aquí retomar la idea que, desde esta propuesta, las operaciones aritméticas deben representarse de manera binaria, siendo coherentes con las observaciones de tipo neuroevolutivo en las que se apoya la propuesta del profesor Federici (Granés y Caicedo, 2001). También se parte de la pregunta que se sitúa en el nivel superior del esquema.

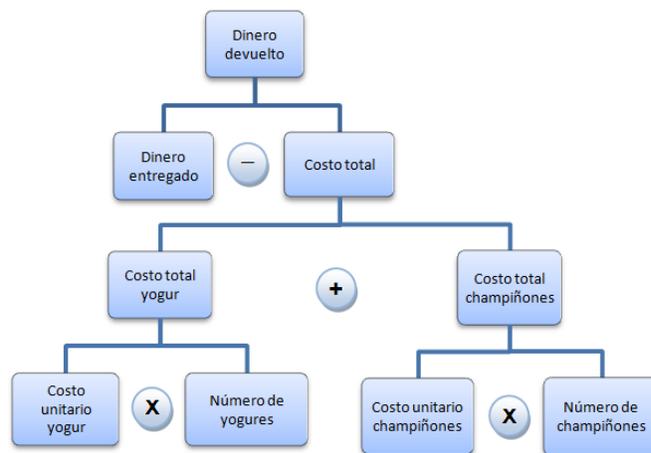


Gráfico 3. Análisis representado en un esquema de bloques

Las incógnitas auxiliares o datos intermedios deben determinarse de la misma manera en que se sugirió en el caso del análisis discursivo, sin embargo, no deben reescribirse y su aparición en el esquema de bloques determina la extensión de éste. En el problema del ejemplo, sin embargo, hay varios tipos de datos implícitos o auxiliares; unos, que surgen de operar datos del enunciado sincopado entre sí, otro que surge de operar un dato del enunciado sincopado con uno auxiliar, y otro, que surge de operar dos datos auxiliares. Éstos pueden denominarse respectivamente, datos auxiliares de primer, segundo y tercer nivel.

La aparición de estos datos, sobre todo de aquellos de mayor nivel, implica una mayor complejidad en la línea deductiva de la resolución del problema y, por ende, puede significar mayor dificultad para el resolutor en caso de que no exista otra alternativa de solución.

- Síntesis (esquemática)

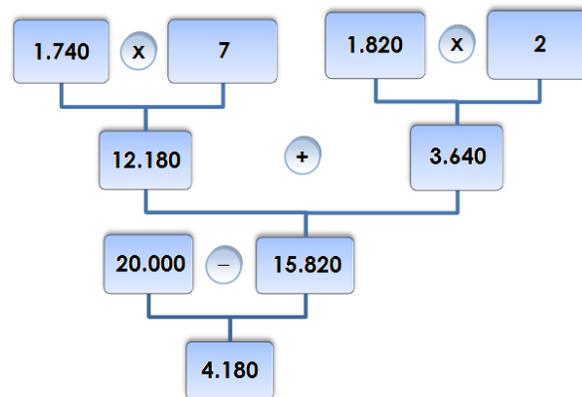


Gráfico 4. Síntesis representada en un esquema de bloques

De manera similar a la escritura de la síntesis discursiva, en el esquema los niños deben sustituir los datos escritos de manera sincopada por el valor numérico que le corresponde a cada uno. Sin embargo, para esta sustitución, el esquema que se utiliza debe ser invertido de manera vertical, puesto que las primeras operaciones a desarrollar son las últimas que se identifican en el análisis. Así, a través de varias deducciones el niño puede llegar a la respuesta a la pregunta inicial. Para concluir el niño debe redactar la respuesta a la pregunta planteada.

Es notorio que esta propuesta no considera las diferencias de tipo semántico entre la estructuras de los diferentes problemas aritméticos planteados a los niños, y en su lugar propone un mismo tratamiento para todos, previendo complejidad en el momento de resolver problemas que involucran más de una operación como el caso del ejemplo. Así, si a partir de las hipótesis planteadas para este estudio se cuestionaba el carácter de estrategia para la resolución de problemas que puede tener el método de análisis -

síntesis, a través de las conceptualizaciones anteriores se podría cuestionar el carácter de heurística de este método puesto que, al parecer, por sí solo no permite organizar un plan de acción para resolver un problema si el estilo de pensamiento analítico o sintético que se solicita no se ha desarrollado.

En el referente investigativo ya ilustrado, (Kalmykova, 1975) en relación con la utilización del método de análisis - síntesis en la resolución de PAEV en Rusia, se puede identificar algunos elementos que sirven para concretar una aproximación conceptual sobre el tema en cuestión, éstos se presentan a continuación.

2.3 MARCO DE INTERPRETACIONES EN LOS ESTUDIOS SOVIÉTICOS SOBRE EL MÉTODO DE ANÁLISIS – SÍNTESIS EN LA ESCUELA

En los estudios soviéticos se estudia la actividad de los estudiantes al resolver problemas aritméticos con el método de análisis - síntesis. Kalmykova (1975) reporta las investigaciones realizadas en diferentes instituciones identificando los matices de las diferentes actuaciones de los niños, en relación con los distintos métodos de instrucción utilizados por los profesores y las diferencias de tipo semántico y estructural de los problemas dispuestos. De esta forma, evalúa el rol que desempeña el análisis y la síntesis en la resolución de PAEV y, en un contexto más amplio, en el desarrollo del pensamiento lógico.

Inicialmente, y a partir de observaciones sistemáticas, Kalmykova (1975) ilustra una clasificación de los tipos o niveles de análisis que presentan los niños en la actividad de resolver problemas aritméticos. Un primer nivel corresponde al momento en que el niño descompone el texto del problema en partes separadas, discriminando la información dada en forma numérica y aquella verbal correspondiente a palabras clave. Este tipo de análisis tiene lugar, en la secuencia didáctica determinada en el Colegio Italiano Leonardo da Vinci, en el momento en que deben escribir el enunciado sincopado. Kalmykova califica a este análisis como *elemental*, o *superficial* en palabras de Puig y Cerdán (1988), y se

indica que la síntesis que le sigue puede llevar a equivocaciones, *síntesis superfluas*, es decir, calcular cantidades poniendo en relación los datos sin que esta actividad esté razonablemente ligada a la determinación de la incógnita del problema. Este hecho pone en evidencia que el resolutor no es capaz de dar cuenta de la estructura semántica del problema (Puig y Cerdán, 1988).

Según Kalmykova, el análisis que permite dar cuenta de la estructura semántica del problema, denominado *complejo*, aparece en la actividad del resolutor “tan pronto como la incógnita, los datos del problema y sus interrelaciones se definen no por palabras aisladas, sino por combinaciones de ellas” (Kalmykova, 1975, P. 7). Esto sugiere la determinación de varias de sentencias abiertas relacionadas entre sí, a través de las cuales se expresen las operaciones por efectuar entre los datos y las relaciones entre los resultados de las mismas.

Kalmykova llama *análisis anticipatorio* a la actividad que el resolutor realiza cuando ve clara e inmediatamente las operaciones que son necesarias para determinar la incógnita, porque el problema tiene una estructura similar a otros que ha resuelto frecuentemente, es decir, utiliza la analogía.

Finalmente, el análisis *especial* se produce cuando el problema es complicado o nuevo para el niño, esto es, si las relaciones entre los datos del enunciado del problema y la incógnita están mediadas por una serie de elementos auxiliares nuevos. Este análisis especial se centra en las características de la incógnita y los datos, y las relaciones funcionales entre ellos; además, hace uso de los principios, leyes naturales en palabras de Riemann, que permiten establecer progresivamente las relaciones operacionales entre los datos y datos intermedios hasta llegar a la incógnita, y que dan cuenta de un dominio suficiente sobre la estructura semántica del problema. “Esta es la actividad analítica que permite síntesis productivas, ya que en el proceso de resolución de problemas hay una interdependencia entre análisis y síntesis” (Puig y Cerdán, 1988).

Una de las actividades principales consistió en analizar la manera en que los estudiantes descomponían analíticamente un problema ya resuelto, puesto que, en la programación curricular en el contexto soviético, el método de análisis - síntesis aparecía como objeto de aprendizaje posterior a la actividad de resolver problemas aritméticos simples, para luego ser usado como método de resolución de problemas complejos. Para indagar hasta qué punto los estudiantes eran capaces de comprender y practicar el análisis después de haber resuelto un problema, y cómo depende esto de la instrucción recibida, Kalmykova realizó observaciones sistemáticas en varias aulas y niveles, pertenecientes a diferentes escuelas, con distintos profesores y métodos de instrucción clasificados en tres grupos que se describen a continuación, y que se retoman de Puig y Cerdán (1988):

(i) El primer grupo corresponde a estudiantes que se familiarizan con el método de análisis en segundo grado. En algunas ocasiones descomponen problemas después de haberlos resuelto, pero sin ningún algoritmo específico. El profesor corrige los errores en las descomposiciones, pero no trabaja sistemáticamente sobre ellos para evitar que vuelvan a presentarse, además, es impreciso en la formulación de las descomposiciones llevándolos rápidamente al resultado final.

En tercero se mira el estilo de la actividad analítica del niño que ha trabajado con este estilo de instrucción y se encuentra que, en ausencia de entrenamiento sistemático especial sobre las descomposiciones de problemas a través del análisis, sólo se retienen unos pocos elementos externos del método que básicamente se limitan a una variación en el lenguaje que utilizan los alumnos, como señal de que están hablando con la terminología que el maestro espera que se expresen (v.g. “Debemos encontrar...” “Esto no puede encontrarse inmediatamente...”), pero ningún alumno es capaz de dar una descomposición completa de un problema particular.

(ii) El segundo grupo consiste en la clase de un profesor que considera muy valioso el método de análisis y que éste tiene una gran influencia en el desarrollo del pensamiento matemático de sus alumnos. Los alumnos tienen contacto con el método desde primero y

en segundo la enseñanza con el método es regular y más o menos sistemática. En tercero y cuarto, cuando Kalmykova realiza sus observaciones, encuentra que los estudiantes utilizan un razonamiento como el siguiente para expresar la descomposición analítica de un PAEV, una vez que ha sido resuelto:

“No se puede responder la pregunta directamente porque no se conocen las incógnitas X_1 y X_2 . No se puede hallar X_1 porque no se conoce X_3 , ni X_2 porque no se conoce X_4 , pero X_3 y X_4 se pueden hallar con los datos D_1, D_2, D_3 y D_4 que están incluidos en el enunciado del problema”.

En este procedimiento se identifican ciertos datos, auxiliares, como necesarios para determinar la incógnita. Estos datos, a su vez, dependen de la determinación de otros hasta que se da por terminado el análisis al llegar a los datos contenidos en el enunciado del problema. Este tipo de descomposición del problema permite a los estudiantes establecer una serie de dependencias entre la incógnita, datos auxiliares y datos del problema. Sin embargo, Kalmykova manifiesta que, en la práctica, los alumnos simplemente recuerdan el curso de la solución de los problemas simples asociados que ya habían resuelto, es decir, problemas de una operación de cuya resolución obtenían las incógnitas auxiliares X_1, X_2, X_3 y X_4 , e invirtiendo el orden de las soluciones de estos problemas y combinando mecánicamente los datos ya obtenidos, son capaces de expresar, con un lenguaje típico del análisis, que la determinación de la incógnita del problema compuesto es imposible sin determinar la incógnita de cada uno de los problemas simples, o sea, sin determinar primero las incógnitas auxiliares.

Según Kalmykova, la presencia de este tipo de análisis se debe al hecho que en segundo y tercero estos estudiantes resuelven muchos problemas que presentan varias preguntas explícitas, problemas cadena, en los que lo obtenido en la primera pregunta del problema se usa para contestar a la siguiente pregunta, y así sucesivamente. Kalmykova asevera que los alumnos se familiarizan con este tipo de análisis y lo utilizan como prototipo debido a que, además de la práctica frecuente de problemas – cadena, existe en la instrucción referida a este grupo de estudiantes una ausencia de esquemas gráficos cuando se realiza el análisis de los problemas, pues, aunque el profesor presente algún gráfico no lo sugiere

como tarea que los alumnos deban realizar, y cuando se realiza el análisis oral la atención no es constante.

(iii) El tercer grupo está a cargo de un profesor con 25 años de experiencia y condecorado con la Orden de Lenin. Los alumnos de su clase sobresalen por su “maravillosa disciplina y capacidad de trabajo”. Al comienzo de segundo pueden identificar once tipos de problemas simples, son capaces de enunciar un problema ejemplo de cualquiera de los 11 tipos y de escribir la expresión aritmética que lo resuelve, e incluso, dado un conjunto de datos son capaces de formular posibles preguntas que pueden plantearse.

El profesor comienza la instrucción en el método de análisis hacia la mitad de segundo. Ilustra las características específicas del método de análisis: descomposición del problema partiendo de la incógnita y búsqueda de datos auxiliares. Contrasta y diferencia el método de análisis del método sintético, que ya es familiar para los alumnos. A través de los problemas simples que ya saben resolver, el profesor presenta a sus alumnos el método de análisis - síntesis como un método de resolución de problemas de mayor complejidad. Una vez que los estudiantes han conocido los elementos principales del método el profesor, apoyándose en situaciones problemáticas atractivas y en el uso de diagramas para representar las relaciones operaciones, lleva a los estudiantes a analizar problemas más difíciles, consiguiendo, en general, un nivel de análisis especial.

Una característica particular de este contexto escolar es el momento en el que se encuentra, en el currículo propuesto, la instrucción relativa al método de análisis - síntesis en la resolución de problemas aritméticos. Mientras que en el Colegio Italiano Leonardo da Vinci se ha optado por trabajar casi contemporáneamente el método de análisis - síntesis con la resolución de problemas, en el contexto del estudio de Kalmykova (1975) se puede identificar que el momento de iniciar la instrucción sobre el método de análisis y de síntesis es cuando los estudiantes ya han resuelto un número considerable de problemas, es decir, el método es un objeto de aprendizaje posterior y adyacente a la enseñanza

sobre la resolución de algunos problemas aritméticos, para luego aplicarlo a otros problemas de mayor complejidad.

Kalmykova (1975, p. 66) organiza todas sus observaciones estableciendo tres niveles de dominio del método de análisis por parte de los alumnos, relacionando cada uno con el tipo de diagrama que construyen para representar la solución en la descomposición analítica como actividad posterior a la resolución del PAEV. Tales niveles son:

1. Aislamiento de algunos elementos superficiales del método de análisis. Los estudiantes reconstruyen la solución del problema teniendo en cuenta únicamente algunos elementos característicos del método de análisis, tales como, frases específicas de la jerga del profesor o la identificación de la pregunta como elemento inicial. Las conexiones entre los datos vienen determinadas de forma mecánica a través de la síntesis, prevalentemente de carácter superfluo, que en general se efectúa entre los valores numéricos. Los estudiantes construyen diagramas en los que los datos son relacionados de manera aleatoria, por tanto, no todos aquellos que se encuentran contenidos en el enunciado del problema aparecen en la descomposición.

2. Dominio del análisis del primer eslabón (la incógnita). En este nivel los estudiantes son capaces de identificar la relación aritmética entre un par de datos auxiliares, a partir de la cual se puede obtener la incógnita. Esta relación, a diferencia de los estudiantes de nivel 1, la establecen directamente entre datos nominados de manera sincopada. No obstante, siguen siendo de carácter sintético las relaciones entre los datos necesarios para determinar los auxiliares, por tanto, la descomposición analítica no es enteramente coherente. Sucede lo mismo en los diagramas elaborados por los estudiantes en este nivel. La incógnita está claramente relacionada con los datos auxiliares que se requieren para determinarla, pero las relaciones operacionales entre los otros datos, a partir de las cuales se pueden hallar aquellos necesarios para la incógnita, aparecen en orden inverso, por tanto, el diagrama no es coherente en sí.

3. Singularización del principio de combinar los eslabones del análisis (la incógnita y los datos necesarios). Este nivel aparece como el más complicado de lograr. En general, los estudiantes con poca familiaridad con el método terminan por utilizar un análisis correcto en algunos problemas sencillos. Aquellos que logran pasar del método sintético al analítico, separan ambos métodos y éstos coexisten independientemente. Los diagramas elaborados por los niños en este nivel son correctos. (Kalmykova, 1975, pp. 66, 67). Únicamente alumnos de la clase descrita en (iii) fueron capaces de alcanzar este tercer nivel en porcentaje significativo (el 75%).

Para investigar la validez del método de análisis en la búsqueda de la solución de un PAEV dado, Kalmykova distingue entre dos tipos de problemas. Un tipo corresponde a los problemas en cuya pregunta hay alguna indicación de los datos necesarios para determinar la incógnita y en los que además éstos se pueden determinar a partir de relaciones familiares para los alumnos. El otro tipo está formado por los problemas en los que no hay indicación directa de los datos necesarios para determinar la incógnita. Tales datos deben determinarse en el curso de la resolución mediante un análisis detenido del texto del problema u otras estrategias. Además, las conexiones funcionales entre los datos son menos familiares.

Los estudios de Kalmykova muestran que el método de análisis es un procedimiento valioso para los problemas del primer tipo. Pero, cuando los alumnos lo utilizan con los problemas del segundo tipo, o con problemas que son nuevos o parcialmente nuevos para ellos, la alternativa que utilizan es buscar los datos que son necesarios por ensayo y error. Incluso los alumnos que son capaces de analizar los problemas ya resueltos con un dominio de este análisis del nivel 3 tienen dificultades en utilizar el método para resolver problemas nuevos. Las dificultades son de los dos tipos: síntesis superfluas y errores en el análisis. Esto es, se indica que es preciso determinar cantidades que no son necesarias para resolver el problema (aunque éstas sean cantidades correctamente determinadas), y se combinan datos de modo aleatorio para determinar cantidades que carecen de sentido o se utilizan datos no adecuados para determinar una cantidad elegida.

La explicación que da Kalmykova de estos hechos es la siguiente:

“El proceso de pensamiento al resolver problemas es analítico-sintético. En él, el análisis está estrechamente entrelazado con la síntesis y es inseparable de ésta. La síntesis se lleva a cabo tan pronto como las bases para ella se aíslan en el proceso de análisis. Así, el problema se simplifica (en la medida en que el número de problemas simples que componen el problema complejo se reduce), y esto simplifica el análisis subsiguiente del problema; el análisis y la síntesis se apoyan mutuamente. El método clásico de análisis asume que el proceso de análisis está aislado del proceso de síntesis. Se supone que el resolutor lleva a cabo el análisis guiado desde el principio por la incógnita, encuentra todos los datos necesarios para determinarla, y únicamente entonces regresa a la síntesis. Tal aislamiento artificial del proceso de análisis del de síntesis no puede ser provechoso”. (Kalmykova, 1975 , pg. 117)

A este respecto, Puig y Cerdán (1988) parafrasean a Kalmykova afirmando que la crítica básica al método clásico es que el análisis de la incógnita, cuando se aísla totalmente de los datos toma un carácter abstracto que no tiene en cuenta ni el contexto concreto del problema, ni las relaciones particulares presentes en el texto. Por tanto, el método clásico de análisis y síntesis encuentra los mismos obstáculos que encontró la conceptualización de Descartes y que mereciera la respuesta de Newton, puesto que no necesariamente es el análisis y únicamente el análisis el que da el plan de resolución válido para el problema. Existe una interacción natural y necesaria entre ambos métodos (o procesos cognitivos) que orientan la solución certera de los problemas.

A pesar de los supuestos ideológicos o metodológicos que sustentan los estudios soviéticos, Kalmykova describe el proceso de resolución de un problema como algo más que el análisis y la síntesis.

“El resolutor, guiado por el análisis de la incógnita y de los datos, planea el método de resolver el problema en su cabeza y comienza a llevarlo a cabo. Si falla, analiza los errores, clarifica por qué el método elegido no le permite alcanzar la solución, intenta corregirlo, o toma una vía diferente. Algunas veces, por un momento, reconstruye el problema, descarta algunos datos, simplificando la determinación de las relaciones entre los datos y la incógnita. El trabajo creativo del pensamiento se da en estas construcciones y en la elección de las posibles vías de solución”. (Kalmykova, 1975, pgs. 118-119)

Así, cuando se utiliza el método de análisis clásico, como no hay estudio de alternativas, no hay pensamiento creativo, ni pensamiento crítico, ni pensamiento divergente, y por lo tanto, no hay potenciación de la habilidad para resolver problemas autónomamente, ni modo de encontrar soluciones a estancamientos en el proceso de resolución, pues, los alumnos se limitan a manipulaciones mecánicas de los datos utilizando la síntesis. Además, la dedicación que requiere el método clásico hace que disminuya considerablemente el número de problemas que se pueden abordar, lo cual tiene implicaciones en la concepción que los estudiantes construyan sobre los problemas en Matemáticas y el desarrollo de otros estilos de razonamiento matemático.

A pesar de ello, Kalmykova considera probado por los experimentos y las observaciones que el método de análisis es productivo en los problemas simples cuando el conocimiento de las relaciones funcionales entre los datos necesita refuerzo. En los problemas más complejos es útil volver al análisis parcial y recordar las combinaciones de datos que pueden usarse para determinar la incógnita, y así, desde ahí, se podrá proceder a la búsqueda de la solución por otros métodos. De todo ello Kalmykova concluye que en vez de empeñarse en que los alumnos sean capaces de usar el método de análisis clásico, lo que hay que hacer es centrarse en el análisis del texto del problema y estudiar con los alumnos muchas y distintas técnicas que les permitan simplificar los problemas complejos.

Particularmente, en sus categorizaciones y consideraciones conceptuales Kalmykova (1975) relaciona el tipo de análisis logrado con los tipos de diagrama que los estudiantes son capaces de representar en la tarea de resolver problemas. Este hecho pone de manifiesto la necesidad de contar con un marco de interpretaciones para estudiar y caracterizar las acciones de los estudiantes cuando representan la solución de un problema, desde el momento en que identifican y nominan las magnitudes involucradas en el enunciado del problema hasta el momento en que, partiendo de un esquema gráfico analítico, deben invertirlo para aplicar la síntesis y lograr la solución del problema.

En resumen, los resultados de los estudios soviéticos apuntan hacia la manera en que ambos tipos de pensamiento o métodos interactúan y se pueden complementar para que su uso sea más provechoso en la resolución de problemas aritméticos. Sin embargo, tanto en la propuesta del profesor Federici como en la adaptación escolar del método de análisis – síntesis en el contexto de los estudios soviéticos, se resalta la utilización de diagramas y de representaciones en lenguaje verbal de las entidades que aparecen en los problemas.

Si bien no es el objetivo de este estudio categorizar las operaciones mentales de los estudiantes cuando modelan la solución de un PAEV, haciendo uso de representaciones en distintos registros, la identificación de un referente conceptual permite leer, y escribir, el análisis de la actividad de los estudiantes con elementos complementarios. Vale aclarar, sin embargo, que no se pretende ser exhaustivo en dicho análisis, en lo que concierne al referente conceptual sobre las representaciones.

La alternativa de interpretación que se propone, aunque no se utilice significativamente, en este estudio, es la Teoría de las Representaciones Semióticas de Duval (1999) aporta varios elementos pertinentes a este respecto. Desde sus planteamientos es posible interpretar algunas de las actuaciones de los estudiantes; pero, principalmente, permite formular nuevos interrogantes sobre las producciones escritas de los estudiantes, en tanto contienen un alto número de representaciones puestas en relación para dar sentido a un estilo de razonamiento que pretenden presentar cuando resuelven un PAEV. Estos nuevos interrogantes, además, pueden servir para complementar la reflexión que se pretende suscitar en torno al objetivo principal de este estudio.

A continuación, se ilustran los elementos principales de la Teoría de Representaciones Semióticas de Duval, que pueden servir como insumo en la interpretación y análisis de los resultados del estudio, en particular, en el análisis de las producciones escritas de los estudiantes. La síntesis que se presenta es una reelaboración de la que se encuentra en Barrios y Guerra (2006) sobre la misma temática.

2.4 ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

Duval (1999) Rivière y Hiebert (1986, citados en Castro y Castro, 1997 y Carpenter (1992, citados en Castro y Castro, 1997) diferencian las representaciones de un concepto que están presentes en los procesos de pensar y razonar, llamadas representaciones internas, de las que intervienen en el proceso de comunicar ideas en torno a dicho concepto, llamadas representaciones externas. Estas últimas, son estímulos que facilitan la construcción de imágenes mentales, representaciones internas, de un objeto matemático las cuales, a su vez, son necesarias para la constitución de nuevas representaciones externas de los mismos objetos. Para concretar esta distinción Duval aclara que, desde un punto de vista genético, las representaciones mentales y las representaciones externas no pueden verse como dos dominios diferentes, pues el desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones externas, y en el otro sentido, las estrategias o caminos que un sujeto utilice para representar externamente un concepto, o, en este caso, un procedimiento, generalmente sirven para mostrar cómo es la información que posee sobre él. Así, las representaciones externas juegan una doble función: actúan como estímulos para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales y permiten la expresión de conceptos e ideas de los sujetos que las utilizan.

Para Castro y Castro (1997) las representaciones externas son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que “se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes”. Tales notaciones simbólicas se componen, por lo general, en signos alfanuméricos estructurados; mientras que las gráficas, en combinaciones de figuras o íconos también estructuradas. En Rico (1995) se encuentra también la distinción de estas dos familias de representaciones externas. En las simbólicas la sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimientos y se distinguen las representaciones digitales, discretas, de carácter alfanumérico, además de aquellas que se pueden simular mediante programas

informáticos. En las gráficas la sintaxis viene descrita principalmente por reglas de composición y convenios de interpretación; hacen parte de ella las representaciones analógicas, continuas, de tipo gráfico o figurativo.

Dominar un concepto (o procedimiento) matemático es, por tanto, equivalente a conocer sus principales representaciones, el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema; también consiste en convertir o en traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con sus propiedades (Castro y Castro, 1997). La comprensión de los conceptos matemáticos está, por tanto, supeditada a la facultad de emplear más de un registro de representación semiótica, inicialmente, al representarlos en algún registro, al tratar tales representaciones al interior de un mismo registro y, finalmente, al traducirlas de un determinado registro en otro diferente al registro inicial (D' Amore, 2004).

Duval (1999) especifica un poco más las actividades cognitivas que están involucradas en el proceso de representar y que son fundamentales a la hora de hablar sobre comprensión en torno a este proceso, a saber: formación, tratamiento y conversión. La primera, formación de representaciones, se refiere a la expresión de las representaciones mentales, a la forma de exteriorizar el conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que le está asociado. Por su parte, las otras dos actividades están ligadas con la manipulación y transformación que se puede hacer de una representación teniendo como referencia uno o más sistemas semióticos: la actividad tipo tratamiento se da cuando la transformación de representaciones tiene lugar en el mismo registro donde fueron creadas, en otras palabras, las representaciones se mueven dentro de un mismo registro; y la conversión, por el contrario, se presenta una vez que la transformación produce una representación en un registro diferente al de la representación inicial.

En conclusión, no basta identificar el conjunto de sistemas de representación asociados al estudio de un objeto matemático en particular, o identificar el objeto matemático a través

de varias de sus representaciones; el énfasis también debe hacerse en el estudio, primero, de los elementos constitutivos de cada sistema, llamados unidades significantes por Duval, para luego establecer las implicaciones que tienen éstos en la representación hecha del objeto matemático. Las características particulares de tales unidades serán influyentes en las características perceptibles del objeto representado y, por tanto, en la comprensión que se logre del mismo. Además, de esta forma, las actividades de transformación de representaciones pueden ser vistas en términos de la correspondencia que pueda establecerse entre los elementos de cada sistema y, consecuentemente, en términos de los cambios que originan estas transformaciones en las características perceptibles del objeto matemático y de los fenómenos que, en uno u otro caso, puedan asociarse a él con mayor fidelidad (D'Amore, 2004).

En relación con el tema que atañe al interés de este estudio, la resolución de problemas en Matemáticas está determinada por dos grandes etapas: una de comprensión o representación y una de resolución o ejecución. En la etapa de comprensión o representación, se incluyen las actividades de lectura, relectura, análisis y modelación del problema de enunciado verbal. Esto implica, tanto una habilidad para traducir al lenguaje matemático las operaciones y relaciones entre magnitudes que intervienen en el problema, incluidas en el texto, como ciertas destrezas de tipo lingüístico que tendrían que ser transferidas a un contexto más limitado y específico de información narrativa (Domínguez, 1997). Es en esta etapa en la que se genera un plan de acción luego de haber comprendido la información presentada y la requerida, estudiando, por ejemplo, la pertinencia de esquemas o diagramas que en muchas circunstancias ayudan a la comprensión matemática. En particular, estos modelos para representar la información del problema han sido utilizados como estrategias para ayudar a niños con dificultades de aprendizaje o bajo rendimiento escolar; como lo reportan algunos estudios (Nesher, 1999; Jitendra, Hoff y Beck, 2002; Aguilar, Navarro y Alcalde, 2003; Casajús, 2005) en los que se concluyó que las relaciones operacionales fueron más visibles para los niños, cuando

desde la instrucción se había incluido el estudio de dichos diagramas y esquemas para ciertas categorías semánticas de PAEV con una sola operación.

Jitendra, Hoff y Beck (2002) presentan un estudio en el que analizan algunos esquemas asociados los problemas aditivos correspondientes a categorías semánticas específicas. Este estudio se formuló con el objetivo de afrontar las dificultades que presentan algunos estudiantes en la resolución de problemas aditivos de enunciado verbal, puesto que, para los autores, la utilización de los esquemas visuales en el proceso de instrucción asociado a la resolución de problemas, ayuda en gran medida a los procesos de comprensión matemática de los estudiantes. A través de entrevistas y pruebas pre y post, los investigadores encuentran que estudiantes con dificultades particulares mejoran su desempeño frente a la resolución de problemas de enunciado verbal al utilizar los esquemas o diagramas visuales.

Así mismo, Aguilar, Navarro y Alcalde (2003) desarrollan un estudio en el que analizan el uso de esquemas figurativos en el proceso de resolución de PAEV. Los investigadores sostienen que los estudiantes, sobre todo en los primeros años escolares, tienen dificultades en la resolución de problemas que se pueden enfrentar con la utilización de diagramas o esquemas. La premisa fundamental del trabajo consiste en considerar que una representación adecuada del problema no sólo implica entender el significado matemático de las palabras sino comprender la estructura del problema. Por lo tanto, los procedimientos instruccionales basados en esquemas y representaciones gráficas, son estrategias que ayudan a la comprensión matemática de la estructura y del tipo del problema.

El marco conceptual de Duval sobre las representaciones puede aplicarse en varios niveles en el desarrollo de este estudio. Por una parte, cuando los niños identifican un dato en el enunciado y lo nominan están usando un lenguaje sincopado para representar la medida de una magnitud. Cuando utilizan un diagrama o escriben una igualdad usando los nombres dados a las magnitudes identificadas y los signos y símbolos propios de las

relaciones y operaciones aritméticas, están utilizando un lenguaje sincopado organizado con base en reglas gráficas o algebraicas (respectivamente) para representar una operación que se debe efectuar. Sin embargo, cuando representan el conjunto de operaciones necesarias para resolver el problema en el plano del análisis, utilizando el lenguaje sincopado en un contexto gráfico esquemático o discursivo, no están representando un objeto matemático asociado a un concepto u operación, sino un plan, un proceso, un procedimiento. El objeto que representan es la solución del problema, el lenguaje es principalmente sincopado asociado al contexto gráfico y algebraico y el tipo de razonamiento que les permite hacerlo, es el análisis, con todas las implicaciones y características identificadas en el apartado anterior. Valdría la pena analizar entonces la manera en que estas representaciones son formuladas y relacionadas con el problema durante su resolución, para poder identificar las unidades significantes que permiten a los estudiantes comprender un proceso de resolución de una PAEV a través de un esquema.

En los estudios de Kalmykova se vio que las representaciones sobre los procedimientos analíticos de resolución del PAEV nos siempre son adecuadas. Cuando el problema es familiar para el estudiante, la vía analítica es pertinente y los estudiantes alcanzan muy buenos resultados, bien sea en el estudio de problemas ya resueltos o en la resolución de problemas nuevos. Pero cuando el problema no es familiar y, en el sentido de Riemann, no se conocen las leyes naturales que gobiernan el sistema o contexto del problema, la vía analítica no es la mejor opción para los estudiantes, por tanto, las representaciones que logren construir con este procedimiento no serán coherentes.

En particular, las dos maneras de representar el razonamiento, sea a través de la escritura de palabras que interactúan como entidades matemáticas sincopadas al interior de las ecuaciones, o a través de un arreglo gráfico con forma de mapa conceptual, presentan a su vez dificultades específicas, como la ubicación espacial adecuada de datos emergentes, la recursión a datos escritos con anterioridad, la interpretación adecuada del orden de jerarquía entre las operaciones o la nominación pertinente de las magnitudes involucradas, entre otras. Además, dado que se trata de dos representaciones de un

mismo proceso o estilo de razonamiento, es necesario mostrar las congruencias entre ellas para que el paso de una a otra sea coherente e, inclusive, un facilitador del proceso. El tratamiento adecuado desde la enseñanza de estos objetos de aprendizaje puede permitir a los niños otras estrategias con las cuales afrontar un los PAEV.

En el capítulo siguiente se reporta la información recolectada con el ánimo de caracterizar el currículo logrado a través del estudio de la actividad de los estudiantes en el contexto de la resolución de PAEV. Los elementos ilustrados sobre el método de análisis - síntesis, serán los principales puntos de referencia conceptual para el análisis de la información, mientras que de la teoría de las representaciones semióticas se retomará el vocabulario que aporta para la identificación de elementos de la actividad de los estudiantes, sobre todo en lo relacionado con las unidades significantes y la operación cognitiva de formación de la representación del razonamiento en la resolución del PAEV. Las operaciones de conversión y tratamiento no serán de interés de este estudio puesto que desde el currículo propuesto no se hace énfasis en actividades en las que los estudiantes deban establecer la congruencia entre la representación discursiva y la gráfica, del proceso de resolución; no obstante, es importante traerlas a colación puesto que, desde el marco de la teoría de representaciones semióticas estas operaciones cognitivas implican un desarrollo que puede leerse como el aprendizaje matemático sobre el objeto o procedimiento representado. Esta primera aproximación desde la teoría de Duval busca establecer cuáles son los elementos base que sustentan la utilización significativa de las representaciones discursiva o esquemática.

Posteriormente, en otros estudios o propuestas curriculares, podrían tenerse en cuenta las actividades cognitivas de conversión y tratamiento, para dar lugar a nuevo análisis e interpretaciones sobre el proceso de resolución de PAEV con el método de análisis – síntesis, con miras a complementar y fortalecer la comprensión matemática de los estudiantes con base en actividades de clase que las tomen en consideración.

3 DESCRIPCIÓN Y APLICACIÓN DE LOS INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Además de las observaciones no participantes que se retoman en los antecedentes de este estudio para concretar un diagnóstico sobre la actividad de los estudiantes al resolver problemas aritméticos con el método de análisis – síntesis, se tuvieron en cuenta algunas evaluaciones escritas y trabajos de clase particulares que fueron facilitados por los profesores encargados de los grupos. En ellos se pudo verificar la presencia de errores que se corresponden con las dificultades manifestadas en las reuniones de área (Ver tabla 3) así como la utilización de representaciones gráficas alternativas que, al parecer, apoyaban la actividad resolutoria de los estudiantes con la aplicación del análisis y la síntesis. También fue posible identificar los contextos más frecuentes en los enunciados de los problemas que resuelven y la terminología convenida con el ánimo de nominar los datos de cada uno.

En este capítulo se describen las pruebas y entrevista aplicadas en el desarrollo de este estudio, así como la actividad de los estudiantes frente a las mismas. A partir de ello, se pretende caracterizar el currículo logrado en relación con la utilización del método de análisis – síntesis en la resolución de PAEV.

3.1 PRUEBA NÚMERO 1

3.1.1 DESCRIPCIÓN DEL GRUPO DE ESTUDIANTES

El grupo de estudiantes que resolvieron la *Prueba número 1* está conformado por 100 niños entre los 9 y 11 años de edad de la *classe quinta* del Colegio Italiano Leonardo da Vinci, pertenecientes a cuatro grupos, cada dos, a cargo de una misma profesora. En estos grupos se presentó un estilo de trabajo sobre la resolución de problemas coherente con la

propuesta del profesor Federici en términos del tipo de análisis sobre las magnitudes y la escritura del razonamiento, discursivo o esquemático.

El método de análisis - síntesis fue introducido en *classe quarta* cuando los estudiantes ya habían resuelto problemas de una operación con adición, sustracción, multiplicación y división. Sin embargo, en dos de los grupos la profesora pone de manifiesto, en los problemas complejos o de contexto nuevo para los estudiantes, la utilización de una estrategia alternativa para facilitar a los estudiantes la redacción del razonamiento, discursivo o esquemático, denominada *cadena*. Ésta consiste en la configuración esquemática de las relaciones operacionales inmersas en el enunciado del problema partiendo de los datos. En otras palabras, la profesora en estos dos grupos utiliza la síntesis con el objetivo de facilitar la configuración del razonamiento analítico, sea discursivo o esquemático, puesto que de esta manera los estudiantes tendrán menos dificultades a la hora de identificar las incógnitas auxiliares en los problemas nuevos.

En todos los grupos, los problemas de varias operaciones abordados tienen que ver, en su mayoría, con contextos comerciales en los que la magnitud utilizada con mayor frecuencia es el dinero. En general, el rendimiento académico es bueno, sin embargo, persiste en un 25% de los estudiantes, dificultades como la escritura del razonamiento analítico en forma discursiva o esquemática con dos o más operaciones, y la identificación de los datos intermedios o preguntas auxiliares.

3.1.2 DESCRIPCIÓN DE LA PRUEBA NÚMERO 1

La *prueba número 1* solicitaba lo siguiente: Dados 3 esquemas vacíos (ver gráfico 3), inventar, para cada uno, el texto de un problema cuya resolución sea modelable en el esquema correspondiente y registrar en el mismo los datos con los signos de las respectivas relaciones operacionales necesarias para la solución. Se aclaró que el orden en que deberían desarrollarse dichas tareas era libre, es decir, podían registrar primero la información en el esquema o redactar primero el enunciado del problema.

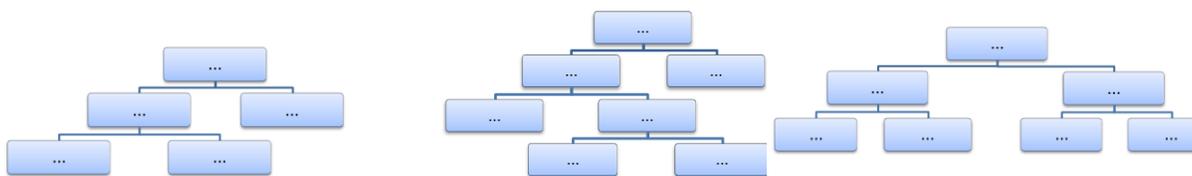


Gráfico 3. Esquemas propuestos en la Prueba 1

Esta prueba se propone con base en los resultados del estudio de Kalmykova (1975), quien sugiere la construcción de enunciados de problemas partiendo de arreglos espaciales de los datos para el razonamiento analítico. A su juicio, el esquema se constituye en un instrumento que permite visualizar la estructura del problema en la medida en que hace transparentes las relaciones operacionales entre las magnitudes puesto que permite visualizar (i) las etapas necesarias para ir desde la incógnita a los datos, (ii) el número de incógnitas auxiliares, (iii) las conexiones entre datos, incógnitas auxiliares e incógnita del problema, y (iv) las operaciones concretas que es preciso realizar para obtener, a partir de los datos, las incógnitas auxiliares y la incógnita del problema. En palabras de Kalmykova: “el uso del diagrama a priori y la elaboración a posteriori del enunciado verbal facilita esta tarea al ofrecer una imagen gráfica de la estructura del problema”.

En la instrucción, se manifestó a los estudiantes la intención de la prueba como aquella de construir el texto de un problema que pudiera ser resuelto con el esquema. Aquí se pone de manifiesto el hecho, ya identificado, de que los estudiantes conciben al esquema como un medio para resolver un problema matemático. Todos debieron dibujar primero cada esquema para luego inventar el texto solicitado.

Se pretendió con este ejercicio identificar los tipos de problemas que los estudiantes ya relacionan a un determinado esquema de resolución, de esta forma los estudiantes mostrarían los enunciados de problemas que ya saben resolver y así, se tendría información sobre el uso del diagrama del método como manera de representar la descomposición analítica de un problema ya resuelto. Tanto el esquema de la izquierda como el de la derecha eran familiares para los estudiantes puesto que, usualmente, habían resuelto problemas de dos etapas con 2 ó 3 operaciones. El esquema del medio, por tener 3 etapas, era menos familiar para los estudiantes.

3.1.3 DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD GENERAL DE LOS ESTUDIANTES

En general, entre el 90 y 95%, los estudiantes utilizaron contextos de compra y venta en la escritura de los enunciados. La pregunta más recurrente tenía que ver con la determinación de un gasto total o con una cantidad de dinero sobrante luego de alguna compra. Esta característica de los enunciados propuestos por los estudiantes permite identificar una regularidad en los problemas-tipo propuestos en la instrucción, de hecho, desde el currículo propuesto se observa que hay cierta prelación por el trabajo con problemas en los que está involucrada la magnitud dinero. El lenguaje utilizado fue pertinente en la mayoría de casos.

Se observó que no todos los estudiantes desarrollaron las tareas en el mismo orden, puesto que para algunos (36%) fue más fácil registrar primero datos, aparentemente relacionados, en el esquema, para luego construir el texto requerido, mientras que otros (64%) comenzaron con la redacción del enunciado.

De los estudiantes que comenzaron escribiendo los datos en el problema, sólo el 25% utilizó la vía analítica, es decir, partieron de la casilla superior del esquema, casilla de la pregunta, escribiendo en ella el dato que sería la incógnita del problema y de allí, descendiendo sobre el esquema, registraron los datos auxiliares que necesitarían para completarlo. El resto decidió hacer el proceso inverso, registrando primero la información en las casillas inferiores, correspondientes a los datos contenidos en el enunciado del problema, y ascender en el esquema registrando las magnitudes que emergían de las operaciones, es decir, utilizaron la vía sintética. Estos últimos tuvieron menos éxito en el desarrollo de la tarea en tanto no siempre la ruta de los datos a la incógnita los llevó a una operación coherente, en términos de las relaciones entre las magnitudes seleccionadas por ellos.

De los estudiantes que decidieron comenzar con el texto, el 87,5% escribió el enunciado en el mismo orden en que convencionalmente se presentan los PAEV a los estudiantes, partiendo del texto que contiene los datos a la formulación de la pregunta, es decir,

utilizaron una vía sintética. Sin embargo, un número considerable de ellos tuvo que reestructurar algunos elementos del texto en el momento de registrar la información en el esquema, mientras que otros registraron la información aunque no tuviera coherencia o hubiese errores en las relaciones aritméticas entre las magnitudes. Inclusive, hubo algunos que construyeron el enunciado pero no registraron los datos en el esquema. El otro 13,5% de los estudiantes, que comenzaron con el texto, optó por registrar primero la pregunta del problema y luego adjuntarle, poco a poco, fragmentos del texto orientándose por el arreglo gráfico del esquema, esto es, utilizaron la vía analítica para la construcción del enunciado.

En la tabla siguiente se registra la cantidad de estudiantes que optaron por una u otra estrategia, del esquema al enunciado o del enunciado al esquema, y si el estilo de trabajo fue analítico o sintético.

	Esquema-enunciado	Enunciado-esquema	Total
Análisis	9	8	17
Síntesis	27	56	83
Total	36	64	

Tabla 5. Clasificación del trabajo de los estudiantes

La tabla siguiente ilustra el porcentaje de éxito en relación con la estrategia seleccionada y el tipo de razonamiento identificado.

	Esquema-enunciado	Enunciado-esquema
Análisis	100%	100%
Síntesis	78%	57%

Tabla 6. Porcentaje (aproximado) de éxito en la prueba 1

Es notorio que la estrategia que dio mejores resultados, en relación con el número de estudiantes que la seleccionó, fue comenzar con el esquema. El paso del arreglo gráfico al enunciado del problema era casi inmediato, salvo en el caso en el que se partió de los

datos (vía sintética) en tanto no siempre les fue posible completar el esquema de manera coherente.

Más de un 85% de los estudiantes, identificó de manera acertada la jerarquía entre diferentes magnitudes, lo cual es fundamental en el momento de establecer operaciones binarias que den como resultado una magnitud de orden mayor; sin embargo, un 40% de éstos sólo involucró relaciones aditivas proponiendo enunciados de poca complejidad.

Un error bastante frecuente, en los dos primeros esquemas, tuvo que ver con la inversión de los términos de la sustracción, puesto que, en problemas en donde se preguntaba una cantidad sobrante, diferencia, los estudiantes registraron a la derecha la cantidad mayor y a la izquierda aquella que se debía sustraer. Este hecho puede deberse a que, con frecuencia, en los problemas propuestos la cantidad total o mayor está dada en el enunciado y lo que se halla a partir de otros datos es aquella que se debe sustraer.

Se observó que en general los estudiantes no tuvieron dificultad al hacer evidentes los datos intermedios o emergentes de los problemas que inventaron. También fue interesante que ningún estudiante incluyera en el enunciado del problema información sobrante o datos impertinentes, adicionales a los requeridos para la situación. Pocos estudiantes lograron completar el esquema 2.

3.1.4 ANÁLISIS PARCIAL DE LOS RESULTADOS PARA LA PRUEBA 1

Es notorio que la mayoría de estudiantes (83%) haya presentado un estilo de razonamiento sintético para la resolución de la prueba y que, entre el 35 y el 45% de ellos no hayan tenido éxito en el desarrollo de la prueba. Sin embargo, todos los que optaron por un razonamiento analítico (17%) tuvieron éxito.

Los PAEV pueden considerarse en su mayoría sistemas transparentes, parafraseando a Riemann (Ritchey, 1996), puesto que en general se proponen en contextos conocidos por los estudiantes permitiéndoles conocer tanto la situación global que los encapsula como las relaciones particulares entre las magnitudes del problema. Así, es pertinente el uso de

uno u otro método y el orden en que se complementen puede ser arbitrario. No obstante, en la adaptación escolar del método de análisis - síntesis en el Colegio Italiano se encuentra cierta preferencia por el método analítico, en tanto, teóricamente, provee la ruta de solución del problema. Por su parte, los resultados muestran que los estudiantes aún no han interiorizado al método de análisis como el método primario para afrontar la solución de un problema y, por el contrario, prefieren volver a las relaciones aritméticas binarias entre las magnitudes para encadenarlas, sintéticamente, hasta lograr el plan de resolución que en este caso les sirvió para identificar la estructura de un problema.

La prueba 1, sin embargo, pedía a los estudiantes el proceso inverso a lo que naturalmente hacen. Al solicitar que inventaran el enunciado de un problema para el cual el esquema funcionara, con las operaciones que ellos decidieran involucrar, se esperaba que dicho esquema les permitiera reflexionar de manera global sobre el problema para luego ir a lo particular de las operaciones específicas entre los datos. Si bien ambos estilos de razonamientos eran permitidos y pertinentes, al parecer el razonamiento analítico es aquel que permite mejor desempeño frente a la actividad, en tanto permite partir del conocimiento global de una situación, o contexto del problema, para construir las relaciones específicas entre magnitudes particulares.

Mientras tanto, quienes optaron por la vía sintética y, más aún, los que decidieron comenzar por el texto encontraron dificultad en varios aspectos y, en particular, cuando ya habían completado el texto y comenzaban a registrarlos datos en el esquema, encontraban datos entre los cuales las relaciones aritméticas establecidas eran impertinentes o simplemente no las habían considerado en el texto, por tanto, se vieron obligados a hacer modificaciones en el enunciado construido, volviendo nuevamente del esquema a texto.

El número de errores en la representación en el esquema de los términos de la sustracción pone en evidencia algo que había sido ya mencionado: el esquema no ayuda a la comprensión sobre el sentido y significado de las operaciones involucradas, al contrario,

saber identificar las operaciones entre las medidas de las magnitudes y la naturaleza de las magnitudes resultantes, es un prerrequisito para utilizar de manera correcta el esquema. El esquema, como medio de traducción del procedimiento de resolución, y no del enunciado, de un PAEV resulta adecuado entonces cuando los estudiantes tienen un dominio suficiente sobre el contexto del problema, lo cual implica reconocer las leyes naturales que rigen este sistema (retomando nuevamente a Riemann, en Ritchey (1996)), y saberlas aplicar en la expresión y representación de las ecuaciones que enuncian las relaciones operacionales entre las magnitudes para lo cual, además, es necesario reconocer de manera precisa y pertinente las unidades significantes del procedimiento (parafraseando a Duval, 1999). El paso del esquema al texto es mucho más sencillo, como se vio, que del texto al esquema, puesto que en el segundo caso se podía partir de un texto absolutamente coherente a un esquema inadecuado o incompleto.

3.2 PRUEBA NÚMERO 2

3.2.1 DESCRIPCIÓN DEL GRUPO DE ESTUDIANTES

El grupo de estudiantes al cual se le aplicó la prueba número 2 consistió en 40 estudiantes seleccionados de los cuatro cursos, teniendo en cuenta los siguientes criterios: (i) desempeño exitoso en la prueba número 1, (ii) complejidad del (los) problema (s) inventado (s) en la prueba 1, con base en el número de operaciones distintas utilizadas, (iii) buen rendimiento académico en matemáticas, evaluado por la profesora de cada grupo en relación con la resolución de PAEV, y (iv) habilidades sobresalientes de expresión verbal, identificadas por la profesora de cada grupo. Además, se procuró que fueran estudiantes que en la prueba 1 hubiesen presentado diferentes estrategias de trabajo entre sí.

Esta decisión metodológica se justifica en la intención de describir las adquisiciones de los estudiantes en relación con la aplicación exitosa del método de análisis – síntesis en la resolución de PAEV, para identificar las relaciones entre el currículo propuesto y el

currículo logrado en el mejor de los casos. Bien se podría prestar atención sólo a los errores que cometen los estudiantes para desarrollar un estudio sobre las dificultades que enfrentan con el uso del método en la resolución de PAEV, pero esto no daría mayores indicios acerca de la forma en que efectivamente los estudiantes están comprendiendo tanto el método como su utilización en el contexto de los PAEV.

3.2.2 DESCRIPCIÓN DE LA PRUEBA NÚMERO 2

La prueba 2 consistía en resolver el problema que se retoma a continuación.

Por motivo del cumpleaños de Catalina, 5 de sus amigas decidieron hacerle un regalo común. Cada una tiene \$20.000 a disposición. Luego de haber visitado algunos almacenes decidieron comprarle 8 bolígrafos de colores de \$7.850 cada uno y un diario de \$18.700. Si dividen el costo total de la compra en partes iguales ¿cuánto recibe de vueltas cada una?

Este problema admite para su resolución los siguientes esquemas en los que se representa el razonamiento analítico.

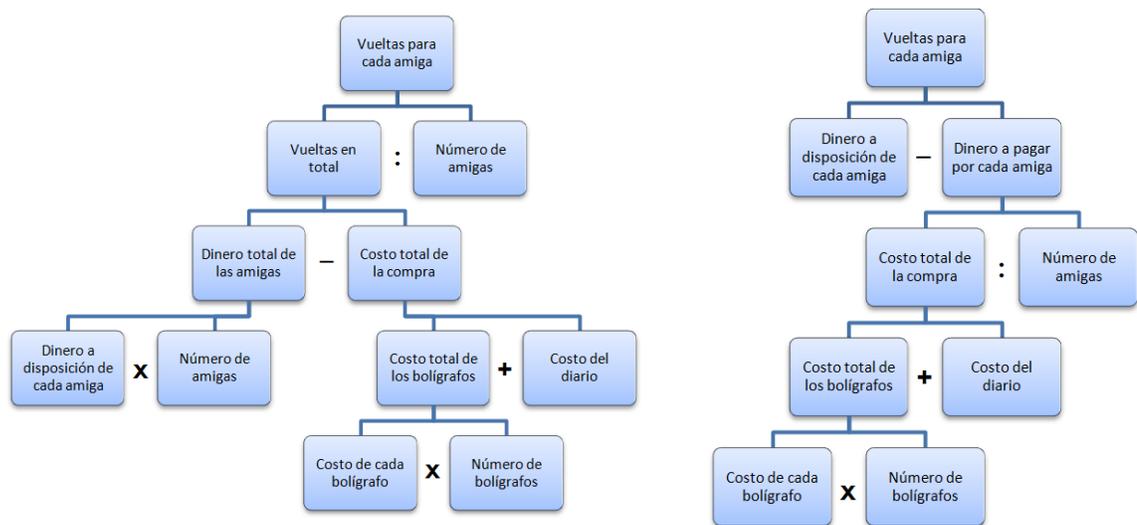


Gráfico 4. Esquemas de representación de dos soluciones posibles al problema de la prueba 2

El enunciado pertenece al contexto en el que se usualmente se propone la resolución de problemas a los estudiantes de la población seleccionada, sin embargo, la pregunta

contiene dos términos clave, a saber: *vuelatas*, constantemente asociado al resto o diferencia de una sustracción; y *cada una* asociado al contexto multiplicativo, frecuentemente utilizado en preguntas de problemas en los que los estudiantes aplican la división. El número de operaciones y etapas requeridas es mayor al que frecuentemente utilizan, por tanto, se considera que este problema tiene un nivel mayor de complejidad al de los problemas tratados convencionalmente.

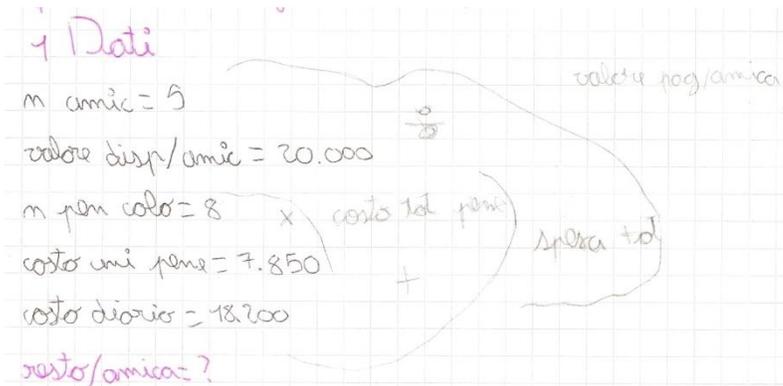
La resolución del problema representada en el esquema de la izquierda (ver gráfico 4) muestra dos particularidades: la utilización de una misma magnitud, número de amigas, dos veces en el proceso y la intervención de un dato implícito que surge de la relación operacional entre otros dos datos implícitos, es decir, un dato auxiliar de tercer nivel (*vuelatas en total*). La resolución del problema que se representa en el esquema de la derecha, además de tener una operación menos, no presenta un dato implícito de tercer nivel, sin embargo, supone la utilización de un dato en una sustracción, cuya escritura en forma sincopada, *dinero a pagar por cada amiga*, sugiere en cambio la utilización de una multiplicación o división.

Con esta prueba se pretendía observar si los estudiantes con buenos resultados en la actividad de formulación de un problema familiar con base en un esquema de solución, eran capaces de representar un razonamiento adecuado para un problema nuevo. De esta forma se podría identificar la situación del método de análisis - síntesis en el contexto de resolución de problemas y determinar si los resultados de Kalmykova a este respecto tienen o no sentido en el contexto de este estudio. En la instrucción se sugirió a los estudiantes que decidieran cuál representación utilizar para el razonamiento analítico y se solicitó que escribieran todas las operaciones y diagramas adicionales que requirieran para resolver el problema.

3.2.3 DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD GENERAL DE LOS ESTUDIANTES

A través de indagaciones personalizadas se pudo identificar que los estudiantes desarrollan diferentes tipos de lectura mientras se familiarizan con el contexto del problema. Inicialmente leen de manera global el enunciado y luego hacen una lectura segmentada del enunciado teniendo en cuenta puntos, comas o datos numéricos encontrados en el barrido visual. De esta manera identifican la información relevante en el enunciado del problema. No se identificaron estrategias alternativas, como dibujos o diagramas, para ayudar a la comprensión del contexto del problema. Se observó que la escritura de los datos o traducción del enunciado a la forma sincopada no reviste mayor dificultad para los estudiantes.

En la resolución se observó que los estudiantes utilizan prevalentemente la síntesis desde el inicio. Esto es, en vez de representar el razonamiento analítico partiendo de la pregunta, 30 de ellos pusieron en evidencia la utilización de relaciones entre parejas de datos, inclusive, en la misma escritura del enunciado sincopado, como se muestra en la imagen siguiente.



Los estudiantes reconocen esta acción como una estrategia que les permite, en general, organizar el trabajo de la resolución y, en particular, identificar los datos implícitos necesarios para completar el análisis. De otro lado, los niños que intentaron el análisis directo, es decir, aquellos que comenzaron a escribir la representación esquemática o discursiva del razonamiento analítico partiendo de la pregunta, encontraron dificultad

puesto que al devolverse, o al tratar de identificar los datos antecedentes de cuya relación operacional se obtiene la incógnita, se encontraron con varias posibilidades de las cuales ninguna les funcionó inicialmente. Es decir, en la actividad analítica pudieron identificar diferentes parejas de magnitudes relacionadas operacionalmente con la incógnita del problema, pero impertinentes en la medida en que no eran coherentes con el contexto de la situación. También hubo algunos que partiendo de la incógnita representaron un análisis errado. Sólo hasta que estos estudiantes establecieron relaciones parciales entre los datos, síntesis parciales, pudieron encontrar el camino que les permite representar la solución del problema.

Se observó que en algunos casos los estudiantes representaron el razonamiento analítico de los problemas-tipo que habían resuelto en clase. Para este nivel escolar y en el periodo en el que se desarrolló la prueba, los estudiantes deben resolver problemas que se asocian a situaciones de compra y venta, en particular, problemas en los que se pregunta por *vueltas en total* o *costo unitario*, mientras que este problema requería *vueltas unitarias*. Así, en su mayoría lograron establecer las relaciones entre los datos del problema para obtener las *vueltas en total* o el *costo unitario* evocando el razonamiento de problemas ya conocidos en los que determinaban dichas magnitudes como incógnitas. En otras palabras, usaron la analogía.

En general, los estudiantes que utilizaron la analogía, plantearon en el razonamiento analítico discursivo la solución de un problema en el que se pide determinar las vueltas en total. Sólo cuando hicieron la síntesis lograron identificar el error que estaban cometiendo. A continuación se ilustran varios de los trabajos de los niños sobre los que se suscita una reflexión particular que fue retomada en la entrevista.

Dati:
 n° amiche = 5
 soldi / amica = 20.000 \$
 n° penne per ~~comprate~~ comprarle = 8
 costo / penna = 7.850 \$
 costo per il diario = 18.200 \$
 resto = ?
 Rag.
 resto = $\frac{\text{n° tot soldi delle amiche} - \text{spesa tot.}}{\text{n° tot soldi delle amiche}} = \frac{\text{soldi / amica} \times \text{n° amiche}}{\text{spesa tot.}}$
 $\text{spesa tot.} = \text{costo tot penne} + \text{costo per il diario.}$
 $\text{costo tot penne} = \text{costo / penna} \times \text{n° penne per comprate.}$
 Calcolo
 $\text{costo tot penne} = \begin{array}{r} 7850 \\ \times 8 \\ \hline 62800 \end{array}$

$$\text{Resto} = \text{Dinero total de las amigas} - \text{Gasto total}$$

$$\text{Dinero total de las amigas} = \text{Dinero de c/u} \times \text{No. Amigas}$$

$$\text{Gasto total} = \text{Costo total bolígrafos} + \text{Costo del diario}$$

$$\text{Costo total bolígrafos} = \text{costo c/ bolígrafo} \times \text{No. Bolígrafos}$$

Este estudiante identifica de manera errada la pregunta del problema. En vez preguntarse por el *Resto unitario* identifica al *Resto* como el dato que se debía determinar. Partiendo de esto, organiza el bloque del razonamiento analítico utilizando el modelo que serviría para resolver un problema cuya pregunta correspondiera a la determinación del *Resto* total. Paulatinamente, mientras efectúa las operaciones indicadas en el análisis, asocia a cada resultado el nombre de la magnitud correspondiente.

spesa tot = $\begin{array}{r} 62.800 \\ + 18.200 \\ \hline 81.000 \end{array}$

n° tot soldi delle amiche = $\begin{array}{r} 20.000 \\ \times 5 \\ \hline 100.000 \end{array}$

resto = $\begin{array}{r} 100.000 \\ - 81.000 \\ \hline 19.000 \end{array}$

Resto.
 Ogniuna amica riceve di resto e 3.800 \$

Sin embargo, como se ve en la imagen a la izquierda, el estudiante agrega una operación más, $19.000 \div 5$, a la cual no asocia ningún dato del análisis, como había venido haciendo, aunque el resultado de esta operación lo toma para responder a la pregunta.

El razonamiento analítico – sintético usado por el estudiante es correcto para el problema modelo que se supone asoció al planteado. Sin embargo, luego de aplicarlo y llegar al punto al que se puede llegar con el modelo, agrega una operación más para llegar a la solución acertada del problema. En el siguiente trabajo el estudiante utiliza una estrategia similar.

Razonamiento $\frac{\text{Resto total}}{\text{Gasto total}} / \frac{\text{No niñas}}{\text{No niñas}}$

$\text{Resto de c/u} = \text{Dinero total} - \text{Gasto total}$

$\text{Dinero total} = \text{Dinero/niña} \times \text{No. niñas}$

$\text{Gasto total} = \text{Costo diario} + \text{Costo total bolígrafos}$

$\text{Costo total bolígrafos} = \text{Costo c/bolígrafo} \times \text{No. bolígrafos}$

Aquí se observa cómo el estudiante utiliza el modelo de problemas que ya conoce, que usualmente contienen la relación $\text{Resto} = \text{Dinero total} - \text{Gasto total}$. Aunque la primera igualdad que escribe es errada, en tanto hace referencia al *Resto unitario*, el bloque de información subsiguiente es coherente entre sí. Luego, se ve cómo agrega la igualdad que está encima del bloque, a la derecha de la palabra *Razonamiento* en la que considera datos que no había previsto inicialmente y, aunque en sí, el razonamiento discursivo no es enteramente coherente, contiene las operaciones que deben efectuarse para resolver el problema de manera correcta.

En el trabajo que se presenta a continuación, el estudiante parte de una igualdad errada en la que pone en relación el *Resto unitario* con los valores totales del dinero disponible y el gasto. En este caso se ve cómo en el bloque de síntesis (*Calcolo*) el estudiante agrega la última línea en la que efectúa una división que no había considerado inicialmente en el bloque de análisis. Se ve además cómo agrega en el bloque del razonamiento analítico discursivo una línea correspondiente a la división que efectúa al final de la síntesis.

En consecuencia se obtiene una descomposición analítico – sintética del problema que no es coherente en su totalidad aún conteniendo las operaciones necesarias para la resolución.

Req.

$$\text{resto / bambina} = \text{spesa totale} - \text{soldi total}$$

$$\text{spesa totale} = \text{valore totale penne} + \text{spesa valore diario}$$

$$\text{valore totale penne} = n \text{ penne} \times \text{valore / penna}$$

$$\text{soldi total} = \text{valore banconota / bambina} \times n \text{ bambine}$$

$$\text{soldi total} = \text{soldi total} : n \text{ amiche}$$

Calcolo:

$$\begin{array}{r} 20.000 \\ \times 2 \\ \hline 100.000 \text{ \$} \end{array} \leftarrow \text{valore banconota / bambina} \times n \text{ bambine}$$

$$\begin{array}{r} 7.850 \\ \times 8 \\ \hline 62.800 \end{array} \leftarrow n \text{ penne} \times \text{valore / penna}$$

$$\begin{array}{r} 62.800 \\ + 18.200 \\ \hline 81.000 \text{ \$} \end{array} \leftarrow \text{valore totale penne} + \text{valore diario}$$

$$\begin{array}{r} 100.000 \\ - 81.000 \\ \hline 19.000 \text{ \$} \end{array} \leftarrow \text{soldi total} - \text{spesa totale}$$

$$\begin{array}{r} 19.000 \text{ L5} \\ : 5 \\ \hline 3.800 \end{array} \leftarrow \text{soldi restanti} : n \text{ amiche}$$

En el trabajo que se muestra en la página siguiente, otro estudiante identifica de manera errada la pregunta, pero la asocia a la operación requerida para determinar la incógnita del problema. Luego se ve cómo, de manera similar al caso anterior agrega dos líneas, una en el análisis y una en la síntesis, para llegar a la respuesta deseada. Sin embargo, a diferencia del caso anterior, agrega la primera línea del análisis en relación con la última de la síntesis, por tanto, muestra mayor comprensión de la manera en que funcionan ambos estilos de razonamiento y de la forma en que se combinan para representar la solución del problema.

El razonamiento sobre la solución del problema es el mismo de los dos casos anteriores: Partir de un problema ya conocido y acomodarlo para que permita llegar a la respuesta buscada.

$$\begin{aligned}
 n^{\circ} \text{ amiche} &= 5 \\
 \text{soldi} / \text{bambina} &= 20.000 \$ \\
 n^{\circ} \text{ penne} &= 8 \\
 \text{spesa} / \text{penne} &= 7850 \$ \\
 \text{spesa} \text{ diario} &= 18.200 \$ \\
 \text{resto?} & \\
 \text{Ragionamento:} & \\
 \text{resto} / \text{bambina} &= \text{resto} : 5 \text{ (15) amiche} \\
 \text{resto} &= \text{soldi tot} / \text{bambina} - \text{spesa divisa parti uguali} \\
 \text{soldi tot} / \text{bambina} &= n^{\circ} \text{ amiche} \times \text{soldi} / \text{amica} \\
 \text{spesa tot divisa parti uguali} &= \text{spesa tot} : n^{\circ} \text{ amiche} \\
 \text{spesa tot} &= \text{spesa tot penne} + \text{spesa diario} \\
 \text{spesa tot penne} &= n^{\circ} \text{ penne} \times \text{spesa} / \text{penne} \\
 \text{Calcolo:} & \\
 \text{spesa tot penne} &= 8 \times 7.850 = 62800 \\
 \text{spesa tot} &= 62.800 + 18.200 = 81.000 \\
 \text{spesa tot divisa parti uguali} &= 81.000 : 5 = 16.200 \\
 \text{soldi tot} / \text{bambina} &= 5 \times 20.000 = 100.000 \\
 \text{resto} &= 100.000 - 81.000 = 19.000 \\
 \text{resto} / \text{bambina} &= \frac{19.000}{5} = 3.800
 \end{aligned}$$

En los trabajos referenciados, los estudiantes muestran que, ante un problema nuevo, una estrategia consiste en retomar un modelo de un problema ya resuelto y acomodarlo de alguna manera para que permita llegar a la solución. En algunos casos, se ve cómo los estudiantes intentan reacomodar lo construido en el análisis para que en general, el método analítico – sintético sea coherente, pero otros estudiantes se ven interesados solamente por llegar a la respuesta.

En relación con la representación del razonamiento analítico de tipo esquemático los estudiantes ilustraron las dos posibilidades identificadas en la descripción del problema (Ver gráfico 4). Aquellos que ilustraron un razonamiento como el que se representa en el esquema de la izquierda, manifestaron que el dato auxiliar que les requirió mayor atención o que representó mayor dificultad fue, precisamente, el relativo a las *vuelatas en total* puesto que no surge de una relación directa entre los datos del problema o de una relación entre un dato del problema y uno implícito, es decir, es un dato de tercer nivel. Para identificarlo utilizaron, en su mayoría, las síntesis parciales.

En el proceso, 4 estudiantes obtuvieron al hacer la síntesis valores numéricos impertinentes, por tanto, regresaron al análisis a corregir lo que los había llevado al cálculo errado. Sólo 2 estudiantes tuvieron éxito al utilizar el análisis directo, es decir, en palabras de Kalmykova (1975), lograron un nivel de análisis especial.

3.2.4 ANÁLISIS PARCIAL DE LOS RESULTADOS PARA LA PRUEBA NÚMERO 2

En consonancia con lo postulado por Riemann en relación con la pertinencia del método de análisis - síntesis, que se puede leer en líneas de Kalmykova cuando hace referencia a los problemas de contexto nuevo para los estudiantes, se observó que, aún teniendo muy buenos resultados en la prueba 1, lo que les permitió demostrar su destreza en el uso del método de análisis - síntesis cuando los problemas son de contextos familiares, en el caso de un problema ligeramente diferente los estudiantes recurrieron a las síntesis parciales para identificar los datos intermedios o auxiliares, en detrimento del método analítico propuesto desde la programación curricular.

Se observó que ante esta situación de novedad los estudiantes recurrieron también a la analogía, retomando problemas similares que habían resuelto en los que intervenían las magnitudes *resto* y *gasto total*; sin embargo, la estructura de estos problemas les permitía llegar hasta cierto punto y, en consecuencia, las descomposiciones analíticas de los problemas alcanzaron en general el nivel 2 de dominio del método en la clasificación de Kalmykova.

Estas estrategias utilizadas por los estudiantes no fueron evocadas con el ánimo de comprender mejor el problema, sino para lograr una representación adecuada en el esquema analítico. En consecuencia, lo que se pone en juego prioritariamente es el conocimiento que tengan sobre el método, mientras que la resolución del problema debe ser algo que ellos ya dominen para poderlo representar.

En general, los estudiantes prefirieron una representación discursiva del razonamiento analítico. Si bien la representación esquemática del razonamiento analítico es,

conceptualmente, más transparente y permite identificar mejor la estructura del problema, los estudiantes sienten más confianza con la forma discursiva puesto que les permite fraccionar el razonamiento en tareas específicas (una operación a la vez), mientras que en el esquema éstas se presentan encadenadas, lo cual implica una coherencia total del procedimiento representado. Además, el razonamiento escrito de manera discursiva no les implica un orden estricto en la cadena deductiva y pueden saltar de una operación a otra y luego completar las faltantes.

Así mismo, se percató de la conciencia que tienen los estudiantes sobre la coherencia que debe tener el algoritmo analítico – sintético para representar el proceso de resolución del PAEV. Dados los pasos determinados como necesarios para aplicarlo, los estudiantes se vieron en la necesidad de ir adelante y atrás en el proceso, con el objetivo de cuidar la coherencia total del conjunto de pasos, aunque en ocasiones no lo hayan logrado.

3.3 ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA

3.3.1 DESCRIPCIÓN DEL GRUPO DE ESTUDIANTES

El grupo de estudiantes al cual se le aplicó la entrevista consistió en 8 estudiantes seleccionados de los cuatro cursos, teniendo en cuenta los siguientes criterios: (i) desempeño exitoso en las prueba número 1 y 2, (ii) complejidad del (los) problema (s) inventado (s) en la prueba 1, con base en el número de operaciones distintas utilizadas, (iii) buen rendimiento académico en matemáticas, evaluado por la profesora de cada grupo en relación con la resolución de PAEV, y (iv) habilidades sobresalientes de expresión verbal, identificadas por la profesora de cada grupo. Además, se procuró que fueran estudiantes que, tanto en la prueba 1 como en la 2, hubiesen presentado diferentes estrategias de trabajo entre sí.

Nuevamente, esta decisión metodológica se justifica en la intención de describir las adquisiciones de los estudiantes en relación con la aplicación exitosa del método de análisis – síntesis en la resolución de PAEV, para identificar las relaciones entre el currículo

propuesto y el currículo logrado en el mejor de los casos. Bien se podría prestar atención sólo a los errores que cometen los estudiantes para desarrollar un estudio sobre las dificultades que enfrentan con el uso del método en la resolución de PAEV, pero esto no daría mayores indicios acerca de la forma en que efectivamente los estudiantes están comprendiendo tanto el método como su utilización en el contexto de los PAEV.

3.3.2 DESCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA

Se desarrolló una entrevista semiestructurada con el objetivo de recoger información más específica sobre la actividad de los estudiantes en el desarrollo de las pruebas anteriores y en relación con la resolución de PAEV en general. Se contó con los trabajos escritos sobre las pruebas aplicadas, con ello, se pretendía que los estudiantes reconstruyeran los pasos seguidos para llevarlas a cabo respondiendo preguntas como las siguientes con sus respectivas justificaciones:

1. *¿Cómo abordaste el trabajo que debías desarrollar?*
2. *¿Cuál fue el elemento que te requirió mayor atención durante el trabajo?*
3. *¿Cuándo decidiste que el trabajo estaba completo?*

A estas preguntas se adjuntaron otras, relacionadas con la resolución de PAEV en general; a saber:

4. *Cuando el profesor te sugiere resolver un problema, ¿qué entiendes que debes hacer?*
5. *Cuando resuelves un problema, ¿qué significa partir de la pregunta?*
6. *¿Cuál elemento de la resolución de problemas te requiere mayor atención?*
7. *Cuando te encuentras atascado en la resolución de un problema, ¿a qué estrategia recurre?*

La entrevista se desarrollo de manera individual con un tiempo estimado entre 5 y 10 minutos para cada estudiante. Los estudiantes contaban con su cuaderno de matemáticas, lápiz y papel, además de las pruebas, en caso de que requirieran reportar algo por escrito.

Durante el diálogo, surgieron preguntas como consecuencia de las respuestas que dieron a las 7 preguntas antes referidas. Las respuestas a estas y a las otras preguntas que

emergieron durante las sesiones fueron registradas y se sistematizan en el apartado siguiente.

3.3.3 SISTEMATIZACIÓN DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

Las respuestas a las preguntas 1,2 y 3 se presentan por separado en relación con la prueba a la que hacen referencia. Inicialmente, se muestran las respuestas que dieron los estudiantes con respecto a la prueba 1 asociadas, cada una, al número de estudiantes correspondiente.

<i>Pregunta 1. ¿Cómo abordaste el trabajo que debías desarrollar?</i>
<ul style="list-style-type: none">• Recordé los problemas que habíamos resuelto en clase con esos esquemas (6).• Comencé a redactar los problemas sabiendo a qué pregunta quería llegar y mirando en el esquema cuántas operaciones debía hacer (2).
<i>Pregunta 2. ¿Cuál fue el elemento que te requirió mayor atención durante el trabajo?</i>
<ul style="list-style-type: none">• Hacer que las operaciones me dieran resultados que se pudieran relacionar (7).• Encontrar de dónde sacar los datos que iba relacionando con la incógnita (1).
<i>Pregunta 3. ¿Cuándo decidiste que el trabajo estaba completo?</i>
<ul style="list-style-type: none">• Cuando escribí la pregunta y puse los datos en el esquema y me dio (5).• Cuando resolví los problemas mentalmente (3).

A través de las respuestas de los estudiantes se pudieron constatar varias de las apreciaciones hechas a partir de las evidencias del trabajo escrito. En su mayoría, los estudiantes optaron por la vía sintética recurriendo a problemas ya resueltos para construir el que se requería. Sin embargo, aunque trabajaron con un modelo ya conocido, los estudiantes manifestaron que tenían que ser muy cuidadosos cuando debían expresar las relaciones operacionales pertinentes puesto que tenían que recordar hasta todos los detalles de la información que debía proporcionar el enunciado.

En relación con la validación del trabajo hecho, los estudiantes mostraron que la manera de cerciorarse de que el trabajo estaba completo era recorrer el razonamiento, discursivo o esquemático, partiendo de la pregunta, utilizando la vía analítica, y revisando que los datos contenidos en el enunciado estuvieran todos en el esquema.

A los estudiantes entrevistados, esta prueba les pareció fácil en la medida en que tenían la libertad de escoger las operaciones y el contexto del problema, así como las medidas de las magnitudes. Además, no les solicitaba efectuar todos los pasos que usualmente deben aplicar para analizar los problemas en Matemáticas, sino que les proporcionaba ya una idea de cómo se debía resolver el problema que debían inventar.

Hicieron énfasis en que la prueba también pudo haberse resuelto usando *problemas obvios*, utilizando por ejemplo sólo adiciones y sustracciones, pero los descartaron en la medida en que éstos se podían resolver con una sola operación con varios términos (una adición con varios sumandos) y, entonces el esquema sería innecesario aunque sí adecuado. Este hecho pone en evidencia una concepción de los estudiantes en relación con la razón de ser del esquema y tiene que ver con que, en lo posible, la utilización del esquema resulta más enriquecedora cuando se cuenta con operaciones distintas o cuando el problema no es directamente solucionable con la aplicación de una operación básica como la adición.

En relación con la prueba 2 los estudiantes respondieron de las siguientes maneras.

Pregunta 1. <i>¿Cómo abordaste el trabajo que debías desarrollar?</i>
<ul style="list-style-type: none"> • Utilicé un problema que ya había resuelto. (3) • Como no sabía qué dato iba ahí, puse los datos en relación para saber cuáles eran los datos intermedios. (5)
Pregunta 2. <i>¿Cuál fue el elemento que te requirió mayor atención durante el trabajo?</i>
<ul style="list-style-type: none"> • Hallar los datos intermedios. (8)
Pregunta 3. <i>¿Cuándo decidiste que el trabajo estaba completo?</i>
<ul style="list-style-type: none"> • Cuando llegué al resultado, a la respuesta.(2) • Cuando hice todos los pasos. (4) • Cuando vi que era lógico el resultado y que el razonamiento estaba bien. (2)

Nuevamente, los estudiantes reportan la utilización de modelos de problemas ya resueltos para abordar la actividad. En este caso, dadas las características específicas del contexto del problema, en particular, de la pregunta del problema, los estudiantes ven la necesidad de recurrir a estrategias alternativas para poder aplicar bien el método y dar

coherencia a los pasos que siguen. Así mismo, manifiestan haber utilizado síntesis parciales para determinar los datos intermedios y facilitar la escritura del razonamiento.

En general, manifestaron que el dato auxiliar que les requirió mayor atención o que representó mayor dificultad fue, precisamente, el relativo a las *vuelatas en total* puesto que no surge de una relación directa entre los datos del problema o de una relación entre un dato del problema y uno implícito, es decir, es un dato de tercer nivel; y además, en la resolución del problema se partía de una pregunta que usualmente no se formulaba. En la imagen se muestra la respuesta que dio un estudiante frente a su trabajo sobre la prueba 2, se le solicitó reportarla por escrito dado el nivel de elaboración que ésta presentaba y poderla presentar como evidencia. Su traducción se registra a la derecha de la imagen.

Questo problema era particolare:
Si vedeva dal fatto che si doveva trovare un Resto unit., Ma, a parte questo, il problema non era particolarmente difficile.
Il Resto/amigo era il passo più difficile, ma si trovava applicando il concetto del ragionamento totale: n° oggetti = unitario, e il resto. Un po' era tratto da problemi anteriori.

Este problema era particular: Se veía en el hecho que se debía encontrar el *resto unitario*. Pero, aparte de eso, el problema no era particularmente difícil. El *resto/amigo* era el paso más difícil, pero se encontraba aplicando el concepto

$$\text{Total} \div \text{No. Objetos} = \text{Unitario}$$

Y el resto del razonamiento se podía sacar de problemas anteriores.

El estudiante es consciente de la diferencia del problema en relación con los que usualmente resuelve en el aula. Sin embargo, asocia el carácter unitario requerido en la pregunta a una ecuación cuya validez la da de hecho. Luego pone en evidencia la utilización de un modelo de un problema ya resuelto para completar el análisis, es decir, logra llevar la resolución del problema a un caso similar a los que con frecuencia resuelve.

En los casos que se reportan en la entrevista, la mayoría de estudiantes decide que el trabajo ha sido terminado cuando ha efectuado todos los pasos que se solicitan y en el orden en el que se solicitan. Advierten, sin embargo, que cuando utilizan los datos del problema directamente para hallar datos intermedios, a través de las síntesis parciales, lo hacen con el ánimo de tener la información que necesitan para escribir el razonamiento. Mientras en la encuesta aplicada al inicio del estudio respondían que con los datos y la comprensión del problema era suficiente para construir el razonamiento, a través de las entrevistas subsiguientes al desarrollo de la prueba 2, se pudo constatar que, en su mayoría, los estudiantes requieren de un conocimiento sobre cómo y con qué se resuelve concretamente el problema antes de representar el razonamiento analítico.

Las siguientes preguntas, fueron formuladas en relación con la resolución de PAEV como actividad que se les solicita en la clase de Matemáticas. En algunos casos, los estudiantes mostraron apartes de su trabajo en los cuadernos para aclarar las respuestas que emitían.

<p><i>Pregunta 4. Cuando el profesor te solicita resolver un problema, ¿qué entiendes que debes hacer?</i></p>
<ul style="list-style-type: none"> • Significa que tengo que leer, sacar los datos, hacer el razonamiento partiendo de la pregunta, hacer los cálculos y responder a la pregunta (4). • Tengo que leer y entender cómo se puede resolver, para poder hacer el razonamiento y los cálculos y así responder a la pregunta (1). • Tengo que leer y saber las operaciones entre los datos para conocer los datos intermedios y hacer las operaciones que hay que hacer (3).

Todos los estudiantes hacen énfasis en la lectura comprensiva del texto como primer paso de la actividad. Todos dan cuenta de que realizan varios tipos de lectura, una primera global con la que captan el contexto general del problema; una segunda que tiene por objetivo identificar bien los datos y las relaciones entre ellos; y lecturas subsiguientes sobre partes específicas del texto, con el objetivo de esclarecer la relaciones entre los datos o encontrar pistas sobre la manera en que se pueden encontrar los otros datos necesarios para la resolución.

En las respuestas de los estudiantes se identifica la recurrencia a los pasos del método de análisis – síntesis como manera de caracterizar la actividad de resolver PAEV. Aunque la

mitad de los estudiantes entrevistados identifican esta actividad a partir del algoritmo que caracteriza el método, varios de ellos ilustraron maneras diferentes de enfrentar la resolución de un problema, sobre todo en el caso en que éste es de un contexto poco familiar. La otra mitad, sin embargo, coincide en que antes de aplicar los elementos del método, deben saber o tener idea de cómo resolverlo, bien sea utilizando las síntesis parciales o leyendo comprensivamente.

Si bien los estudiantes parecen comprender que la resolución de un problema es una actividad que se puede llevar a cabo con la aplicación del método en cuestión, lo que logran verbalizar muestra exactamente lo contrario: la resolución del problema es un requisito para poder aplicar correctamente el método, puesto que es lo que en realidad solicita el profesor cuando propone resolver un problema aritmético. Es de notar que, nuevamente, hay ausencia de estrategias adicionales o actividades complementarias que permitan a los estudiantes comprender y actuar sobre el enunciado del problema que se propone.

La concepción de los estudiantes puede leerse entonces de la manera siguiente: Resolver un PAEV significa aplicar una serie de pasos para obtener como resultado la respuesta a la pregunta. El orden en que se aplican estos pasos, si bien está prescrito en el método propuesto desde la programación curricular, resulta aleatorio dependiendo de las herramientas reales con las que cuenta cada estudiante.

Pregunta 5. *Cuando resuelves un problema, ¿qué significa partir de la pregunta?*

- Significa que tengo que saber primero a dónde tengo que llegar. (3)
- Significa que tengo que saber cómo hallar la incógnita con otros dos datos que se parezcan a los del problema. (2)
- Significa que primero tengo que hacer todas las operaciones en la mente para llegar a la pregunta. (1)
- Significa que lo primero que tengo que escribir en el razonamiento es la pregunta y luego tengo que pensar cómo la respondería si supiera todo lo del problema. (2)

Esta pregunta apuntaba al carácter analítico del razonamiento que se solicita al inicio de la resolución de cada PAEV puesto que con esta expresión, *partir de la pregunta*, se ha

caracterizado el método que se usa. Los estudiantes identifican, en general, que esto significa identificar y nominar correctamente la magnitud que se solicita en la pregunta, para relacionarla con otros datos. Agregan que esto no siempre es fácil puesto que hay problemas en los que los datos que hay que relacionar con la pregunta son inmediatos, porque se parecen a otros problemas ya resueltos o porque los problemas tratan de cosas que ellos conocen bien; sin embargo, hay otros en los que no hay indicios de cuáles datos sirven para relacionar la incógnita, o de cómo llegar los que se han seleccionado para determinar la incógnita. En el segundo caso, pese a que parten de la pregunta, escribiéndola en la parte superior del razonamiento, se ven obligados, generalmente, a volver sobre los datos y operar entre ellos para hallar otras magnitudes que se parezcan más a la solicitada.

Pregunta 6. ¿Cuál elemento de la resolución de problemas te requiere mayor atención?

- Entender el texto. (1)
- Hacer el razonamiento porque tengo que pensar bien qué escribir para que las operaciones me queden bien. (2)
- Hallar los datos intermedios. (5)

La mayoría de estudiantes encuentran mayor complejidad en la construcción de la cadena deductiva desde la pregunta a los datos, es decir, en la escritura del razonamiento analítico. Esto se debe a que, como lo manifiestan en sus justificaciones, deben trabajar con entidades conocidas y desconocidas, y relacionarlas por igual. La determinación y nominación adecuada de estas entidades desconocidas, datos auxiliares, resulta ser uno de los grandes desafíos a los que se enfrentan cuando resuelven un problema, en tanto deben hacer uso de ellos para la construcción de la cadena deductiva y poder construir el plan de acción. Sólo cuando las relaciones entre las magnitudes involucradas han sido estudiadas con antelación los estudiantes logran aplicarlas para resolver el problema. Ante un problema de contexto nuevo, los datos intermedios pueden no ser inmediatos, de hecho, no tendrían muchas posibilidades para determinarlos.

De nuevo, pareciera que los estudiantes prestaran mayor atención a que el algoritmo del método sea coherente en cada uno de sus elementos, mientras que la actividad resolutoria

se ve aquí como un prerrequisito para poder configurar la información en el orden y con las características que se solicita, y no como el resultado de la actividad.

Pregunta 7. Cuando te encuentras atascado en la resolución de un problema, ¿a qué estrategia recurre?

- Miro los datos para ver cuáles no he utilizado. (3)
- Hago operaciones entre los datos para saber qué otros datos puedo tener. (3)
- Pienso en un problema que se le parezca y que sepa cómo se resuelve. (2)

Las respuestas dadas por los estudiantes dejar ver que ante una dificultad en el proceso de resolución de un PAEV, los estudiantes, en general, recurren a las síntesis parciales como forma de identificar los datos auxiliares que les faciliten el análisis. Esto además implica el reconocimiento de que en la resolución de PAEV, los atascos posibles tienen lugar en la descomposición analítica del problema.

También se reporta el hecho identificado en la prueba 2, en relación con la utilización de modelos de problemas ya resueltos como estrategia para la resolución de un problema que genere dificultad. En particular, la recurrencia a los datos no utilizados deja ver que los estudiantes han asimilado el hecho que un problema debe contener la información suficiente y necesaria para poder ser resuelto, lo cual es coherente con la concepción que se maneja de PAEV; sin embargo, dado que esta clasificación sobre los problemas matemáticos no ha sido objeto de estudio en el aula, los estudiantes podrían entender que, en general, el problema debe tener la información que se requiere y siempre es posible resolverlo.

Si bien estas estrategias resultaban productivas para ellos, en tanto los enunciados propuestos de los problemas cumplen siempre con las características de un PAEV, la actividad analítico – sintética de los estudiantes sólo permite recurrir a elementos previos en la ejecución del algoritmo como estrategia para superar dificultades e, inclusive, para validar lo hecho. Es además notorio, que en sus intervenciones ningún estudiante trajo a colación la utilización de un método diferente, de una estrategia alternativa, que les permitiera superar el atasco en el proceso.

3.3.4 ANÁLISIS PARCIAL DE LOS RESULTADOS

A través de la entrevista los estudiantes verbalizaron las acciones específicas que desarrollaron en el proceso de resolver las pruebas anteriores, así como la manera en que conciben aspectos particulares de la resolución de PAEV con el método de análisis – síntesis.

En relación con las pruebas aplicadas pusieron en evidencia las dos estrategias que utilizan con mayor frecuencia en las actividades que tienen que ver con la resolución de PAEV; a saber, (i) síntesis parciales para identificar datos auxiliares, y (ii) retomar modelos de problemas ya resueltos para aplicarlos en problemas de estructura similar. Estas estrategias tienen que ver con la aplicación correcta del método, en tanto las usan para poder dar el paso sucesivo en el algoritmo del método, aunque dichas estrategias no siempre vayan en concordancia con el sentido de la aplicación del análisis – síntesis en términos de lo requerido desde el currículo propuesto.

Partir de la pregunta, como indicación del carácter analítico del razonamiento que se requiere inicialmente, evoca en los estudiantes la necesidad de conocer la manera de resolver el problema antes de representar su resolución con los pasos del método. Lo que comprenden entonces, acerca del método, son una serie de convenciones para organizar la información de manera lógica, en tanto corresponde a un diagrama deductivo, para presentar el proceso seguido en la resolución del problema y no para crear un procedimiento de resolución.

Los estudiantes generalmente encuentran dificultad en la identificación de los datos auxiliares, sin embargo, sus estrategias no se remiten a la comprensión del problema sino a la recursión de elementos ya conocidos, por experiencia previa con otros problemas o en el algoritmo analítico – sintético. Cuando estos datos auxiliares no se conocen, porque las relaciones entre las magnitudes no son claras o no han sido construidas, los estudiantes carecen de opciones para enfrentar la resolución del problema de la forma en que se solicita.

La validez del trabajo la establecen en términos de la concreción de todos los pasos correspondientes al algoritmo del método. Evalúan además la correspondencia entre lo registrado en el enunciado sincopado con lo representado en el razonamiento analítico y sintético. Sin embargo, rara vez hacen referencia al contexto del problema como elemento decisivo a la hora de dar validez a los resultados obtenidos y, aunque hayan desarrollos completamente lógicos y coherentes con respecto a las relaciones identificadas entre las magnitudes, los errores de cálculo en la aplicación de los algoritmos de las operaciones seleccionadas para resolver el problema, no son sometidos a validación y, por ende, se permite la filtración de errores sustanciales en la resolución del problema.

4 CARACTERIZACIÓN DEL CURRÍCULO LOGRADO CON RESPECTO AL MÉTODO DE ANÁLISIS – SÍNTESIS EN LA RESOLUCIÓN DE PAEV

En la resolución de PAEV con el método de análisis – síntesis que se utiliza en el Colegio Italiano Leonardo da Vinci, los estudiantes deben seguir una serie de pasos que han sido convenidos a partir de consideraciones teóricas sobre las Matemáticas y su didáctica.

Inicialmente, los estudiantes reconocen cuáles son las magnitudes que están involucradas en el enunciado del problema y las nominan utilizando un lenguaje sincopado que les permite sintetizar la información más relevante. Con respecto a este primer paso, los estudiantes no manifiestan tener dificultades ni las demuestran en la práctica, así que en general, puede decirse que el ejercicio constante sobre la resolución de problemas les ha permitido llegar a este tipo de análisis, elemental en palabras de Kalmykova, que les permite extraer del texto del problema la información relevante, correspondiente a las magnitudes y sus medidas, para la resolución del PAEV. Para lograrlo, los estudiantes utilizan diferentes tipos de lectura haciendo barridos sobre el enunciado para determinar de manera correcta los datos que serán necesarios en el proceso. En ninguno de los casos reportados, los estudiantes utilizan estrategias alternativas para la comprensión del enunciado de un problema (*v.g.* dibujos, diagramas), aunque éste no sea familiar para ellos.

Luego de haber identificado los datos y construido el enunciado sincopado, los estudiantes deben representar el razonamiento analítico, partiendo de la pregunta, de manera tal que logren construir un plan de acción para resolver el problema. Sin embargo, el algoritmo utilizado por los estudiantes ilustra unas acciones diferentes a las propuestas desde el método que dan lugar a otras posibilidades de razonamiento. En particular, para un buen número de estudiantes fue necesaria la utilización de las síntesis parciales como

ayuda para identificar los datos auxiliares y así representar de manera correcta el razonamiento analítico.

Los estudiantes involucran estas síntesis parciales de la siguiente manera: Una vez leído el enunciado del problema y construido el enunciado sincopado, identifican primero, y en ocasiones representan, relaciones operacionales entre los datos y determinan la manera en que los resultados de estas operaciones, datos emergentes, se relacionan entre sí para llegar a la incógnita principal del problema. Algunos relacionan con líneas los datos en el mismo enunciado sincopado, otros construyen un esquema invertido en relación con el analítico, denominado cadena, en el cual representan la resolución del problema partiendo de los datos. En ambos casos, esta actividad produce como resultado la escritura de nuevos datos, emergentes, que responden a preguntas que pueden considerarse intermedias o auxiliares en la medida en que conducen a la pregunta del problema.

Si bien la identificación de las relaciones operacionales partiendo de los datos, y su representación, facilitan la escritura del razonamiento analítico, las síntesis parciales no se identifican en sí como una estrategia que ayude al proceso de análisis puesto que va en contravía. Sin embargo, sí ayuda a los estudiantes a descubrir las magnitudes resultantes de relacionar operacionalmente los datos del enunciado, dicho de otro modo, estas síntesis parciales ayudan a los estudiantes a identificar los datos auxiliares del problema como elementos que utilizan en los pasos posteriores.

De todas formas, es interesante que la estrategia de las síntesis parciales se encuentre en consonancia, en su principio, con lo promulgado por el profesor Federici, quien en su propuesta resalta la importancia del reconocimiento de las magnitudes involucradas en el enunciado del PAEV y de sus relaciones, como punto de partida para la resolución *asequible y eficaz* del problema. Por tanto, es natural pensar que si un niño enfrenta la resolución de un problema en el que no conoce la naturaleza de las magnitudes involucradas, no podrá establecer las relaciones operacionales entre ellas así que no

podrá seguir ningún plan de acción para la resolución. Este elemento reconocido en la actividad del estudiante cuando resuelve un PAEV, que puede provenir o no de sugerencias del profesor, si bien no se corresponde con alguno de los pasos del algoritmo analítico – sintético del método, se consolida en una estrategia a la que los estudiantes recurren cuando no encuentran la manera de representar el análisis directamente. En este aspecto la relación entre el currículo propuesto y el logrado no es de correspondencia y la estrategia no apunta hacia la comprensión del problema sino a la aplicación del método.

Es interesante que ninguno de los estudiantes que participaron en las pruebas utilizara otras representaciones icónicas o gráficas para intentar comprender mejor el enunciado del problema. Como se identificaba en el momento de las hacer las observaciones iniciales de clase, es probable que los estudiantes no consideren como válidas otras estrategias para la comprensión vía a la resolución del PAEV, puesto que se dedican exclusivamente a aplicar los pasos del método que se les solicita. En consonancia con lo encontrado en los estudios soviéticos, el método de análisis – síntesis no permite a los niños estudiantes hacer explícitas las diferencias semánticas de los problemas dispuestos para la resolución en tanto se propone un mismo tratamiento para todos los PAEV, así como tampoco les permite la construcción de estrategias alternativas o complementarias en el proceso de resolución de un PAEV, sobre todo en el caso en que éste no es familiar.

A este hecho se suma que el método aporta otra serie de requerimientos particulares que, agregados a las ya conocidas en el ámbito de la resolución de problemas, oscurecen el panorama de la comprensión del estudiante sobre los problemas. Así, deben identificar las relaciones operacionales entre las magnitudes ya nominadas, y establecer cuáles son las magnitudes emergentes o datos implícitos del problema, y las relaciones entre éstas, en un estilo de razonamiento analítico.

Los estudiantes también utilizan con frecuencia la analogía, inclusive en casos en los que no es pertinente. En la actividad de resolver problemas nuevos o de contexto no familiar, los estudiantes repiten los modelos aprendidos sobre problemas resueltos en clase,

memorizando relaciones específicas para diagramas particulares. Sin embargo, las relaciones que establecen entre los datos terminan siendo mecánicas y no se remiten al caso particular del problema que hay que resolver sino al problema del cual surgió el modelo. Así, los problemas resueltos en clase funcionan como ejemplos en los que el método es usado y luego, en la resolución de otros problemas, los estudiantes deben repetirlos para dar cuenta de la aplicación correcta del análisis – síntesis. Con esto se confirma que lo que los estudiantes ejercitan, con mayor frecuencia, es la manera en que los pasos se articulan para representar el procedimiento de resolución del problema. En cambio, ante un problema nuevo o complejo, el método usado por ellos difiere sustancialmente de lo que se presume desde la teoría.

A partir de lo anterior, es posible afirmar que el método de análisis – síntesis aparece en el currículo logrado con una naturaleza dual, como objeto de aprendizaje y como instrumento para la resolución de los PAEV. Como objeto de aprendizaje, los estudiantes se interesan por configurar adecuadamente cada uno de los elementos que lo componen, utilizando estrategias que les permitan llevar a cabo cada paso (v.g. relectura para identificar y nominar los datos del problema, síntesis parciales para identificar los datos auxiliares y cadenas sintéticas para escribir el razonamiento analítico). Como instrumento, los estudiantes configuran la información del problema, representando en diagramas o bloques de ecuaciones (analíticos o sintéticos) el proceso que permite su resolución, y además, justifican la validez del camino seleccionado para la resolución del PAEV en términos de la aplicación de todos los pasos del método. Sin embargo, a través de las pruebas y entrevistas se pudo verificar que los estudiantes necesitan conocer la manera de resolver el problema, antes de representar su solución con el método de análisis – síntesis.

Los estudiantes deben aprender durante el proceso a resolver PAEV y a utilizar adecuadamente el método de análisis – síntesis como algoritmo para la representación del procedimiento utilizado en la resolución. Sin embargo, el orden en el que se dan o en el que se deberían dar estos aprendizajes no está claro puesto que no se identifica de

manera contundente cuál es el aprendizaje que precede a cuál. Esto también se debe a las características del currículo propuesto en relación con el momento en que el método es presentado a los estudiantes. En general, el método es involucrado en el trabajo en aula cuando los estudiantes han abordado problemas de una operación con adición, sustracción, multiplicación y división, y se han familiarizado con ciertos contextos de problemas. Empero, el método se usa contemporáneamente con la resolución de problemas nuevos de varias operaciones, ante lo cual, los estudiantes recurren a la repetición de los modelos de problemas ya resueltos.

Los resultados que se coligen de la actividad de los estudiantes dejan ver que la adaptación escolar del método de análisis – síntesis en la resolución de PAEV se aleja considerablemente de la propuesta teórica, currículo propuesto. Mientras que en la descripción del método se hace alusión y se da relevancia al carácter analítico del método y se deja la síntesis como el paso posterior al análisis en el que se estructura la resolución numérica del problema, en la actividad de los estudiantes se identifica que el análisis y la síntesis van ligados contemporáneamente. Uno no es el paso siguiente al otro. Por el contrario, las síntesis parciales los van ayudando a identificar aquellas magnitudes desconocidas con las que completan el análisis, en el caso de los PAEV nuevos para los estudiantes. Este hallazgo tiene sentido si se retoma la premisa principal de los estudios soviéticos que se identifica en el estudio de Kalmykova, y que tiene que ver que considerar al pensamiento como analítico y sintético, no hay manera de separar estos dos procesos. Por tanto, manifestar que la resolución de problemas se trata partiendo de la pregunta, como se describe en el currículo propuesto, resulta muy comprometedor y utópico cuando las relaciones entre las magnitudes no han sido identificadas por los estudiantes o cuando el contexto del problema no les permite establecerlas con familiaridad.

5 CONCLUSIONES

En el momento de formular estudio, la principal motivación surgió de la identificación de una serie de problemáticas docentes asociadas a la resolución de PAEV con el método de análisis - síntesis. Las observaciones de clase realizadas, el estudio de los documentos rectores que sustentan el currículo propuesto y las discusiones que tuvieron lugar en las reuniones de área fueron el punto de partida que permitió constituir el objeto de estudio. Los hallazgos de los estudios soviéticos en relación con el rol que desempeña el método analítico – sintético en el aula de matemáticas en el contexto de la resolución de PAEV, fueron el principal referente investigativo de donde se retomaron algunas de las actividades aplicadas por Kalmykova y algunas de las principales apreciaciones con las que concluía sus estudios, las cuales fueron retomadas en esta como hipótesis y, a su vez, dieron pie a la formulación de otras nuevas.

El desarrollo de este estudio arroja dos tipos de conclusiones. Por una parte, es posible emitir una serie de consideraciones en relación con los objetivos específicos del estudio que, se pretende, sirvan de referente conceptual para las discusiones académicas del grupo de profesores de matemáticas del contexto educativo específico en el que se gestó el estudio. De otro lado, se expresan otras conclusiones relacionadas con el aporte real que ha hecho el desarrollo de este estudio tanto a la formación profesional del autor, como al enriquecimiento académico de las discusiones sobre la estructura curricular del programa de matemáticas de la *scuola primaria* del Colegio Italiano Leonardo da Vinci. Las segundas, caracterizadas como impacto real del estudio.

5.1 EN RELACIÓN CON LOS OBJETIVOS DEL ESTUDIO

La resolución de problemas en el aula de Matemáticas es un espacio de construcción de aprendizajes significativos. La manera en que esta actividad es concebida y la naturaleza de los medios e instrumentos con los que se lleva a cabo tienen gran influencia en la determinación y caracterización de dichos aprendizajes. Así, cuando los problemas

intervienen en el aula de Matemáticas como detonantes del conocimiento matemático, por ejemplo en el contexto de las situaciones problemáticas, se construyen aprendizajes sobre los contenidos matemáticos basados en la utilidad que resultó tener para una situación particular; en cambio, cuando entran en el contexto de la ejercitación de algoritmos o de la puesta en práctica de lo aprendido sobre conceptos y operaciones matemáticas, los aprendizajes resultantes tienen otra naturaleza que, también, resulta ser provechosa para el proceso de formación del estudiante.

Cuando los estudiantes se ven en la tarea de resolver problemas aritméticos con una característica específica, dada por un método utilizado o por la misma concepción que se tenga sobre la resolución de problemas, requieren de una serie de conocimientos, conceptuales, procedimentales y metacognitivos, que deben articularse para que la actividad pueda llevarse a cabo con éxito. La utilización del método de análisis – síntesis, justificada en el contexto del descubrimiento científico, da luces sobre la manera en que se podría generar una heurística nueva con la cual los estudiantes puedan resolver problemas aritméticos de tal forma que su pensamiento lógico sea también influenciado.

Sin embargo, la adaptación escolar que se ha hecho en la institución referida como contexto del estudio, así como aquella relatada en el contexto de los estudios soviéticos, muestra que, por el contrario, el método clásico no sirve para aprender a resolver problemas nuevos, sino que en el camino del uso, los estudiantes lo han tenido que afinar con base en sus requerimientos, para que efectivamente encaje coherentemente en la resolución de problemas que aprenden a resolver por analogía o por recursividad en el método sintético.

Inclusive desde el punto de vista de las ciencias, Riemann anunciaba ya falencias en la concepción clásica del método de análisis – síntesis en tanto el camino natural de su aplicación no podía ser prescrito, sino que se amoldaba a unas características particulares del sujeto que estudia y del sistema en estudio o, en los términos de esta investigación, la aplicación del análisis o de la síntesis está supeditada a unas características de los sujetos

que resuelven los problemas, estudiantes, y del contexto en el que emergen los enunciados de los problemas.

Estas aseveraciones encontraron eco en los resultados de los estudios de Kalmykova, que concluyeron que la aplicación del método de análisis – síntesis tenía sentido cuando los problemas estudiados pertenecían a contextos familiares, mientras que en la resolución de problemas nuevos los estudiantes daban cuenta de un dominio pobre del método o, leído de otra manera, daban cuenta de la impertinencia del método frente a las condiciones que esos problemas tenían.

Aunque el método de análisis - síntesis, desde el punto de vista algorítmico, como secuencia de pasos, parecería ser pertinente independientemente del problema aritmético planteado, lo que se encuentra en la actividad de los estudiantes, que permite caracterizar el currículo logrado con respecto a la resolución de PAEV con este método, es que utilizan una serie de elementos que van en contravía del planteamiento del análisis – síntesis en el currículo propuesto. Sin embargo, estas nuevas rutas han permitido a los estudiantes resolver los problemas que con frecuencia les son solicitados en la clase de Matemáticas.

En la actividad de resolver PAEV los estudiantes se ven en la necesidad de desarrollar dos tareas: resolver el problema y representarlo con los elementos requeridos. Quizás debido a la insistencia que se hace desde la enseñanza sobre los elementos particulares del método que deben ser aplicados, sólo hasta cuando han desarrollado ambas tareas sienten que han cumplido con el deber. Lo que llama la atención y, se debe tener en cuenta como elemento de discusión académica en el grupo de trabajo del área, es que los elementos que causan dificultades a los estudiantes en la resolución de problemas, están más ligados a la aplicación correcta del método que a la comprensión que puedan tener sobre el enunciado del problema y las operaciones que en él tienen sentido y significado.

Consecuentemente, la adaptación escolar del método no ha permitido a los estudiantes la construcción de estrategias alternativas o complementarias en el proceso de resolución de

un PAEV. De hecho, como se vio en los resultados de las pruebas, las estrategias que utilizan tienen por objetivo aplicar de manera adecuada el método antes que comprender mejor el enunciado del problema. Es paradójico que, sin embargo, el método de análisis – síntesis sea con frecuencia adjetivado como estrategia para la resolución de problemas, aun cuando éste no aporta un plan de resolución para problemas específicos y, en su lugar, presente un mismo tratamiento para todos los PAEV que, en ocasiones, resulta más complejo que la versión meramente sintética de la resolución del problema que también resulta pertinente y provechosa.

Es posible que una revisión del método, que implique modificaciones y aportes pueda optimizar los resultados de los estudiantes en términos de la comprensión que ganen sobre las ideas matemáticas. Sin embargo, hasta tanto no haya claridad desde el currículo propuesto sobre el rol del método de análisis – síntesis en el aula de Matemáticas, la aplicación del método en el aula y la insistencia que sobre éste se haga producirá situaciones como la actual, en la que los estudiantes prestan mayor atención a seguir unos pasos prescritos, que a la validez o pertinencia del trabajo que realizan en relación con el PAEV que deben resolver. Paraphrasing Puig y Cerdán, al no haber posibilidad de escogencia de estrategias o rutas para la resolución de PAEV, se limita el pensamiento creativo de los estudiantes y, entonces, la competencia de resolución de problemas no se puede lograr, pues lo que se logra es un conocimiento fáctico de la aplicación de un método cuando éste es asequible.

De hecho, frente a la resolución de problemas que tienen una estructura familiar para los estudiantes, la actividad analítico – sintética consiste en una repetición de modelos aprendidos sobre problemas ya resueltos, es decir, utilizan la analogía para evocar esquemas de resolución y acomodarlos a la situación actual. Pero, ante un problema nuevo o complejo el método usado por ellos difiere sustancialmente de lo que se presume desde la teoría, en tanto, en un gran número de casos, utilizan síntesis parciales cuando deberían encontrar las incógnitas auxiliares analíticamente.

Además de lo ya mencionado, la instrucción sobre el análisis puede permitir el desarrollo de un tipo de razonamiento útil para la resolución de PAEV pero no es suficiente en relación con el objetivo de enseñar a resolver problemas en Matemáticas, pues, dado que requiere de mucho tiempo de aplicación, el tratamiento que se pueda hacer de otros problemas sería mínimo. Efectivamente, se requieren actividades extra que, desde la enseñanza, permitan a los estudiantes aproximarse gradualmente al tipo de análisis que se requiere para la resolución de problemas. En consecuencia, se requiere que desde la instrucción se provean las actividades que permitan a los estudiantes comprender el contexto del problema, entendido éste como el mundo en el que coexisten las magnitudes involucradas y se relacionan lógicamente a través de operaciones matemáticas.

5.2 IMPACTO DEL ESTUDIO

El desarrollo del estudio aporta herramientas importantes para el ejercicio de la profesión de educador matemático. A partir de este estudio se adelanta una propuesta específica de reformulación del currículo propuesto de matemáticas para la *scuola primaria* en la que se hagan evidentes los elementos resaltados como importantes en los resultados del estudio. Esta identificación permitirá además desarrollar un estudio detallado con el grupo de profesores de matemáticas de la institución en la que gestó el estudio, para someter a otros referentes de interpretación los resultados obtenidos y, así, contribuir a la formación avanzada, continuada y permanente de los profesionales de la educación matemática.

Así mismo, la socialización de resultados parciales, tanto en un evento exclusivo de la universidad como en un evento a nivel nacional permitió configurar la información sistematizada hasta esos momentos y reflexionar nuevamente sobre la pertinencia real y disciplinar del estudio. Tanto en el contexto de la universidad como en el contexto de un evento nacional, la socialización de los trabajos investigativos como este permite validar

académicamente las adquisiciones y resultados con miras a generar un impacto en el contexto real inmediato en el que se gestan las iniciativas investigativas.

La presentación de los resultados parciales al grupo de profesores del área de Matemáticas del Colegio Italiano Leonardo da Vinci fue el espacio propicio para proponer una estrategia que permita, desde el currículo propuesto, dar cuenta de objetos de aprendizaje asociados a la resolución de problemas en Matemáticas en general. De esta forma, se presentó al grupo de profesores un instrumento de trabajo a partir del cual los estudiantes tendrían la oportunidad de resolver problemas que no necesariamente correspondan a la estructura de los PAEV. La inclusión de estos problemas diferentes (*v.g.* problemas adivinanza, problemas de lógica, acertijos, de posibilidades, etc.), ayudará a que los estudiantes amplíen la concepción que tengan sobre los problemas matemáticos y les implicará generar estrategias, probar alternativas, en general, adquirir destrezas adicionales que el método de análisis – síntesis no les permite.

La labor, que comenzó desde la identificación de las problemáticas docentes asociadas a una inquietud particular en un contexto educativo específico, permitió reconocer, confrontar, validar y cuestionar diferentes marcos teóricos de interpretación que se pueden asociar a las situaciones que se viven en el ejercicio cotidiano de la labor. Así mismo, posibilitó un cuestionamiento positivo sobre el deber ser de las prácticas educativas y lo que en realidad sucede, encontrando, en las divergencias del deber y del ser, una fuente rica de situaciones que problematizadas desde el ámbito de la Educación Matemática, pueden dar origen a conocimiento profesional nuevo y válido.

En la formación inicial del educador matemático, la mayor parte del conocimiento práctico construido se basa en proyecciones sobre marcos teóricos desde los cuales se simulan los diferentes modelos de actuación de los estudiantes. Éstos, se validan en situaciones muy particulares y específicas en las prácticas pedagógicas que incluye la programación curricular para el caso de los programas en formación de educadores. El conocimiento sobre el currículo y, en particular, sobre el desarrollo curricular, como tarea del profesor

resulta más un conocimiento técnico sobre una serie de elementos que una programación curricular debe contener para ser pertinente. La actividad investigativa agrega a este conocimiento, la posibilidad de ponerlo en práctica, cuestionarlo y reformularlo en la medida en que, analizando las condiciones específicas de una población particular, y con un marco conceptual pertinente de referencia, se pueden modelar las problemáticas de aula para construir conocimiento profesional específico, en este caso, en el contexto del desarrollo curricular. Esta es una de las ganancias más significativas del desarrollo del estudio, poder proponer una alternativa de programación curricular con base en los resultados de la investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aguilar, M., Navarro., y Alcalde., C. (2003) El uso de esquemas figurativos para ayudar a resolver problemas aritméticos. *Cultura y Educación*, 15 (4), 385 – 397
- Barrios, O. y Guerra, A. (2006) formulación de unidades didácticas, un propósito de enseñanza en la formación de profesores. *Algunas consideraciones a partir de un estudio de caso*. Trabajo de grado. Universidad Pedagógica Nacional.
- Bell, A., Fischbein, E. y Greer, G. (1984) Choice of Operation in Verbal Arithmetic Problems: The Effects of Number Size, Problem Structure and Context. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 129-148.
- Caldwell, J. y Goldin, G. (1979) Variables Affecting Word Problems Difficulty in Elementary School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10, 323-336.
- Casajús, A. (2005) La resolución de problemas aritmético–verbales por alumnos con déficit de atención con hiperactividad. Tesis de Doctorado. Universidad de Barcelona. Descargado de <http://tdx.cat/handle/10803/1311>
- Castro, E., Rico, L. y Gil, F. (1992) Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las Ciencias*, 10, (3), 243 – 253
- Castro, E., y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización, en Rico, L. (coord.). La educación matemática en la enseñanza secundaria, pp. 95-124. Barcelona: ICE. Universidad de Barcelona - Horsori.
- Colegio Italiano Leonardo da Vinci (2007i) Programma di Matematica 2007 - 2008.
----- (2007ii) Verbali delle riunioni di Matematica. Documenti di lavoro.

D'Amore B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivísticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*, 35, 90-106.

Descartes, R. (1954) *The geometry of Rene Descartes*. Republication of the English Translation by David Eugene Smith and Marcia L. Latham (1925). Dover publications.

Domínguez, J. (1997) La resolución de problemas aritméticos verbales y los sistemas de representación semióticos. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*. No. 29. Marzo. pp. 19 – 34

Duval, R (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Universidad del Valle

Freudenthal, H. (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Granés, J. y Caicedo, L. (2002) *En este saber he creído, de este saber he vivido. Escritos del profesor Federici*. Universidad Nacional de Colombia.

Gucciardini, N. (2009) *Isaac Newton. On Mathematical certainty and method*. The MIT Press. Massachusetts.

Hiebert, J., Carpenter, T. y Moser, J., 1982, Cognitive Development and Children's Solutions to Verbal Arithmetic Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13. 83-98.

Istituzione Leonardo da Vinci. Filosofía educativa. Descargado de http://www.davinci.edu.co/contenido.php?id_contenido=1

Jerman, M. y Rees, R., 1972, Predicting the Relative Difficulty of Verbal Arithmetic Problems. *Educational Studies in Mathematics*, 4, 306-323.

Jitendra, A., Hoff, K., y Beck, M. (2002) L'uso degli schemi visivi per la risoluzione dei problemi matematici. *Difficoltà di apprendimento*, 8, (1), 9–20

Kalmykova, Z. (1975) Processes of analysis and synthesis in the solution of arithmetic problems. En J. Kilpatrick, I. Wirszup, E. Begle & J. W. Wilson (Eds.) *Soviet studies in the Psychology of learning and teaching in mathemstics*. (Vol XI)

Müller, Horst. (1987). *El programa heurístico general para la resolución de ejercicios*. En Boletín Sociedad Cubana de Matemática No. 9, La Habana. Descargado de <http://ia.comeze.com/subtemas/un1/1.7.html>

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Nesher, P. y Katriel, T., 1977, A Semantic Analysis of Addition and Subtraction Word Problems in Arithmetics. *Educational Studies in Mathematics*, 8, 251-270.

Nesher, P., Greeno, J. G. y Riley, M. S., 1982, The Development of Semantic Categories for Addition and Subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, 13, 373-394.

Nesher, P. (1999) El papel de los esquemas en la resolución de problemas de enunciado verbal. *Suma*, 31, 19 – 26

Panza, Marco (1997): "Introduction" and "Classical Sources for the Concepts of Analysis and Synthesis". EN: Otte, M. And M. Panza (eds) (1997): *Analysis and Synthesis in Mathematics. History and Philosophy*. Kluwer Academic Publishers, Boston.

Peltier, M. (2003) Problemas aritméticos. Articulación. Significados y procesos de resolución. *Educación Matemática, Diciembre, 15, (003), 29 – 55*

Polya, G., 1957, *How to Solve It*. 2nd. edition. (Princeton University Press: Princeton, NJ). (Trad. castellana, *Cómo plantear y resolver problemas*. (Trillas: México, 1965).)

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). Problemas aritméticos escolares. Madrid: Síntesis.

Puig, L. y Cerdán, F. (1990). La estructura de los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas. Conferencia plenaria invitada en la Cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, Acapulco, Guerrero, México, 8-10 de julio de 1990

- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares
- Raftopoulos, A. (2003) *Cartesian analysis and synthesis. Studies in History and Philosophy of Science*.
- Ritchey, T. (1996) *Analysis and Synthesis. On Scientific Method – Based on a Study by Bernhard Riemann*. Descargado de <http://www.swemorph.com/pdf/anaeng-r.pdf>
- Rico, L. (1995). *Conocimiento numérico y formación del profesorado*. Granada: Universidad de Granada.
- Santos Trigo, M. (2008) La resolución de problemas matemáticos: Avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. Conferencia presentada en el XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, XIX Seminário de Investigaçãõ em Educaçãõ Matemática, XVIII Encontro de Investigaçãõ em Educaçãõ Matemática.
- Socas, M. M., Hernández, J. y Noda, A. (1997). Clasificación de PAEV aditivos de una etapa con cantidades discretas relativas. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Actas del I Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 46-62). Salamanca: Universidad de Salamanca.
- TIMSS (1991) The Third International Mathematics and Science Study. Project Overview.
- Vergnaud, G. (1982) A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems, in Carpenter, Moser y Romberg, eds. (1982).
- Vergnaud, G. (1990) La teoría de los campos conceptuales. En, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10, No. 2, 3, 133 – 170. Traducción de Juan D. Godino.